Г.П. БЕВЗ, В.Г. БЕВЗ

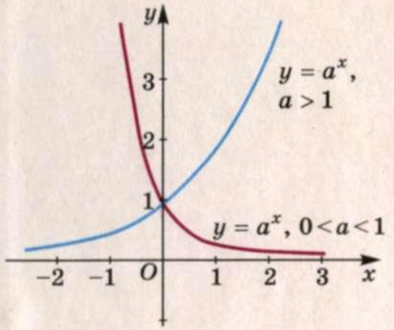
МАТЕМАТИКА

11

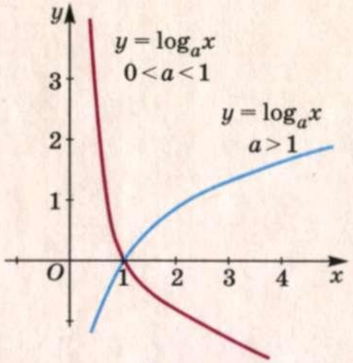
Рівень стандарту

ФУНКЦІЇ

Показникова



Логарифмічна



$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$(ab)^n = a^n \cdot b^n$

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^p = p \log_a x$

Похідна та її застосування

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta}$$

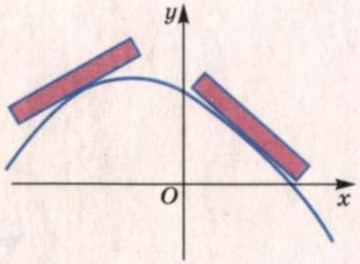
$$\left(f(x) + \varphi(x)\right)' = f'(x) + \varphi'(x)$$

$$\left(f(x) \cdot \varphi(x)\right)' = f'(x) \cdot \varphi(x) + f(x) \cdot \varphi'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot \varphi(x) - f(x) \cdot \varphi'(x)}{\varphi^2(x)}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

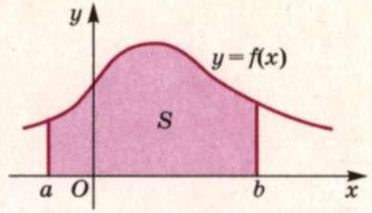


$f'(x) > 0$ зростає $f'(x) < 0$ спадає

Інтеграл

Якщо $F'(x) = f(x)$, то $F(x)$ – первісна для $f(x)$.

$f(x)$	$F(x)$
k	$kx + C$
x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$



$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Комбінаторика

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ – n-факторіал

$P_n = n!$ – кількість перестановок

$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

$C_n^k = A_n^k : P_k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$

$P(n) = \dfrac{1}{6}$

Вибірка – 2, 2, 1, 5, 4, 5, 4, 5, 6
Варіаційний ряд – 1, 2, 2, 4, 4, 5, 5, 5, 6
Мода вибірки – 5
Медіана вибірки – 4
Середнє значення – $3\frac{7}{9}$

Г.П. БЕВЗ, В.Г. БЕВЗ

МАТЕМАТИКА

11

Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів

Рівень стандарту

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Київ
«Генеза»
2011

ББК 22.1я721
Б36

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України № 235 від 16.03.2011 р.)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Наукову експертизу проводив Інститут математики Національної академії наук України

Психолого-педагогічну експертизу проводив Інститут педагогіки Національної академії педагогічних наук України

Бевз Г. П.
Б36 Математика : 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : рівень стандарту / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К. : Генеза, 2011. – 320 с. : іл. – Бібліогр. : с. 294.
ISBN 978-966-11-0063-2.

Цей підручник призначений для завершення вивчення математики в середній школі. Він відповідає рівню стандарту. Підручник містить шість розділів: «Показникові та логарифмічні функції», «Похідна та її застосування», «Інтеграл та його застосування», «Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики», «Координати і вектори у просторі», «Геометричні тіла. Об'єми та площі поверхонь геометричних тіл».

ББК 22.1я721

ISBN 978-966-11-0063-2

ПЕРЕДМОВА

Про користь математики для людей різних інтересів і професій добре знаємо. Ось як про це говорили відомі математики:

«Вивчення математики важливе з двох поглядів: по-перше, через сильний вплив цієї строгої науки на розвиток розумових здібностей; по-друге, через загальність її застосувань» (М.В. Остроградський).

«Без знання математики неможливо зрозуміти ні основ сучасної техніки, ні того, як вчені вивчають природні й соціальні явища» (А.М. Колмогоров).

«Є одна наука, без якої неможлива жодна інша. Це – математика. Її поняття, зображення й символи служать тією мовою, якою говорять, пишуть і думають інші науки. Вона пояснює закономірності складних явищ, зводячи їх до простих, елементарних явищ природи. Вона передбачає і далеко наперед вираховує з величезною точністю перебіг подій» (С.Л. Соболєв).

Ця книжка – підручник, за яким ви будете завершувати вивчення математики в середній школі. Щоб уявити її всю та зрозуміти, яке місце відводиться в ній матеріалу 11-го класу, розгляньте таблицю, де кольором виділено матеріал, який ви будете вивчати цього року.

МАТЕМАТИКА	
Алгебра і початки аналізу	*Геометрія*
Функції, рівняння та нерівності	Точки, прямі, відрізки, кути, многокутники, кола, круги
Степеневі функції	Довжини, площі, міри кутів і дуг
Тригонометричні функції	Рухи та перетворення подібності
Тригонометричні рівняння та нерівності	Координати й вектори на площині
Показникові та логарифмічні функції	Прямі та площини в просторі
Похідна та її застосування	Координати й вектори у просторі
Інтеграл та його застосування	Многогранники, тіла обертання
Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики	Площі поверхонь та об'єми геометричних тіл

Підручник адресовано учням загальноосвітніх навчальних закладів, які навчаються за програмою рівня стандарту. Програма передбачає як спільне, так і роздільне вивчення геометрії та алгебри і початків аналізу. Загалом для вивчення всього курсу відводиться 3–4 години на тиждень. Основним для вас у навчанні математики є розвиток загальної та математичної культури і формування навичок застосування математичних знань.

Окремі теми, що розглядаються в цьому підручнику, ви вже знаєте з попередніх класів, але більшість їх – зовсім нові. Намагайтеся опанувати ці теми. Читаючи теорію, основну увагу звертайте на слова, надруковані курсивом і жирним шрифтом. *Курсивом* виділено терміни та назви понять. **Жирним шрифтом** надруковано важливі твердження й теореми.

Вивчення математики істотно полегшується, якщо математичні поняття розглядати не ізольовано одне від одного, а розрізняти, які з них родові, а які видові. Намагайтеся зрозуміти, наприклад, що куб – окремий вид паралелепіпеда, паралелепіпед – вид призми, призма – вид многогранника, многогранник – вид геометричних тіл і т. д. Зверніть увагу на те, що логарифмування – це операція, обернена до піднесення до степеня, а інтегрування – обернена до диференціювання.

Вивчаючи ту чи іншу тему, намагайтеся систематизувати матеріал: малюйте відповідні діаграми та схеми.

Знати математику – це насамперед уміти користуватися нею. Учитися користуватися математичними знаннями найкраще під час розв'язування задач. У підручнику є задачі до кожної теми, до кожного параграфа – різних рівнів складності. Задачі та вправи поділені на:  «Виконайте усно» (рівень А та рівень Б) і  «Вправи для повторення». Завдання, рекомендовані для домашньої роботи, виділено кольором. У кожному параграфі підручника є рубрика  «Виконаємо разом», у якій подано задачі з розв'язаннями. Радимо переглянути їх, перш ніж виконувати домашнє завдання.

Цікаві доповнення до основного матеріалу містяться в рубриці «Історичні відомості».

Для узагальнення та систематизації вивченого матеріалу призначено рубрики «Головне в розділі» і  «Самостійна робота».

Для тих, хто хоче дізнатися більше, у додатках пропонуються теми для робіт творчого характеру і список відповідної літератури.

Математику можна порівняти з великим і барвистим квітником, у якому кожен може дібрати собі букет за смаком. Зрозуміло, щоб зробити це, спершу треба ввійти в цей квітник.

Ласкаво просимо!

Автори

Алгебра і початки аналізу

Немає жодної галузі людського знання,
куди не входили б поняття про функції
та їх графічне зображення.

К. Лебединцев

1 Показникові та логарифмічні функції

ТЕМИ РОЗДІЛУ

- Повторення відомостей про функції.
- Степеневі й показникові функції.
- Показникові рівняння та нерівності.
- Логарифми та їх властивості.
- Логарифмічні функції.
- Логарифмічні рівняння та нерівності.

§ 1. Функції та їх основні властивості

Повторимо основні відомості про функції, які ви знаєте з попередніх класів.

Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини D відповідає єдине значення змінної y, то таку відповідність називають *функцією*.

Тут x – ***незалежна змінна***, або ***аргумент***, y – ***залежна змінна***, або ***функція***.

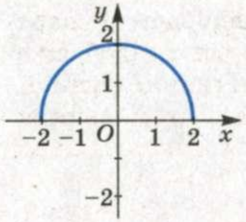
Множину всіх значень x, яких може набувати аргумент функції, називають ***областю визначення*** даної функції і позначають буквою D.

Множину всіх значень y, яких може набувати функція, називають її ***областю значень*** і позначають буквою E.

Найчастіше функції задають: а) таблично; б) графічно; в) за допомогою формули.

Наприклад, відповідність між довжиною a ребра куба та його об'ємом V можна задати формулою $V = a^3$, де $a > 0$.

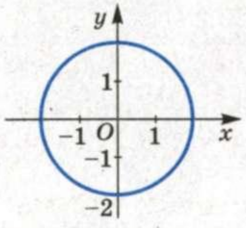
Якщо функцію задають формулою і нічого не говорять про область її визначення, то вважають, що ця область – множина всіх значень змінної, при яких формула має зміст. Наприклад, область визначення функції $y = x^2 + x - 1$ – множина R, а функції $y = \dfrac{x}{x-1}$ – множина $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.



Мал. 1

Якщо функцію задано графічно, то область визначення функції – проекція її графіка на вісь x, а область значень – проекція її графіка на вісь y. Наприклад, на малюнку 1 зображено графік функції $y = \sqrt{4 - x^2}$. Область визначення цієї функції – множина $[-2; 2]$, а множина значень – $[0; 2]$.

Нагадаємо, що ***графіком функції*** називається множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, ординати – відповідним значенням функції.



Мал. 2

Чи задає функцію графік, зображений на малюнку 2? Ні, оскільки на цьому графіку одному значенню аргументу x (наприклад, $x = 1$) відповідають два різні значення y. А згідно з означенням, функцією вважається тільки така відповідність, при якій одному значенню аргументу x з області визначення відповідає **єдине** значення функції y.

Дивлячись на графік, одразу можна: з'ясувати властивості функції, яку він задає, – область визначення та область значень; з'ясувати, чи є дана функція періодичною, парною або непарною; знайти точку перетину графіка функції з віссю y, нулі функції ($y = 0$) та проміжки знакосталості ($y > 0$ чи $y < 0$); визначити проміжки зростання чи спадання; з'ясувати, чи має функція найбільше та найменше значення тощо.

Функція $y = f(x)$ називається *парною*, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x) = f(x)$.

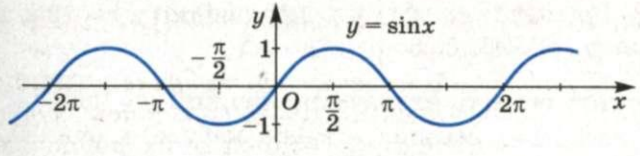
Функція $y = f(x)$ називається *непарною*, якщо її область визначення симетрична відносно нуля і для кожного значення x з області визначення $f(-x) = -f(x)$.

Існують функції ні парні, ні непарні. Це такі функції, в яких або область визначення не симетрична відносно нуля, або для яких не виконується жодна з умов $f(-x) = \pm f(x)$.

Графік парної функції симетричний відносно осі y (див. мал. 1), а непарної – відносно початку координат (мал. 3).

Функція $y = f(x)$ називається *періодичною* з періодом $T \neq 0$, якщо для будь-якого x з області її визначення $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.

Область визначення періодичної функції – вся числова пряма R, або нескінченна з обох боків множина числових проміжків. Графік періодичної функції з періодом T паралельним перенесенням на відстань T вздовж осі x відображається на себе. Періодичними є всі тригонометричні функції. На малюнку 3 зображено графік функції $y = \sin x$, найменший додатний період якої $T = 2\pi$.



Мал. 3

Функцію називають *зростаючою* на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше значення функції. Функцію називають *спадною* на деякому проміжку, якщо кожному більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає менше значення функції.

Функція $y=\sqrt{4-x^2}$ (див. мал. 1) зростає на проміжку $[-2;\ 0]$ і спадає на проміжку $[0;\ 2]$.

Функція $y=\sin x$ (див. мал. 3) зростає на кожному проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, а спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$.

Характеризуючи властивості функції, зазначають також її найбільше та найменше значення. Наприклад, функція $y=\sqrt{4-x^2}$ у точці $x=0$ має найбільше значення 2, а в точках -2 і 2 – найменше значення, яке дорівнює 0 (див. мал. 1). За малюнком 3 визначте самостійно найбільше та найменше значення функції $y=\sin x$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке функція? Що таке аргумент функції?
2. Що таке область визначення функції?
3. Як можна задавати функцію?
4. Які функції ви знаєте? Які їх графіки?
5. Які функції називають зростаючими? А спадними?
6. Які функції називають парними? А непарними? Наведіть приклади.
7. Які функції називають періодичними? Наведіть приклади періодичних функцій.

Виконаємо разом

1. Для функції $y=x^3-5$ знайдіть:
а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 10;
б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 120.

● **Розв'язання.** а) Якщо $x=10$, то $y=10^3-5=1000-5=995$; б) якщо $y=120$, то $x^3-5=120$, звідки $x^3=125$, а $x=5$.
Відповідь. а) 995; б) 5.

2. Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{x^2-4}$.

● **Розв'язання.** Змінна x може набувати будь-яких значень, при яких підкореневий вираз буде невід'ємним числом. Щоб знайти такі значення, розв'яжемо нерівність $x^2-4\geqslant 0$.

Мал. 4

Оскільки квадратний тричлен x^2-4 має корені -2 і 2, то множина розв'язків нерівності $x^2-4\geqslant 0$ запишеться так: $(-\infty;\ -2]\cup[2;\ \infty)$ (мал. 4).
Відповідь. $(-\infty;\ -2]\cup[2;\ \infty)$.

3. Доведіть, що функція $y=x\cos x$ – непарна.

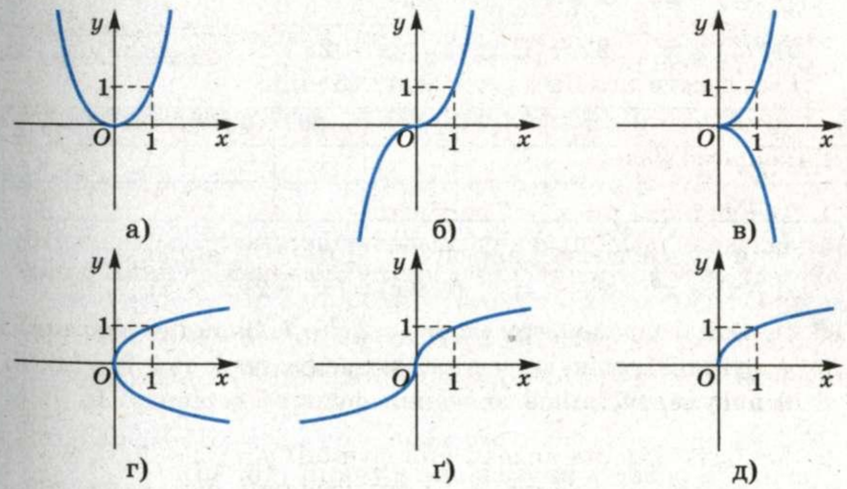
● **Розв'язання.** Область визначення функції $y=x\cos x$ – множина всіх дійсних чисел R – симетрична відносно початку координат. Знайдемо $y(-x)$, врахувавши, що $y=x$ – непарна функція, а $y=\cos x$ – парна функція. Маємо:

$$y(-x)=-x\cos(-x)=-x\cos x=-y(x).$$

Отже, функція $y=x\cos x$ – непарна.

Виконайте усно

1. Функція $y=x^2$ задана на множині перших п'яти натуральних чисел. Якою є її область значень?
2. Знайдіть область визначення функції $y=x^3$, якщо її область значень $[-1;\ 27]$.
3. Який з графіків, зображених на малюнку 5, не є графіком функції?
4. Які з функцій, графіки яких зображено на малюнку 5, є непарними? А які – парними?



Мал. 5

5. Які з функцій $y=x^3$, $y=x^2$, $y=x$, $y=1$, $y=\cos x$, $y=\sin x$, $y=\sqrt{x}$ парні, а які – непарні?
6. Чи може одна й та сама функція бути парною і непарною?
7. Які з функцій $y=-x^2$, $y=-\cos x$, $y=\sin 2x$, $y=\sqrt{x}$, $y=\operatorname{tg}x$ періодичні?

8. Виберіть один із графіків, зображених на малюнку 5, та охарактеризуйте основні властивості відповідної функції.

9. Графік якої з поданих нижче функцій проходить через початок координат:
а) $y = x^3$; б) $y = 3x - 2$; в) $y = x^{-2}$;
г) $y = \cos x$; ґ) $y = \sqrt{x}$; д) $y = \operatorname{tg} x$?

А

10. Знайдіть $f(-10)$, $f(-5)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(5)$, $f(10)$, якщо:
а) $f(x) = 0{,}2x + 1$; б) $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

11. Вартість ксерокса після t років використання задається формулою $B(t) = 8940 - 745t$ (грн.). Укажіть:
а) яку функцію задає ця формула;
б) що означає і чому дорівнює $B(5)$;
в) значення t, якщо $B(t) = 4470$, і поясніть, на що це вказує;
г) початкову вартість ксерокса.

12. Знайдіть значення функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ в точках −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3, якщо:
а) $f(x) = 2x - 3$, $g(x) = |2x - 3|$;
б) $f(x) = x^2 + 2x + 1$, $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$.
Результати подайте у вигляді таблиці.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$							
$g(x)$							

13. Обчисліть значення виразу $f(5) - f(3) - 1$, якщо:
а) $f(x) = x^3 - 2x + 1$; б) $f(x) = (x^2 - 2)(x + 5)$.

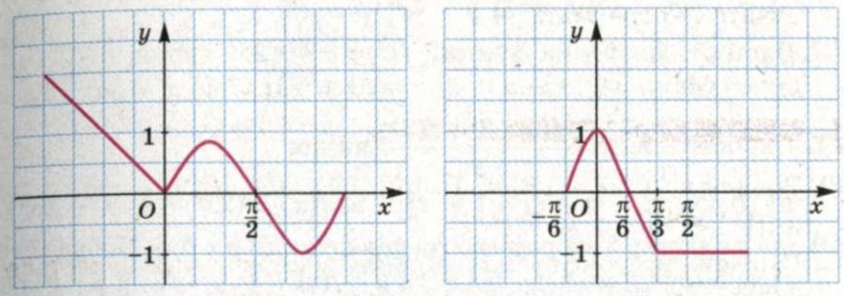
14. Функцію задано формулою $y = 2x^2 - 1$. Знайдіть значення:
а) функції, якщо значення аргументу дорівнює 2; 4; 6; 8;
б) аргументу, якщо значення функції дорівнює 1; 3; 5; 7; 9.

Знайдіть область визначення функції (15, 16).

15. а) $y = \sqrt{2x}$; б) $y = \dfrac{x}{x-4}$; в) $y = \dfrac{5}{x^2+2}$; г) $y = \sqrt{x^2}$.

16. а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \dfrac{x+4}{x-2}$; в) $y = x + \dfrac{4}{x}$; г) $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

17. Для кожної з функцій, графіки яких подано на малюнку 6, установіть:
а) область визначення; б) область значень; в) нулі ($y = 0$);
г) проміжки знакосталості ($y > 0$, $y < 0$);
ґ) проміжки зростання;
д) проміжки спадання.



а) б)

Мал. 6

Побудуйте графік функції (18–20). За допомогою графіка визначте, які з цих функцій парні, а які – непарні.

18. а) $y = x^3$; б) $y = -x^2$; в) $y = x^{-2}$; г) $y = x^{\frac{1}{2}}$.

19. а) $y = 2x - 5$; б) $y = 1 - x^2$; в) $y = 3$; г) $y = \sqrt{2x}$.

20. а) $y = \sin x$; б) $y = -\cos x$; в) $y = \operatorname{tg} x$; г) $y = \operatorname{ctg} x$.

Б

21. Опір R провідника визначається за формулою $R = \rho\dfrac{l}{S}$, де l і S – відповідно довжина і площа поперечного перерізу провідника, а ρ – питомий опір речовини, з якої виготовлено провідник. Запишіть залежність: а) S від R; б) l від R. Який графік має кожна з цих функцій?

22. Відповідність між довжиною маятника l і його періодом коливання T задається формулою $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, де $\pi \approx 3{,}14$, $g \approx 9{,}8$ м/с^2. Яку функцію задає ця залежність? Якою функцією задається залежність довжини маятника від періоду його коливання?

Запишіть область значень функції (23, 24).

23. а) $y = \sqrt{4 - x}$; б) $y = x^2 - 1$; в) $y = 3 - x$; г) $y = 2 + \sqrt{x}$.

24. а) $y = x^2 + 4$; б) $y = \sqrt{1 + x}$; в) $y = 3x$; г) $y = 9 - \sqrt{x}$.

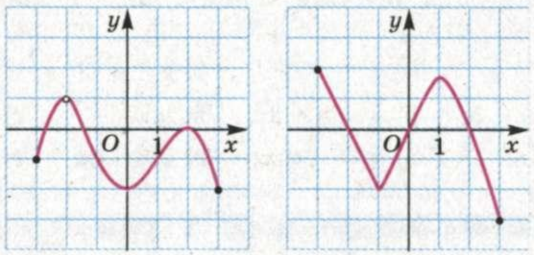
25. Доведіть, що функція $y = f(x)$ – парна, якщо:
а) $f(x) = x^4 + 3x^2$; б) $f(x) = 3x(x^3 - 2x)$.

26. Доведіть, що функція y – непарна, якщо:
а) $y = x(1 - x^2)$; б) $y = 7x^3 + x$.

27. Знайдіть значення функції $f(x) = x^2 - 2x$, якщо:
а) $x = a$; б) $x = a + 3$; в) $x = 2a$; г) $x = 5a - 1$.

28. Спростіть вираз $\dfrac{f(x+3) - f(3)}{x}$, якщо:
а) $f(x) = x^3$; б) $f(x) = 1 - x^3$; в) $f(x) = (2x^2 - 1)(1 + 2x^2)$.

29. На малюнку 7 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графіки функцій $y = f(x + 1)$; $y = f(x) + 1$; $y = f(|x|)$; $y = |f(x)|$. За допомогою побудованих графіків для кожної функції встановіть: а) проміжки монотонності; б) інтервали знакосталості; в) найбільше та найменше значення функції; г) яка з функцій є парною.



Мал. 7

В одній системі координат побудуйте графіки функцій і встановіть їх проміжки монотонності (30–32).

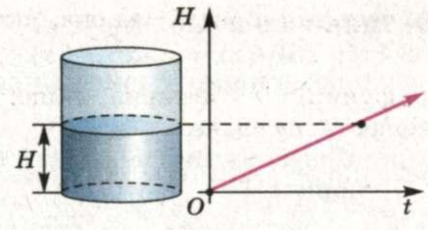
30. а) $y = 3x$; б) $y = 3x - 1$; в) $y = 3|x| - 1$; г) $y = |3x - 1|$.

31. а) $y = x^2$; б) $y = 2x^2$; в) $y = 2x^2 - 3$; г) $y = |2x^2 - 3|$.

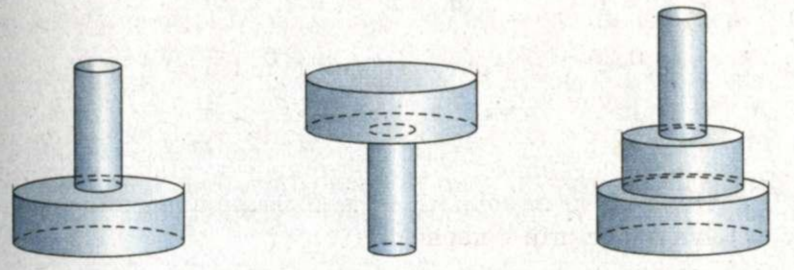
32. а) $y = \dfrac{12}{x}$; б) $y = \dfrac{12}{x} - 4$; в) $y = \dfrac{12}{|x|} - 4$; г) $y = \left|\dfrac{12}{x} - 4\right|$.

33. Рух двох мотоциклістів у одній системі координат задано функціями $x_1(t) = 0{,}2t^2 + 2t$ і $x_2(t) = 80 - 4t$ (x – у кілометрах, t – у хвилинах). Установіть час зустрічі мотоциклістів.

34. Якщо в контейнер додавати воду зі сталою швидкістю, то висота води в ньому буде функцією від часу (мал. 8). Зобразіть схематично графік залежності висоти води від часу наповнення контейнерів, зображених на малюнку 9.



Мал. 8



а) б) в)

Мал. 9

35. Функцію $y = |1 - x^2|$ задано на проміжку $[-2; 2]$. Продовжте її графік з періодом $T = 4$ на всю числову пряму. Знайдіть:
а) $y(10)$; б) $y(100)$.

36. Побудуйте на проміжку $[-1{,}5; 1{,}5]$ графік деякої функції та продовжте його з періодом $T = 3$ на всю числову пряму.

Вправи для повторення

37. Порівняйте числа:
а) $0{,}1^{\frac{2}{3}}$ і $0{,}1^{\frac{3}{4}}$; б) $10^{\frac{2}{3}}$ і $10^{\frac{3}{4}}$; в) $\sqrt[5]{1{,}7}$ і $\sqrt[5]{2}$; г) $\sqrt[4]{12}$ і 2.

38. Запишіть у вигляді степеня:
а) $a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-2}$; б) $(p^{0,1})^2 \cdot p^{\frac{2}{5}} \cdot p^{-0,4}$; в) $\left(\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^2 : x^{0,5}$.

39. Розв'яжіть рівняння:
а) $x + 3\sqrt{x} - 4 = 0$; б) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$.

40. Сергій зловив 10 карасів, а Андрій – на 100 % більше. Скільки карасів зловили хлопці разом?

§ 2. Степеневі та показникові функції

Повторимо і дещо розширимо відомості про степені.

Вираз a^α називають *степенем*. Тут a – основа степеня, α – його показник. Показник степеня може бути будь-яким дійсним числом. Наприклад:

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \qquad (a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{разів}},\ a \in R,\ n \in N);$

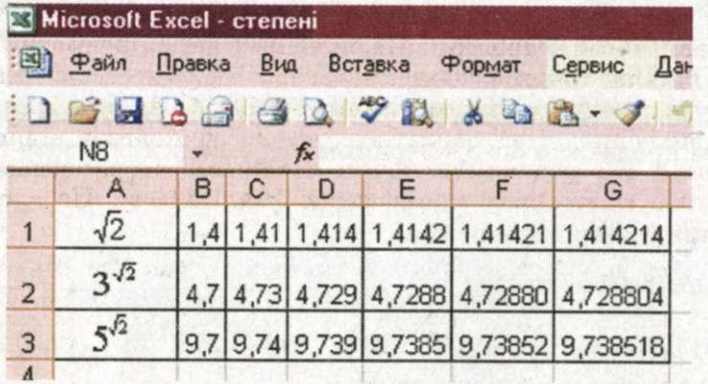
$4^1 = 4;\ 4^0 = 1 \qquad (a^1 = a;\ a^0 = 1,\ a \neq 0);$

$4^{-1} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \qquad \left(a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0,\ n \in N\right);$

$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2 \qquad \left(a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m},\ n \in N,\ m \in Z,\ a > 0\right).$

Якщо показник степеня – число ірраціональне, значення степеня можна обчислювати, користуючись калькулятором або комп'ютером.

Наближені значення (з точністю до десятих, сотих, тисячних і т. д.) для степенів $3^{\sqrt{2}}$ і $5^{\sqrt{2}}$ подано в таблиці, виконаній за допомогою табличного процесора **Excel** (мал. 10).



	A	B	C	D	E	F	G
1	$\sqrt{2}$	1,4	1,41	1,414	1,4142	1,41421	1,414214
2	$3^{\sqrt{2}}$	4,7	4,73	4,729	4,7288	4,72880	4,728804
3	$5^{\sqrt{2}}$	9,7	9,74	9,739	9,7385	9,73852	9,738518

Мал. 10

Отже, $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}73$; $5^{\sqrt{2}} \approx 9{,}74$.

Якими б не були дійсні числа $a > 0$ і α, степінь a^α завжди має зміст, тобто дорівнює деякому дійсному числу. Для таких степенів справджуються властивості:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; 2) $a^r : a^s = a^{r-s}$; 3) $(a^r)^s = a^{rs}$;

4) $(ab)^r = a^r b^r$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

Вирази з будь-якими дійсними показниками степенів і додатними основами можна перетворювати так само, як з раціональними показниками. Наприклад,

$$\frac{49^{\sqrt{2}} - a^{\frac{2}{\pi}}}{7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}} = \frac{(7^{\sqrt{2}})^2 - \left(a^{\frac{1}{\pi}}\right)^2}{7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}} = \frac{\left(7^{\sqrt{2}} - a^{\frac{1}{\pi}}\right)\left(7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}\right)}{7^{\sqrt{2}} + a^{\frac{1}{\pi}}} = 7^{\sqrt{2}} - a^{\frac{1}{\pi}}.$$

Зі степенями тісно пов'язані степеневі та показникові функції. Степеневі функції ($y = x^p$) ви вивчали в попередніх класах. Далі розглянемо показникові функції.

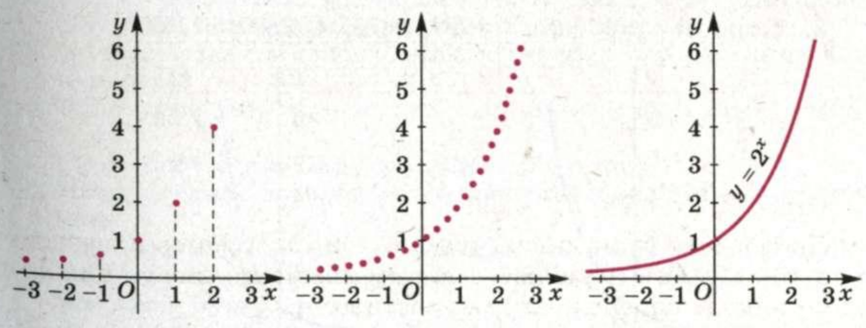
Функція називається *показниковою*, якщо її можна задати формулою $y = a^x$, де a – довільне додатне число, відмінне від 1.

Приклади показникових функцій: $y = 2^x$, $y = 0{,}3^x$, $y = (\sqrt{2})^x$.

Побудуємо графік функції $y = 2^x$. Складемо таблицю значень функції для кількох цілих значень аргументу x:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

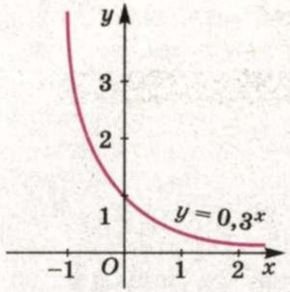
На малюнку 11, *а* позначено точки, координати яких x, y – пари чисел з таблиці. Позначивши на координатній площині більше точок з координатами x і y, що задовольняють формулу $y = 2^x$, одержимо малюнок 11, *б*. А якби для кожного значення x за формулою $y = 2^x$ обчислили відповідне значення y і позначили точки з такими координатами, то дістали б неперервну криву лінію (мал. 11, *в*). Це – графік функції $y = 2^x$.



а) б) в)

Мал. 11

Як бачимо, показникова функція $y = 2^x$, визначена на всій множині дійсних чисел, має тільки додатні значення і на всій



Мал. 12

області визначення зростає. А функція $y = 0{,}3^x$ на всій області визначення спадає (мал. 12).

Сформулюємо основні властивості показникових функцій.

1. *Область визначення функції* $y = a^x$ *– множина R*, оскільки при кожному додатному a і дійсному x вираз a^x має числове значення.

2. *Функція* $y = a^x$ *набуває тільки додатних значень*, оскільки, якщо основа a степеня додатна, то додатний і степінь a^x. Отже, область значень функції $y = a^x$ – множина $(0; \infty)$.

3. *Якщо* $a > 1$, *функція* $y = a^x$ *зростає, а якщо* $0 < a < 1$ *– спадає*. Цю властивість добре видно на графіках функцій (див. мал. 11, 12).

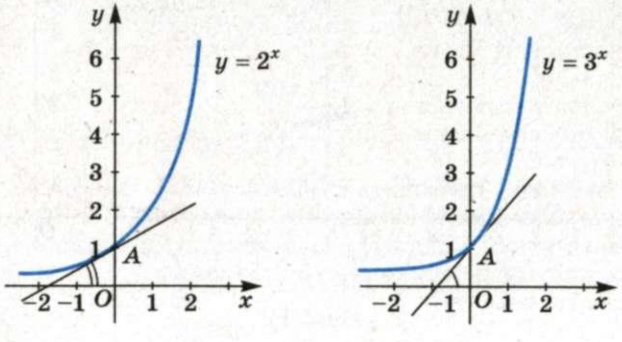
4. *Функція* $y = a^x$ *набуває кожного свого значення тільки один раз*. Тобто пряму, паралельну осі x, графік показникової функції може перетнути тільки в одній точці. Це випливає з властивості 3.

5. *Функція* $y = a^x$ *ні парна, ні непарна, ні періодична*. Оскільки кожного свого значення вона набуває тільки один раз, то не може бути парною або періодичною. Не може вона бути і непарною, бо не набуває ні від'ємних, ні нульових значень.

6. *Графік кожної показникової функції проходить через точку* $A(0; 1)$, оскільки, якщо $a \neq 0$, то $a^0 = 1$.

Зверніть увагу на твердження, які випливають із монотонності показникової функції:

1. Якщо $a > 0$ і $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$;
2. Якщо $a > 1$ і $a^{x_1} > a^{x_2}$, то $x_1 > x_2$;
3. Якщо $0 < a < 1$ і $a^{x_1} > a^{x_2}$, то $x_1 < x_2$.



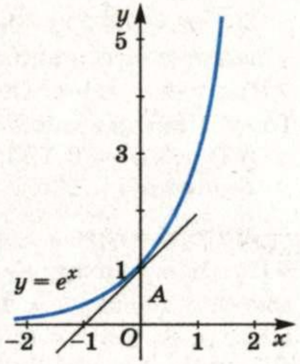
а) б)

Мал. 13

Придивіться до графіків показникових функцій $y = 2^x$ і $y = 3^x$ (мал. 13). Кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної в точці $A(0; 1)$ до графіка функції $y = 2^x$, менший за 1, а до графіка функції $y = 3^x$ – більший за 1. А чи існує така показникова функція, щоб кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка в точці $A(0; 1)$ дорівнював 1? Існує (мал. 14). Основа цієї показникової функції – ірраціональне число 2,71828..., яке прийнято позначати буквою e.

Показникова функція $y = e^x$ в математиці і багатьох прикладних науках трапляється досить часто. Її називають *експонентою* (лат. *exponens* – виставляти напоказ).

На багатьох мікрокалькуляторах є окрема клавіша для функції e^x. Ця функція і справді вирізняється з усіх інших функцій. За її допомогою описуються закони природного зростання чи спадання.



Мал. 14

Наприклад, процеси новоутворення та розпаду можна описати за допомогою формули $P = P_0 e^{kt}$. Тут P – кількість новоутвореної речовини (або речовини, що розпалася) в момент часу t; P_0 – початкова кількість речовини; k – стала, значення якої визначається для конкретної ситуації. Доберіть самостійно відповідні приклади.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке степінь числа з натуральним показником?
2. Якими рівностями можна визначити степінь числа з цілим від'ємним показником? А з дробовим показником?
3. Як можна знайти степінь додатного числа з ірраціональним показником?
4. Які властивості мають степені з довільними дійсними показниками?
5. Сформулюйте означення показникової функції.
6. Назвіть область визначення показникової функції. І область значень.
7. Через яку точку проходить графік кожної показникової функції?
8. Чи може значення показникової функції бути від'ємним? А дорівнювати нулю?
9. За якої умови показникова функція зростає? А за якої – спадає?
10. Що таке експонента?

Виконаємо разом

1. Спростіть вираз $(5^{\sqrt{2}} - 5^{\sqrt{2}-1}) : 5^{\sqrt{2}}$.

Розв'язання.

$$(5^{\sqrt{2}} - 5^{\sqrt{2}-1}) : 5^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}}(1 - 5^{-1}) : 5^{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{5} = 0{,}8.$$

2. Функція $f(x) = 0{,}5^x$ задана на проміжку $[-2; 3]$. Знайдіть її найменше та найбільше значення.

Розв'язання. Оскільки $0{,}5 < 1$, то дана функція спадна. Тому її найменшим і найбільшим значеннями будуть:
$f(3) = 0{,}5^3 = 0{,}125$; $f(-2) = 0{,}5^{-2} = 4$.
Відповідь. 0,125 і 4.

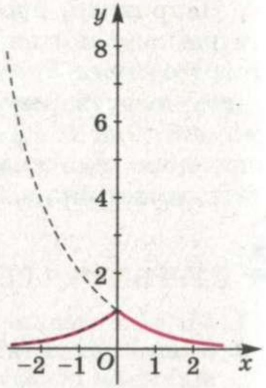
3. Порівняйте з одиницею число: а) $0{,}5^{1,5}$; б) $(\sqrt{5})^{-0,2}$.

Розв'язання. а) Подамо число 1 у вигляді степеня з основою 0,5. Маємо: $1 = 0{,}5^0$. Оскільки функція $y = 0{,}5^x$ – спадна і $1{,}5 > 0$, то $0{,}5^{1,5} < 0{,}5^0$, звідки $0{,}5^{1,5} < 1$.

б) Оскільки $1 = (\sqrt{5})^0$; $y = (\sqrt{5})^x$ – зростаюча функція і $-0{,}2 < 0$, то $(\sqrt{5})^{-0,2} < (\sqrt{5})^0$, звідки $(\sqrt{5})^{-0,2} < 1$.

4. Побудуйте графік функції $y = 0{,}5^{|x|}$.

Розв'язання. Функція $y = 0{,}5^{|x|}$ – парна (перевірте). Графік парної функції симетричний відносно осі y, тому достатньо побудувати графік заданої функції для $x \geqslant 0$ і відобразити його відносно осі y. Якщо $x \geqslant 0$, то $0{,}5^{|x|} = 0{,}5^x$. Побудуємо графік функції $y = 0{,}5^x$ для $x \geqslant 0$ і відобразимо його відносно осі y (мал. 15).



Мал. 15

Виконайте усно

Обчисліть (41–43).

41. а) $81^{\frac{1}{4}}$; б) $625^{\frac{1}{4}}$; в) $0{,}0016^{\frac{1}{4}}$; г) $1^{\frac{1}{4}}$.

42. а) $9^{0,5}$; б) $6{,}25^{0,5}$; в) $0{,}16^{0,5}$; г) $0^{0,5}$.

43. а) 4^{-1}; б) 2^{-1}; в) $0{,}5^{-1}$; г) $(-1)^{-1}$.

44. Який з поданих нижче виразів не існує:
а) $(-4)^{-1}$; б) 2^0; в) $(-5)^{0,5}$; г) $(-1)^0$; ґ) π^π; д) $0^{-\sqrt{3}}$?

45. Які з функцій $y = x^{1,5}$; $y = x^{5-x}$; $y = \pi^x$; $y = \sqrt{2^x}$ показникові?

46. Зростаючою чи спадною є функція:
а) $y = 2{,}5^x$; б) $y = e^x$; в) $y = 0{,}5^x$; г) $y = 3^{-x}$; ґ) $y = \pi^x$?

47. Чи мають спільні точки графіки функцій:
а) $y = 2^x$ і $y = 2$; б) $y = 2^x$ і $y = 2x$;
в) $y = 2^x$ і $y = -2x$; г) $y = 2^x$ і $y = -2$?

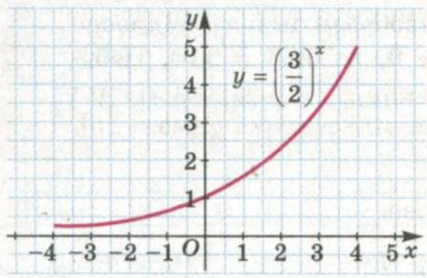
А

48. Подайте у вигляді степеня з основою 2 число:
а) 8; б) $\frac{1}{16}$; в) $\sqrt{2}$; г) 0,25;
ґ) 1024; д) 0,5; е) $\sqrt[3]{4}$; є) 0,0625.

49. Подайте у вигляді степеня з основою 3 число:
а) 81; б) 27; в) $9^{\sqrt{2}}$; г) 81^{-1};
ґ) $\sqrt[3]{9}$; д) 1; е) $729^{0,25}$; є) 27^π.

50. Обчисліть:
а) $32^{0,4}$; б) $27^3 : 9^4$; в) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4}$; г) $(81^{-1})^{0,25}$;
ґ) $(9^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$; д) $25^\pi : 5^{-2\pi}$; е) $49^{0,25}$; є) $2^\pi \cdot 0{,}5^\pi$.

51. Використовуючи графік функції $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ (мал. 16), знайдіть наближене значення:
а) функції y в точці з абсцисою: −2; −1,5; 0; 1; 2,5; 3,5; 4;
б) аргументу x, при якому значення функції дорівнює: 0,25; 0,4; 0,5; 1,2; 1,5; 2,8; 3,5; 4,25.



Мал. 16

Спростіть вираз (52, 53).

52. а) $(a - x^{0,5})(a + x^{0,5})$; б) $(c^{\frac{1}{2}} - p^{\frac{1}{4}})(c^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{4}})$;
в) $(a - b) : (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})$; г) $(x - 4) : (x^{0,5} + 2)$.

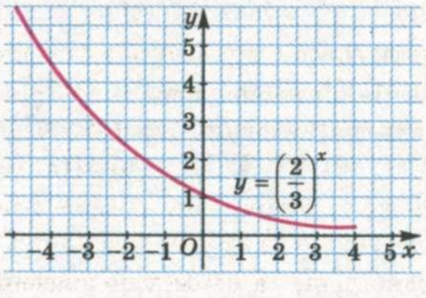
53. а) $(x^{\frac{1}{3}}-1)(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1)$; б) $(n^{\frac{1}{3}}+2)(n^{\frac{2}{3}}-2n^{\frac{1}{3}}+4)$;

в) $(a-8):(a^{\frac{1}{3}}-2)$; г) $(1-x):(1+x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})$.

54. Використовуючи графік функції $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ (мал. 17), знайдіть наближене значення:

а) функції y в точці з абсцисою: -2; -1; 0; 1; 1,5; 2; 3; 4;

б) аргументу x, при якому значення функції дорівнює: 0,25; 0,4; 0,5; 1,2; 1,5; 2,8; 3,5; 4,25.



Мал. 17

55. Опишіть властивості функції:

а) $y=\left(\frac{3}{2}\right)^x$; б) $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

56. Побудуйте графік функції: а) $y=4^x$; б) $y=0,5^x$.

57. За допомогою калькулятора знайдіть з точністю до 10^{-4} значення функції $y=1,7^x$, якщо:

а) $x=0,5$; б) $x=1,3$; в) $x=\sqrt{3}$.

58. Заповніть таблицю з точністю до 10^{-3}.

x	$-3,5$	$-2,5$	$-1,5$	1,5	2,5	3
2^x						
$0,5^x$						

59. Зростаючою чи спадною є функція:

а) $y=5^x$; б) $y=\left(\frac{9}{10}\right)^x$; в) $y=(\sqrt{2})^x$;

г) $y=\left(\frac{3}{\pi}\right)^x$; ґ) $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$; д) $y=2^{-x}$;

е) $y=(\sqrt{5}-2)^x$; є) $y=\frac{1}{(\sqrt{5}-2)^x}$?

60. Порівняйте з одиницею число:

а) $2^{-\sqrt{5}}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$; в) $0,3^2$; г) $1,7^3$;

ґ) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{5}-2}$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{8}-3}$; е) $(\sqrt{2})^3$; є) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^e$.

61. Порівняйте числа:

а) $4^{-\sqrt{3}}$ і $4^{-\sqrt{2}}$; б) $2^{\sqrt{3}}$ і $2^{1,7}$; в) $5^{0,2}$ і $5^{-1,2}$;

г) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\pi}$ і $\left(\frac{1}{9}\right)^{3,14}$; ґ) $\left(\frac{1}{5}\right)^{0,2}$ і $\left(\frac{1}{5}\right)^{1,2}$; д) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1,4}$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$.

62. Чи проходить графік функції $y=4^x$ через точку A, якщо:

а) $A(4;\ 16)$; б) $A(4;\ 256)$; в) $A(-2;\ -0,5)$; г) $A(-2;\ 0,0625)$?

63. Чи проходить графік функції $y=(\sqrt{3})^x$ через точку M, якщо:

а) $M(1;\ \sqrt{3})$; б) $M(\sqrt{3};\ 3)$; в) $M(2;\ 3)$; г) $M(0;\ 0)$?

64. Знайдіть a, коли відомо, що графік функції $y=a^x$ проходить через точку: а) $P(2;\ 9)$; б) $P(0,5;\ 0,2)$; в) $P(-1;\ 0,5)$.

65. Знайдіть найбільше та найменше значення функції:

а) $y=3^x$ на проміжку $[-1;\ 3]$;

б) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ на проміжку $[-1;\ 3]$;

в) $y=4^x$ на проміжку $[-0,5;\ 2]$;

г) $y=0,25^x$ на проміжку $[-0,5;\ 2]$.

Б

Подайте число у вигляді степеня (66, 67).

66. а) $\sqrt[4]{27}$; б) $\frac{8}{125}$; в) $\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{11}}$; г) $5\frac{4}{9}$.

67. а) $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^5}$; б) $\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$; в) $3\sqrt[3]{9}$; г) $7\frac{1}{5}$.

Обчисліть вираз (68, 69).

68. а) $243^{0,4}$; б) $(27^3)^{\frac{2}{9}}$; в) $\left(\frac{1}{16}\right)^{0,25}$; г) $8^{2\frac{1}{3}}:81^{0,75}$.

69. а) $\left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$; б) $3^{-2\sqrt{3}}\cdot 9^{\sqrt{3}}$; в) $8^{\sqrt{2}}:2^{\sqrt[3]{2}}$; г) $(3^{\sqrt[5]{8}})^{\sqrt[5]{4}}$.

Побудуйте графік функції та знайдіть її область значень (70, 71).

70. а) $y = 3^{-x}$; б) $y = -2^x$; в) $y = 2^{2x}$; г) $y = -2^{-2x}$.

71. а) $y = 2^x - 3$; б) $y = 2 + 2^x$; в) $y = 2^{x-3}$; г) $y = 2 \cdot 2^x$.

72. Розв'яжіть графічно рівняння:
а) $3^x = 4 - x$; б) $4^x + x = 5$; в) $0{,}5^x = \sqrt{x+5}$.

73. Використовуючи зростання функції $y = 2^x$, розв'яжіть рівняння і нерівності:
а) $2^x = 16$; $2^x > 16$; $2^x \leqslant 16$;
б) $2^x = 0{,}25$; $2^x \geqslant 0{,}25$; $2^x \leqslant 0{,}25$;
в) $2^x = \sqrt{32}$; $2^x \geqslant \sqrt{32}$; $2^x < \sqrt{32}$.

74. Використовуючи спадання функції $y = 0{,}2^x$, розв'яжіть рівняння і нерівності:
а) $0{,}2^x = 0{,}04$; $0{,}2^x > 0{,}04$; $0{,}2^x \leqslant 0{,}04$;
б) $0{,}2^x = \dfrac{1}{625}$; $0{,}2^x \leqslant \dfrac{1}{625}$; $0{,}2^x > \dfrac{1}{625}$;
в) $0{,}2^x = 25$; $0{,}2^x > 25$; $0{,}2^x \leqslant 25$.

75. Ентомолог, вивчаючи нашестя саранчі, дослідив, що площа (у м^2), заражена саранчею, змінюється за формулою $S_n = 1000 \cdot 2^{0{,}2n}$, де n – кількість тижнів після зараження. Знайдіть:
а) початкову площу зараження;
б) яку площу заражено через 5 тижнів;
в) яку площу заражено через 10 тижнів.

76. Коли CD-програвач вимикають, то сила струму в ньому зменшується за формулою $I(t) = 24 \cdot (0{,}25)^t$ (А), де I – сила струму в амперах, t – час у секундах. Знайдіть:
а) силу струму в момент вимкнення CD-програвача;
б) $I(t)$, якщо t дорівнює: 1 с, 2 с, 3 с, 4 с;
в) протягом якого часу сила струму у вимкненому CD-програвачі перевищує 4 А. Скористайтеся графіком залежності $I(t) = 24 \cdot (0{,}25)^t$.

77. Під час вирощування бактерій маса культури змінюється за формулою $m(t) = 2 \cdot e^{\frac{t}{2}}$ (г), де t – час у годинах, пройдений після початку розмноження. Знайдіть масу культури через:
а) 30 хв; б) 40 хв; в) 1 год; г) 3 год; ґ) 4 год; д) 6 год.
Побудуйте відповідний графік.

Вправи для повторення

78. У геометричній прогресії $b_1 = 0{,}25$, $q = 2$. Знайдіть b_{10} і S_{10}.

79. Стародавня китайська задача. 5 волів і 2 барани коштують 10 таелів, а 2 воли і 8 баранів коштують 8 таелів. Скільки коштують окремо віл і баран?

80. Запишіть у стандартному вигляді число:
а) 47 000 000; б) 308 000 000; в) 0,000000039;
г) 0,00000407; ґ) $803 \cdot 10^9$; д) $0{,}067 \cdot 10^7$.

§ 3. Показникові рівняння та нерівності

Рівняння називається *показниковим*, якщо його змінні входять *лише* до показників степенів при сталих основах.

Приклади:
$9^x = \sqrt{3}$; $4^x + 2^{x+1} = 3$; $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x - (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = 2$.

Існує багато видів показникових рівнянь і різних підходів до їх розв'язування. Основні з них:

I. Метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами;

II. Метод уведення нової змінної;

III. Функціонально-графічний метод.

Розглянемо на конкретних прикладах кожен метод детальніше.

I. Метод зведення обох частин рівняння до степенів з однаковими основами стосується двочленних рівнянь, які можна звести до виду $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$.

Такі рівняння розв'язуються на основі монотонності показникової функції.

Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, то рівняння $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ і $f(x) = \varphi(x)$ – рівносильні.

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння: а) $4^{x-5} = 8^{2x}$; б) $3^x = 7^x$.

● Розв'язання. а) Запишемо праву та ліву частини рівняння як степені числа 2: $(2^2)^{x-5} = (2^3)^{2x}$ або $2^{2x-10} = 2^{6x}$, звідки $2x - 10 = 6x$, $4x = -10$, $x = -2{,}5$.

б) Оскільки $7^x > 0$, то можемо поділити обидві частини рівняння $3^x = 7^x$ на 7^x. Маємо: $\dfrac{3^x}{7^x} = 1$, або $\left(\dfrac{3}{7}\right)^x = 1$. Запишемо число 1 у вигляді степеня. Тоді $\left(\dfrac{3}{7}\right)^x = \left(\dfrac{3}{7}\right)^0$, звідки $x = 0$.

Відповідь. а) –2,5; б) 0.