Геометрія

Серед рівних розумом –
за однакових інших умов –
переважає той, хто знає геометрію.

Б. Паскаль

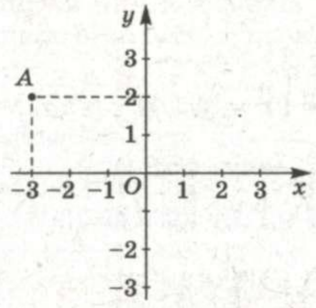
5 Координати і вектори у просторі

ТЕМИ РОЗДІЛУ

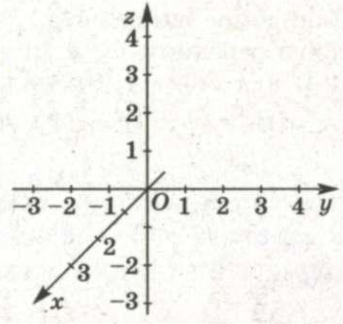
- Прямокутна система координат у просторі.
- Відстань між точками та координати середини відрізка.
- Вектори в просторі.
- Операції над векторами та їх властивості.
- Скалярний добуток векторів.
- Застосування векторів.
- Рівняння площини та сфери.

§ 24. Координати в просторі

Як відомо з планіметрії, задавши на площині декартову систему координат, можна кожній точці площини поставити у відповідність пару дійсних чисел – її координати. Наприклад, точці A (мал. 112) відповідає пара чисел -3 і 2; записують $A(-3; 2)$.



Мал. 112



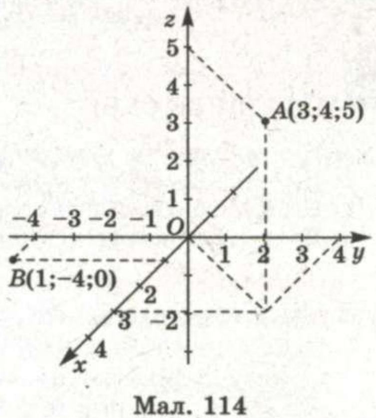
Мал. 113

Аналогічну систему координат можна задати і в просторі.

Нехай x, y, z – три попарно перпендикулярні координатні прямі, які перетинаються в точці O – початку координат (мал. 113). Їх називають *координатними осями* – вісь x, вісь y і вісь z (або осі абсцис, ординат і аплікат).

Сукупність так розміщених трьох координатних прямих називають *прямокутною системою координат* у просторі.

Якщо дано таку систему координат, то кожній точці простору можна поставити у відповідність єдину впорядковану трійку дійсних чисел, а кожній такій трійці чисел – єдину точку простору. Наприклад, щоб позначити в просторі точку $A(3; 4; 5)$, треба від точки O «пройти» 3 одиниці вздовж осі x, потім 4 одиниці паралельно осі y і, нарешті, 5 одиниць паралельно осі z (мал. 114). А щоб знайти точку $B(1; -4; 0)$, треба від точки O «пройти» 1 одиницю довжини по осі x, потім 4 одиниці паралельно осі y, але в протилежному напрямі, оскільки число -4 – від'ємне.



Мал. 114

Маючи таку систему координат, можна розв'язувати багато стереометричних задач, подібних до тих, які розв'язують за допомогою координат на площині. Зокрема, можна довести такі твердження:

Якщо дано точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ *і* $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, *то:*

а) *середина відрізка AB – точка* $C\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\ \dfrac{y_1+y_2}{2};\ \dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$;

б) *квадрат відстані між точками A* і *B*

$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

Знайдемо, наприклад, довжину відрізка AB та координати його середини C, якщо відомі координати його кінців – $A(3;\ 4;\ 5)$ і $B(1;\ -4;\ 0)$ (мал. 114):

$$AB^2 = (3-1)^2 + (4+4)^2 + (5-0)^2 = 93,\ AB = \sqrt{93};$$

$$\frac{1+3}{2} = 2,\ \frac{4-4}{2} = 0,\ \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2}, \text{ отже, } C\left(2;\ 0;\ \frac{5}{2}\right).$$

РЕНЕ ДЕКАРТ

(1596–1650)

Видатний французький філософ, математик, фізіолог, фізик. Декарт увів метод координат, поняття змінної, заклав основи аналітичної геометрії, ввів сучасні позначення степенів, знаки «+» і «–» для позначення додатних і від'ємних чисел. Більше відомий як філософ, засновник картезіанства. Проти його поглядів різко виступали католики й протестанти. Його праці, зокрема «Міркування про метод», «Початки філософії», «Пристрасті душі», були внесені до «Індексу заборонених книг».

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Що таке прямокутна система координат у просторі?
2. Що таке координатні осі; початок координат?
3. Назвіть абсцису, ординату й аплікату точки $A(m;\ n;\ k)$.
4. Чому дорівнює квадрат відстані між двома точками?

Виконаємо разом

1. Чому дорівнюють координати середини відрізка, кінці якого $A(4;\ 0;\ 2)$ і $B(6;\ 8;\ 6)$?

● **Розв'язання.**

Знайдемо координати точки $C(c_1;\ c_2;\ c_3)$ – середини відрізка AB.

$$c_1 = \frac{4+6}{2} = 5;\ c_2 = \frac{0+8}{2} = 4;\ c_3 = \frac{2+6}{2} = 4.$$

Відповідь. $C(5;\ 4;\ 4)$.

2. Точка C – середина відрізка AB. Знайдіть координату точки B, якщо $A(-1;\ 3;\ 4)$, $C(2;\ -1;\ 0)$.

● **Розв'язання.** Нехай $B(x;\ y;\ z)$. Тоді

$$\frac{x-1}{2} = 2;\ \frac{y+3}{2} = -1;\ \frac{z+4}{2} = 0.$$

Звідси $x = 5$, $y = -5$, $z = -4$.

Відповідь: $B(5;\ -5;\ -4)$.

3. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(5;\ -1;\ 6)$, $B(4;\ 2;\ -2)$, $C(-3;\ 7;\ -2)$, $D(-2;\ 4;\ 6)$ – паралелограм.

● **Розв'язання.** Знайдемо координати середин діагоналей AC і BD.

Для діагоналі AC:

$$x_1 = \frac{5-3}{2} = 1;\ y_1 = \frac{-1+7}{2} = 3;\ z_1 = \frac{6-2}{2} = 2.$$

Отже, середина діагоналі AC має координати $O_1(1;\ 3;\ 2)$.

Аналогічно для діагоналі BD:

$$x_2 = \frac{4-2}{2} = 1;\ y_2 = \frac{2+4}{2} = 3;\ z_2 = \frac{-2+6}{2} = 2.$$

Тобто середина діагоналі BD має координати $O_2(1;\ 3;\ 2)$.

Оскільки координати середин діагоналей збігаються, то це означає, що його діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Отже, $ABCD$ – паралелограм.

Виконайте усно

771. Дано точки: $A(0;\ 5;\ 1)$, $B(-2;\ 0;\ 0)$, $K(0;\ 0;\ 1)$, $P(0;\ -8;\ 0)$. Які з них лежать на осі x, на осі z, у площині xy, у площині yz?
772. Знайдіть відстані від точок $A(3;\ 4;\ 5)$ і $B(1;\ -4;\ 0)$ до координатних площин (мал. 114).
773. Дано точку $K(2;\ 3;\ 4)$. Знайдіть координати основ перпендикулярів, опущених із цієї точки на координатні площини.
774. Дано точки $A(1;\ 2;\ 3)$ і $B(3;\ -6;\ 7)$. Знайдіть координати середини відрізка AB.

775. Чим є геометричне місце точок простору, для яких дорівнює нулю: а) перша координата; б) друга координата; в) третя координата; г) перші дві координати: ґ) другі дві координати; д) перша і третя координати; е) всі три координати.

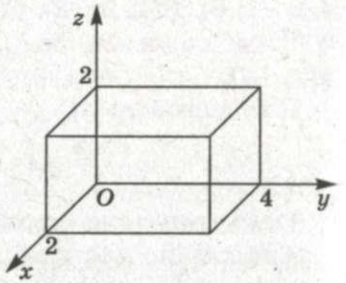
А

776. Побудуйте в прямокутній системі координат точки: $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ 3)$, $C(0;\ 5;\ -4)$, $D(4;\ -3;\ 0)$, $E(2;\ 6;\ 4)$, $F(6;\ -2;\ -6)$.

777. Тетраедр $ABCD$ задано координатами вершин: $A(2;\ 0;\ 5)$, $B(-4;\ 0;\ 2)$, $C(4;\ 0;\ -2)$, $D(1;\ 3;\ 1)$. У якій координатній площині лежить основа ABC тетраедра?

778. Прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ розташований у системі координат, як показано на малюнку 115. Визначте координати: а) його вершин; б) середин його ребер.

779. Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо:
а) $A(-1;\ 0;\ 6)$, $B(1;\ 2;\ 10)$;
б) $A(0;\ 4;\ -6)$, $B(2;\ 2;\ 2)$;
в) $A(-2;\ 4;\ 2)$, $B(-2;\ -4;\ 2)$.



Мал. 115

780. Чи є початок координат серединою відрізка CD, якщо:
а) $C(-4;\ 0;\ 2)$, $D(4;\ 0;\ -2)$;
б) $C(-4;\ 2;\ -8)$, $D(4;\ -2;\ -8)$?

781. На якій координатній осі лежить середина відрізка MN, якщо:
а) $M(2;\ 4;\ -6)$, $N(-2;\ 7;\ 6)$; б) $M(-3;\ 0;\ 7)$, $N(-3;\ 0;\ -7)$?

782. Якій координатній площині належить середина відрізка KP, якщо:
а) $K(1;\ 1;\ 4)$, $P(4;\ 0;\ -4)$; б) $K(-6;\ 2;\ 4)$, $P(5;\ -2;\ 3)$?

783. Дано точки $A(8;\ -5;\ -4)$ і $C(2;\ 1;\ 10)$. Знайдіть координати такої точки B, щоб точка C була серединою відрізка AB.

784. Точки M і N – середини сторін AB і BC трикутника ABC. Знайдіть координати вершин A і C, якщо $B(-2;\ 0;\ 4)$, $M(3;\ 9;\ -2)$, $N(-1;\ -4;\ 0)$.

Б

785. Чи буде чотирикутник $ABCD$ паралелограмом, якщо:
а) $A(-1;\ -3;\ 18)$, $B(-2;\ 2;\ 12)$, $C(3;\ 3;\ -10)$, $D(4;\ -2;\ -4)$;
б) $A(4;\ -2;\ -6)$, $B(-6;\ 2;\ 8)$, $C(2;\ -3;\ 9)$, $D(12;\ -7;\ -4)$?

786. Знайдіть координати вершини D паралелограма $ABCD$, якщо:
а) $A(2;\ 4;\ -1)$, $B(1;\ -3;\ -2)$, $C(-6;\ 2;\ 1)$;
б) $A(-7;\ 5;\ 4)$, $B(1;\ 5;\ 2)$, $C(9;\ -3;\ -8)$.

787. O – точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати вершин C і D, якщо $A(-1;\ 8;\ -2)$, $B(-4;\ 6;\ 5)$, $O(1;\ 0;\ 2)$.

788. Знайдіть відстань між точками $B(-2;\ 6;\ 3)$ і $K(3;\ 4;\ -2)$.

789. Яка з точок – $A(2;\ -1;\ -5)$ чи $B(-2;\ 1;\ 6)$ лежить ближче до початку координат?

790. Чи є точки $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(2;\ 3;\ 4)$ і $C(3;\ 4;\ 5)$ вершинами трикутника?

791. Дано точки $A(1;\ -2;\ 3)$, $B(-2;\ 3;\ 1)$ і $C(3;\ 1;\ -2)$. Знайдіть периметр трикутника ABC.

792. Дано точки $M(0;\ 1;\ 1)$, $N(2;\ -1;\ 3)$ і $P(-1;\ k;\ 0)$. При якому значенні k $MP = NP$?

793. Знайдіть координати точки, яка лежить на осі y і рівновіддалена від точок $A(4;\ -1;\ 3)$ і $B(1;\ 3;\ 0)$.

794. Знайдіть довжину медіани BM трикутника ABC, якщо $A(-2;\ 3;\ 6)$, $B(2;\ 3;\ -1)$, $C(4;\ 1;\ 0)$.

795. AM – медіана ΔABC. Знайдіть довжину медіани BN, якщо $A(2;\ -4;\ 2)$, $C(0;\ 0;\ 6)$, $M(1;\ 2;\ 4)$.

796. Установіть вид ΔABC та знайдіть його периметр і площу, якщо:
а) $A(5;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 5;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 5)$;
б) $A(-2;\ 0;\ 5)$, $B(3;\ 4;\ 0)$, $C(-2;\ 4;\ 0)$;
в) $A(2;\ 4;\ -1)$, $B(-1;\ 1;\ 2)$, $C(5;\ 1;\ 2)$.

797. Установіть вид чотирикутника $MNPK$ та знайдіть його площу, якщо:
а) $M(0;\ -2;\ 0)$, $N(4;\ 1;\ 0)$, $P(4;\ 1;\ 5)$, $K(0;\ -2;\ 5)$;
б) $M(6;\ 8;\ 2)$, $N(2;\ 4;\ 3)$, $P(4;\ 2;\ 8)$, $K(8;\ 6;\ 7)$.

Вправи для повторення

798. Дано вектори: $\overrightarrow{AB} = (5;\ 3)$, $\overrightarrow{CD} = (-4;\ 6)$, $\overrightarrow{MN} = (3;\ -2)$. Знайдіть координати векторів: а) $\overrightarrow{BA}$; б) $\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{NM}$.

799. Дано точки: $M(1;\ 3)$, $N(7;\ 5)$, $K(5;\ -1)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{MK}$ та їх модулі. Установіть вид ΔMNK.

800. Знайдіть найбільший кут трикутника зі сторонами 9, 15 і 21 см.

§ 25. Вектори в просторі

Майже все, про що йшлося щодо векторів на площині, поширюється і на вектори в просторі. Тут їх також зображують напрямленими відрізками та позначають символами $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ тощо. Вони так само означають поняття модуля вектора, нульового вектора, колінеарних векторів, суми векторів, різниці векторів, добутку вектора на число. І в просторі вектори можна додавати за правилами трикутника або паралелограма. Завжди

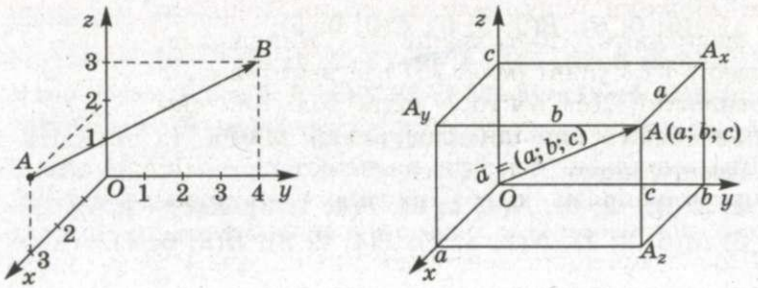
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC};\quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

Але якщо на площині вектор задається двома координатами, то в просторі – трьома.

Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$, *початок якого –* $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$, *а кінець –* $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, *називають числа* $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$.

Записують: $\overrightarrow{AB} = (x;\ y;\ z)$ або $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$.

Наприклад, якщо точки $A(3;\ 0;\ 2)$ і $B(0;\ 4;\ 3)$ – початок і кінець напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ (мал. 116, *а*), то $x = 0 - 3 = -3$, $y = 4 - 0 = 4$, $z = 3 - 2 = 1$. Отже, $\overrightarrow{AB} = (-3;\ 4;\ 1)$. Числа -3, 4 та 1 – координати вектора $\overrightarrow{AB}$.



а) б)

Мал. 116

Якщо O – початок координат, а числа a, b, c – координати точки A, то ці самі числа є й координатами вектора $\overrightarrow{OA}$ (мал. 116, *б*).

Сумою векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ називають вектор

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2).$$

Різниця цих векторів

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2).$$

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a};\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}).$$

Як би не були розміщені в просторі точки A, B, C, D, завжди

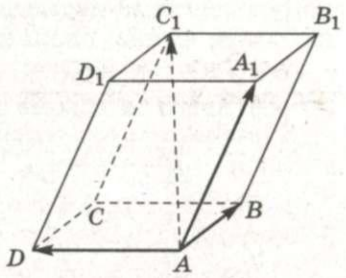
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Зокрема, якщо $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – паралелепіпед (мал. 117), то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC_1}$ (правило паралелепіпеда). Адже в цьому разі $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AD}$, тому

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD}.$$

Модуль (довжину) вектора $\vec{a}$ позначають символом $|\vec{a}|$. Завжди, якщо $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$, то

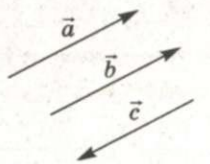
$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



Мал. 117

Модуль будь-якого ненульового вектора – число додатне. Тільки модуль нульового вектора дорівнює нулю: $\vec{0} = (0;\ 0;\ 0)$, $|\vec{0}| = 0$.

Два вектори називаються рівними, якщо вони співнапрямлені та мають однакову довжину. Якщо вектори мають однакові довжини й протилежно напрямлені, то їх називають протилежними. Наприклад, вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні (мал. 118), а вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ протилежні. Два вектори рівні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати рівні.



Мал. 118

Два ненульові вектори називаються *колінеарними*, якщо вони співнапрямлені або протилежно напрямлені. Нульовий вектор колінеарний з будь-яким вектором.

Щоб помножити вектор на число, треба на це число помножити кожну координату вектора: якщо $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$, то $m\vec{a} = (mx;\ my;\ mz)$.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і чисел m, n завжди

$$m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b};\ (m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a};\ |m\vec{a}| = |m|\cdot|\vec{a}|.$$

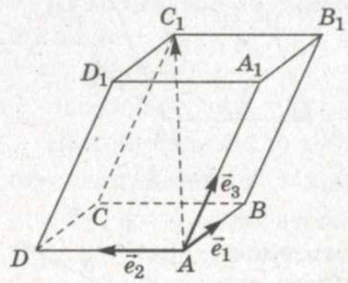
Ці властивості безпосередньо випливають з правила множення вектора на число.

Якщо помножити вектор на число, то отримаємо вектор, колінеарний даному, тобто якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні. І навпаки, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то, позначивши відношення їх довжин через λ, отримаємо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, якщо вектори співнапрямлені, і $\vec{b} = -\lambda\vec{a}$, якщо вектори протилежно напрямлені. Тому сформулюємо **ознаку колінеарності двох векторів:** ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли існує число λ таке, що $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Можна довести, що вектори $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні, тобто $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Три ненульові вектори називаються *компланарними*, якщо напрямлені відрізки, які їх зображають, лежать в одній площині або в паралельних площинах.

З 9-го класу відомо, що будь-який вектор $\vec{c}$ площини можна розкласти за двома неколінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто що існує єдина впорядкована пара чисел k_1, k_2 таких, що $\vec{c} = k_1\vec{a} + k_2\vec{b}$. Подібно до цього будь-який вектор простору можна розкласти за трьома даними некомпланарними векторами.



Мал. 119

Нехай дано три некомпланарні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (мал. 119). Якщо ці три одиничні вектори та довільний вектор AC_1 відкласти від однієї точки A, то за трьома напрямами одиничних векторів і напрямленим відрізком AC_1 можна побудувати паралелепіпед з діагоналлю AC_1. Завжди можна однозначно визначити таку трійку дійсних чисел k_1, k_2, k_3, що $\vec{e}_1 k_1 = \overline{AB}$, $\vec{e}_2 k_2 = \overline{AD}$, $\vec{e}_3 k_3 = \overline{AA_1}$. Тоді $\overline{AC_1} = \vec{e}_1 k_1 + \vec{e}_2 k_2 + \vec{e}_3 k_3$.

Вважають, що даний вектор $\overline{AC_1}$ *розкладено за трьома некомпланарними векторами.*

ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ

1. Як зображають вектори?
2. Що таке координати вектора?

3. Які вектори називають нульовими? Як їх позначають?
4. Які дії можна виконувати над векторами в просторі?
5. Що таке сума векторів?
6. Як знаходять суму векторів за правилом трикутника; паралелограма; паралелепіпеда?
7. Чому дорівнює різниця векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$?
8. Що таке модуль вектора?
9. Які вектори називають колінеарними? А компланарними?

Виконаємо разом

1. Знайдіть довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$, якщо

$$\vec{a} = (2;\ -1;\ 5),\ \vec{b} = (-3;\ 0;\ -2).$$

● **Розв'язання.** Знайдемо координати векторів $2\vec{a}$ і $5\vec{b}$:

$$2\vec{a} = (4;\ -2;\ 10),\ 5\vec{b} = (-15;\ 0;\ -10).$$

Тоді $\vec{c} = (4-15;\ -2+0;\ 10-10) = (-11;\ -2;\ 0)$.

А довжина вектора $|\vec{c}| = \sqrt{(-11)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

Відповідь. $|\vec{c}| = 5\sqrt{5}$.

2. При яких значеннях a і b вектори $\vec{m} = (2;\ a;\ -5)$ і $\vec{n} = (3;\ 9;\ b)$ колінеарні?

● **Розв'язання.** Вектори колінеарні, якщо їх відповідні координати пропорційні, тобто $\frac{2}{3} = \frac{a}{9} = \frac{-5}{b}$. З рівності $\frac{2}{3} = \frac{a}{9}$ дістаємо $a = 6$, а з рівності $\frac{2}{3} = \frac{-5}{b}$ маємо $b = -7{,}5$.

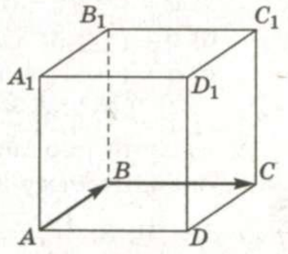
Відповідь. $a = 6$, $b = -7{,}5$.

Виконайте усно

801. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 120). Назвіть вектори:

а) рівні вектору BC; б) протилежні вектору AB;

в) колінеарні вектору AB; г) компланарні з вектором AA_1.



Мал. 120

802. Знайдіть суму та різницю векторів:

а) $\vec{a} = (-3;\ 0;\ 6)$, $\vec{b} = (2;\ -2;\ 4)$;

б) $\vec{c} = (7;\ -1;\ 2)$, $\vec{d} = (-2;\ 6;\ 4)$.

803. Дано вектор $\overline{AB} = (a;\ b;\ c)$. Знайдіть координати вектора $\overline{BA}$.

804. Знайдіть модуль вектора $\vec{a} = (-3;\ 0;\ 4)$.

805. Помножте вектор $\vec{m} = (-8;\ 4;\ 0)$ на: 2; −3; 0,5; $-\frac{1}{4}$.

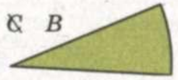
806. Чи колінеарні вектори:

а) $\vec{a} = (1;\ 1;\ 2)$, $\vec{b} = (2;\ 2;\ 4)$;
б) $\vec{a} = (1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b} = (3;\ 2;\ 1)$;
в) $\vec{a} = (2;\ 4;\ 7)$, $\vec{b} = (1;\ 2;\ 3{,}5)$?

807. Знайдіть суму векторів: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PK}$.

808. Знайдіть різницю векторів: $\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PT}$; $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}$.

809. Відгадайте ребус (мал. 121).



Мал. 121

А

810. Точка B – середина відрізка AC, а C – середина відрізка BD. Чи рівні вектори:

а) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{DB}$; б) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$?

811. Дано точки $A(1;\ 2;\ 3)$ і $B(3;\ 7;\ 6)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$.

812. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

а) $A(1;\ 2;\ 5)$ і $B(-3;\ 2;\ 4)$;
б) $A(-3;\ 2;\ 0)$ і $B(-1;\ 5;\ 2)$.

813. Знайдіть довжину вектора $\overline{MN}$, якщо $M(3;\ 2;\ -1)$, $N(1;\ -2;\ -1)$.

814. Знайдіть модуль вектора: а) $\vec{a} = (2;\ 3;\ -1)$; б) $\vec{c} = (1;\ 2;\ 6)$.

815. Модулі векторів $\vec{a} = (2;\ 1;\ 3)$ і $\vec{b} = (-1;\ x;\ 2)$ рівні. Знайдіть x.

816. Знайдіть координати вектора $\vec{a} = (a;\ 2a;\ -a)$, якщо $|\vec{a}| = \sqrt{54}$.

817. Знайдіть суму та різницю векторів:

а) $\vec{a} = (3;\ 1;\ -2)$, $\vec{b} = (3;\ -2;\ 5)$;
б) $\vec{a} = (-2;\ 4;\ 11)$, $\vec{b} = (2;\ 6;\ 21)$;
в) $\vec{a} = (-3{,}2;\ 4{,}6;\ 3)$, $\vec{b} = (-0{,}2;\ 2;\ 3{,}5)$;
г) $\vec{a} = \left(\frac{1}{3};\ 0{,}3;\ \frac{2}{5}\right)$, $\vec{b} = \left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ -\frac{3}{4}\right)$.

818. Знайдіть суму векторів та її модуль

$\vec{x} = \left(0;\ 3;\ \frac{1}{4}\right)$, $\vec{y} = \left(1;\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{4}\right)$, $\vec{z} = \left(-1;\ \frac{1}{2};\ 2\right)$.

819. Знайдіть суму векторів:

а) $\overrightarrow{CX}$ і $\overrightarrow{XP}$; б) $\overrightarrow{BT}$ і $\overrightarrow{AB}$;

в) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DE}$; г) $\overrightarrow{KP}$, $\overrightarrow{PT}$, $\overrightarrow{TM}$, $\overrightarrow{MC}$ і $\overrightarrow{CK}$.

820. Дано вектор $\vec{a} = (3;\ -4;\ 2)$. Знайдіть координати вектора:

а) $3\vec{a}$; б) $\frac{3}{4}\vec{a}$; в) $-0{,}5\vec{a}$.

Б

821. Дано вектори $\vec{p} = (-1;\ 3;\ 7)$ і $\vec{q} = (6;\ 2;\ -8)$. Знайдіть координати вектора:

а) $2\vec{p} + 3\vec{q}$; б) $\vec{p} + \frac{3}{2}\vec{q}$; в) $2\vec{q} - 3\vec{p}$.

822. Знайдіть модулі векторів $3\vec{a} - \vec{b}$ і $2\vec{a} + 3\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (2;\ 0;\ -3)$ і $\vec{b} = (5;\ -1;\ 2)$.

823. Чи колінеарні вектори $\vec{a} - 2\vec{b}$ і $\vec{c}$, якщо $\vec{a} = (2;\ -2;\ 4)$, $\vec{b} = (-1;\ 3;\ 2)$, $\vec{c} = (-8;\ 16;\ 0)$?

824. При яких значеннях m вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні:

а) $\vec{a} = (1;\ m;\ -3)$, $\vec{b} = (-2;\ 10;\ 6)$;
б) $\vec{a} = (m;\ -2;\ 4)$, $\vec{b} = (-3;\ 6;\ m)$?

825. Дано точки: $A(-1;\ 4;\ 6)$, $B(2;\ -3;\ 1)$, $C(-1;\ 0;\ 2)$, $D(-2;\ 6;\ 1)$. Знайдіть координати векторів: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.

826. Чи лежать точки A, B, C на одній прямій, якщо $\overrightarrow{OA} = (-1;\ 2;\ -6)$, $\overrightarrow{OB} = (2;\ -4;\ 3)$, $\overrightarrow{OC} = (2;\ -4;\ 6)$?

827. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. Виразіть через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектори $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{A_1C}$.

Вправи для повторення

828. Намалюйте прямокутну систему координат у просторі та позначте точки: $A(0;\ 0;\ 4)$, $B(0;\ 5;\ 0)$, $C(3;\ 0;\ 0)$, $D(3;\ 4;\ 0)$, $E(3;\ 4;\ 2)$.

829. Скориставшись умовою попередньої задачі, знайдіть:

а) довжину відрізка AB;
б) координати середини відрізка CD;
в) координати вектора $\overrightarrow{DE}$.

830. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a} = (1;\ -3)$ і $\vec{b} = (2;\ 5)$.

§ 26. Застосування векторів

За допомогою координат і векторів можна розв'язувати багато цікавих і важливих задач з фізики, астрономії, геодезії та інших прикладних наук. Частина математики, в якій розглядаються методи розв'язування геометричних задач за допомогою координат і векторів, називається *аналітичною геометрією*. Її вивчають на математичних факультетах і в технічних навчальних закладах.

Коли геометричну задачу розв'язують векторним методом, її спочатку неодмінно перекладають «мовою векторів», враховуючи такі особливості:

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ означає, що точки A і B збігаються;

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ – прямі AB і CD паралельні або збігаються;

$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ – точки A, B, C лежать на одній прямій;

$\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB} + p\overrightarrow{OC}$ – точки O, A, B, C розміщені в одній площині;

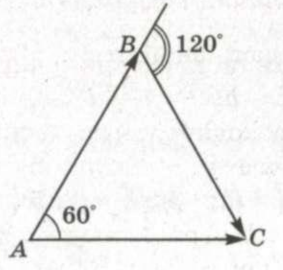
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ – прямі AB і CD перпендикулярні;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ.

Одержані векторні рівності перетворюють за відомими правилами дій над векторами, після чого їх знову перекладають звичайною мовою геометрії.

Останні дві рівності ви вивчали в курсі планіметрії, коли розглядали вектори на площині. Введемо поняття скалярного добутку для простору. Щоб увести це поняття, пояснимо, що розуміють під кутом між двома ненульовими векторами.

Кутом між двома ненульовими векторами називають кут між відповідними їм напрямленими відрізками, які виходять з однієї точки. Кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180°, а між співнапрямленими – 0°. Наприклад, якщо ABC – рівносторонній трикутник, то кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ дорівнює 60°, а між $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ – 120° (мал. 122).



Мал. 122

Скалярним добутком *двох ненульових векторів називається добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними.*

Якщо хоч один з двох векторів нульовий, їх добуток дорівнює нулю.

Якщо кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ, то їх скалярний добуток

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Можна довести таку властивість. **Скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1;\, y_1;\, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\, y_2;\, z_2)$ дорівнює $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.**

Із цієї властивості випливає, що для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ завжди $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ і $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$.

Враховуючи ці векторні рівності, а також властивості додавання векторів і множення вектора на число, можна зробити висновок, що векторні вирази перетворюються майже так само, як і многочлени. Обчислювати скалярні добутки неважко. А знаючи скалярний добуток векторів та їх модулі, можна обчислити косинус кута між даними векторами.

Задача. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a} = (1;\, 2;\, 2)$ і $\vec{c} = (2;\, 3;\, 6)$.

● **Розв'язання.** За означенням, $\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\varphi$. Тому

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{20}{21}.$$

Відповідь. $\cos\varphi = \dfrac{20}{21}$.

Якщо кут між ненульовими векторами дорівнює 90°, то їх скалярний добуток дорівнює 0, бо $\cos 90° = 0$. І навпаки, якщо скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює 0, то косинус кута між ними дорівнює 0. А це означає, що кут між ними дорівнює 90°, тобто вектори перпендикулярні. Тому маємо ***умову перпендикулярності двох векторів***: два ненульові вектори перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{a}$ позначають $\vec{a}^2$ і називають скалярним квадратом вектора $\vec{a}$. За означенням скалярного добутку,

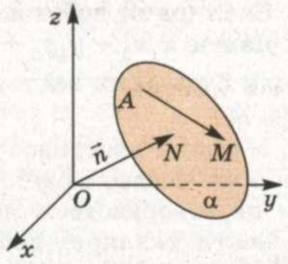
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0° = \vec{a}^2, \text{ звідки випливає, що } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

Отже, векторним методом можна розв'язувати не тільки ті задачі, які містять вектори в умові, але й набагато ширший клас задач. Тут потрібно пам'ятати, що, розв'язуючи такі задачі, треба спочатку ввести вектори та сформулювати умову задачі мовою векторів.

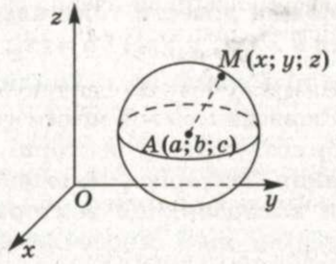
Задача. Доведіть, що рівняння площини, перпендикулярної до вектора $\vec{n} = (a;\, b;\, c)$, має вигляд $ax + by + cz + d = 0$.

● **Розв'язання.** Нехай площина α проходить через точку $A(x_0;\, y_0;\, z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (a;\, b;\, c)$, а $M(x;\, y;\, z)$ – довільна точка площини α (мал. 123). Вектори $\vec{n} = (a;\, b;\, c)$ і $\overrightarrow{AM} = (x - x_0;\, y - y_0;\, z - z_0)$ перпендикулярні. Отже, їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$



Мал. 123



Мал. 124

Це й буде шуканим рівнянням площини α. Якщо розкрити дужки та позначити число $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$, то дістанемо рівняння $ax + by + cz + d = 0$.

Сфера радіуса r із центром у точці $A(a; b; c)$ – це множина точок простору, віддалених від A на відстань r (мал. 124). Тому координати кожної точки $M(x; y; z)$ даної сфери задовольняють рівняння

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Це – рівняння сфери радіуса r із центром у точці $A(a; b; c)$. Якщо $a = b = c = 0$, то маємо рівняння сфери радіуса r із центром у початку координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Поняття вектора в математику ввів В.Р. Гамільтон.

ВІЛЬЯМ РОВАН ГАМІЛЬТОН

(1805–1865)

Ірландський математик. Читати навчився в 3 роки, в 10 – став студентом, у 12 – знав 10 мов. З 22 років – професор астрономії, директор астрономічної обсерваторії. Його основні праці стосуються механіки, диференціальних рівнянь і функціонального аналізу. Досліджував числові множини, створив систему кватерніонів, увів термін «вектор». У геометрії досліджував хвильові поверхні, в алгебрі – групи, одну з яких називають групою Гамільтона.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Що таке векторний метод розв'язування задач?
2. Які векторні формули вам відомі?

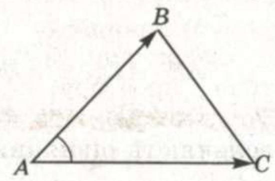
3. Сформулюйте означення скалярного добутку двох векторів.
4. Чому дорівнює скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$?
5. Назвіть умову перпендикулярності двох векторів.
6. Як знайти довжину вектора $\vec{a}$?

Виконаємо разом

1. Знайдіть косинус кута A трикутника ABC, якщо $A(3; -1; 5)$, $B(-1; -1; 2)$, $C(3; 1; 3)$.

● **Розв'язання.** Введемо вектори $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ (мал. 125) і знайдемо їх координати:

$$\overrightarrow{AB} = (-4; 0; -3),\ \overrightarrow{AC} = (0; 2; -2).$$



Мал. 125

За означенням скалярного добутку,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos A.$$

Тому $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|}$.

Оскільки $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 + 0 + 6 = 6$, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16 + 0 + 9} = 5$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{0 + 4 + 4} = 2\sqrt{2}$, то

$$\cos A = \frac{6}{5 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}.$$

Відповідь. $\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$.

2. При якому значенні m вектори $\vec{a} = (4; 2m; 5)$ і $\vec{b} = (m; 3; 4)$ перпендикулярні?

● **Розв'язання.** Вектори перпендикулярні, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4m + 6m + 20 = 10m + 20$, то, розв'язавши рівняння $10m + 20 = 0$, знайдемо, що $m = -2$.

Відповідь. $m = -2$.

3. Напишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(1; -3; 5)$ і паралельна площині, рівняння якої $2x - 3y + z + 10 = 0$.

● **Розв'язання.** Дана площина перпендикулярна до вектора $\vec{n} = (2; -3; 1)$. Тому паралельна їй площина, рівняння якої треба скласти, перпендикулярна до цього вектора, тобто її рівняння має вигляд $2x - 3y + z + d = 0$. Залишається знайти d. Оскільки точка $A(1; -3; 5)$ належить цій площині, то $2 \cdot 1 - 3 \cdot (-3) + 5 + d = 0$, звідки $d = -16$.

Відповідь. $2x - 3y + z - 16 = 0$.

Виконайте усно

831. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 126).

а) Знайдіть кут між векторами:

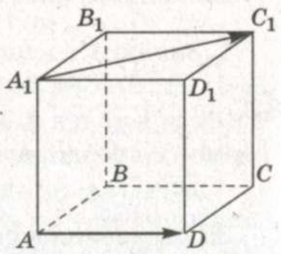
$\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{CC_1}$;

$\overrightarrow{A_1C_1}$ і $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{A_1B_1}$.

б) Знайдіть:

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DD_1}$;

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{D_1D}$.



Мал. 126

832. Накресліть тетраедр $ABCD$, у якого кожне ребро дорівнює a. Обчисліть скалярний добуток:

а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$.

833. Укажіть координати центра і радіус сфери, заданої рівнянням $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 16$.

834. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a} = (0; -5; 6)$ і $\vec{b} = (3; 0; -1)$;

б) $\vec{a} = (1; 1; 1)$ і $\vec{b} = (-2; 3; 2)$.

А

835. У $\triangle ABC$ $\angle A = 50°$, $\angle C = 90°$. Знайдіть кути між векторами:

а) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$.

836. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо їх довжини та кут між ними дорівнюють:

а) 5; 12; 60°; б) 3; $\sqrt{2}$; 45°;

в) 5; 6; 120°; г) 4; 7; 180°.

837. Трикутник ABC – рівносторонній; $AB = 6$. Знайдіть скалярні добутки: а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

838. Знайдіть скалярні добутки векторів:

а) $\vec{a} = (1; 2; -3)$ і $\vec{b} = (-8; 2; 4)$;

б) $\vec{m} = (-2; -3; 2)$ і $\vec{n} = (2; 3; 0,5)$;

в) $\vec{p} = (-3; -7; 1)$ і $\vec{k} = (-2; 10; -6)$;

г) $\vec{c} = (4\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{3}{5})$ і $\vec{d} = (2; 3; -10)$.

839. Дано вектори $\vec{p} = (-1; 3; 2)$ і $\vec{q} = (-3; -1; 2)$. Знайдіть скалярний добуток векторів:

а) $\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{p} - \vec{q}$; б) $\vec{p} + 2\vec{q}$ і $3\vec{p} - \vec{q}$; в) $2\vec{p} + \vec{q}$ і $3\vec{p} - 2\vec{q}$.

840. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a} = (1; 2; 0)$, $\vec{b} = (3; 1; 1)$;

б) $\vec{a} = (2; 6; 4)$, $\vec{b} = (3; 0; -1)$;

в) $\vec{a} = (-4; -8; 1)$, $\vec{b} = (-3; 3; 0)$;

г) $\vec{a} = (-3; -4; 0)$, $\vec{b} = (3; -1; 2)$.

841. Знайдіть кут між векторами:

а) $\vec{a} = (-2; 0; 2)$ і $\vec{b} = (0; 0; 4)$;

б) $\vec{x} = (1; 1; 0)$ і $\vec{y} = (0; -1; 1)$;

в) $\vec{c} = (0; 0; 2)$ і $\vec{d} = (1; 0; -1)$;

г) $\vec{p} = (0; 2; 2)$ і $\vec{k} = (3; 0; 3)$.

842. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A(2; 1; 3)$, $B(7; 4; 5)$, $C(4; 2; 1)$ – прямокутний.

843. При яких значеннях x вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ перпендикулярні:

а) $\vec{m} = (1; 2; 3)$, $\vec{n} = (x; 3; 1)$;

б) $\vec{m} = (-3; x; 2)$, $\vec{n} = (9; x; 1)$;

в) $\vec{m} = (x + 2; x; 3)$, $\vec{n} = (1; 3; -2)$;

г) $\vec{m} = (x - 3; x; 1)$, $\vec{n} = (4; x; -3x)$?

Б

844. Дано три точки: $A(0; 2; -1)$, $B(1; 0; 1)$ і $C(-1; 1; 2)$. Знайдіть координати такої точки D осі z, щоб виконувалась умова $AD \perp BC$.

845. Дано точки $A(1; 4; 8)$ і $B(-4; 0; 3)$. Під яким кутом відрізок AB видно з початку координат?

846. Обчисліть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$; б) $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$.

847. Установіть вид чотирикутника $ABCD$, якщо:

а) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{BC} = 0,5\overrightarrow{AD}$.

848. Визначте вид трикутника ABC, якщо $\overrightarrow{CA} = (1; 4; 2)$, $\overrightarrow{CB} = (-4; 1; 0)$.

849. Які точки належать площині $x + y + z + 3 = 0$: $A(0; 0; 1)$, $B(-1; 1; -3)$, $C(2; 0; -5)$, $D(0; -3; 3)$?

850. Яка з площин $2x - 4y + 6z - 2 = 0$, $2x + 4y + 6z + 3 = 0$, $-4x + 8y - 12z = 0$ паралельна площині $x - 2y + 3z - 5 = 0$?

851. Дано сферу $(x-1)^2+y^2+(z+3)^2=9$. На якій відстані від її центра має знаходитися площина, щоб вона: а) перетинала сферу; б) дотикалася до сфери; в) не мала зі сферою спільних точок?

852. Складіть рівняння площини, яка перпендикулярна до вектора $\vec{n}=(5;\ 0;\ -3)$ і проходить через точку $A(2;\ -1;\ 4)$.

853. Дано точку $A(a;\ b;\ c)$. Напишіть рівняння площини, яка проходить через початок координат O перпендикулярно до прямої OA.

854. Дано точки $A(1;\ 2;\ -3)$ і $B(4;\ -2;\ 4)$. Складіть рівняння площини, яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить: а) через точку A; б) через точку B; в) через середину відрізка AB.

855. Складіть рівняння сфери радіуса $r=4$ з центром у точці $M(1;\ -3;\ 5)$.

856. Складіть рівняння сфери з центром у точці $M(-1;\ 0;\ 2)$, коли відомо, що цій сфері належить точка $A(3;\ 1;\ 1)$.

857. Напишіть рівняння сфери діаметром AB, якщо $A(2;\ -3;\ 5)$, $B(4;\ 1;\ -3)$.

Вправи для повторення

858. Вектор, довжина якого дорівнює 10, має три однакові координати. Знайдіть їх.

859. Від точки $A(2;\ -5;\ 4)$ відкладено вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$. Знайдіть координати точки B, якщо $\vec{a}=(1;\ 3;\ -2)$.

860. Запишіть рівняння кола радіуса 5 із центром:
а) у початку координат; б) у точці $O(1;\ -2;\ 3)$.

Самостійна робота №6

Варіант 1

1. Дано точки $M(2;\ -1;\ 3)$ і $N(2;\ 5;\ 11)$. Знайдіть: а) довжину відрізка MN; б) координати середини відрізка MN; в) координати вектора $\overrightarrow{MN}$.

2. Дано вектори $\vec{a}=(3;\ 0;\ 7)$ і $\vec{b}=(1;\ 2;\ 0)$. Знайдіть:
а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $2\vec{a}$; в) $2\vec{a}-3\vec{b}$.

3. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $A(2;\ 0;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ 0)$ і $C(0;\ -1;\ 2)$.

Варіант 2

1. Дано точки $M(3;\ -5;\ 3)$ і $N(3;\ 1;\ 11)$. Знайдіть: а) довжину відрізка MN; б) координати середини відрізка MN; в) координати вектора $\overrightarrow{MN}$.

2. Дано вектори $\vec{a}=(0;\ 4;\ 5)$ і $\vec{b}=(3;\ 2;\ 0)$. Знайдіть:
а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $3\vec{a}$; в) $2\vec{a}-3\vec{b}$.

3. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $A(1;\ 0;\ 3)$, $B(0;\ -1;\ 2)$ і $C(3;\ 4;\ 0)$.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ

1. Що таке прямокутна система координат у просторі?
2. Що таке координати точки в просторі?
3. Як у даній системі координат побудувати точку за даними координатами?
4. Які координати мають точки, що лежать на осі абсцис (ординат, аплікат)?
5. Запишіть формулу для обчислення координат середини відрізка.
6. За якою формулою знаходять відстань між точками?
7. Як знайти координати вектора, якщо відомі координати його початку і кінця?
8. Запишіть формули для обчислення: а) суми векторів; б) різниці векторів.
9. За якими формулами знаходять скалярний добуток векторів?
10. Сформулюйте умову перпендикулярності двох векторів.
11. Запишіть рівняння сфери радіуса r з центром у точці $B(a;\ b;\ c)$.

Історичні відомості

Метод координат на площині вперше розробили Р. Декарт і П. Ферма в XVII ст. На тривимірний простір його поширили лише у XVIII ст. Й. Бернуллі, А. Клеро та ін.

Поняття «вектор» увів у 1846 р. ірландський математик В. Гамільтон. Позначення $\vec{r}$ запропонував у 1887 р. О. Коші. Першу працю «Теорія векторного числення» надрукував у 1853 р. професор Київського університету В.П. Єрмаков.

Спочатку вектори використовували переважно у фізиці для зображення сили, швидкості та інших векторних величин, тому вектори ототожнювали з напрямленими відрізками. У сучасній математиці поняття вектора набагато змістовніше. Вектор – це елемент векторного простору. А векторним простором називається будь-яка множина, для елементів якої визначені операції додавання і множення на число (у цьому разі мають виконуватися 4 закони додавання та 4 закони множення). Приклади векторних просторів: множина всіх пар точок простору; множина всіх трійок дійсних чисел; множина всіх паралельних перенесень площини чи простору тощо.

У двовимірному просторі (на площині) точка чи вектор задається двома координатами, у тривимірному – трьома. За аналогією можна розглядати простір, точки та вектори якого визначаються чотирма координатами. Такий простір називають чотиривимірним. Чудовий матеріал для фантастів! Але математики, які створили й добре знають багатовимірні простори, сприймають їх практичніше й реальніше.

Геометрію чотирьох вимірів одним з перших опрацював український учений і громадський діяч М.І. Гулак.

МИКОЛА ІВАНОВИЧ ГУЛАК

(1822–1899)

Народився на Полтавщині, працював у канцелярії Київського генерал-губернатора. Був одним із засновників Кирило-Мефодіївського братства. За це 1847 р. його заарештували. Тільки через 12 років він повернувся в Україну, працював учителем математики, географії та російської мови в Одесі, Керчі, Ставрополі, у Грузії.

У 1877 р. в Тифлісі опублікував монографію «Спроба геометрії чотирьох вимірів». Ще одну працю – «Етюди про трансцендентні рівняння» (французькою мовою) він надрукував у Одесі. Р. Іваничук написав про М. Гулака роман «Четвертий вимір».

Головне в розділі 5

Прямокутна система координат дає можливість встановити взаємно однозначну відповідність між точками простору і трійками дійсних чисел: $A(x;\ y;\ z)$ – точка з абсцисою x, ординатою y і аплікатою z.

Квадрат відстані між двома точками дорівнює сумі квадратів різниць їх відповідних координат.

Якщо точка $C(x;\ y;\ z)$ – середина відрізка з кінцями $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Рівняння площини: $ax + by + cz + d = 0$.

Рівняння сфери радіуса r:

з центром у початку координат –

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$$

з центром у точці $A\ (a;\ b;\ c)$ –

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Вектор – елемент векторного простору. Зображати ненульові вектори можна напрямленими відрізками. Будь-які вектори зручно зображати в координатній формі. Координатами вектора з початком у точці $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і кінцем у точці $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1$; $y = y_2 - y_1$; $z = z_2 - z_1$. Записують так: $\overline{AB} = (x;\ y;\ z)$.

Модулем вектора називають довжину напрямленого відрізка, що його зображає. Позначають його символом $\left|\overline{AB}\right|$ або $|\vec{a}|$.

Якщо $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Сумою двох векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ називають вектор $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$.

Для додавання будь-яких векторів правильними є переставний і сполучний закони. Геометрично додавати вектори можна за правилом трикутника, паралелограма або паралелепіпеда.

Як би не розміщувалися в просторі точки A, B, C, D, завжди $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}$.

Різницю двох векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$ можна знаходити, користуючись рівністю

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2).$$

Будь-який вектор $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$ можна множити на довільне дійсне число k так:

$$k\vec{a} = (kx;\ ky;\ kz).$$

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і чисел m, n завжди

$$m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b};\ (m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a};\ m\vec{a} = m \cdot |\vec{a}|.$$

Скалярним добутком двох векторів називають добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Якщо $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.