Математик втілює ідеї у визначені форми... Краса і серйозність є критерієм досконалості цих форм.

Г. Харді

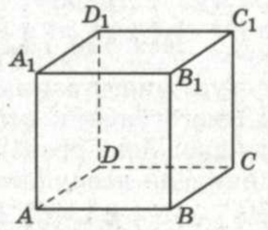
6 Геометричні тіла. Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл

ТЕМИ РОЗДІЛУ

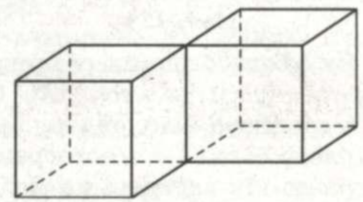
- Геометричні тіла та многогранники.
- Призма. Пряма і правильна призми. Паралелепіпед.
- Піраміда. Правильна піраміда.
- Площа поверхні призми, піраміди.
- Правильні многогранники.
- Тіла обертання. Циліндри. Конуси.
- Куля і сфера. Площина, дотична до сфери.
- Комбінації геометричних тіл.
- Площа поверхні циліндра, конуса, сфери.
- Об'єм призми та циліндра.
- Об'єм тіла обертання. Об'єм піраміди, конуса та кулі.

§ 27. Геометричні тіла та многогранники

Розглянемо фігури, які називають *геометричними тілами*. Прикладом геометричного тіла є *куб* (мал. 127). Його поверхня складається з шести рівних квадратів. Поверхня куба поділяє весь простір на дві просторові області: внутрішню (обмежену) та зовнішню (необмежену). Куб є об'єднанням його поверхні й обмежуваної нею внутрішньої просторової області. Кожне геометричне тіло має деяку поверхню та обмежену нею внутрішню просторову область. Вважається, що просторова область геометричного тіла складається з одного «шматка», а кожна точка геометричного тіла належить його просторовій області або поверхні.

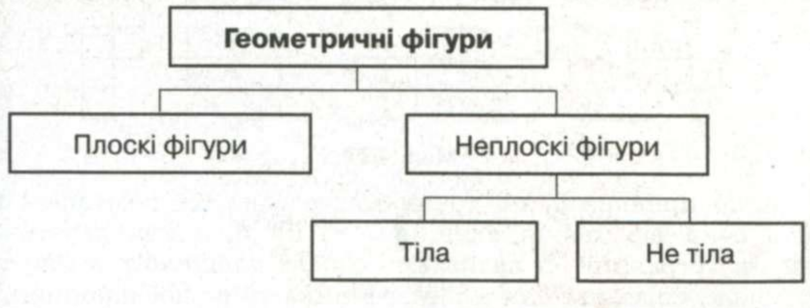


Мал. 127


Мал. 128

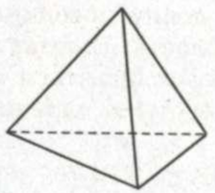
Кожна призма, піраміда, циліндр, конус, куля – це геометричні тіла. А плоска фігура, лінія, поверхня – не тіла, бо вони не мають просторових областей. Не вважають геометричним тілом також об'єднання двох кубів зі спільним ребром (мал. 128), бо ця фігура містить дві роз'єднані просторові області, а не одну.

Оскільки в геометрії не розглядають інших тіл, крім геометричних, то їх часто називають просто *тілами*. Усі геометричні фігури можна класифікувати так:

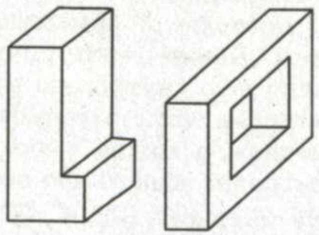


Геометричне тіло, поверхня якого складається з многокутників, називається *многогранником*. Ці многокутники, їх сторони та вершини називаються відповідно *гранями*, *ребрами* та *вершинами многогранника*.

Найменше число граней многогранника – чотири. Многогранник, який має лише чотири грані, називається *тетраедром* (грец. τετρας – чотири, εδρα – грань). Якщо всі ребра тетраедра рівні, його називають *правильним тетраедром* (мал. 129).



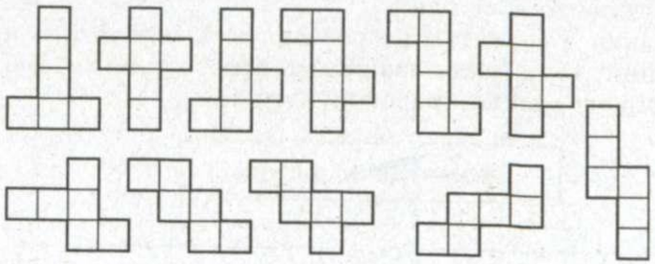
Мал. 129



Мал. 130

Як і багато інших геометричних фігур, многогранники бувають *опуклі* та *неопуклі*. Опуклий многогранник розміщений з одного боку від площини будь-якої його грані. Куб і тетраедр – опуклі многогранники. Приклади неопуклих многогранників наведені на малюнку 130.

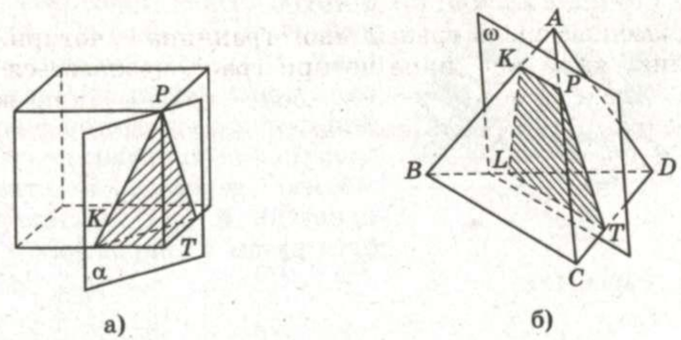
Якщо поверхню многогранника розрізати по кількох його ребрах і розгорнути на площині, то матимемо *розгортку* многогранника. Поверхню одного й того самого многогранника можна розгорнути по-різному. Наприклад, існує 11 різних розгорток куба (мал. 131). *Площею поверхні* многогранника називається сума площ усіх його граней; вона дорівнює площі розгортки даного многогранника.



Мал. 131

Якщо принаймні дві точки многогранника розміщені по різні боки від деякої площини, то ця площина перетинає цей многогранник. Її називають *січною площиною*, а множину точок, спільних для многогранника та січної площини, –

перерізом многогранника цією площиною. На малюнку 132, *а* зображено січну площину α, яка перетинає куб по трикутнику KPT.



Мал. 132

На малюнку 132, *б* зображено тетраедр $ABCD$ і січну площину ω; їх переріз – чотирикутник $KPTL$.

Щоб побудувати переріз многогранника площиною, треба задати цю площину: трьома точками, що не лежать на одній прямій; прямою і точкою тощо.

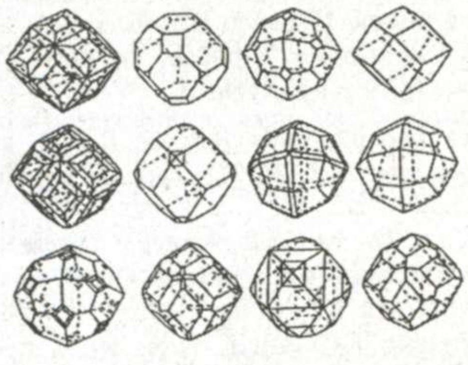
Цікаву теорему про співвідношення між числом граней Г, ребер Р і вершин В довів Л. Ейлер:

для будь-якого опуклого многогранника **В + Г – Р = 2.**

Перевірте це твердження для куба й тетраедра.

З різними, іноді дуже складними, матеріальними моделями многогранників мають справу каменярі, теслі, шліфувальники, стругальники, гранувальники, мінералоги, кристалографи та інші спеціалісти.

На малюнку 133 зображено природні форми кристалів гранату.



Мал. 133

Мал. 134

Відомий чеський письменник Карел Чапек, ознайомившись із кристалами та зрозумівши їх роль у житті людей, проспівав їм великий гімн – словом і малюнком (мал. 134): «І в людині захована сила кристалізації... Число і фантазія, закон і достаток – ось живі, творчі сили природи: не сидіти під землею деревом, а створювати кристали й ідеї, ось що означає бути разом з природою!»

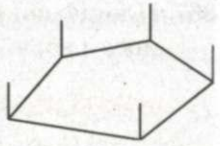
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке многогранник? Назвіть його елементи.
2. Як пов'язані поняття: геометричні фігури, тіла й многогранники? Покажіть на діаграмі.
3. Які многогранники називають опуклими, а які – неопуклими?
4. Що таке площа поверхні многогранника?
5. Сформулюйте теорему Ейлера про многогранники.

Виконаємо разом

1. Многогранник має 9 ребер. Доведіть, що його гранню не може бути п'ятикутник.

● **Розв'язання.** Припустимо, що многогранник має п'ятикутну грань, тоді з кожної вершини цієї грані виходить принаймні по одному ребру (мал. 135). Такий многогранник має не менше 10 ребер. Тобто, якщо многогранник має тільки 9 ребер, то його гранню не може бути п'ятикутник.

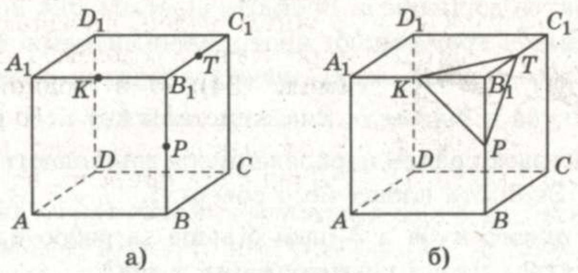


Мал. 135

2. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки K, P, T – середини ребер A_1B_1, BB_1 і B_1C_1 (мал. 136, *а*).

● **Розв'язання.** Точки K і P лежать у площині грані ABB_1A_1 куба і в січній площині (мал. 136, *б*). Отже, ці площини перетинаються по прямій KP. Січна площина перетинає квадрат ABB_1A_1 по відрізку KP. Аналогічно переконуємося, що дві інші грані куба січна площина перетинає по відрізках KT і TP.

Побудувавши їх, дістанемо трикутник KPT. Це і є шуканий переріз.



Мал. 136

Виконайте усно

861. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища.
862. Наведіть приклади фігур, які не є тілами.
863. Наведіть приклади многогранників з навколишнього середовища. Які з них опуклі, а які – неопуклі?
864. Назвіть многогранник, який має найменшу кількість граней. Скільки у нього вершин; ребер?
865. Скільки вершин, ребер і граней має куб?
866. Ребро куба дорівнює a. Чому дорівнює площа його поверхні?
867. Площа поверхні куба дорівнює 6 дм^2. Знайдіть довжину його ребра.

А

868. Намалюйте многогранник, який має 4 грані. Скільки ребер і вершин він має? Як називається такий многогранник?
869. Намалюйте многогранник, який має 5 граней і 5 вершин. Скільки ребер він має?
870. Намалюйте многогранник, який має 5 граней і 6 вершин. Скільки ребер він має?
871. Чи існує многогранник, відмінний від тетраедра, всі грані якого – трикутники?
872. Намалюйте розгортку правильного тетраедра, довжина ребра якого дорівнює 2 см. Знайдіть площу розгортки.

873. Площа поверхні правильного тетраедра – 36 см^2. Знайдіть довжину його ребра.

874. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть відстань між його: а) протилежними гранями; б) протилежними ребрами; в) найближчими вершинами; г) найвіддаленішими вершинами.

875. Ребро куба дорівнює a. Знайдіть довжину його діагоналі.

876. Площі трьох граней паралелепіпеда дорівнюють 2 м^2, 3 м^2 і 4 м^2. Знайдіть площу його поверхні.

877. Ребро одного куба в 3 рази більше за ребро другого. Як відносяться площі поверхонь цих кубів?

878. Як відносяться довжини ребер двох правильних тетраедрів, якщо площі їх поверхонь дорівнюють S_1 і S_2?

Б

879. Зобразіть дві фігури та розмістіть їх так, щоб: а) їх об'єднання було тілом; б) їх переріз був тілом; в) їх об'єднання не було тілом; г) їх переріз не був тілом.

880. Точка K – середина ребра AD тетраедра $ABCD$. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точки B, C і K.

881. Довжина ребра правильного тетраедра дорівнює a. Побудуйте його переріз площиною, що проходить через середини трьох ребер, які виходять з однієї вершини. Знайдіть периметр і площу перерізу.

882. Довжини трьох ребер прямокутного паралелепіпеда, що виходять з однієї вершини, дорівнюють 6 см, 6 см і 8 см. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через середини цих ребер, і знайдіть його периметр.

883. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через: точки A, B_1 і D_1; точки A, C та середину ребра DD_1.

884. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте переріз його площиною, яка проходить через точки A, B_1 і C. Знайдіть периметр перерізу, якщо $AB = 5$ дм.

885. $ABCD$ – правильний тетраедр; точки K і P – середини його ребер AB і BC. Знайдіть периметр перерізу даного тетраедра площиною, яка проходить через точки K, P і D, якщо $AB = 10$ см.

886. Перевірте на конкретних прикладах, що коли опуклий многогранник має В вершин, Г граней і Р ребер, то В + + Г – Р = 2.

887. Практичне завдання. Виріжте з цупкого паперу розгортку: а) куба; б) тетраедра.

Вправи для повторення

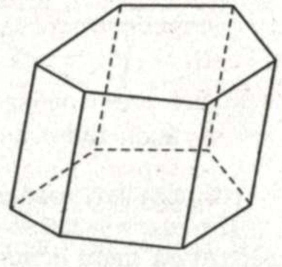
888. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
а) $\vec{a} = (3;\ 4;\ 5)$, $\vec{b} = (-3;\ 4;\ 5)$; б) $\vec{a} = (1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b} = (-1;\ 0;\ 5)$.

889. Знайдіть середину відрізка MN, якщо $M(2;\ 4;\ -8)$, а $N(-2;\ 6;\ 0)$.

890. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо його вершини лежать у точках $A(0;\ 4;\ 0)$, $B(4;\ 0;\ 0)$ і $C(0;\ 0;\ 4)$.

§ 28. Призми

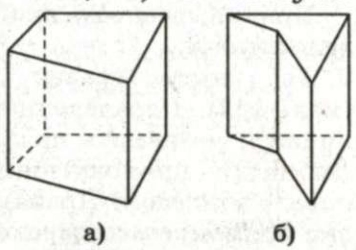
Многогранник, у якого дві грані – рівні n-кутники, а решта n граней – паралелограми, називається *n-кутною призмою* (мал. 137). Два рівні n-кутники, про які йдеться в означенні, називають *основами призми*. Їх відповідні сторони попарно паралельні, тому основи призми лежать у паралельних площинах. Усі грані призми, які не є основами, та ребра, які не є сторонами основ, називають відповідно *бічними гранями* та *бічними ребрами* призми.



Мал. 137

Призму називають *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні до площин основ. Усі інші призми називають *похилими*. *Висота призми* – відстань між площинами її основ. Висота прямої призми дорівнює довжині її бічного ребра.

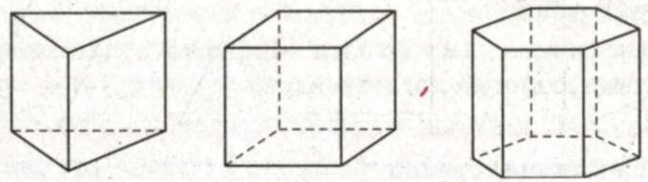
Призми бувають *опуклі* (мал. 138, *а*) й *неопуклі* (мал. 138, *б*). Призму називають *правильною*, якщо вона пряма і її основою є правильний многокутник.



а) б)

Мал. 138

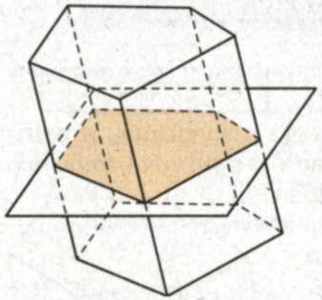
Усі бічні грані прямої призми – прямокутники. На малюнку 139 зображено правильні трикутну, чотирикутну й шестикутну призми. Кожна правильна призма опукла. Усі бічні грані правильної призми – рівні прямокутники.



а) б) в)

Мал. 139

Переріз призми площиною, яка проходить через її бічне ребро та діагональ основи, називають *діагональним перерізом*. Діагональний переріз кожної призми – паралелограм, а прямої призми – прямокутник. Діагоналлю призми називають діагональ її діагонального перерізу. Січна площина, паралельна основам призми, перетинає її по многокутнику, який дорівнює основі (мал. 140).



Мал. 140

Площею бічної поверхні призми називають суму площ усіх її бічних граней.

Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на висоту:

$$S_б = P \cdot h.$$

(Спробуйте довести це твердження самостійно).

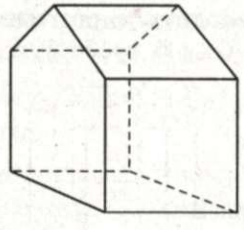
Площа поверхні призми дорівнює сумі площ її бічної поверхні та двох основ:

$$S = S_б + 2S_о.$$

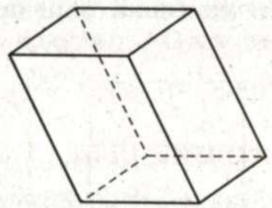
Чи можна вважати призмою зображений на малюнку 141 многогранник? Так, це призма, але поставлена на бічну грань. Назва фігури не залежить від того, як вона розміщена в просторі.

Призма, основою якої є паралелограм, називається *паралелепіпедом*.

Усі шість граней паралелепіпеда – паралелограми (мал. 142). Паралелепіпед, чотири грані якого є прямокутниками, називають *прямим*. Якщо всі шість граней паралелепіпеда – прямокутники, то його називають *прямокутним паралелепіпедом*. Правильна чотирикутна призма – окремий вид прямокутного паралелепіпеда. Прямокутний паралелепіпед, усі ребра якого рівні, називають *кубом*.



Мал. 141



Мал. 142

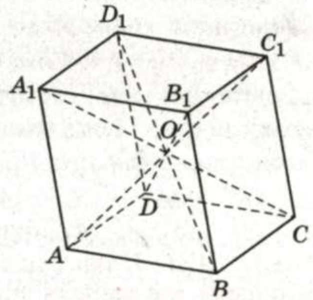
Співвідношення між різними видами паралелепіпедів подані на схемі (мал. 143).

Мал. 143

Теорема 6. ***Діагоналі кожного паралелепіпеда перетинаються в одній точці і діляться цією точкою навпіл.***

Доведення.

Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – довільний паралелепіпед (мал. 144). Доведемо, що серединами діагоналей AC_1, BD_1, CA_1 і DB_1 є одна й та сама точка. Ребра AB, DC, D_1C_1 і A_1B_1 рівні й паралельні, тому чотирикутники ABC_1D_1 і DCB_1A_1 – паралелограми. Діагоналі кожного паралелограма точкою перетину діляться навпіл. Нехай діагоналі AC_1 і BD_1 першого паралелограма перетинаються в точці O, а діагоналі DB_1 і CA_1 другого – в точці O_1. Точки O і O_1 – середини відрізків AC_1 і DB_1, які є діагоналями паралелограма ADC_1B_1, тому вони збігаються. Отже, всі



Мал. 144

чотири діагоналі паралелепіпеда проходять через одну й ту саму точку O і діляться нею навпіл. А це й треба було довести.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

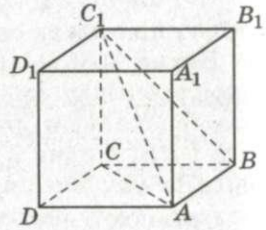
1. Що таке призма? Назвіть елементи призми.
2. Якими бувають призми?
3. Які призми називають прямими? А правильними?
4. Що таке діагональ призми? А діагональна площина; діагональний переріз призми?
5. Чому дорівнює площа бічної поверхні прямої призми? А непрямої?
6. Чому дорівнює площа поверхні довільної призми?
7. Сформулюйте означення паралелепіпеда. Назвіть його елементи.
8. Які бувають паралелепіпеди? Покажіть на діаграмі.
9. Який паралелепіпед називається прямим?
10. Сформулюйте і доведіть властивості діагоналей паралелепіпеда.

Виконаємо разом

1. Площа поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює 40 см^2, а площа бічної поверхні – 32 см^2. Знайдіть висоту призми.

● **Розв'язання.** Площі двох основ призми дорівнюють $40 - 32 = 8$ (см^2), а однієї – 4 см^2. Тому сторона основи дорівнює 2 см. Площа однієї бічної грані $32 : 4 = 8$ (см^2). Якщо висота призми дорівнює h, то $2h = 8$, звідки $h = 4$ (см).

2. Доведіть, що квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.



Мал. 145

● **Розв'язання.** Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – довільний прямокутний паралелепіпед (мал. 145). Трикутники ACC_1 і ABC прямокутні. Тому

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2 =$$
$$= AB^2 + BC^2 + BB_1^2.$$

Виконайте усно

891. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, які мають форму призми.

892. Дано правильну трикутну призму. Чому дорівнює двогранний кут при: а) ребрі основи; б) бічному ребрі?

893. Чому дорівнює площа поверхні куба з ребром завдовжки 2 см?

894. Три попарно непаралельні ребра паралелепіпеда мають довжини 1 дм, 2 дм і 3 дм. Знайдіть суму довжин усіх ребер паралелепіпеда.

895. Площі трьох граней паралелепіпеда дорівнюють 2 см^2, 3 см^2 і 4 см^2. Чому дорівнює площа поверхні паралелепіпеда? А площа бічної поверхні?

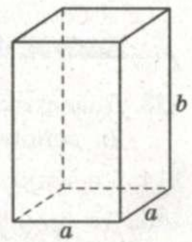
896. Скільки граней, ребер і вершин має п'ятикутна призма? Зобразіть її.

897. Чи рівні діагональні перерізи правильної чотирикутної призми? А правильної п'ятикутної?

А

898. Площа бічної поверхні правильної трикутної призми дорівнює 48 см^2. Знайдіть довжину бічного ребра призми, якщо довжина сторони основи дорівнює 4 см.

899. На малюнку 146 зображено правильну чотирикутну призму, сторона основи якої дорівнює a, а бічне ребро – b. Знайдіть:
а) площу бічної грані;
б) площу основи;
в) площу бічної поверхні;
г) площу поверхні призми;
ґ) діагональ основи;
д) діагональ бічної грані.



Мал. 146

900. У прямій трикутній призмі всі ребра рівні. Площа її бічної поверхні – 27 см^2. Знайдіть площу основи призми.

901. Побудуйте переріз трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ площиною, яка проходить через вершини A, B і середину ребра A_1C_1.

902. Три грані призми – рівні квадрати зі стороною 2 см, а дві інші – трикутники. Накресліть цю призму та її розгортку.

903. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда за трьома його вимірами: а) 10 см, 16 см і 22 см; б) a, b, c.

904. Дано паралелепіпед, кожна грань якого – ромб зі стороною a і кутом α. Знайдіть площу його поверхні.

905. Знайдіть діагоналі прямокутного паралелепіпеда, виміри якого – 3 см, 4 см і 12 см.

906. Знайдіть площу поверхні прямокутного паралелепіпеда, виміри якого – 4 см, 4 см і 10 см.

907. Ребра прямокутного паралелепіпеда пропорційні числам 1, 2 і 3. Знайдіть їх довжини, якщо площа його поверхні дорівнює 550 см^2.

908. Розміри цеглини – 250×120×65 мм. Знайдіть відстань між її найвіддаленішими точками.

909. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 42 см^2, 72 см^2 і 84 см^2. Знайдіть довжини його ребер.

910. Знайдіть довжину діагоналі куба, ребро якого дорівнює a.

911. Знайдіть площу діагонального перерізу правильної чотирикутної призми, висота якої дорівнює 10 см, а площа основи – 144 см^2.

912. Площа поверхні правильної чотирикутної призми – 40 см^2, а бічної поверхні – 32 см^2. Знайдіть висоту призми.

Б

913. Доведіть, що n-кутна призма має $n + 2$ грані, $3n$ ребер і $2n$ вершин.

914. Чи існує призма, яка має 100 ребер?

915. Чи можуть площі бічних граней правильної трикутної призми дорівнювати 20 см^2, 30 см^2 і 50 см^2?

916. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної призми дорівнює S. Знайдіть площу її бічної поверхні.

917. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямий паралелепіпед, K, L, M – середини ребер AB, A_1B_1, B_1C_1. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через точки K, L, N. Знайдіть площу перерізу, якщо $AA_1 = 6$ см, $LM = 10$ см.

918. У прямокутному паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 6 см і 8 см, а бічне ребро – 12 см. Знайдіть площу перерізу, проведеного через точки B, C_1, D.

919. Виміри прямокутного паралелепіпеда – 3, 4 і 5. Знайдіть кут між діагоналлю паралелепіпеда та його найменшою гранню.

920. Висота правильної чотирикутної призми дорівнює h, а сторона основи – a. Знайдіть: а) площу її поверхні; б) довжину діагоналі призми; в) площу діагонального перерізу призми.

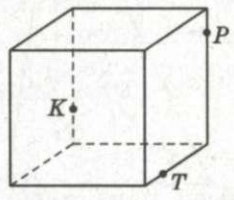
921. Бічне ребро призми дорівнює l і нахилене до площини основи під кутом α. Знайдіть висоту призми.

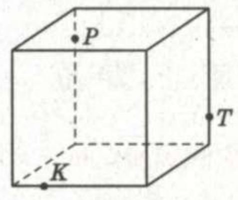
922. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює d і нахилена до площини основи під кутом φ. Знайдіть площу: а) діагонального перерізу; 2) бічної поверхні призми.

923. У кімнаті, що має форму прямокутного паралелепіпеда, є два вікна та одні двері. Скільки рулонів шпалер (без малюнка) потрібно придбати, щоб обклеїти стіни цієї кімнати, якщо відомі розміри (у м): кімнати – 4×5×2,8; вікон – 1,2×1,8; дерей – 0,9×2,1; рулона – 0,5×10. Врахуйте, що відходи становлять 5 %.

924. Намалюйте прямокутний паралелепіпед. Позначте на його ребрах точки M, K, H так, щоб перерізом паралелепіпеда площиною MKH був п'ятикутник.

925. Перенесіть малюнки 147 у зошит і на кожному з них побудуйте переріз многогранника площиною KPT.





Мал. 147

926. Задача для кмітливих. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильна призма, у якої $AA_1 = 15$ см, $AB = BC = 5$ см. Знайдіть найкоротшу відстань по поверхні призми між серединами ребер AB і C_1D_1.

927. Практичне завдання. Виготовте з цупкого паперу розгортку похилого паралелепіпеда.

Вправи для повторення

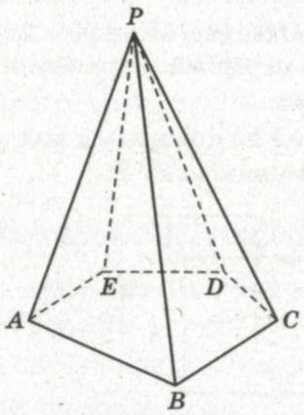
928. Площина BC_1D поділяє куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на два многогранники. Укажіть кількість вершин, ребер і граней у кожному з них.

929. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (1;\ 2;\ -3)$ і $\vec{b} = (-5;\ 1;\ -1)$.

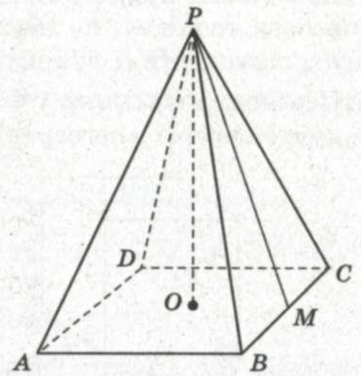
930. Намалюйте многогранник, який має 7 граней. Скільки вершин і ребер він може мати?

§ 29. Піраміди

Пірамідою називається многогранник, одна грань якого – довільний многокутник, а решта – трикутники, що мають спільну вершину (мал. 148). Ці трикутники зі спільною вершиною називають *бічними гранями*, а їх спільну вершину – *вершиною піраміди*. Грань, яка не є бічною, – *основа* піраміди. Залежно від кількості сторін основи розрізняють трикутні, чотирикутні, ..., n-кутні піраміди. Трикутну піраміду називають також *тетраедром*.



Мал. 148



Мал. 149

Ребро, яке не є стороною основи, називається *бічним ребром піраміди*. Січна площина, яка проходить через два несуміжні бічні ребра піраміди, перетинає її по трикутнику, який називають *діагональним перерізом* піраміди. *Висотою піраміди* називають перпендикуляр, опущений з її вершини на площину основи. Довжину цього перпендикуляра також називають висотою піраміди. Це – омоніми.

Піраміда називається *правильною*, якщо її основа – правильний многокутник, центр якого збігається з основою висоти піраміди. Усі бічні ребра правильної піраміди – рівні, усі бічні грані – рівні рівнобедрені трикутники. (Доведіть самостійно). Висоту бічної грані правильної піраміди, проведену з її вершини, називають *апофемою піраміди*. Неправильна піраміда апофем не має. На малюнку 149 зображено

правильну чотирикутну піраміду. Відрізок PO – її висота, а PM – апофема.

Бічна поверхня піраміди складається з поверхонь усіх її бічних граней.

Теорема 7. ***Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра її основи на апофему піраміди.***

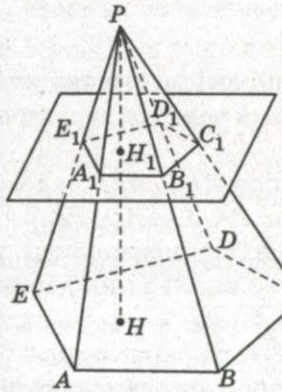
● **Доведення.** Якщо сторона основи правильної n-кутної піраміди дорівнює a, а апофема – l, то площа однієї бічної грані дорівнює $\frac{1}{2}al$. Бічна поверхня піраміди складається з n таких граней. Тому, якщо периметр основи піраміди дорівнює P, то площа її бічної поверхні

$$S_б = \frac{1}{2}al \cdot n = \frac{1}{2}an \cdot l = \frac{1}{2}P \cdot l.$$

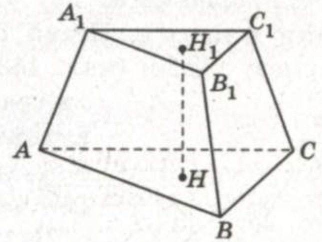
Щоб знайти всю площу поверхні піраміди, треба до площі бічної поверхні додати площу основи:

$$S_п = S_б + S_о.$$

Нехай $PABCD$ – довільна піраміда. Якщо через точку H_1 її висоти PH провести площину, паралельну площині основи, то вона перетне піраміду по многокутнику $A_1B_1C_1D_1$, подібному до многокутника $ABCD$ (мал. 150). Якщо площа основи піраміди дорівнює $S_о$, а площа перерізу – $S_п$, то $S_о : S_п = PH^2 : PH_1^2$.



Мал. 150



Мал. 151

Тобто *площі основи піраміди та паралельного їй перерізу відносяться як квадрати відстаней від їх площин до вершини піраміди.*

Доведення цих тверджень елементарні, але досить громіздкі, тому опускаємо їх. Наведемо лише приклад. Якщо січну площину, паралельну площині основи піраміди, провести через середину висоти, то площа перерізу буде в 4 рази менша за площу основи. Бо якщо $PH : PH_1 = 2 : 1$, то $S_о : S_п = PH^2 : PH_1^2 = 4 : 1$.

Частину піраміди, що міститься між її основою та січною площиною, паралельною основі, називають *зрізаною пірамідою* (мал. 151). Паралельні грані зрізаної піраміди називають її *основами*, а всі інші – *бічними гранями*. *Висота зрізаної піраміди* – відстань між площинами її основ. Зрізану піраміду називають *правильною*, якщо вона є частиною правильної піраміди. Основи кожної зрізаної піраміди – подібні многокутники, а бічні грані – трапеції.

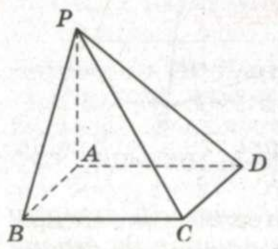
ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Сформулюйте означення піраміди. Назвіть її елементи.
2. Які бувають піраміди? Покажіть на діаграмі.
3. Що таке діагональна площина піраміди? А діагональний переріз?
4. Які піраміди називають правильними?
5. Що таке апофема правильної піраміди?
6. Чому дорівнює площа бічної поверхні правильної піраміди?
7. Що таке зрізана піраміда? Назвіть її елементи.
8. Чи є зрізана піраміда пірамідою?
9. Які бувають зрізані піраміди?

Виконаємо разом

1. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, основа якої – квадрат зі стороною a, а висота проходить через одну з вершин основи і дорівнює h.

• Розв'язання. Нехай $PABCD$ – піраміда, яка задовольняє умову задачі (мал. 152). Оскільки $PA \perp AB$ і $PA \perp AD$, то грані PAB і PAD – прямокутні трикутники. Площа кожного з них дорівнює $\frac{1}{2}ah$. $PB = PD = \sqrt{a^2 + h^2}$.



Мал. 152

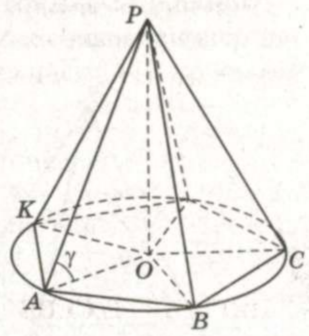
За теоремою про три перпендикуляри, $PB \perp BC$ і $PD \perp DC$, тому грані PBC і PDC – прямокутні трикутники. Площа кожного з них дорівнює $\frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + h^2}$.

Тому площа всієї бічної поверхні піраміди

$$S_б = 2 \cdot \frac{1}{2}ah + 2\frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + h^2} = a(h + \sqrt{a^2 + h^2}).$$

2. Доведіть, що коли всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під рівними кутами, то основа її висоти – центр кола, описаного навколо основи піраміди.

• Розв'язання. Якщо всі бічні ребра піраміди $PABC...K$ нахилені до площини основи під кутом γ (мал. 153), то прямокутні трикутники POA, POB, ..., POK рівні (за катетом PO і протилежним кутом). Тоді рівні й відрізки OA, OB, ..., OK. Отже, всі вершини основи піраміди лежать на колі радіуса OA з центром у точці O.



Мал. 153

Виконайте усно

931. Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, які мають форму піраміди.

932. Скільки граней, вершин і ребер має n-кутна піраміда?

933. Чи існує піраміда, яка має 125 ребер?

934. Знайдіть площу поверхні правильного тетраедра, якщо сторона його основи дорівнює a.

935. Площина, паралельна основі піраміди, ділить її висоту навпіл. Знайдіть площу основи піраміди, якщо площа перерізу дорівнює 40 см².

936. Чи можуть основами зрізаної піраміди бути прямокутники, у яких сторони одного дорівнюють 3 см і 5 см, а другого – 6 см і 8 см?

А

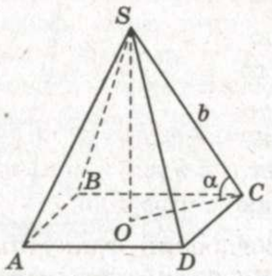
937. Знайдіть площу поверхні правильної трикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює 10 см, а апофема – 6 см.

938. Знайдіть апофему правильної чотирикутної піраміди, якщо її висота дорівнює 4 см, а сторона основи – 6 см.

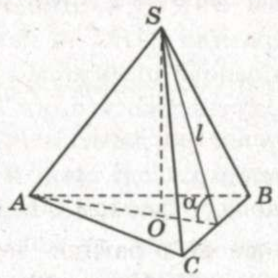
939. Двогранний кут при ребрі основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 60°, а апофема дорівнює 10 см. Знайдіть площу основи.

940. Кут між висотою та апофемою правильної чотирикутної піраміди дорівнює 30°, сторона основи – a. Чому дорівнює апофема піраміди?

941. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює b і нахилене до площини основи під кутом α (мал. 154). Знайдіть: а) висоту піраміди; б) діагональ основи; в) сторону основи.



Мал. 154



Мал. 155

942. Апофема правильної трикутної піраміди дорівнює l і нахилена до площини основи під кутом α (мал. 155). Знайдіть: а) висоту піраміди; б) медіану основи; в) сторону основи; г) площу поверхні піраміди.

943. Відома піраміда Хеопса в Єгипті має форму правильної чотирикутної піраміди. Її висота – 147 м, а площа основи – 5,3 га. Знайдіть кут нахилу її бічного ребра до площини основи.

944. Основа піраміди – прямокутник зі сторонами 12 см і 16 см. Кожне бічне ребро дорівнює 26 см. Знайдіть висоту піраміди.

945. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, основа якої – квадрат зі стороною 5 см, а висота проходить через одну з вершин основи і дорівнює 12 см.

946. Висота чотирикутної піраміди дорівнює 4 см і проходить через точку перетину діагоналей основи. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди, якщо в основі лежить: а) квадрат зі стороною $8\sqrt{3}$ см; б) прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см; в) ромб із діагоналями 12 см і 16 см.

947. Знайдіть площу поверхні правильної чотирикутної піраміди, якщо: а) сторона основи дорівнює a, а двогранний кут при ребрі основи – α; б) бічне ребро дорівнює b і утворює з площиною основи кут 45°; в) відстань від основи висоти до бічної грані дорівнює d, а двогранний кут при ребрі основи – α.

948. Дах має форму правильної чотирикутної піраміди, ребро основи якої дорівнює 5 м, а бічна грань нахилена до площини основи під кутом 45°. Скільки фарби потрібно, щоб пофарбувати цей дах двічі, якщо на одноразове покриття цією фарбою 1 м^2 витрачається 150 г?

Б

949. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 60°. Знайдіть висоту піраміди.

950. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник зі сторонами 10 см, 10 см і 12 см. Усі бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45°. Знайдіть відстань від основи висоти піраміди до її бічного ребра.

951. Доведіть, що коли всі двогранні кути при ребрах основи рівні, то основа її висоти – центр кола, вписаного в основу піраміди.

952. Основа піраміди – прямокутний трикутник з катетами 12 см і 16 см. Кожен із двогранних кутів при ребрах основи дорівнює 60°. Знайдіть висоту піраміди та площу бічної поверхні.

953. В основі піраміди лежить трикутник зі сторонами 11 см, 24 см і 31 см. Висота піраміди дорівнює 2 см. Усі двогранні кути при ребрах основи рівні. Знайдіть ці кути.

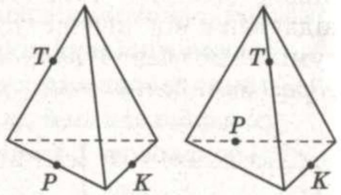
954. Через середину висоти піраміди паралельно основі проведено переріз. Знайдіть площу перерізу, якщо площа основи піраміди дорівнює Q.

955. Площина, паралельна основі піраміди, ділить її висоту у відношенні 2 : 3 (від вершини до основи). Знайдіть площу перерізу, знаючи, що вона на 84 см^2 менша за площу основи піраміди.

956. Через точки, які ділять висоту піраміди на чотири рівні частини, проведено площини, паралельні основі піраміди. Знайдіть площі перерізів, якщо площа основи піраміди дорівнює 16 см^2.

957. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди вдвічі менша за площу основи. Доведіть, що її протилежні бічні ребра перпендикулярні.

958. Побудуйте перерізи пірамід площиною, що проходить через точки K, P, T (мал. 156).



а) б)

Мал. 156

959. Знайдіть площу поверхні тетраедра, вершинами якого є точки $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 2;\ 0)$ і $C(0;\ 0;\ 2)$.

960. Знайдіть площі діагональних перерізів правильної шестикутної піраміди, якщо її висота і сторона основи дорівнюють по 6 дм.

961. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною a. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а третя нахилена до неї під кутом 30°. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди.

962. Практичне завдання. Виріжте з цупкого паперу розгортку правильної чотирикутної піраміди, сторона основи якої дорівнює 4 см, а бічне ребро – 8 см.

Вправи для повторення

963. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між AC і DC_1.

964. В основі прямої призми з висотою 4 см лежить квадрат зі стороною 3 см. Знайдіть площу перерізу призми площиною, яка проходить через вершину основи перпендикулярно до діагоналі бічної грані.

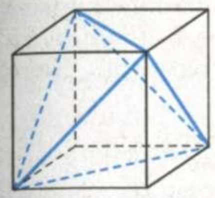
965. Знайдіть відстань від точки $A(-1;\ -3;\ 4)$ до осі абсцис.

§ 30. Правильні многогранники

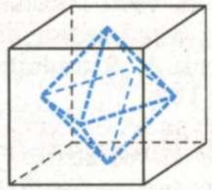
Многогранник називається *правильним*, якщо всі його грані – рівні правильні многокутники, а всі вершини рівновіддалені від деякої точки. Цю точку називають *центром правильного многогранника*.

Куб – правильний многогранник, бо всі його грані – рівні квадрати, а всі вершини куба рівновіддалені від точки перетину його діагоналей.

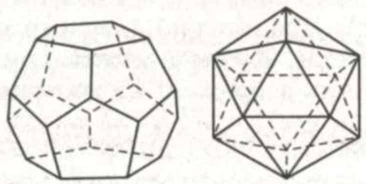
Якщо сполучити відрізками кінці двох мимобіжних діагоналей протилежних граней куба, то утвориться каркас *правильного тетраедра* (мал. 157). Адже кожна його грань – рівносторонній трикутник, а кожна вершина однаково віддалена від центра куба. Сполучивши відрізками центри суміжних граней куба, дістанемо каркас *правильного октаедра* (мал. 158).



Мал. 157



Мал. 158

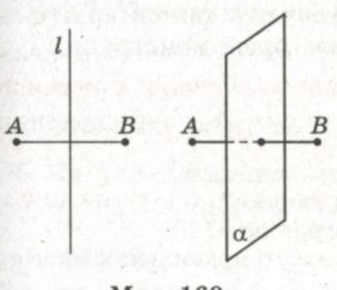


а) б)

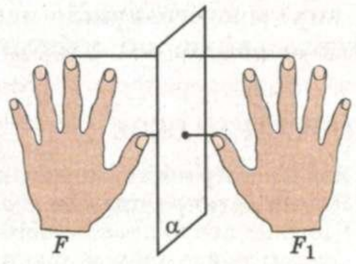
Мал. 159

Існує п'ять видів правильних многогранників. Крім трьох названих, є ще правильний *додекаедр* (мал. 159, *а*) і правильний *ікосаедр* (мал. 159, *б*). Назви тетраедр, октаедр, додекаедр, ікосаедр у перекладі з грецької означають відповідно: чотиригранник, восьмигранник, дванадцятигранник і двадцятигранник. Куб називають ще правильним *гексаедром*.

Властивості правильних многогранників добре знали і часто використовували античні математики та філософи. Для сучасної геометрії правильні многогранники цікаві насамперед як носії багатьох видів симетрії.



Мал. 160



Мал. 161

У просторі розрізняють симетрії відносно: точки, прямої та площини. Точки A і B називають *симетричними відносно точки O*, якщо O – середина відрізка AB. Точки A і B називаються *симетричними відносно прямої* (площини), якщо ця пряма (площина) перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину (мал. 160). Якщо кожна точка фігури F симетрична відносно деякої точки (прямої чи площини) точці фігури F_1 і навпаки, то фігури F і F_1 називають