II. Метод уведення нової змінної.

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння:

а) $4^x + 4 \cdot 2^x - 32 = 0$; б) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 75$.

Розв'язання. а) $(2^x)^2 + 4 \cdot 2^x - 32 = 0$. Позначимо $2^x = y$. Дістанемо квадратне рівняння $y^2 + 4y - 32 = 0$, корені якого $y_1 = -8$ та $y_2 = 4$. Корінь y_1 – сторонній, бо $2^x \neq -8$. Розв'яжемо рівняння $2^x = 4$: $2^x = 2^2$, звідки $x = 2$.

б) Запишемо рівняння у вигляді $3^x \cdot 3 - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-2} = 75$, або $3 \cdot 3^x - \frac{2}{9} \cdot 3^x = 75$. Позначимо $3^x = y$; дістанемо рівняння $3y - \frac{2}{9}y = 75$. Розв'яжемо його: $27y - 2y = 675$, $25y = 675$, $y = 27$. Маємо: $3^x = 27$, $3^x = 3^3$, звідки $x = 3$.

Відповідь: а) 2; б) 3.

Розв'язуючи друге рівняння, не обов'язково вводити нову змінну, а можна зразу виносити спільний множник 3^x за дужки. Саме тому такий спосіб називають ще *способом винесення спільного множника за дужки*.

III. Функціонально-графічний метод полягає в тому, що, знайшовши один корінь рівняння за допомогою побудови графіків (або добором), доводять, що інших коренів рівняння не має.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 + 0{,}5^x$.

Розв'язання. Графічно або методом спроб переконуємося, що $x = 1$ – корінь рівняння. Оскільки $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$ – зростаюча функція (бо $\frac{3}{2} > 1$), а $y = 1 + 0{,}5^x$ – спадна ($0{,}5 < 1$), то інших коренів рівняння не має.

Якщо в показниковому рівнянні знак рівності змінити на знак нерівності, то дістанемо показникову нерівність.

Нерівність називається *показниковою*, якщо її змінні входять *лише* до показників степенів при сталих основах.

Для розв'язування показникових нерівностей використовують ті самі методи, що й для показникових рівнянь, а також правила розв'язування найпростіших показникових нерівностей виду

$$a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \text{ чи } a^{f(x)} \geqslant a^{\varphi(x)}, \text{ де } a > 0,\ a \neq 1.$$

Розв'язуючи такі нерівності, використовують монотонність (зростання чи спадання) показникової функції, а саме:

1. Якщо $a > 1$ і $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$, то $f(x) > \varphi(x)$;
2. Якщо $0 < a < 1$ і $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$, то $f(x) < \varphi(x)$.

Приклад 4. Розв'яжіть нерівність:

а) $2^x \cdot 3^x > 36$; б) $3 \cdot 7^{2x} - 2 \cdot 7^x - 1 < 0$.

Розв'язання. а) Подамо праву й ліву частини нерівності у вигляді степеня з основою 6: $6^x > 6^2$.

Оскільки $6 > 1$, то $x > 2$, або $x \in (2; \infty)$.

б) Нехай $7^x = y$, тоді $7^{2x} = y^2$. Підставимо y у дану нерівність. Маємо: $3y^2 - 2y - 1 < 0$. Оскільки квадратний тричлен $3y^2 - 2y - 1$ має корені $-\frac{1}{3}$ і 1, то множина розв'язків відповідної нерівності буде така:

$$-\frac{1}{3} < y < 1, \text{ або } \begin{cases} y < 1, \\ y > -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Оскільки $y = 7^x > 0$, то умова $y > -\frac{1}{3}$ виконується завжди.

Якщо $y < 1$, то $7^x < 1$, або $7^x < 7^0$. Отже, $x < 0$, або $x \in (-\infty; 0)$.

Відповідь. а) $(2; \infty)$; б) $(-\infty; 0)$.

Показникові рівняння та нерівності – це окремий вид *трансцендентних* (не алгебраїчних) рівнянь і нерівностей. Ви вже знаєте, що до трансцендентних належать тригонометричні рівняння та нерівності. Крім них, трансцендентними також є рівняння та нерівності, в яких поєднуються трансцендентні вирази з алгебраїчними:

$$5^{x+1} + 5x > 10;\ 2^x = \sqrt{x+2};\ \pi^x - 1 = \sin x.$$

Тільки для деяких із подібних рівнянь можна вказати точні розв'язки. Їх наближені корені знаходять здебільшого графічним способом.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які рівняння називають показниковими? Наведіть приклади.
2. Які нерівності називають показниковими? Наведіть приклади.
3. Скільки розв'язків може мати рівняння $a^x = b$ ($a > 0$, $a \neq 1$)?
4. Які методи розв'язування показникових рівнянь ви знаєте?
5. Які нерівності називають найпростішими показниковими нерівностями?
6. Як розв'язують найпростіші показникові нерівності?

Виконаємо разом

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = 3\frac{3}{8}$; б) $2^{5x} + 2^{5x-1} + 2^{5x+2} = 22$.

● **Розв'язання.** а) Подамо праву частину рівняння у вигляді неправильного дробу: $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{27}{8}$.

Запишемо праву й ліву частини рівняння у вигляді степеня з основою $\frac{2}{3}$. Маємо: $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$, звідки $2x = -3$, $x = -1{,}5$.

б) Запишемо рівняння у вигляді $2^{5x} + 2^{5x} \cdot 2^{-1} + 2^{5x} \cdot 2^2 = 22$. Винесемо за дужки спільний множник 2^{5x} і виконаємо дії в дужках. Маємо: $2^{5x} \cdot (1 + 2^{-1} + 2^2) = 22$, або $2^{5x} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + 4\right) = 22$, звідки $2^{5x} \cdot 5{,}5 = 22$. Розв'яжемо утворене рівняння: $2^{5x} = 4$, $2^{5x} = 2^2$, $5x = 2$, $x = \frac{2}{5}$.

Відповідь. а) $-1{,}5$; б) $\frac{2}{5}$.

2. Розв'яжіть нерівність:

а) $0{,}5^{5-3x} \leqslant 0{,}25$; б) $3^{2x+4} - 2 \cdot 3^{x+2} \leqslant 3$.

● **Розв'язання.** а) Подамо праву частину нерівності у вигляді степеня з основою 0,5: $0{,}5^{5-3x} \leqslant (0{,}5)^2$. Оскільки $0{,}5 < 1$, то $5 - 3x \geqslant 2$, $-3x \geqslant -3$, звідки $x \leqslant 1$, або $x \in (-\infty; 1]$.

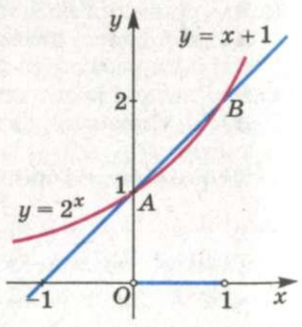
б) Нехай $3^{x+2} = y$. Тоді $3^{2x+4} = y^2$. Маємо квадратну нерівність $y^2 - 2y - 3 \leqslant 0$, множина розв'язків якої $[-1; 3]$. До того ж $y > 0$, отже, $0 < 3^{x+2} \leqslant 3$, звідки $x + 2 \leqslant 1$, $x \leqslant -1$, або $(-\infty; -1]$.

Відповідь. а) $(-\infty; 1]$; б) $(-\infty; -1]$.

3. Розв'яжіть графічно нерівність $2^x < x + 1$.

● **Розв'язання.** Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = 2^x$ і $y = x + 1$ (мал. 18). Вони перетинаються в точках $A(0; 1)$ і $B(1; 2)$. Перевірка показує, що координати цих точок – числа точні, а не наближені. Отже, значення 2^x менші за відповідні значення $x + 1$, якщо $0 < x < 1$.

Відповідь. $(0; 1)$.



Мал. 18

Виконайте усно

81. Які з рівнянь показникові:

а) $2^x = 3$; б) $\sqrt{x} = 4$; в) $2 - 0{,}5^x = 0$; г) $x^2 = 2^2$?

82. Скільки розв'язків має рівняння:

а) $12^x = 3$; б) $1 + 2^x = 0$; в) $5^x = 0$; г) $3^{2x} = 4$?

83. Чи має розв'язок нерівність:

а) $10^x > 10$; б) $7^x < -9$; в) $5^x \leqslant 0{,}5$; г) $5^x > -5$; ґ) $4^x \leqslant 0$?

84. Знайдіть корені рівняння:

а) $3^x = 81$; б) $7^x = 1$; в) $5^x = 625$; г) $6^x = -2$; ґ) $4^{-x} = 16$.

85. Розв'яжіть нерівність:

а) $3^x > 1$; б) $7^x < 49$; в) $5^x \leqslant 125$; г) $15^x > -2$; ґ) $4^x \leqslant 0{,}25$.

А

86. Знайдіть корені рівняння:

а) $2^x = 4$; б) $3^x = 81$; в) $5^x = 1$; г) $3^x = 5$;
ґ) $2^x = -4$; д) $0{,}1^x = 0{,}01$; е) $e^x = e$; є) $0{,}5^x = 0{,}125$.

87. Розв'яжіть рівняння:

а) $3^{x-2} = 27$; б) $4^{2x-1} = 16$; в) $5^{x+3} + 3 = 4$; г) $2^{x+1} = 3$.

Зведіть праву та ліву частини рівняння до степеня з однією основою і розв'яжіть його (88, 89).

88. а) $2 \cdot 4^x = 8^{x+1}$; б) $27^{x-1} = 9^{x+1}$;
в) $(0{,}1)^x = 100$; г) $0{,}4^{2x+1} = 0{,}16$.

89. а) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{9}{4}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -4$; г) $\left(1\frac{1}{4}\right)^{x-3} = \frac{16}{25}$.

Розв'яжіть рівняння і нерівність (90, 91).

90. а) $2^{x+1} = 16$, $2^{x+1} \geqslant 16$; б) $3^{2-x} = 27$, $3^{2-x} < 27$;
в) $4^{x-1} = 32$, $4^{x-1} \leqslant 32$; г) $8^{x+2} = 128$, $8^{x+2} > 128$.

91. а) $9^{-x} = 27$, $9^{-x} > 27$; б) $8^{-x} = 16$, $8^{-x} < 16$;
в) $3^{8-2x} = 1$, $3^{8-2x} < 1$; г) $4^{3+5x} = 1$, $4^{3+5x} > 1$.

Розв'яжіть нерівність (92–95).

92. а) $3^x > 1$; б) $4^{2x} \leqslant 0{,}25$; в) $5^{x-1} \leqslant 125$;
г) $5^x > -2$; ґ) $7^{-x} < 49$.

93. а) $2^x < 32$; б) $0{,}2^x > 0{,}008$; в) $10^x < 0{,}001$.

94. а) $5^{2x} < 25^{x+1}$; б) $0{,}1^{3x} < 0{,}1^{2x-3}$; в) $\pi^x < \pi^{2+3x}$.

95. а) $0{,}5^x \leqslant \frac{1}{4}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2-x} > \frac{9}{4}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x < -4$; г) $\left(\frac{7}{5}\right)^{x+3} \leqslant 1\frac{24}{25}$.

Розв'яжіть рівняння, використавши спосіб винесення за дужки спільного множника (96, 97).

96. а) $3^{x+1} + 3^x = 108$; б) $2^{x+2} + 2^x = 5$;
в) $2^x - 2^{x-2} = 12$; г) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 3^x = 39$.

97. а) $2 \cdot 3^{x+1} + 3^{x+3} = 33$; б) $5^{x+2} + 11 \cdot 5^x = 180$;
в) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 75$; г) $5 \cdot 0{,}5^{x-3} + 0{,}5^{x+1} = 162$.

Розв'яжіть рівняння заміною змінної (98–100).

98. а) $6^{2x} - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$; б) $64^x - 8^x - 56 = 0$;
в) $9^x - 8 \cdot 3^x = 9$; г) $7^{2x} + 7 = 8 \cdot 7^x$.

99. а) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$; б) $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$;
в) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$; г) $4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$.

100. а) $100^x - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$; б) $4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$;
в) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x - 10 = 0$; г) $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 = 0$.

Розв'яжіть нерівність (101–104).

101. а) $3^{x+2} - 3^x < 8$; б) $3^{x+2} + 3^{x-1} < 28$.

102. а) $5^{x+1} + 5^x > 150$; б) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x < 15$.

103. а) $2^{2x} - 2^x < 0$; б) $0{,}25^x - 0{,}5^{x+1} - 3 < 0$.

104. а) $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$; б) $3^{-2x} - 3^{-x} \geqslant 0$.

105. Розв'яжіть графічно нерівність:
а) $2^x > 4$; б) $0{,}5^x \geqslant 8$; в) $2^{-x} < 0{,}5$.

Б

Розв'яжіть рівняння (106–112).

106. а) $4^{x-2} = 2$; б) $9^{3-x} = \sqrt{3}$; в) $5^{2x-1} = 125$.

107. а) $8^{2x-1} = 2\sqrt{2}$; б) $0{,}4^{2x+1} = 0{,}16$; в) $(\sqrt{7})^{x+1} = 49$.

108. а) $\left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^x = \frac{64}{27}$; б) $\left(\frac{27}{8}\right)^x = \frac{2187}{128}$; в) $\frac{1}{2}\left(\frac{9}{25}\right)^x = \frac{27}{250}$.

109. а) $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x} = 3^{5x-1}$; б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} = 2^{4x-1}$;
в) $\left(\frac{5}{6}\right)^{1-2x} = \left(\frac{6}{5}\right)^{2-x}$; г) $\left(\frac{7}{3}\right)^{3-2x} = \left(\frac{3}{7}\right)^{4+3x}$.

110. а) $8^{x+1} = 5^{x+1}$; б) $13^{x-3} - 11^{3-x} = 0$;
в) $5^x \cdot 2^{2x} = 400$; г) $2^x \cdot 3^{2x} = 324$.

111. а) $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$;
б) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 17$.

112. а) $7^{3x+3} + 7^{3x+2} + 7^{3x+1} = 57$; б) $4^{4x-1} + 4^{4x-2} + 4^{4x-3} = 168$.

113. При яких значеннях змінної значення виразу: 1) дорівнює одиниці; 2) не перевищує одиницю?
а) $0{,}3^{x^2-x}$; б) 7^{x^2-4}; в) $5^{x(x+3)}$; г) $0{,}5^{x^2-3x+2}$; ґ) $4^{\sqrt{x}-1}$.

Розв'яжіть нерівність (114, 115).

114. а) $3^{x+0{,}5} \cdot 3^{x-2} \geqslant 3$; б) $0{,}5^{x+7} \cdot 0{,}5^{1-2x} \leqslant 2$;
в) $8^x \cdot 4^{x+13} < \frac{1}{16}$; г) $2^{x-2} \cdot 4^{1+x} > \frac{1}{8}$.

115. а) $13^{2x+1} - 13^x < 12$; б) $3^{2x+1} > 10 \cdot 3^x - 3$;
в) $9^x + 3^{x+1} > 108$; г) $4^x + 2^{x+1} > 80$.

116. Розв'яжіть графічно нерівність:
а) $2^x \leqslant \frac{2}{x}$; б) $0{,}5^x \geqslant x + 3$; в) $3x + x > 4$.

117. Металеву кульку, температура якої дорівнює 120 °C, помістили в приміщення з температурою повітря 20 °C. Через скільки хвилин температура кульки буде 84 °C, якщо закон охолодження тіла виражається формулою $D = D_0 \cdot b^{kt}$, де D – різниця між температурою тіла, яке охолоджується, і температурою навколишнього середовища; D_0 – початкова різниця температур тіла й середовища; t – час у хвилинах; b і k – сталі величини, які залежать від форми тіла і матеріалу? Для даного тіла $b = 0{,}8$, $k = 0{,}1$.

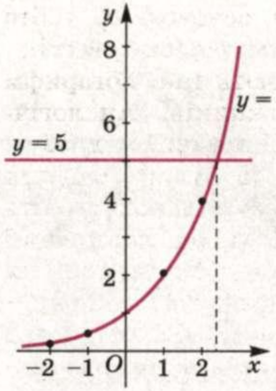
Вправи для повторення

118. Обчисліть:
а) $81^{0{,}75}$; б) $32^{0{,}6}$; в) $25^{1{,}5}$; г) $100^{2{,}5}$.

119. Знайдіть область визначення функції:
а) $y = -7x + 3$; б) $y = x^2 - 4$; в) $y = \sqrt{x+4}$;
г) $y = \frac{3}{x+9}$; ґ) $y = \frac{-1}{x^2+4}$; д) $y = \frac{x}{1-x}$.

120. Знайдіть основу показникової функції, якщо її графік проходить через точку:
а) $A(5; 32)$; б) $B(-1; 2)$; в) $C(-2; 4)$.

§ 4. Логарифми та логарифмічні функції



Мал. 19

1. Логарифми. Неважко переконатися, що рівняння $2^x = 4$ має корінь $x = 2$, а рівняння $2^x = 8$ – корінь $x = 3$. А який корінь має рівняння $2^x = 5$? За допомогою графічного методу можна переконатися, що воно має єдиний розв'язок (мал. 19). Це число більше за 2 і менше за 3, але як його записати?

Нехай число a додатне і відмінне від 1. Якщо рівність $a^\alpha = b$ правильна, то число a називають *логарифмом* числа b за основою a.

Тобто ***логарифмом* числа b за основою a називають *показник степеня*, до якого слід піднести число a, щоб дістати b.** Логарифм числа b за основою a позначають $\log_a b$.

П р и к л а д и:

$\log_2 8 = 3$, бо $2^3 = 8$; $\log_{0,5}16 = -4$, бо $0,5^{-4} = 16$.

Основою логарифма може бути довільне додатне число a, крім 1. З рівності $a^\alpha = b$ випливає, що коли число a додатне, то і b додатне. Отже, якщо число b не додатне (від'ємне або дорівнює 0), то $\log_a b$ не існує. Логарифм кожного додатного числа завжди існує.

Знаходження логарифма числа називають *логарифмуванням*. Ця операція обернена до операції піднесення до степеня з відповідною основою.

За означенням логарифма, якщо $a^\alpha = b$, то $\alpha = \log_a b$. Це різні записи тієї самої залежності. З них випливає рівність

$$a^{\log_a b} = b.$$

Цю рівність називають ***основною логарифмічною тотожністю***. Вона правильна для будь-яких додатних a і b, $a \neq 1$.

Н а п р и к л а д:

$$2^{\log_2 32} = 32;\ (\sqrt{5})^{\log_{\sqrt{5}} 25} = 25;\ 0,1^{\log_{0,1} 0,001} = 0,001.$$

За допомогою основної логарифмічної тотожності будь-яке додатне число можна подати у вигляді степеня, що має задану основу.

Н а п р и к л а д: $7 = 5^{\log_5 7}$; $7 = 12^{\log_{12} 7}$; $7 = 0,5^{\log_{0,5} 7}$.

Для будь-яких додатних значень x, y і $a \neq 1$ виконуються рівності:

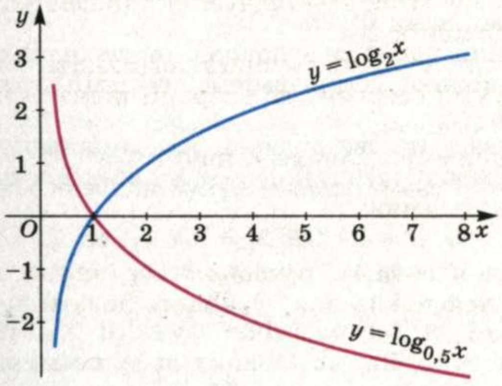
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;\ \log_a x^p = p\log_a x.$$

Доведемо першу з цих рівностей. Нехай $\log_a x = m$ і $\log_a y = n$. Тоді $a^m = x$ і $a^n = y$, звідки $a^m \cdot a^n = xy$, або $a^{m+n} = xy$.

Тут $m + n$ – логарифм числа xy за основою a, тобто $\log_a(xy) = m + n = \log_a x + \log_a y$. А це й вимагалося довести.

Доведену властивість коротко формулюють так: логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів множників. Аналогічно можна довести й інші твердження про логарифм дробу і логарифм степеня (доведіть самостійно). За допомогою цих тверджень і таблиць логарифмів упродовж кількох століть учені спрощували громіздкі обчислення. Адже логарифми дають можливість множення чисел замінити додаванням їх логарифмів, ділення – відніманням, піднесення до степеня – множенням тощо. Тільки в другій половині XX ст., коли з'явилися калькулятори та інші ЕОМ, потреба в логарифмічних обчисленнях відпала. Відійшли в історію також спеціальні логарифмічні лінійки, якими інженери та вчені колись користувалися для обчислень. Проте логарифмічні функції й тепер використовують досить часто.

2. Логарифмічна функція. Функцію називають *логарифмічною*, якщо її можна задати формулою $y = \log_a x$, де x – аргумент, a – додатне і відмінне від 1 дане дійсне число. Приклади логарифмічних функцій: $y = \log_2 x$, $y = \log_{0,5} x$. Їх графіки подано на малюнку 20.

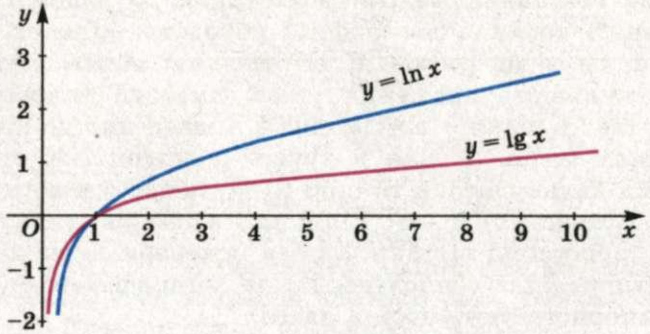


Мал. 20

Графіки логарифмічних функцій не обов'язково будувати за точками. Виявляється, що графік функції $y = \log_a x$ симетричний графіку функції $y = a^x$ відносно бісектриси першого координатного кута. Адже рівності $y = \log_a x$ і $a^y = x$ виражають одну й ту саму залежність між змінними x і y. Якщо в другій із цих рівностей поміняти x на y, а y на x, то це рівнозначно заміні осі x віссю y і навпаки. Такі функції, як

$y = \log_a x$ і $y = a^x$ називаються *оберненими*. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \log_2 x$ і $y = 2^x$ та переконайтеся, що вони симетричні відносно прямої $y = x$.

Найчастіше розглядають логарифми з основами e і 10. Їх називають відповідно *натуральними* та *десятковими логарифмами* і позначають символами ln і lg. Графіки функцій $y = \ln x$ і $y = \lg x$ зображено на малюнку 21.



Мал. 21

Основні властивості логарифмічних функцій:

1) область визначення функції $y = \log_a x$ – проміжок $(0; \infty)$;

2) область значень – множина R;

3) функція зростає на всій області визначення, якщо $a > 1$, і спадає, коли $0 < a < 1$;

4) функція ні парна, ні непарна, ні періодична;

5) графік кожної логарифмічної функції проходить через точку $A(1; 0)$.

Зверніть увагу на твердження, які випливають з монотонності логарифмічної функції $y = \log_a x$ і виконуються для всіх x з її області визначення:

1) якщо $a > 0$, $a \neq 1$ і $\log_a x_1 = \log_a x_2$, то $x_1 = x_2$;

2) якщо $a > 1$ і $\log_a x_1 > \log_a x_2$, то $x_1 > x_2$;

3) якщо $0 < a < 1$ і $\log_a x_1 > \log_a x_2$, то $x_1 < x_2$.

Показникові та логарифмічні функції досить зручні для моделювання процесів, пов'язаних зі зростанням населення, капіталу, розмноженням бактерій, зміною атмосферного тиску, радіоактивним розпадом і т. п. Тому їх часто використовують для розв'язування прикладних задач.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке логарифм числа a за основою b? Як його записують?
2. Якою може бути основа логарифма?
3. Чи існує логарифм від'ємного числа? А нуля?

4. Яку рівність називають основною логарифмічною тотожністю?
5. Чому дорівнює логарифм добутку? А частки?
6. Які логарифми називають десятковими? А натуральними? Як їх записують?
7. Сформулюйте означення логарифмічної функції.
8. Яка область визначення логарифмічної функції? А область значень?
9. Через яку точку проходить графік кожної логарифмічної функції?
10. Чи може аргумент логарифмічної функції бути від'ємним? А дорівнювати нулю?
11. За якої умови логарифмічна функція зростає? А за якої – спадає?

Виконаємо разом

1. Обчисліть: а) $3\lg 5 + 0{,}5\lg 64$; б) $25^{1-0{,}5\log_5 10}$.

Розв'язання.

а) $3\lg 5 + 0{,}5\lg 64 = \lg 5^3 + \lg 64^{0{,}5} = \lg 125 + \lg 8 = \lg 1000 = 3$;

б) $25^{1-0{,}5\log_5 10} = 25 : (25^{0{,}5})^{\log_5 10} = 25 : 5^{\log_5 10} = 25 : 10 = 2{,}5$.

2. Знайдіть x за логарифмом:
$\log_{0,3} x = 0{,}5\log_{0,3} a - 2\log_{0,3} b + \log_{0,3} c$.

Розв'язання. $\log_{0,3} x = 0{,}5\log_{0,3} a - 2\log_{0,3} b + \log_{0,3} c =$

$= \log_{0,3} a^{0,5} - \log_{0,3} b^2 + \log_{0,3} c = \log_{0,3} \dfrac{\sqrt{ac}}{b^2}$.

Оскільки $\log_{0,3} x = \log_{0,3} \dfrac{\sqrt{ac}}{b^2}$, то $x = \dfrac{\sqrt{ac}}{b^2}$.

3. Порівняйте числа $\log_{0,1} 9$ і $\log_{0,1} 0{,}9$.

Розв'язання. Функція $y = \log_{0,1} x$ – спадна, бо $0{,}1 < 1$. Оскільки $9 > 0{,}9$, то $\log_{0,1} 9 < \log_{0,1} 0{,}9$.

Виконайте усно

121. Відомо, що $3^5 = 243$. Чому дорівнює $\log_3 243$?

Обчисліть (122–124).

122. а) $\log_2 4$; б) $\log_2 32$; в) $\log_2 0{,}5$; г) $\log_2 4$; ґ) $\log_2 2$.

123. а) $\log_3 3$; б) $\log_3 81$; в) $\log_3 27$; г) $\log_3 1$; ґ) $\log_3 9$.

124. а) $\log_{0,5} 2$; б) $\log_{0,5} 1$; в) $\log_{0,5} 0{,}5$; г) $\log_{0,5} 4$; ґ) $\log_{0,5} 8$.

125. Спростіть вираз: а) $3^{\log_3 x}$; б) $7^{\log_7 (y+1)}$; в) $3^{2\log_3 x}$; г) $49^{\log_7 (y+1)}$.

126. Знайдіть x:

а) $\log_a x = \log_a 15 - \log_a 3$; б) $\log_a x = 0{,}5\log_a 64$;

в) $\log_2 x = \log_2 a + \log_2 c$; г) $\log_2 x = 2\log_2 a$.

127. Зростаючою чи спадною є функція:

а) $y = \log_{0,3}x$; б) $y = \ln x$; в) $y = \log_2 x$; г) $y = \lg x$?

128. Вкажіть область визначення функції:

а) $y = \log_3(x - 3)$; б) $y = \ln(x + 1)$; в) $y = \log_2 x^2$.

А

129. Знайдіть логарифми чисел 1; 2; 4; 8; 16 за основою 4.

130. Обчисліть: $\lg 10$; $\lg 100$; $\lg 1000$; $\ln e$; $\ln e^3$.

131. Покажіть, що:

а) $\log_2 16 = 4$; б) $\log_5 125 = 3$; в) $\log_{\sqrt{3}} 81 = 8$.

132. Запишіть за допомогою логарифмів співвідношення:

а) $5^4 = 625$; б) $9^{0,5} = 3$; в) $4^{1,5} = 8$;

г) $6^0 = 1$; ґ) $10^{-3} = 0,001$; д) $a^{3x} = c$.

133. Запишіть за допомогою показника степеня співвідношення:

а) $\log_3 81 = 4$; б) $\log_2 64 = 6$; в) $\log_{64} 2 = \frac{1}{6}$;

г) $\log_4 x = 3$; ґ) $\log_5 2x = 2$; д) $\log_x 49 = 2$.

134. Чи правильна рівність:

а) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$; б) $\log_{0,5} 4 = -2$; в) $\log_9 \sqrt{3} = 0,25$?

Обчисліть значення виразу (**135, 136**).

135. а) $5^{\log_5 4}$; б) $1,2^{\log_{1,2} 7}$; в) $0,3^{2\log_{0,3} 0,3}$;

г) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$; ґ) $\lg 300 - \lg 3$; д) $\ln 3e - \ln 3$.

136. а) $\log_3 2 + \log_3 4,5$; б) $\log_5 4 - \log_5 0,8$;

в) $3\log_2 6 - \log_2 27$; г) $\log_{0,3} 9 - 2\log_{0,3} 10$;

ґ) $\dfrac{\lg 27 - \lg 3}{\lg 15 - \lg 5}$; д) $\dfrac{\ln 18 + \ln 8}{2\ln_2 + \ln 3}$.

137. Заповніть таблицю і побудуйте графік функції $y = \log_8 x$.

x	0,25	0,5	1	2	4	8
$y = \log_8 x$						

138. Використовуючи малюнок 22, знайдіть наближені значення функції $y = \log_{2,5} x$ у точках з абсцисами:

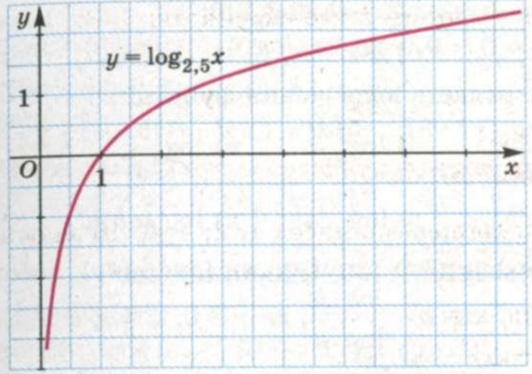
а) 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; б) 0,4; 1,4; 2,5; 3,8; 6,25.

139. Використовуючи малюнок 22, установіть, при яких значеннях аргументу x значення функції $y = \log_{2,5} x$ дорівнює:

а) −1; −2; −3; 0; 1; 2; 3; б) −0,5; −2,2; 0,4; 1,4; 2; 2,2.

140. Чи проходить графік функції $y = \log_{\sqrt{3}} x$ через точку:

а) $A(6; 27)$; б) $B(27; 6)$; в) $C(\sqrt{3}; 1)$?



Мал. 22

141. Знайдіть a, коли відомо, що графік функції $y = \log_a x$ проходить через точку:

а) $M(8; 3)$; б) $M(8; -3)$; в) $M(121; 2)$; г) $M(81; -4)$.

142. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = \log_3 2x$; б) $y = \ln(x - 3)$;

в) $y = \log_9(x + 5)$; г) $y = \ln(1 - x)$.

143. Розв'яжіть нерівність:

а) $\log_5 x > \log_5 3$; б) $\log_{\frac{1}{5}} x \leqslant \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{8}$; в) $\lg x < \lg 4$;

г) $\ln x > \ln 0,5$; ґ) $\log_3 x < 2$; д) $\log_{0,4} x > 2$.

Б

144. Знайдіть логарифм за основою 3 числа:

а) $\frac{1}{27}$; б) 729; в) $\sqrt[4]{9}$; г) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; ґ) $3^{\sqrt{3}}$.

145. Подайте числа -2; $-\sqrt{3}$; -1; $-0,5$; 0; 0,5; 1; $\sqrt{3}$; 2 у вигляді логарифма за основою:

а) 5; б) 0,1; в) 11; г) 2,5; ґ) $\sqrt{5}$.

146. Спростіть вираз:

а) $2^{4\log_2 3}$; б) $9^{\log_3 5}$; в) $8^{\log_2 7}$;

г) $5^{-\log_5 4}$; ґ) $10^{1-\lg 5}$; д) $e^{2-\ln 2}$.

Знайдіть x за даним логарифмом (**147, 148**).

147. а) $\log_5 27 + \log_5 \frac{1}{3} = \log_5 x$; б) $\log_5 x = \frac{1}{3}\log_5 8 - 2$;

в) $\log_3 120 - \log_3 15 = \log_3 x$; г) $\log_{20} x = 1 + \log_{20} 10$.

148. а) $\log_7 x = 1 - \log_7 2 + 0{,}5\log_7 100$;
б) $\log_3 x = 2 - 0{,}5\log_3 4 - \log_3 5$.

149. Враховуючи, що $\log_a b = 8$, обчисліть:
а) $\log_a(ab)$; б) $\log_a\dfrac{a}{b}$; в) $\log_a\dfrac{b}{a}$;
г) $\log_a(a^2b)$; ґ) $\log_a\sqrt{ab}$; д) $\log_a(ab)^{\frac{2}{3}}$.

150. Прологарифмуйте основну логарифмічну тотожність і доведіть, що $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$.

151. Доведіть, що коли $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то
а) $\log_a b \cdot \log_b a = 1$; б) $\log_{a^n} b^n = \log_a b$;
в) $a^{\lg b} = b^{\lg a}$; г) $\dfrac{\lg a}{\lg b} = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.

152. Порівняйте з нулем числа:
а) $\log_{0,5}5$; б) $\log_{0,5}0{,}1$; в) $\log_2 0{,}5$; г) $\lg 4$;
ґ) $\log_{25}7$; д) $\log_{\sqrt{5}}50$; е) $\log_{0,5}\sqrt{3}$; є) $\ln 0{,}01$.

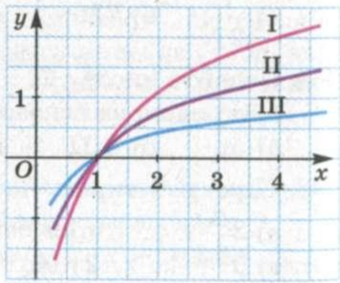
153. Порівняйте з одиницею числа:
а) $\log_{49}3$; б) $\log_2 14$; в) $\log_{98}128$; г) $\log_2 e$.

Порівняйте числа (154, 155).

154. а) $\log_2 0{,}4$ і $\log_2 0{,}6$; б) $\log_2 3$ і $\log_2\pi$;
в) $\log_{0,2}1{,}4$ і $\log_{0,2}4{,}1$; г) $\log_{0,5}e$ і $\log_{0,5}\pi$.

155. а) $\log_2 0{,}4$ і $\log_{0,2}0{,}4$; б) $\log_2 3$ і $\ln 0{,}01$;
в) $\log_{0,2}4$ і $\log_2 1{,}6$; г) $\log_{25}0{,}7$ і $\lg 4$.

156. На малюнку 23 зображено графіки функцій $y = \ln x$, $y = \lg x$ та $y = \log_2 x$. Установіть відповідність між цими функціями і лініями I, II, III. Побудуйте графік функції (див. с. 301–302):
а) $y = 3 + \lg x$; б) $y = 2\lg x$;
в) $y = \lg|x|$; г) $y = 2 + \ln x$;
ґ) $y = -1 + \ln x$; д) $y = |\ln x|$.



Мал. 23

157. Побудуйте графік функції:
а) $y = \log_4 x$; б) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$; в) $y = 2 + \log_3 x$;
г) $y = -\log_3 x$; ґ) $y = \log_2(x - 1)$; д) $y = \log_{0,5}(x + 2)$.

Вправи для повторення

158. Побудуйте графік функції:
а) $y = 2^x$; б) $y = 2^{x+1}$; в) $y = 2^x + 1$; г) $y = 2^{|x|}$.

159. Розв'яжіть нерівність:
а) $8x - 3 > 5x + 6$; б) $7y - 13 < 5y - 9$;
в) $7x^2 - 5x - 2 \geqslant 0$; г) $x^2 - 6x - 55 \leqslant 0$.

160. З перевернутих 28 пластинок доміно навмання взяли одну. Яка ймовірність того, що на ній виявиться всього:
а) 2 очки (подія A); б) 5 очок (подія B)?

§ 5. Логарифмічні рівняння та нерівності

Рівняння називається *логарифмічним*, якщо його змінні входять *лише* під знаки логарифмів.

Приклади: $\log_3 x = 2$; $\lg x + \lg 4 = 2$; $\ln(3x - 2) = 1 - \ln x$.

Найпростішими логарифмічними рівняннями називають рівняння виду

$$\log_a x = b, \text{ де } a > 0,\ a \neq 1.$$

За означенням логарифма, при будь-якому дійсному b це рівняння має єдиний розв'язок: $x = a^b$.

Розв'язування інших логарифмічних рівнянь ґрунтується на властивостях логарифмічної функції, означенні та властивостях логарифма.

Розв'язуючи логарифмічні рівняння, потрібно встановити область допустимих значень рівняння або здійснити перевірку отриманих коренів.

Для логарифмічних рівнянь немає загального методу розв'язування, проте можна виокремити кілька груп рівнянь, для розв'язування яких використовують певні способи. Розглянемо ці способи на конкретних прикладах.

I. *За означенням логарифма.*

Приклад 1. Розв'яжіть рівняння

$$\log_2(x^2 - 4x + 12) = 3.$$

● Розв'язання. За означенням логарифма, $2^3 = x^2 - 4x + 12$. Отже, $x^2 - 4x + 12 = 8$, $x^2 - 4x + 4 = 0$, звідки $(x - 2)^2 = 0$ і $x = 2$.

Перевірка. $\log_2(2^2 - 4 \cdot 2 + 12) = \log_2 8 = 3$.

Відповідь. $x = 2$.

II. *За властивостями логарифмів і логарифмічної функції.*

Приклад 2. Розв'яжіть рівняння

$$\log_2(x - 3) + \log_2(x - 1) = 3 + \log_2(x - 4).$$

●**Розв'язання.** Скористаємося властивостями логарифмів $3 = 3\log_2 2 = \log_2 2^3$, $\log_2 a + \log_2 b = \log_2 (ab)$ та запишемо рівняння у вигляді $\log_2((x-3)(x-1)) = \log_2 2^3(x-4)$. Використовуючи властивості логарифмічної функції, знаходимо: $(x-3)(x-1) = 8(x-4)$.

Отже, $x^2 - 4x + 3 = 8x - 32$, або $x^2 - 12x + 35 = 0$, звідки $x_1 = 5$; $x_2 = 7$.

Перевірка. Якщо $x = 5$, то $\log_2(5-3) + \log_2(5-1) = 3 + \log_2(5-4)$, $\log_2 2 + \log_2 4 = 3 + \log_2 1$, $1 + 2 = 3$, $3 = 3$.

Якщо $x = 7$, то $\log_2(7-3) + \log_2(7-1) = 3 + \log_2(7-4)$, $\log_2 4 + \log_2 6 = 3 + \log_2 3$, $\log_2 24 = \log_2(8 \cdot 3)$, $24 = 24$.

Відповідь. $x_1 = 5$; $x_2 = 7$.

Багато показникових і логарифмічних рівнянь *заміною* $a^{f(x)} = y$ або $\log_a f(x) = y$ можна звести до алгебраїчного рівняння з невідомим y.

Приклад 3. Розв'яжіть рівняння

$$(\lg x - 6)^{-1} + 5(\lg x + 2)^{-1} = 1.$$

●**Розв'язання.** Замінивши $\lg x$ на y, дістанемо рівняння

$$\frac{1}{y-6} + \frac{5}{y+2} = 1,$$

коренями якого є: $y_1 = 2$; $y_2 = 8$. Отже, $\lg x_1 = 2$ або $\lg x_2 = 8$, звідки $x_1 = 100$; $x_2 = 10^8$.

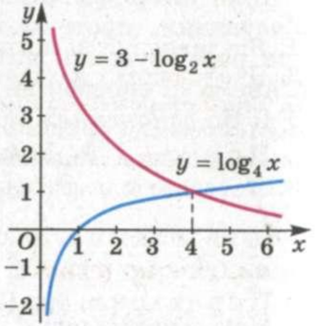
Перевірка показує, що обидва значення задовольняють рівняння.

Відповідь. $x_1 = 100$; $x_2 = 10^8$.

III. Деякі показникові та логарифмічні рівняння можна розв'язувати *графічним способом*.

Приклад 4. Розв'яжіть графічно рівняння $\log_4 x = 3 - \log_2 x$.

●**Розв'язання.** Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \log_4 x$ і $y = 3 - \log_2 x$ (мал. 24). Як бачимо, графіки цих функцій перетинаються в точці з абсцисою $x = 4$. Щоб переконатися, що $x = 4$ – корінь даного рівняння, зробимо перевірку: $\log_4 4 = 3 - \log_2 4$, $1 = 3 - 2$, $1 = 1$.



Мал. 24

Відповідь. $x = 4$.

Якщо в логарифмічному рівнянні знак рівності змінити на знак нерівності, то дістанемо логарифмічну нерівність.

Нерівність називається *логарифмічною*, якщо її змінні входять *лише* під знаки логарифмів.

Для розв'язування логарифмічних нерівностей використовують ті самі методи, що й для розв'язування логарифмічних рівнянь.

Найпростіші логарифмічні нерівності виду

$$\log_a x > b \text{ чи } \log_a x < b,\ a > 0,\ a \neq 1$$

розв'язують, використовуючи монотонність і область визначення логарифмічної функції, а саме:

1) якщо $a > 1$ і $\log_a x > b$, то $x > a^b$;

2) якщо $0 < a < 1$ і $\log_a x > b$, то $0 < x < a^b$.

Приклад 5. Розв'яжіть нерівність $\log_{0,5} x > 3$.

●**Розв'язання.** Оскільки $\log_{0,5} x > \log_{0,5} 0{,}5^3$, то функція $y = \log_{0,5} x$ на всій області визначення $(0; \infty)$ спадає, бо $0{,}5 < 1$. Тому $x < 0{,}5^3$.

Відповідь. $0 < x < 0{,}125$.

Приклад 6. Розв'яжіть нерівність

$$\lg(x-1) + \lg(8-x) < 1.$$

●**Розв'язання.** Знайдемо спочатку область допустимих значень x. Система нерівностей $x - 1 > 0$ і $8 - x > 0$ має множину розв'язків $(1; 8)$. На цій множині дана нерівність рівносильна нерівності $\lg(x-1)(8-x) < 1$, або $(x-1)(8-x) < 10$, звідки $x^2 - 9x + 18 > 0$.

Множиною розв'язків утвореної квадратної нерівності є $(-\infty; 3) \cup (6; \infty)$. Враховуючи, що $x \in (1; 8)$, дістанемо відповідь: $(1; 3) \cup (6; 8)$.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Які рівняння називають логарифмічними?
2. Яке рівняння називають найпростішим логарифмічним?
3. Скільки розв'язків має найпростіше логарифмічне рівняння?
4. Які способи розв'язування логарифмічних рівнянь ви знаєте?
5. Які нерівності називають логарифмічними?
6. Які способи розв'язування логарифмічних нерівностей ви знаєте?

Виконаємо разом

1. Розв'яжіть рівняння $\ln(x-8) + \ln(1-x) = 1$.

●**Розв'язання.** Щоб $\ln(x-8)$ і $\ln(1-x)$ мали зміст, потрібне одночасне виконання нерівностей $x - 8 > 0$ і $1 - x > 0$. Система цих нерівностей розв'язку не має.

Відповідь. Рівняння не має розв'язків.

2. Розв'яжіть рівняння $\log_5\log_4\log_3 x = 0$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння так:

$$\log_5(\log_4\log_3 x) = 0.$$

Число, що стоїть у дужках, за означенням логарифма, дорівнює 5^0, тобто 1:

$$\log_4\log_3 x = 1.$$

Запишемо це рівняння так: $\log_4(\log_3 x) = 1$. Звідси дістаємо $\log_3 x = 4$, або $x = 3^4 = 81$.

Відповідь. 81.

3. Розв'яжіть нерівність $\log^2_{0,5} x - 4 \geqslant 0$.

Розв'язання. Нехай $\log_{0,5} x = y$. Тоді $y^2 - 4 \geqslant 0$. Цю нерівність задовольняють значення $y \geqslant 2$, а також $y \leqslant -2$. Нехай $\log_{0,5} x \geqslant 2$, звідки $\log_{0,5} x \geqslant \log_{0,5} 0,5^2$, $0 < x \leqslant 0,25$. Якщо $\log_{0,5} x \leqslant -2$, то $\log_{0,5} x \leqslant \log_{0,5} 0,5^{-2}$, $x \geqslant 4$.

Відповідь. $(0;\ 0,25] \cup [4;\ \infty)$.

4. Розв'яжіть нерівність $\lg(x+3) + \lg 2 < 2\lg x - \lg(x-4)$.

Розв'язання. Область допустимих значень: $(4;\ \infty)$. Перенесемо $\lg(x-4)$ з правої частини нерівності в ліву та перетворимо утворену нерівність, використовуючи властивості логарифмів:

$$\lg(x+3) + \lg 2 + \lg(x-4) < 2\lg x,$$

$$\lg\big(2(x+3)(x-4)\big) < \lg x^2.$$

Звідси $2(x+3)(x-4) < x^2$, або $x^2 - 2x - 24 < 0$. Множина розв'язків останньої нерівності – це проміжок $(-4;\ 6)$.

Врахувавши область допустимих значень, знайдемо множину розв'язків заданої нерівності: $(-4;\ 6) \cap (4;\ \infty) = (4;\ 6)$.

Відповідь. $(4;\ 6)$.

Виконайте усно

Розв'яжіть рівняння (161–164).

161. а) $\log_3 x = 1$; б) $\ln x = 1$; в) $\log_5 x = -1$.

162. а) $\lg x = 0$; б) $\log_4 x = 2$; в) $\log_7 x = -2$.

163. а) $\ln x = -1$; б) $\log_{0,1} x = -2$; в) $\log_8 x = -\dfrac{1}{3}$.

164. а) $\log_x 16 = 2$; б) $\log_x 5 = -1$; в) $\log_x 81 = -4$.

Розв'яжіть нерівність (165–167).

165. а) $\lg x > \lg 2$; б) $\ln x < \ln 2$; в) $\lg x^2 < \lg 9$.

166. а) $\log_2 x > 2$; б) $\log_2 x < 3$; в) $\lg x < 0$.

167. а) $\log_{0,2} x > 1$; б) $\log_{0,2} x < 0$; в) $\log_{0,5} x \geqslant 2$.

А

Знайдіть корені рівняння, використовуючи означення логарифма (168–172).

168. а) $\log_2(x-3) = 4$; б) $\lg(x+5) = 2$; в) $\ln(2-x) = -3$.

169. а) $\lg 2x = 4$; б) $\lg x^2 = 4$; в) $\lg\dfrac{x}{2} = 3$.

170. а) $\log_5(x-1) = 2$; б) $\log_2(x^2+3x) = 2$;
в) $\log_2(x^2-1) = 3$; г) $\log_x(x^2-2x+6) = 2$.

171. а) $\log_2(x+5) = 1$; б) $\log_2(x^2+x) = 1$;
в) $\log_3(x^2+2) = 3$; г) $\log_x(16-x^3) = 3$.

172. а) $\log_{\frac{1}{3}}(1-2x) = -2$; б) $\log_{16}(x^2-3x) = 0,5$;
в) $\log_{0,5}(3x-1) = 3$; г) $\log_{\frac{1}{7}}(4x+1) = -2$.

Використовуючи властивості логарифмів, розв'яжіть рівняння (173–176).

173. а) $\lg(3x-17) = \lg(x+1)$; б) $\log_6(5x+3) = \log_6(7x+5)$;
в) $\lg(4x+5) = \lg(5x+2)$; г) $\log_2(6x-8) = \log_2(3x+1)$.

174. а) $\lg(2x^2+3x) = \lg(6x+2)$;
б) $\lg(4x+1) - \lg x = 0$;
в) $\log_3(x^2-4x-5) = \log_3(7-3x)$;
г) $\lg(x+4) - \lg(3x) = 0$.

175. а) $\lg(x-1) = \lg 2 + \lg(2x-11)$; б) $\log_5 x + \log_5(x-4) = 1$;
в) $\lg(3x-1) = \lg 5 + \lg(x+5)$; г) $\log_2 x + \log_2(x-3) = 2$.

176. а) $\log_{12}(x-3) + \log_{12}(x-2) = 1$;
б) $1 + \log_5(2x-1) = \log_5(7x+4)$;
в) $\log_2(x+1) = 1 + \log_2(x-3)$;
г) $2\log_3 x = 1 + \log_3(2x-3)$.

Розв'яжіть нерівність (177–180).

177. а) $\log_2(3-2x) < \log_2 13$; б) $\log_{0,5}(1-3x) \geqslant \log_{0,5} 4$;
в) $\log_{0,7}(2x-7) > \log_{0,7} 5$; г) $\log_7(3x+8) < \log_7 5$.

178. а) $\log_2(4-x) - \log_2 8 < 0$; б) $\lg x > \lg 7 + 1$;
в) $\log_{0,25}(2-x) - \log_{0,25} 2 > 0$; г) $\lg x \leqslant 2 - \lg 5$.

179. а) $\log_3(x-7) < 3$; б) $\log_3(v+1) < -2$;
в) $\log_{\frac{1}{3}}(y-7) > -2$; г) $\log_{\frac{2}{3}}(2-5z) < -2$.

180. а) $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5)<0$; б) $\log_{\frac{1}{4}}(3-4x)>-1$;
в) $\lg(12-5x)<0$; г) $\log_{16}(4x+3)>\frac{1}{2}$.

Б

Розв'яжіть рівняння (181–183).

181. а) $\log_7\log_2\log_{13}x=0$; б) $\log_5\log_4\log_3x=0$.

182. а) $\log_{2008}\log_3\log_2x=0$; б) $\lg\lg\log_5x=0$.

183. а) $\lg(x+1)-\lg(x+3)=\lg3-\lg(x-1)$;
б) $\log_2(x+3)-\log_2(x-1)=2-\log_2(2x-8)$.

Розв'яжіть рівняння заміною змінної (184–186).

184. а) $\lg^2x-4\lg x+4=0$; б) $\log_5x\cdot(\log_5x-1)=2$;
в) $\frac{1}{5-\log_2x}+\frac{2}{1+\log_2x}=1$; г) $\lg10x=\frac{3}{\lg x-1}$.

185. а) $\lg^2x-\lg x-2=0$; б) $\ln^2x-2\ln x=3$;
в) $\frac{1}{1+\lg z}+\frac{6}{5+\lg z}=1$; г) $\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1$.

186. а) $\log_2^2(x-1)-\log_2(x-1)-6=0$; б) $\lg^2x+2\lg x-3=0$;
в) $2\log_9^2(x+5)-3\log_9(x+5)+1=0$; г) $\ln^2x-2\ln x=0$.

Розв'яжіть рівняння (187, 188).

187. а) $\log_3x-2\log_{\frac{1}{3}}x=6$; б) $4-\lg z=3\sqrt{\lg z}$;
в) $\log_{0,5}\log_8\frac{x^2-2x}{x-3}=0$; г) $\log_x2+\log_2x=2,5$.

188. а) $2\lg(-x)=\lg(x+2)$; б) $\ln(x^2-2x)=\ln(2x+12)$;
в) $\log_2x+\log_x16=5$; г) $x^{2+\lg x}=1000$.

Розв'яжіть нерівність (189–193).

189. а) $\log_2(x-5)+\log_2(x+2)>3$;
б) $\log_3(x-2)+\log_3(x+6)\leqslant2$.

190. а) $\log_5(x+13)<\log_5(x+3)+\log_5(x-5)$;
б) $\log_4(x+32)\geqslant\log_4(1-x)+\log_4(8-x)$.

191. а) $\lg(x-1)-\lg(2x-11)\geqslant\lg2$;
б) $\lg(3x-1)-\lg(x+5)>\lg5$.

192. а) $\log_3^2(4-x)<1$; б) $\log_3^2x-\log_3x-6<0$;
в) $\log_5^2(5-x)\leqslant4$; г) $\log_2^2x-3\log_3x-4>0$.

193. а) $\log_{0,2}^2(x-1)>4$; б) $\log_3^2x-2\log_3x<3$;
в) $\log_4^2(x-3)\geqslant1$; г) $\log_{0,2}^2x-5\log_{0,2}x<-6$.

194. Розв'яжіть графічно рівняння:
а) $\log_3x=1-x$; б) $x-1=3\log_4x$;
в) $\log_2x=\sqrt{3-x}$; г) $\log_{0,5}x=-\frac{2}{x}$.

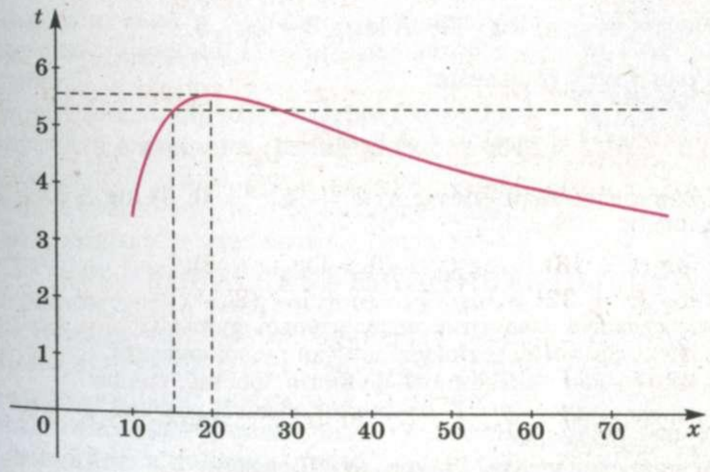
195. Розв'яжіть графічно нерівність:
а) $\log_2x<3-x$; б) $\ln x<x^3+1$;
в) $\log_4x>\frac{x}{3}-\frac{1}{3}$; г) $x<11-\lg x$.

196. Знайдіть з точністю до 10^{-4} корені рівняння:
а) $\lg x=0,4$; б) $\lg x=-1,5$; в) $\ln x=3,7$;
г) $\log_3x=2,5$; ґ) $\log_{0,5}x=3$; д) $\log_{\sqrt2}x=\sqrt3$.

197. Ємність легенів людини виражається функцією

$$t(x)=\frac{110(\ln x-2)}{x},$$

де x – вік людини в роках ($x\geqslant10$); $t(x)$ – ємність легенів у літрах.
За допомогою графіка функції $t(x)$, зображеного на малюнку 25, установіть:
а) у якому віці ємність легенів людини максимальна і чому вона дорівнює;
б) протягом якого часу ємність легенів більша, ніж у 15 років.



Мал. 25

Вправи для повторення

198. Катер пройшов за течією річки 80 км і повернувся назад, затративши на весь шлях 8 год 20 хв. Скільки часу катер рухався за течією річки, якщо її швидкість дорівнює 4 км/год?

199. Побудуйте графіки функцій $y = x^{\frac{1}{3}}$ і $y = \sqrt[3]{x}$.

200. Розташуйте в порядку зростання числа:

а) $0{,}5^{0{,}5}$; $0{,}5^{-5}$; $0{,}5^{1{,}5}$; $0{,}5^{\sqrt{5}}$;

б) $3^{0{,}3}$; 3^{-5}; $3^{1{,}3}$; $3^{\sqrt{5}}$.

Самостійна робота № 1

Варіант 1

1. Побудуйте графік функції: а) $y = 3^x$; б) $y = \log_{0{,}5} x$.
2. Обчисліть: а) $\log_2 32$; б) $\log_6 2 + \log_6 3$.
3. Розв'яжіть рівняння:

а) $9^x - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$; б) $\log_5(2x + 3) = 2$;
в) $4^{x+1} - 4^{x-1} = 60$; г) $\lg(3x + 1) + \lg x = 1$.

4. Розв'яжіть нерівність: а) $3^{4x} - 9^{x+2} < 0$; б) $\log_2 4x < 3$.

Варіант 2

1. Побудуйте графік функції: а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; б) $y = \log_3 x$.
2. Обчисліть: а) $\log_9 81$; б) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$.
3. Розв'яжіть рівняння:

а) $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$; б) $\log_3(7x - 1) = 3$;
в) $6^x - 6^{x-2} = 210$; г) $\lg(2x + 4) = 1 - \lg(x - 2)$.

4. Розв'яжіть нерівність: а) $2^{4x} - 4^{x-2} > 0$; б) $\log_{0{,}6} 3x > 2$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Сформулюйте означення показникової функції.
2. Назвіть основні властивості показникової функції.
3. За якої умови показникова функція зростає; спадає?
4. Чи задає рівність $y = 1^x$ функцію? Який її графік? Чи є ця функція показниковою?
5. Що таке експонента? Накресліть її графік.
6. Що таке логарифм числа? Наведіть приклади.

7. Які логарифми називають десятковими; натуральними?
8. Сформулюйте основні властивості логарифмів.
9. Напишіть основну логарифмічну тотожність.
10. Які функції називають логарифмічними?
11. Назвіть основні властивості логарифмічної функції.
12. За якої умови логарифмічна функція зростає; спадає?
13. Які функції називають взаємно оберненими? Наведіть приклади.
14. Які рівняння називають показниковими; логарифмічними?
15. Як розв'язують показникові та логарифмічні рівняння?
16. Як розв'язують показникові та логарифмічні нерівності?
17. Які рівняння або нерівності називають трансцендентними?

Історичні відомості


Л. Ейлер

Функції та графіки. Поняття функції з'явилось у математиці в XVII ст. Його введенню сприяли насамперед роботи Р. Декарта, П. Ферма, І. Ньютона. Термін «функція» запропонував Г. Лейбніц. Пізніше Й. Бернуллі, Г. Лопіталь, К. Гаусс та інші математики уточнювали й розширювали це поняття.

Основні властивості числових функцій, зокрема їх парність, непарність, періодичність, неперервність, диференційовність тощо, дослідив у двотомній праці «Вступ до аналізу нескінченно малих» Л. Ейлер (1707–1783).


С. Стевін

Найзагальніше сучасне означення функції запропонувала у XX ст. група математиків, що виступала під псевдонімом Н. Бурбакі.

Степені з невеликими натуральними показниками розглядали вавилонські вчені ще понад 4000 років тому. Степені з дробовими, нульовими та від'ємними показниками входили в математику поступово в XIV–XVII ст. Різні математики позначали їх по-різному. Від'ємні та дробові показники степенів використовували Н. Орезм, М. Шюке, С. Стевін. Після публікації праць І. Ньютона сучасні позначення цих степенів стали загальноприйнятими. Тоді ж почали розглядати степені з довільними дійсними показниками.


Дж. Непер

В. Отред

Дж. Валліс

Логарифми введено в математику наприкінці XVI ст. Цей термін запровадив англійський математик Дж. Непер (1550–1617) в розумінні числового відношення (грец. λογος – відношення, αριθμος – число). Десяткові логарифми ввів англійський математик Г. Брігс. У 1620 р. Вільям Отред винайшов першу логарифмічну лінійку, яка протягом тривалого часу була незамінним інструментом інженера.

Близьке до сучасного розуміння логарифмування як операції, оберненої до піднесення до степеня, вперше з'явилось у Валліса та Йогана Бернуллі. Відкриття логарифмів і створення таблиць логарифмів значно спростило громіздкі обчислення, тому вони широко використовувалися на практиці. Французький математик П. Лаплас зазначав, що винахід логарифмів подовжив життя обчислювачів. Згодом було створено логарифмічну лінійку – прилад для механічного виконання дій другого і третього ступенів.

З появою мікрокалькуляторів обчислення за допомогою таблиць логарифмів і логарифмічних лінійок відійшло в історію. А логарифмічні та обернені їм показникові функції використовуються і тепер.

Показникові й логарифмічні функції ґрунтовно досліджував Л. Ейлер, називаючи їх «показниковими та логарифмічними кількостями».

Головне в розділі 1

Вираз a^α називають *степенем*. Тут a – основа степеня, α – його показник. Значення степеня з раціональним показником знаходять за формулами:

$$a^1 = a;\ a^0 = 1\ (a \neq 0);\ a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}},\ (a \in R,\ n \in N);$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ (a \neq 0,\ n \in N);\ a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\ (n \in N,\ m \in Z,\ a > 0).$$

Основні властивості степенів:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2) $a^m : a^n = a^{m-n}$; 3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$;
4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; 5) $(a : b)^n = a^n : b^n$.

Значення степеня з дійсним показником степеня знаходять наближено за допомогою калькулятора або комп'ютера.

Функція виду $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називається показниковою.

Основні властивості показникової функції:

1) область визначення функції $y = a^x$ – множина R;
2) область значень функції $y = a^x$ – множина $(0; \infty)$;
3) якщо $a > 1$, функція $y = a^x$ зростає, а якщо $0 < a < 1$ – спадає;
4) функція $y = a^x$ – ні парна, ні непарна, ні періодична;
5) графік кожної показникової функції проходить через точку $(0; 1)$.

Логарифмом числа b за основою a називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб дістати b.

Тобто, якщо $a^x = b$, то $x = \log_a b$ $(b > 0,\ a > 0,\ a \neq 1)$.

Властивості логарифмів:

1) $\log_a 1 = 0$; 2) $\log_a a = 1$;
3) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; 4) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
5) $\log_a x^n = n \log_a x$; 6) $a^{\log_a b} = b$.

Функція виду $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називається логарифмічною.

Основні властивості логарифмічної функції:

1) область визначення функції $y = \log_a x$ – множина $(0; \infty)$;
2) область значень функції $y = \log_a x$ – множина R;
3) якщо $a > 1$, функція $y = \log_a x$ зростає, а якщо $0 < a < 1$ – спадає;
4) функція $y = \log_a x$ – ні парна, ні непарна, ні періодична;
5) графік кожної логарифмічної функції проходить через точку $(1; 0)$.

Функції $y = \log_a x$ і $y = a^x$ – взаємно обернені, тому їх графіки симетричні відносно прямої $y = x$.

Показниковими називаються рівняння та нерівності, у яких змінні містяться лише в показниках степенів.

Основні методи розв'язування показникових рівнянь і нерівностей:

I. Метод зведення обох частин рівняння до степенів (логарифмів) з однаковими основами;

II. Метод уведення нової змінної;

III. Функціонально-графічний метод.

Логарифмічними **називаються рівняння та нерівності, у яких змінні містяться лише під знаками логарифмів.**

Основні методи розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей:

I. За означенням логарифма;

II. За властивостями логарифмів і логарифмічної функції;

III. Введення нової змінної;

IV. Графічний;

V. Логарифмування.

Показникові та логарифмічні рівняння й нерівності входять до складу трансцендентних рівнянь і нерівностей.