За теоремою Піфагора,

$$OM^2 = OA^2 - AM^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3}.$$

*Відповідь.* $OM = \frac{10}{3}\sqrt{6}$ см.

**Виконайте усно**

**1066.** Наведіть приклади тіл з навколишнього середовища, які мають форму кулі або сфери.

**1067.** Знайдіть площу великого круга кулі та довжину екватора, якщо її радіус дорівнює 2 м.

**1068.** Діаметр кулі – 38 дм, а площина віддалена від її центра на 20 дм. Чи має ця площина з кулею спільні точки?

**1069.** Точки $A$ і $B$ лежать на поверхні кулі радіуса 12 см. Знайдіть довжину відрізка $AB$, якщо з центра кулі його видно під кутом 60°.

## А

**1070.** Через середину радіуса кулі проведено перпендикулярну до нього площину. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус кулі дорівнює $r$.

**1071.** Кулю радіуса 10 см перетинає площина, віддалена від її центра на 6 см. Знайдіть площу перерізу.

**1072.** Точки $A$ і $B$ лежать на поверхні кулі радіуса 50 см. Знайдіть відстань від центра кулі до відрізка $AB$, якщо $AB = 80$ см.

**1073.** Сфери радіусів $R$ і $r$ дотикаються. Знайдіть відстань між їх центрами. Розгляньте два випадки.

**1074.** Знайдіть геометричне місце центрів сфер радіуса $r$, які: а) дотикаються до даної площини; б) проходять через дану точку.

**1075.** Знайдіть площу поверхні кулі, радіус якої 2 см.

**1076.** Знайдіть площу сфери, діаметр якої дорівнює 20 см.

**1077.** Площа сфери дорівнює 3,14 дм$^2$. Знайдіть радіус сфери.

**1078.** Для фарбування круга радіуса 1 м потрібно 20 г фарби. Скільки такої фарби потрібно, щоб пофарбувати кулю діаметром 1 м?





**1079.** Знайдіть площу поверхні півкулі, радіус якої дорівнює 10 см.

**1080.** Переріз кулі площиною, віддаленою від її центра на 12 см, має площу $25\pi$ см$^2$. Визначте площу поверхні кулі.

**1081.** Площа поверхні кулі – $400\pi$ см$^2$. Знайдіть площу перерізу кулі площиною, віддаленою від центра на 6 см.

**1082.** Для фарбування кулі діаметром 2 дм потрібно 30 г фарби. Скільки фарби потрібно для фарбування кулі діаметром 6 дм?

**1083.** Приміщення виставки має вигляд півкулі, площа сферичної поверхні якої – $392\pi$ м$^2$. Визначте діаметр підлоги.

**1084.** Крива поверхня півкулі на 20 см$^2$ більша за площу її основи. Знайдіть площу основи півкулі.

## Б

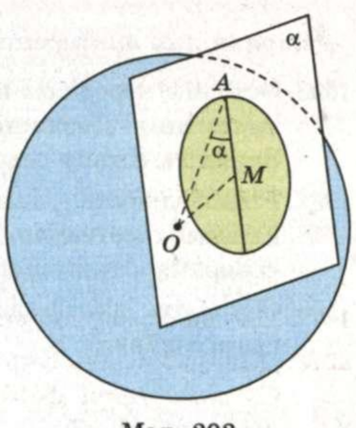
**1085.** Куля з центром у точці $O$ дотикається до площини. Відстань від точки $M$, що лежить у цій площині, до центра кулі – 25 см, а до точки дотику кулі – 15 см. Знайдіть: а) радіус кулі; б) площу перерізу цієї кулі площиною, що проходить через середину радіуса.

**1086.** Куля дотикається до всіх сторін прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть радіус кулі, якщо відстань від центра кулі до площини трикутника – 7 см.

**1087.** Усі сторони правильного трикутника дотикаються до сфери радіуса 2 дм. Знайдіть відстань від центра цієї сфери до площини трикутника, якщо довжина його сторони дорівнює 6 дм.

**1088.** Радіус кулі дорівнює $r$. Через кінець радіуса проведено площину під кутом $\alpha$ до нього. Знайдіть площу перерізу (мал. 202).

**1089.** Точка $A$ лежить на поверхні кулі радіуса 13 см і віддалена від кінців діаметра $MN$ на відстані, пропорційні числам 5 і 12. Знайдіть ці відстані.



Мал. 202

**1090.** Два кола радіусів 30 см і 40 см лежать у паралельних площинах і на поверхні кулі радіуса 50 см. Знайдіть відстань між площинами.

**1091.** На сфері радіуса 26 см дано три точки. Прямолінійні відстані між ними 12 см, 16 см і 20 см. Знайдіть відстань від центра сфери до площини, яка проходить через ці точки.

**1092.** Радіус Землі 6,4 тис. км. Який шлях проходять за добу внаслідок обертання Землі міста Одеса, Львів і Київ, широти яких становлять 46°29′, 49°49′ і 50°27′?

**1093.** Радіус Землі дорівнює 6400 км. На яку висоту над горизонтом слід піднятися, щоб лінія горизонту проходила на відстані 100 км від спостерігача?

**1094.** Куля радіуса $r$ дотикається до граней двогранного кута. Знайдіть відстань від центра кулі до ребра кута, якщо цей кут дорівнює: а) 60°; б) 90°; в) 120°; г) $\alpha$.

**1095.** Доведіть, що площі двох сфер відносяться як квадрати їх радіусів.

**1096.** Радіуси двох сфер відносяться як 4 : 9. Знайдіть площу більшої з них, якщо площа меншої дорівнює 32 дм$^2$.

**1097.** З а д а ч а з н е с п о д і в а н о ю в і д п о в і д д ю. Уявіть, що дві кулі – одна велика, як Земля, а друга, як м'яч, – по екваторах обтягнуті обручами. Якщо кожний із цих обручів подовжити на 1 м, вони відійдуть від поверхонь куль на деякі відстані. Де ця відстань буде більшою – у більшої чи меншої кулі?

### Вправи для повторення

**1098.** Осьовим перерізом конуса є рівнобедрений прямокутний трикутник. Довжина кола основи конуса дорівнює $8\pi$ см. Знайдіть площу осьового перерізу.

**1099.** Рівнобедрений прямокутний трикутник обертається навколо гіпотенузи, довжина якої дорівнює 8 м. Обчисліть поверхню отриманого тіла.

**1100.** Обчисліть діагональ куба, якщо діагональ його бічної грані дорівнює $d$.



### Самостійна робота № 8

**Варіант 1**

1. Обчисліть площу поверхні конуса, твірна якого дорівнює 8 см, а радіус основи – 5 см.

2. Діаметр кулі дорівнює 10 см. Знайдіть площу її поверхні.

3*. Рівнобедрена трапеція, бічні сторони та менша основа якої дорівнюють по 5 см, обертається навколо більшої основи. Знайдіть площу поверхні утвореного тіла, якщо висота трапеції дорівнює 4 см.

**Варіант 2**

1. Обчисліть площу поверхні циліндра, твірна якого дорівнює 5 см, а радіус основи – 9 см.

2. Площа сфери дорівнює $100\pi$ см$^2$. Знайдіть її діаметр.

3*. Прямокутна трапеція, бічні сторони та менша основа якої відповідно дорівнюють 3 см, 5 см і 4 см, обертається навколо більшої основи. Знайдіть площу поверхні утвореного тіла.

### КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Як можна класифікувати фігури обертання? Наведіть приклади різних фігур обертання.
2. Сформулюйте означення циліндра. Назвіть його елементи.
3. Як обчислюють площу поверхні циліндра?
4. Сформулюйте означення конуса. Назвіть його елементи.
5. Як обчислюють площу поверхні конуса?
6. Як відносяться площі основи конуса і паралельного їй перерізу?
7. Що таке конічна поверхня?
8. Якими можуть бути перерізи конічних поверхонь?
9. Дайте означення кулі; сфери. Назвіть їх елементи.
10. Як можуть бути розміщені дві сфери? А сфера і площина?

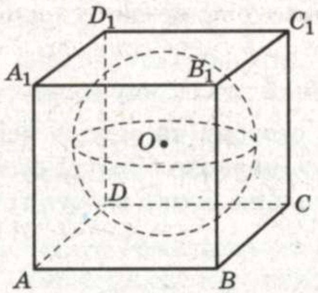
## § 34. Комбінації геометричних фігур

Досі ми розглядали властивості простих геометричних тіл – призм, пірамід, циліндрів, конусів, куль. Але багатьом спеціалістам часто доводиться мати справу із складнішими тілами, які є *комбінаціями* (об'єднаннями) названих тіл.

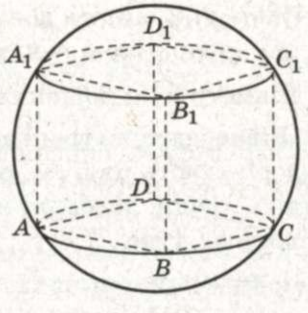
З різноманітних комбінацій геометричних фігур особливої уваги варті *вписані* й *описані тіла*.

Наприклад, куля називається *вписаною в многогранник*, якщо вона дотикається до кожної грані многогранника.

Многогранник називається *вписаним у сферу*, якщо всі його вершини лежать на сфері. На малюнку 203 зображено кулю, вписану в куб, а на малюнку 204 – куб, вписаний у сферу.

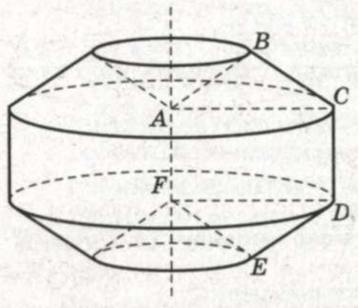



Мал. 203




Мал. 204

Призма називається *вписаною* в циліндр, якщо її основи вписані в основи циліндра. Циліндр буде *вписаним* у призму, якщо кола його основ вписані в основи призми. Піраміда називається *вписаною* в конус, якщо їх вершини збігаються, а основа піраміди вписана в коло основи конуса. Конус *вписаний* у піраміду, якщо їх вершини збігаються, а коло основи конуса дотикається до всіх сторін основи піраміди.




Мал. 205

Якщо одне тіло вписане в інше, то друге тіло називають *описаним* навколо першого.

Як комбінації циліндрів, конусів і зрізаних конусів можна розглядати тіла, утворені обертанням многокутників. Наприклад, тіло, утворене обертанням правильного шестикутника навколо його сторони, є об'єднанням циліндра і двох зрізаних конусів, з якого вилучено два конуси (мал. 205).

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Яка куля називається вписаною в многогранник?
2. Який многогранник називається вписаним у кулю?
3. Дайте означення призми, вписаної в циліндр.
4. Дайте означення піраміди, вписаної в конус.
5. Чи навколо кожного правильного многогранника можна описати сферу?





### Виконаємо разом

Твірна конуса дорівнює $l$ і нахилена до площини основи під кутом $\alpha$. Знайдіть довжину ребра куба, вписаного в конус так, що чотири його вершини лежать на основі конуса, а інші чотири – на його бічній поверхні.

● **Розв'язання.** Нехай $PM$ – твірна конуса, яка проходить через вершину $A_1$ вписаного куба (мал. 206). Вершина $A$ куба лежить на радіусі $OM$. За умовою задачі, $PM = l$, $\angle PMO = \alpha$. Якщо ребро куба дорівнює $x$, то $OA = \frac{x}{\sqrt{2}}$. З прямокутного $\Delta POM$ маємо:

$$OM = PM \cdot \cos\alpha = l\cos\alpha,$$

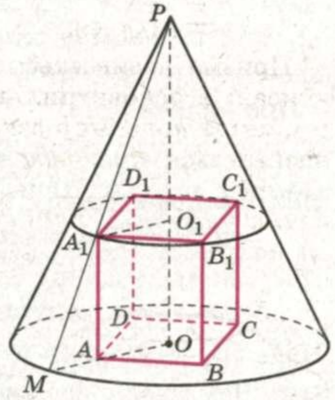
$$MA = MO - OA = l\cos\alpha - \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Оскільки $\frac{A_1A}{MA} = \operatorname{tg}\alpha$, то

$$\frac{x}{l\cos\alpha - \frac{x}{\sqrt{2}}} = \operatorname{tg}\alpha,$$

звідки $x = \frac{\sqrt{2}\, l\sin\alpha}{\sqrt{2} + \operatorname{tg}\alpha}$.

*Відповідь.* $x = \frac{\sqrt{2}\, l\sin\alpha}{\sqrt{2} + \operatorname{tg}\alpha}$.




Мал. 206

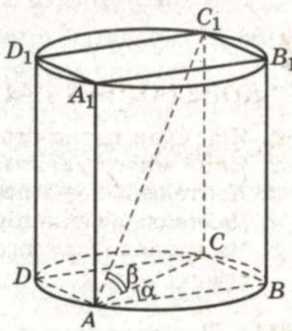
2. Основою прямої призми є прямокутник зі стороною $a$ та кутом $\alpha$, який утворює ця сторона з діагоналлю основи. Діагональ призми утворює з площиною основи кут $\beta$. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, описаного навколо призми, якщо $a = 6$ см, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

● **Розв'язання.** Дана призма – прямокутний паралелепіпед (мал. 207). Тому, якщо $AB = a$, то $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAC_1 = \beta$, $CC_1$ – висота описаного циліндра, а $AC$ – діаметр його основи.

Площу бічної поверхні циліндра визначатимемо за формулою

$$S = 2\pi rh,$$

де $r = \frac{AC}{2}$, $h = CC_1$.




Мал. 207

Оскільки трикутники $ABC$ і $ACC_1$ прямокутні, то

$$AC = \frac{AB}{\cos\alpha} = \frac{a}{\cos\alpha};\ CC_1 = AC\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{\cos\alpha}\operatorname{tg}\beta.$$

Отже,

$$S = 2\pi\frac{a}{2\cos\alpha}\cdot\frac{a}{\cos\alpha}\operatorname{tg}\beta = \frac{\pi a^2}{\cos^2\alpha}\operatorname{tg}\beta.$$

Якщо $a = 6$, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, то

$$S = \frac{\pi 6^2\cdot 4}{3}\cdot\sqrt{3} = \frac{144\pi\sqrt{3}}{3}.$$

*Відповідь*. $S = \frac{\pi a^2}{\cos^2\alpha}\operatorname{tg}\beta = \frac{144\pi\sqrt{3}}{3}$ см$^2$.

### Виконайте усно

**1101.** Знайдіть радіус кулі, вписаної в куб з ребром завдовжки $a$.

**1102.** Знайдіть площу бічної поверхні циліндра, вписаного в куб з ребром завдовжки 2 см.

**1103.** Знайдіть площу осьового перерізу циліндра, у який вписано кулю радіуса $R$.

**1104.** Чи в будь-який циліндр можна вписати кулю?

**1105.** Чому дорівнює висота зрізаного конуса, в який вписано кулю радіуса $R$?

**1106.** Знайдіть діагональ куба, вписаного у сферу радіуса 8 см.

## А

**1107.** Накресліть описану навколо кулі правильну призму: а) чотирикутну; б) трикутну.

**1108.** Накресліть описану навколо кулі правильну піраміду: а) чотирикутну; б) трикутну.

**1109.** Накресліть вписану в конус правильну піраміду: а) трикутну; б) чотирикутну; в) шестикутну.

**1110.** Впишіть у правильну чотирикутну піраміду куб так, щоб одна його грань лежала на основі піраміди, а вершини протилежної грані: а) на бічних ребрах піраміди; б) на апофемах піраміди.

**1111.** В основі прямої призми – прямокутний трикутник. Опишіть навколо неї: а) циліндр; б) сферу.



**1112.** Знайдіть діаметр сфери, описаної навколо прямокутного паралелепіпеда з вимірами 3 дм, 4 дм і 5 дм.

**1113.** Знайдіть площу сфери, вписаної в куб, ребро якого – 10 см.

**1114.** Як відносяться площі сфер, вписаної в куб та описаної навколо того самого куба?

## Б

**1115.** Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює $a$, а бічне ребро утворює з площиною основи кут $\alpha$. Знайдіть площу бічної поверхні конуса, описаного навколо піраміди.

**1116.** Основою піраміди є прямокутний трикутник з катетами 10 м і 24 м, а всі двогранні кути при основі піраміди дорівнюють 60°. Знайдіть площу поверхні конуса, вписаного в цю піраміду.

**1117.** Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 10 см і утворює з площиною основи кут 45°. Знайдіть бічну поверхню циліндра, вписаного в призму.

**1118.** Знайдіть площу поверхні циліндра, описаного навколо трикутної призми, всі ребра якої дорівнюють $a$.

**1119.** Площа бічної поверхні правильної трикутної призми дорівнює 27 см$^2$. Знайдіть площу бічної поверхні вписаного в неї циліндра.

**1120.** У прямий паралелепіпед, діагоналі основи якого дорівнюють 6 см і 8 см, вписано кулю. Знайдіть площу поверхні паралелепіпеда.

**1121.** Навколо правильної шестикутної призми, висота якої дорівнює 12 см, описано сферу радіуса 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні призми.

**1122.** Знайдіть площу сфери, описаної навколо циліндра, діаметр основи і висота якого дорівнюють відповідно 4 см і 3 см.

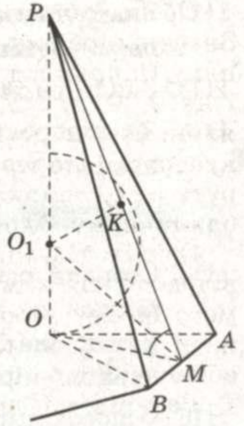
**1123.** Площа бічної поверхні конуса – $Q$, а радіус його основи – $r$. Знайдіть довжину бічного ребра вписаної в цей конус правильної піраміди: а) трикутної; б) чотирикутної; в) шестикутної.

**1124.** Навколо кулі радіуса $r$ описано конус, твірна якого нахилена до площини основи під кутом $\alpha$. Знайдіть площу осьового перерізу конуса, якщо $r = 2$ м, $\alpha = 50°$.

**1125.** Ребро правильного октаедра дорівнює $a$. Знайдіть радіус кулі: а) вписаної в цей октаедр; б) описаної навколо нього.

**1126*.** Знайдіть радіус кулі, вписаної в правильну $n$-кутну піраміду (мал. 208), сторона основи якої дорівнює $a$, а двогранний кут при ребрі основи – $\alpha$, якщо: а) $n = 4$; б) $n = 6$; в) $n = 3$; г) $n = m$.

**1127*.** У сферу радіуса $r$ вписано правильну чотирикутну піраміду, бічне ребро якої нахилене до площини основи під кутом $\alpha$. Знайдіть висоту піраміди.




Мал. 208

**Вправи для повторення**

**1128.** Знайдіть кут між діагоналями осьового перерізу циліндра, якщо площа основи відноситься до площі осьового перерізу як $\pi : 4$.

**1129.** Переріз циліндра, проведений паралельно його осі, є квадратом і віддалений від осі на 2 см. Знайдіть площу перерізу, якщо радіус основи дорівнює $\sqrt{6}$ см.

**1130.** Обчисліть діагональ куба, якщо діагональ його бічної грані дорівнює $d$.

## § 35. Об'єм призми та циліндра

Кожне тіло займає певну частину простору: цеглина – меншу, ніж будинок; куб з ребром 1 см – меншу, ніж куб з ребром 2 см. Щоб можна було порівнювати різні частини простору, вводять поняття *об'єму*.

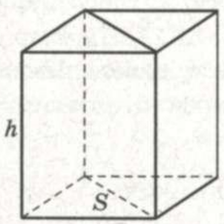
Строгий виклад теорії об'ємів досить складний. Ми обмежимося розглядом лише простих тіл – многогранників, циліндра, конуса та кулі. Для цих тіл об'єм – це величина, яка задовольняє певні умови (властивості об'єму).

1. *Кожне тіло має об'єм, виражений додатним числом.*
2. *Якщо тіло поділене на кілька частин, то його об'єм дорівнює сумі об'ємів усіх цих частин.*
3. *Рівні тіла мають рівні об'єми.*
4. *Об'єм одиничного куба дорівнює одиниці об'єму.* Одиничним кубом називають куб, ребро якого дорівнює одиниці довжини.

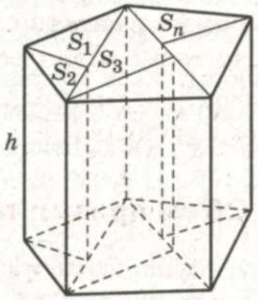
*Об'єм* – одна з величин, як і довжина, міра кута, площа. Значення об'єму задається не тільки числом, а й найменуванням. Наприклад, об'єм 1 дм$^3$ можна записати і як 1000 см$^3$, і як 0,001 м$^3$. У теоретичних міркуваннях за одиницю довжини беруть довжину деякого (одиничного) відрізка. Площу квадрата, сторона якого дорівнює одиничному відрізку, беруть за одиницю площі, а об'єм куба, ребро якого дорівнює одиничному відрізку, – за одиницю об'єму.

Об'єми тіл вимірюють або обчислюють. Наприклад, об'єм відра можна виміряти, наливаючи в нього воду банкою відомого об'єму. Зрозуміло, що такі вимірювання дають наближені результати. Точні значення об'ємів геометричних тіл обчислюють за формулами. Розглянемо деякі з них.

Вам відомо, що об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добутку площі його основи на висоту. А як знаходити об'єм призми? Якщо призма пряма і в її основі лежить прямокутний трикутник, то з двох таких рівних призм можна скласти прямокутний паралелепіпед (мал. 209). Якщо висота, площа основи та об'єм такої трикутної призми дорівнюють $h$, $S$ і $V$, то висота, площа основи та об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнюють відповідно $h$, $2S$ і $2V$. Оскільки об'єм прямокутного паралелепіпеда дорівнює добуткові площі основи на висоту, то $2V = 2S \cdot h$, звідки $V = Sh$.




Мал. 209




Мал. 210

Отже, об'єм кожної прямої призми, в основі якої лежить прямокутний трикутник, дорівнює добутку площі її основи на висоту.

Розглянемо довільну пряму призму з площею основи $S$, висотою $h$ і об'ємом $V$. Її основу можна поділити на $n$ прямокутних трикутників (мал. 210), отже, дану призму – на $n$ прямих призм, основами яких є прямокутні трикутники. Якщо їх площі основ та об'єми дорівнюють відповідно $S_1$ і $V_1$, $S_2$ і $V_2$, ..., $S_n$ і $V_n$, то

$$V = V_1 + V_2 + ... + V_n = S_1h + S_2h + ... + S_nh = (S_1 + S_2 + ... + S_n)h = Sh.$$

Цим доведено, що *об'єм кожної прямої призми дорівнює добутку площі її основи на висоту*.

Циліндр можна розглядати як правильну $n$-кутну призму при дуже великому $n$. Наприклад, якщо $n$ дорівнює мільярду, то таку призму практично не можна відрізнити від циліндра. А, за доведеним, об'єм і такої призми дорівнює добуткові площі її основи на висоту. Тому *об'єм циліндра також дорівнює добуткові площі основи на висоту*. Оскільки площа круга радіуса $r$ дорівнює $\pi r^2$, то об'єм циліндра, радіус основи якого – $r$, а висота – $h$, можна знаходити за формулою

$$V = \pi r^2 h.$$

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Назвіть властивості об'єму.
2. У яких одиницях вимірюють об'єм?
3. Як можна вимірювати об'єми?
4. Чому дорівнює об'єм куба з ребром завдовжки $a$?
5. Чому дорівнює об'єм призми?
6. Чому дорівнює об'єм циліндра?

### Виконаємо разом

1. Площі трьох нерівних граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 дм², 10 дм² і 15 дм². Знайдіть його об'єм.

● **Розв'язання.** Якщо виміри даного паралелепіпеда – $x$, $y$, $z$, то $xy = 6$, $xz = 10$, $yz = 15$. Перемножимо ці рівності:

$$x^2y^2z^2 = 900.$$

Отже, шуканий об'єм $V = xyz = \sqrt{900} = 30$.

*Відповідь*. $V = 30$ дм³.

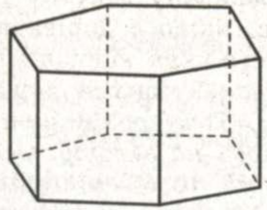
2. Знайдіть об'єм правильної шестикутної призми, кожне ребро якої має довжину $a$.

● **Розв'язання.** Висота даної призми (мал. 211) дорівнює $a$, а основу можна поділити на 6 правильних трикутників, площа кожного з яких дорівнює $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

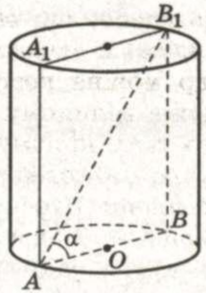
Тому шуканий об'єм $V = Sh = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = 1{,}5\sqrt{3}a^3$.

3. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює $d$ і нахилена до площини основи під кутом $\alpha$. Знайдіть об'єм циліндра.





Мал. 211




Мал. 212

● **Розв'язання.** Нехай $ABB_1A_1$ – осьовий переріз циліндра, $AB_1$ – його діагональ і $\angle B_1AB = \alpha$ (мал. 212). Трикутник $ABB_1$ – прямокутний, тому висота циліндра $BB_1 = d\sin\alpha$, а діаметр основи $AB = d\cos\alpha$. Радіус основи $OA = 0{,}5d\cos\alpha$. Тому шуканий об'єм циліндра

$$V = \pi \cdot OA^2 \cdot AB = \pi \cdot 0{,}25d^2\cos^2\alpha \cdot d\sin\alpha = 0{,}25\pi\cos^2\alpha\sin\alpha.$$

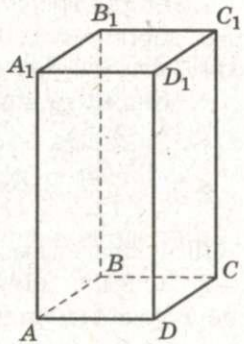
### Виконайте усно

**1131.** Ребро куба дорівнює 5 дм. Чому дорівнює його об'єм?

**1132.** Якою буде площа поверхні куба, якщо його об'єм дорівнює 27 см³?

**1133.** На малюнку 213 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть його об'єм, якщо:

а) $AD = 2a$, $DD_1 = a$, $DC = 3a$;
б) $AD = 0{,}5$ м, $DC = 4$ дм, $CC_1 = 3$ дм;
в) $AB = m$, $A_1D_1 = 2m$, $CC_1 = 0{,}5m$;
г) $S_{ABCD} = Q$, $CC_1 = 3$.




Мал. 213

**1134.** Зі шматка пластиліну, який мав форму прямокутного паралелепіпеда розмірами 1×2×4, виліпили куб. Знайдіть довжину ребра цього куба.

**1135.** Скільки кубів з ребром завдовжки 1 дм можна вкласти в коробку розмірами 3×4×5?

**1136.** Як зміниться об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо всі його виміри збільшити в 3 рази?

**1137.** Об'єм правильної чотирикутної призми дорівнює 14 см³. Знайдіть об'єми многогранників, на які ця призма поділяється двома перпендикулярними діагональними площинами.

## А

1138. Знайдіть об'єм куба, якщо площа його грані дорівнює $Q$.

1139. Діагональ куба дорівнює $d$. Знайдіть його об'єм.

1140. Об'єм куба дорівнює $V$. Знайдіть площу його поверхні.

1141. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони його основи дорівнюють 6 см і 8 см, а діагональ утворює з площиною основи кут 45°.

1142. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо сторони його основи дорівнюють 3 см і 4 см, а площа діагонального перерізу – 30 см$^2$.

1143. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної призми, якщо площа її основи дорівнює 49 см$^2$, а площа бічної грані – 56 см$^2$.

1144. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 8 см і утворює з площиною основи кут 30°. Знайдіть об'єм призми.

1145. Три свинцеві куби з ребрами 1 см, 6 см і 8 см переплавили в один куб. Знайдіть довжину ребра утвореного куба.

1146. Виміри прямокутного паралелепіпеда – 15 м, 36 м і 50 м. Знайдіть довжину ребра куба такого самого об'єму.

1147. Знайдіть об'єм прямокутного паралелепіпеда, якщо його діагональ дорівнює 39 см, а ребра пропорційні числам 3, 4 і 12.

1148. Ребра прямокутного паралелепіпеда пропорційні числам 1, 2 і 4. Знайдіть його об'єм, якщо площа поверхні дорівнює 112 см$^2$.

1149. На кожного учня класу має припадати не менш як 6 м$^3$ повітря. На скільки учнів розрахована класна кімната розмірами 10×6×3,5 м?

1150. В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з катетами 2 см і 5 см. Знайдіть об'єм призми, якщо її висота дорівнює 3 см.

1151. Знайдіть об'єм циліндра, радіус основи якого дорівнює 2 см, а висота – 5 см.



1152. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, всі ребра якої дорівнюють $a$.

1153. Основа прямої призми – прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см, а більша бічна грань – квадрат. Знайдіть об'єм призми.

1154. Осьовий переріз циліндра – квадрат зі стороною $a$. Знайдіть об'єм циліндра.

1155. Знайдіть об'єм циліндра, у який вписано кулю радіуса $R$.

1156. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням квадрата зі стороною $a$ навколо прямої, що містить сторону квадрата.

## Б

1157. Діагональ грані правильної трикутної призми дорівнює $d$ і нахилена до сторони основи під кутом $\alpha$. Знайдіть об'єм призми.

1158. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 10 см, 10 см і 16 см. Знайдіть об'єм призми, якщо периметр її більшої бічної грані дорівнює 48 см.

1159. Основою прямої призми є ромб зі стороною $a$ і кутом 60°. Знайдіть об'єм призми, якщо її менша діагональ утворює з площиною основи кут 45°.

1160. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція з основами 6 см і 10 см. Через більшу основу трапеції та середину протилежного бічного ребра проведено площину під кутом 30° до площини основи. Знайдіть об'єм призми, якщо площа перерізу дорівнює 48 см$^2$.

1161. У пряму призму, сторони основи якої дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см, вписано кулю. Знайдіть об'єм призми.

1162. Знайдіть об'єм прямого паралелепіпеда, сторона основи якого дорівнює $a$, а радіус вписаної кулі – $r$.

1163. Переріз залізничного насипу має вигляд трапеції з основами 18 м і 8 м та висотою 3 м. Знайдіть об'єм 1 км такого насипу.

1164. Довжини двох круглих колод рівні, а їх діаметри відносяться як 2 : 3. Як відносяться їх об'єми?

1165. Знайдіть площу круглої плями на поверхні моря, утвореної 1 м$^3$ нафти, якщо товщина її плівки дорівнює 1 мм.

**1166.** У циліндричну посудину, внутрішній діаметр якої – 20 см, опущено деталь. Рівень рідини, яка була в посудині, піднявся на 12 см. Знайдіть об'єм деталі.

**1167.** Скільки квадратних метрів паперу в рулоні, висота якого – 85 см, а радіуси – 45 см і 2 см? Товщина паперу – 0,1 мм.

### Вправи для повторення

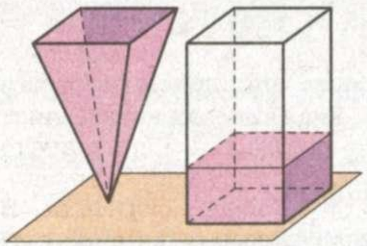
**1168.** Знайдіть площу поверхні тіла, утвореного обертанням трикутника зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см навколо сторони завдовжки 14 см.

**1169.** Знайдіть висоту циліндра, якщо діаметр його основи $d$ з центра другої основи видно під кутом $\alpha$.

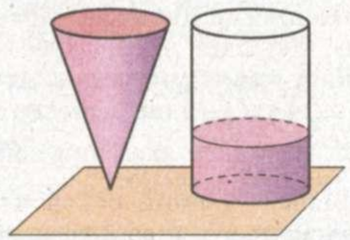
**1170.** Знайдіть площу поверхні правильної трикутної піраміди, у якої апофема завдовжки $l$ утворює з висотою кут $\alpha$.

## § 36. Об'єм піраміди, конуса та кулі

Формули для визначення об'ємів піраміди, конуса та кулі можна встановити експериментально. Пересипаючи пісок з піраміди в призму (мал. 214) або з конуса в циліндр (мал. 215) з відповідно рівними основами й висотами, неважко переконатися, що об'єм піраміди втричі менший за об'єм призми, а об'єм конуса втричі менший за об'єм циліндра. Отже, *об'єм піраміди чи конуса дорівнює третині добутку площі основи на висоту*.



Мал. 214



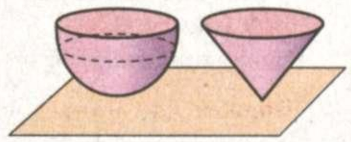
Мал. 215

Зокрема, якщо радіус основи конуса – $r$, а висота – $h$, то його об'єм $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

У такий спосіб можна переконатися, що об'єм півкулі радіуса $r$ удвічі більший за об'єм конуса, радіус основи якого і висота дорівнюють $r$ (мал. 216). Оскільки об'єм такого конуса дорівнює $\frac{1}{3}\pi r^3$, то об'єм кулі радіуса $r$ можна визначити за формулою $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

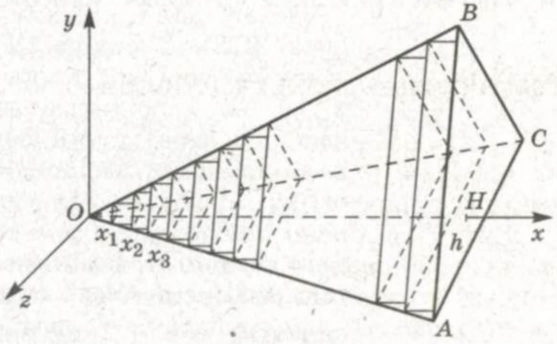


Зрозуміло, що такі міркування – не доведення. Строго математично вивести формули для визначення об'ємів зазначених тіл можна за допомогою інтегралів. Наведемо загальні схеми таких доведень.



Мал. 216

Нехай дано довільну піраміду $OABC$ (мал. 217). Розмістимо прямокутну систему координат так, щоб її початок збігався з вершиною $O$, а вісь $x$ була напрямлена вздовж висоти піраміди $OH$.




Мал. 217

Поділимо цю висоту $h$ точками $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ на $n$ рівних відрізків. Якщо через кожну з цих точок провести площини, перпендикулярні до осі $x$, то вони поділять піраміду на $n$ частин. Одна з цих частин – маленька піраміда, решта – зрізані піраміди. Замінимо уявно кожну з цих зрізаних пірамід прямою призмою з такою самою висотою та основою, що дорівнює меншій основі відповідної зрізаної піраміди. Внаслідок цього утвориться вписане в піраміду східчасте тіло, складене з $n - 1$ призм. Висота кожної з цих призм $\delta = \frac{h}{n}$, а площі основ – деякі функції від $x$: $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ..., $f(x_{n-1})$. Об'єм $V_n$ утвореного східчастого тіла дорівнює сумі об'ємів усіх цих $n - 1$ призм:

$$V_n = f(x_1)\delta + f(x_2)\delta + \ldots + f(x_{n-1})\delta.$$

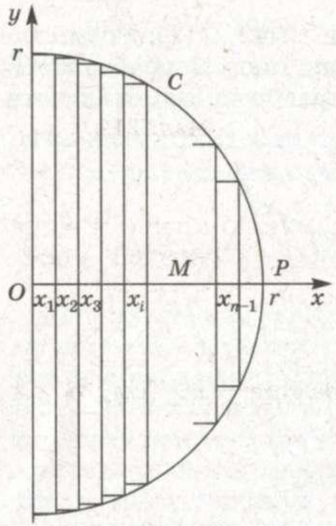
Це – інтегральна сума. Тут функція $f(x)$ – площа перерізу піраміди площиною, що перпендикулярна до осі $x$ і віддалена від вершини $O$ на $x$.

Як було показано на с. 226, $f(x) : S = x^2 : h^2$, звідки

$$f(x) = \frac{S}{h^2}x^2.$$

Отже, шуканий об'єм даної піраміди

$$V = \int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h = \frac{Sh^3}{3h^2} = \frac{1}{3}Sh.$$



Мал. 218

Так само, але замінивши скрізь слово «піраміда» на «конус», можна довести, що й об'єм конуса дорівнює третині добутку площі його основи на висоту. Аналогічно виводиться також формула об'єму кулі.

Нехай дано півкулю радіуса $r$ (мал. 218). Її радіус $OP$, який лежить на осі $x$, точками $x_1$, $x_2$, $x_3$, ..., $x_{n-1}$ поділимо на $n$ рівних частин і через точки поділу проведемо площини, перпендикулярні до осі $x$. Дану півкулю вони поділять на $n$ частин. Кожну з цих частин, крім останньої, замінимо циліндром так, щоб утворилося східчасте тіло, складене з $n - 1$ циліндрів. Висота кожного з цих циліндрів $\delta = \frac{r}{n}$, а площі основ – деякі функції від $x_i$: $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ..., $f(x_{n-1})$. Об'єм утвореного східчастого тіла, вписаного в цю півкулю, $f(x_1)\delta + f(x_2)\delta + f(x_3)\delta + \ldots + f(x_{n-1})\delta$.

Це – інтегральна сума. Функція $f(x_i)$ – площа перерізу, проведеного через точку $x_i$ площиною, перпендикулярною до осі $x$. Якщо абсцису $x_i$ має точка $C$ на поверхні кулі, то $f(x_i)$ – площа круга радіуса $CM$. З прямокутного трикутника $OCM$ маємо: $CM^2 = r^2 - x_i^2$. Тому $f(x_i) = \pi(r^2 - x_i^2)$. Отже, об'єм півкулі радіуса $r$

$$\int_0^r \pi(r^2 - x^2)dx = \left(\pi r^2 x - \frac{\pi x^3}{3}\right)\Bigg|_0^r = \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

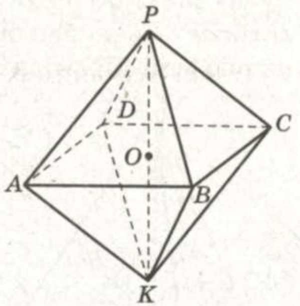
Об'єм усієї кулі радіуса $r$ вдвічі більший, тобто $V_к = \frac{4}{3}\pi r^3$.



### Виконаємо разом

**1.** Знайдіть об'єм правильного октаедра, ребро якого дорівнює $a$.

**Розв'язання.** Правильний октаедр $PABCDK$ – об'єднання двох рівних правильних пірамід: $PABCD$ і $KABCD$ (мал. 219). Їх спільна основа – квадрат $ABCD$, площа якого $S = a^2$; $PK = a\sqrt{2}$ як діагональ квадрата $APCK$ зі стороною $a$. Шуканий об'єм



Мал. 219

$$V = \frac{1}{3}S \cdot PO + \frac{1}{3}S \cdot KO = \frac{1}{3}S \cdot PK =$$
$$= \frac{1}{3}a^2 \cdot a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3.$$

**2.** Знайдіть об'єм трикутної піраміди, якщо кожне її бічне ребро дорівнює $a$, а плоскі кути при вершині – 60°, 90° і 90°.

**Розв'язання.** Візьмемо за основу піраміди її грань, яка є рівностороннім трикутником.

Його площа $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а висота піраміди – $a$. Тому об'єм піраміди $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{12}a^3$.

*Відповідь.* $\frac{\sqrt{3}}{12}a^3$.

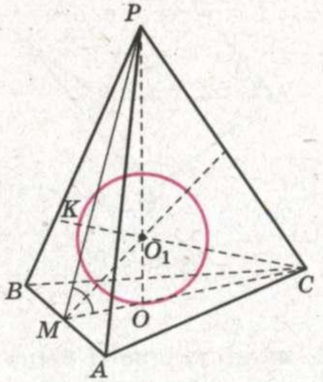
**3.** Доведіть, що коли многогранник, описаний навколо кулі радіуса $r$, має площу поверхні $S$, то його об'єм $V = \frac{1}{3}Sr$.

**Розв'язання.** Сполучимо центр кулі з кожною вершиною описаного $n$-гранника, дістанемо $n$ пірамід. Висота кожної з них дорівнює $r$, а площа основи – площі відповідної грані даного многогранника. Тому, якщо $S_1$, $S_2$, ..., $S_n$ – площі граней описаного многогранника, то його об'єм

$$V = \frac{1}{3}S_1r + \frac{1}{3}S_2r + \ldots + \frac{1}{3}S_nr = \frac{1}{3}r(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \frac{1}{3}Sr.$$

**4. Знайдіть об'єм кулі, вписаної в правильну трикутну піраміду, сторона основи якої – $a$, а двогранний кут при ребрі основи – $\alpha$.**

**Розв'язання.** Центр $O_1$ кулі, вписаної в правильну трикутну піраміду $PABC$, лежить на її висоті $PO$ (мал. 220). Куля дотикається до бічної грані $PAB$ у деякій точці $K$, яка лежить на апофемі піраміди $PM$.




Мал. 220

Якщо $AB = a$, то

$$OM = \frac{1}{3}MC = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Оскільки $\Delta O_1OM = \Delta O_1KM$, то

$$\angle O_1MO = \frac{1}{2}\angle PMO = \frac{\alpha}{2}.$$

З прямокутного трикутника $MOO_1$ знаходимо радіус кулі:

$$OO_1 = OM\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Отже, об'єм кулі

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot OO_1^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{54}\pi a^3 \mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}.$$

*Відповідь.* $\frac{\sqrt{3}}{54}\pi a^3 \mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}$.

### Виконайте усно

**1171.** Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює 5 см, а висота – 4 см.

**1172.** Знайдіть об'єм трикутної піраміди, в основі якої лежить прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см, а гіпотенуза дорівнює висоті піраміди.

**1173.** Знайдіть об'єм конуса, висота якого дорівнює 3 см, а радіус основи – 1 см.

### А

**1174.** Знайдіть об'єм конуса, висота якого дорівнює 2 м, а твірна утворює з площиною основи кут 45°.

**1175.** Знайдіть об'єм конуса, твірна якого дорівнює 5 см, а висота – 3 см.



**1176.** Чому дорівнює об'єм кулі радіуса 2 см?

**1177.** Як зміниться об'єм кулі, якщо її діаметр збільшити у 2 рази?

**1178.** Знайдіть радіус кулі, якщо її об'єм дорівнює $36\pi$ см$^3$.

**1179.** Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, висота якої дорівнює $h$, а діагональ основи – $d$.

**1180.** Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, кожне ребро якої дорівнює 1 дм.

**1181.** Знайдіть об'єм піраміди Хеопса, якщо площа її основи дорівнює 5,3 га, а висота – 147 м.

**1182.** Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює $b$, а плоский кут при вершині – 90°.

**1183.** Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні, а їх довжини дорівнюють $a$, $b$, $c$. Знайдіть об'єм піраміди.

**1184.** Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо її бічне ребро дорівнює $b$ та утворює: а) з площиною основи кут $\alpha$; б) з висотою піраміди кут $\beta$; в) зі стороною основи піраміди кут $\varphi$.

**1185.** Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює $a$ і: а) двогранний кут при ребрі основи дорівнює $\alpha$; б) бічне ребро утворює з площиною основи кут $\beta$; в) плоский кут при вершині піраміди дорівнює $\varphi$.

**1186.** Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює 6 см, а бічне ребро – 5 см.

**1187.** Знайдіть об'єм правильної трикутної піраміди, у якої сторона основи дорівнює $a$ і: а) двогранний кут при ребрі основи дорівнює $\alpha$; б) бічне ребро утворює з площиною основи кут $\beta$; в) плоский кут при вершині піраміди дорівнює $\varphi$.

**1188.** Знайдіть об'єм конуса, якщо його твірна дорівнює $l$ і нахилена до площини основи під кутом $\alpha$.

**1189.** Свинцевий конус, висота якого дорівнює 18 см, переплавили в циліндр з такою самою основою. Знайдіть висоту циліндра.

**1190.** Купа щебеню має форму конуса, твірна якого – 4 м. Знайдіть її об'єм, якщо кут природного укосу для щебеню – 30°.

1191. Маємо два конуси однакового зерна одного сорту: один удвічі вищий за другий. У скільки разів у першому конусі більше зерна, ніж у другому?

1192. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник з катетом $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть об'єм конуса.

1193. Осьовий переріз конуса – рівносторонній трикутник. Знайдіть об'єм конуса, якщо площа його поверхні дорівнює $12\pi$ см$^2$.

1194. Чому дорівнює об'єм кулі, вписаної в куб, об'єм якого дорівнює 8 м$^3$?

1195. Знайдіть висоту циліндра, у який вписано кулю об'ємом $\frac{4}{3}\pi$ см$^3$.

1196. Знайдіть об'єм кулі, діаметр якої дорівнює 4 дм.

1197. Площа поверхні кулі дорівнює $16\pi$ см$^2$. Знайдіть об'єм цієї кулі.

1198. Ребро куба дорівнює $a$. Знайдіть об'єми вписаної та описаної куль.

1199. Як відносяться об'єми двох куль, якщо їх радіуси відносяться як 2 : 3?

1200. Скільки кульок діаметра 0,6 см можна відлити зі шматка свинцю масою 1 кг? Густина свинцю – 11,4 кг/дм$^3$.

1201. Діаметр одного кавуна вдвічі більший за діаметр другого. У скільки разів перший кавун важчий за другий?

1202. Пересипаючи пісок з порожнистої півкулі радіуса $r$ у конус, радіус і висота якого дорівнюють $r$, учень дійшов висновку, що об'єм півкулі у 2 рази більший за об'єм конуса. Чи відповідає результат цього експерименту теорії?

## Б

1203. За бічним ребром $b$ і плоским кутом $2\alpha$ при вершині піраміди знайдіть об'єм правильної піраміди: а) чотирикутної; б) трикутної; в) шестикутної.

1204. Знайдіть об'єм правильного тетраедра, ребро якого дорівнює $a$.

1205. Основа піраміди – паралелограм зі сторонами $a$, $b$ і кутом $\varphi$. Висота піраміди – $h$. Знайдіть об'єм піраміди.



1206. Основа піраміди – трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см. Двогранні кути при кожному ребрі основи дорівнюють по 45°. Знайдіть об'єм піраміди.

1207. Через вершину конуса проведено площину під кутом 45° до площини основи. Ця площина перетинає основу конуса по хорді $a$, яку видно з центра основи під кутом 60°. Знайдіть об'єм конуса.

1208. Визначте об'єм конуса, якщо в його основі хорда $m$ стягує дугу $\varphi$, а кут між твірною і висотою дорівнює $\alpha$.

1209. З центра основи конуса до твірної проведено перпендикуляр завдовжки $d$. Знайдіть об'єм конуса, якщо цей перпендикуляр утворює з площиною основи кут $\alpha$.

1210. Осьовим перерізом конуса є рівносторонній трикутник зі стороною 6 см. Знайдіть об'єм вписаної в цей конус правильної піраміди: а) чотирикутної; б) трикутної.

1211. Доведіть теорему Архімеда: об'єм кулі в 1,5 разу менший за об'єм описаного навколо неї циліндра.

1212. З циліндра, осьовий переріз якого – квадрат зі стороною 10 см, коваль викував кулю. Знайдіть радіус цієї кулі.

1213. Зі свинцевої кулі радіуса 10 см зробили циліндричний диск завтовшки 3 см. Знайдіть діаметр диска.

1214. Кут в осьовому перерізі кульового сектора дорівнює 60°. Знайдіть відношення об'єму кульового сектора до об'єму відповідного конуса.

1215. Знайдіть об'єм кулі, описаної навколо конуса, твірна якого дорівнює $l$ і нахилена до площини основи під кутом $\alpha$.

1216. Навколо кулі описано правильну чотирикутну піраміду, кожна з бічних граней якої утворює з площиною основи кут $\alpha$. Знайдіть об'єм кулі, якщо висота піраміди дорівнює $h$. Обчисліть для $h = 9$ см, $\alpha = 60°$.

1217. З циліндра, висота якого дорівнює діаметру, виточили кулю найбільшого об'єму. Скільки відсотків матеріалу сточено?

1218. Маса порожнистої чавунної кулі – 1,57 кг, її зовнішній діаметр – 10 см. Знайдіть внутрішній діаметр, якщо густина чавуну 7,3 кг/дм$^3$.

1219. Якою має бути загальна маса космічного апарата, що має форму кулі радіуса 1 м, щоб він не тонув у воді?

1220. З краплини мильного розчину діаметра 6 мм хлопчик видув бульбашку діаметра 30 см. Знайдіть товщину плівки цієї бульбашки.

## Самостійна робота № 9

**Варіант 1**

1. Знайдіть об'єм правильної трикутної призми, висота якої дорівнює 10 см, а сторона основи – 5 см.

2. Знайдіть об'єм конуса, твірна якого дорівнює 6 см і утворює кут 30° з його висотою.

3. Об'єм кулі дорівнює $36\pi$ см$^3$. Знайдіть її діаметр.

4. Намалюйте кулю, вписану у правильний тетраедр.

**Варіант 2**

1. Знайдіть об'єм циліндра, висота якого дорівнює 7 см, а радіус основи – 5 см.

2. Знайдіть об'єм правильної чотирикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює 6 см і утворює з її висотою кут 45°.

3. Діаметр кулі дорівнює 6 см. Знайдіть її об'єм.

4. Намалюйте сферу, описану навколо правильного октаедра.

## КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Сформулюйте властивості об'єму.
2. Якими одиницями вимірюють об'єм?
3. Як можна виміряти об'єм тіла? Наведіть приклади.
4. Чому дорівнює об'єм куба?
5. Як обчислюють об'єм прямокутного паралелепіпеда?
6. За якою формулою обчислюють об'єм призми?
7. Наведіть формулу, за якою обчислюють об'єм циліндра.
8. За якою формулою обчислюють об'єм піраміди?
9. Запишіть формулу для обчислення об'єму конуса.
10. Запишіть формулу для обчислення об'єму кулі.

## Історичні відомості

Геометричні тіла були добре відомі давньогрецьким ученим, хоч їх означення формулювали тоді інакше. Для прикладу наведемо кілька означень з «Основ» Евкліда: «Тілом називається те, що має довжину, ширину і глибину. Межами тіла є поверхні... Призма – це тіло, обмежене площинами,



дві протилежні яких рівні, подібні й паралельні, а решта є паралелограми... Куб – тіло, обмежене шістьма рівними квадратами...».

Знали давньогрецькі геометри також фігури обертання. Назви «циліндр», «конус», «сфера» – грецького походження. У «Основах» Евкліда їх зміст описано такими фразами: «Циліндр походить від обертання прямокутника навколо нерухомої сторони»; «Конус описано прямокутним трикутником, який обертається навколо нерухомої перпендикулярної сторони»; «Сферу описано півкругом, який обертається навколо нерухомого діаметра». Як бачимо, стародавні греки сферою називали не поверхню кулі, а всю кулю. Розрізняти ці два поняття стали пізніше.

Архімед (бл. 287–212 до н. е.) тілам обертання присвятив дві праці: «Про кулю і циліндр» та «Про коноїди і сфероїди». Він також розглядав властивості фігур, утворених обертанням еліпса, частини параболи тощо. Конічною поверхнею вважають поверхню, утворену обертанням однієї з двох прямих, які перетинаються, навколо другої. Аполлоній Пергський (бл. 262 – бл. 190 до н. е.) з'ясував властивості конічних поверхонь у праці «Конічні перерізи». Він дослідив, у яких випадках перерізом такої поверхні та площини є коло, еліпс, гіпербола чи парабола. Ці дослідження суттєво вплинули на розвиток математики, астрономії, механіки й оптики.

Об'єми простих многогранників уміли знаходити ще в Стародавньому Єгипті. В одному папірусі, який дійшов до наших днів, крім іншого, розв'язується задача на визначення об'єму зрізаної піраміди з висотою 6 і сторонами основ 4 і 2. Архімед умів знаходити об'єми навіть параболоїда, гіперболоїда й еліпсоїда обертання, а також площі поверхонь циліндра, конуса, кулі.

Нові методи визначення об'ємів геометричних тіл розробив італійський математик Б. Кавальєрі (1598–1647). Його міркування були нестрогими, інтуїтивними, бо посилався він на ще не доведені твердження, які вважав очевидними. Тільки згодом їх було доведено методами математичного аналізу.

Строгу сучасну теорію об'ємів, площ та інших величин розробив відомий французький математик А. Лебег (1875–1941). На основі загального поняття міри він запровадив нове, загальніше, поняття інтеграла, який тепер називають інтегралом Лебега.

З українських математиків найбільший внесок у розвиток геометрії зробили Г.Ф. Вороний, М.Є. Ващенко-Захарченко, О.С. Смогоржевський.

*Вороний Георгій Феодосійович* був професором Петербурзького і Варшавського університетів. Досліджував питання про заповнення площини та простору рівними фігурами. Є творцем геометричної теорії чисел.

*Ващенко-Захарченко Михайло Єгорович* (1825–1912) народився в с. Маліївці на Полтавщині. Навчався в Києві і Парижі, був професором Київського університету. Досліджував питання історії розвитку геометрії, надрукував кілька посібників з геометрії, переклав з грецької «Початки» Евкліда.

*Смогоржевський Олександр Степанович* (1896–1969) народився в с. Лісовому на Вінниччині. Навчався в Немирові, Києві, був професором Київського політехнічного інституту. Досліджував питання, пов'язані з геометричними побудовами, надрукував кілька посібників і підручників, зокрема підручник з основ геометрії для студентів університетів. Його праці перекладено англійською, болгарською, чеською, японською та деякими іншими мовами.

Розвивається геометрична наука і тепер, бо вона дуже потрібна людям. Ось що писав один з найвідоміших архітекторів XX ст. Ле Корбюзьє: «Ніколи ще до нашого часу ми не жили в такий геометричний період... Навколишній світ – це світ геометрії, чистий, істинний, бездоганний у наших очах. Все навколо – геометрія». Тому ким би не став сучасний школяр, де б він не працював, йому потрібна геометрія.

ГЕОРГІЙ ФЕОДОСІЙОВИЧ ВОРОНИЙ

(1868–1908)

Український математик. Народився в с. Журавка (Чернігівська обл.), досліджував проблеми геометричної теорії чисел та геометрії многогранників. Математики всього світу дедалі частіше використовують поняття: алгоритм Вороного, клітини Вороного, метод Вороного, многокутники Вороного, діаграми Вороного, розбиття Вороного, мозаїка Вороного тощо.



## Головне в розділі 6

Призми, піраміди, зрізані піраміди, правильні многогранники – найпростіші та найважливіші види многогранників.

*Призмою* називають многогранник, у якого дві грані – рівні $n$-кутники, а решта $n$ граней – паралелограми. Призма називається *прямою*, якщо її бічні ребра перпендикулярні до основ. Призма називається *правильною*, якщо вона пряма, а її основи – правильні многокутники. Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи на висоту.

*Паралелепіпедом* називають призму, в основі якої лежить паралелограм. Якщо бічні ребра паралелепіпеда перпендикулярні до площин основ, його називають *прямим паралелепіпедом*. Якщо всі 6 граней паралелепіпеда прямокутники, його називають *прямокутним паралелепіпедом*. Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів. Усі діагоналі прямокутного паралелепіпеда рівні.

*Пірамідою* називають многогранник, одна грань якого – довільний многокутник, а всі інші грані – трикутники, що мають спільну вершину. Піраміда називається *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, центр якого збігається з основою висоти. Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини, – *апофема* піраміди. Площа бічної поверхні правильної піраміди дорівнює добутку півпериметра її основи на апофему.

Многогранник називається *правильним*, якщо всі його грані – рівні правильні многокутники, а всі вершини однаково віддалені від деякої точки. Існує всього 5 видів правильних многогранників: правильні тетраедр, гексаедр (куб), октаедр, додекаедр та ікосаедр.

Циліндр, конус, зрізаний конус, куля, кульовий сегмент, кульовий сектор – найважливіші тіла обертання.

*Циліндр* – тіло, утворене обертанням прямокутника навколо його сторони. Поверхня циліндра складається з двох основ і бічної поверхні. Основи циліндра – рівні круги, що лежать у паралельних площинах; бічну поверхню можна розгорнути у прямокутник. Тому якщо радіус і висота циліндра $r$ і $h$, то площа його бічної поверхні $S = 2\pi rh$, площа поверхні $S = 2\pi r(r + h)$.

*Конус* – тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета. Якщо радіус конуса $r$, а твірна $l$, то площа бічної поверхні конуса $S = \pi rl$, а площа поверхні

$$S = \pi r(r + l).$$