ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Яку функцію називають складеною? Наведіть приклади.
2. Як знаходять похідну складеної функції? Наведіть приклади.

Виконаємо разом

1. Знайдіть $f(g(x))$, якщо:

а) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin x$; б) $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2 + 1$.

● **Розв'язання.** а) За умовою, $f(x) = \sqrt{x}$ – зовнішня функція, а $g(x) = \sin x$ – внутрішня. Отже, аргументом зовнішньої функції має бути функція $g(x) = \sin x$, тобто замість x у виразі $\sqrt{x}$ слід записати $\sin x$. Маємо: $f(g(x)) = \sqrt{\sin x}$.

а) За умовою, $f(x) = \ln x$ – зовнішня, а $g(x) = x^2 + 1$ – внутрішня функції. Отже, аргументом функції $f(x) = \ln x$ має бути функція $g(x) = x^2 + 1$, тобто замість x у виразі $\ln x$ треба записати $x^2 + 1$. Маємо: $f(g(x)) = \ln(x^2 + 1)$.

2. Знайдіть y', якщо $y = \cos(x^2 - 1)$.

● **Розв'язання.** $y' = (\cos(x^2 - 1))' = -\sin(x^2 - 1) \cdot (x^2 - 1)' = -\sin(x^2 - 1) \cdot 2x = -2x\sin(x^2 - 1)$.

3. Знайдіть значення похідної функції $y = \sqrt{x^3 + x^2}$ у точці $x = 3$.

● **Розв'язання.** $y' = (\sqrt{x^3 + x^2})' = \dfrac{(x^3 + x^2)'}{2\sqrt{x^3 + x^2}} = \dfrac{3x^2 + 2x}{2\sqrt{x^3 + x^2}}$.

Якщо $x = 3$, то $y' = 2{,}75$.

Виконайте усно

311. Укажіть $f(g(x))$, якщо:
а) $f(x) = x^3$ і $g(x) = \text{tg}x$; б) $f(x) = \text{tg}x$ і $g(x) = x^3$;
в) $f(x) = 2x - 1$ і $g(x) = \text{ctg}x$; г) $f(x) = \text{ctg}x$ і $g(x) = 2x - 1$.

312. Укажіть $f(x)$ і $g(x)$, якщо:
а) $f(g(x)) = \sin(x^2 - 5)$; б) $f(g(x)) = \sqrt{1 - x^3}$;
в) $f(g(x)) = (\text{tg}x + 1)^5$.

313. Чому дорівнює похідна функції:
а) $y = \sin 3x$; б) $y = \cos 5x$; в) $y = \text{tg}(-5x)$;
г) $y = \sin(1-x)$; ґ) $y = \cos(2+x)$; д) $y = \text{tg}(x^2 - 1)$;
е) $y = 3^{2x}$; є) $y = \ln^2$; ж) $y = e^{-x+3}$?

А

Укажіть $f(g(x))$, якщо відомі функції $f(x)$ і $g(x)$ (314, 315).

314. а) $f(x) = x^2$ і $g(x) = 2x + 7$; б) $f(x) = 2x + 7$ і $g(x) = x^2$;
в) $f(x) = \sqrt{x}$ і $g(x) = 3 - 4x$; г) $f(x) = 3 - 4x$ і $g(x) = \sqrt{x}$.

315. а) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ і $g(x) = x^2 + 3$; б) $f(x) = x^2 + 3$ і $g(x) = \dfrac{2}{x}$;
в) $f(x) = \sin x$ і $g(x) = 3x + 4$; г) $f(x) = 3x + 4$ і $g(x) = \sin x$.

За відомою функцією $y = f(g(x))$ укажіть функції $f(x)$ і $g(x)$ (316, 317).

316. а) $y = (3x + 10)^3$; б) $y = (x^2 + 5x - 1)^4$; в) $y = \sqrt{x^2 - 3x}$.

317. а) $y = \dfrac{1}{\sqrt{5 - 2x}}$; б) $y = \dfrac{1}{2x + 4}$; в) $y = \dfrac{10}{(3x - x^2)^3}$.

Знайдіть похідну функції (318–324).

318. а) $y = (x + 3)^{20}$; б) $y = (2 - x)^7$; в) $y = (1 - x^3)^5$.

319. а) $y = 5(1 - 2x)^7$; б) $y = (3 + x^2)^9$; в) $y = (2x + 1)^5$.

320. а) $y = \sin 4x$; б) $y = \text{ctg}2x$; в) $y = \text{tg}3x$;
г) $y = \text{tg}\dfrac{3x}{4}$; ґ) $y = \sin\dfrac{x}{3}$; д) $y = \cos\dfrac{2x}{3}$.

321. а) $y = 2 + \sin 3x$; б) $y = 1 + \text{tg}3x$; в) $y = x + \cos 8x$;
г) $y = \sin x + \sin 2x$; ґ) $y = \cos x - \cos 2x$; д) $y = \text{ctg}5x$.

322. а) $y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$; б) $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$; в) $y = \text{tg}\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right)$;
г) $y = \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$; ґ) $y = \text{tg}(3x + 1)$; д) $y = \cos(1 - x)$.

323. а) $y = \ln\sqrt{x}$; б) $y = e^{\sin x}$; в) $y = 0{,}5^{3x+2}$.

324. а) $y = 5^{2x}$; б) $y = \ln x^6$; в) $y = \cos 2^x$.

Б

Знайдіть похідну функції (325–327).

325. а) $y = x\sin 2x$; б) $y = x\cos 3x$;
в) $y = x\text{tg}\dfrac{x}{2}$; г) $y = x\text{ctg}\dfrac{x}{3}$.

326. а) $y = \sqrt{x^2 - 5}$; б) $y = \sqrt{x + 3} - \sqrt{3x}$;
в) $y = \sqrt{(x - 1)(x + 2)}$; г) $y = x + \sqrt{x^2 - 5x + 6}$.

327. а) $y = \sin^4 x$; б) $y = 5\mathrm{tg}^3 x$; в) $y = \sqrt{\sin x}$; г) $y = \sqrt{\mathrm{tg}\, x}$.

Обчисліть значення похідної функції в точці $x_0 = \frac{\pi}{12}$ (328, 329).

328. а) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right)$.

329. а) $y = \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$; б) $y = \mathrm{tg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Обчисліть значення похідної функції в точці x_0 (330, 331).

330. а) $y = (3x - 4)^7$, $x_0 = 2$; б) $y = (4 - 5x)^8$, $x_0 = 1$.

331. а) $y = \sqrt{25 - 9x}$, $x_0 = 1$; б) $y = \sqrt{7x + 1}$, $x_0 = 5$.

Запишіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 (332, 333).

332. а) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; б) $y = \sqrt{2x + 3}$, $x_0 = 3$.

333. а) $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; б) $y = \sqrt{5x - 1}$, $x_0 = 2$.

Спростіть формулу, що задає функцію, та знайдіть її похідну (334, 335).

334. а) $y = 2\cos^2 x - 1$; б) $y = 1 - 2\sin^2 3x$;
в) $y = 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$; г) $y = \sin^2 8x - \cos^2 8x$.

335. а) $y = \sin 8x \cos 5x - \cos 8x \sin 5x$;
б) $y = \cos 4x \cos 6x + \sin 4x \sin 6x$.

Продиференціюйте раціонально функцію (336, 337).

336. а) $f(x) = \ln((3x - 4)^3)$; б) $f(x) = \ln(x(x^2 + 1))$.

337. а) $f(x) = \ln\left(\frac{x^3 + 2x}{x - 5}\right)$; б) $f(x) = \ln\left(\frac{x^3}{(2 - 3x)^2}\right)$.

Вправи для повторення

338. Побудуйте графік функції та вкажіть її проміжки монотонності:
а) $y = |2x + 3|$; б) $y = |4 - x^2|$.

339. Розв'яжіть рівняння:
а) $\lg^2 x = 1$; б) $\ln^2 x = 4$; в) $\log_2^2 x = 9$.

340. Подайте у вигляді степеня вираз:
а) $a^5 a^7 a^{12}$; б) $(b^{-1}b^3)^{-2}b^{-3}$; в) $(a^3)^{-3}(a^3)^2$.

Самостійна робота № 2

Варіант 1

1. Визначте кутовий коефіцієнт лінійної функції:
а) $y = \frac{1}{2}x - 3$; б) $y = -3x$; в) $y = 5x + 3$.
2. Зростає чи спадає лінійна функція:
а) $y = 3x - 1$; б) $y = 0{,}5x + 3$; в) $y = 1 - x$?
3. Знайдіть похідну функції:
а) $f(x) = 5x^3$; б) $f(x) = x^2(x - 3)$;
в) $f(x) = x + \sin x$; г) $f(x) = 2\mathrm{tg}\, x$.

4*. Дано $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$. Обчисліть $f'(0)$, $f'(-2)$.

Варіант 2

1. Визначте кутовий коефіцієнт лінійної функції:
а) $y = 3x - 2$; б) $y = -0{,}5x$; в) $y = \frac{3}{2}x + 0{,}1$.
2. Зростає чи спадає лінійна функція:
а) $y = 0{,}1x + 10$; б) $y = 3 - 2x$; в) $y = 2x$?
3. Знайдіть похідну функції:
а) $f(x) = 3x^5$; б) $f(x) = (x^2 - 1)x$;
в) $f(x) = x^2 + \cos x$; г) $f(x) = 3\mathrm{ctg}\, x$.

4*. Дано $f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x}$. Обчисліть $f'(1)$, $f'(-2)$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Що означає дослідити функцію?
2. Яка функція називається зростаючою?
3. Яка функція називається спадною?
4. Що таке кутовий коефіцієнт прямої? Чому він дорівнює?
5. Що розуміють під дотичною до графіка функції?
6. Сформулюйте означення похідної функції в точці.
7. Що таке диференціювання?
8. Яку функцію називають диференційовною в точці; на проміжку?
9. Сформулюйте теорему про: а) похідну одночлена; б) похідну суми двох функцій.
10. Як знаходять похідну добутку; частки?

§ 10. Застосування похідної для дослідження функцій

За допомогою похідної можна досліджувати різні функції.

Дослідити функцію – це означає виявити її властивості: вказати її область визначення й область значень, проміжки зростання та спадання, проміжки, на яких функція набуває додатних значень, а на яких – від'ємних, з'ясувати, чи є дана функція парною або непарною і т. ін.

Для визначення проміжків зростання і спадання функції користуються такими твердженнями:

якщо похідна функції в кожній точці деякого проміжку додатна, то функція на цьому проміжку зростає;

якщо похідна в кожній точці проміжку від'ємна, то функція на цьому проміжку спадає;

якщо похідна в кожній точці проміжку тотожно дорівнює нулю, то на цьому проміжку функція стала.

Два сусідні проміжки, на одному з яких функція зростає, а на другому спадає, можуть розділятися тільки такою точкою, в якій похідна функції дорівнює нулю або не існує. Внутрішні точки області визначення функції, в яких її похідна дорівнює нулю або не існує, називають *критичними точками функції.*

Щоб визначити проміжки зростання чи спадання функції $f(x)$, треба розв'язати нерівності $f'(x) > 0$ та $f'(x) < 0$ або знайти всі критичні точки функції, поділити ними область визначення функції на проміжки, а далі досліджувати, на яких проміжках функція зростає, а на яких – спадає.

Приклад 1. Знайдіть проміжки зростання та спадання функції $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

● **Розв'язання.** $y' = (x^3 - 3x^2 + 2)' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$.

Рівняння $3x(x - 2) = 0$ має корені $x = 0$ і $x = 2$. Це – критичні точки. Область визначення даної функції, тобто множину R, вони поділяють на три проміжки: $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$, $(2; \infty)$. Похідна функції на цих проміжках має відповідно такі знаки: +, –, +. Дослідження зручно оформити у вигляді таблиці.

Проміжки	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; \infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	1	↘	–3	↗

Як видно з таблиці, функція зростає на проміжках $(-\infty; 0)$ та $(2; \infty)$ і спадає на проміжку $(0; 2)$.

Оскільки функція $y = x^3 - 3x^2 + 2$ – неперервна, то домовилися стверджувати, що вона зростає на проміжках $(-\infty; 0]$ і $[2; \infty)$, а спадає на проміжку $[0; 2]$.

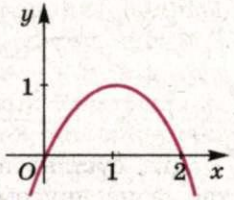
Важливу роль у дослідженні функції відіграють визначення її максимуму та мінімуму. Щоб з'ясувати, що це таке, введемо кілька нових понять.

Околом точки x_0 називається будь-який проміжок, для якого x_0 є внутрішньою точкою.

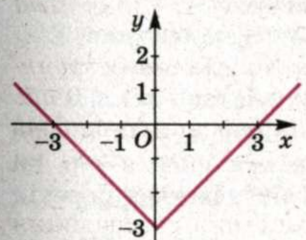
Точка x_0 називається *точкою мінімуму* (або *максимуму*) функції $y = f(x)$, якщо для всіх x з деякого околу x_0 виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$ (або відповідно $f(x_0) > f(x)$). Значення функції в точці мінімуму називається *мінімумом функції*, а в точці максимуму – *її максимумом.* Позначають їх символами $y_{\min}$, $y_{\max}$.

Точки мінімуму й максимуму функції разом називають *точками екстремуму* (лат. *extremum* – край, кінець). Значення функції в точках її екстремуму – *екстремальні значення*, або *екстремуми.*

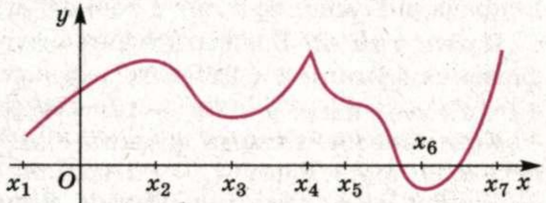
Наприклад, для функції $y = 2x - x^2$ точка $x = 1$ є точкою максимуму (мал. 43). Її максимум: $y_{\max} = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$.



Мал. 43



Мал. 44



Мал. 45

Для функції $y = |x| - 3$ точка $x = 0$ є точкою мінімуму (мал. 44). Її мінімум: $y_{\min} = 0 - 3 = -3$.

Функція, графік якої зображено на малюнку 45, має чотири точки екстремуму: x_2 і x_4 – точки максимуму; x_3, x_6 – точки мінімуму.

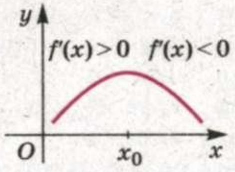
Точками екстремуму функції можуть бути тільки її критичні точки. Це – необхідна умова існування екстремуму.

Точки екстремуму можна вибрати з критичних точок функції за наявності достатньої умови існування екстремуму.

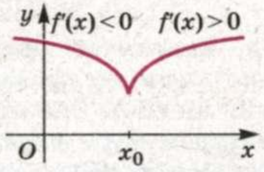
Нехай критична точка $x = a$ є внутрішньою точкою деякого інтервалу $(b; c)$ і такою, що на кожному з інтервалів $(b; a)$ та $(a; c)$ похідна функції існує і зберігає знак. Така критична точка, переходячи через яку в напрямі зростання

аргументу похідна змінює знак з «+» на «–», є точкою максимуму, а точка, переходячи через яку похідна змінює знак з «–» на «+», – точкою мінімуму.

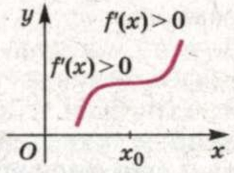
Справді, якщо, наприклад, похідна функції $f(x)$ на проміжку $(a;\ x_0)$ додатна, а на проміжку $(x_0;\ b)$ від'ємна, то, переходячи через точку x_0, функція змінює зростання на спадання (мал. 46). У цьому випадку x_0 – точка максимуму. Якщо ж під час переходу через точку x_0 спадання функції змінюється на зростання, то x_0 – точка мінімуму (мал. 47).



Мал. 46



Мал. 47



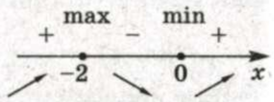
Мал. 48

Якщо ж похідна функції в точці x_0 дорівнює нулю, а зліва і справа від x_0 похідна функції додатна (мал. 48) або зліва і справа від'ємна, то x_0 не є точкою екстремуму.

Приклад 2. Знайдіть точки екстремуму та екстремальні значення функції $y = 2x^3 + 6x^2 - 5$.

● **Розв'язання.** $y' = 6x^2 + 12x = 6x(x + 2)$.

Критичними точками функції є: $x_1 = -2$ та $x_2 = 0$. У разі переходу через точку $x_1 = -2$ похідна змінює знак з «+» на «–», тому це – точка максимуму. Якщо відбувається перехід через точку $x_2 = 0$, похідна змінює знак з «–» на «+», тому це – точка мінімуму (мал. 49).



Мал. 49

Отже,

$y_{max} = 2 \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 5 = 3;$

$y_{min} = 2 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 - 5 = -5.$

Відповідь. $x_1 = -2$ – точка максимуму, $y_{max} = 3$; $x_2 = 0$ – точка мінімуму, $y_{min} = -5$.

Функцію можна дослідити, користуючись такою схемою:

1) знайти область визначення функції;

2) дослідити функцію на парність, непарність, періодичність;

3) знайти точки перетину графіка функції з осями координат;

4) дослідити функцію на монотонність, тобто знайти проміжки зростання та спадання функції;

5) знайти точки екстремуму та екстремальні значення;

6) побудувати графік функції.

Приклад 3. Дослідіть функцію $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$.

● **Розв'язання.** Область визначення функції – всі дійсні числа, крім $x = -1$. З такою областю визначення функція не може бути парною, непарною чи періодичною.

Знайдемо похідну даної функції:

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+3)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

Критичні точки функції: $x_1 = -3$; $x_2 = 1$. Вони розбивають числову вісь на чотири проміжки. Побудуємо на їх основі таблицю та з'ясуємо властивості заданої функції.

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	+	0	–	Не існує	–	0	+
$f(x)$	↗	–6 max	↘	Не існує	↘	2 min	↗

На проміжках $(-\infty; -3]$ і $[1; \infty)$ функція зростає, а на проміжках $[-3; -1)$ і $(-1; 1]$ – спадає.

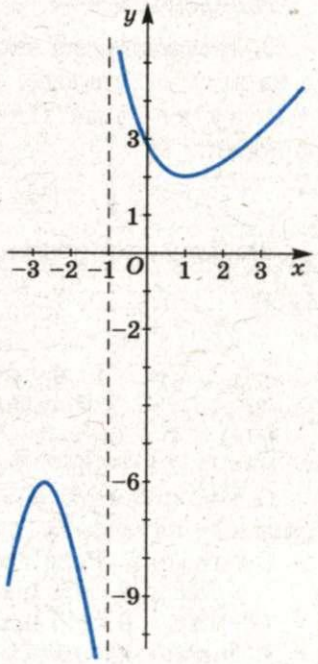
Точка максимуму $x_1 = -3$, $f(-3) = -6$; точка мінімуму $x_2 = 1$, $f(1) = 2$.

Область значень функції:

$$(-\infty; -6) \cup (2; \infty).$$

Рівняння $\dfrac{x^2 + 3}{x + 1} = 0$ не має розв'язків, тому графік функції не перетинає вісь x. Вісь y він перетинає в точці з ординатою $f(0) = 3$.

Графік цієї функції зображено на малюнку 50.



Мал. 50

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке критичні точки функції?
2. За якої умови функція зростає (спадає) на деякому проміжку?
3. Як визначити проміжки, на яких дана функція зростає або спадає?
4. Що таке точка максимуму функції? А точка мінімуму?
5. Що таке точки екстремуму? А екстремуми функції?
6. Що означає дослідити функцію?

Виконаємо разом

1. Знайдіть критичні точки функції $y = \dfrac{x^2}{x+2}$.

• **Розв'язання.** $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; \infty)$. Знайдемо похідну функції:

$$y' = \left(\frac{x^2}{x+2}\right)' = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}.$$

Знайдемо точки, в яких похідна дорівнює нулю чи не існує:

$y' = 0$, якщо $\dfrac{x(x+4)}{(x+2)^2} = 0$, звідки $x = 0$ і $x = -4$;

y' не існує, якщо знаменник дорівнює нулю, звідки $x = -2$.

Точка $x = -2$ не входить до області визначення функції.

Отже, функція має дві критичні точки: $x = 0$ і $x = -4$.

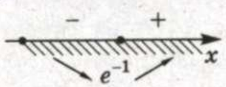
Відповідь. 0 і –4.

2. Установіть, на якому проміжку функція $y = x\ln x$ зростає, а на якому – спадає.

• **Розв'язання.** Спосіб 1. $D(y) = (0; \infty)$. Знайдемо похідну функції:

$$y' = (x\ln x)' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x.$$

Знайдемо критичні точки функції:



Мал. 51

$y' = 0$, якщо $1 + \ln x = 0$, або $\ln x = -1$, звідки $x = e^{-1}$.

Ця точка поділяє область визначення функції на два проміжки (мал. 51). Визначимо знак похідної на кожному проміжку:

$y'(e) = 1 + \ln e = 1 + 1 = 2 > 0$;

$y'(e^{-2}) = 1 + \ln e^{-2} = 1 - 2\ln e = -1 < 0$.

Отже, функція $y = x\ln x$ зростає на проміжку $[e^{-1}; \infty)$, а спадає – на $(0; e^{-1}]$.

Спосіб 2. Розв'яжемо нерівності $y' < 0$ та $y' > 0$:

$1 + \ln x < 0$, або $\ln x < \ln e^{-1}$, звідки $0 < x < e^{-1}$;

$1 + \ln x > 0$, або $\ln x > \ln e^{-1}$, звідки $x > e^{-1}$.

Відповідь. Функція зростає, якщо $x \in [e^{-1}; \infty)$ і спадає, якщо $x \in (0; e^{-1}]$.

3. Дослідіть функцію $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$ і побудуйте її графік.

• **Розв'язання.** 1) $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$.

2) Функція – непарна, оскільки $y(-x) = -\dfrac{x}{x^2 - 4} = -y(x)$.

Отже, її графік симетричний відносно початку координат, тому достатньо дослідити функцію на проміжку $[0; 2) \cup (2; \infty)$.

3) Якщо $x = 0$, то й $y = 0$ – графік перетинає осі координат тільки в одній точці (0; 0).

4) Знайдемо похідну функції:

$$y' = \left(\frac{x}{x^2 - 4}\right)' = \frac{x^2 - 4 - x \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = -\frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}.$$

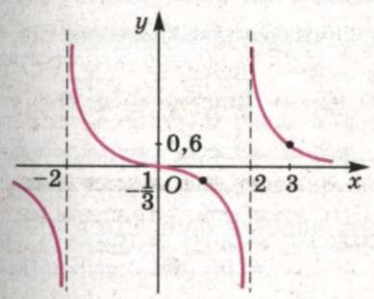
Очевидно, що $y' > 0$ для всіх x з області визначення.

Отже, функція не має максимумів і мінімумів, а спадає на кожному з проміжків $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$ і $(2; \infty)$.

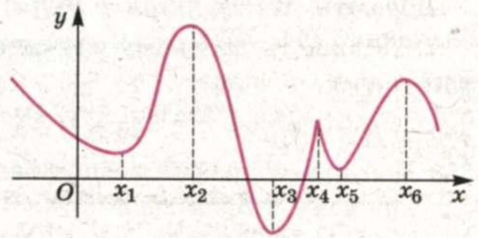
Для точнішої побудови обчислимо значення функції в кількох точках:

$$y(1) = -\frac{1}{3};\ \ y(1{,}5) = -\frac{6}{7};\ \ y(3) = 0{,}6;\ \ y(4) = \frac{1}{3}.$$

Графік функції подано на малюнку 52.



Мал. 52



Мал. 53

Виконайте усно

341. Знайдіть критичні точки функції:

а) $y = x^3$; б) $y = \sin x$; в) $y = \sqrt{x}$; г) $y = x^2 + 2x + 1$.

342. Яка з функцій зростає на всій області визначення:

а) $y = \lg x$; б) $y = x^3$; в) $y = 2^{-x}$; г) $y = 0{,}5x$?

343. Яка з функцій спадає на всій області визначення:

а) $y = \sqrt{x}$; б) $y = \log_{1,5} x$; в) $y = 0{,}5^x$; г) $y = -5x$?

344. Використовуючи малюнок 53, визначте:

а) критичні точки функції;

б) проміжки зростання та спадання;

в) точки максимуму й мінімуму.

345. Скільки точок екстремуму може мати функція $y = f(x)$, якщо $f(x)$ – многочлен третього, четвертого або п'ятого степеня?

А

Знайдіть критичні точки функції (346–348).

346. а) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$; б) $f(x) = x - \ln x$.

347. а) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 1$; б) $f(x) = \sqrt{x - x^2}$.

348. а) $f(x) = e^{-x} + x$; б) $f(x) = \cos 2x$.

Доведіть, що функція $y = f(x)$ зростає на всій області визначення (349, 350).

349. а) $f(x) = x^3 + 3$; б) $f(x) = 4x - 1$; в) $f(x) = 5 + \ln x$.

350. а) $f(x) = 2^x - 3$; б) $f(x) = x + 2{,}5$; в) $f(x) = 5\sqrt{x}$.

Доведіть, що функція $y = f(x)$ спадає на всій області визначення (351, 352).

351. а) $f(x) = 1 - x^3$; б) $f(x) = -4x + 3$; в) $f(x) = -\ln x$.

352. а) $f(x) = 0{,}5^x + 7$; б) $f(x) = x + 2{,}5$; в) $f(x) = 5\sqrt{x}$.

353. Побудуйте графік неперервної функції, яка зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -1)$ і $(3; \infty)$, але спадає, якщо $x \in (-1; 3)$. Укажіть, яких значень набуває функція в критичних точках.

Знайдіть проміжки зростання та спадання функції (354–356).

354. а) $f(x) = 3 - 2x^2$; б) $f(x) = 2x - x^2$.

355. а) $f(x) = x^4 - 2x^2$; б) $f(x) = x^2(x + 5)$.

356. а) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 1$; б) $f(x) = 8 - 6x^2 - x^4$.

357. Знайдіть точку мінімуму функції:
а) $y = x + x^2$; б) $y = x^2 - 6x - 3$; в) $y = 5x^2 - 4x$.

358. Знайдіть точку максимуму функції:
а) $y = 5 - x^2$; б) $y = 1 - x - x^2$; в) $y = x - 2x^2$.

359. Знайдіть точки екстремумів функції:
а) $y = 2x^3 + 3x^2 - 5$; б) $y = 1 + 8x^2 - x^4$;
в) $y = -x^3 + 12x + 7$.

Знайдіть точки екстремуму та екстремальні значення функції (360–362).

360. а) $f(x) = 7x^2 - 2x + 4$; б) $f(x) = x^2 + x + 1$.

361. а) $f(x) = x^3 - 3x + 5$; б) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

362. а) $f(x) = 8 - 12x - x^3$; б) $f(x) = 1 + 8x^2 - x^4$.

363. Побудуйте графік неперервної функції, яка спадає на кожному з проміжків $(-\infty; -1]$ та $[3; 5]$ і зростає на двох інших проміжках – $(-1; 3)$ та $(5; \infty)$. Врахуйте, що мінімальні значення цієї функції рівні між собою. Для побудованого графіка випишіть усі точки екстремуму та екстремальні значення функції.

Дослідіть функцію і побудуйте її графік (364, 365).

364. а) $f(x) = x^2 - 2x + 4$; б) $f(x) = 4 + 5x - x^2$;
в) $f(x) = x^3 + 3x + 2$; г) $f(x) = 3x - x^3$.

365. а) $f(x) = \frac{x^4}{4} + 8x + 5$; б) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} + \frac{1}{4}$;
в) $f(x) = 4x^2 - x^4$; г) $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

Б

Знайдіть точки екстремумів функції (366, 367).

366. а) $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$; б) $f(x) = 10\cos x - 5x$.

367. а) $f(x) = x - 2\cos x$; б) $f(x) = x + 2\sin x$.

Знайдіть точки екстремумів та екстремальні значення функції (368, 369).

368. а) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$; б) $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$.

369. а) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$; б) $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$.

370. Доведіть, що не має екстремумів функція:
а) $f(x) = 2x + \sin x$; б) $f(x) = -3x - \cos x$.

371. Доведіть, що на всій області визначення функція $y = a^x$:
а) зростає, якщо $a > 1$; б) спадає, якщо $0 < a < 1$.

372. Доведіть, що на всій області визначення функція $y = \log_a x$:
а) зростає, якщо $a > 1$; б) спадає, якщо $0 < a < 1$.

373. Доведіть, що функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає, а $y = \operatorname{ctg} x$ – спадає на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

374. Знайдіть максимальні та мінімальні значення функції:
а) $y = x - \ln(1+x)$; б) $y = xe^{-x}$; в) $y = x - \sqrt[3]{x^2}$.

Дослідіть функцію і побудуйте її графік (375–377).

375. а) $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$; б) $f(x) = \dfrac{3x}{1+x^2}$.

376. а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$; б) $f(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$.

377. а) $f(x) = x\sqrt{3-x}$; б) $f(x) = x^2\sqrt{x+2}$.

Вправи для повторення

378. Знайдіть найменше спільне кратне та найбільший спільний дільник чисел 175 і 280.

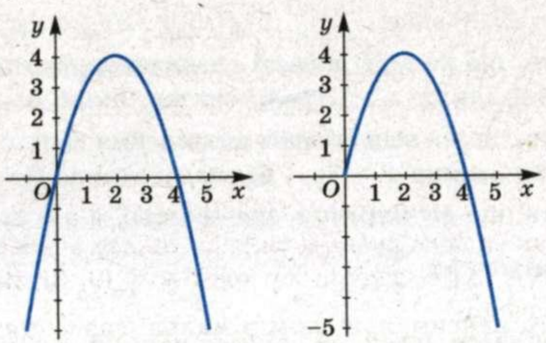
379. Звільніться від ірраціональності в знаменнику:

а) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}}$; б) $\dfrac{m}{\sqrt{n}}$; в) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$; г) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3}}$.

380. На фермі були гуси та кілька собак, які їх охороняли. Скільки гусей і скільки собак було на фермі, якщо разом вони мали 98 голів і 202 ноги?

§ 11. Найбільші та найменші значення функції

Не слід ототожнювати максимум і мінімум функції з її *найбільшим* або *найменшим значенням*. Під точкою максимуму (мінімуму) розуміють точку, в якій функція має найбільше (найменше) числове значення порівняно з її значеннями в усіх досить близьких від неї точках. А найбільше або найменше значення функції на відрізку може й не бути її максимумом або мінімумом. Наприклад, функція $f(x) = 4x - x^2$ має максимум у точці $x = 2$, а мінімуму не має. А от на проміжку [0; 5] свого найменшого значення вона досягає в кінці проміжку: $f(5) = -5$, а найбільшого – в точці $x = 2$ (мал. 54).



Мал. 54

Функція може мати кілька максимумів (мінімумів) на деякому проміжку, але не більше одного найбільшого (найменшого) значення (див. мал. 53). Функція може не мати максимуму (мінімуму) на проміжку, але мати найбільше (найменше) значення.

Найбільше та найменше значення функції тісно пов'язані з її областю значень. Якщо область значень неперервної функції – проміжок $[m; M]$, то m – найменше значення даної функції, а M – найбільше значення.

Щоб знайти найбільше та найменше значення неперервної функції $f(x)$ на проміжку $[a; b]$, треба обчислити її значення $f(a)$, $f(b)$ на кінцях цього проміжку і в критичних точках, що належать йому, вибрати з них найбільше і найменше.

Приклад. Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ на проміжку $[-4; 4]$.

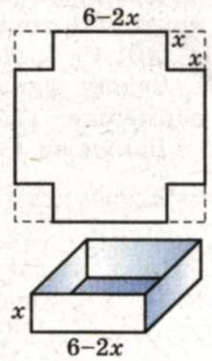
● **Розв'язання.** $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$.

Критичні точки: $x_1 = -3$ і $x_2 = 1$. Значеннями функції є: $f(-4) = 10$; $f(-3) = 17$; $f(1) = -15$ (найменше); $f(4) = 66$ (найбільше).

Відповідь. $\max\limits_{[-4;\,4]} f(x) = 66$, $\min\limits_{[-4;\,4]} f(x) = -15$.

За допомогою похідної зручно розв'язувати *екстремальні задачі*, тобто такі, в яких потрібно визначити найбільше або найменше значення певної величини.

Задача. Маємо квадратний лист жерсті зі стороною 6 дм. Які квадрати треба вирізати в кутах даного листа, щоб з одержаної заготовки зробити коробку без кришки найбільшого об'єму (мал. 55)?



Мал. 55

● **Розв'язання.** Щоб одержати коробку у формі прямокутного паралелепіпеда, у кутах листа треба вирізати рівні квадрати. Нехай x – довжина сторони такого квадрата. Тоді висота коробки дорівнюватиме x, а сторона її основи – $6 - 2x$. Об'єм коробки $V(x) = (6-2x)^2x$ – функція від x. Зрозуміло, що число x додатне і менше за 3. Маємо математичну модель задачі: визначити, при якому значенні x функція $V(x) = (6-2x)^2x$, задана на проміжку (0; 3), набуває найбільшого значення.

Щоб розв'язати задачу, знайдемо похідну даної функції: $V(x) = 36x - 24x^2 + 4x^3$; $V'(x) = 36 - 48x + 12x^2$.

Щоб знайти критичні точки функції, прирівняємо її похідну до нуля та розв'яжемо рівняння.

$12x^2 - 48x + 36 = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ – не належить проміжку (0; 3).

Якщо $x < 1$, то $V'(x) > 0$, а якщо $x > 1$, то $V'(x) < 0$. Отже, найбільшого значення функція $V(x)$ набуває при $x = 1$.

Відповідь. Треба відрізати квадрати, сторони яких дорівнюють 1 дм.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке найбільше (найменше) значення функції на даному проміжку?
2. Чи те саме означають максимальне значення функції та її найбільше значення?
3. Як знайти найбільше або найменше значення неперервної функції на проміжку $[a; b]$?

Виконаємо разом

1. Знайдіть область значень функції $y = x^3 - 9x^2 - 7$, якщо $x \in [0; 10]$.

● **Розв'язання.** $y' = (x^3 - 9x^2 - 7)' = 3x^2 - 18x$.

Знайдемо критичні точки: $y' = 0$, якщо $3x^2 - 18x = 0$, або $3x(x - 6) = 0$, звідки $x = 0$, $x = 6$.

Знайдемо значення функції на кінцях проміжку [0; 10] і в критичній точці $x = 6$:

$y(0) = -7$; $y(6) = -115$; $y(10) = 93$.

Задана функція неперервна; її найбільше значення – 93, а найменше –115. Отже, область її значень – відрізок [–115; 93].

Відповідь. [–115; 93].

2. Розкладіть число 100 на два доданки, добуток яких найбільший.

● **Розв'язання.** Нехай перше число дорівнює x, тоді друге – $100 - x$. Розглянемо функцію $y = x(100 - x)$ і визначимо, за яких значень x з проміжку (0; 100) функція набуває найбільшого значення. Знайдемо похідну цієї функції, прирівняємо її до нуля та визначимо критичні точки:

$y' = \left(x(100 - x)\right)' = (100x - x^2)' = 100 - 2x$; $100 - 2x = 0$; $x = 50$.

Якщо $x < 50$, то $y' > 0$, а якщо $x > 50$, то $y' < 0$. Отже, найбільшого значення функція $y = x(100 - x)$ досягає при $x = 50$.

Відповідь. $100 = 50 + 50$.

Виконайте усно

381. Чи має найбільше значення функція:
а) $y = x^3$; б) $y = e^x$; в) $y = \lg x$; г) $y = 2x + 1$?

382. Укажіть найменше значення функції:
а) $y = x^4$; б) $y = \sin x$; в) $y = \sqrt{x}$; г) $y = 2^{|x|}$.

383. Укажіть найбільше та найменше значення функції $y = x^2$ на проміжку:
а) [0; 2]; б) [–1; 1]; в) [–2; 0]; г) [–5; 2].

384. Чи може значення функції в точці максимуму бути меншим за її значення в точці мінімуму?

385. Чи може найбільше значення функції бути меншим за її екстремум? А навпаки?

А

386. Знайдіть найменше та найбільше значення функції $y = x^3 - 1$ на проміжку:
а) [0; 2]; б) [–1; 1]; в) [–2; 0]; г) [–3; 3].

387. Знайдіть найменше та найбільше значення функції $y = x^2 - 2x$ на проміжку:
а) [–1; 0]; б) [–1; 1]; в) [–2; 0]; г) [0; 3].

Знайдіть найбільше та найменше значення функції (388–390).

388. $f(x) = x^2 - 4x$ на проміжку [–3; 3].

389. $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ на проміжку [–2; 2].

390. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 3$ на проміжку [–3; 1].

391. Яке число в сумі з його квадратом має найменше значення?

392. Знайдіть найбільший добуток двох чисел, сума яких дорівнює 64.

393. Доведіть, що коли сума двох додатних чисел стала, то їх добуток найбільший тоді, коли ці числа рівні.

394. Число 10 розділіть на два доданки так, щоб їх добуток був найбільшим.

395. Яке додатне число разом з оберненим дає найменшу суму?

396. Площа прямокутного загону для страусів дорівнює 40 000 м². Якими мають бути його розміри, щоб на огорожу пішло найменше сітки Рабиця?

397. Треба загородити два пасовища у формі рівних прямокутників зі спільною стороною так, щоб сума їх площ дорівнювала 6 га. Знайдіть найменшу можливу довжину огорожі.

Б

Знайдіть найбільше та найменше значення функції на заданому проміжку (**398, 399**).

398. а) $f(x) = x^5 - x^3 + x - 7$ на проміжку: 1) $[-2; 1]$; 2) $[-1; 2]$;
б) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3$ на проміжку: 1) $[0; 2]$; 2) $[-1; 5]$.

399. а) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ на проміжку: 1) $[-2; 2]$; 2) $[0; 3]$;
б) $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$ на проміжку: 1) $[1; 3]$; 2) $[-4; -1]$.

400. Чи має найбільше або найменше значення на множині R функція:
а) $f(x) = x^3 - 5x + 2$; б) $f(x) = 3 - 2x^2 - x^5$?

Знайдіть область значень функції (**401, 402**).

401. а) $y = x^6 - 3x^4 + 2$; б) $y = 2 - x^2 - x^4$.

402. а) $y = \sqrt{4 - x - x^2}$; б) $y = x + \dfrac{1}{x}$.

403. Довжина відрізка AB дорівнює 6, точка M – його середина. Знайдіть на відрізку AB таку точку X, щоб добуток довжин XA, XB, XM був найбільшим.

404. Який з прямокутників, вписаних у дане коло, має найбільшу площу? Розв'яжіть задачу двома способами.

405. Який з прямокутників, вписаних у дане коло, має найбільший периметр?

406. Якими мають бути розміри басейну об'ємом 32 м^3 з квадратним дном і вертикальними стінами, щоб на його облицювання пішло найменше плиток?

407*. Якими слід робити літрові консервні банки циліндричної форми, щоб на їх виготовлення витрачалося найменше жерсті? Допусками на шви можна знехтувати. Об'єм циліндра дорівнює добутку площі його основи на висоту.

Вправи для повторення

408. Запишіть рівняння дотичної, проведеної до графіка функції $y = x^3 + x^2$ у точці $x_0 = -2$.

409. Для функції $y = 5x^2 + 1$ знайдіть границю відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

410. Катер пройшов відстань між двома пристанями за течією річки за 1,6 год, а на зворотну дорогу витратив 2 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

§ 12. Похідна як швидкість

Досі під похідною ми розуміли кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції (геометричний зміст похідної). Але похідну можна використовувати також для визначення швидкості проходження різних процесів – руху ракети, планети, літака, машини; обертання маховика, дзиґи, балерини; протікання хімічної реакції, нагрівання тіла; розмноження бактерій, росту рослин, тварин; зростання грошових доходів, витрат тощо.

Приклад. Нехай тіло рухається прямолінійно зі змінною швидкістю. Відстань s, пройдена тілом за час t, – функція від t. Рівність $s = f(t)$ виражає закон руху цього тіла. Як, знаючи закон руху, визначити миттєву швидкість тіла в будь-який момент часу t?

Нехай за час від t до $t + \Delta t$ тіло пройшло відстань $f(t + \Delta t) - f(t)$. Протягом цього часу воно рухалось із середньою швидкістю $\dfrac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$.

Якщо $\Delta t \to 0$, то це відношення дедалі менше відрізняється від швидкості руху тіла в момент t. Отже, швидкість руху тіла в момент t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}.$$

А це – похідна функції $s = f(t)$. Отже, *якщо відомий закон руху $s = f(t)$, то швидкість $v(t)$ цього руху в кожний момент t дорівнює похідній цієї функції*: $v(t) = f'(t)$.

Розглянемо конкретний приклад. Як відомо, вільне падіння тіла (якщо не враховувати опору повітря) відбувається за законом $s(t) = \dfrac{g}{2}t^2$ (тут $g \approx 9{,}8$ м/с^2 – прискорення земного тяжіння). З якою швидкістю тіло падає в момент t після початку падіння?

Розв'язувати задачу можна так. За час від t до $t + \Delta t$ тіло проходить відстань $\dfrac{g}{2}(t+\Delta t)^2 - \dfrac{g}{2}t^2 = \dfrac{g}{2}(2t\Delta t + \Delta t^2)$ із середньою швидкістю $\frac{g}{2}(2t\Delta t + \Delta t^2) : \Delta t = \frac{g}{2}(2t + \Delta t)$. Якщо $\Delta t \to 0$, то $v(t) \to \frac{g}{2}(2t + 0)$, тобто $v(t) = gt$. Дістали результат, добре відомий з фізики.

Так ми розв'язали задачу, не використовуючи поняття похідної. А знаючи, що швидкість руху – похідна функція, яка виражає закон цього руху, можна відразу записати:

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{g}{2}t^2\right)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt.$$

Так можна визначати не лише швидкість прямолінійного руху тіла, а й миттєві швидкості відбування багатьох процесів: хімічної реакції, радіоактивного розпаду, нагрівання тіла, танення криги, розмноження бактерій тощо. Взагалі, якщо який-небудь процес відбувається за законом $y = f(t)$, то швидкість відбування його в момент t можна знайти за формулою $v(t) = f'(t)$. Тому коротко говорять: *похідна – це швидкість*. Такий фізичний зміст похідної.

Швидкість руху може змінюватися. Швидкість зміни швидкості прямолінійного руху – його прискорення. Тому прискорення – це похідна від швидкості руху. Якщо, наприклад, швидкість руху тіла виражається формулою $v(t) = gt$, то його прискорення $a(t) = (gt)' = g$.

Інший приклад. Якщо якийсь процес відбувається за законом $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 8$, то його миттєва швидкість у момент часу t дорівнює $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 10t$, а миттєве прискорення $a(t) = v'(t) = 12t - 10$.

За допомогою похідної розв'язують багато задач із різних галузей науки й практики. Наведемо приклади часто вживаних формул, які містять похідну:

$\omega(t) = \varphi'(t)$ – кутова швидкість – похідна від кута повороту;

$a(t) = \omega'(t)$ – кутове прискорення – похідна від кутової швидкості;

$I(t) = q'(t)$ – сила струму – похідна від кількості електрики;

$N(t) = A'(t)$ – потужність – похідна від роботи;

$C(t) = Q'(t)$ – теплоємність – похідна від кількості теплоти;

$P(t) = V'(t)$ – продуктивність праці – похідна від обсягу продукції.

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. У чому полягає геометричний зміст похідної функції в точці?
2. У чому полягає фізичний зміст похідної функції в точці?
3. Як розуміти вислів «похідна – це швидкість»?

Виконаємо разом

1. Сигнальна ракета летить вертикально вгору так, що її рух описується законом $s(t) = 98t - 4{,}9t^2$ (t – у секундах, s – у метрах). Знайдіть: а) швидкість ракети через 5 с руху; б) на яку максимальну висоту долетить ракета.

● **Розв'язання.** а) Знайдемо швидкість ракети в будь-який момент часу як похідну від функції $s(t)$:

$$v(t) = s'(t), \text{ або } v(t) = (98t - 4{,}9t^2)' = 98 - 9{,}8t.$$

Тоді $v(5) = 98 - 9{,}8 \cdot 5 = 98 - 49 = 49$ (м/с).

б) Знайдемо точку екстремуму функції $s(t)$, розв'язавши рівняння $s'(t) = 0$, або $98 - 9{,}8t = 0$. Звідси $t = 10$ (с).

Якщо $t < 10$, то $s'(t) > 0$; якщо $t > 10$, то $s'(t) < 0$. Отже, $t = 10$ с – точка максимуму. Тоді $s(10) = 98 \cdot 10 - 4{,}9 \cdot 10^2 = 490$ (м).

Відповідь: а) 49 м/с; б) 490 м.

2. Кількість теплоти $Q(t)$, яка потрібна для нагрівання води масою 1 кг від 0 °C до температури t °C ($0° \leqslant t \leqslant 95°$), наближено можна визначити за формулою

$$Q(t) = 0{,}396 \cdot t + 2{,}081 \cdot 10^{-3}t^2 - 5{,}024 \cdot 10^{-7}t^3.$$

Установіть залежність теплоємності води $C(t)$ від температури.

● **Розв'язання.** $C(t) = Q'(t) = (0{,}396 \cdot t + 2{,}081 \cdot 10^{-3}t^2 - 5{,}024 \cdot 10^{-7}t^3)' = 0{,}396 + 4{,}162 \cdot 10^{-3}t - 15{,}072 \cdot 10^{-7}t^2$.

3. Тіло масою 10 кг рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2 + t + 1$ (t – у секундах, x – у метрах). Знайдіть: а) кінетичну енергію тіла через 5 с після початку руху; б) силу, що діє на тіло в цей час.

● **Розв'язання.** а) Кінетична енергія тіла виражається формулою $E = \frac{mv^2}{2}$, де m – маса тіла, а v – швидкість. Знайдемо швидкість тіла в будь-який момент часу $v(t)$ і через 5 с після початку руху $v(5)$:

$$v(t) = x'(t) = (t^2 + t + 1)' = 2t + 1, \; v(5) = 11 \text{ (м/с)}.$$

Тоді $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{10 \cdot 11^2}{2} = 5 \cdot 121 = 605$ (Дж).

б) Сила, що діє на рухоме тіло, визначається за формулою $F = ma$.

Знайдемо прискорення тіла в будь-який момент часу $a(t)$ і через 5 с після початку руху $a(5)$:

$$a(t) = v'(t) = (2t + 1)' = 2 \text{ (м/с}^2\text{)}, \; a(5) = 2 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Тоді $F = ma = 10 \cdot 2 = 20$ (Н).

Виконайте усно

411. Знайдіть миттєву швидкість тіла, що рухається за законом $s(t)$, де t вимірюється в секундах, а s – у метрах:
а) $s(t) = 5t^2 + t$; б) $s(t) = 1 - 3t$;
в) $s(t) = t^2 - 1$; г) $s(t) = 2t^3 + t$.

412. Знайдіть прискорення тіла, що рухається за законом $s(t)$, де t вимірюється в секундах, а s – у метрах:
а) $s(t) = t^2 + t$; б) $s(t) = 1 - 3t^2$;
в) $s(t) = 5t - 1$; г) $s(t) = 2t^3 + 5$.

413. Як залежить продуктивність праці молодого робітника від тривалості роботи, якщо обсяг виготовленої ним продукції виражається формулою $V(t) = 10 + 6t^2 - t^3$?

А

414. Визначте швидкість коливання тіла, що рухається за законом:
а) $x(t) = 10\cos\pi t$; б) $x(t) = 2\sin(t - \pi)$; в) $x(t) = 0{,}1\cos 10\pi t$.

415. Робота, яку виконує двигун автомобіля, визначається формулою $A(t) = 15t^2 + 360$ ($A(t)$ – в Джоулях, t – у секундах). Яку потужність розвиває двигун?

416. Точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 100 + t^2$ (час t – у секундах, координата x – у метрах). Знайдіть швидкість v цієї точки в момент часу:
а) $t = 5$ с; б) $t = 23$ с.

417. Точка рухається так, що шлях, пройдений нею за t секунд, виражається формулою $s = 4t^2 + 3t$. Знайдіть: а) швидкість точки в будь-який момент часу; б) прискорення точки в будь-який момент часу; в) швидкість і прискорення точки в момент часу $t = 5$ с.

418. Точка обертається навколо осі за законом $\varphi(t) = 3t^2 + 4t + 2$ (час t – у секундах, кут повороту $\varphi(t)$ – у радіанах). Знайдіть кутову швидкість точки: а) в довільний момент t; б) в момент $t = 4$ с.

419. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 7t^3 - 5t$. Знайдіть його миттєву швидкість і прискорення в момент:
а) $t = 1$ с; б) $t = 2$ с; в) $t = 3$ с.

420. Маховик, затримуваний гальмом, обертається за законом $\varphi(t) = 4t - 0{,}3t^2$ (час t – у секундах, кут $\varphi(t)$ – у радіанах). У який момент він зупиниться?

421. Під час нагрівання тіла його температура T із часом змінюється за законом $T = 0{,}4t^2$, де T – температура в градусах, t – час у секундах. Знайдіть швидкість зміни температури в момент $t = 5$ с.

Б

422. Маса кристалів у розчині змінюється за законом $m = \sqrt{t^2 + 5t}$, де m – маса кристалів у грамах, t – час у годинах. Знайдіть швидкість зростання маси кристалів через 4 год після початку кристалізації.

423. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 2 + 8t - t^2$ (шлях s – у метрах, час t – у секундах). Яку відстань пройде тіло до моменту, коли його швидкість дорівнюватиме нулю?

424. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$ (шлях s – у метрах, час t – у секундах). У який момент часу тіло рухається з найбільшою швидкістю?

425. Кулька коливається за законом $x(t) = 2\sin 3t$. Доведіть, що її прискорення пропорційне координаті x.

426. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \sqrt{t}$. Доведіть, що його прискорення пропорційне кубу швидкості.

427. Обсяг продукції V майстерні, яка виготовляє ялинкові прикраси, протягом дня виражається залежністю $V(t) = \frac{5}{6}t^3 + 7\frac{1}{2}t^2 + 50t + 37$, де $t \in [1; 8]$. Обчисліть продуктивність праці майстерні протягом кожної години роботи.

428. Через поперечний переріз провідника в кожний момент часу t проходить заряд $q(t) = 5\sqrt{2t + 5}$ (q вимірюється в кулонах, а t – у секундах). Знайдіть силу струму в момент часу $t = 10$ с.

429. Через поперечний переріз провідника в кожний момент часу t проходить заряд $q(t) = \ln(t + 1)$ (q вимірюється в кулонах, а t – у секундах). У який момент часу сила струму в провіднику дорівнюватиме 0,1А?

430. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6t - t^2$ (шлях s – у метрах, час t – у секундах). Знайдіть: а) миттєву швидкість тіла в моменти: $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с; б) кінетичну енергію тіла через 5 с після початку руху, якщо його маса дорівнює 2 г.

431. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = t^3 + 3t^2$ (шлях s – у метрах, час t – у секундах). Знайдіть: а) прискорення його руху в момент $t = 5$ с; б) силу, що діє на тіло через 3 с після початку руху, якщо його маса дорівнює 5 г.

432. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6 + 4t^2 - \frac{2}{3}t^3$ (шлях s – у метрах, час t – у секундах). Коли його швидкість стане найбільшою? Визначте кінетичну енергію тіла в той момент, коли його швидкість стане найбільшою.

433. Тіло, підкинуте вертикально вгору зі швидкістю $v_0 = 40$ м/с, рухається за законом $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, де h – шлях у метрах, t – час у секундах, $g \approx 10$ м/с^2 – прискорення вільного падіння. Знайдіть:
а) швидкість тіла через 2 с після початку руху;
б) час, коли швидкість тіла дорівнює нулю;
в) найбільшу висоту, якої досягне тіло.

Вправи для повторення

434. Розкладіть многочлен на множники:
а) $x^6 + 2x^3 + 1$; б) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$.

435. Знайдіть середнє арифметичне всіх цілих чисел x таких, що:
а) $10 \leqslant x \leqslant 50$; б) $-10 \leqslant x \leqslant 50$.

436. Розв'яжіть систему рівнянь:
а) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4. \end{cases}$

Самостійна робота № 3

Варіант 1

1. Знайдіть критичні точки функції $f(x) = x^3 + 3x^2$.
2. Дослідіть функцію $f(x) = 3x - x^3$ та побудуйте її графік.
3. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 8t^2$. Знайдіть його миттєву швидкість і прискорення в момент часу $t = 3$ с.

Варіант 2

1. Знайдіть критичні точки функції $f(x) = 3x^2 - x^3$.
2. Дослідіть функцію $f(x) = x^3 - 3x$ та побудуйте її графік.
3. Тіло рухається прямолінійно за законом $x(t) = \frac{2}{3}t^3 - t^2$. Знайдіть його миттєву швидкість і прискорення в момент часу $t = 3$ с.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Які точки функції називають критичними?
2. Сформулюйте умови, за яких функція зростає на деякому проміжку.
3. Сформулюйте умови, за яких функція спадає на деякому проміжку.
4. Що таке точка максимуму; мінімуму; екстремуму?
5. Як визначити точки максимуму й мінімуму функції?
6. Як знайти найбільше або найменше значення функції на даному проміжку?
7. Розкрийте геометричний зміст похідної.
8. Розкрийте фізичний зміст похідної.
9. Які задачі можна розв'язувати за допомогою похідних?

Історичні відомості

Похідну введено майже одночасно з поняттям функції, хоча матеріали, які підводили до цих понять, накопичувалися протягом багатьох століть. Ще Архімед розв'язував задачі про дотичні до спіралей і про визначення найбільших значень виразів, які тепер розв'язують за допомогою похідної. П. Ферма вмів знаходити похідні многочленів від однієї змінної та розв'язувати багато екстремальних задач. Досить близько підійшли до введення похідної і деякі інші математики XVII ст. А ввели це поняття незалежно один від одного та йдучи різними шляхами – в Англії І. Ньютон (1643–1727), а в Німеччині Г. Лейбніц (1646–1716). Ньютон виходив з потреб фізики та розглядав похідну як швидкість, а Лейбніц під похідною розумів кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції. Частіше він користувався не похідною, а диференціалами dx і dy – нескінченно малими приростами аргументу і функції. В його позначеннях похідна дорівнює відношенню $\frac{dy}{dx}$. Слово диференціал походить від латинського *differentia*, що означає різницю. Звідси й пішла назва «диференціальне числення». Ньютон ввів поняття похідної раніше від Лейбніца, але опублікував свої роботи пізніше. Оскільки Ньютон і Лейбніц ішли різними шляхами та незалежно один від одного, їх обох вважають основоположниками диференціального числення.

О. Коші

К. Вейєрштрасс

Великий внесок у розвиток диференціального числення зробили такі відомі математики, як Я. Бернуллі, Й. Бернуллі, Л. Ейлер, Ж. Лагранж, Б. Больцано. Та все ж повне і строге обґрунтування диференціального числення і всього математичного аналізу зроблено О. Коші (1789–1857) та К. Вейєрштрассом (1815–1897).

Головне в розділі 2

Число b називається *границею функції* $f(x)$ у точці $x = a$, якщо для будь-якого додатного числа ε можна вказати таке додатне число δ, що для всіх значень x із проміжку $(a - \delta;\ a + \delta)$, крім, можливо, самої точки $x = a$, справджується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Якщо кожна з функцій $f(x)$ і $g(x)$ має границю в точці a, то в цій точці існують границі функцій $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $kf(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ і мають місце рівності:

1) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, якщо $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Функція називається *неперервною* в точці x_0, якщо існує границя функції в цій точці і вона дорівнює значенню функції в точці x_0.

Похідною функції $f(x)$ у точці x_0 називають границю відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу, якщо приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Правила та формули диференціювання

$C' = 0$	$(x^a)' = ax^{a-1}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(Cu)' = Cu'$	$(\sin x)' = \cos x$	$(e^x)' = e^x$
$(u + v)' = u' + v'$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(uv)' = u'v + uv'$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$

Якщо $y = f(u)$, де $u = h(x)$, то $y' = y'_u \cdot u'$.

$y' = k = \operatorname{tg}\alpha$ – геометричний зміст похідної.

$v = s'(t)$; $a(t) = v'(t)$ – механічний зміст похідної.

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ – рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці x_0.

Якщо похідна функції в кожній точці деякого проміжку додатна, то функція на цьому проміжку зростає.

Якщо похідна в кожній точці проміжку від'ємна, то функція на цьому проміжку спадає.

Якщо похідна в кожній точці проміжку тотожно дорівнює нулю, то на цьому проміжку функція стала.