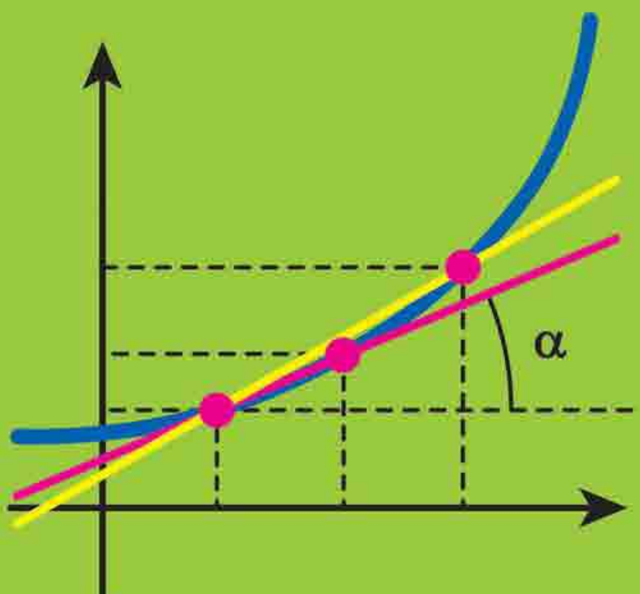
А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

10

АЛГЕБРА

ПОЧАТОК ВИВЧЕННЯ НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ З 8 КЛАСУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ



ГІМНАЗІЯ

Форзац 1

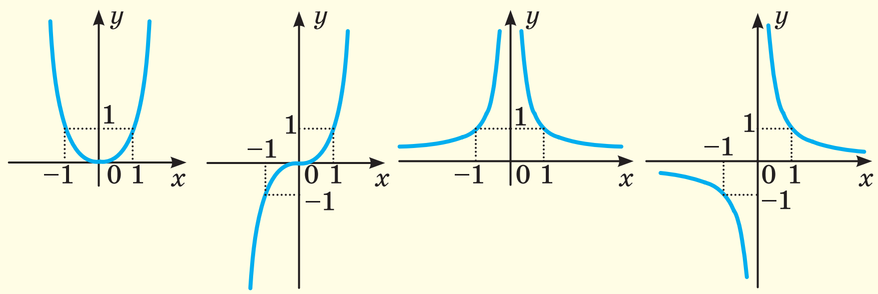
«Моя любов — Україна і математика». Ці слова Михайла Пилиповича Кравчука (1892–1942) викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника науковцеві.

Ми сподіваємося, що це патріотичне висловлювання видатного українського математика стане для вас надійним дороговказом на шляху до професіоналізму.

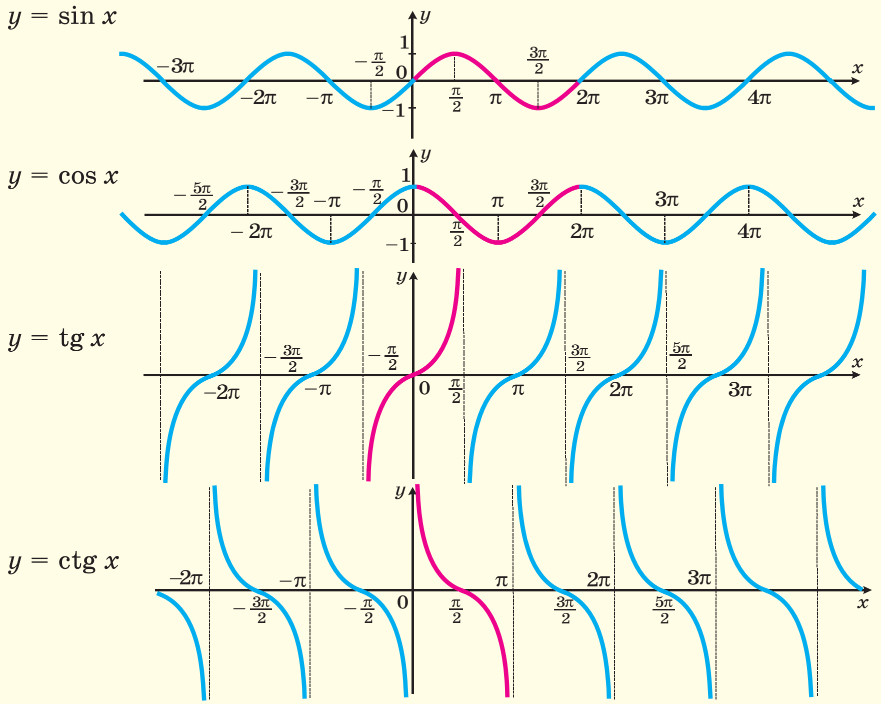
Форзац 2

Графік степеневої функції

$y = x^n$, n — парне натуральне число	$y = x^n$, n — непарне натуральне число, $n > 1$	$y = x^{-n}$, n — парне натуральне число	$y = x^{-n}$, n — непарне натуральне число



Графіки тригонометричних функцій



А. Г. Мерзляк
Д. А. Номіровський
В. Б. Полонський
М. С. Якір

АЛГЕБРА
І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ПОЧАТОК ВИВЧЕННЯ НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ З 8 КЛАСУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2018

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 31.05.2018 № 551)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2018. — 512 с. : іл.
ISBN 978-966-474-313-3.

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]

ISBN 978-966-474-313-3

Від авторів

Любі десятикласники та десятикласниці!

Ви починаєте вивчати новий шкільний предмет — **алгебру і початки аналізу**.

Цей предмет надзвичайно важливий. У наш час немає такої галузі науки, де не застосовують досягнень цього розділу математики. У фізиці та хімії, астрономії та біології, географії та економіці, навіть у лінгвістиці та історії використовують «математичний інструмент».

Алгебра і початки аналізу — корисний і дуже цікавий предмет. Він розвиває аналітичне й логічне мислення, дослідницькі навички, математичну культуру, кмітливість.

Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, обравши нелегкий шлях навчатися в математичному класі. У цьому навчальному році ви продовжите вивчати математику за програмою поглибленого рівня. Це не просто. Потрібно бути наполегливими та завзятими, уважними й акуратними, при цьому найголовніше — не бути байдужими до математики, а любити цю красиву науку. Сподіваємося, що ви з інтересом будете засвоювати нові знання. Ми віримо в те, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на сім параграфів, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал пункту, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

У цій книзі ви ознайомитеся з низкою важливих теорем. Деякі з них подано з доведеннями. У тих випадках, коли доведення виходять за межі розглядуваного курсу, у підручнику наведено тільки формулювання теорем.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв'язування. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Крім того, у підручнику ви зможете прочитати оповідання з історії математики, зокрема про діяльність видатних українських математиків. Назви цих оповідань надруковано синім кольором.

Дерзайте! Бажаємо успіху!

Шановні колеги та колежанки!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з поглибленим вивченням математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає від вас великих зусиль, адже ви формуєте навчальний матеріал по крихтах, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій і шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка та факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

Умовні позначення

n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

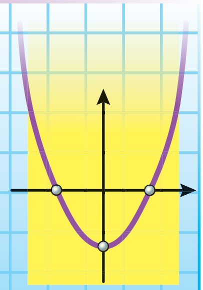
 ключові задачі, результати яких можуть бути використані під час розв'язування інших задач;

◄ закінчення доведення теореми, розв'язання задачі;

 рубрика «Коли зроблено уроки».

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно.

§ 1 ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ АЛГЕБРИ 8–9 КЛАСІВ



1. Задачі на повторення курсу алгебри 8–9 класів

ВПРАВИ

Перетворення раціональних виразів

1.1. Спростіть вираз $\left(\frac{ab}{a-b}+a\right)\cdot\left(\frac{ab}{a+b}-a\right):\frac{a^2b^2}{b^2-a^2}$.

1.2. Спростіть вираз $\left(\frac{a+5}{(a-9)(a+9)}+\frac{a+7}{(a-9)^2}\right)\left(\frac{a-9}{a+3}\right)^2+\frac{7+a}{9+a}$.

1.3. Спростіть вираз $x^2y^2\left(\frac{1}{(x+y)^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{2}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right)$.

1.4. Спростіть вираз $\frac{a^2-1}{b^2+b}\left(1-\frac{1}{1-\frac{1}{b}}\right)\cdot\frac{1+b-b^3-b^4}{1-a^2}$.

1.5. Доведіть тотожність

$$\frac{(x-y)^2+xy}{(x+y)^2-xy}\left(\frac{x^5+y^5+x^3y^2+x^2y^3}{(x^3-y^3)(x^3+y^3+x^2y+xy^2)}\right)^{-1}=x-y.$$

1.6. Доведіть тотожність

$$\left(a^2-b^2-\frac{4a^2b-4ab^2}{a+b}\right)\left(\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}\right)^{-1}=(a-b)^2.$$

1.7. Доведіть тотожність $\frac{3xyz}{xy+yz+zx}+\frac{\frac{1-x}{x}+\frac{1-y}{y}+\frac{1-z}{z}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=1.$

1.8. Спростіть вираз $\frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$.

1.9. Спростіть вираз $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+\frac{2x(x-1)^2}{x^4+x^2+1}+\frac{2x^2(x^2-1)^2}{x^8+x^4+1}$.

1.10. Спростіть вираз

$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}+\frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

1.11. Доведіть тотожність

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

1.12. Спростіть вираз $\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1+b}+\frac{2}{1+b^2}+\frac{4}{1+b^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+b^{2^n}}$.

1.13. Відомо, що $a^2-a-1=0$. Доведіть, що

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)\ldots\left(a^{2^{n-1}}+\frac{1}{a^{2^{n-1}}}\right)=a^{2^n}-\frac{1}{a^{2^n}}.$$

1.14. Доведіть, що коли $a+b+c=1$, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$, то $a^2+b^2+c^2=1$.

1.15. Доведіть, що коли $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ і $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$, то $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

1.16. Розкладіть на множники вираз $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

1.17. Розкладіть на множники вираз

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2).$$

1.18. Попарно різні числа a, b, c є такими, що $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$.

Доведіть, що $|abc|=1$.

Перетворення виразів, які містять квадратні корені

1.19. Знайдіть значення виразу $\left(\sqrt{28}-\sqrt{12}\right)\cdot\sqrt{10+\sqrt{84}}$.

1.20. Знайдіть значення виразу $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)$.

1.21. Знайдіть значення виразу $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}}-\frac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$.

1.22. Знайдіть значення виразу $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}}$.

1.23. Знайдіть значення виразу $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

1.24. Знайдіть значення виразу $\sqrt{17+6\sqrt{4-\sqrt{9+4\sqrt{2}}}}$.

1.25. Знайдіть значення виразу $2\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{13-4\sqrt{3}}$.

1.26. Знайдіть значення виразу $\left(2-\sqrt{5}\right)\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}$.

1.27. Доведіть, що $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$.

1.28. Доведіть, що $\sqrt{3-\sqrt{5}}\left(3+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)=8$.

1.29. Доведіть, що $\dfrac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$.

1.30. Доведіть, що $\dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{6}}\left(5+2\sqrt{6}\right)\left(49-20\sqrt{6}\right)}{\sqrt{27}-3\sqrt{18}+3\sqrt{12}-\sqrt{8}}=1$.

1.31. Знайдіть значення виразу $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

1.32. Спростіть вираз $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(a-b)}+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$.

1.33. Спростіть вираз

$$\left(\left(\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3+2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}\right):\left(3a^2+3b\sqrt{ab}\right)+\frac{\sqrt{ab}-a}{a\sqrt{a}-b\sqrt{a}}.$$

1.34. Спростіть вираз $\left(\sqrt{a^3-2a^2+a}+\dfrac{4a\sqrt{a}}{\sqrt{(1-a)^2}}\right):\left(\dfrac{\sqrt{a^3}}{a-1}-\left(\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}\right)^{-1}\right)$.

1.35. Спростіть вираз $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\dfrac{x^2-1}{2}+1$.

1.36. Спростіть вираз $\left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^{-2}-1}-\dfrac{1}{x}\right)$, якщо $0<x<1$.

1.37. Спростіть вираз $\left(\dfrac{\left(\sqrt{a^3}-\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{2}\right)}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{(a^2+2)^2-8a^2}$.

1.38. Спростіть вираз $\dfrac{\dfrac{\sqrt{b^2-2b+1}}{b}+b\sqrt{b^2-2b+1}+2-\dfrac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\dfrac{1}{b}}}$, якщо $0<b<1$.

1.39. Спростіть вираз

$$\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{b}{b-\sqrt{ab}}+\frac{a}{\sqrt{ab}+a}\right)-\frac{\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}}{2}.$$

1.40. Спростіть вираз $\dfrac{1+\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)^2\left(b+\sqrt{b^2-1}\right)^2}{\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\left(b+\sqrt{b^2-1}\right)}$.

1.41. Спростіть вираз $\dfrac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\sqrt{\dfrac{b+2}{b-2}}$ при $b>2$.

1.42. Спростіть вираз $\sqrt{\dfrac{a-2\sqrt{a-1}}{a+2\sqrt{a-1}}}+\sqrt{\dfrac{a+2\sqrt{a-1}}{a-2\sqrt{a-1}}}-\dfrac{4}{\sqrt{a^2-4a+4}}$.

1.43. Спростіть вираз $\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\frac{8}{x}+\frac{16}{x^2}}}$.

Раціональні рівняння та нерівності

1.44. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{5}{x^2-4x+4}-\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x+2}=0$;

2) $1+\dfrac{2x}{x+4}+\dfrac{27}{2x^2+7x-4}=\dfrac{6}{2x-1}$;

3) $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{x-3}{x+3}+\dfrac{x+4}{x-4}=4$;

4) $\dfrac{x^2+4x+4}{x+4}-\dfrac{2x+6}{x+2}=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}-\dfrac{2x+9}{x+3}$;

5) $|x+2|+|x-3|=5$;

6) $|2x+5|=|x|+2$;

7) $|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4$.

1.45. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{3x}{x^3-1}-\dfrac{5}{4x^2+4x+4}=\dfrac{1}{2(1-x)}$;

2) $\dfrac{x}{2x^2+12x+10}+\dfrac{3x+1}{4x^2+16x-20}-\dfrac{x+34}{x^3+5x^2-x-5}=0$;

3) $\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{3x-1}{x+2}=\dfrac{x-7}{x-1}+4$;

4) $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}=\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}+\dfrac{x^2+6x+12}{x+3}$;

5) $\dfrac{|x-3|}{|x-2|-1}=1$;

6) $||3-x|-x+1|+x=6$.

1.46. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4}{x-3}-\frac{a}{2}=2;$ 2) $\frac{2x}{2x+a}-\frac{a-2}{2x-a}-\frac{4a-2a^2}{4x^2-a^2}=0.$

1.47. Розв'яжіть рівняння $\frac{6}{x^2-16}-\frac{1}{x-4}=\frac{3a}{4+x}.$

1.48. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2-6x+5)(3x-1)^2>0;$

2) $(x^2-6x+5)(3x-1)^2\leqslant 0;$

3) $(x^2-x-2)(x^2-4x+3)\geqslant 0;$

4) $\frac{(x+1)(x-2)^4(x+3)}{(x-7)(1-3x)}>0;$

5) $\frac{x^3+x^2+3x+3}{x^2-6x+7}\leqslant 0;$

6) $\frac{|x|(x-2)^3}{|x+3|(x-4)}\geqslant 0;$

7) $(x+7)\sqrt{x+x^2-20}>0;$

8) $\frac{x-1}{x+1}<x;$

9) $\frac{14x}{x+1}-\frac{9x-30}{x-4}<0;$

10) $\frac{4}{x+1}+\frac{2}{1-x}<1;$

11) $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)\geqslant 5;$

12) $(x^2+3x)(2x+3)-16\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x}\geqslant 0;$

13) $\frac{3x+|x-1|}{x-2}>1;$

14) $\frac{(1+x)(2+x)}{x^2-|x|-2}\geqslant -3x;$

15) $|x^2-3x|+x-2<0;$

16) $|x^2+3x|\geqslant 2-x^2.$

1.49. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2-10x+9)(4x+1)^2>0;$

2) $(x^2-10x+9)(4x+1)^2\leqslant 0;$

3) $(x^2-6x+8)(x^2-4)\geqslant 0;$

4) $\frac{x^3+2x^2+5x+10}{x^2-x-6}\leqslant 0;$

5) $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x}\leqslant\frac{2}{x+2};$

6) $(x^2-x-1)(x^2-x-7)<-5;$

7) $(x^2-2x)(x-1)-9\cdot\dfrac{x-1}{x^2-2x}\leqslant 0$;

8) $\dfrac{2x+|x+1|}{x-2}>1$;

9) $\dfrac{4}{|x+3|-1}\geqslant|x+2|$;

10) $\dfrac{(1-x)(2-x)}{x^2+|x|-2}\geqslant -2x$;

11) $|x^2-2x-3|<3x-3$;

12) $|x^2+4x+3|>x+3$.

1.50. При яких значеннях параметра a рівняння $(a+4)\,x^2+(a+4)\,x+3=0$ має корені?

1.51. При яких значеннях параметра a рівняння $(a+3)\,x^2+(a^2+3a)\,x+1=0$ має єдиний корінь?

1.52. Знайдіть значення параметра a, при яких сума коренів рівняння $x^2-(a^2-4a+3)\,x+a-2=0$ дорівнює нулю.

1.53. При яких значеннях параметра a різниця коренів рівняння $(a-2)\,x^2-(a-4)\,x-2=0$ дорівнює 3?

1.54. При яких значеннях параметра a різниця коренів рівняння $2x^2-(a+1)\,x+a-1=0$ дорівнює їхньому добутку?

1.55. При яких значеннях параметра a нерівність $(a+4)\,x^2-2ax+2a-6<0$ виконується при всіх значеннях x?

1.56. При яких значеннях параметра a нерівність $(a^2-1)\,x^2+2\,(a-1)\,x+2>0$ виконується для будь-якого значення x?

1.57. При яких значеннях параметра a нерівність $(a-3)\,x^2-2ax+3a-6>0$ виконується при всіх значеннях x?

1.58. При яких значеннях параметра a один із коренів рівняння $3ax^2-2x-3a-2=0$ більший за 1, а другий менший від 1?

1.59. При яких значеннях параметра a корені x_1 і x_2 рівняння $2x^2-2\,(2a+1)\,x+a\,(a+1)=0$ задовольняють умову $x_1<a<x_2$?

1.60. При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2-2ax+a^2-a=0$ належать проміжку $[-2;\ 6]$?

1.61. При яких значеннях параметра a нерівність $ax^2-4x+4a>0$ виконується для всіх додатних значень x?

1.62. При яких значеннях параметра a нерівність $x^2+ax-7a<0$ виконується для всіх x із проміжку $(1;\ 2)$?

1.63. При яких значеннях параметра a всі розв'язки нерівності $ax^2-2x-a\,(a^2+2)<0$ задовольняють нерівність $x^2\leqslant 9$?

1.64. При яких значеннях параметра a нерівність $\left|\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$ виконується для будь-якого значення x?

1.65. Знайдіть усі значення параметра q такі, що для будь-якого значення параметра p рівняння $x^2+px+q=0$ має розв'язок.

1.66. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$;

2) $(x^2 + x + 4)^2 + 8x\,(x^2 + x + 4) + 15x^2 = 0$;

3) $(x - 2)^4 + (x + 2)^4 = 82$;

4) $x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x} - x = 4$;

5) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 + \frac{x+1}{x-4} = 12 \cdot \left(\frac{x-2}{x-4}\right)^2$;

6) $\frac{4x}{x^2 + x + 3} + \frac{5x}{x^2 - 5x + 3} = -\frac{3}{2}$;

7) $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} = 11$.

1.67. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)\,(x - 3) = 1$;

2) $5\,(x^2 + 2x)^2 - 11\,(x^2 + 2x)\,(x^2 + x + 1) + 6\,(x^2 + x + 1)^2 = 0$;

3) $x\,(x + 3)\,(x + 5)\,(x + 8) + 36 = 0$;

4) $(x^2 + x + 1)^2 = x^2\,(3x^2 + x + 1)$;

5) $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 16$.

Властивості функцій

1.68. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\frac{\sqrt{17 - 15x - 2x^2}}{x + 3}}$;

2) $y = \sqrt{12x^2 - 4x^3 - 9x} - \sqrt{2 - |\,x\,|}$.

1.69. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\frac{7 - x}{\sqrt{4x^2 - 19x + 12}}}$;

2) $y = \sqrt{|\,x - 1\,|\,(3x - 6)} + \frac{3}{x^2 + 4x - 21}$.

1.70. Знайдіть область значень функції:

1) $y = \frac{2x - 1}{x + 2}$;

2) $y = x + \frac{1}{x}$;

3) $y = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$;

4) $y = 5 - \sqrt{x^2 - 6x + 10}$.

1.71. Знайдіть область значень функції:

1) $y = \frac{3x - 1}{2x + 4}$;

2) $y = x + \frac{1}{4x}$;

3) $y = \sqrt{4x - x^2}$;

4) $y = 3 - \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

1.72. Знайдіть найбільше і найменше значення функції
$$y = \frac{1}{x^2 - 4x + 10}.$$

1.73. Знайдіть найбільше і найменше значення функції
$$y = \frac{2}{x^2 - 6x + 11}.$$

1.74. Знайдіть:

1) $\max\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{x^2 + 2}$; 2) $\min\limits_{M} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$, де $M = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

1.75. Знайдіть:

1) $\min\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{-x^2 + 2x - 3}$; 2) $\max\limits_{M} \left(\sqrt{2 - x} + \sqrt{x + 1}\right)$, де $M = [-1;\ 2]$.

1.76. Для кожного значення параметра a знайдіть найбільше і найменше значення функції f на множині M:
1) $f(x) = x^2 + 4x + 5a$, $M = [-1;\ 1]$;
2) $f(x) = x^2 - 4x$, $M = [-1;\ a]$, де $a > -1$.

1.77. Для кожного значення параметра a знайдіть найбільше і найменше значення функції f на множині M:
1) $f(x) = -x^2 + 6x - 2a$, $M = [0;\ 4]$;
2) $f(x) = 2x - x^2$, $M = [a;\ 2]$, де $a < 2$.

1.78. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x} + 2\sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 8} = 8$.

1.79. Розв'яжіть рівняння $3x^2 + \sqrt{x - 1} + 2\sqrt{x + 2} = 17$.

1.80. Розв'яжіть рівняння $|x| + |x - 2| + \sqrt{x - 1} = 2$.

1.81. Розв'яжіть рівняння $2x\sqrt{4x - x^2} = x^2 + 4$.

1.82. Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \frac{x^3 - 2x^2}{x + 3} - \frac{x^3 + 2x^2}{x - 3}$; 3) $y = \frac{x^3 - x}{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}$;

2) $y = \frac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x^2 - 4}$; 4) $y = \frac{x^2 - 3|x| - 5}{\sqrt{1 - x} - \sqrt{1 + x}}$.

1.83. Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \frac{x^5}{\sqrt{2 - x} - \sqrt{2 + x}}$; 3) $y = \frac{2x + 1}{x^2 - 3x + 1} - \frac{2x - 1}{x^2 + 3x + 1}$.

2) $y = \frac{1}{(4x - 2)^5} + \frac{1}{(4x + 2)^5}$;

1.84. Відомо, що $D(f) = \mathbb{R}$. Доведіть, що функції $y = f(x) + f(-x)$ і $y = f(x) \cdot f(-x)$ є парними, а функція $y = f(x) - f(-x)$ — непарною.

1.85. Побудуйте графік функції:

1) $y = (|x| - 1)^2$; 3) $y = \sqrt{|1 - x|}$; 5) $y = \left|\sqrt{|x| - 2} - 1\right|$;

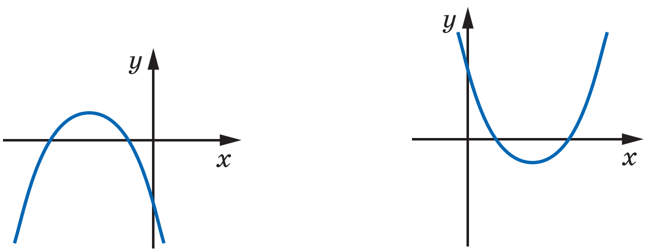
2) $y = \sqrt{1 - |x|}$; 4) $y = \sqrt{|x + 2| - 1}$; 6) $y = \left|\sqrt{2x - 1} - 2\right|$.

1.86. Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{1}{|x| - 2}$; 3) $y = \dfrac{1}{|x + 1| - 2}$; 5) $y = \left|\dfrac{1}{|x| - 1} - 2\right|$;

2) $y = \left|\dfrac{1}{x - 4}\right|$; 4) $y = (|x - 2| + 1)^2$; 6) $y = \left|\sqrt{2x + 1} - 2\right|$.

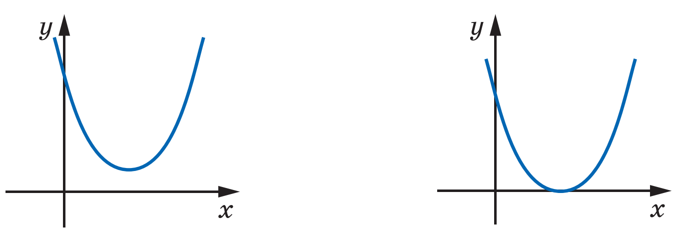
1.87. На рисунку 1.1 зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначте знаки коефіцієнтів a, b і c.



а *б*

Рис 1.1

1.88. На рисунку 1.2 зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначте знаки коефіцієнтів a, b і c.



а *б*

Рис 1.2

1.89. Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $|x^2 - 6|x| + 8| = a$?

1.90. Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння
$$\left| x^2 + 2\,|x - 2| - 4 \right| = a?$$

1.91. Чи є правильним твердження, що на рисунку 1.3 зображено параболу $y = ax^2 + bx + c$ і пряму $y = bx + c$?

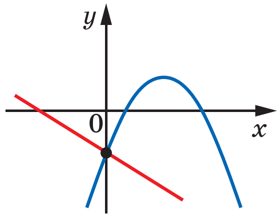


Рис 1.3

1.92. Знайдіть найбільше і найменше значення функції
$$y = \frac{4x^4}{(x^4+1)^2} - \frac{24x^2}{x^4+1} + 1.$$

Рівняння і нерівності з двома змінними

1.93. Розв'яжіть рівняння:

1) $13x^2 - 12xy + 4y^2 - 4x + 1 = 0$; 2) $|y| + 2 = \sqrt{4 - x^2}$.

1.94. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 25y^2 - 6xy - 24y + 9 = 0$; 2) $9 - x^2 = \sqrt{3 + |y|}$.

1.95. Побудуйте графік рівняння:

1) $(x - 3)^2 = (y + 5)^2$;
2) $x^2y = |y|$;
3) $x + 2 = \sqrt{|y| - 1}$;
4) $|y - 1| = \sqrt{x}$;
5) $|y - 3| + |x| = 1$;
6) $|x| - 3 = \sqrt{9 - y^2}$;
7) $\dfrac{y - x^2}{1 - x^2} = 1$.

1.96. Побудуйте графік рівняння:

1) $(x - 1)^2 = (x + 2y)^2$;
2) $x|y| = x^2$;
3) $x + 2 = \sqrt{|y - 1|}$;
4) $|y| - 1 = \sqrt{x}$;
5) $|y + 1| + |x - 2| = 2$;
6) $(|x| - 1)^2 + (|y| - 3)^2 = 4$;
7) $\dfrac{(x^2 - 4)(x + y)}{y^2 - 1} = 0$.

1.97. Побудуйте графік нерівності:

1) $x > |y + 2| - 2$;
2) $|x| \leqslant |y^2 - 2y|$;
3) $(x + y)|y| \geqslant 0$;
4) $(x^2 + y^2 - 1)y^2 \leqslant 0$.

1.98. Побудуйте графік нерівності:

1) $y \leqslant |x - 3| + 1$;
2) $|x - 2| - |y + 1| > 2$;

3) $(x-y)|x|<0$; 4) $\dfrac{x^2+y^2-1}{y^2}\geqslant 0$.

1.99. Зобразіть на координатній площині xy множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x+2y>1, \\ x-y\leqslant 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 1, \\ (x+1)^2+y^2\leqslant 1. \end{cases}$

1.100. Зобразіть на координатній площині xy множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} y+x-2>0, \\ x-3y\leqslant 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 4, \\ y\geqslant |x|+1. \end{cases}$

1.101. Побудуйте графік нерівності:

1) $\sqrt{x-2y}>\sqrt{x+y}$; 2) $x<\dfrac{6}{y}$.

1.102. Побудуйте графік нерівності:

1) $\sqrt{2x-y}<\sqrt{x-y}$; 2) $y>-\dfrac{12}{x}$.

Метод математичної індукції

1.103. Доведіть, що

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

1.104. Доведіть, що $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{8}+\ldots+\dfrac{2n-3}{2^{n-1}}+\dfrac{2n-1}{2^n}=3-\dfrac{2n+3}{2^n}$.

1.105. Доведіть, що

$$\left(1-\frac{2}{2\cdot 3}\right)\left(1-\frac{2}{3\cdot 4}\right)\left(1-\frac{2}{4\cdot 5}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)=\frac{n+3}{3(n+1)}.$$

1.106. Доведіть, що $5^{n+2}+6^{2n+1}\ \vdots\ 31$, де $n\in\mathbb{N}$.

1.107. Доведіть, що $7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n\ \vdots\ 19$, де $n\in\mathbb{N}$.

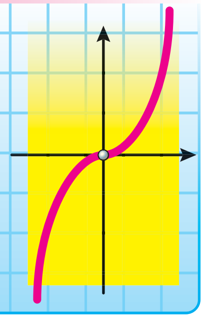
1.108. Доведіть, що $14\cdot 3^n+9\cdot 7^{2n}\ \vdots\ 23$, де $n\in\mathbb{N}$.

1.109. Доведіть нерівність $2^n>2n$, де $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$.

1.110. Доведіть нерівність $2^{n+4}>(n+4)^2$, де $n\in\mathbb{N}$.

1.111. Доведіть нерівність $3^n>n^3$, де $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 4$.

§ 2 СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ



2. Степенева функція з натуральним і цілим показником

Властивості та графіки функцій $y = x$ і $y = x^2$ добре відомі вам з курсу математики попередніх класів. Ці функції є окремими випадками функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, яку називають **степеневою функцією з натуральним показником.**

Оскільки вираз x^n, $n \in \mathbb{N}$, має зміст при будь-якому x, то *областю визначення степеневої функції з натуральним показником є множина* $\mathbb{R}$.

Очевидно, що розглядувана *функція має єдиний нуль* $x = 0$.

Подальше дослідження властивостей функції $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

- **Перший випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.**

Зазначимо, що при $k = 1$ отримуємо функцію $y = x^2$, властивості та графік якої було розглянуто в курсі алгебри 8 класу.

Оскільки при будь-якому x вираз x^{2k} набуває тільки невід'ємних значень, то область значень розглядуваної функції не містить жодного від'ємного числа.

Можна показати, що для будь-якого $a \geqslant 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{2k} = a$.

↳ Сказане означає, що *областю значень функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є множина* $[0; +\infty)$.

Якщо $x \neq 0$, то $x^{2k} > 0$.

↳ Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число.*

Функція $y = x^n$*, де* n *— парне натуральне число, є парною.* Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{2k} = x^{2k}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0]$, $x_2 \in (-\infty; 0]$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 \geqslant 0$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо: $(-x_1)^{2k} > (-x_2)^{2k}$. Звідси $x_1^{2k} > x_2^{2k}$.

Отже, *функція* $y = x^n$*, де* n *— парне натуральне число, спадає на проміжку* $(-\infty; 0]$. Аналогічно можна показати, що ця функція *зростає на проміжку* $[0; +\infty)$.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число (рис. 2.1). Зокрема, графік функції $y = x^4$ зображено на рисунку 2.2.

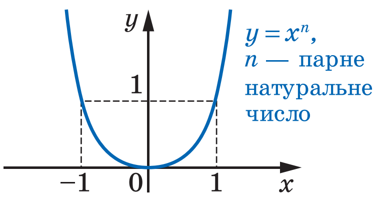


Рис. 2.1

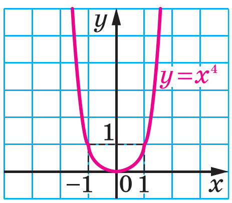


Рис. 2.2

- **Другий випадок: $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$ або $k = 0$.**

Зазначимо, що при $n = 1$ отримуємо функцію $y = x$, властивості та графік якої було розглянуто в курсі алгебри 7 класу.

Тепер нехай $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.

Можна показати, що для будь-якого a існує таке значення аргументу x, що $x^{2k+1} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^n$*, де* n *— непарне натуральне число, є множина* $\mathbb{R}$.

Якщо $x < 0$, то $x^{2k+1} < 0$; якщо $x > 0$, то $x^{2k+1} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^n$*, де* n *— непарне натуральне число.*

Функція $y = x^n$*, де* n *— непарне натуральне число, є непарною.* Справді, для будь-якого x із області визначення виконується рівність $(-x)^{2k+1} = -x^{2k+1}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 < x_2$. Скориставшись властивістю числових нерівностей, отримуємо: $x_1^{2k+1} < x_2^{2k+1}$.

Отже, *функція* $y = x^n$*, де* n *— непарне натуральне число, є зростаючою.*

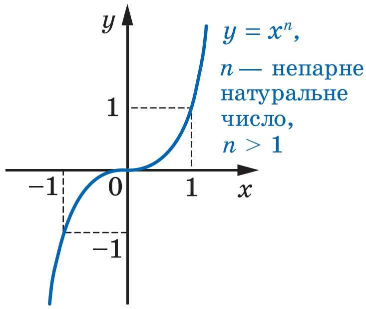


Рис. 2.3

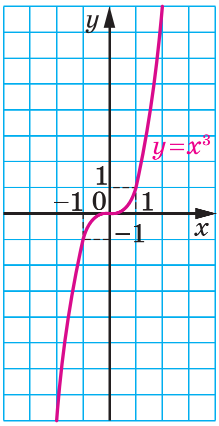


Рис. 2.4

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^n$, де n — непарне натуральне число, $n > 1$ (рис. 2.3). Зокрема, графік функції $y = x^3$ зображено на рисунку 2.4.

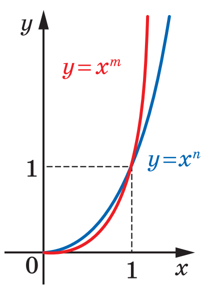
Дослідимо взаємне розміщення графіків функцій $y = x^m$ і $y = x^n$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > n$, на проміжку $[0; +\infty)$. Очевидно, що ці графіки мають дві спільні точки: $(0; 0)$ і $(1; 1)$.

Розглянемо різницю $x^m - x^n = x^n(x^{m-n} - 1)$. Оскільки $m > n$, то $(m - n) \in \mathbb{N}$.

Якщо $0 < x < 1$, то $x^n > 0$ і $x^{m-n} < 1$. Звідси $x^n(x^{m-n} - 1) < 0$.

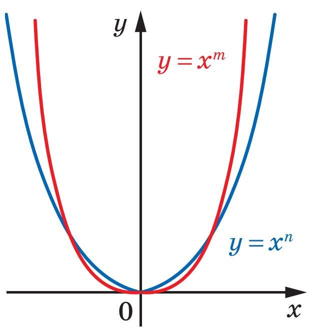
Якщо $x > 1$, то $x^n > 0$ і $x^{m-n} > 1$. Звідси $x^n(x^{m-n} - 1) > 0$.

Отже, на проміжку $(0; 1)$ графік функції $y = x^m$ знаходиться нижче від графіка функції $y = x^n$, а на проміжку $(1; +\infty)$ — вище (рис. 2.5).



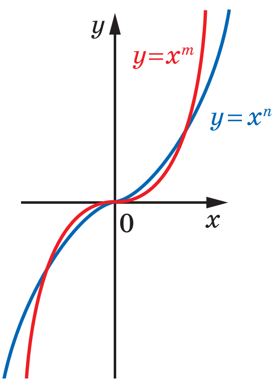
$m > n > 1$,
$x \geqslant 0$

Рис. 2.5



m і n — парні
натуральні числа, $m > n$

Рис. 2.6



m і n — непарні
натуральні числа,
$m > n > 1$

Рис. 2.7

Якщо m і n — парні натуральні числа, то, відобразивши графік, зображений на рисунку 2.5, симетрично відносно осі ординат, отримаємо рисунок 2.6. Для непарних m і n застосуємо симетрію відносно початку координат (рис. 2.7).

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^n$, де $n \in \mathbb{Z}$, називають **степеневою функцією із цілим показником.**

Розглянемо випадки, коли показник n є цілим від'ємним числом або нулем.

Областю визначення функції $y = x^0$ є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, областю значень — одноелементна множина $\{1\}$. Графік цієї функції зображено на рисунку 2.8.

Розглянемо функцію $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$.

Окремий випадок цієї функції, коли $n = 1$, тобто функція $y = \dfrac{1}{x}$, відомий вам з курсу алгебри 8 класу.

Запишемо функцію $y = x^{-n}$ у вигляді $y = \dfrac{1}{x^n}$. Тоді стає зрозумілим, що *областю визначення функції* $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, *є множина* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

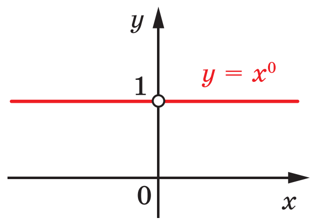


Рис. 2.8

Очевидно, що ця функція нулів не має.

Подальші дослідження властивостей функції $y = x^{-n}$, де $n \in \mathbb{N}$, проведемо для двох випадків: n — парне натуральне число і n — непарне натуральне число.

- **Перший випадок: $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$.**

Маємо: $x^{-2k} = \dfrac{1}{x^{2k}}$. Оскільки вираз $\dfrac{1}{x^{2k}}$ набуває тільки додатних значень, то до області значень розглядуваної функції не входять ні від'ємні числа, ні число 0.

Можна показати, що для будь-якого $a > 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-2k} = a$.

- Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^{-n}$, *де* n — *парне натуральне число, є множина* $(0; +\infty)$.
- Очевидно, що *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^{-n}$, *де* n — *парне натуральне число.*
- *Функція* $y = x^{-n}$, *де* n — *парне натуральне число, є парною.* Справді, для будь-якого x із області визначення виконуються рівності $(-x)^{-2k} = \dfrac{1}{(-x)^{2k}} = \dfrac{1}{x^{2k}} = x^{-2k}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 > 0$. Скориставшись властивостями числових нерівностей, отримуємо: $0 < -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}$.

Звідси $\left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k}$; $\frac{1}{x_1^{2k}} < \frac{1}{x_2^{2k}}$; $x_1^{-2k} < x_2^{-2k}$.

Отже, *функція* $y = x^{-n}$, *де* n — *парне натуральне число*, *зростає на проміжку* $(-\infty; 0)$.

Аналогічно можна показати, що *функція* $y = x^{-n}$, *де* n — *парне натуральне число*, *спадає на проміжку* $(0; +\infty)$.

Зауважимо, що зі збільшенням модуля x значення виразу $\frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, стають усе меншими й меншими. Через це відстань від точки графіка функції $y = \frac{1}{x^{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, до осі абсцис зменшується зі збільшенням модуля абсциси точки та може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Також можна встановити, що зі збільшенням модуля ординати відстань від точки графіка функції до осі ординат зменшується та може стати як завгодно малою, але ніколи не дорівнюватиме нулю.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — парне натуральне число (рис. 2.9). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^2}$ зображено на рисунку 2.10.

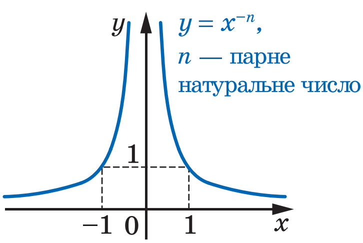


Рис. 2.9

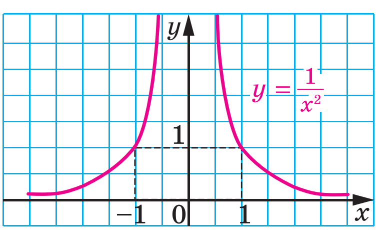


Рис. 2.10

• **Другий випадок: $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.**

Можна показати, що для будь-якого $a \neq 0$ існує таке значення аргументу x, що $x^{-(2k-1)} = a$.

Сказане означає, що *областю значень функції* $y = x^{-n}$, *де* n — *непарне натуральне число*, *є множина* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Якщо $x < 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} < 0$; якщо $x > 0$, то $\frac{1}{x^{2k-1}} > 0$.

Отже, *проміжки* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$ *є проміжками знакосталості функції* $y = x^{-n}$, *де* n *— непарне натуральне число*.

Функція $y = x^{-n}$, *де* n *— непарне натуральне число, є непарною*. Справді, для будь-якого x із області визначення виконуються рівності $(-x)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(-x)^{2k-1}} = \frac{1}{-x^{2k-1}} = -x^{-(2k-1)}$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_1 \in (-\infty; 0)$, $x_2 \in (-\infty; 0)$ і $x_1 < x_2$. Тоді $-x_1 > -x_2 > 0$. Скориставшись властивостями числових нерівностей, отримуємо:

$$-\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2};\quad \left(-\frac{1}{x_1}\right)^{2k-1} < \left(-\frac{1}{x_2}\right)^{2k-1};$$

$$-\frac{1}{x_1^{2k-1}} < -\frac{1}{x_2^{2k-1}};\quad \frac{1}{x_1^{2k-1}} > \frac{1}{x_2^{2k-1}}.$$

Отже, розглядувана функція спадає на проміжку $(-\infty; 0)$. Аналогічно можна показати, що ця функція спадає і на проміжку $(0; +\infty)$.

Отже, *функція* $y = x^{-n}$, *де* n *— непарне натуральне число, спадає на кожному з проміжків* $(-\infty; 0)$ *і* $(0; +\infty)$.

Отримані властивості дають змогу схематично зобразити графік функції $y = x^{-n}$, де n — непарне натуральне число (рис. 2.11). Зокрема, графік функції $y = \frac{1}{x^3}$ зображено на рисунку 2.12.

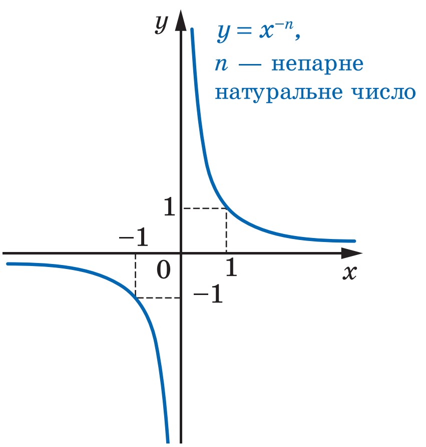


Рис. 2.11

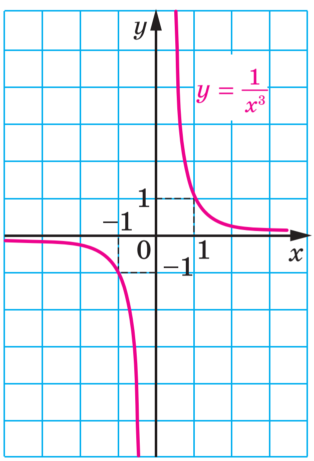
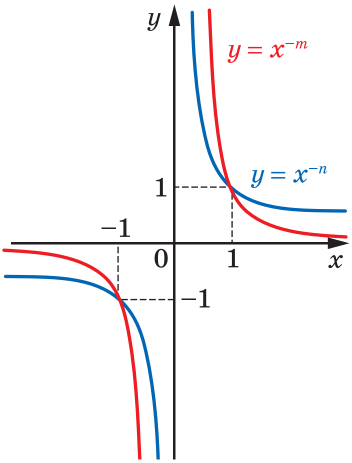


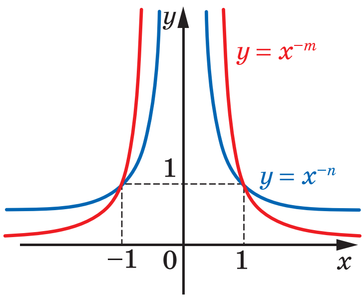
Рис. 2.12

Вище було проведено дослідження взаємного розміщення графіків функцій $y = x^m$ і $y = x^n$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > n$. Міркуючи аналогічно, можна показати, що схематичне розміщення графіків функцій $y = x^{-m}$ і $y = x^{-n}$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > n$, є таким, як показано на рисунках 2.13, 2.14.



m і n — непарні,
$m > n$

Рис. 2.13



m і n — парні,
$m > n$

Рис. 2.14

ВПРАВИ

2.1.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^4$ проходить через точку: 1) $A\ (2;\ -12)$; 2) $B\ (-3;\ -3)$?

2.2.° При яких значеннях a графік функції $y = ax^{-3}$ проходить через точку: 1) $A\ (-5;\ 20)$; 2) $B\left(2;\ \dfrac{1}{24}\right)$?

2.3.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{19}$. Порівняйте:
1) $f(1,4)$ і $f(1,8)$;
2) $f(-7,6)$ і $f(-8,5)$;
3) $f(-6,9)$ і $f(6,9)$;
4) $f(0,2)$ і $f(-12)$.

2.4.° Функцію задано формулою $f(x) = x^{20}$. Порівняйте:
1) $f(3,6)$ і $f(4,2)$;
2) $f(-6,7)$ і $f(-5,8)$;
3) $f(-2,4)$ і $f(2,4)$;
4) $f(-15)$ і $f(2)$.

2.5.° Дано функцію $f(x) = x^{-16}$. Порівняйте:

1) $f(1,6)$ і $f(2,2)$;
2) $f(-4,5)$ і $f(-3,6)$;
3) $f(-3,4)$ і $f(3,4)$;
4) $f(-18)$ і $f(3)$.

2.6.° Дано функцію $f(x) = x^{-19}$. Порівняйте:

1) $f(1,6)$ і $f(2)$;
2) $f(-5,6)$ і $f(-6,5)$;
3) $f(-9,6)$ і $f(9,6)$;
4) $f(0,1)$ і $f(-10)$.

2.7.° Скільки коренів має рівняння $x^n = 1600$, якщо:

1) n — парне натуральне число;
2) n — непарне натуральне число?

2.8.° Скільки коренів має рівняння $x^{-n} = 2500$, якщо:

1) n — парне натуральне число;
2) n — непарне натуральне число?

2.9.° Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $x^8 = x + 1$; 2) $x^5 = 3 - 2x$; 3) $x^4 = 0,5x - 2$; 4) $x^3 = x^2 - 3$.

2.10.° Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^6, \\ 2x - y - 3 = 0; \end{cases}$
2) $\begin{cases} y = x^5, \\ y = 2 - 0,5x^2. \end{cases}$

2.11.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = (x^{-1})^{-1}$;
2) $y = ((x - 2)^{-2})^{-2}$.

2.12.° Побудуйте графік функції:

1) $y = (x - 2)^0$; 2) $y = (x^2 - 4x + 3)^0$; 3) $y = \left(\frac{1}{x+1}\right)^{-1}$.

2.13.° Побудуйте графік рівняння:

1) $(y + 2)^0 = x - 2$;
2) $(y - 2)^0 = (x + 1)^0$.

2.14.° Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння:

1) $x^{12} = a - 6$;
2) $x^{24} = a^2 + 7a - 8$?

2.15.° Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $x^8 = 9a - a^3$?

2.16.• Побудуйте графік функції:

1) $y = x^3 - 1$;
2) $y = (x + 1)^4 - 1$;
3) $y = -\frac{1}{2}x^4$;
4) $y = |x^3|$.

2.17.• Побудуйте графік функції:

1) $y = x^4 + 2$;
2) $y = (x - 1)^3 + 2$;
3) $y = -x^4$;
4) $y = (|x| - 2)^3$.

2.18.• Побудуйте графік функції:

1) $y = |x| x^4$;
2) $y = |x| x^4 + x^5$.

2.19.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y=|x|x^3$; 2) $y=|x|x^4-x^5$.

2.20.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y=x^{-2}+2$; 2) $y=(x-1)^{-3}$; 3) $y=\dfrac{1}{x|x|}$.

2.21.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y=x^{-5}-3$; 2) $y=(x+1)^{-4}$; 3) $y=|x^{-5}|$.

2.22.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції $f(x)=\begin{cases}x^{-2}, & \text{якщо } x\leqslant -1,\\ x^2, & \text{якщо } x>-1.\end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, установіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

2.23.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції $f(x)=\begin{cases}x^3, & \text{якщо } x<0,\\ -\sqrt{x}, & \text{якщо } x\geqslant 0.\end{cases}$ Користуючись побудованим графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання даної функції.

2.24.$^{\bullet}$ Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)=x^8$ на проміжку:

1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-1; 1]$; 4) $(-\infty; -2]$; 5) $(-2; 1)$.

2.25.$^{\bullet}$ Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x)=x^{-3}$ на проміжку:

1) $\left[\dfrac{1}{3}; 2\right]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $(-\infty; -3]$; 4) $(0; 2]$.

2.26.$^{\bullet}$ Парним чи непарним натуральним числом є показник степеня n функції $f(x)=x^n$, якщо:

1) $f(-4)>f(-2)$; 3) $f(-4)<f(-2)$; 5) $f(-4)>f(2)$;
2) $f(-4)<f(2)$; 4) $f(4)>f(2)$; 6) $f(4)>f(-2)$?

2.27.$^{\bullet}$ Парним чи непарним є натуральне число n у показнику степеня функції $f(x)=x^{-n}$, якщо:

1) $f(-2)>f(-1)$; 3) $f(-2)<f(-1)$;
2) $f(-2)<f(1)$; 4) $f(2)<f(1)$?

2.28.$^{\bullet}$ Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases}y=x^{-6},\\ y=4-x^2;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}y=x^{-3},\\ y=x^3+3.\end{cases}$

2.29.$^{\bullet}$ Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases}y=x^{-3},\\ y=\dfrac{1}{8}x^2-4;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}y=x^{-2},\\ y=x^2-2.\end{cases}$

2.30.•• Знайдіть усі функції f такі, що рівність $f(x^3) = x^{21}$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$.

2.31.•• Знайдіть усі непарні та визначені на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ функції f такі, що рівність $f(x^4) = x^{-16}$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.32.•• Знайдіть усі парні функції f такі, що рівність $f(x^4) = x^{20}$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$.

2.33.•• Розв'яжіть рівняння:
1) $x^{11} + x^3 = 2$; 2) $2x^4 + x^{10} = 3$.

2.34.•• Розв'яжіть рівняння:
1) $4x^3 + x^7 = -5$; 2) $x^6 + 3x^8 = 4$.

2.35.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^8$ на проміжку $[-1; a]$, де $a > -1$.

2.36.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^6$ на проміжку $[a; 2]$, де $a < 2$.

2.37.* Розв'яжіть рівняння $5x^{17} - 3x^8 = 2$.

2.38.* Розв'яжіть рівняння $11x^{15} + 2x^4 = -9$.

2.39.* Наведіть приклад такої послідовності визначених на $\mathbb{R}$ різних функцій $f_1, f_2, \ldots$, що для всіх $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f_k(f_n(x)) = f_{kn}(x)$.

2.40.* Наведіть приклад такої послідовності визначених на $\mathbb{R}$ різних функцій $f_1, f_2, \ldots$, що для всіх $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f_k(x) \cdot f_n(x) = f_{k+n}(x)$.

Функціональний підхід Коші

Вам часто доводиться розв'язувати рівняння, тобто шукати такі значення змінної, при підстановці яких у рівняння отримуємо правильну рівність. Такі рівняння можна було б назвати числовими, оскільки їхніми розв'язками є числа. У математиці вивчають й інші рівняння, розв'язками яких є не числа, а функції. Природно, що їх називають **функціональними рівняннями**.

З функціональними рівняннями ви стикалися раніше. Наприклад, рівність

$$f(x) = f(-x),\ x \in D(f),$$

яка задає парні функції, можна розглядати як функціональне рівняння. Розв'язком цього рівняння є будь-яка парна функція.

Ось ще два приклади функціональних рівнянь:

$$f(x+y)=f(y)+x,\quad x\in\mathbb{R},\quad y\in\mathbb{R}; \qquad (1)$$

$$f(x+y)=2f(y)+x-y,\quad x\in\mathbb{R},\quad y\in\mathbb{R}. \qquad (2)$$

Розв'яжемо функціональне рівняння (1).

Якщо в рівність $f(x+y)=f(y)+x$ підставити значення змінної $y=0$, то отримаємо:

$$f(x)=f(0)+x.$$

Оскільки $f(0)$ — деяка стала, то тим самим доведено, що розв'язками рівняння (1) можуть бути лише лінійні функції виду $f(x)=x+c$, де c — стала.

Водночас зауважимо, що наведені міркування не гарантують того, що кожна лінійна функція виду $f(x)=x+c$ задовольняє функціональне рівняння (1). Отже, треба зробити перевірку.

Підставивши функцію $f(x)=x+c$ у функціональне рівняння (1), отримаємо очевидну тотожність

$$(x+y)+c=(y+c)+x.$$

Відповідь: $f(x)=x+c$, де c — будь-яка стала.

Зауважимо, що останній етап розв'язування задачі — перевірка — є важливою частиною розв'язування, оскільки на ньому можуть бути «відсіяні» сторонні розв'язки.

Проілюструємо це на прикладі розв'язування функціонального рівняння (2).

Міркуючи аналогічно попередній задачі, підставимо $y=0$. Тоді

$$f(x)=2f(0)+x.$$

Отже, розв'язками функціонального рівняння (2) знову можуть бути лише лінійні функції виду $f(x)=x+c$, де c — стала.

Проведемо перевірку отриманих функцій. Підставляючи функцію $f(x)=x+c$ у рівняння (2), отримаємо:

$$x+y+c=2\,(y+c)+x-y;$$

$$c=0.$$

Бачимо, що серед усіх лінійних функцій $f(x)=x+c$ функціональне рівняння (2) задовольняє лише одна: $f(x)=x$.

Відповідь: $f(x)=x$.

Функціональні рівняння грають у математиці важливу роль. Оскільки кожне функціональне рівняння задає певну властивість функцій, то за допомогою функціональних рівнянь можна визначати конкретні класи функцій. Такий спосіб визначення функцій через опис їхніх характерних властивостей у вигляді функціональних рівнянь запровадив відомий французький математик О. Коші. Його ім'я носять такі функціональні рівняння:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

$$f(xy)=f(x)+f(y),$$

$$f(x+y)=f(x)f(y),$$

$$f(xy)=f(x)f(y).$$

Використовуючи рівняння Коші, можна, наприклад, визначити степеневу функцію $f(x)=x^5$.

Розглянемо задачу: знайти всі функції f, визначені на $\mathbb{R}$, які одночасно задовольняють такі умови:

1) f — непарна зростаюча функція;
2) $f(2)=32$;
3) $f(xy)=f(x)f(y)$ для всіх значень $x>0$, $y>0$.

На заняттях математичного гуртка ви зможете розглянути доведення того, що даний перелік умов задовольняє лише степенева функція $f(x)=x^5$.

ВПРАВИ

2.41. Знайдіть усі функції f, які для всіх $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ задовольняють умову $f(x)+f(y)=x+y$.

2.42. Знайдіть усі функції f, які для всіх $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ задовольняють умову $f(xy+1)=f(x)+1$.

2.43. Знайдіть усі функції f, які для всіх $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ задовольняють умову $f(y+f(x))=(x-1)f(y)$.

2.44. Чи існує функція f, визначена на $\mathbb{R}$ і відмінна від $f(x)=x^5$, яка одночасно задовольняє такі умови:
1) $f(2)=32$;
2) $f(xy)=f(x)f(y)$ для всіх $x>0$, $y>0$?

2.45. Знайдіть усі функції f, які для всіх $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ задовольняють умову $f(2x-3y)+12xy=f(2x)+f(3y)$.

3. Обернена функція

На рисунках 3.1, 3.2 зображено графіки функцій f і g.

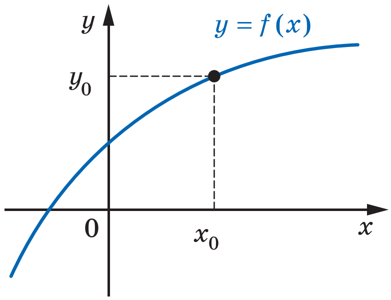


Рис. 3.1

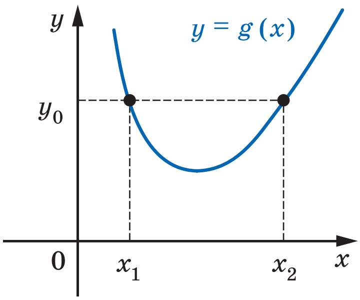


Рис. 3.2

Будь-яка горизонтальна пряма перетинає графік функції f не більше ніж в одній точці. Це означає, що кожному числу $y_0 \in E(f)$ відповідає єдине число $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$. Функція g такої властивості не має. Справді, з рисунка 3.2 видно, що значенню y_0 відповідають два значення аргументу x_1 і x_2 такі, що $y_0 = g(x_1)$ і $y_0 = g(x_2)$.

Означення. Функцію $y = f(x)$ називають оборотною, якщо для будь-якого $y_0 \in E(f)$ існує єдине $x_0 \in D(f)$ таке, що $y_0 = f(x_0)$.

Функція f (рис. 3.1) є оборотною. Функція g (рис. 3.2) не є оборотною.

Функції $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$ є прикладами оборотних функцій (рис. 3.3).

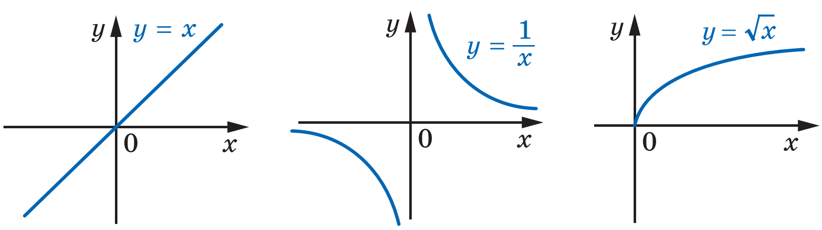


Рис. 3.3

Функція $y = x^2$ не є оборотною. Наприклад, значенню функції, яке дорівнює 4, відповідають два значення аргументу $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$.

Теорема 3.1. ***Якщо функція є зростаючою (спадною), то вона є оборотною.***

Доведення. Припустимо, що існує зростаюча функція f, яка не є оборотною. Тоді знайдеться $y_0 \in E(f)$, для якого існують x_1 і x_2 $(x_1 < x_2)$ такі, що $f(x_1) = f(x_2) = y_0$. Разом з тим функція f — зростаюча, і з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $f(x_1) < f(x_2)$. Отримали суперечність.

Аналогічно можна розглянути випадок, коли функція f є спадною. ◀

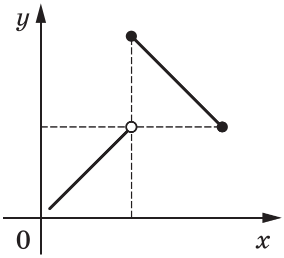


Рис. 3.4

Зазначимо, що обернене твердження не є правильним, тобто не будь-яка оборотна функція є зростаючою (спадною). Наприклад, на рисунку 3.4 зображено графік оборотної функції, яка не є ні зростаючою, ні спадною.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, задану таблично:

x	5	6	7
y	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$

Функція f є оборотною.

Поміняємо рядки таблиці місцями та розглянемо функцію $y = g(x)$, задану отриманою таблицею:

x	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{7}$
y	5	6	7

Функції f і g зв'язані такими властивостями:

1) $D(f) = E(g)$ і $E(f) = D(g)$;

2) $f(5) = \sqrt{5}, \quad g\left(\sqrt{5}\right) = 5;$

$f(6) = \sqrt{6}, \quad g\left(\sqrt{6}\right) = 6;$

$f(7) = \sqrt{7}, \quad g\left(\sqrt{7}\right) = 7.$

Ці рівності означають, що коли $f(x_0) = y_0$, то $g(y_0) = x_0$.

У таких випадках говорять, що функція g є **оберненою** до функції f, а функція f — **оберненою** до функції g. Такі функції f і g називають **взаємно оберненими**.

Означення. **Функції f і g називають взаємно оберненими, якщо:**
1) $D(f) = E(g)$ **і** $E(f) = D(g)$;
2) **для будь-якого** $x_0 \in D(f)$ **із рівності** $f(x_0) = y_0$ **випливає, що** $g(y_0) = x_0$, **тобто** $g(f(x_0)) = x_0$.

Можна показати, що другу умову в означенні можна замінити на таку: для будь-якого $x_0 \in D(g)$ із рівності $g(x_0) = y_0$ випливає, що $f(y_0) = x_0$, тобто $f(g(x_0)) = x_0$.

Коли функція f не є оборотною, то не існує функції, оберненої до неї. Будь-яка оборотна функція має обернену.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що функція $f(x) = 2x - 1$ є оборотною. Знайдіть обернену функцію.

Розв'язання. Функція $f(x) = 2x - 1$ є зростаючою. Отже, вона є оборотною.

Щоб задати обернену функцію, потрібно вказати правило, яке дає змогу за кожним значенням змінної y знайти відповідне значення змінної x таке, що $y = 2x - 1$.

Маємо: $2x = y + 1$; $x = \frac{y+1}{2}$.

Отримана рівність задає функцію з аргументом y і залежною змінною x.

Традиційно незалежну змінну позначають буквою x, а залежну — буквою y. Дотримуючись таких позначень, можна сказати, що ми отримали функцію, яку задано формулою $y = \frac{x+1}{2}$.

Покажемо, що функції $g(x) = \frac{x+1}{2}$ і $f(x) = 2x - 1$ є взаємно оберненими.

Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$, $E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = 2x_0 - 1$. Доведемо, що $g(y_0) = x_0$.

Маємо: $g(y_0) = \frac{y_0+1}{2} = \frac{2x_0-1+1}{2} = x_0$. ◄

Функція $y = x^2$ не є оборотною. Разом з тим ця функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Отже, функція $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, є оборотною. Також прийнято говорити, що функція $y = x^2$ є **оборотною на множині** $[0; +\infty)$. Знайдемо функцію, обернену до функції f.

Отримуємо: $y = x^2$, де $x \in [0; +\infty)$. Звідси $\sqrt{y} = \sqrt{x^2} = |x| = x$.

Рівність $\sqrt{y} = x$ задає функцію з аргументом y і залежною змінною x.

Скориставшись традиційними позначеннями, отримаємо функцію $y = \sqrt{x}$, обернену до функції f.

Покажемо, що функції $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, і $g(x) = \sqrt{x}$ є взаємно оберненими.

Маємо: $D(f) = E(g) = [0; +\infty)$, $E(f) = D(g) = [0; +\infty)$.

Нехай $f(x_0) = y_0$, тобто $y_0 = x_0^2$, де $x_0 \geqslant 0$.

Запишемо: $g(y_0) = \sqrt{y_0} = \sqrt{x_0^2} = |x_0| = x_0$.

Теорема 3.2. ***Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.***

Доведення. Нехай точка M $(a; b)$ належить графіку функції $y = f(x)$. Тоді $b = f(a)$. Якщо функція g є оберненою до функції f, то $g(b) = a$, тобто точка N $(b; a)$ належить графіку функції $y = g(x)$.

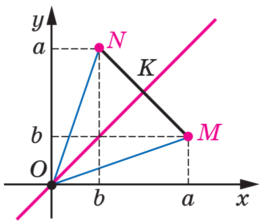


Рис. 3.5

Покажемо, що точки M і N є симетричними відносно прямої $y = x$.

Якщо $a = b$, то точки M і N збігаються та належать прямій $y = x$.

При $a \neq b$ маємо (рис. 3.5): $ON = \sqrt{a^2 + b^2}$, $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$, тобто точка O рівновіддалена від кінців відрізка MN, а отже, належить серединному перпендикуляру відрізка MN. Середина K відрізка MN має координати $\left(\frac{a+b}{2}; \frac{a+b}{2}\right)$, тобто належить прямій $y = x$. Отже, пряма $y = x$ є серединним перпендикуляром відрізка MN. ◄

Доведену теорему ілюструють графіки взаємно обернених функцій, які ми розглянули вище (рис. 3.6).

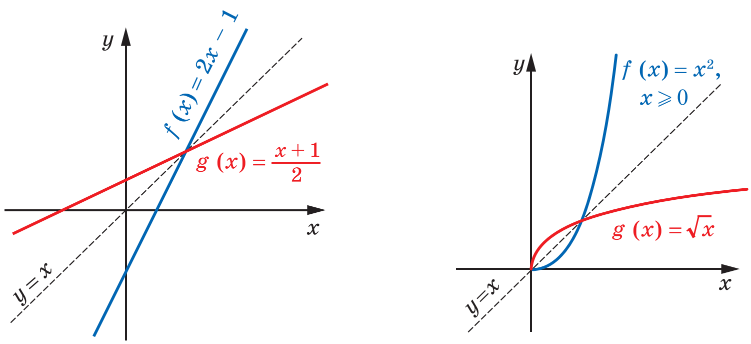


Рис. 3.6

Теорема 3.3. ***Якщо функція f є зростаючою (спадною), то обернена до неї функція g є також зростаючою (спадною).***

Доведення. Припустимо, що функція f зростаюча, але при цьому обернена до неї функція g не є зростаючою. Тоді знайдуться такі $y_1 \in D(g)$ і $y_2 \in D(g)$, що з нерівності $y_1 < y_2$ випливатиме нерівність $g(y_1) \geqslant g(y_2)$. Нехай $g(y_1) = x_1$, $g(y_2) = x_2$, тому $x_1 \geqslant x_2$. Оскільки функція f зростаюча, то $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, тобто $y_1 \geqslant y_2$. Отримали суперечність.

Для спадної функції міркуємо аналогічно. ◄

Теорема 3.4. ***Спільні точки графіків зростаючих взаємно обернених функцій лежать на прямій $y = x$.***

Доведення. Нехай $M(a;\ b)$ — спільна точка графіків взаємно обернених зростаючих функцій f і g. Доведемо, що $a = b$.

Будемо міркувати від супротивного. Припустимо, наприклад, що $a < b$. Оскільки графіки взаємно обернених функцій f і g симетричні відносно прямої $y = x$, то точка $N(b;\ a)$ є для них спільною. З огляду на зростання функції f можна записати: $f(a) < f(b)$. Але $f(a) = b$, $f(b) = a$. Отримали $b < a$, що суперечить припущенню $a < b$. Аналогічно розглядається випадок, коли $a > b$. Таким чином, $a = b$. ◄

Зауваження. Звернемо увагу на те, що умова зростання у формулюванні теореми 3.4 є обов'язковою. Наприклад, функції $f(x) = -x$ і $g(x) = -x$ є взаємно оберненими, проте їхні спільні точки, наприклад $A(-1;\ 1)$ і $B(1;\ -1)$, не належать прямій $y = x$.

Наслідок. ***Якщо функції f і g — взаємно обернені та зростаючі, то рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне кожному з рівнянь $f(x) = x$ або $g(x) = x$.***

Доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\sqrt{x}+5} = x - 5$.

Розв'язання. Зробимо заміну $\sqrt{x} = t$. Отримуємо: $\sqrt{t+5} = t^2 - 5$. Розглянемо функції $f(t) = \sqrt{t+5}$ і $g(t) = t^2 - 5$, $D(g) = [0;\ +\infty)$. Ці функції є взаємно оберненими і зростаючими. Тоді з наслідку з теореми 3.4 випливає, що рівняння $\sqrt{t+5} = t^2 - 5$ рівносильне системі $\begin{cases} t^2 - 5 = t, \\ t \geqslant 0. \end{cases}$ Звідси $t = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$. Тепер можна записати:

$$\sqrt{x} = \frac{1+\sqrt{21}}{2}; \quad x = \frac{22+2\sqrt{21}}{4} = \frac{11+\sqrt{21}}{2}.$$

Відповідь: $\frac{11+\sqrt{21}}{2}$. ◄

ВПРАВИ

3.1.° Які з функцій, графіки яких зображено на рисунку 3.7, є оборотними?

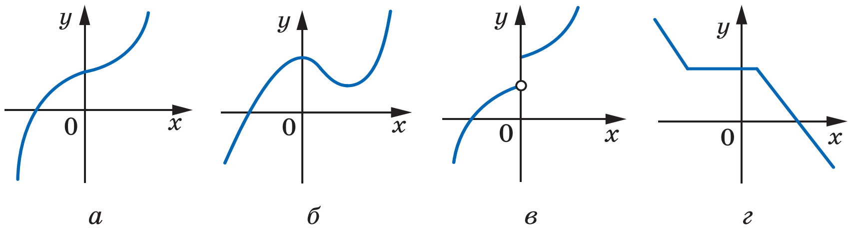


Рис. 3.7

3.2.° Які з функцій, графіки яких зображено на рисунку 3.8, є оборотними?

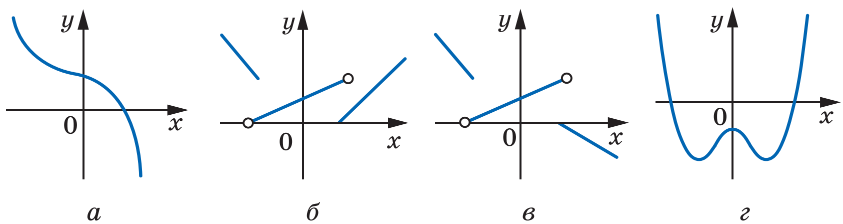


Рис. 3.8

3.3.° Доведіть, що дана функція не є оборотною:

1) $y = |x|$; 2) $y = \frac{1}{x^4}$; 3) $y = 5$; 4) $y = [x]$.

3.4.° Доведіть, що функції f і g є взаємно оберненими:

1) $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$, $g(x) = 3x - 1$;

2) $f(x) = \frac{1}{x - 2}$, $g(x) = \frac{2x + 1}{x}$;

3) $f(x) = \sqrt{x + 2}$, $g(x) = x^2 - 2$, $D(g) = [0; +\infty)$.

3.5.° Доведіть, що функції f і g є взаємно оберненими:

1) $f(x) = 4x + 2$, $g(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2}$;

2) $f(x) = \frac{x}{x + 1}$, $g(x) = \frac{x}{1 - x}$;

3) $f(x) = (x - 3)^2$, $D(f) = [3; +\infty)$, $g(x) = \sqrt{x} + 3$.

3.6.° Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 3x - 1$;
2) $y = \dfrac{1}{x}$;
3) $y = \dfrac{1}{2x+1}$;
4) $y = \dfrac{1}{3}x + 4$.

3.7.° Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = 0{,}2x + 3$;
2) $y = \dfrac{1}{x-1}$;
3) $y = \dfrac{4}{x+2}$;
4) $y = 4x - 5$.

3.8.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \dfrac{x}{x-1}$;
2) $y = \sqrt{2x-1}$;
3) $y = 2\sqrt{x} - 1$;
4) $y = x^2,\ D(y) = (-\infty;\ 0]$;
5) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$;
6) $y = \begin{cases} \sqrt{x-2}, \text{ якщо } x \geqslant 3, \\ 2x-5, \text{ якщо } x < 3. \end{cases}$

3.9.• Знайдіть функцію, обернену до даної:

1) $y = \dfrac{x+2}{x}$;
2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
3) $y = \sqrt{x^2-4},\ D(y) = [2;\ +\infty)$;
4) $y = \begin{cases} 2-x^2, \text{ якщо } x \geqslant 1, \\ 2-x, \text{ якщо } x < 1. \end{cases}$

3.10.• Побудуйте в одній системі координат графік даної функції та графік функції, оберненої до неї:

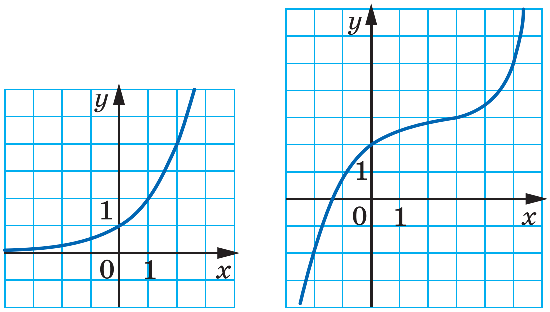
1) $y = -0{,}5x + 2$;
2) $y = \sqrt{x+1}$;
3) $y = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \geqslant 0, \\ 2x, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

3.11.• Побудуйте в одній системі координат графік даної функції та графік функції, оберненої до неї:

1) $y = 3x - 1$;
2) $y = x^2 - 4$, якщо $x \geqslant 0$;
3) $y = \begin{cases} \sqrt{x}, \text{ якщо } x \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{2}x, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$

3.12.• Користуючись графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рисунку 3.9, побудуйте графік функції, оберненої до функції f.

3.13.• Користуючись графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рисунку 3.10, побудуйте графік функції, оберненої до функції f.



а *б*

Рис. 3.9

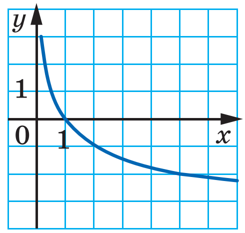


Рис. 3.10

3.14.• Доведіть, що функція $y=\begin{cases}x^2+1, & \text{якщо } 0\leqslant x<1,\\ \sqrt{x-1}, & \text{якщо } 1\leqslant x<2\end{cases}$ збігається з оберненою до неї функцією.

3.15.• Доведіть, що функція, обернена до лінійної функції $y = kx + b$ при $k \neq 0$, теж є лінійною.

3.16.•• Доведіть, що функція, обернена до непарної функції, також є непарною.

3.17.•• Нехай g — функція, обернена до функції $f(x) = x^5 + 6x^3$.

1) Знайдіть $g(7)$.
2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = -1$.
3) Скільки коренів має рівняння $g(x) = c$ залежно від значення параметра c?

3.18.•• Нехай g — функція, обернена до функції $f(x) = x^3 + \sqrt{x-2}$.

1) Знайдіть $g(28)$.
2) Розв'яжіть рівняння $g(x) = 1$.
3) Чи існує таке значення c, що рівняння $g(x) = c$ має два корені?

3.19.•• Функція g є оберненою до функції $f(x) = x^3 + x - 3$. Розв'яжіть рівняння $g(x) = x^3 + x + 3$.

3.20.•• Функція g є оберненою до функції $f(x) = x^3 + x + 12$. Розв'яжіть рівняння $g(x) = x^3 + x - 12$.

3.21.•• Функція g є оберненою до функції $f(x) = x^5 + x - 1$. Розв'яжіть рівняння $f(x) = g(x)$.

3.22.•• Функція f є оберненою до функції $g(x) = x^3 + x - 8$. Розв'яжіть рівняння $f(x) = g(x)$.

3.23.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-\frac{1}{8}}=x^2+\frac{1}{8}$.

3.24.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1+\sqrt{x}}=x-1$.

3.25.•• Знайдіть функцію g, обернену до функції $f(x)=x^2$, $D(f)=(-1;\,0]\cup[3;\,4)$.

3.26.•• Знайдіть функцію g, обернену до функції $f(x)=-x^2$, $D(f)=[-3;\,-2)\cup[0;\,1)$.

3.27.•• Чи існує оборотна функція f така, що $D(f)=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $E(f)=\mathbb{N}$?

3.28.•• Чи існує оборотна функція f така, що $D(f)=\mathbb{Z}$, $E(f)=\mathbb{N}$?

3.29.•• Функція f і оборотна функція g є такими, що для всіх $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність $f(f(x))=g(x)$. Доведіть, що f — оборотна функція.

3.30.* Чи існує оборотна функція f така, що $D(f)=\mathbb{Q}$, $E(f)=\mathbb{N}$?

3.31.* Наведіть приклад таких взаємно обернених функцій f і g, що при всіх $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність $f(x)-g(x)=x$.

3.32.* Функція f має обернену функцію g. Відомо, що нерівність $\frac{1}{2}x-1<f(x)<\frac{1}{2}x+1$ виконується для всіх $x\in\mathbb{R}$, а рівняння $g(x)=10-2x^2$ має один додатний корінь. Знайдіть цей корінь наближено з абсолютною похибкою[1] 0,25.

3.33.* Функція g є оберненою до зростаючої функції f такої, що $D(f)=[0;\,1]$, $E(f)=[0;\,1]$, $f(0)=0$, $f(1)=1$. Доведіть нерівність
$$f\left(\frac{1}{10}\right)+f\left(\frac{2}{10}\right)+\ldots+f\left(\frac{9}{10}\right)+g\left(\frac{1}{10}\right)+g\left(\frac{2}{10}\right)+\ldots+g\left(\frac{9}{10}\right)\leqslant\frac{99}{10}.$$

3.34.* 1) Функція f і оборотна функція g є такими, що для всіх $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність $f(f(x))=g(x)$. Доведіть, що f — оборотна функція.

2) Знайдіть усі функції f такі, що для будь-яких $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$ виконується рівність
$$xf\,(f\,(x)-2y)=9x\,(x-y)+yf\,(x).$$

[1] **Абсолютною похибкою** називають модуль різниці між наближеним і точним значеннями величини.

Львівська математична школа

Ви тримаєте в руках підручник «Алгебра і початки аналізу». У назві з'явилося нове словосполучення — «початки аналізу». Що ж приховано за цією назвою? Відповідь дуже проста: математичний аналіз вивчає функції. Цього року ви починаєте ознайомлюватися з елементами аналізу: вам доведеться розглядати все нові й нові класи функцій, вивчати їхні властивості, опановувати методи дослідження функцій.

У першій половині XX ст. вивчення певних класів функцій привело до появи нової математичної дисципліни — «функціонального аналізу». Важливу, фактично головну, роль у створенні цієї дисципліни відіграли науковці Львівської математичної школи.

У 20–30 рр. XX ст. місто Львів було справжньою світовою математичною столицею. У той час у його наукових закладах працювали такі легендарні математики, як Казимир Куратовський, Станіслав Мазур, Владислав Орліч, Вацлав Серпінський, Станіслав Улам, Юлій Шаудер, Гуґо Штейнгауз і багато інших. Кваліфікація науковців Львова була настільки високою, що всесвітньо відомий математик, автор видатних теорем у математичній логіці та теорії множин Альфред Тарський не пройшов за конкурсом на вакантну посаду професора Львівського університету.

Математики Львова створили міцний науковий колектив, відомий як Львівська математична школа. Її керівником вважають геніального математика Стефана Банаха.

Стефан Банах
(1892–1945)

Підручник Банаха
«Курс функціонального аналізу»

Сьогодні світова математична спільнота із цілковитою підставою вважає С. Банаха засновником функціонального аналізу. Один із перших у світі підручників із цієї дисципліни написав саме Банах. Багато результатів Банаха та введених ним понять стали класичними. Наприклад, досліджені вченим множини одержали назву «простори Банаха» й зараз входять до необхідного мінімуму знань усіх, хто навчається у вищому навчальному закладі з математики, фізики, кібернетики та ін.

Розповідають, що багато теорем львівські математики доводили... у кав'ярні. С. Банах з учнями облюбували «Шкотську (шотландську) кав'ярню», де маленькі столики мали мармурове покриття — дуже зручне для запису математичних формул і теорем. Господар кав'ярні був незадоволений таким свавіллям науковців, але ситуацію врятувала дружина Банаха, яка придбала великий зошит для записів. Так з'явилася знаменита «Шкотська книга» — збірка математичних проблем, над якими працювала група С. Банаха. Як винагороду за розв'язання складних задач автори з гумором пропонували то кухлі пива, то вечерю в ресторані. Наприклад, одна з проблем, за яку автор пообіцяв живого гусака (1936 р.), була розв'язана лише в 1972 р., тоді ж і було вручено винагороду.

Проблеми, порушені в «Шкотській книзі», є настільки важливими та складними, що кожний, кому вдається розв'язати хоча б одну з них, одразу дістає світового визнання. Сама ж «Шкотська книга» є однією з найвідоміших і найцінніших реліквій світової науки.

Вручення гусака

4. Означення кореня n-го степеня. Функція $y = \sqrt[n]{x}$

Ви знаєте, що коренем другого степеня (квадратним коренем) із числа a називають таке число, другий степінь якого дорівнює a. Аналогічно дають означення кореня n-го степеня із числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Означення. Коренем n-го степеня із числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке число, n-й степінь якого дорівнює a.

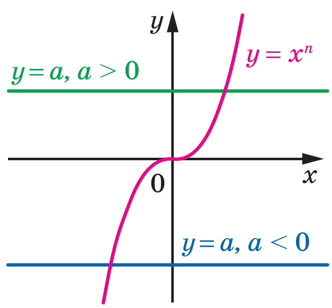
Наприклад, коренем п'ятого степеня із числа 32 є число 2, оскільки $2^5 = 32$; коренем третього степеня із числа -64 є число -4, оскільки $(-4)^3 = -64$; коренями четвертого степеня із числа 81 є числа 3 і -3, оскільки $3^4 = 81$ і $(-3)^4 = 81$.

З означення випливає, що будь-який корінь рівняння $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є коренем n-го степеня із числа a і, навпаки, будь-який корінь n-го степеня із числа a є коренем розглядуваного рівняння.

Якщо n — непарне натуральне число, то функція $y = x^n$ є зростаючою, і, оскільки її областю значень є множина $\mathbb{R}$, то рівняння $x^n = a$ має єдиний корінь при будь-якому a.

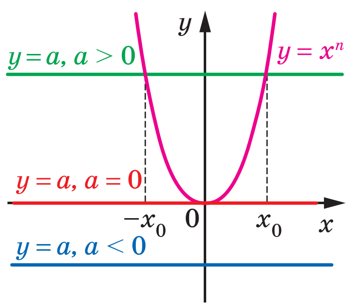
Рисунок 4.1 ілюструє останнє твердження: при будь-якому значенні a графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ мають одну спільну точку. Тоді можна зробити такий висновок:

якщо n — непарне натуральне число, більше за 1, то з будь-якого числа існує корінь n-го степеня, причому тільки один.



n — непарне натуральне число, $n > 1$

Рис. 4.1



n — парне натуральне число

Рис. 4.2

Корінь непарного степеня n, $n > 1$, із числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$ (читають: «корінь n-го степеня з a»). Знак $\sqrt[n]{\ }$ називають **знаком кореня n-го степеня** або **радикалом**. Вираз, який стоїть під радикалом, називають **підкореневим виразом**.

Наприклад, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[3]{-64} = -4$, $\sqrt[7]{0} = 0$.

Корінь третього степеня прийнято називати також **кубічним коренем**. Наприклад, запис $\sqrt[3]{2}$ читають: «корінь кубічний із числа 2».

Наголосимо, що вираз $\sqrt[2k+1]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, існує при будь-якому a.

З означення кореня n-го степеня випливає, що ***при будь-якому a виконується рівність***

$$\boxed{\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a}$$

Наприклад, $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$, $\left(\sqrt[7]{-0{,}1}\right)^7 = -0{,}1$.

Розглянемо рівняння $x^n = a$, де n — парне натуральне число.

Оскільки областю значень функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число, є множина $[0; +\infty)$, то при $a < 0$ дане рівняння не має розв'язків.

Очевидно, що при $a = 0$ рівняння має єдиний корінь $x = 0$.

Функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, зростає на проміжку $[0; +\infty)$ і набуває всіх додатних значень. Отже, при $a \geqslant 0$ рівняння $x^n = a$, де n — парне натуральне число, на проміжку $[0; +\infty)$ має єдиний корінь.

Оскільки розглядувана функція є парною, то при $a > 0$ дане рівняння має два корені, які є протилежними числами.

Наведені твердження мають просту геометричну інтерпретацію (рис. 4.2). Якщо $a < 0$, то графіки функцій $y = x^n$ і $y = a$ не мають спільних точок; якщо $a = 0$, то розглядувані графіки мають одну спільну точку; якщо $a > 0$, то спільних точок дві, причому їхні абсциси — протилежні числа.

Тепер можна зробити такий висновок:

якщо n — парне натуральне число, то при a < 0 корінь n-го степеня із числа a не існує; при a = 0 корінь n-го степеня із числа a дорівнює 0; при a > 0 існують два протилежних числа, які є коренями n-го степеня із числа a.

Вище було встановлено, що рівняння $x^n = a$ при $a \geqslant 0$ обов'язково має один невід'ємний корінь. Його називають **арифметичним коренем n-го степеня із числа a**.

Означення. Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.

Арифметичний корінь n-го степеня з невід'ємного числа a позначають так: $\sqrt[n]{a}$.

Наприклад, $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3 \geqslant 0$ і $3^4 = 81$;

$\sqrt[6]{64} = 2$, оскільки $2 \geqslant 0$ і $2^6 = 64$;

$\sqrt[10]{0} = 0$, оскільки $0 \geqslant 0$ і $0^{10} = 0$.

Узагалі, **якщо $b \geqslant 0$ і $b^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{a} = b$.**

Звернемо увагу на те, що для позначення арифметичного кореня n-го степеня з невід'ємного числа a та кореня непарного степеня n із числа a використовують один і той самий запис: $\sqrt[n]{a}$. Запис $\sqrt[2k]{a}$, $k \in \mathbb{N}$, використовують тільки для позначення арифметичного кореня. Зауважимо, що корінь парного степеня із числа a не має позначення.

За допомогою знака кореня n-го степеня можна записувати корені рівняння $x^n = a$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

- Якщо n — непарне натуральне число, то при будь-якому значенні a розглядуване рівняння має єдиний корінь $x = \sqrt[n]{a}$.
- Якщо n — парне натуральне число і $a > 0$, то рівняння має два корені: $x_1 = \sqrt[n]{a}$, $x_2 = -\sqrt[n]{a}$.
- Якщо $a = 0$, то $x = 0$.

Наприклад, коренем рівняння $x^3 = 7$ є число $\sqrt[3]{7}$; коренями рівняння $x^4 = 5$ є два числа: $-\sqrt[4]{5}$ і $\sqrt[4]{5}$.

З означення арифметичного кореня n-го степеня випливає, що:

1) $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$, **де** $a \geqslant 0$;

2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, **де** $a \geqslant 0$.

Наприклад, $\sqrt[6]{7} \geqslant 0$ і $\left(\sqrt[6]{7}\right)^6 = 7$.

Покажемо, що при будь-якому a і $k \in \mathbb{N}$

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}}$$

Для того щоб довести рівність $\sqrt[2k+1]{x} = y$, потрібно показати, що $y^{2k+1} = x$.

Маємо: $\left(-\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = -a$.

Доведена властивість дає змогу корінь непарного степеня з від'ємного числа виразити через арифметичний корінь.

Наприклад, $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{-12} = -\sqrt[5]{12}$.

Вище було встановлено, що корінь непарного степеня з будь-якого числа існує та набуває єдиного значення. Отже, кожному числу $x \in \mathbb{R}$ можна поставити у відповідність єдине число y таке, що $y = \sqrt[2k+1]{x}$. Зазначене правило задає функцію $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$, де $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $\mathbb{R}$.

Покажемо, що функція f є оберненою до функції $g(x) = x^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.

Оскільки рівняння $\sqrt[2k+1]{x} = a$ при будь-якому a має корінь (а саме, число a^{2k+1}), то областю значень функції f є множина $\mathbb{R}$.

Маємо: $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$,

$E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\left(\sqrt[2k+1]{x}\right)^{2k+1} = x$. Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Використовуючи графік функції $y = x^{2k+1}$ і теорему 3.2, можна побудувати графік функції $y = \sqrt[2k+1]{x}$ (рис. 4.3). Зокрема, на рисунку 4.4 зображено графіки функцій $y = \sqrt[3]{x}$ і $y = \sqrt[5]{x}$.

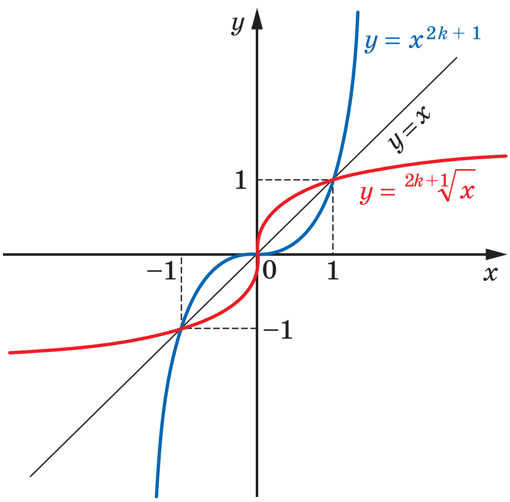


Рис. 4.3

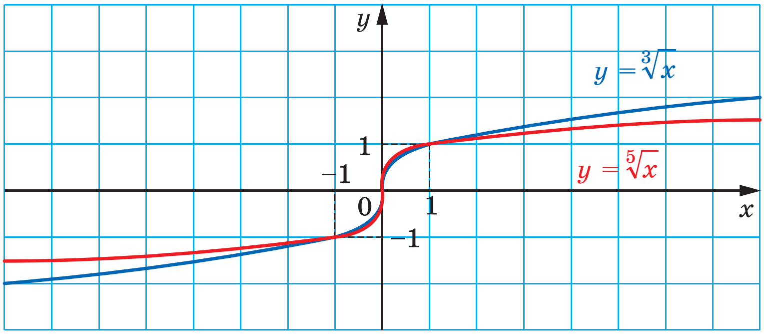


Рис. 4.4

Оскільки функція $g(x) = x^{2k+1}$ є зростаючою, то за теоремою 3.3 функція $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ також є зростаючою.

Функція $f(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ має єдиний нуль $x = 0$.

Якщо $x < 0$, то $f(x) < 0$; якщо $x > 0$, то $f(x) > 0$. Отже, проміжки $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$ є проміжками знакосталості функції f.

Для будь-якого x із області визначення функції f виконуються рівності $f(-x) = \sqrt[2k+1]{-x} = -\sqrt[2k+1]{x} = -f(x)$. Отже, функція f є непарною.

Аналогічно дають означення функції $f(x) = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $[0;\ +\infty)$.

Покажемо, що функція f є оберненою до функції $g(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, з областю визначення $[0;\ +\infty)$.

Оскільки рівняння $\sqrt[2k]{x} = a$ при будь-якому $a \geqslant 0$ має корінь (а саме, число a^{2k}) і при будь-якому $a < 0$ не має коренів, то областю значень функції f є проміжок $[0;\ +\infty)$.

Маємо: $D(f) = E(g) = [0;\ +\infty)$,

$E(f) = D(g) = [0;\ +\infty)$.

Для будь-якого $x \in [0;\ +\infty)$ виконується рівність $\left(\sqrt[2k]{x}\right)^{2k} = x$. Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

На рисунку 4.5 показано, як за допомогою графіка функції $y = x^{2k}$, де $x \geqslant 0$, побудувати графік функції $y = \sqrt[2k]{x}$, $k \in \mathbb{N}$.

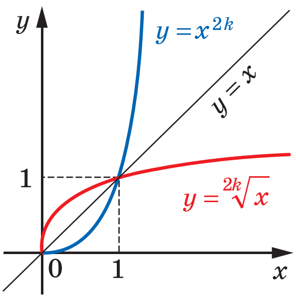


Рис. 4.5

На рисунку 4.6 зображено графік функції $y = \sqrt[4]{x}$.

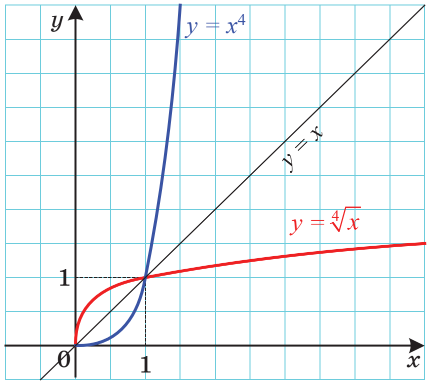


Рис. 4.6

З'ясуємо деякі властивості функції $f(x) = \sqrt[2k]{x}$.

Оскільки функція $g(x) = x^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, $D(g) = [0; +\infty)$, є зростаючою, то функція $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ також є зростаючою.

Функція f має єдиний нуль $x = 0$.

Якщо $x > 0$, то $f(x) > 0$. Отже, проміжок $(0; +\infty)$ є проміжком знакосталості функції f.

Оскільки область визначення функції f не є симетричною відносно початку координат, то функція f не є ні парною, ні непарною.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[3]{x} < 2$; 2) $\sqrt[4]{x-2} < 1$; 3) $\sqrt[6]{x^2-4} > \sqrt[6]{3x}$.

Розв'язання. 1) Дана нерівність рівносильна такій: $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{8}$. Оскільки функція $y = \sqrt[3]{x}$ є зростаючою, то можна зробити висновок, що $x < 8$.

Відповідь: $(-\infty; 8)$.

2) Маємо: $\sqrt[4]{x-2} < \sqrt[4]{1}$. Оскільки функція $y = \sqrt[4]{t}$ є зростаючою з областю визначення $[0; +\infty)$, то дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x-2 < 1, \\ x-2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Звідси $2 \leqslant x < 3$.

Відповідь: $[2; 3)$.

3) Дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x^2-4 > 3x, \\ 3x \geqslant 0. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} x^2-3x-4>0, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>4, \end{array}\right. \\ x \geqslant 0. \end{cases}$ Звідси отримуємо, що $x > 4$.

Відповідь: $(4; +\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 2 Порівняйте $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[4]{2}$.

Розв'язання. Маємо: $\sqrt[3]{2}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[12]{16}$; $\sqrt[4]{2}=\sqrt[12]{2^3}=\sqrt[12]{8}$. Оскільки функція $y=\sqrt[12]{x}$ є зростаючою, то $\sqrt[12]{16}>\sqrt[12]{8}$.

Відповідь: $\sqrt[3]{2}>\sqrt[4]{2}$. ◄

ВПРАВИ

4.1.° Обчисліть:

1) $\left(-\sqrt[7]{2}\right)^7$; 2) $-\sqrt[4]{7^4}$; 3) $\left(\frac{1}{2}\sqrt[6]{48}\right)^6$; 4) $\frac{1}{2}\sqrt[6]{48^6}$.

4.2.° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(-\sqrt[6]{11}\right)^6$; 2) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{45}\right)^3$; 3) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{45^3}$; 4) $\left(-2\sqrt[5]{-5}\right)^5$.

4.3.° Обчисліть:

1) $0{,}3\sqrt[3]{1000}-5\sqrt[8]{256}$; 2) $\sqrt[5]{14^5}+\left(-2\sqrt{10}\right)^2-\sqrt[7]{-128}$.

4.4.° Обчисліть:

1) $200\sqrt[3]{0{,}001}-\sqrt[5]{-0{,}00032}$; 2) $\sqrt[3]{8000}\cdot\sqrt[4]{7\frac{58}{81}}-\left(-\sqrt[5]{8}\right)^5+\sqrt[7]{17^7}$.

4.5.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt[3]{x-1}$; 2) $y=\sqrt[4]{|x|-1}$; 3) $y=\sqrt[6]{x^2(x-3)}$.

4.6.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt[4]{x-2}$; 2) $y=\sqrt[6]{x^2-4x+3}$; 3) $y=\sqrt[10]{|x|(x-6)}$.

4.7.° Знайдіть область значень функції:

1) $y=\sqrt[6]{x}-2$; 2) $y=\sqrt[3]{x}-3$; 3) $y=\left|\sqrt[8]{x}-1\right|$.

4.8.° Знайдіть область значень функції:

1) $y=\sqrt[4]{x}-4$; 2) $y=\sqrt[5]{x}-2$; 3) $y=\left|\sqrt[7]{x}+1\right|$.

4.9.° Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

1) $\sqrt[3]{3}$; 2) $\sqrt[4]{21}$; 3) $\sqrt[3]{100}$; 4) $-\sqrt[3]{81}$?

4.10.° Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

1) $\sqrt[3]{18}$; 2) $\sqrt[4]{139}$; 3) $-\sqrt[3]{212}$?

4.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5 = 9$; 3) $x^6 = 5$; 5) $\sqrt[6]{x} = -2$;

2) $x^7 = -2$; 4) $\sqrt[4]{x} = 3$; 6) $\sqrt[3]{2x} + 7 = 0$.

4.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^9 = 10$; 3) $x^6 = -64$; 5) $\sqrt[5]{x} = -2$;

2) $x^{10} = 9$; 4) $\sqrt[4]{x} = -2$; 6) $\sqrt[4]{3x-2} = 2$.

4.13.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3$; 2) $y = \left(\sqrt[4]{x}\right)^4$.

4.14.• Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt[4]{\dfrac{|x|-1}{x^2-9}}$; 2) $\sqrt[8]{6-|x|} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{3-x}}$.

4.15.• Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt[6]{\dfrac{|x|-4}{x^2-36}}$; 2) $\sqrt[10]{|x|-3} - \dfrac{1}{\sqrt[4]{x+4}}$.

4.16.• Розв'яжіть рівняння:

1) $(x^2-4)\sqrt[4]{x+1} = 0$; 2) $(x-1)\sqrt[10]{x^2-2x-3} = 0$.

4.17.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(|x|-3\right)\sqrt[6]{2-x} = 0$; 2) $(x+2)\sqrt[6]{x^2+2x-3} = 0$.

4.18.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt[4]{x-1}\right)^4 + \left(\sqrt[4]{1-x}\right)^4 + 1$; 2) $y = \left(\sqrt[6]{x}\right)^6 + \left(\sqrt[6]{1-x}\right)^6$.

4.19.• Побудуйте графік функції:

1) $y = x\left(\sqrt[4]{x}\right)^4$; 2) $y = \left(\sqrt[8]{2+x}\right)^8 + \left(\sqrt[6]{2-x}\right)^6$.

4.20.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sqrt[4]{|x|}$ на проміжку:

1) $[-3; -1]$; 2) $[-1; 2]$; 3) $[-3; +\infty)$.

4.21.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ на проміжку:

1) $[2; 3]$; 2) $[-2; 1]$; 3) $(-\infty; 2)$.

4.22.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[3]{3x+1} < 4$; 2) $\sqrt[8]{4x+1} \leqslant 1$; 3) $\sqrt[4]{x^2-8} > \sqrt[4]{2x}$.

4.23.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt[10]{x+2}>1$; 2) $\sqrt[4]{5x+1}<3$; 3) $\sqrt[8]{x^2-|x|+1}>\sqrt[8]{5-|x|}$.

4.24.•• Доведіть, що є ірраціональним число: 1) $\sqrt[3]{2}$; 2) $\sqrt[6]{6}$.

4.25.•• Доведіть, що є ірраціональним число: 1) $\sqrt[3]{7}$; 2) $\sqrt[4]{12}$.

4.26.•• Скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра a:

1) $\sqrt[3]{x}=a-x$; 2) $\sqrt[4]{x}=a-x$?

4.27.•• Скільки коренів має рівняння $\left|\sqrt[6]{x}-1\right|=a$ залежно від значення параметра a?

4.28.•• Залежно від значення параметра a визначте кількість коренів рівняння:

1) $(x-a)\sqrt[4]{x+1}=0$; 3) $(x-a)\left(\sqrt[4]{x}-1\right)=0$.

2) $(x-a)\left(\sqrt[4]{x}+1\right)=0$;

4.29.•• Залежно від значення параметра a визначте кількість коренів рівняння:

1) $(x+1)\sqrt[4]{x-a}=0$; 2) $(x-1)\left(\sqrt[4]{x}-a\right)=0$.

4.30.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x-26}+\sqrt[3]{x}=4$.

4.31.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x-9}+\sqrt[4]{x+6}=3$.

4.32.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+\sqrt[6]{x}=y+\sqrt[6]{y}, \\ x^2+xy+y^2=27. \end{cases}$

4.33.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+\sqrt[5]{x}=y+\sqrt[5]{y}, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$

4.34.•• Знайдіть усі парні функції f такі, що рівність $f(x^{30})=x^3$ виконується для всіх $x\in[0;+\infty)$.

4.35.•• Знайдіть усі непарні функції f такі, що рівність $f(\sqrt[8]{x})=\sqrt[5]{x}$ виконується для всіх $x\in[0;+\infty)$.

4.36.* Знайдіть усі визначені на $\mathbb{R}$ функції f такі, що рівність $f(x^8)=x^2$ виконується для всіх $x\in\mathbb{R}$.

4.37.* Знайдіть цілу частину числа $\underbrace{\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{24+\sqrt[3]{\ldots+\sqrt[3]{24}}}}}_{100\text{ радикалів}}$.

4.38.* Знайдіть цілу частину числа $\underbrace{\sqrt[4]{12+\sqrt[4]{12+\sqrt[4]{\ldots+\sqrt[4]{12}}}}}_{200\text{ радикалів}}$.

4.39.* Розв'яжіть рівняння $a^5 + x = \sqrt[5]{a - x}$.

4.40.* Для $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$ позначимо $X = [\sqrt[k]{1}] + [\sqrt[k]{2}] + \ldots + [\sqrt[k]{n^k}]$, $Y = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$. Доведіть, що $X + Y = n^{k+1} + n$.

4.41.* Для невід'ємних чисел a, b і c доведіть нерівність $\sqrt{a + \sqrt[3]{b + \sqrt[4]{c}}} \geqslant \sqrt[32]{abc}$.

5. Властивості кореня n-го степеня

Розглянемо теореми, які виражають властивості кореня n-го степеня.

Теорема 5.1 (перша теорема про корінь із степеня). ***Для будь-якого $a \in \mathbb{R}$ і $k \in \mathbb{N}$ виконуються рівності:***

$$\boxed{\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a}$$

$$\boxed{\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|}$$

Доведення. Щоб довести рівність $\sqrt[2k+1]{x} = y$, достатньо показати, що $y^{2k+1} = x$. Для першої рівності, що доводиться, $x = a^{2k+1}$, а $y = a$. Звідси рівність $y^{2k+1} = x$ є очевидною.

Щоб довести рівність $\sqrt[2k]{x} = y$, достатньо показати, що $y \geqslant 0$ і $y^{2k} = x$. Для другої рівності, що доводиться, маємо: $|a| \geqslant 0$ і $(|a|)^{2k} = a^{2k}$. ◄

Теорема 5.2 (корінь із добутку). ***Якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то***

$$\boxed{\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$$

Доведення. Для того щоб довести рівність $\sqrt[n]{x} = y$, де $x \geqslant 0$, достатньо показати, що $y \geqslant 0$ і $y^n = x$.

Маємо: $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ і $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Тоді $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$. Крім того, $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab$. ◄

Використовуючи теорему 5.2, можна показати, що коли $a \leqslant 0$ і $b \leqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{-a} \cdot \sqrt[n]{-b}$.

Теорема 5.3 (корінь із частки). ***Якщо*** $a \geqslant 0$ ***і*** $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Доведіть цю теорему самостійно.

Зауважимо, що коли $a \leqslant 0$ і $b < 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{-a}}{\sqrt[n]{-b}}$.

Теорема 5.4 (степінь кореня). ***Якщо*** $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}}$$

Доведення. Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $k > 1$.

Маємо: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a}}_{k \text{ множників}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множників}}} = \sqrt[n]{a^k}$. ◄

Теорема 5.5 (корінь із кореня). ***Якщо*** $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $k > 1$, ***то***

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}}$$

Доведення. Маємо: $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geqslant 0$.

Крім того, $\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^{nk} = \left(\left(\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}\right)^n\right)^k = \left(\sqrt[k]{a}\right)^k = a$. ◄

Теорема 5.6 (друга теорема про корінь із степеня). ***Якщо*** $a \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $n > 1$, ***то***

$$\boxed{\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{a}}$$

Доведення. Якщо $k = 1$, то рівність, що доводиться, є очевидною.

Нехай $k > 1$. Маємо: $\sqrt[nk]{a^k} = \sqrt[n]{\sqrt[k]{a^k}} = \sqrt[n]{a}$. ◄

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз: 1) $\sqrt[12]{a^3}$; 2) $\sqrt[4]{a^{12}}$; 3) $\sqrt[6]{a^2}$; 4) $\sqrt[6]{x^6 y^6}$, якщо $x \geqslant 0$ і $y \leqslant 0$.

Розв'язання. Застосуємо теореми 5.5 і 5.1.

1) З умови випливає, що $a \geqslant 0$. Тоді $\sqrt[12]{a^3} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{a^3}} = \sqrt[4]{a}$.

2) $\sqrt[4]{a^{12}} = \sqrt[4]{(a^3)^4} = |a^3|$.

3) $\sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{\sqrt{a^2}} = \sqrt[3]{|a|}$.

4) Ураховуючи, що $x \geqslant 0$ і $y \leqslant 0$, можна записати:

$$\sqrt[6]{x^6y^6} = \sqrt[6]{(xy)^6} = |xy| = |x||y| = x(-y) = -xy. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2 Винесіть множник з-під знака кореня: 1) $\sqrt[8]{b^{43}}$; 2) $\sqrt[8]{-b^{43}}$; 3) $\sqrt[6]{a^6b^7}$, якщо $a < 0$.

Розв'язання. 1) З умови випливає, що $b \geqslant 0$.

$$\text{Тоді } \sqrt[8]{b^{43}} = \sqrt[8]{b^{40}b^3} = |b^5|\sqrt[8]{b^3} = b^5 \cdot \sqrt[8]{b^3}.$$

2) З умови випливає, що $b \leqslant 0$. Тоді

$$\sqrt[8]{-b^{43}} = \sqrt[8]{b^{40}(-b)^3} = |b^5|\sqrt[8]{-b^3} = -b^5 \cdot \sqrt[8]{-b^3}.$$

3) З умови випливає, що $b \geqslant 0$.

$$\text{Тоді } \sqrt[6]{a^6b^7} = \sqrt[6]{a^6b^6b} = |a||b|\sqrt[6]{b} = -ab\sqrt[6]{b}. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 3 Внесіть множник під знак кореня: 1) $-2\sqrt[6]{3}$; 2) $a\sqrt[4]{7}$; 3) $c\sqrt[10]{c^7}$; 4) $3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}}$.

Розв'язання. 1) $-2\sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{64} \cdot \sqrt[6]{3} = -\sqrt[6]{192}$.

2) Якщо $a \geqslant 0$, то $a\sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{7a^4}$; якщо $a < 0$, то $a\sqrt[4]{7} = -\sqrt[4]{a^4} \cdot \sqrt[4]{7} = -\sqrt[4]{7a^4}$.

3) З умови випливає, що $c \geqslant 0$. Тоді $c\sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{10}} \cdot \sqrt[10]{c^7} = \sqrt[10]{c^{17}}$.

4) З умови випливає, що $b \leqslant 0$. Тоді

$$3b\sqrt[4]{-\frac{b}{3}} = -\sqrt[4]{81b^4} \cdot \sqrt[4]{-\frac{b}{3}} = -\sqrt[4]{81b^4 \cdot \left(-\frac{b}{3}\right)} = -\sqrt[4]{-27b^5}. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 4 Скоротіть дріб $\frac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1}$.

Розв'язання. Розклавши чисельник даного дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{\sqrt[3]{b}-1}{\sqrt[6]{b}+1} = \frac{\left(\sqrt[6]{b}\right)^2-1}{\sqrt[6]{b}+1} = \frac{\left(\sqrt[6]{b}-1\right)\left(\sqrt[6]{b}+1\right)}{\sqrt[6]{b}+1} = \sqrt[6]{b}-1. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 5 Скоротіть дріб $\dfrac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}$.

Розв'язання. З умови випливає, що числа a і b однакового знака. Розглянемо два випадки.

Перший випадок: $a > 0$ і $b > 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}=\frac{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}+\sqrt[10]{b}\cdot\sqrt[10]{b}}{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}}=\frac{\sqrt[10]{b}\left(\sqrt[10]{a}+\sqrt[10]{b}\right)}{\sqrt[10]{a}\cdot\sqrt[10]{b}}=\frac{\sqrt[10]{a}+\sqrt[10]{b}}{\sqrt[10]{a}}.$$

Другий випадок: $a < 0$, $b < 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}=\frac{\sqrt[10]{-a}\cdot\sqrt[10]{-b}-\left(\sqrt[10]{-b}\right)^2}{\sqrt[10]{-a}\cdot\sqrt[10]{-b}}=\frac{\sqrt[10]{-b}\left(\sqrt[10]{-a}-\sqrt[10]{-b}\right)}{\sqrt[10]{-a}\cdot\sqrt[10]{-b}}=\frac{\sqrt[10]{-a}-\sqrt[10]{-b}}{\sqrt[10]{-a}}.$$

Випадок, коли $a < 0$ і $b < 0$, можна розглянути інакше. Нехай $a=-x$, $b=-y$, де $x > 0$, $y > 0$. Маємо:

$$\frac{\sqrt[10]{ab}+\sqrt[5]{b}}{\sqrt[10]{ab}}=\frac{\sqrt[10]{xy}+\sqrt[5]{-y}}{\sqrt[10]{xy}}=\frac{\sqrt[10]{x}\cdot\sqrt[10]{y}-\sqrt[10]{y}\cdot\sqrt[10]{y}}{\sqrt[10]{xy}}=$$

$$=\frac{\sqrt[10]{y}\left(\sqrt[10]{x}-\sqrt[10]{y}\right)}{\sqrt[10]{x}\cdot\sqrt[10]{y}}=\frac{\sqrt[10]{x}-\sqrt[10]{y}}{\sqrt[10]{x}}=\frac{\sqrt[10]{-a}-\sqrt[10]{-b}}{\sqrt[10]{-a}}.$$ ◄

ПРИКЛАД 6 Доведіть, що $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=x$. Скористаємося тим, що $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab\,(a+b)$.

Маємо:

$$x^3=9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\cdot\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\cdot\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right).$$

Звідси $x^3=18+3x$; $x^3-3x-18=0$.

Розглянувши дільники числа 18, нескладно установити, що $x=3$ є коренем даного рівняння. Поділивши многочлен $x^3-3x-18$ на двочлен $x-3$, отримуємо: x^2+3x+6.

Маємо: $(x-3)\,(x^2+3x+6)=0$.

Це рівняння має єдиний корінь $x=3$. ◄

ВПРАВИ

5.1.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$; 2) $\dfrac{\sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{128}}$; 3) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}\cdot\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$.

5.2.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$; 2) $\dfrac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}}$; 3) $\sqrt[5]{2\sqrt{17}+10}\cdot\sqrt[5]{2\sqrt{17}-10}$?

5.3.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{162}$; 2) $\sqrt[3]{250}$; 3) $\sqrt[3]{-a^7}$; 4) $\sqrt[3]{-54a^5b^9}$.

5.4.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{80}$; 2) $\sqrt[3]{432}$; 3) $\sqrt[3]{54y^8}$; 4) $\sqrt[4]{243b^9c^{18}}$.

5.5.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $4\sqrt[3]{5}$; 2) $-10\sqrt[4]{0{,}271}$; 3) $5\sqrt[3]{0{,}04x}$; 4) $b\sqrt[5]{3b^3}$.

5.6.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $0{,}25\sqrt[3]{320}$; 2) $2\sqrt[4]{7}$; 3) $5\sqrt[4]{4a}$; 4) $2x^3\sqrt[5]{0{,}25x^3}$.

5.7.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}}$; 2) $\sqrt[5]{b\sqrt[6]{b}}$; 3) $\sqrt[8]{x^3\sqrt[3]{x^7}}$; 4) $\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

5.8.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt[3]{b\sqrt[4]{b}}$; 3) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[6]{x^{13}}}$; 4) $\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}$.

5.9.° Спростіть вираз:

1) $\left(1+\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)\left(1-\sqrt[3]{a}\right)$; 2) $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)$.

5.10.° Спростіть вираз $\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt[4]{m}+\sqrt[4]{n}\right)\left(\sqrt[8]{m}+\sqrt[8]{n}\right)\left(\sqrt[8]{m}-\sqrt[8]{n}\right)$.

5.11.° Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$; 3) $\dfrac{\sqrt[8]{ab^2}-\sqrt[8]{a^2b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}$; 5) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[6]{ab}+\sqrt[3]{b}}$;

2) $\dfrac{\sqrt[6]{x}-9}{\sqrt[12]{x}+3}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{x-64}$; 6) $\dfrac{2-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}$.

5.12.° Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{\sqrt[6]{a}+1}{\sqrt[3]{a}-1}$; 3) $\dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$; 5) $\dfrac{\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a^2b^2}+\sqrt[3]{a^2b}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{m}-\sqrt[4]{mn}}{\sqrt[4]{mn}-\sqrt{n}}$; 4) $\dfrac{a\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}$; 6) $\dfrac{3+\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{3}}$.

5.13.• При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt[3]{(a-5)^4}=\left(\sqrt[3]{a-5}\right)^4$; 3) $\sqrt[6]{a(a-1)}=\sqrt[6]{a}\sqrt[6]{(1-a)}$;

2) $\sqrt[4]{(a-2)^4}=\left(\sqrt[4]{a-2}\right)^4$; 4) $\sqrt[12]{a-2}\sqrt[12]{3-a}=\sqrt[12]{(2-a)(a-3)}$?

5.14.° При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\sqrt[6]{a^{30}} = a^5$; 2) $\sqrt[6]{a^{30}} = -a^5$; 3) $\sqrt[4]{a^4} = \left(\sqrt[4]{a}\right)^4$; 4) $\sqrt[4]{a^4} = \left(\sqrt[4]{-a}\right)^4$?

5.15.° При яких значеннях a і b виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{-a} \cdot \sqrt[4]{-b}$; 2) $\sqrt[4]{-ab} = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{-b}$; 3) $\sqrt[5]{ab} = \sqrt[5]{-a} \cdot \sqrt[5]{-b}$?

5.16.° При яких значеннях x виконується рівність:

1) $\sqrt[4]{x^2 - 4} = \sqrt[4]{x-2} \cdot \sqrt[4]{x+2}$; 2) $\sqrt[8]{(x-3)(7-x)} = \sqrt[8]{x-3} \cdot \sqrt[8]{7-x}$?

5.17.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[8]{256k^8}$, якщо $k \leqslant 0$;
2) $\sqrt[6]{c^{24}}$;
3) $\sqrt[4]{81x^8y^4}$, якщо $y \geqslant 0$;
4) $-1{,}2x\sqrt[6]{64x^{30}}$, якщо $x \leqslant 0$.

5.18.° Спростіть вираз:

1) $\sqrt[4]{625a^{24}}$;
2) $\sqrt[4]{0{,}0001b^{20}}$, якщо $b \geqslant 0$;
3) $\sqrt[10]{p^{30}q^{40}}$, якщо $p \geqslant 0$;
4) $\sqrt[12]{m^{36}n^{60}}$, якщо $m \leqslant 0$, $n \leqslant 0$.

5.19.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{-m^9}$;
2) $\sqrt[4]{32m^{18}n^{17}}$;
3) $\sqrt[4]{a^8b^{13}}$, якщо $a > 0$;
4) $\sqrt[6]{x^6y^7}$, якщо $x \neq 0$;
5) $\sqrt[4]{a^{15}b^{15}}$;
6) $\sqrt[8]{-a^{25}b^{50}}$.

5.20.° Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[4]{32a^6}$, якщо $a \leqslant 0$;
2) $\sqrt[4]{-625a^5}$;
3) $\sqrt[6]{a^7b^7}$, якщо $a < 0$, $b < 0$;
4) $\sqrt[6]{a^{20}b^{19}}$, якщо $a > 0$.

5.21.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $a\sqrt[4]{2}$, якщо $a \geqslant 0$;
2) $mn\sqrt[4]{\dfrac{1}{m^3n^3}}$;
3) $ab\sqrt[6]{\dfrac{6}{a^3b^2}}$, якщо $a > 0$, $b < 0$;
4) $ab\sqrt[4]{ab^2}$, якщо $b \leqslant 0$;
5) $b\sqrt[6]{6}$;
6) $a\sqrt[6]{-a}$.

5.22.° Внесіть множник під знак кореня:

1) $c\sqrt[8]{3}$, якщо $c \leqslant 0$; 2) $a\sqrt[6]{a}$; 3) $ab\sqrt[8]{\dfrac{3}{a^4b^5}}$, якщо $a < 0$; 4) $a\sqrt[4]{-a^3}$.

5.23.° Доведіть, що значення виразу є цілим числом:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{1 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 3} + \sqrt[3]{3^2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{999^2} + \sqrt[3]{999 \cdot 1000} + \sqrt[3]{1000^2}}.$$

5.24.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[3]{\sqrt{10} - 3} \cdot \sqrt[6]{19 + 6\sqrt{10}}$; 2) $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[4]{6 - 4\sqrt{2}}$.

5.25.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt[6]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}$; 2) $\sqrt{2\sqrt{6}-1}\cdot\sqrt[4]{25+4\sqrt{6}}$.

5.26.° Побудуйте графік функції:

1) $y=2x+\sqrt[6]{x^6}$; 2) $y=\sqrt[4]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x^2}$; 3) $y=\sqrt[6]{x^3}\cdot\sqrt[6]{x^9}$.

5.27.° Побудуйте графік функції:

1) $y=\sqrt[8]{x^8}-2x$; 2) $y=\sqrt[4]{-x}\cdot\sqrt[4]{-x^3}$; 3) $y=\dfrac{\sqrt[6]{x^6}}{x}$.

5.28.° Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{(x-3)^4}+\sqrt[6]{(5-x)^6}=2$.

5.29.° Побудуйте графік функції $y=\sqrt[8]{(x+1)^8}+\sqrt{(x-3)^2}$.

5.30.° Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[6]{x}-1}-\dfrac{4\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}-1}\right)\cdot\dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}-1}$;

2) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}+1\right)$;

3) $\dfrac{\sqrt[3]{2a+2\sqrt{a^2-1}}}{\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}}+\dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}+2}}$.

5.31.° Доведіть тотожність:

1) $\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}+1}-\dfrac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[3]{x}}\right):\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}+1}=\dfrac{\sqrt[6]{x}+1}{x}$;

2) $\dfrac{\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{b^2}}+\dfrac{\sqrt[3]{ab^2}-\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2}-2\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}=\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}$;

3) $\dfrac{\sqrt[3]{m+4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}+2}}{\sqrt[3]{m-4\sqrt{m-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{m-4}-2}}\cdot\dfrac{m-4\sqrt{m-4}}{m-8}=1$.

5.32.°° Доведіть, що значення виразу є раціональним числом:

1) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+10}-\sqrt[3]{6\sqrt{3}-10}$.

5.33.°° Доведіть, що $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

5.34.°° Спростіть вираз $\left(\sqrt[32]{2}+1\right)\left(\sqrt[16]{2}+1\right)\left(\sqrt[8]{2}+1\right)\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)$.

5.35.°° Спростіть вираз $\left(\sqrt[64]{a}+1\right)\left(\sqrt[32]{a}+1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{a}+1\right)$.

5.36.°° Спростіть вираз $\sqrt[15]{3^{14}}+\sqrt[15]{3^{13}\cdot 2}+\sqrt[15]{3^{12}\cdot 2^2}+\ldots+\sqrt[15]{2^{14}}$.

5.37.°° Спростіть вираз $\sqrt[17]{3^{16}}-\sqrt[17]{3^{15}\cdot 2}+\sqrt[17]{3^{14}\cdot 2^2}-\ldots+\sqrt[17]{2^{16}}$.

5.38.* Наведіть приклад такого многочлена із цілими коефіцієнтами, що число $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ є його коренем.

5.39.* Доведіть, що число $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}$ є ірраціональним.

5.40.* Доведіть рівність

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{6}}}}}}_{10\ \text{радикалів}}=\sqrt[1024]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[1024]{2-\sqrt{3}}.$$

6. Степінь з раціональним показником та його властивості

Нагадаємо означення степеня з натуральним показником:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{множників}},\quad n\in\mathbb{N},\quad n>1;$$

$$a^1=a.$$

Ви знаєте, що степінь з натуральним показником має такі властивості:

1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$;

2) $a^m:a^n=a^{m-n}$, $a\neq 0$, $m>n$;

3) $(a^m)^n=a^{mn}$;

4) $(ab)^n=a^nb^n$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$, $b\neq 0$.

Пізніше ви ознайомилися з означеннями степеня з нульовим показником і степеня із цілим від'ємним показником:

$$a^0=1,\ a\neq 0;$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},\ a\neq 0,\ n\in\mathbb{N}.$$

Ці означення дуже вдалі: при такому підході всі п'ять властивостей степеня з натуральним показником залишилися справедливими й для степеня із цілим показником.

Введемо поняття степеня з дробовим показником, тобто степеня a^r, показник якого є раціональним числом виду $r=\dfrac{m}{n}$, де $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, $n>1$. Бажано зробити це так, щоб степеню з дробовим показником залишилися притаманними всі властивості степеня із цілим показником. Підказкою для потрібного означення може слугувати такий приклад.

Позначимо через x шукане значення степеня $2^{\frac{2}{3}}$. Ураховуючи властивість $(a^m)^n = a^{mn}$, можна записати: $x^3 = \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 2^2$. Отже, x — це кубічний корінь із числа 2^2, тобто $x = \sqrt[3]{2^2}$. Таким чином, $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2}$.

Ці міркування підказують, що доцільно прийняти таке означення.

Означення. Степенем додатного числа a з раціональним показником r, поданим у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають число $\sqrt[n]{a^m}$, тобто

$$\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Наприклад, $5^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{5^3}$, $3^{-\frac{1}{5}} = 3^{\frac{-1}{5}} = \sqrt[5]{3^{-1}}$, $0{,}4^{0{,}3} = 0{,}4^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{0{,}4^3}$.

Зауважимо, що значення степеня a^r, де r — раціональне число, не залежить від того, у вигляді якого дробу подано число r. Це можна показати, використовуючи рівності $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ і $a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Степінь з основою, яка дорівнює нулю, означають тільки для додатного раціонального показника.

Означення. $\mathbf{0^{\frac{m}{n}} = 0}$**, де** $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

Звертаємо увагу, що, наприклад, запис $0^{-\frac{1}{2}}$ не має змісту.

Наголосимо, що в означеннях не йдеться про степінь $a^{\frac{m}{n}}$ для $a < 0$, наприклад, вираз $(-2)^{\frac{1}{3}}$ залишився невизначеним. Разом з тим вираз $\sqrt[3]{-2}$ має зміст. Виникає природне запитання: чому б не вважати, що $\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}}$? Покажемо, що така домовленість призвела б до суперечності:

$$\sqrt[3]{-2} = (-2)^{\frac{1}{3}} = (-2)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-2)^2} = \sqrt[6]{4}.$$

Отримали, що від'ємне число $\sqrt[3]{-2}$ дорівнює додатному числу $\sqrt[6]{4}$.

Функцію, яку можна задати формулою $y = x^r$, $r \in \mathbb{Q}$, називають **степеневою функцією з раціональним показником.**

Якщо нескоротний дріб $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є додатним числом, то областю визначення функції $y = x^{\frac{m}{n}}$ є проміжок $[0; +\infty)$; а якщо цей дріб — від'ємне число, то проміжок $(0; +\infty)$.

Функція $y = x^{\frac{1}{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$, нічим не відрізняється від функції $y = \sqrt[2k]{x}$. Функції $y = x^{\frac{1}{2k+1}}$ і $y = \sqrt[2k+1]{x}$, $k \in \mathbb{N}$, мають різні області визначення. Так, на проміжку $[0; +\infty)$ обидві ці функції збігаються, але на проміжку $(-\infty; 0)$ визначена лише функція $y = \sqrt[2k+1]{x}$.

На рисунку 6.1 зображено графіки функцій $y = x^{\frac{1}{2}}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{4}}$.

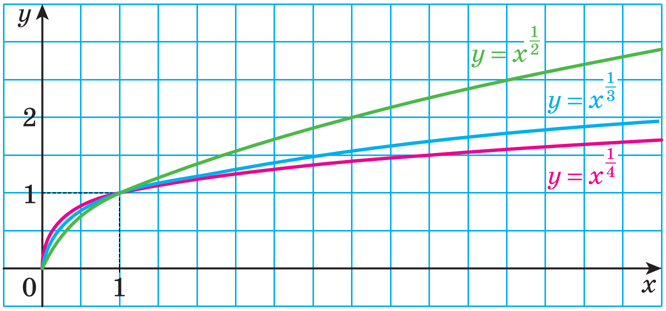


Рис. 6.1

Покажемо, що властивості степеня із цілим показником залишаються справедливими й для степеня з довільним раціональним показником.

Теорема 6.1 (добуток степенів). ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність***

$$\boxed{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$$

Доведення. Запишемо раціональні числа p і q у вигляді дробів з однаковими знаменниками: $p = \frac{m}{n}$, $q = \frac{k}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Маємо: $a^p \cdot a^q = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^k} =$

$$= \sqrt[n]{a^{m+k}} = a^{\frac{m+k}{n}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{n}} = a^{p+q}. ◄$$

Наслідок. ***Для будь-якого $a > 0$ і будь-якого раціонального числа p виконується рівність***

$$\boxed{a^{-p} = \frac{1}{a^p}}$$

Доведення. Застосовуючи теорему 6.1, запишемо: $a^{-p} \cdot a^p = a^{-p+p} = a^0 = 1$. Звідси $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. ◄

Теорема 6.2 (частка степенів). ***Для будь-якого $a > 0$ та будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність***

$$\boxed{a^p : a^q = a^{p-q}}$$

Доведення. Застосовуючи теорему 6.1, запишемо: $a^q \cdot a^{p-q} = a^{q+p-q} = a^p$. Звідси $a^{p-q} = a^p : a^q$. ◄

Теорема 6.3 (степінь степеня). ***Для будь-якого $a > 0$ та будь-яких раціональних чисел p і q виконується рівність***

$$\boxed{(a^p)^q = a^{pq}}$$

Доведення. Нехай $p = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, і $q = \frac{s}{k}$, $s \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$. Маємо: $(a^p)^q = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{s}{k}} = \sqrt[k]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^s} = \sqrt[k]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s} = \sqrt[k]{\sqrt[n]{a^{ms}}} =$

$$= \sqrt[kn]{a^{ms}} = a^{\frac{ms}{kn}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{s}{k}} = a^{pq}. ◄$$

Теорема 6.4 (степінь добутку та степінь частки). ***Для будь-яких $a > 0$ і $b > 0$ та будь-якого раціонального числа p виконуються рівності:***

$$\boxed{(ab)^p = a^p b^p}$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}}$$

Доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік функції $f(x) = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}$.

Розв'язання. Областю визначення функції f є множина $(0; +\infty)$. Дану функцію можна задати такими умовами: $f(x) = x$, $D(f) = (0; +\infty)$. Графік функції зображено на рисунку 6.2. ◄

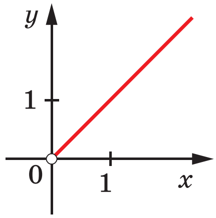


Рис. 6.2

Розглянемо приклади, у яких виконуються тотожні перетворення виразів, що містять степені з раціональним показником.

ПРИКЛАД 2 Скоротіть дріб: 1) $\dfrac{b^{\frac{5}{6}} + 3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}} - 9c^{\frac{1}{2}}}$; 2) $\dfrac{32^{\frac{1}{3}} - 16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}}$.

Розв'язання. 1) Розклавши чисельник і знаменник дробу на множники, отримуємо:

$$\frac{b^{\frac{5}{6}} + 3b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{4}}}{b^{\frac{2}{3}} - 9c^{\frac{1}{2}}} = \frac{b^{\frac{1}{2}}\left(b^{\frac{1}{3}} + 3c^{\frac{1}{4}}\right)}{\left(b^{\frac{1}{3}} - 3c^{\frac{1}{4}}\right)\left(b^{\frac{1}{3}} + 3c^{\frac{1}{4}}\right)} = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{3}} - 3c^{\frac{1}{4}}}.$$

2) Маємо: $\dfrac{32^{\frac{1}{3}} - 16^{\frac{1}{3}}}{4^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{16^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right)}{2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} - 1\right)} = \dfrac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \left(\dfrac{16}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 8^{\frac{1}{3}} = 2.$ ◄

ВПРАВИ

6.1.° Знайдіть значення виразу:

1) $4^{\frac{1}{2}}$; 2) $0{,}216^{-\frac{1}{3}}$; 3) $27^{\frac{4}{3}}$; 4) $32^{-0{,}2}$.

6.2.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $8^{\frac{1}{3}}$; 2) $10\,000^{\frac{1}{4}}$; 3) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$; 4) $0{,}125^{-\frac{2}{3}}$?

6.3.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = x^{\frac{5}{6}}$; 2) $y = (x - 3)^{2{,}6}$; 3) $y = (x^2 - 6x - 7)^{-\frac{1}{9}}$.

6.4.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = x^{-\frac{2}{3}}$; 2) $y = (x + 1)^{-\frac{7}{12}}$; 3) $y = (x^2 - x - 30)^{\frac{4}{15}}$.

6.5.° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5}$; 2) $8^{\frac{1}{2}} : 2^{\frac{1}{2}}$; 3) $36^{0,4} \cdot 6^{1,2}$; 4) $\left(4^{-\frac{1}{8}}\right)^{1,6} \cdot 16^{0,6}$.

6.6.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $5^{3,4} \cdot 5^{-1,8} \cdot 5^{-2,6}$; 2) $(7^{-0,7})^8 : 7^{-7,6}$; 3) $\left(9^{\frac{3}{7}}\right)^{4\frac{2}{3}}$; 4) $\left(2\frac{6}{7}\right)^{2,5} \cdot 1,4^{2,5}$?

6.7.° Відомо, що a — додатне число. Подайте a у вигляді: 1) куба; 2) восьмого степеня.

6.8.° Відомо, що b — додатне число. Подайте у вигляді куба вираз:

1) $b^{\frac{1}{2}}$; 2) $b^{\frac{1}{3}}$; 3) $b^{-1,8}$; 4) $b^{\frac{7}{11}}$.

6.9.° Розкрийте дужки:

1) $(a^{0,5} - 3b^{0,3})(2a^{0,5} + b^{0,3})$;

2) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^2$;

3) $(b^{0,4} + 3)^2 - 6b^{0,4}$;

4) $\left(a^{\frac{1}{3}} + a^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{5}{6}} + a\right)$;

5) $\left(a^{\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{6}} - b^{\frac{1}{6}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)$;

6) $\left(x^{\frac{2}{9}} - 1\right)\left(x^{\frac{4}{9}} + x^{\frac{2}{9}} + 1\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + 1\right)$.

6.10.° Розкрийте дужки:

1) $\left(a^{\frac{1}{3}} - 5b^{-\frac{1}{4}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + 5b^{-\frac{1}{4}}\right)$;

2) $\left(b^{\frac{4}{3}} - b^{-\frac{2}{3}}\right)^2$;

3) $\left(x^{\frac{1}{6}} + 2\right)\left(x^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{1}{6}} + 4\right)$;

4) $\left(a^{\frac{1}{8}} - 1\right)\left(a^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(a^{\frac{1}{8}} + 1\right)$.

6.11.° Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a - 4b}{a^{0,5} + 2b^{0,5}}$;

2) $\dfrac{a - b}{ab^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}b}$;

3) $\dfrac{4c^{\frac{2}{3}} - 12c^{\frac{1}{3}}d^{\frac{1}{3}} + 9d^{\frac{2}{3}}}{2c^{\frac{1}{3}} - 3d^{\frac{1}{3}}}$;

4) $\dfrac{m^{\frac{1}{2}} - n^{\frac{1}{2}}}{m^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}}$;

5) $\dfrac{a^{\frac{3}{4}} + 7a^{\frac{1}{2}}}{a - 49a^{\frac{1}{2}}}$;

6) $\dfrac{30^{\frac{1}{5}} - 6^{\frac{1}{5}}}{10^{\frac{1}{5}} - 2^{\frac{1}{5}}}$.

6.12.° Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{a + 2a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + 2}$;

2) $\dfrac{a - b^2}{a - a^{\frac{1}{2}}b}$;

3) $\dfrac{x^{3,5}y^{2,5} - x^{2,5}y^{3,5}}{x + 2x^{0,5}y^{0,5} + y}$;

4) $\dfrac{a - 125}{a^{\frac{2}{3}} - 25}$;

5) $\dfrac{m^{\frac{7}{6}} - 36m^{\frac{5}{6}}}{m^{\frac{1}{2}} - 6m^{\frac{1}{3}}}$;

6) $\dfrac{24^{\frac{1}{4}} - 8^{\frac{1}{4}}}{6^{\frac{1}{4}} - 2^{\frac{1}{4}}}$.

6.13.° При яких значеннях a виконується рівність:

1) $\left((a-2)^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a-2$;   2) $\left((a-2)^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3} = a-2$?

6.14.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3$;   2) $y = \left((x-2)^{\frac{1}{4}}\right)^4$;   3) $y = x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{6}}$.

6.15.° Обчисліть значення виразу:

1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (0{,}81)^{-0{,}5}$;   3) $\frac{5^{\frac{3}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{12}}}{9^{\frac{1}{6}}} \cdot \frac{8^{\frac{1}{4}}}{5^{\frac{5}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{3}}}$;

2) $16^{\frac{1}{8}} \cdot 8^{-\frac{5}{6}} \cdot 4^{1{,}5}$;   4) $\left(72^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{4}{3}} : 36^{-\frac{1}{6}}$.

6.16.° Знайдіть значення виразу:

1) $\left(343^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{3}{8}}\right)^{\frac{4}{3}}$;   3) $\frac{32^{0{,}24} \cdot 4^{0{,}7}}{64^{0{,}6} \cdot 16^{0{,}25}}$;

2) $10^{\frac{1}{4}} \cdot 40^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$;   4) $\frac{12^{\frac{1}{2}}}{7^{\frac{2}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{6}}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{5}{3}}}{8^{\frac{1}{2}}}$.

6.17.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{-\frac{2}{3}} = 0{,}04$;   2) $(x-2)^{\frac{5}{2}} = 32$;   3) $(x^2-2x)^{-\frac{1}{4}} = -1$.

6.18.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{-1{,}5} = 27$;   2) $(x-1)^{-\frac{2}{5}} = 100$;   3) $(x-5)^{\frac{3}{7}} = 0$.

6.19.° Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{a^{0{,}5}+2}{a+2a^{0{,}5}+1} - \frac{a^{0{,}5}-2}{a-1}\right) : \frac{a^{0{,}5}}{a^{0{,}5}+1} = \frac{2}{a-1}$;

2) $\frac{(a-b)^2}{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^2-b^2}{\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)} = 2a^{\frac{1}{2}} - 2b^{\frac{1}{2}}$.

6.20.° Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{m^2+n^2}{m^{\frac{3}{2}}+mn^{\frac{1}{2}}} - \frac{m+n}{m^{\frac{1}{2}}+n^{\frac{1}{2}}}\right) \cdot \frac{m}{n} = n^{\frac{1}{2}} - m^{\frac{1}{2}}$;

2) $\left(\frac{a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}}{a^{-1}-b^{-1}} - \frac{1}{a^{-\frac{1}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}}\right) : \frac{a^{-\frac{2}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}}{a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}$.

6.21.• Спростіть вираз:

1) $\dfrac{a^{\frac{7}{3}}-2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{2}{3}}+ab^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}-ab^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{2}{3}}b}:a^{\frac{1}{3}}$; 2) $\dfrac{\left(x^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{xy}+4y^{\frac{2}{3}}\right)}{\left(\sqrt[3]{x^{4}}-8y\sqrt[3]{x}\right):\sqrt[3]{xy}}\cdot\left(2-\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}\right)$.

6.22.• Спростіть вираз $\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{4}}y^{-\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}}$.

6.23.• Обчисліть добуток $x^{1,2}\cdot x^{1,3}\cdot x^{1,4}\cdot x^{1,5}\cdot\ldots\cdot x^{8,8}$, якщо $x=\sqrt[5]{2}$.

6.24.• Обчисліть добуток $x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot x^{\frac{1}{8}}\cdot\ldots\cdot x^{\frac{1}{64}}$, якщо $x=2^{-\frac{64}{9}}$.

6.25.•• Спростіть вираз $\left(a^{0,125}+b^{0,75}\right)\left(a^{0,25}+b^{1,5}\right)\left(a^{0,5}+b^{3}\right)\left(a+b^{6}\right)$.

6.26.•• Спростіть вираз $a^{0,2}+a^{0,5}+a^{0,8}+a^{1,1}+\ldots+a^{7,1}$.

6.27.•• Спростіть вираз $b^{12,7}-b^{12,6}+b^{12,5}-b^{12,4}+\ldots+b^{3,3}$.

7. Ірраціональні рівняння

Нагадаємо основні відомості про рівносильність рівнянь.

Означення. Областю визначення рівняння $f(x)=g(x)$ називають множину $D(f)\cap D(g)$.

Кожний корінь рівняння належить його області визначення. Цей факт ілюструє діаграма Ейлера (рис. 7.1).

Рис. 7.1

Означення. Рівняння $f_1(x)=g_1(x)$ і $f_2(x)=g_2(x)$ називають рівносильними, якщо множини їхніх коренів рівні.

Якщо будь-який корінь рівняння $f_1(x)=g_1(x)$, що належить множині M, є коренем рівняння $f_2(x)=g_2(x)$, а будь-який корінь рівняння $f_2(x)=g_2(x)$, що належить множині M, є коренем рівняння $f_1(x)=g_1(x)$, то такі два рівняння називають **рівносильними на множині** M.

Наприклад, рівняння $x^2-1=0$ і $x+1=0$ рівносильні на множині $(-\infty;\ 0)$.

Теорема 7.1. ***Якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Теорема 7.2. ***Якщо обидві частини рівняння помножити (поділити) на одне й те саме відмінне від нуля число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Означення. Якщо множина розв'язків першого рівняння є підмножиною множини розв'язків другого рівняння, то друге рівняння називають наслідком першого рівняння.

На рисунку 7.2 означення рівняння-наслідку проілюстровано за допомогою діаграми Ейлера.

Зазначимо, що коли два рівняння є рівносильними, то кожне з них є наслідком другого.

Ті корені рівняння-наслідку, які не є коренями даного рівняння, називають **сторонніми коренями** даного рівняння.

Рис. 7.2

Якщо під час розв'язування рівняння рівносильність було порушено й відбувся перехід до рівняння-наслідку, то отримані при цьому сторонні корені, як правило, можна виявити за допомогою перевірки.

Розглянемо функцію $y = x^3$. Вона є зростаючою, а отже, оборотною. Через це функція $y = x^3$ кожного свого значення набуває тільки один раз. Іншими словами, із рівності $x_1^3 = x_2^3$ випливає, що $x_1 = x_2$. Оскільки з рівності $x_1 = x_2$ випливає, що $x_1^3 = x_2^3$, то можна стверджувати таке: *якщо обидві частини рівняння піднести до куба, то отримаємо рівняння, рівносильне даному*.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\sqrt[7]{x^2 - 2} = \sqrt[7]{x}$.

Розв'язання. Піднесемо обидві частини даного рівняння до сьомого степеня. Отримаємо рівносильне рівняння:

$$\left(\sqrt[7]{x^2 - 2}\right)^7 = \left(\sqrt[7]{x}\right)^7.$$

Звідси

$$x^2 - 2 = x;$$
$$x^2 - x - 2 = 0;$$
$$x_1 = -1, \ x_2 = 2.$$

Відповідь: -1; 2. ◄

Рівняння, розглянуте в прикладі 1, містить змінну під знаком кореня. Такі рівняння називають **ірраціональними**.

Ось ще приклади ірраціональних рівнянь: $\sqrt{x-3}=2$; $\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}+1=0$; $\sqrt{3-x}=\sqrt[3]{2+x}$.

Оскільки функція $y=x^{2k-1}$, $k\in\mathbb{N}$, є оборотною, то міркування, використані під час розв'язування прикладу 1, можна узагальнити у вигляді такої теореми.

Теорема 7.3. ***Якщо обидві частини рівняння піднести до непарного степеня, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.***

Доведення. Покажемо, що рівняння

$$f(x)=g(x) \quad (1)$$

і

$$(f(x))^{2k-1}=(g(x))^{2k-1},\ k\in\mathbb{N} \quad (2)$$

є рівносильними.

Нехай число α — корінь рівняння (1). Тоді маємо правильну числову рівність $f(\alpha)=g(\alpha)$. Звідси можна записати:

$$(f(\alpha))^{2k-1}=(g(\alpha))^{2k-1}.$$

Це означає, що число α є коренем рівняння (2).

Нехай число β — корінь рівняння (2). Тоді отримуємо, що $(f(\beta))^{2k-1}=(g(\beta))^{2k-1}$. Оскільки функція $y=x^{2k-1}$, $k\in\mathbb{N}$, є оборотною, то $f(\beta)=g(\beta)$. Отже, число β — корінь рівняння (1).

Ми показали, що кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2) і, навпаки, кожний корінь рівняння (2) є коренем рівняння (1). Це означає, що рівняння (1) і (2) рівносильні. ◄

Розв'язуючи приклад 1, ми спрощували вирази виду $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n$, де n — непарне натуральне число. Розглянемо випадок, коли n — парне натуральне число.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{3x+4}\right)^2=\left(\sqrt{x-2}\right)^2$. (3)

Розв'язання. Природно замінити це рівняння таким:

$$3x+4=x-2. \quad (4)$$

Звідси $x=-3$.

Але перевірка показує, що число -3 не є коренем початкового рівняння. Отже, рівняння (3) не має коренів. Причина появи стороннього кореня полягає в тому, що застосування формули $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$ призводить до розширення області визначення рівняння. Таким чином, рівняння (4) є наслідком рівняння (3).

Ще однією причиною появи сторонніх коренів під час розв'язування ірраціональних рівнянь є необоротність функції $y=x^{2k}$,

$k \in \mathbb{N}$. Це означає, що з рівності $x_1^{2k} = x_2^{2k}$ не обов'язково випливає, що $x_1 = x_2$. Наприклад, $(-2)^4 = 2^4$, але $-2 \neq 2$. Водночас із рівності $x_1 = x_2$ випливає рівність $x_1^{2k} = x_2^{2k}$.

Наведені міркування підказують, що справедливою є така теорема.

Теорема 7.4. ***При піднесенні обох частин рівняння до парного степеня отримуємо рівняння, яке є наслідком даного.***

Скориставшись ідеєю доведення теореми 7.3, доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4+3x} = x$.

Розв'язання. Підносячи обидві частини рівняння до квадрата, отримаємо рівняння, яке є наслідком даного:

$$4 + 3x = x^2;$$
$$x^2 - 3x - 4 = 0;$$
$$x_1 = -1,\ x_2 = 4.$$

Перевірка показує, що число -1 є стороннім коренем, а число 4 задовольняє дане рівняння.

Відповідь: 4. ◄

Коли йдеться про перевірку як етап розв'язування рівняння, неможливо уникнути проблеми її технічної реалізації. Наприклад, число $\dfrac{-2+6\sqrt{11}}{7}$ є коренем рівняння $\sqrt{2x-5} + \sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1}$. Проте щоб у цьому переконатися, потрібно виконати значну обчислювальну роботу.

Для подібних ситуацій можливий інший шлях розв'язування — метод рівносильних перетворень.

Теорема 7.5. ***Рівняння виду $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ рівносильне системі***

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Скориставшись ідеєю доведення теореми 7.3, доведіть цю теорему самостійно.

Зауваження. Рівняння $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ також рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Вибір відповідної системи, як правило, пов'язаний з тим, яку з нерівностей, $f(x) \geqslant 0$ або $g(x) \geqslant 0$, розв'язати легше.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - 3x} = \sqrt{x - 1}$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^2 - 3x = x - 1, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 + \sqrt{3}, \\ x = 2 - \sqrt{3}, \end{array}\right. \\ x \geqslant 1; \end{cases}$ $x = 2 + \sqrt{3}$.

Відповідь: $2 + \sqrt{3}$. ◄

Теорема 7.6. ***Рівняння виду*** $\sqrt{f(x)} = g(x)$ ***рівносильне системі***

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^2, \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Скориставшись ідеєю доведення теореми 7.3, доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x + 7} = x - 3$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x + 7 = (x - 3)^2, \\ x - 3 \geqslant 0. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x^2 - 7x + 2 = 0, \\ x \geqslant 3; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{7 + \sqrt{41}}{2}, \\ x = \dfrac{7 - \sqrt{41}}{2}, \end{array}\right. \\ x \geqslant 3; \end{cases}$ $x = \dfrac{7 + \sqrt{41}}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{7 + \sqrt{41}}{2}$. ◄

Теореми 7.5 і 7.6 можна узагальнити, керуючись таким твердженням: якщо $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то з рівності $a^{2k} = b^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, випливає, що $a = b$.

Теорема 7.7. ***Якщо для будь-якого*** $x \in M$ ***виконуються нерівності*** $f(x) \geqslant 0$ ***і*** $g(x) \geqslant 0$, ***то рівняння*** $f(x) = g(x)$ ***і*** $(f(x))^{2k} = (g(x))^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, ***рівносильні на множині*** M.

Скориставшись ідеєю доведення теореми 7.3, доведіть цю теорему самостійно.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-3}+\sqrt{6x+1}=4.$

Розв'язання. Областю визначення цього рівняння є множина $M=\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$. На цій множині обидві частини даного рівняння набувають невід'ємних значень, тому дане рівняння на множині M рівносильне рівнянню

$$\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{6x+1}\right)^2=4^2.\text{ Звідси}$$

$$2x-3+2\sqrt{2x-3}\sqrt{6x+1}+6x+1=16;\quad \sqrt{2x-3}\sqrt{6x+1}=9-4x.$$

Ліва частина останнього рівняння на множині $M=\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$ набуває невід'ємних значень. Тоді права частина, тобто $9-4x$, має також бути невід'ємною. Звідси $9-4x\geqslant 0$; $x\leqslant\frac{9}{4}$, тому на множині $M_1=\left[\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right]$ обидві частини рівняння $\sqrt{2x-3}\sqrt{6x+1}=9-4x$ набувають невід'ємних значень. Отже, за теоремою 7.7 це рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases}(2x-3)(6x+1)=(9-4x)^2,\\ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{9}{4};\end{cases}\qquad \begin{cases}x^2-14x+21=0,\\ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{9}{4};\end{cases}\qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=7-2\sqrt{7},\\ x=7+2\sqrt{7},\end{array}\right.\\ \frac{3}{2}\leqslant x\leqslant\frac{9}{4};\end{cases}$$

$$x=7-2\sqrt{7}.$$

Відповідь: $7-2\sqrt{7}$. ◄

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}.$

Розв'язання. Областю визначення даного рівняння є множина $M=\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$. Обидві частини даного рівняння на цій множині набувають невід'ємних значень, тому дане рівняння на множині M рівносильне рівнянню $\left(\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}\right)^2=\left(\sqrt{2x+1}\right)^2$.

Звідси $2\sqrt{2x-5}\sqrt{x+2}=4-x.$

Скориставшись теоремою 7.7, отримуємо: $\begin{cases}4(2x-5)(x+2)=(4-x)^2,\\ \frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$

Звідси $\begin{cases} 7x^2 + 4x - 56 = 0, \\ \frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 4; \end{cases}$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = \frac{-2 - 6\sqrt{11}}{7}, \\ x = \frac{-2 + 6\sqrt{11}}{7}, \end{array}\right. \\ \frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 4. \end{array}\right.$

Відповідь: $\frac{-2 + 6\sqrt{11}}{7}$. ◄

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{4x^2 + 9x + 5} - \sqrt{2x^2 + x - 1} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Розв'язання. Розкладемо квадратні тричлени, які стоять під радикалами, на множники:

$$\sqrt{(x+1)(4x+5)} - \sqrt{(x+1)(2x-1)} = \sqrt{(x-1)(x+1)}.$$

Тепер важливо не зробити поширену помилку, яка полягає в застосуванні теореми про корінь із добутку в такому вигляді: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Насправді записана формула має місце лише для $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, а якщо $a \leqslant 0$ і $b \leqslant 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$.

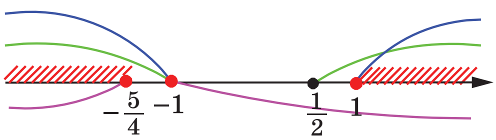


Рис. 7.3

Оскільки областю визначення даного рівняння є множина $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right] \cup [1; +\infty) \cup \{-1\}$ (рис. 7.3), то воно рівносильне сукупності двох систем та одного рівняння.

1) $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ \sqrt{x+1}\sqrt{4x+5} - \sqrt{x+1}\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1}\sqrt{x+1}; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 2\sqrt{2x-1}\sqrt{x-1} = x + 7; \end{cases}$

$\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 4(2x-1)(x-1) = x^2 + 14x + 49; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ 7x^2 - 26x - 45 = 0; \end{cases}$ $\left\{\begin{array}{l} x \geqslant 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -\frac{9}{7}; \end{array}\right. \end{array}\right.$ $x = 5.$

2) $\begin{cases} x \leqslant -\dfrac{5}{4}, \\ \sqrt{-x-1}\sqrt{-4x-5} - \sqrt{-x-1}\sqrt{-2x+1} = \sqrt{-x+1}\sqrt{-x-1}; \end{cases}$

$\begin{cases} x \leqslant -\dfrac{5}{4}, \\ \sqrt{-2x+1} + \sqrt{-x+1} = \sqrt{-4x-5}; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant -\dfrac{5}{4}, \\ 2\sqrt{-2x+1}\sqrt{-x+1} = -x-7; \end{cases}$

$\begin{cases} x \leqslant -7, \\ 4(2x-1)(x-1) = x^2 + 14x + 49; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant -7, \\ 7x^2 - 26x - 45 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant -7, \\ \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -\dfrac{9}{7}. \end{array}\right. \end{cases}$

Зрозуміло, що ця система розв'язків не має.

3) $x + 1 = 0$; $x = -1$.

Відповідь: -1; 5. ◄

ВПРАВИ

7.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[7]{2x-1} = \sqrt[7]{3-x}$;
2) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{1-2x}$;
3) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-3}$;
4) $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2+4x-16}$.

7.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt[4]{x+3} = \sqrt[4]{2x-3}$;
2) $\sqrt{4x-5} = \sqrt{1-x}$;
3) $\sqrt[5]{x^2-25} = \sqrt[5]{2x+10}$;
4) $\sqrt{x^2-36} = \sqrt{2x-1}$.

7.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2-x} = x$;
2) $\sqrt{x+1} = x-1$;
3) $\sqrt{3x-2} = x$;
4) $\sqrt{x^2-1} = 3-2x$;
5) $x - \sqrt{2x^2+x-21} = 3$;
6) $x + 2 + \sqrt{8-3x-x^2} = 0$.

7.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{10-3x} = -x$;
2) $\sqrt{2x^2+5x+4} = 2x+2$;
3) $\sqrt{x+2} = 1-x$;
4) $x - \sqrt{3x^2-11x-20} = 5$.

7.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-1}\sqrt{x+4} = 6$;
2) $\sqrt{x}\sqrt{1-x} = x$;
3) $\dfrac{x-2}{\sqrt{2x-7}} = \sqrt{x-4}$;
4) $\sqrt{x-9} + \sqrt{x} = \dfrac{36}{\sqrt{x-9}}$.

7.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+2}\sqrt{x+8}=4;$
2) $x-1=\sqrt{2x-5}\sqrt{x+1};$
3) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{3x+1};$
4) $\dfrac{12}{\sqrt{x+10}}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{x+10}.$

7.7.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{(2x+3)(x-4)}=x-4;$
2) $\sqrt{(x-2)(2x-5)}+2=x;$
3) $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12;$
4) $(x+1)\sqrt{x^2-5x+5}=x+1.$

7.8.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{(3x-1)(4x+3)}=3x-1;$
2) $(x-1)\sqrt{x^2-3x-3}=5x-5.$

7.9.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1;$
2) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}}=x-1.$

7.10.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2;$
2) $\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}=1;$
3) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}=1;$
4) $2\sqrt{2-x}-\sqrt{7-x}=1.$

7.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3x-5}=2;$
2) $\sqrt{x+11}-\sqrt{2x+1}=2.$

7.12.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}=3;$
2) $\sqrt{x-7}+\sqrt{x-1}=4;$
3) $\sqrt{3x-1}+\sqrt{x+3}=2;$
4) $\sqrt{13-4x}+\sqrt{x+3}=5.$

7.13.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+5}=3;$
2) $\sqrt{5x+1}+\sqrt{7-x}=6.$

7.14.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x};$
2) $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{x-1};$
3) $2\sqrt{3x-1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{x-9};$
4) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}.$

7.15.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3x+7}=\sqrt{8-x};$
2) $\sqrt{6x-11}-\sqrt{x-2}=\sqrt{x+3}.$

7.16.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}}=6;$
2) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1;$
3) $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}=4.$

7.17.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=6;$
2) $\sqrt{x+6+2\sqrt{x+5}}-\sqrt{x+6-2\sqrt{x+5}}=2.$

7.18.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2+2x-8}=\sqrt{x^2-6x+8}$;

2) $\sqrt{2x^2+5x+2}-\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{3x+6}$.

7.19.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2-6x+8}=\sqrt{x^2-11x+18}$;

2) $\sqrt{x^2-3x-10}+\sqrt{x^2+3x+2}=\sqrt{x^2+8x+12}$.

7.20.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=a-x$.

7.21.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння $2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}=a-x$.

7.22.* При яких значеннях параметра a рівняння $ax-1=\sqrt{8x-x^2-15}$ має єдиний розв'язок?

7.23.* При яких значеннях параметра a рівняння $\sqrt{4x-x^2-3}=x-a$ має єдиний розв'язок?

8. Різні прийоми розв'язування ірраціональних рівнянь та їхніх систем

У попередньому пункті ви ознайомилися з методами розв'язування ірраціональних рівнянь, заснованими на піднесенні обох частин рівняння до одного й того самого степеня.

Розширимо арсенал прийомів розв'язування ірраціональних рівнянь.

Насамперед звернемося до методу заміни змінної.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $x^2+3x-18+4\sqrt{x^2+3x-6}=0$.

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x^2+3x-6}=t$. Тоді $x^2+3x-18=t^2-12$, і дане рівняння набуває вигляду $t^2-12+4t=0$. Звідси $\left[\begin{array}{l} t=-6, \\ t=2. \end{array}\right.$

Оскільки $t \geqslant 0$, то підходить лише $t=2$. Отже, дане рівняння рівносильне такому: $\sqrt{x^2+3x-6}=2$. Звідси $x^2+3x-6=4$; $x=-5$ або $x=2$.

Відповідь: -5; 2. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=2x+2\sqrt{x^2-16}-12.$$

Розв'язання. Нехай $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=t$. Тоді, підносячи до квадрата обидві частини останньої рівності, отримаємо:

$$2x+2\sqrt{x^2-16}=t^2.$$

Тепер дане рівняння можна переписати так: $t=t^2-12$. Звідси $t=4$ або $t=-3$.

Очевидно, що рівняння $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=-3$ не має розв'язків. Отже, початкове рівняння рівносильне такому: $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}=4$. Далі,

$$\begin{cases} x \geqslant 4, \\ 2x+2\sqrt{x^2-16}=16; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant 4, \\ \sqrt{x^2-16}=8-x; \end{cases} \quad \begin{cases} 4 \leqslant x \leqslant 8, \\ x^2-16=64-16x+x^2; \end{cases}$$

$x=5$.

Відповідь: 5. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $2(x+1)-x\sqrt{x+1}-x^2=0$.

Розв'язання. Оскільки число 0 не є коренем цього рівняння, то рівняння $\frac{2(x+1)}{x^2}-\frac{\sqrt{x+1}}{x}-1=0$ рівносильне даному. Нехай $\frac{\sqrt{x+1}}{x}=t$, тоді $2t^2-t-1=0$. Звідси $t=1$ або $t=-\frac{1}{2}$. Маємо:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{x+1}}{x}=1, \\ \frac{\sqrt{x+1}}{x}=-\frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ x+1=x^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x<0, \\ 4x+4=x^2; \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \\ x=2-2\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $2-2\sqrt{2}$. ◄

Метод заміни змінних є ефективним і для розв'язування систем ірраціональних рівнянь.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{xy+22}=5, \\ \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{xy+22}=3. \end{cases}$

Розв'язання. Нехай $\sqrt[4]{x+y}=a$, $\sqrt[4]{xy+22}=b$, $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Тоді дана система набуває вигляду $\begin{cases} a^2+b^2=5, \\ a+b=3. \end{cases}$ Далі маємо:

$\begin{cases}(a+b)^2-2ab=5,\\ a+b=3;\end{cases}$ $\begin{cases}ab=2,\\ a+b=3.\end{cases}$ Звідси $\begin{cases}a=1,\\ b=2\end{cases}$ або $\begin{cases}a=2,\\ b=1.\end{cases}$

Отже, дана система рівносильна сукупності двох систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[4]{x+y}=1,\\ \sqrt[4]{xy+22}=2,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[4]{x+y}=2,\\ \sqrt[4]{xy+22}=1,\end{cases}\end{array}\right. \text{ звідси } \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=1,\\ xy=-6,\end{cases}\\ \begin{cases}x+y=16,\\ xy=-21.\end{cases}\end{array}\right.$$

Розв'язавши останні дві системи, отримуємо відповідь.

Відповідь: (3; −2), (−2; 3), $\left(8+\sqrt{85};\,8-\sqrt{85}\right)$, $\left(8-\sqrt{85};\,8+\sqrt{85}\right)$. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння

$$\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3.$$

Розв'язання. Нехай $\sqrt[3]{2-x}=a$, $\sqrt[3]{7+x}=b$. Тоді

$\begin{cases}a^2+b^2-ab=3,\\ a^3+b^3=9;\end{cases}$ $\begin{cases}a^2+b^2-ab=3,\\ (a+b)(a^2+b^2-ab)=9;\end{cases}$ $\begin{cases}(a+b)^2-3ab=3,\\ a+b=3;\end{cases}$

$\begin{cases}ab=2,\\ a+b=3;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=1,\\ b=2,\end{cases}\\ \begin{cases}a=2,\\ b=1.\end{cases}\end{array}\right.$ Тепер можна записати: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt[3]{2-x}=1,\\ \sqrt[3]{7+x}=2,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt[3]{2-x}=2,\\ \sqrt[3]{7+x}=1;\end{cases}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-6.\end{array}\right.$

Відповідь: 1; −6. ◄

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x.$

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на вираз $\sqrt{1+x}-1$. Отримаємо рівняння-наслідок:

$x\left(\sqrt{1+x}+2x-5\right)=x\left(\sqrt{1+x}-1\right).$

Це рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l}x=0,\\ \sqrt{1+x}+2x-5=\sqrt{1+x}-1.\end{array}\right.$$

Розв'яжемо друге рівняння сукупності. Його наслідком буде рівняння $2x-5=-1$. Звідси $x=2$.

Залишилося виконати перевірку. Легко переконатися, що число 2 є коренем рівняння, а число 0 — ні.

Відповідь: 2. ◄

ВПРАВИ

8.1.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}-6=0$;

2) $\sqrt[3]{x}+3\sqrt[6]{x}=4$;

3) $2\sqrt{x+1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x+1}}$;

4) $x^2-x+9+\sqrt{x^2-x+9}=12$;

5) $\sqrt[3]{x^2-4x+4}-2\sqrt[3]{x-2}-3=0$;

6) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}-1}+\dfrac{3}{\sqrt[4]{x}+1}=2$;

7) $\sqrt{\dfrac{x+5}{x-1}}+7\sqrt{\dfrac{x-1}{x+5}}=8$;

8) $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

8.2.° Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $\sqrt[3]{x^2}+8=9\sqrt[3]{x}$;

2) $\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}=1$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}+1}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}+3}=1$;

4) $\sqrt[6]{9-6x+x^2}+2\sqrt[6]{3-x}-8=0$;

5) $x^2-x+\sqrt{x^2-x+4}=2$;

6) $\sqrt{\dfrac{3x+2}{2x-3}}+\sqrt{\dfrac{2x-3}{3x+2}}=2{,}5$.

8.3.• Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x^2-5x+16-3\sqrt{x^2-5x+20}=0$;

2) $x^2+4-5\sqrt{x^2-2}=0$;

3) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2=3x+7$;

4) $\sqrt{3x^2-9x-26}=12+3x-x^2$;

5) $2x^2+6x-3\sqrt{x^2+3x-3}=5$;

6) $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}+\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=72$.

8.4.• Розв'яжіть рівняння, використовуючи метод заміни змінної:

1) $x^2-4x-3\sqrt{x^2-4x+20}+10=0$;

2) $2\sqrt{x^2-3x+11}=4+3x-x^2$;

3) $\sqrt{2x^2-6x+40}=x^2-3x+8$;

4) $5x^2+10x+\sqrt{x^2+2x-15}=123$.

8.5.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ x+y+4\sqrt{xy}=37;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}=1,\\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=7;\end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ xy=8; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=4, \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=8; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}}=2, \\ x^2-8y^2=18-18y; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \sqrt{4-x+y}+\sqrt{9-2x+y}=7, \\ 2y-3x=12. \end{cases}$

8.6.• Розв’яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2, \\ xy=27; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2}, \\ x+y=5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3, \\ 2x+y=7. \end{cases}$

8.7.•• Розв’яжіть рівняння $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x$.

8.8.•• Розв’яжіть рівняння $x+\sqrt{(x+6)(x-2)}=2+\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}$.

8.9.•• Розв’яжіть рівняння $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

8.10.•• Розв’яжіть рівняння $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+5}}+\sqrt{2x+5}=2x$.

8.11.•• Розв’яжіть рівняння $4x^2+12x\sqrt{1+x}=27(1+x)$.

8.12.•• Розв’яжіть рівняння $6x^2-5x\sqrt{x+3}+x+3=0$.

8.13.•• Розв’яжіть рівняння $\sqrt[3]{(x+3)^2}+\sqrt[3]{(6-x)^2}-\sqrt[3]{(x+3)(6-x)}=3$.

8.14.•• Розв’яжіть рівняння $\sqrt[3]{(x+4)^2}+\sqrt[3]{(x-5)^2}+\sqrt[3]{(x+4)(x-5)}=3$.

8.15.•• Розв’яжіть рівняння $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$.

8.16.•• Розв’яжіть рівняння $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4$.

8.17.•• Розв’яжіть рівняння $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-1}=5$.

8.18.•• Розв’яжіть рівняння $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

8.19.•• Розв’яжіть рівняння $\sqrt{2-\sqrt{2-x}}=x$.

8.20.•• Розв’яжіть рівняння $\sqrt{6-\sqrt{6-x}}=x$.

8.21.•• Розв’яжіть рівняння:

1) $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x$;

2) $\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+10}-4\right)=x$.

8.22.•• Розв’яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2+3x-2}+\sqrt{x^2-x+1}=4x-3$;

2) $\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}+x^2+x-7\right)=x$.

9. Ірраціональні нерівності

Розглянемо теореми, за допомогою яких розв'язують основні типи ірраціональних нерівностей. Доведення цих теорем аналогічні доведенню теореми 7.3.

Теорема 9.1. ***Нерівність виду $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі***

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 - 3x + 1} \geqslant \sqrt{3x - 4}$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 1 \geqslant 3x - 4, \\ 3x - 4 \geqslant 0. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} x^2 - 6x + 5 \geqslant 0, \\ x \geqslant \frac{4}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \geqslant 5, \\ x \leqslant 1, \end{array}\right. \\ x \geqslant \frac{4}{3}; \end{cases} \quad x \geqslant 5.$$

Відповідь: $[5; +\infty)$. ◄

Теорема 9.2. ***Нерівність виду $\sqrt{f(x)} < g(x)$ рівносильна системі***

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} < x - 1$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 < (x-1)^2, \\ x - 1 > 0, \\ 2x^2 - 3x - 5 \geqslant 0. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} -2 < x < 3, \\ x > 1, \\ x \leqslant -1 \text{ або } x \geqslant 2{,}5. \end{cases}$$

Розв'язування цієї системи проілюстровано на рисунку 9.1. Отримуємо: $2{,}5 \leqslant x < 3$.

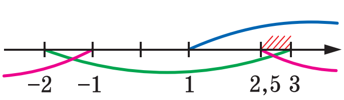


Рис. 9.1

Відповідь: $[2{,}5; 3)$. ◄

Теорема 9.3. ***Нерівність виду*** $\sqrt{f(x)} > g(x)$ ***рівносильна сукупності двох систем***

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2. \end{cases} \end{array}\right.$$

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x^2 + 7x + 12} > 6 - x$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем.

1) $\begin{cases} 6 - x < 0, \\ x^2 + 7x + 12 \geqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 6, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant -4, \\ x \geqslant -3; \end{array}\right. \end{cases}$ $x > 6.$

2) $\begin{cases} 6 - x \geqslant 0, \\ x^2 + 7x + 12 > (6 - x)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leqslant 6, \\ x > \dfrac{24}{19}; \end{cases}$ $\dfrac{24}{19} < x \leqslant 6.$

Відповідь: $\left(\dfrac{24}{19}; +\infty\right)$. ◄

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $(x - 3)\sqrt{x^2 + 4} \leqslant x^2 - 9$.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність у такому вигляді:

$$(x - 3)\left(\sqrt{x^2 + 4} - x - 3\right) \leqslant 0.$$

Ця нерівність рівносильна сукупності двох систем.

1) $\begin{cases} x - 3 \geqslant 0, \\ \sqrt{x^2 + 4} \leqslant x + 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x^2 + 4 \leqslant x^2 + 6x + 9; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \geqslant -\dfrac{5}{6}; \end{cases}$ $x \geqslant 3.$

2) $\begin{cases} x - 3 \leqslant 0, \\ \sqrt{x^2 + 4} \geqslant x + 3. \end{cases}$ Друга нерівність системи рівносильна сукупності $\left[\begin{array}{l} x + 3 < 0, \\ \begin{cases} x + 3 \geqslant 0, \\ x^2 + 4 \geqslant (x + 3)^2. \end{cases} \end{array}\right.$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x < -3, \\ -3 \leqslant x \leqslant -\dfrac{5}{6}; \end{array}\right.$ $x \leqslant -\dfrac{5}{6}.$

Тоді маємо: $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \leqslant -\frac{5}{6}; \end{cases}$ $x \leqslant -\frac{5}{6}.$

Відповідь: $\left(-\infty; -\frac{5}{6}\right] \cup [3; +\infty).$ ◄

Нерівність прикладу 4 можна розв'язати інакше, використовуючи метод інтервалів. Справді, розв'язавши рівняння $(x-3)\left(\sqrt{x^2+4}-x-3\right)=0,$ отримуємо два корені $x=3,$ $x=-\frac{5}{6}.$ Розв'язування даної нерівності проілюстровано на рисунку 9.2.

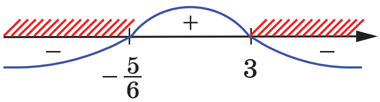


Рис. 9.2

Під час розв'язування ірраціональних нерівностей можна користуватися більш загальною теоремою.

Теорема 9.4. ***Якщо для будь-якого*** $x \in M$ ***виконуються нерівності*** $f(x) \geqslant 0$ ***і*** $g(x) \geqslant 0$, ***то нерівності*** $f(x) > g(x)$ ***і*** $(f(x))^{2k} > (g(x))^{2k}$, $k \in \mathbb{N}$, ***рівносильні на множині*** M.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3} \leqslant 2\sqrt{x}.$

Розв'язання. Обидві частини даної нерівності набувають невід'ємних значень на множині $M=[3; +\infty)$, яка є областю визначення цієї нерівності. Отже, дана нерівність на множині M рівносильна нерівності

$$\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}\right)^2 \leqslant \left(2\sqrt{x}\right)^2.$$

Звідси $2\sqrt{2x+1}\sqrt{x-3} \leqslant x+2.$

На множині $M=[3; +\infty)$ обидві частини останньої нерівності набувають невід'ємних значень. Тоді за теоремою 9.4 отримуємо:

$$\begin{cases} 4(2x+1)(x-3) \leqslant (x+2)^2, \\ x \geqslant 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 7x^2-24x-16 \leqslant 0, \\ x \geqslant 3; \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{4}{7} \leqslant x \leqslant 4, \\ x \geqslant 3; \end{cases}$$

$$3 \leqslant x \leqslant 4.$$

Відповідь: [3; 4]. ◄

ВПРАВИ

9.1.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x-1} > 4$; 2) $\sqrt{x-1} < 4$; 3) $\sqrt{x-1} > -4$; 4) $\sqrt{x-1} < -4$.

9.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2x-4} \geqslant \sqrt{5-x}$;
2) $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$;
3) $\sqrt{x^2+x} < \sqrt{x^2+1}$;
4) $\sqrt{x^2-3x+1} > \sqrt{2x-3}$;
5) $\sqrt{8-5x} \geqslant \sqrt{x^2-16}$;
6) $\sqrt{x^2-3x+2} < \sqrt{2x^2-3x+1}$.

9.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{3x-2} < \sqrt{x+6}$;
2) $\sqrt{2x^2+6x-3} \geqslant \sqrt{x^2+4x}$;
3) $\sqrt{x^2+3x-10} < \sqrt{x-2}$.

9.4.• Розв'яжіть нерівність:

1) $x > \sqrt{24-5x}$;
2) $\sqrt{2x+7} \leqslant x+2$;
3) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$;
4) $3-x > 3\sqrt{1-x^2}$;
5) $\sqrt{x^2+3x+3} < 2x+1$;
6) $\sqrt{7x-x^2-6} < 2x+3$.

9.5.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{9x-20} < x$;
2) $\sqrt{x+61} < x+5$;
3) $2\sqrt{4-x^2} \leqslant x+4$;
4) $\sqrt{x^2+4x-5} < x-3$.

9.6.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2-x} > x$;
2) $\sqrt{x+7} \geqslant x+1$;
3) $\sqrt{x^2-1} > x$;
4) $\sqrt{x^2-2x} \geqslant 4-x$;
5) $\sqrt{x^2+x-2} > x$;
6) $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$.

9.7.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x+2} > x$;
2) $\sqrt{2x+14} > x+3$;
3) $\sqrt{x^2-5x-24} \geqslant x+2$;
4) $\sqrt{x^2+4x-5} > x-3$.

9.8.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+10)\sqrt{x-4} \leqslant 0$;
2) $(x+2)\sqrt{(4-x)(5-x)} \geqslant 0$;
3) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4} \leqslant 0$.

9.9.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-12)\sqrt{x-3} \leqslant 0$;
2) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2} \geqslant 0$;
3) $(x^2-9)\sqrt{16-x^2} \geqslant 0$.

9.10.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{\sqrt{2x-1}}{x-2}<1$;

2) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}<3$;

3) $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}\leqslant\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$;

4) $\frac{\sqrt{x^2-3x-4}-3x+16}{6-x}>1$.

9.11.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+1)\sqrt{x^2+1}>x^2-1$;

2) $\frac{\sqrt{x+20}}{x}-1<0$;

3) $\frac{\sqrt{12-x-x^2}}{2x-7}\leqslant\frac{\sqrt{12-x-x^2}}{x-5}$;

4) $\frac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5}\leqslant 1$.

9.12.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3}>1$;

2) $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{4-x^2}<2$;

3) $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$.

9.13.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{x-6}-\sqrt{x+10}\leqslant 1$;

2) $2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}>\sqrt{x+21}$.

9.14.•• Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x^3+x+6}\geqslant 4$.

9.15.•• Розв'яжіть нерівність $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x^3+8}<4$.

9.16.•• При яких значеннях параметра a множиною розв'язків нерівності $\sqrt{1-(x+2a)^2}\geqslant\frac{4}{3}x$ є проміжок завдовжки $\frac{9}{5}$?

9.17.•• При яких значеннях параметра a множиною розв'язків нерівності $\sqrt{1-x^2}\geqslant\frac{4}{3}(x-a)$ є проміжок завдовжки $\frac{9}{5}$?

9.18.•• При яких значеннях параметра система

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\leqslant a\\ y=x+2\end{cases}$$

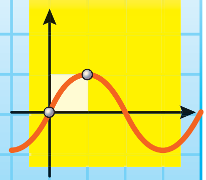
має розв'язки?

9.19.•• При яких значеннях параметра система

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}=1\\ y+x\geqslant a\end{cases}$$

має розв'язки?

§ 3 ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ



10. Радіанна міра кута

Досі для вимірювання кутів ви використовували градуси або частини градуса — мінути та секунди.

У багатьох випадках зручно користуватися іншою одиницею вимірювання кутів. Її називають **радіаном.**

Означення. Кутом в один радіан називають центральний кут кола, що спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу кола.

На рисунку 10.1 зображено центральний кут AOB, що спирається на дугу AB, довжина якої дорівнює радіусу кола. Величина кута AOB дорівнює одному радіану. Записують: $\angle AOB = 1$ рад. Також говорять, що радіанна міра дуги AB дорівнює одному радіану. Записують: $\cup AB = 1$ рад.

Радіанна міра кута (дуги) не залежить від радіуса кола. Справді, розглянемо два кола зі спільним центром O і радіусами R і r $(R > r)$ (рис. 10.2). Сектор AOB гомотетичний сектору A_1OB_1 із центром O і коефіцієнтом $\frac{R}{r}$. Тоді якщо довжина дуги AB дорівнює радіусу R, то довжина дуги A_1B_1 дорівнює радіусу r.

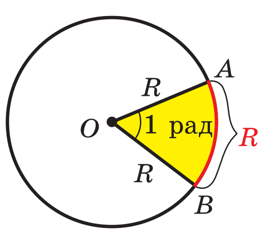


Рис. 10.1

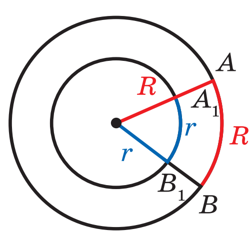


Рис. 10.2

На рисунку 10.3 зображено коло радіуса R і дугу MN, довжина якої дорівнює $\frac{3}{2}R$. У цьому випадку вважають, що радіанна міра кута MON (дуги MN) дорівнює $\frac{3}{2}$ рад. Узагалі, якщо центральний кут кола радіуса R спирається на дугу, довжина якої дорівнює αR, то говорять, що **радіанна міра цього центрального кута дорівнює α рад.**

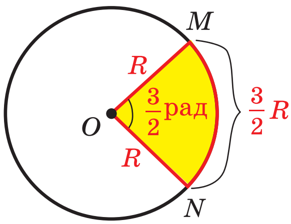


Рис. 10.3

Довжина півкола дорівнює πR. Отже, радіанна міра півкола дорівнює π рад. Градусна міра півкола становить $180°$. Сказане дає змогу встановити зв'язок між радіанною та градусною мірами, а саме:

$$\pi \text{ рад} = 180°. \qquad (1)$$

Звідси

$$\boxed{1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}}$$

Поділивши 180 на 3,14 (нагадаємо, що $\pi \approx 3{,}14$), можна встановити: 1 рад $\approx 57°$.

Якщо обидві частини рівності (1) поділити на 180, то отримаємо:

$$\boxed{1° = \frac{\pi}{180} \text{ рад}} \qquad (2)$$

За цією формулою легко знайти, що, наприклад,

$$15° = 15 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{12} \text{ рад}, \quad 90° = 90 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{\pi}{2} \text{ рад},$$

$$135° = 135 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ рад} = \frac{3\pi}{4} \text{ рад}.$$

Записуючи радіанну міру кута, зазвичай позначення «рад» опускають. Наприклад, записують: $135° = \frac{3\pi}{4}$.

У таблиці наведено градусні та радіанні міри кутів, які зустрічаються найчастіше:

Градусна міра кута	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
Радіанна міра кута	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Використовуючи радіанну міру кута, можна отримати зручну формулу для обчислення довжини дуги кола. Оскільки центральний кут в 1 рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює радіусу R, то кут в α рад спирається на дугу, довжина якої дорівнює αR. Якщо довжину дуги, що містить α рад, позначити через l, то можна записати:

$$\boxed{\boldsymbol{l = \alpha R}}$$

На координатній площині розглянемо коло одиничного радіуса із центром у початку координат. Таке коло називають **одиничним**.

Нехай точка P, починаючи рух від точки P_0 (1; 0), переміщується по одиничному колу проти годинникової стрілки. У певний момент часу вона займе положення, при якому $\angle P_0OP = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 10.4). Говоритимемо, що **точку P отримано в результаті повороту точки P_0 навколо початку координат** на кут $\frac{2\pi}{3}$ (на кут 120°).

Записують: $P = R_O^{\frac{2\pi}{3}}(P_0)$.

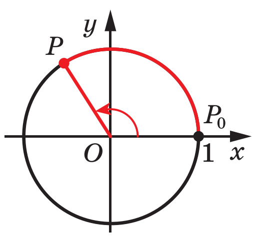


Рис. 10.4

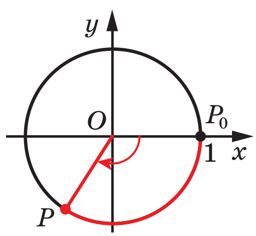


Рис. 10.5

Нехай тепер точка P перемістилася по одиничному колу за годинниковою стрілкою та зайняла положення, при якому $\angle POP_0 = \frac{2\pi}{3} = 120°$ (рис. 10.5). Говоритимемо, що точку P отримано в результаті повороту точки P_0 навколо початку координат на кут $-\frac{2\pi}{3}$ (на кут −120°). Записують: $P = R_O^{-\frac{2\pi}{3}}(P_0)$.

Узагалі, коли розглядають рух точки по колу проти годинникової стрілки (рис. 10.4), то кут повороту вважають додатним, а за годинниковою стрілкою (рис. 10.5) — від'ємним.

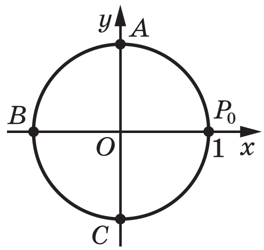


Рис. 10.6

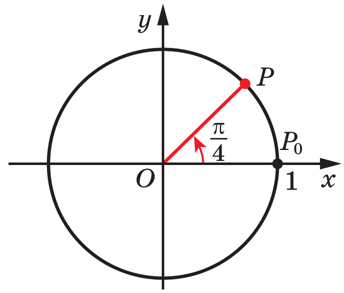


Рис. 10.7

Розглянемо ще кілька прикладів. Звернемося до рисунка 10.6. Можна сказати, що точку A отримано в результаті повороту точки P_0 навколо початку координат на кут $\frac{\pi}{2}$ (на кут 90°) або на кут $-\frac{3\pi}{2}$ (на кут −270°), тобто $A = R_O^{\frac{\pi}{2}}(P_0)$, $A = R_O^{-\frac{3\pi}{2}}(P_0)$. Точку B отримано в результаті повороту точки P_0 на кут π (на кут 180°) або на кут $-\pi$ (на кут −180°), тобто $B = R_O^{\pi}(P_0)$, $B = R_O^{-\pi}(P_0)$. Точку C отримано в результаті повороту точки P_0 на кут $\frac{3\pi}{2}$ (на кут 270°) або на кут $-\frac{\pi}{2}$ (на кут −90°), тобто $C = R_O^{\frac{3\pi}{2}}(P_0)$, $C = R_O^{-\frac{\pi}{2}}(P_0)$.

Якщо точка P, рухаючись по одиничному колу, зробить повний оберт, то можна говорити, що кут повороту дорівнює 2π (тобто 360°) або -2π (тобто −360°).

Якщо точка P зробить півтора оберта проти годинникової стрілки, то природно вважати, що кут повороту дорівнює 3π (тобто 540°), якщо за годинниковою стрілкою — то -3π (тобто −540°).

Величина кута повороту як у радіанах, так і в градусах може виражатися будь-яким дійсним числом.

Кут повороту однозначно визначає положення точки P на одиничному колі. Проте будь-якому положенню точки P на колі відповідає безліч кутів повороту. Наприклад, на рисунку 10.7 точці P відповідають такі кути повороту: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}+2\pi$, $\frac{\pi}{4}+4\pi$, $\frac{\pi}{4}+6\pi$ і т. д., а також $\frac{\pi}{4}-2\pi$, $\frac{\pi}{4}-4\pi$, $\frac{\pi}{4}-6\pi$ і т. д.

Кожному дійсному числу α поставимо у відповідність точку P одиничного кола таку, що $P = R_O^{\alpha}(P_0)$. Тим самим ми задали відображення множини дійсних чисел на множину точок одиничного кола. Зауважимо, що це відображення не є взаємно однозначним: кожній точці одиничного кола відповідає безліч дійсних чисел. Наприклад, на рисунку 10.7 точці P відповідають усі дійсні числа виду $\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$ Звернемо увагу на те, що множину чисел виду $\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ можна задати й інакше. Наприклад: $\frac{9\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},$ або $-\frac{7\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$

ВПРАВИ

10.1.° Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює:
1) 25°; 2) 40°; 3) 100°; 4) 160°; 5) 210°; 6) 300°.

10.2.° Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:
1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) $1{,}2\pi$; 5) 3π; 6) $2{,}5\pi$.

10.3.° Обчисліть довжину дуги кола, якщо відомо її радіанну міру α та радіус R кола:
1) $\alpha = 3$, $R = 5$ см; 2) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, $R = 6$ см; 3) $\alpha = 0{,}4\pi$, $R = 2$ см.

10.4.° Порівняйте величини кутів, заданих у радіанах:
1) $\frac{\pi}{2}$ і 1,5; 2) $-\frac{\pi}{2}$ і -2; 3) $\frac{\pi}{3}$ і 1.

10.5.° Порівняйте величини кутів, заданих у радіанах:
1) $\frac{\pi}{4}$ і 1; 2) $-\frac{1}{2}$ і $-\frac{\pi}{6}$.

10.6.° Позначте на одиничному колі точку, яку отримаємо в результаті повороту точки P_0 (1; 0) на кут:
1) $\frac{5\pi}{3}$; 2) $-45°$; 3) $-120°$; 4) 450°; 5) $-480°$; 6) $-\frac{7\pi}{3}$.

10.7.° Позначте на одиничному колі точку, яку отримаємо в результаті повороту точки P_0 (1; 0) на кут:
1) 225°; 2) $-315°$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $-\frac{5\pi}{6}$; 5) 6π; 6) $-720°$.

10.8.° У якій координатній чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки P_0 (1; 0) на кут:
1) 400°; 2) 750°; 3) $-470°$; 4) $\frac{-7\pi}{6}$; 5) $-1{,}8\pi$; 6) 6?

10.9.° У якій координатній чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки P_0 (1; 0) на кут:

1) $-380°$; 2) $-800°$; 3) $5,5\pi$; 4) $-\frac{11\pi}{6}$; 5) 1; 6) -3?

10.10.° Знайдіть координати точки одиничного кола, отриманої в результаті повороту точки P_0 (1; 0) на кут:

1) $-90°$; 2) $-180°$; 3) $\frac{5\pi}{2}$; 4) $-\frac{3\pi}{2}$; 5) $450°$; 6) -2π.

10.11.° Які координати має точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки P_0 (1; 0) на кут:

1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) 3π; 3) $-\frac{\pi}{2}$; 4) $180°$; 5) $-540°$?

10.12.• Укажіть найменший додатний і найбільший від'ємний кути, на які треба повернути точку P_0 (1; 0), щоб отримати точку з координатами:

1) (0; 1); 2) (−1; 0); 3) (0; −1); 4) (1; 0).

10.13.• Укажіть усі дійсні числа, які відповідають точці P одиничного кола (рис. 10.8).

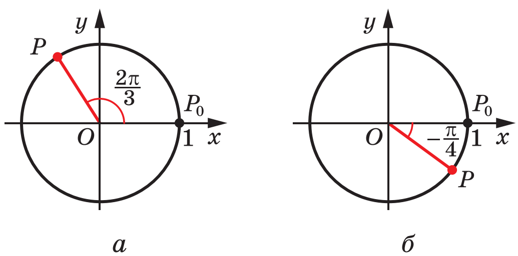


Рис. 10.8

10.14.• Укажіть усі дійсні числа, які відповідають точці P одиничного кола (рис. 10.9).

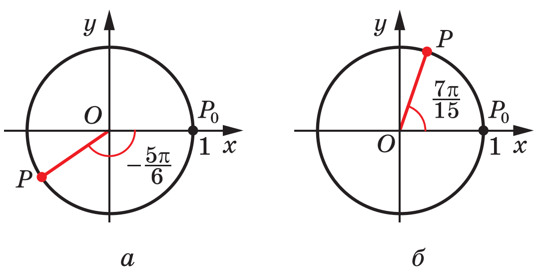


Рис. 10.9

10.15.• Знайдіть координати точок одиничного кола, отриманих у результаті повороту точки P_0 (1; 0) на кути:

1) $-\frac{\pi}{2}+4\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 3) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

10.16.• Побудуйте на одиничному колі точки, яким відповідає така множина чисел:

1) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.

10.17.• Знайдіть усі кути, на які потрібно повернути точку P_0 (1; 0), щоб отримати точку:

1) P_1 (0; 1);
2) P_2 (−1; 0);
3) $P_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$;
4) $P_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

10.18.• Знайдіть усі кути, на які потрібно повернути точку P_0 (1; 0), щоб отримати точку:

1) P_1 (0; −1); 2) $P_2\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 3) $P_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

10.19.• Доведіть, що площу сектора, який містить дугу в α рад, можна обчислити за формулою $S=\frac{\alpha R^2}{2}$, де R — радіус кола.

10.20.•• Спростіть:

1) $\{2\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\}$;

2) $\{2\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\}\cap\{\pi+2\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\}$;

3) $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}\cup\{\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\}$;

4) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}\cap\left\{\frac{3\pi n}{10} \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$.

10.21.•• Спростіть:

1) $\{2\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi+2\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\}$;

2) $\{2\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\}\cap\{\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\}$;

3) $\left\{\pm\frac{\pi}{2}+\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

4) $\left\{\frac{\pi n}{12} \mid n\in\mathbb{Z}\right\}\cap\left\{\frac{\pi}{3}+\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$.

11. Тригонометричні функції числового аргументу

Поняття «синус», «косинус», «тангенс» і «котангенс» кутів від $0°$ до $180°$ знайомі вам з курсу геометрії 9 класу. Узагальнимо ці поняття для довільного кута повороту α.

Уводячи означення тригонометричних функцій кутів від $0°$ до $180°$, ми користувалися одиничним півколом. Для довільних кутів повороту природно звернутися до одиничного кола.

Означення. Косинусом і синусом кута повороту α називають відповідно абсцису x і ординату y точки $P(x; y)$ одиничного кола такої, що $P = R_O^{\alpha}(P_0)$ (рис. 11.1).

Записують: $\cos \alpha = x$, $\sin \alpha = y$.

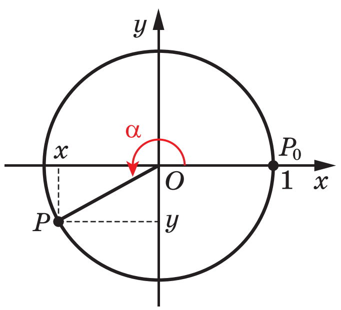


Рис. 11.1

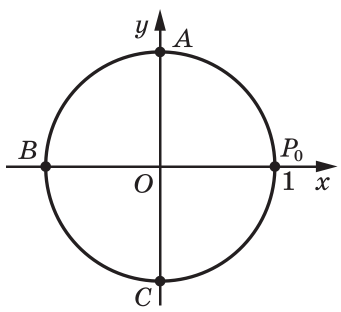


Рис. 11.2

Точки P_0, A, B і C (рис. 11.2) мають відповідно координати $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(-1; 0)$, $(0; -1)$. Ці точки отримано в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ відповідно на кути 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$. Отже, користуючись даним означенням, можна скласти таблицю:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	1	0	-1
$\cos x$	1	0	-1	0

ПРИКЛАД 1 Знайдіть усі кути повороту α, при яких: 1) $\sin\alpha = 0$; 2) $\cos\alpha = 0$.

Розв'язання. 1) Ординату, яка дорівнює нулю, мають тільки дві точки одиничного кола: P_0 і B (рис. 11.2). Ці точки отримано в результаті поворотів точки P_0 на такі кути:

$$0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \dots \ \text{або}$$
$$-\pi,\ -2\pi,\ -3\pi,\ \dots\ .$$

Усі ці кути можна знайти за допомогою формули $\alpha = \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Отже, $\sin\alpha = 0$ при $\alpha = \pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

2) Абсцису, яка дорівнює нулю, мають тільки дві точки одиничного кола: A і C (рис. 11.2). Ці точки отримано в результаті поворотів точки P_0 на такі кути:

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+\pi,\ \frac{\pi}{2}+2\pi,\ \frac{\pi}{2}+3\pi,\ \dots \ \text{або}$$
$$\frac{\pi}{2}-\pi,\ \frac{\pi}{2}-2\pi,\ \frac{\pi}{2}-3\pi,\ \dots\ .$$

Усі ці кути можна знайти за допомогою формули $\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Отже, $\cos\alpha = 0$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k$, де $k \in \mathbb{Z}$. ◄

Означення. Тангенсом кута повороту α називають відношення синуса цього кута до його косинуса:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Означення. Котангенсом кута повороту α називають відношення косинуса цього кута до його синуса:

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Наприклад, $\operatorname{tg}\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = 0$,

$$\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = 0,\quad \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = \frac{\cos\frac{3\pi}{4}}{\sin\frac{3\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1.$$

З означення тангенса випливає, що тангенс визначений для тих кутів повороту α, для яких $\cos\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

З означення котангенса випливає, що котангенс визначений для тих кутів повороту α, для яких $\sin\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ви знаєте, що кожному куту повороту α відповідає *єдина* точка одиничного кола. Отже, кожному значенню кута α відповідає єдине число, яке є значенням синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, котангенса для $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) кута α. Через це залежність значення синуса (косинуса, тангенса, котангенса) від величини кута повороту є функціональною.

Функції $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$, $p(\alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha$, які відповідають цим функціональним залежностям, називають **тригонометричними функціями** кута повороту α.

Кожному дійсному числу α поставимо у відповідність кут α рад. Це дає змогу розглядати тригонометричні функції числового аргументу.

Наприклад, запис $\sin 2$ означає «синус кута 2 радіани».

З означень синуса та косинуса випливає, що областю визначення функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є множина $\mathbb{R}$.

Оскільки абсциси й ординати точок одиничного кола набувають усіх значень від -1 до 1 включно, то областю значень функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є проміжок $[-1; 1]$.

Кутам повороту α і $\alpha + 2\pi n$, де $n \in \mathbb{Z}$, відповідає одна й та сама точка одиничного кола, тому

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z}\\&\cos\alpha = \cos(\alpha + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z}\end{aligned}}$$

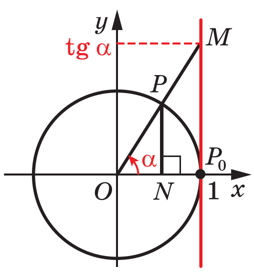


Рис. 11.3

Областю визначення функції $y = \mathrm{tg}\,x$ є множина $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Областю визначення функції $y = \mathrm{ctg}\,x$ є множина $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$.

Щоб знайти області значень цих функцій, звернемося до такої геометричної інтерпретації.

Проведемо пряму $x = 1$ (рис. 11.3). Вона проходить через точку $P_0(1; 0)$ і дотикається до одиничного кола.

Нехай точку P отримано в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут α і розміщено так, як показано на рисунку 11.3. Пряма OP перетинає пряму $x = 1$ у точці M. Проведемо $PN \perp OP_0$.

Із подібності трикутників OPN і OMP_0 випливає, що $\frac{PN}{ON} = \frac{MP_0}{OP_0}$.

Оскільки $PN = \sin\alpha$, $ON = \cos\alpha$, $OP_0 = 1$, то

$$MP_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Отже, ордината точки M дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$.

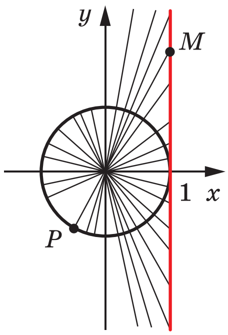


Рис. 11.4

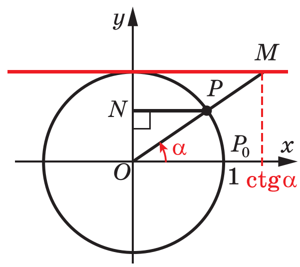


Рис. 11.5

При будь-якому іншому положенні точки P на одиничному колі виконується таке: якщо пряма OP перетинає пряму $x = 1$, то ордината точки перетину дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$. Тому пряму $x = 1$ називають **віссю тангенсів**.

Зрозуміло, що внаслідок зміни положення точки P на одиничному колі (рис. 11.4) точка M може зайняти довільне положення на прямій $x = 1$, тобто ординатою точки M може бути будь-яке число. Це означає, що областю значень функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина $\mathbb{R}$.

Нехай точку P отримано в результаті повороту точки $P_0(1;\ 0)$ на кут α і розміщено так, як показано на рисунку 11.5. Можна показати, що коли пряма OP перетинає пряму $y = 1$, то абсциса точки перетину дорівнює $\operatorname{ctg}\alpha$ (рис. 11.5); тому пряму $y = 1$ називають **віссю котангенсів**.

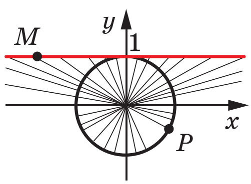


Рис. 11.6

З рисунка 11.6 зрозуміло, що областю значень функції $y = \operatorname{ctg} x$ є множина $\mathbb{R}$.

Якщо точки P_1, O і P_2 лежать на одній прямій, то прямі OP_1 і OP_2 перетинають вісь тангенсів (котангенсів) в одній і тій самій точці M (рис. 11.7, 11.8). Це означає, що тангенси (котангенси) кутів, які відрізняються на π, 2π, 3π і т. д., рівні. Звідси

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{tg}\,\alpha = \mathbf{tg}\,(\alpha + \pi \boldsymbol{n}),\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}\\ \mathbf{ctg}\,\alpha = \mathbf{ctg}\,(\alpha + \pi \boldsymbol{n}),\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}\end{array}}$$

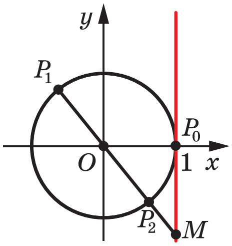


Рис. 11.7

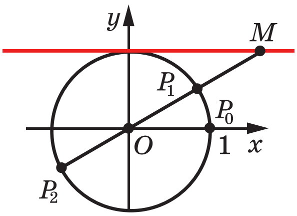


Рис. 11.8

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Нехай точки P_1 і P_2 отримано в результаті поворотів точки P_0 на кути α і $\alpha + \frac{\pi}{2}$ відповідно. Опустимо перпендикуляри P_1A і P_2B на осі x і y відповідно (рис. 11.9). Оскільки $\angle P_1OP_2 = \frac{\pi}{2}$, то можна встановити, що $\Delta OP_1A = \Delta OP_2B$. Звідси $OA = OB$. Отже, абсциса точки P_1 дорівнює ординаті точки P_2, тобто $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

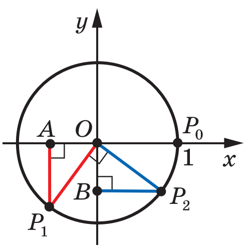


Рис. 11.9

Випадки розміщення точок P_1 і P_2 в інших координатних чвертях можна розглянути аналогічно.

Розгляньте самостійно випадки, коли точки P_1 і P_2 лежать на координатних осях. ◄

ПРИКЛАД 3 Знайдіть найбільше і найменше значення виразу: 1) $1 - 4\cos\alpha$; 2) $\frac{(2 - \sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha}$.

Розв'язання. 1) Оскільки $-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$, то $-4 \leqslant -4\cos\alpha \leqslant 4$; $-3 \leqslant 1 - 4\cos\alpha \leqslant 5$. Отже, найменше значення даного виразу дорівнює -3; вираз набуває його при $\cos\alpha = 1$. Найбільше значення дорівнює 5; вираз набуває його при $\cos\alpha = -1$.

Відповідь: 5; -3.

2) Маємо: $\frac{(2-\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2 - \sin\alpha$. Зрозуміло, що вираз $2-\sin\alpha$ набуває всіх значень від 1 до 3. Найменше значення виразу $2-\sin\alpha$, яке дорівнює 1, досягається лише при $\sin\alpha = 1$, проте при цьому $\cos\alpha = 0$ і вираз $\frac{(2-\sin\alpha)\cos\alpha}{\cos\alpha}$ не визначений. Отже, найменшого значення не існує.

Аналогічно вираз $2-\sin\alpha$ набуває найбільшого значення лише при $\sin\alpha = -1$, проте при цьому також $\cos\alpha = 0$. Отже, і найбільшого значення не існує.

Відповідь: не існують. ◄

ПРИКЛАД 4 Знайдіть область значень виразу:

1) $\frac{1}{2-\cos 2x}$; 2) $\frac{1}{3\sin x - 2}$.

Розв'язання. 1) Маємо: $-1 \leqslant \cos 2x \leqslant 1$; $1 \leqslant 2-\cos 2x \leqslant 3$; $1 \geqslant \frac{1}{2-\cos 2x} \geqslant \frac{1}{3}$. Зрозуміло, що коли значення cos $2x$ змінюється від -1 до 1 включно, то значення виразу $\frac{1}{2-\cos 2x}$ змінюється від $\frac{1}{3}$ до 1 включно.

Відповідь: $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$.

2) Маємо: $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$; $-3 \leqslant 3\sin x \leqslant 3$; $-5 \leqslant 3\sin x - 2 \leqslant 1$.

При $0 < 3\sin x - 2 \leqslant 1$ отримуємо, що $\frac{1}{3\sin x - 2} \geqslant 1$, причому рівність досягається при $\sin x = 1$.

При $-5 \leqslant 3\sin x - 2 < 0$ отримуємо, що $\frac{1}{3\sin x - 2} \leqslant -\frac{1}{5}$, причому рівність досягається при $\sin x = -1$.

Отже, область значень даного виразу — множина

$$\left(-\infty; -\frac{1}{5}\right] \cup [1; +\infty).$$ ◄

ВПРАВИ

11.1.° Обчисліть значення виразу:

1) $\sin 0 + \operatorname{tg} \pi - \sin \frac{3\pi}{2}$;
2) $5 \cos \pi + 4 \cos \frac{3\pi}{2} + 2 \cos 2\pi$;
3) $2 \sin^2 \frac{\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{6}$;
4) $\sin \frac{\pi}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$.

11.2.° Чому дорівнює значення виразу:

1) $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$;
2) $6 \cos 0 + 4 \sin 2\pi + 4 \sin^2 \frac{2\pi}{3}$?

11.3.° Чи є можливою рівність:

1) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$; 2) $\cos \alpha = \frac{\pi}{3}$; 3) $\operatorname{tg} \alpha = -4$; 4) $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{26}$?

11.4.° Чи може дорівнювати числу $\frac{\sqrt{5}}{2}$ значення:

1) $\sin \alpha$; 2) $\cos \alpha$; 3) $\operatorname{tg} \alpha$; 4) $\operatorname{ctg} \alpha$?

11.5.° Укажіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $2 - \sin \alpha$; 2) $6 - 2 \cos \alpha$; 3) $\sin^2 \alpha$; 4) $2 \cos^2 \alpha - 3$.

11.6.° Укажіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $-5 \cos \alpha$; 2) $\cos \alpha - 2$; 3) $5 + \sin^2 \alpha$; 4) $7 - 3 \sin \alpha$.

11.7.• Знайдіть усі значення x, при яких виконується рівність:

1) $\sin x = 1$; 2) $\sin x = -1$.

11.8.• Знайдіть усі значення x, при яких виконується рівність:

1) $\cos x = 1$; 2) $\cos x = -1$.

11.9.• При яких значеннях a можлива рівність:

1) $\sin x = a^2 + 1$; 2) $\cos x = a^2 - 1$; 3) $\cos x = a^2 - 5a + 5$?

11.10.• При яких значеннях a можлива рівність:

1) $\sin x = a - 2$; 2) $\cos x = a^2 + 2$; 3) $\sin x = 2a - a^2 - 2$?

11.11.• Порівняйте значення виразів $2 \sin \alpha$ і $\sin^2 \alpha$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

11.12.• Порівняйте значення виразів:

1) $\cos 10°$ і $\cos 10° \cos 20°$; 2) $\sin 40°$ і $\sin^2 40°$.

11.13.• Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $\frac{1}{1 + \sin \alpha}$; 2) $\frac{\cos^3 \alpha}{\cos \alpha}$; 3) $\frac{\sin \alpha (1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha}$.

11.14.• Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $\frac{1}{\cos \alpha - 2}$; 2) $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha}$; 3) $\sin \alpha + \cos \alpha - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha}$.

11.15.• Знайдіть область значень виразу:

1) $\dfrac{1}{2+\sin x}$; 2) $\dfrac{1}{1-\cos x}$; 3) $\dfrac{2}{4\sin x-3}$.

11.16.• Знайдіть область значень функції:

1) $y=\dfrac{2}{3-\cos x}$; 2) $y=\dfrac{1}{\sin x+1}$; 3) $y=\dfrac{1}{1-2\cos x}$.

11.17.• Доведіть, що $\sin\alpha=-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

11.18.• Доведіть, що $\cos\alpha=-\cos(\pi+\alpha)$.

СТАВАЙ ОСТРОГРАДСЬКИМ!

Михайло Васильович Остроградський
(1801–1862)

Видатний український математик Михайло Васильович Остроградський народився в селі Пашенівка на Полтавщині. У 1816–1820 рр. він навчався в Харківському університеті, а потім удосконалював математичну освіту, навчаючись у Франції в таких великих учених, як П'єр Симон Лаплас (1749–1827), Симеон Дені Пуассон (1781–1840), Огюстен Луї Коші (1789–1857), Жан Батист Жозеф Фур'є (1768–1830).

Серед величезної наукової спадщини, яку залишив нам Михайло Остроградський, значну роль відіграють роботи, пов'язані з дослідженням тригонометричних рядів і коливань. Багато важливих математичних теорем сьогодні носять ім'я Остроградського.

Крім наукових праць, Остроградський написав низку чудових підручників для молоді, зокрема «Програму і конспект тригонометрії». Сам Остроградський надавав питанню викладання тригонометрії такого великого значення, що це стало предметом доповіді в Академії наук.

Науковий авторитет Остроградського був настільки високим, що в ті часи, відправляючи молодь на навчання, говорили: «Ставай Остроградським!» Це побажання актуальне й сьогодні, тому

«Ставай Остроградським!»

12. Знаки значень тригонометричних функцій

Нехай точку P отримано в результаті повороту точки P_0 (1; 0) навколо початку координат на кут α. Якщо точка P належить I координатній чверті, то говорять, що α є **кутом I чверті**. Аналогічно можна говорити про кути II, III і IV чвертей.

Наприклад, $\frac{\pi}{7}$ і $-300°$ — кути I чверті, $\frac{2\pi}{3}$ і $-185°$ — кути II чверті, $\frac{5\pi}{4}$ і $-96°$ — кути III чверті, $355°$ і $-\frac{\pi}{8}$ — кути IV чверті.

Кути виду $\frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, не відносять до жодної чверті.

Точки, розміщені в I чверті, мають додатні абсцису й ординату. Отже, якщо α — кут I чверті, то $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$.

Якщо α — кут II чверті, то $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$.

Якщо α — кут III чверті, то $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha < 0$.

Якщо α — кут IV чверті, то $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$.

Знаки значень синуса та косинуса схематично показано на рисунку 12.1.

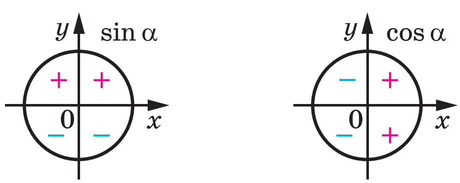


Рис. 12.1

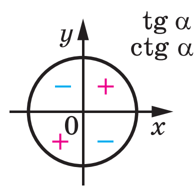


Рис. 12.2

Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то тангенси й котангенси кутів I і III чвертей є додатними, а кутів II і IV чвертей — від'ємними (рис. 12.2).

Нехай точки P_1 і P_2 отримано в результаті повороту точки P_0 (1; 0) на кути α і $-\alpha$ відповідно (рис. 12.3).

Для будь-якого кута α точки P_1 і P_2 мають рівні абсциси та протилежні ординати. Тоді з означень синуса та косинуса випливає, що для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{array}{c}\cos(-\alpha) = \cos\alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha\end{array}}$$

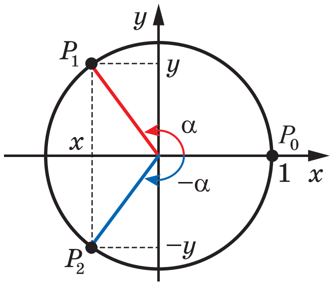


Рис. 12.3

Отримані властивості дають змогу зробити й такі висновки:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{tg}\,(-\alpha) &= -\mathbf{tg}\,\alpha\\ \mathbf{ctg}\,(-\alpha) &= -\mathbf{ctg}\,\alpha\end{aligned}}$$

Справді,

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

ПРИКЛАД Порівняйте $\sin 200°$ і $\sin(-200°)$.

Розв'язання. Оскільки кут $200°$ — це кут III чверті, а кут $-200°$ — кут II чверті, то $\sin 200° < 0$, $\sin(-200°) > 0$. Отже, $\sin 200° < \sin(-200°)$. ◄

ВПРАВИ

12.1.° Додатним чи від'ємним числом є значення тригонометричної функції:

1) $\sin(-280°)$; 3) $\sin(-130°)$; 5) $\sin(-3)$; 7) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$;

2) $\cos 340°$; 4) $\cos 2$; 6) $\operatorname{tg} 1$; 8) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$?

12.2.° Який знак має:

1) $\sin 186°$; 3) $\operatorname{ctg} 340°$; 5) $\operatorname{ctg}(-291°)$; 7) $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{8}$;

2) $\operatorname{tg} 104°$; 4) $\cos(-78°)$; 6) $\sin\frac{3\pi}{7}$; 8) $\cos\left(-\frac{13\pi}{12}\right)$?

12.3.° Знайдіть значення виразу:

1) $5\operatorname{tg}0+2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-3\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+4\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

2) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2\cos(-\pi)+4\sin^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

12.4.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sin^2(-60°)+\cos^2(-30°)$;

2) $2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)+3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

12.5.° Відомо, що $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha}$; 3) $\sin\alpha-\cos\alpha$.

12.6.° Відомо, що $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin\beta\cos\beta$; 2) $\frac{\operatorname{tg}^3\beta}{\sin\beta}$; 3) $\sin\beta+\cos\beta$.

12.7.° Порівняйте значення тригонометричних функцій:

1) $\operatorname{tg}130°$ і $\operatorname{tg}(-130°)$;
2) $\operatorname{tg}110°$ і $\operatorname{tg}193°$;
3) $\cos 80°$ і $\sin 330°$;
4) $\sin 60°$ і $\sin\frac{8\pi}{7}$;
5) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$ і $\cos 280°$;
6) $\operatorname{ctg}6$ і $\operatorname{ctg}6°$.

12.8.° Порівняйте значення тригонометричних функцій:

1) $\sin 200°$ і $\sin(-250°)$;
2) $\operatorname{ctg}100°$ і $\operatorname{ctg}80°$;
3) $\cos 250°$ і $\cos 290°$;
4) $\cos 6{,}2$ і $\sin 5$.

12.9.° Відомо, що α — кут III чверті. Спростіть вираз:

1) $\sin\alpha-|\sin\alpha|$; 2) $|\cos\alpha|-\cos\alpha$; 3) $|\operatorname{tg}\alpha|-\operatorname{tg}\alpha$.

12.10.° Відомо, що β — кут IV чверті. Спростіть вираз:

1) $|\sin\beta|+\sin\beta$; 2) $\cos\beta-|\cos\beta|$; 3) $|\operatorname{ctg}\beta|-\operatorname{ctg}\beta$.

12.11.° Кутом якої чверті є кут α, якщо:

1) $\sin\alpha>0$ і $\cos\alpha<0$;
2) $\sin\alpha<0$ і $\operatorname{tg}\alpha>0$;
3) $|\sin\alpha|=\sin\alpha$ і $\alpha\neq\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$;
4) $\operatorname{ctg}\alpha+|\operatorname{ctg}\alpha|=0$ і $\alpha\neq\frac{\pi k}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$?

12.12.° Кутом якої чверті є кут α, якщо:

1) $\cos\alpha > 0$ і $\operatorname{tg}\alpha > 0$;

2) $\sin\alpha < 0$ і $\operatorname{ctg}\alpha < 0$;

3) $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$ і $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$;

4) $|\operatorname{tg}\alpha| - \operatorname{tg}\alpha = 0$ і $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$?

13. Періодичні функції

Багато процесів і подій, які відбуваються в навколишньому світі, повторюються через рівні проміжки часу. Наприклад, через 27,3 доби повторюється значення відстані від Землі до Місяця; якщо сьогодні субота, то через 7 діб знову настане субота.

Подібні явища та процеси називають **періодичними**, а функції, які є їхніми математичними моделями, — **періодичними функціями**.

Ви знаєте, що для будь-якого числа x виконуються рівності:

$$\sin(x - 2\pi) = \sin x = \sin(x + 2\pi);$$
$$\cos(x - 2\pi) = \cos x = \cos(x + 2\pi).$$

Це означає, що значення функцій синус і косинус періодично повторюються зі зміною аргументу на 2π. Функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є прикладами періодичних функцій.

Означення. **Функцію f називають періодичною, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого x із області визначення функції f виконуються рівності**

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T).$$

Число T називають періодом функції f.

Виконання рівностей $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$ для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що область визначення періодичної функції f має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $(x_0 - T) \in D(f)$ і $(x_0 + T) \in D(f)$.

Ви знаєте, що для будь-якого x із області визначення функції $y = \operatorname{tg} x$ виконуються рівності

$$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi).$$

Також для будь-якого x із області визначення функції $y = \operatorname{ctg} x$ виконуються рівності

$$\operatorname{ctg}(x - \pi) = \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi).$$

Тоді з означення періодичної функції випливає, що тангенс і котангенс є періодичними з періодом π.

Періодичною є функція дробова частина числа $y = \{x\}$. Її періодом є будь-яке ціле число, відмінне від нуля. Справді, для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ і $k \in \mathbb{Z}$ виконується рівність $\{x + k\} = \{x\}$.

Розглянемо деякі властивості періодичних функцій.

Теорема 13.1. ***Якщо число T є періодом функції f, то й число $-T$ також є періодом функції f.***

Справедливість цієї теореми випливає з означення періодичної функції.

Теорема 13.2. ***Якщо числа T_1 і T_2 є періодами функції f, причому $T_1 + T_2 \neq 0$, то число $T_1 + T_2$ також є періодом функції f.***

Доведення. Для будь-якого $x \in D(f)$ можна записати:

$$f(x) = f(x + T_1) = f((x + T_1) + T_2) = f(x + (T_1 + T_2));$$
$$f(x) = f(x - T_1) = f((x - T_1) - T_2) = f(x - (T_1 + T_2)).$$

Звідси для будь-якого $x \in D(f)$ виконуються рівності

$$f(x - (T_1 + T_2)) = f(x) = f(x + (T_1 + T_2)).$$

Отже, число $T_1 + T_2$ є періодом функції f. ◄

Наслідок. ***Якщо число T є періодом функції f, то будь-яке число виду nT, де $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, також є її періодом.***

Доведіть цей факт самостійно.

Остання властивість означає, що кожна періодична функція має безліч періодів.

Наприклад, будь-яке число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, є періодом функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$; будь-яке число виду πn, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, є періодом функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$.

Теорема 13.3. ***Якщо число T є періодом функції $y = f(x)$, то число $\frac{T}{k}$, де $k \neq 0$, є періодом функції $y = f(kx + b)$.***

Доведення. Для будь-якого x із області визначення функції $y = f(kx + b)$ можна записати:

$$f(kx + b) = f((kx + b) + T) = f\left(k\left(x + \frac{T}{k}\right) + b\right);$$

$$f(kx + b) = f((kx + b) - T) = f\left(k\left(x - \frac{T}{k}\right) + b\right).$$

Звідси для будь-якого x із області визначення функції $y = f(kx + b)$ виконуються рівності

$$f\left(k\left(x - \frac{T}{k}\right) + b\right) = f(kx + b) = f\left(k\left(x + \frac{T}{k}\right) + b\right).$$

Отже, число $\frac{T}{k}$ є періодом функції $y = f(kx + b)$. ◄

Якщо серед усіх періодів функції існує найменший додатний період, то його називають **головним періодом** цієї функції.

Наприклад, головним періодом функції $y = \{x\}$ є число 1.

Теорема 13.4. ***Головним періодом функцій*** $y = \sin x$ ***і*** $y = \cos x$ ***є число*** 2π***; головним періодом функцій*** $y = \operatorname{tg} x$ ***і*** $y = \operatorname{ctg} x$ ***є число*** π.

Доведення. Проведемо доведення для функції $y = \sin x$ (решту тверджень теореми можна довести аналогічно).

Якщо число T є періодом функції $y = \sin x$, то рівність $\sin(x + T) = \sin x$ виконується при будь-якому дійсному значенні x, зокрема при $x = -\frac{T}{2}$. Тоді отримуємо:

$$\sin\left(-\frac{T}{2} + T\right) = \sin\left(-\frac{T}{2}\right); \quad \sin\frac{T}{2} = -\sin\frac{T}{2}; \quad \sin\frac{T}{2} = 0.$$

Звідси $\frac{T}{2} = \pi k$; $T = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. З останньої рівності випливає, що будь-який період функції $y = \sin x$ має вигляд $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Найменшим додатним числом виду $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, є число 2π — період функції $y = \sin x$.

Отже, число 2π — головний період функції $y = \sin x$. ◄

Застосовуючи теореми 13.3 і 13.4 до функцій $y = \sin(kx + b)$ і $y = \cos(kx + b)$, де $k \neq 0$, отримуємо, що число $\frac{2\pi}{k}$ є періодом, а число $\frac{2\pi}{|k|}$ є головним періодом цих функцій.

Головним періодом функцій $y = \operatorname{tg}(kx + b)$ і $y = \operatorname{ctg}(kx + b)$, де $k \neq 0$, є число $\frac{\pi}{|k|}$.

Зазначимо, що не будь-яка періодична функція має головний період. Наприклад, функція $y = c$, де c — деяке число, є періодичною. Очевидно, що будь-яке дійсне число, відмінне від нуля, є її періодом. Отже, ця функція не має головного періоду.

Існують періодичні функції, відмінні від константи, які теж не мають головного періоду.

Наприклад, розглянемо функцію Діріхле[1] $y = \mathfrak{D}(x)$. Ця функція є періодичною, причому будь-яке раціональне число, відмінне від нуля, є її періодом. Це випливає з того, що сума двох раціональних чисел — число раціональне, а сума раціонального та ірраціональ-

[1] Нагадаємо, що $\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, \text{ якщо } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

ного чисел — число ірраціональне. Отже, функція Діріхле не має головного періоду.

Теорема 13.5. ***Якщо T — головний період функції f, то будь-який період функції f має вигляд nT, де $n \in \mathbb{Z}$ і $n \neq 0$.***

Доведення. Нехай T_1 — період, відмінний від указаних. Тоді можна підібрати таке ціле n і таке дійсне $\alpha \in (0; 1)$, що $T_1 = nT + \alpha T$. Маємо:

$$f(x) = f(x + T_1) = f(x + nT + \alpha T) = f(x + \alpha T),$$
$$f(x) = f(x - T_1) = f(x - nT - \alpha T) = f(x - \alpha T).$$

Отже, αT — період. Проте $0 < \alpha T < T$. Отримали суперечність (оскільки за умовою теореми T — головний період). ◄

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу:

1) $\sin 660°$; 2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$; 3) $\operatorname{tg} 135°$.

Розв'язання

1) $\sin 660° = \sin(720° - 60°) = \sin(-60° + 360° \cdot 2) =$

$= \sin(-60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) $\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = -\sin\frac{13\pi}{3} = -\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$

$= -\sin\left(2 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) $\operatorname{tg} 135° = \operatorname{tg}(-45° + 180°) = \operatorname{tg}(-45°) = -1$. ◄

На рисунку 13.1 зображено графік деякої періодичної функції f з періодом T, $D(f) = \mathbb{R}$.

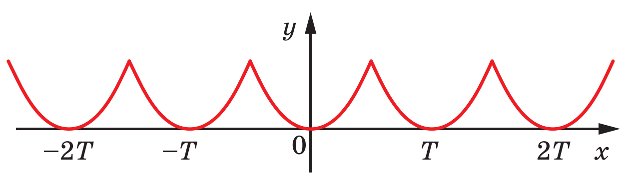


Рис. 13.1

Фрагменти графіка цієї функції на проміжках $[0; T]$, $[T; 2T]$, $[2T; 3T]$ і т. д., а також на проміжках $[-T; 0]$, $[-2T; -T]$, $[-3T; -2T]$ і т. д. є рівними фігурами, причому будь-яку із цих фігур можна отримати з будь-якої іншої паралельним перенесенням на вектор з координатами $(nT; 0)$, де n — деяке ціле число.

Узагалі, якщо проміжки $[a; b]$ і $[c; d]$ є такими, що $c = a + Tn$, $d = b + Tn$, $n \in \mathbb{Z}$, то частини графіка функції f на цих проміжках є рівними фігурами (рис. 13.2).

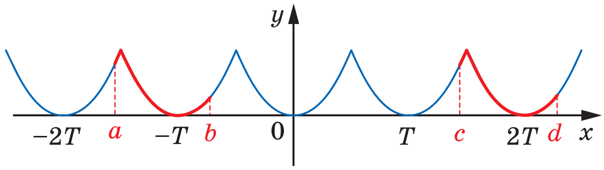


Рис.13.2

ПРИКЛАД 2 На рисунку 13.3 зображено фрагмент графіка періодичної функції, період якої дорівнює T. Побудуйте графік цієї функції на проміжку $\left[-\frac{3T}{2}; \frac{5T}{2}\right]$.

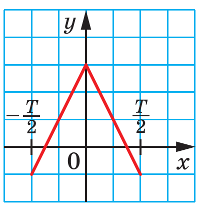


Рис. 13.3

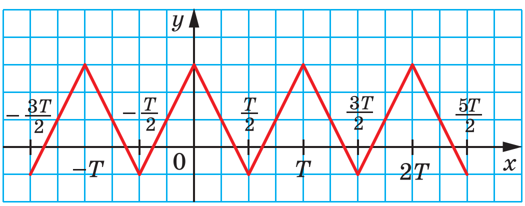


Рис. 13.4

Розв'язання. Побудуємо образи зображеної фігури, отримані в результаті паралельного перенесення на вектори з координатами $(T; 0)$, $(2T; 0)$ і $(-T; 0)$. Об'єднання даної фігури та отриманих образів — шуканий графік (рис. 13.4). ◄

ПРИКЛАД 3 Покажіть, що число $T = \pi$ є періодом функції $f(x) = \sqrt{-\cos^2 x}$.

Розв'язання. Областю визначення функції f є множина значень змінної x, при яких $\cos x = 0$, тобто

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Тоді якщо $x \in D(f)$, то $(x + \pi) \in D(f)$ і $(x - \pi) \in D(f)$.

Оскільки $E(f) = \{0\}$, то $f(x - \pi) = f(x) = f(x + \pi) = 0$. ◄

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що функція $f(x)=\frac{1}{x-2}$ не є періодичною.

Розв'язання. Зауважимо, що $D(f)=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$. Припустимо, що функція f є періодичною з періодом $T\neq 0$. Очевидно, що $x_0=2-T\in D(f)$, тоді $x_0+T=2-T+T\in D(f)$, тобто $2\in D(f)$ — отримали суперечність. ◄

Означення. **Додатні числа a і b називають сумірними (спільномірними), якщо $\frac{a}{b}$ — раціональне число. Якщо $\frac{a}{b}$ — ірраціональне число, то числа a і b є несумірними.**

Наприклад, числа в парах 3 і 5, $\sqrt{2}$ і $\sqrt{32}$ є сумірними, а числа 1 і $\sqrt{3}$ є несумірними.

Означення. **Число T, що є як періодом функції f, так і періодом функції g, називають спільним періодом функцій f і g.**

Наприклад, число $T=2\pi$ є спільним періодом функцій $y=\sin x$ і $y=\operatorname{tg} x$.

Теорема 13.6. ***Якщо існують період T_f функції f і період T_g функції g такі, що числа T_f і T_g є сумірними, то функції f і g мають спільний період.***

Доведення. Оскільки періоди T_f і T_g є сумірними, то $\frac{T_f}{T_g}=\frac{m}{n}$, де $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$. Звідси $T_f\cdot n=T_g\cdot m$. Тоді за наслідком з теореми 13.2 число $T=T_f\cdot n=T_g\cdot m$ є періодом як функції f, так і функції g. ◄

Доведення цієї теореми показує, як можна знаходити спільний період двох функцій.

ПРИКЛАД 5 Знайдіть період функції $y=\cos\frac{6x}{5}+\operatorname{tg}\frac{6x}{7}$.

Розв'язання. Якщо ми знайдемо спільний період функцій $f(x)=\cos\frac{6x}{5}$ і $g(x)=\operatorname{tg}\frac{6x}{7}$, то цим самим знайдемо період даної функції.

Скориставшись теоремою 13.3, запишемо:

$$T_f=2\pi:\frac{6}{5}=\frac{5\pi}{3},\quad T_g=\pi:\frac{6}{7}=\frac{7\pi}{6}.$$

Тоді $\frac{T_f}{T_g} = \frac{10}{7}$. Отже, періоди T_f і T_g є сумірними, а тому функції f і g мають спільний період T. Він дорівнює $7T_f$ або $10T_g$, тобто $T = \frac{35\pi}{3}$.

Відповідь: $\frac{35\pi}{3}$. ◄

ВПРАВИ

13.1.° Знайдіть значення виразу:

1) $\sin 390°$;
2) $\cos 420°$;
3) $\mathrm{ctg}\ 405°$;
4) $\cos(-750°)$;
5) $\mathrm{tg}(-210°)$;
6) $\mathrm{ctg}\ 225°$;
7) $\mathrm{tg}\ 150°$;
8) $\cos\frac{11\pi}{6}$;
9) $\sin\frac{5\pi}{3}$;
10) $\cos\frac{7\pi}{4}$.

13.2.° Знайдіть значення виразу:

1) $\mathrm{tg}(-315°)$;
2) $\sin 1110°$;
3) $\mathrm{tg}\ 765°$;
4) $\cos\frac{7\pi}{3}$;
5) $\mathrm{ctg}\frac{5\pi}{4}$;
6) $\sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$.

13.3.° На рисунку 13.5 зображено частину графіка періодичної функції, період якої дорівнює T. Побудуйте графік цієї функції на проміжку $[-2T; 3T]$.

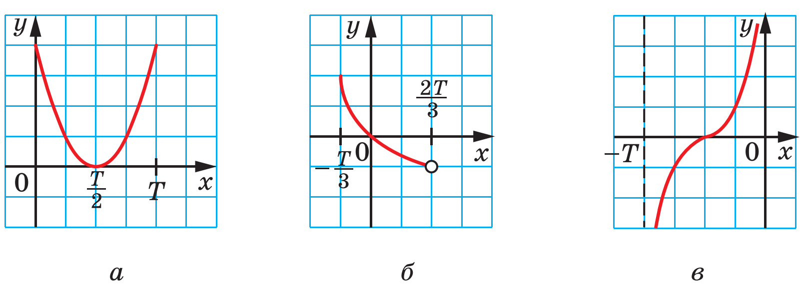
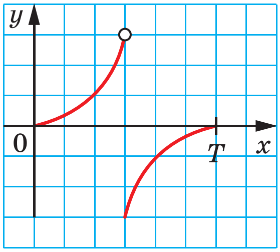
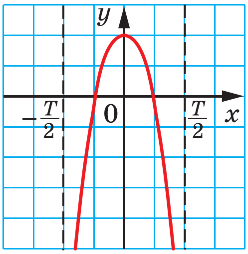


Рис. 13.5

13.4.° На рисунку 13.6 зображено частину графіка періодичної функції, період якої дорівнює T. Побудуйте графік цієї функції на проміжку $[-2T;\ 2T]$.



а



б

Рис. 13.6

13.5.° Доведіть, що число T є періодом функції f:

1) $f(x)=\cos\frac{x}{4}$, $T=8\pi$;
2) $f(x)=\operatorname{tg}\,3x$, $T=-\frac{2\pi}{3}$;
3) $f(x)=\operatorname{ctg}\,\pi x$, $T=3$;
4) $f(x)=\sin\,(5x-2)$, $T=\frac{4\pi}{5}$.

13.6.° Доведіть, що числа $\frac{2\pi}{3}$ і -4π є періодами функції $f(x)=\cos 3x$.

13.7.° Знайдіть головний період функції:

1) $f(x)=\cos(3x+1)$;
2) $f(x)=\operatorname{tg}(2x+1)$;
3) $f(x)=\operatorname{ctg}(-7x+2)$;
4) $f(x)=\sin 2\pi x$;
5) $f(x)=\left\{6x+\frac{5}{8}\right\}$;
6) $f(x)=\{-\sqrt{2}x\}$.

13.8.° Знайдіть головний період функції:

1) $f(x)=\sin\,(3x-1)$;
2) $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}+2\right)$;
3) $f(x)=\operatorname{tg}(-x+1)$;
4) $f(x)=\cos\,\pi x$;
5) $f(x)=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}+4\right)$;
6) $f(x)=\left\{\frac{x}{4}-2\right\}$.

13.9.° Функція f визначена на $\mathbb{R}$. Доведіть, що є періодичною функція:

1) $y=f(\cos x)$;
2) $y=f(\sin x)$.

13.10.° Для довільної функції f доведіть періодичність функції:

1) $y=f(\operatorname{tg} x)$;
2) $y=f(\operatorname{ctg} x)$.

13.11.• Доведіть, що число π є періодом функції $y=\sqrt{-\sin^2 x}$.

13.12. Знайдіть головний період функції $f(x)=\sqrt{1-\frac{1}{\sin^2 x}}$.

13.13. Доведіть, що функція $f(x)=\sin\left(\sqrt{x}\right)^2$ не є періодичною.

13.14. Доведіть, що функція $f(x)=\cos\left(\sqrt{x}\right)^2$ не є періодичною.

13.15. Знайдіть період функції:

1) $f(x)=\sin\frac{3x}{2}+\operatorname{tg}7x$;

2) $f(x)=\sin 3x+\cos\frac{3x}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{9x}{5}$;

3) $f(x)=\sin\pi x-2\cos\frac{\pi x}{3}$;

4) $f(x)=\sin\pi x+\left\{3x-\frac{1}{2}\right\}$.

13.16. Знайдіть період функції:

1) $f(x)=\cos x+2\sin\left(\frac{3x}{5}+\frac{\pi}{6}\right)$;

2) $f(x)=\cos\frac{5x}{8}+5\operatorname{tg}\left(\frac{7x}{11}-\frac{\pi}{4}\right)-\sin(6x-3)$;

3) $f(x)=\operatorname{tg}\frac{4\pi x}{9}+\operatorname{ctg}\frac{9\pi x}{4}$;

4) $f(x)=2\sin 5\pi x+\frac{1}{3}\{2x\}-\operatorname{ctg}\frac{13\pi x}{7}$.

13.17. При яких значеннях параметра a число π є періодом функції $f(x)=\frac{\sin x}{a-\cos x}$?

13.18. При яких значеннях параметра a число $\frac{\pi}{2}$ є періодом функції $f(x)=\frac{\cos 2x}{3a+\sin 2x}$?

13.19. Знайдіть усі раціональні значення параметра a, при яких функції $f(x)=\cos\frac{2x}{\sqrt{5+a^2}}$ і $g(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{125}-4a+1}$ мають спільний період.

13.20. При яких значеннях параметра a, де $a\in\mathbb{Q}$, серед періодів функцій $f(x)=\sin\frac{2ax}{a^2+\sqrt{12}}$ і $g(x)=\operatorname{tg}\frac{2x}{1-2a+\sqrt{108}}$ знайдуться однакові?

13.21. При яких цілих значеннях n число 5π є періодом функції $f(x)=\cos nx\sin\frac{15x}{n^2}$?

13.22.•• Функцію f задано формулою

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{101}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{101}\right) + \ldots + \sin\left(x + \frac{202\pi}{101}\right).$$

Чи має функція f додатний період, менший від 2π?

13.23.•• Чи існує функція, для якої кожне ірраціональне число є її періодом, проте не існує раціонального числа, яке було б її періодом?

13.24.•• Відомо, що функція $y = (f(x))^3 + f(x)$ є періодичною. Доведіть, що функція f також є періодичною.

13.25.•• Функція f є такою, що функція $y = (f(x))^2 + f(x)$ є періодичною. Чи обов'язково функція f також є періодичною?

13.26.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$2\cos ax - 3\,\mathrm{tg}^2\, x - 2 = 0$$

має єдиний розв'язок?

13.27.•• При яких значеннях параметра a рівняння $1 + \sin^2 ax = \cos x$ має єдиний розв'язок?

13.28.* Періодична функція f є такою, що серед чисел $f(1)$, $f(2)$, ... є нескінченна кількість різних. Доведіть, що кожний період функції f — число ірраціональне.

13.29.* Чи існує періодична функція f така, що $f(n) = n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$?

13.30.* Неперіодичні функції f і g визначені на $\mathbb{R}$. Чи може функція $y = f(g(x))$ бути періодичною?

13.31.* Функція f є такою, що $f(0) = 1$ і при всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x + 2) = \dfrac{f(x)}{5f(x) - 1}$. Знайдіть $f(100)$.

13.32.* Функція f є такою, що при всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x+1) + f(x-1) = \sqrt{2}\, f(x)$. Доведіть, що f — періодична функція.

13.33.* Доведіть:

1) періодичність функції

$$f(x) = [x] + \left[x + \frac{1}{5}\right] + \left[x + \frac{2}{5}\right] + \left[x + \frac{3}{5}\right] + \left[x + \frac{4}{5}\right] - [5x];$$

2) рівність $[x] + \left[x + \frac{1}{5}\right] + \left[x + \frac{2}{5}\right] + \left[x + \frac{3}{5}\right] + \left[x + \frac{4}{5}\right] = [5x]$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Про суму періодичних функцій

Функції $f(x) = \cos \frac{6x}{5}$ і $g(x) = \operatorname{tg} \frac{6x}{7}$ є періодичними. У прикладі 5 п. 13 ми з'ясували, що функція $y = f(x) + g(x)$ також є періодичною.

Виникає природне запитання: «Чи завжди сума двох періодичних функцій є періодичною функцією?»

Розглянемо функції $f(x) = \sqrt{-\sin^2 x}$ і $g(x) = \sqrt{-\cos^2 x}$. Ці функції є періодичними (див. приклад 3 і задачу 13.11 п. 13). При цьому $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$, $D(g) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Очевидно, що $D(f) \cap D(g) = \varnothing$. Отже, функція $y = f(x) + g(x)$ не визначена при жодному значенні x.

Спробуємо підкорегувати питання. Нехай періодичні функції f і g такі, що $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$. Чи завжди функція $y = f(x) + g(x)$ є періодичною?

Якщо існують сумірні періоди T_f і T_g функцій f і g відповідно, то згідно з теоремою 13.6 функції f і g мають спільний період, а отже, функція $y = f(x) + g(x)$ є періодичною.

Залишається розглянути випадок, коли будь-який додатний період функції f є несумірним з будь-яким додатним періодом функції g.

Наприклад, розглянемо функції $f(x) = \cos x$ і $g(x) = \cos\left(\sqrt{2}x\right)$.

Очевидно, що функції f і g не мають сумірних періодів.

Доведемо, що функція $y = \cos x + \cos\left(\sqrt{2}x\right)$ є неперіодичною.

Припустимо супротивне. Нехай число $T \neq 0$ є періодом цієї функції. Тоді для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\cos(x + T) + \cos\left(\sqrt{2}(x + T)\right) = \cos x + \cos\left(\sqrt{2}x\right).$$

При $x = 0$ ця рівність набуває такого вигляду:

$$\cos T + \cos\left(\sqrt{2}T\right) = 2.$$

Оскільки $\cos T \leqslant 1$ і $\cos\left(\sqrt{2}T\right) \leqslant 1$, то доходимо висновку, що

$$\begin{cases} \cos T = 1, \\ \cos\left(\sqrt{2}T\right) = 1. \end{cases}$$

З першого рівняння системи знаходимо, що $T = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, з другого — $T = \frac{2\pi n}{\sqrt{2}}, n \in \mathbb{Z}$. Це означає, що для деяких цілих m і n має виконуватися рівність $2\pi m = \frac{2\pi n}{\sqrt{2}}$. Звідси $m = \frac{n}{\sqrt{2}}$.

Але з огляду на ірраціональність числа $\sqrt{2}$ остання рівність можлива лише при $m = n = 0$, що суперечить умові $T \neq 0$.

Після цього прикладу може скластися враження, що коли періодичні функції f і g не мають сумірних періодів і $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$, то функція $y = f(x) + g(x)$ завжди є неперіодичною. Проте це не так.

Розглянемо функції

$$f(x) = \begin{cases} b, \text{ якщо } x = a + b\sqrt{2}, \\ 0, \text{ якщо } x \neq a + b\sqrt{2} \end{cases} \quad \text{і} \quad g(x) = \begin{cases} a, \text{ якщо } x = a + b\sqrt{2}, \\ 0, \text{ якщо } x \neq a + b\sqrt{2}, \end{cases}$$

де a і b — довільні цілі числа.

Наприклад, $f\left(3 + 2\sqrt{2}\right) = 2$, $g\left(3 + 2\sqrt{2}\right) = 3$,

$f\left(\sqrt{8}\right) = f\left(0 + 2\sqrt{2}\right) = 2$, $g\left(\sqrt{8}\right) = g\left(0 + 2\sqrt{2}\right) = 0$,

$f\left(\sqrt{3}\right) = 0$, $g\left(\sqrt{3}\right) = 0$, оскільки число $\sqrt{3}$ неможливо подати у вигляді $a + b\sqrt{2}$ із цілими a і b.

Множину чисел виду $a + b\sqrt{2}$, де a і b — цілі числа, позначатимемо $Z\left(\sqrt{2}\right)$. Зауважимо, що кожне число $x \in Z\left(\sqrt{2}\right)$ однозначно задає відповідні числа a і b.

Неважко переконатися, що $T = 1$ є періодом функції f. Покажемо, що це число є головним періодом.

Припустимо, що функція f має період $T_1 \in (0;\ 1)$. Розглянемо два випадки.

1) $T_1 \in Z\left(\sqrt{2}\right)$, тобто $T_1 = a + b\sqrt{2}$, де a і b — деякі цілі числа. Зазначимо, що $b \neq 0$, інакше T_1 — ціле і $T_1 \notin (0;\ 1)$. Тоді рівність $f(x) = f(x + T_1)$ не виконується, наприклад, при $x = 0$. Справді, $f(0) = 0$, а $f(T_1) = f\left(a + b\sqrt{2}\right) = b$.

2) $T_1 \notin Z\left(\sqrt{2}\right)$. Тоді рівність $f(x) = f(x + T_1)$ не виконується, наприклад, при $x = \sqrt{2}$. Справді, $f\left(\sqrt{2}\right) = 1$, а $f\left(\sqrt{2} + T_1\right) = 0$, оскільки $\sqrt{2} + T_1 \notin Z\left(\sqrt{2}\right)$.

Аналогічно можна показати, що головним періодом функції g є число $\sqrt{2}$.

Отже, згідно з теоремою 13.5 періодами функції f є лише цілі числа n, де $n \neq 0$, а періодами функції g — лише числа виду $\sqrt{2}k$, де $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Тоді зрозуміло, що жодні два періоди функцій f і g не є сумірними.

Функція $y = f(x) + g(x)$ визначається так:

$$y = \begin{cases} a + b, & \text{якщо } x = a + b\sqrt{2}, \\ 0, & \text{якщо } x \neq a + b\sqrt{2}, \end{cases}$$

де a і b — довільні цілі числа.

Легко перевірити, що число $T = \sqrt{2} - 1$ є періодом цієї функції.

Отже, ми показали, що коли будь-які додатні періоди функцій f і g несумірні та $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$, то функція $y = f(x) + g(x)$ може бути як неперіодичною, так і періодичною.

Проте можна довести такий факт: якщо неперервні на $\mathbb{R}$ періодичні функції f і g не мають сумірних періодів, то функція $y = f(x) + g(x)$ є неперіодичною.

14. Властивості та графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$

Періодичність тригонометричних функцій дає змогу досліджувати їхні властивості та будувати графіки за такою схемою.

1) Розглянути проміжок виду $[a;\ a + T]$, тобто довільний проміжок завдовжки в період T (найчастіше вибирають проміжок $[0;\ T]$ або проміжок $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$).

2) Дослідити властивості функції на вибраному проміжку.

3) Побудувати графік функції на цьому проміжку.

4) Здійснити паралельне перенесення отриманої фігури на вектори з координатами $(nT;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Розглянемо функцію $y = \sin x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції.

Під час повороту точки $P_0\ (1;\ 0)$ навколо початку координат на кути від 0 до $\frac{\pi}{2}$ (рис. 14.1) більшому куту повороту відповідає точка одиничного кола з більшою

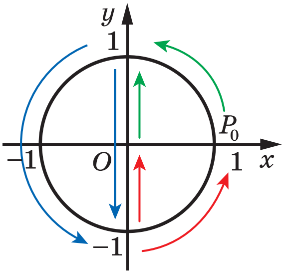


Рис. 14.1

ординатою. Це означає, що функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Під час повороту точки P_0 (1; 0) на кути від $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{3\pi}{2}$ більшому куту повороту відповідає точка одиничного кола з меншою ординатою (рис. 14.1). Отже, функція $y = \sin x$ спадає на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Під час повороту точки P_0 (1; 0) на кути від $\frac{3\pi}{2}$ до 2π більшому куту повороту відповідає точка одиничного кола з більшою ординатою (рис. 14.1). Таким чином, функція $y = \sin x$ зростає на проміжку $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Функція $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ має три нулі: $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.

Якщо $x \in (0; \pi)$, то $\sin x > 0$; якщо $x \in (\pi; 2\pi)$, то $\sin x < 0$.

Функція $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ досягає найбільшого значення, яке дорівнює 1, при $x = \frac{\pi}{2}$ і найменшого значення, яке дорівнює -1, при $x = \frac{3\pi}{2}$.

Функція $y = \sin x$ на проміжку $[0; 2\pi]$ набуває всіх значень із проміжку $[-1; 1]$.

Отримані властивості функції $y = \sin x$ дають змогу побудувати її графік на проміжку $[0; 2\pi]$ (рис. 14.2). Графік можна побудувати точніше, якщо скористатися даними таблиці значень тригонометричних функцій деяких кутів, наведеної на форзаці 4.

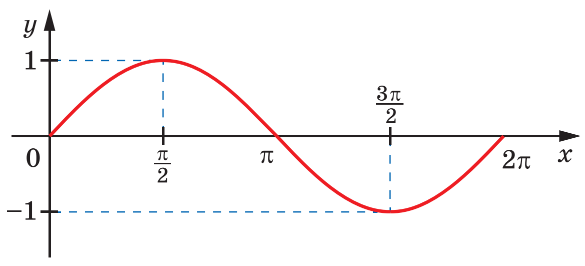


Рис. 14.2

На всій області визначення графік функції $y = \sin x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(2\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 14.3).

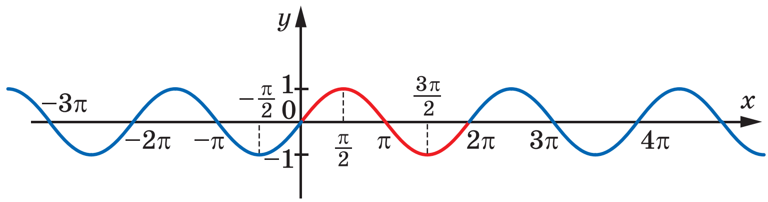


Рис. 14.3

Графік функції $y = \sin x$ називають **синусоїдою**.

У п. 12 було встановлено, що для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$. Це означає, що ***функція синус є непарною***.

Розглянемо функцію $y = \cos x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції.

Розглядаючи повороти точки $P_0\ (1;\ 0)$ навколо початку координат (рис. 14.4), можна дійти таких висновків.

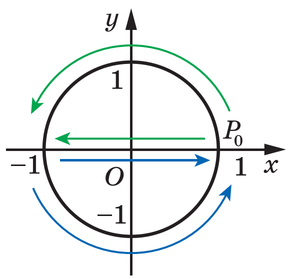


Рис. 14.4

Функція $y = \cos x$ спадає на проміжку $[0;\ \pi]$ і зростає на проміжку $[\pi;\ 2\pi]$.

Функція $y = \cos x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$ має два нулі: $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

Якщо $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$, то $\cos x > 0$; якщо $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, то $\cos x < 0$.

Функція $y = \cos x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$ досягає свого найбільшого значення, яке дорівнює 1, при $x = 0$ або $x = 2\pi$ і найменшого значення, яке дорівнює -1, при $x = \pi$.

Функція $y = \cos x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$ набуває всіх значень із проміжку $[-1;\ 1]$.

Графік функції $y = \cos x$ на проміжку $[0;\ 2\pi]$ зображено на рисунку 14.5.

На всій області визначення графік функції $y = \cos x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(2\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 14.6).

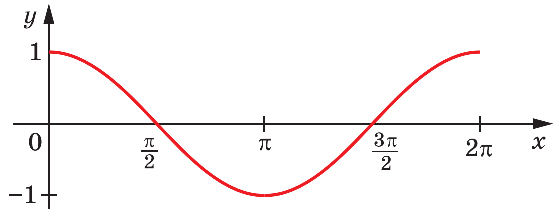


Рис. 14.5

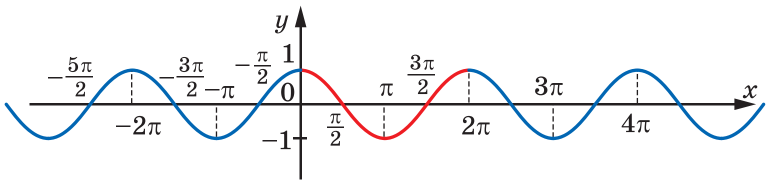


Рис. 14.6

Графік функції $y = \cos x$ називають **косинусоїдою**.

У п. 12 було встановлено, що для будь-якого $\alpha \in \mathbb{R}$ виконується рівність $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$. Це означає, що ***функція косинус є парною***.

Якщо скористатися формулою $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (див. приклад 2 п. 11), то стає зрозумілим, що графік функції $y = \cos x$ можна отримати як результат паралельного перенесення графіка функції $y = \sin x$ на вектор з координатами $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ (рис. 14.7). Це означає, що графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є рівними фігурами.

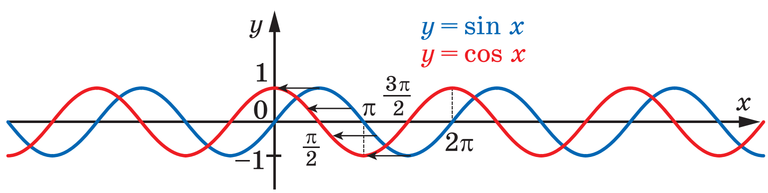


Рис. 14.7

ПРИКЛАД 1 Порівняйте: 1) $\sin 0{,}7\pi$ і $\sin 0{,}71\pi$; 2) $\cos 324°$ і $\cos 340°$.

Розв'язання. 1) Оскільки числа $0,7\pi$ і $0,71\pi$ належать проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, на якому функція $y = \sin x$ спадає, і $0,7\pi < 0,71\pi$, то $\sin 0,7\pi > \sin 0,71\pi$.

2) Оскільки кути $324°$ і $340°$ належать проміжку $[180°; 360°]$, на якому функція $y = \cos x$ зростає, і $324° < 340°$, то $\cos 324° < \cos 340°$. ◄

ПРИКЛАД 2 Порівняйте $\sin 40°$ і $\cos 40°$.

Розв'язання. Оскільки $\sin 40° < \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 40° > \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos 40° > \sin 40°$. ◄

ПРИКЛАД 3 Чи можлива рівність $\sin\alpha = 2\sin 31°$?

Розв'язання. Оскільки $\sin 31° > \sin 30° = \frac{1}{2}$, то $2\sin 31° > 1$. Отже, дана рівність неможлива. ◄

ПРИКЛАД 4 Побудуйте графік функції $y = \sin\left|2x - \frac{\pi}{3}\right|$.

Розв'язання. Проведемо такі перетворення:

1) $y = \sin x \to y = \sin|x|$ — симетрія відносно осі ординат частини графіка, яка лежить у півплощині $x \geqslant 0$;

2) $y = \sin|x| \to y = \sin|2x|$ — стискання до осі ординат у 2 рази;

3) $y = \sin|2x| \to y = \sin\left|2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$ — паралельне перенесення вздовж осі абсцис управо на $\frac{\pi}{6}$ одиниць (рис. 14.8). ◄

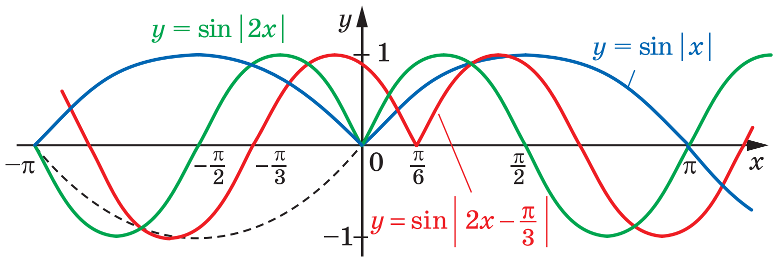


Рис. 14.8

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $y = \sin\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right)$.

Розв'язання. Проведемо такі перетворення:

1) $y = \sin x \rightarrow y = \sin 2x$ — стиск до осі ординат у 2 рази;

2) $y = \sin 2x \rightarrow y = \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)$ — паралельне перенесення вздовж осі абсцис управо на $\frac{\pi}{6}$ одиниць;

3) $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow y = \sin\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right)$ — симетрія відносно осі ординат частини графіка, яка лежить у півплощині $x \geqslant 0$. Шуканий графік складається з двох симетричних частин (рис. 14.9). ◄

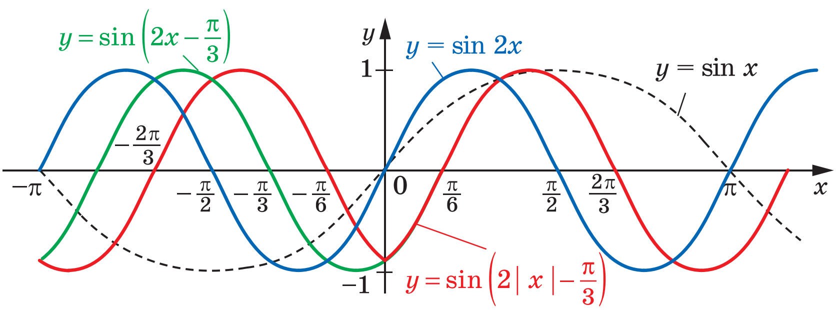


Рис. 14.9

ПРИКЛАД 6 Побудуйте графік рівняння $\cos x + \cos y = 2$.

Розв'язання. Оскільки $|\cos x| \leqslant 1$ і $|\cos y| \leqslant 1$, то дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos y = 1. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ y = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Шуканий графік — це множина точок, зображених на рисунку 14.10. ◄

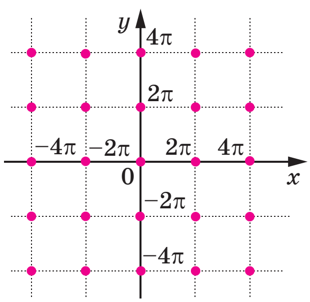


Рис. 14.10

ВПРАВИ

14.1.° На проміжку $[-2\pi; 2\pi]$ укажіть:
1) нулі функції $y = \sin x$;
2) значення аргументу, при яких функція $y = \sin x$ набуває найбільшого значення;
3) значення аргументу, при яких функція $y = \sin x$ набуває найменшого значення.

14.2.° На проміжку $[-\pi; 3\pi]$ укажіть:
1) нулі функції $y = \cos x$;
2) значення аргументу, при яких функція $y = \cos x$ набуває найбільшого значення;
3) значення аргументу, при яких функція $y = \cos x$ набуває найменшого значення.

14.3.° На яких із наведених проміжків функція $y = \sin x$ зростає:
1) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$; 3) $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$; 4) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$?

14.4.° Які з наведених проміжків є проміжками спадання функції $y = \cos x$:
1) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right]$; 2) $[-2\pi; -\pi]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; 4) $[6\pi; 7\pi]$.

14.5.° Порівняйте значення тригонометричних функцій:
1) $\sin 20°$ і $\sin 21°$; 3) $\sin \frac{10\pi}{9}$ і $\sin \frac{25\pi}{18}$; 5) $\cos 5{,}1$ і $\cos 5$;
2) $\cos 20°$ і $\cos 21°$; 4) $\cos \frac{10\pi}{9}$ і $\cos \frac{25\pi}{18}$; 6) $\sin 2$ і $\sin 2{,}1$.

14.6.° Порівняйте значення тригонометричних функцій:
1) $\cos \frac{\pi}{9}$ і $\cos \frac{4\pi}{9}$; 3) $\sin\left(-\frac{7\pi}{30}\right)$ і $\sin\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$;
2) $\sin \frac{5\pi}{9}$ і $\sin \frac{17\pi}{18}$; 4) $\cos \frac{10\pi}{7}$ і $\cos \frac{11\pi}{9}$.

14.7.° Розташуйте числа в порядку зростання:
1) $\sin 3{,}2$, $\sin 4$, $\sin 3{,}6$, $\sin 2{,}4$, $\sin 1{,}8$;
2) $\cos 3{,}5$, $\cos 4{,}8$, $\cos 6{,}1$, $\cos 5{,}6$, $\cos 4{,}2$.

14.8.° Розташуйте числа в порядку спадання:
1) $\sin(-0{,}2)$, $\sin 0{,}2$, $\sin 1{,}5$, $\sin 1$, $\sin 0{,}9$;
2) $\cos 0{,}1$, $\cos 1{,}4$, $\cos 2{,}4$, $\cos 3{,}1$, $\cos 1{,}8$.

14.9.• Порівняйте:
1) $\sin 58°$ і $\cos 58°$; 2) $\sin 18°$ і $\cos 18°$; 3) $\cos 80°$ і $\sin 70°$.

14.10.° Чи можлива рівність:

1) $\cos\alpha = 2\sin 25°$;
2) $\sin\alpha = \sqrt{2}\cos 35°$?

14.11.° Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2$;
2) $y = -\frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$;
3) $y = \sin\left|x + \frac{\pi}{4}\right|$;
4) $y = 2\cos\left|x - \frac{\pi}{3}\right|$.

14.12.° Побудуйте графік функції:

1) $y = -3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}$;
2) $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$;
3) $y = 2\sin\left|x + \frac{\pi}{6}\right|$;
4) $y = -\cos\left|x - \frac{\pi}{4}\right|$.

14.13.° Побудуйте графік функції, укажіть область значень даної функції, її нулі, проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання, якого найбільшого і найменшого значення може набувати функція та при яких значеннях аргументу:

1) $y = \sin x + 1$;
2) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
3) $y = \sin 2x$;
4) $y = -\frac{1}{2}\sin x$.

14.14.° Побудуйте графік функції, укажіть область значення даної функції, її нулі, проміжки знакосталості, проміжки зростання і проміжки спадання, якого найбільшого і найменшого значення може набувати функція та при яких значеннях аргументу:

1) $y = \cos x - 1$;
2) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;
3) $y = \cos\frac{x}{2}$;
4) $y = 3\cos x$.

14.15.° Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$;
2) $y = 2\cos|3x + 2|$;
3) $y = -2\sin\left(\frac{1}{2}|x| - 1\right)$;
4) $y = \left|\cos\left|2x - \frac{\pi}{3}\right|\right|$.

14.16.° Побудуйте графік функції:

1) $y = -3\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 2$;
2) $y = 3\sin|2x - 1|$;
3) $y = \frac{1}{2}\cos\left(2|x| + \frac{\pi}{3}\right)$;
4) $y = \left|\cos\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right)\right|$.

14.17.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt{\sin x}\right)^2$;
2) $y = \sin x + \sin |x|$;
3) $y = \cos x + \sqrt{\cos^2 x}$;
4) $y = \sqrt{-\sin^2 x}$;
5) $y = \sqrt{\cos x - 1}$;
6) $y = \dfrac{\sin |x|}{\sin x}$;
7) $y = \dfrac{\sin x}{|\sin x|}$;
8) $y = \operatorname{tg} x\, |\cos x|$.

14.18.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt{\cos x}\right)^2$;
2) $y = \sin x - \sqrt{\sin^2 x}$;
3) $y = \sqrt{-\cos^2 x}$;
4) $y = \sqrt{\sin x - 1}$;
5) $y = \dfrac{|\cos x|}{\cos x}$;
6) $y = \operatorname{ctg} x \sin x$;
7) $y = \operatorname{ctg} x\, |\sin x|$;
8) $y = \dfrac{\sin |x|}{|\sin x|}$.

14.19.•• Скільки коренів має рівняння $\sin x = \dfrac{x}{10\pi}$?

14.20.•• Скільки коренів має рівняння $\cos x = \dfrac{|x|}{4\pi}$?

14.21.•• Побудуйте графік рівняння:

1) $\sin \pi (x^2 + y^2) = 0$;
2) $\sin x + \sin y = 2$.

14.22.•• Побудуйте графік рівняння:

1) $\cos \pi (x^2 + y^2) = 1$;
2) $\cos x + \cos y = -2$.

14.23.•• Побудуйте графік рівняння:

1) $\sin x = 0$;
2) $y \sin x = 0$;
3) $x^2 + \sin^2 x = 0$;
4) $|y| = \sin x$.

14.24.•• Побудуйте графік рівняння:

1) $\sin y = 0$;
2) $x \sin y = 0$;
3) $y^2 + \cos^2 x = 0$;
4) $|y| = \cos x$.

14.25.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких рівняння $\cos \sqrt{a^2 - x^2} = 1$ має рівно 8 коренів.

14.26.* Чи існує визначена на проміжку $[-1; 1]$ функція f така, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $|f(\cos x) + \sin x| < 1$?

15. Властивості та графіки функцій $y = \mathrm{tg}\, x$ і $y = \mathrm{ctg}\, x$

Розглянемо функцію $y = \mathrm{tg}\ x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тобто на проміжку завдовжки в період цієї функції (нагадаємо, що функція $y = \mathrm{tg}\ x$ у точках $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$ не визначена).

З рисунка 15.1 видно, що зі зміною кута повороту x від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ значення тангенса збільшуються. Це означає, що функція $y = \mathrm{tg}\ x$ зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Також з рисунка 15.1 видно, що функція $y = \mathrm{tg}\ x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ набуває всіх значень із проміжку $(-\infty\ ;\ +\infty)$.

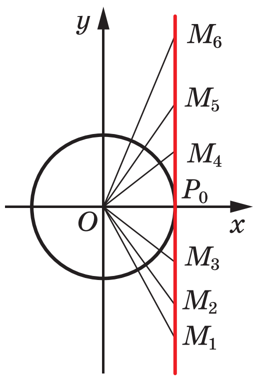


Рис. 15.1

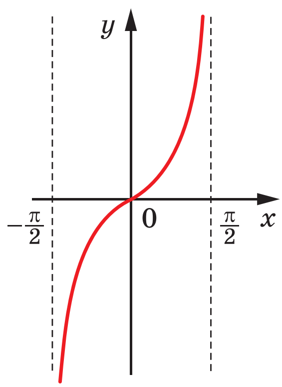


Рис. 15.2

Функція $y = \mathrm{tg}\ x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має один нуль: $x = 0$.

Якщо $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, то $\mathrm{tg}\ x < 0$; якщо $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\mathrm{tg}\ x > 0$.

Отримані властивості функції $y = \mathrm{tg}\ x$ дають змогу побудувати її графік на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 15.2). Графік можна побудувати

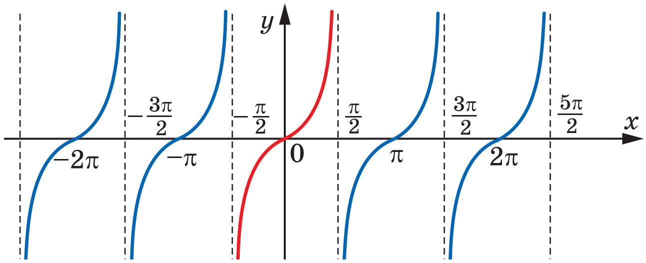


Рис. 15.3

точніше, якщо скористатися даними таблиці значень тригонометричних функцій деяких кутів, наведеної на форзаці 4.

На всій області визначення графік функції $y = \text{tg}\ x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 15.3).

Розглянемо функцію $y = \text{ctg}\ x$ на проміжку $(0;\ \pi)$, тобто на проміжку завдовжки в період (нагадаємо, що функція $y = \text{ctg}\ x$ не визначена в точках 0 і π).

З рисунка 15.4 видно, що зі зміною кута повороту x від 0 до π значення котангенса зменшуються. Це означає, що функція $y = \text{ctg}\ x$ спадає на проміжку $(0;\ \pi)$.

Також з рисунка 15.4 видно, що функція $y = \text{ctg}\ x$ на проміжку $(0;\ \pi)$ набуває всіх значень із проміжку $(-\infty;\ +\infty)$.

Функція $y = \text{ctg}\ x$ на проміжку $(0;\ \pi)$ має один нуль: $x = \frac{\pi}{2}$.

Якщо $x \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, то $\text{ctg}\ x > 0$; якщо $x \in \left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right)$, то $\text{ctg}\ x < 0$.

Графік функції $y = \text{ctg}\ x$ на проміжку $(0;\ \pi)$ зображено на рисунку 15.5.

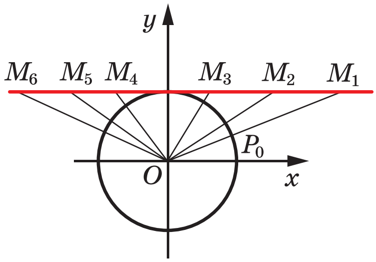


Рис. 15.4

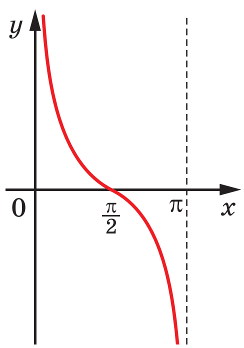


Рис. 15.5

На всій області визначення графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ можна отримати з побудованого графіка за допомогою паралельних перенесень на вектори з координатами $(\pi n;\ 0)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 15.6).

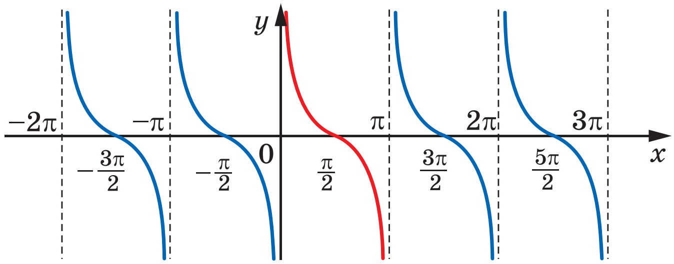


Рис. 15.6

Області визначення кожної з функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ є симетричними відносно початку координат (перевірте це самостійно). Крім того, у п. 12 були встановлені рівності:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha;$$
$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Отже, ***функції тангенс і котангенс — непарні***.

Означення. Функцію f називають обмеженою, якщо існує число M таке, що для будь-якого $x \in D(f)$ виконується нерівність $|f(x)| \leqslant M$.

Зрозуміло, що функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ є обмеженими, а функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ не є обмеженими.

ПРИКЛАД Побудуйте графік функції $y = |\operatorname{ctg} x| \operatorname{tg} x$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є всі дійсні числа, крім чисел виду $\frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$, тобто

$$D(y) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Якщо $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, то $\operatorname{ctg} x > 0$ і $y = 1$.

Якщо $\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, то $\operatorname{ctg} x < 0$ і $y = -1$.

Шуканий графік складається з окремих відрізків з «виколотими» кінцями (рис. 15.7). ◄

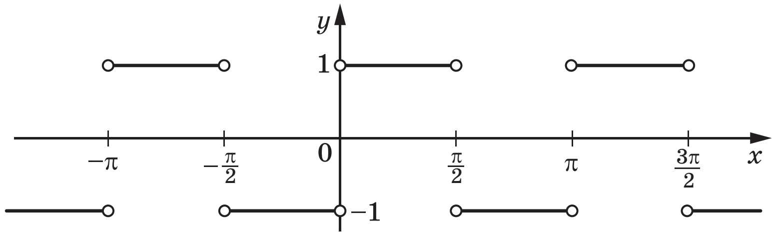


Рис. 15.7

ВПРАВИ

15.1.° Чи проходить графік функції $y = \operatorname{tg} x$ через точку:

1) $A\left(-\frac{\pi}{4}; 1\right)$; 2) $B\left(-\frac{\pi}{3}; -\sqrt{3}\right)$; 3) $C\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$; 4) $D\left(\frac{7\pi}{6}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$?

15.2.° Чи проходить графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ через точку:

1) $A\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$; 2) $B\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$; 3) $C\ (\pi;\ 1)$; 4) $D\left(\frac{4\pi}{3}; \sqrt{3}\right)$?

15.3.° Порівняйте значення тригонометричних функцій:

1) $\operatorname{tg}(-38°)$ і $\operatorname{tg}(-42°)$;
2) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$ і $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{15}$;
3) $\operatorname{tg} 1$ і $\operatorname{tg} 1{,}5$;
4) $\operatorname{ctg} 24°$ і $\operatorname{ctg} 28°$;
5) $\operatorname{ctg}(-40°)$ і $\operatorname{ctg}(-60°)$;
6) $\operatorname{ctg} 2$ і $\operatorname{ctg} 3$.

15.4.° Порівняйте значення тригонометричних функцій:

1) $\operatorname{tg} 100°$ і $\operatorname{tg} 92°$;
2) $\operatorname{ctg} 100°$ і $\operatorname{ctg} 92°$;
3) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{9}$ і $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{18}$;
4) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}$ і $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$;
5) $\operatorname{tg}(-1)$ і $\operatorname{tg}(-1{,}2)$;
6) $\operatorname{ctg}(-3)$ і $\operatorname{ctg}(-3{,}1)$.

15.5.° Розташуйте в порядку спадання числа: $\operatorname{tg} 0{,}5$, $\operatorname{tg} 1{,}2$, $\operatorname{tg}(-0{,}4)$, $\operatorname{tg} 0{,}9$.

15.6.° Розташуйте в порядку зростання числа: $\operatorname{ctg}(-0{,}7)$, $\operatorname{ctg}(-2{,}4)$, $\operatorname{ctg}(-2{,}8)$, $\operatorname{ctg}(-1{,}4)$.

15.7.° Побудуйте графік функції:

1) $y = -\operatorname{tg} x$;
2) $y = \operatorname{tg} x + 2$;
3) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;
4) $y = \operatorname{tg} 3x$.

15.8.° Побудуйте графік функції:

1) $y = -\text{ctg}\ x$;
2) $y = \text{ctg}\ x - 1$;
3) $y = \text{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;
4) $y = \text{ctg}\ \frac{x}{2}$.

15.9.• Чи можлива рівність:

1) $\sin\alpha = \frac{2}{3}\text{tg}\,80°$; 2) $\cos\alpha = \text{ctg}\,\frac{\pi}{18}$; 3) $\cos\alpha = \text{tg}\,\frac{\pi}{9}$?

15.10.• Порівняйте:

1) $\sin 78°$ і $\text{tg}\ 78°$;
2) $\sin 40°$ і $\text{ctg}\ 20°$.

15.11.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{2}\text{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$;
2) $y = \text{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

15.12.• Побудуйте графік функції:

1) $y = 2\,\text{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$;
2) $y = \text{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right)$.

15.13.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt{\text{ctg}\,x}\right)^2$;
2) $y = \text{tg}\ x + \text{tg}\ |x|$;
3) $y = \sqrt{-\text{tg}^2\ x}$;
4) $y = \frac{\text{ctg}\,x}{|\text{ctg}\,x|}$;
5) $y = \text{ctg}\,x - \sqrt{\text{ctg}^2\ x}$;
6) $y = \frac{1}{\text{tg}\,x\,\text{ctg}\,x}$.

15.14.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left(\sqrt{\text{tg}\,x}\right)^2$;
2) $y = \text{ctg}\ x - \text{ctg}\ |x|$;
3) $y = \sqrt{-\text{ctg}^2\ x}$;
4) $y = \frac{|\text{tg}\,x|}{\text{tg}\,x}$;
5) $y = \text{tg}\,x + \sqrt{\text{tg}^2\ x}$;
6) $y = \text{tg}\ x\ \text{ctg}\ x$.

15.15.• Побудуйте графік рівняння:

1) $y\ \text{tg}\ x = 0$;
2) $\text{tg}\ x\ \text{tg}\ y = 0$;
3) $\text{tg}^2\ x + \text{tg}^2\ y = 0$;
4) $\text{tg}\left(\pi\left(2|x| + |y|\right)\right) = 0$.

15.16.• Побудуйте графік рівняння:

1) $x\ \text{tg}\ y = 0$;
2) $\frac{\text{tg}\,x}{\text{tg}\,y} = 0$;
3) $x^2 + \text{tg}^2\ y = 0$;
4) $\text{ctg}\left(|y| - |x|\right) = 0$.

16. Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

У цьому пункті встановимо тотожності, які пов'язують значення тригонометричних функцій одного й того самого аргументу.

Координати будь-якої точки $P\ (x;\ y)$ одиничного кола задовольняють рівняння $x^2 + y^2 = 1$. Оскільки $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$, де α — кут повороту, у результаті якого з точки $P_0\,(1;\ 0)$ було отримано точку P, то

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \qquad (1)$$

Звернемо увагу на те, що точку P вибрано довільно, тому тотожність (1) справедлива для будь-якого α. Її називають **основною тригонометричною тотожністю**.

Використовуючи основну тригонометричну тотожність, знайдемо залежності між тангенсом і косинусом, а також між котангенсом і синусом.

Припустивши, що $\cos\alpha \neq 0$, поділимо обидві частини рівності (1) на $\cos^2\alpha$. Отримаємо:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Звідси

$$\boxed{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

Ця тотожність є правильною для всіх α, при яких $\cos\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Припустивши, що $\sin\alpha \neq 0$, поділимо обидві частини рівності (1) на $\sin^2\alpha$. Отримаємо:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Звідси

$$\boxed{1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

Ця тотожність є правильною для всіх α, при яких $\sin\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Зв'язок між тангенсом і котангенсом можна встановити за допомогою означень цих функцій.

Маємо: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Звідси

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1} \qquad (2)$$

Ця тотожність є правильною для всіх α, при яких $\sin\alpha \neq 0$ і $\cos\alpha \neq 0$, тобто при $\alpha \neq \pi k$ і $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Зазначимо, що

$$\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \pi k, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\} =$$

$$= \left\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Тому тотожність (2) є правильною для всіх α таких, що $\alpha \neq \dfrac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз: 1) $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x$; 2) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Розв'язання. 1) $\sin^2 t + \cos^2 t + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

2) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}{1+\cos\alpha} = 1 - \cos\alpha.$ ◄

ПРИКЛАД 2 Доведіть тотожність:

1) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta = 1$;

2) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = 2\operatorname{tg}^2\alpha$.

Розв'язання. 1) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta =$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha(\sin^2\beta + \cos^2\beta) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

2) $$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - 1}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{1 + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1}{\cos\alpha\left(\dfrac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{2\sin\alpha\cdot\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$$

$$= 2\operatorname{tg}^2\alpha. \text{ ◄}$$

ПРИКЛАД 3 Відомо, що $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. Обчисліть $\sin\alpha$.

Розв'язання. Маємо:

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

Звідси $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ або $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Рисунок 16.1 ілюструє цей приклад. ◄

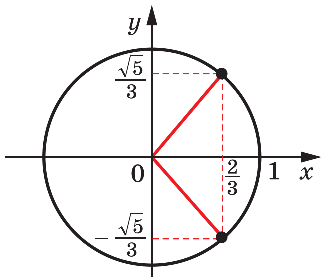


Рис. 16.1

ПРИКЛАД 4 Знайдіть $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625}.$$

Оскільки $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, то $\cos\alpha < 0$; отже, $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{576}{625}} = -\frac{24}{25}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{7}{25} : \left(-\frac{24}{25}\right) = \frac{7}{24};\quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{24}{7}.$$ ◄

ПРИКЛАД 5 Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{12}$, $90° < \alpha < 270°$. Знайдіть $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

Розв'язання. Маємо: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$.

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 1 + \frac{25}{144} = \frac{169}{144};\quad \sin^2\alpha = \frac{144}{169}.$$

Оскільки $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ і $90° < \alpha < 270°$, то $180° < \alpha < 270°$. Отже, $\sin\alpha < 0$. Тоді $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$.

Маємо: $\cos\alpha = \operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha = \frac{5}{12}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{5}{13}$. ◄

ПРИКЛАД 6 Спростіть вираз $\sqrt{\sin^2\alpha\,(1-\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha\,(1-\operatorname{tg}\alpha)}$, якщо $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

Розв'язання. $\sqrt{\sin^2\alpha\,(1-\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha\,(1-\operatorname{tg}\alpha)}=$

$$=\sqrt{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=$$

$$=\sqrt{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\cos\alpha\sin\alpha}=$$

$$=\sqrt{\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}=\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=|\sin\alpha-\cos\alpha|.$$

Оскільки $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$, то $\sin\alpha<0$, $\cos\alpha>0$, тому $\sin\alpha-\cos\alpha<0$. Отже, $|\sin\alpha-\cos\alpha|=\cos\alpha-\sin\alpha$.

Відповідь: $\cos\alpha-\sin\alpha$. ◄

ВПРАВИ

16.1.° Спростіть вираз:

1) $1-\sin^2 3\alpha-\cos^2 3\alpha$;
2) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$;
3) $\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$;
4) $\frac{1}{\cos^2\alpha}-1$;
5) $1-\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\sin^2\alpha$;
6) $\cos^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-\frac{1}{\sin^2\alpha}$;
7) $\left(1+\sin\frac{x}{2}\right)\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)$;
8) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$.

16.2.° Спростіть вираз:

1) $\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha+\operatorname{ctg}^2 5\alpha$;
2) $\sin\frac{\alpha}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{3}$;
3) $1-\frac{1}{\sin^2\gamma}$;
4) $\frac{\sin^2\alpha-1}{\cos^2\alpha-1}+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;
5) $(\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha)^2+(\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha)^2$;
6) $\frac{\sin^2\alpha}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha\,(\cos^2\alpha-1)}$;
7) $\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\right)$;
8) $(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}\beta)^2-(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{ctg}\beta)^2$.

16.3.° Чи можуть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ одночасно дорівнювати нулю?

16.4.° Чи можуть $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$ за модулем бути: 1) обидва більші за 1; 2) обидва менші від 1?

16.5.° Спростіть вираз:

1) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2$;

2) $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;

3) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$;

4) $\operatorname{ctg}x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$;

5) $\dfrac{1-\sin x}{\cos x}-\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$;

6) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$;

7) $\dfrac{\operatorname{tg}3\alpha}{\operatorname{tg}^2 3\alpha-1}\cdot\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2 3\alpha}{\operatorname{ctg}3\alpha}$;

8) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$;

9) $\cos^4\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$;

10) $\dfrac{1+\sin(-\beta)}{\cos(-\beta)}-\operatorname{tg}(-\beta)$.

16.6.° Спростіть вираз:

1) $(1+\operatorname{ctg}\beta)^2+(1-\operatorname{ctg}\beta)^2$;

2) $\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2)$;

3) $\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}+\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}$;

4) $\operatorname{tg}x+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$;

5) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}$;

6) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}$;

7) $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;

8) $\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}\alpha+\sin^2(-\alpha)$.

16.7.° Знайдіть значення тригонометричних функцій аргументу α, якщо:

1) $\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$;

2) $\sin\alpha=0{,}6$ і $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

3) $\operatorname{tg}\alpha=2$ і $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha=-\dfrac{4}{3}$ і $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

16.8.° Знайдіть значення тригонометричних функцій аргументу α, якщо:

1) $\cos\alpha=\dfrac{12}{13}$ і $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$;

2) $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ і $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{1}{3}$ і $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

4) $\operatorname{ctg}\alpha=-7$ і $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

16.9.° Чи можуть одночасно виконуватися рівності:

1) $\sin\alpha=\dfrac{1}{4}$ і $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$;

2) $\operatorname{tg}\alpha=2{,}5$ і $\operatorname{ctg}\alpha=0{,}6$;

3) $\cos\alpha=\dfrac{5}{7}$ і $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$?

16.10.° Чи можуть одночасно виконуватися рівності:

1) $\sin\alpha = \frac{2}{5}$ і $\cos\alpha = \frac{3}{5}$;

2) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{4}{9}$ і $\mathrm{ctg}\,\alpha = 1\frac{1}{4}$;

3) $\sin\alpha = -\frac{1}{6}$ і $\mathrm{ctg}\,\alpha = \sqrt{37}$?

16.11.• Доведіть тотожність:

1) $\frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$;

2) $\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

3) $\mathrm{tg}^2\,\alpha - \sin^2\alpha = \mathrm{tg}^2\,\alpha\sin^2\alpha$;

4) $\frac{\sqrt{3} - 2\sin\alpha}{2\cos\alpha - 1} = \frac{1+2\cos\alpha}{2\sin\alpha + \sqrt{3}}$;

5) $\frac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \mathrm{tg}^2\,\alpha} = -\mathrm{ctg}^6\,\alpha$;

6) $\frac{\sin\alpha + \mathrm{tg}\,\alpha}{1+\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\alpha$;

7) $1 + (\mathrm{ctg}^2\,\alpha - \mathrm{tg}^2\,\alpha)\cos^2\alpha = \mathrm{ctg}^2\,\alpha$;

8) $\frac{\sin^2\alpha}{\mathrm{ctg}^2\,\alpha - \cos^2\alpha} = \mathrm{tg}^4\,\alpha$.

16.12.• Доведіть тотожність:

1) $\sin^4\alpha\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^4\alpha = \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

2) $\mathrm{ctg}^2\,\alpha - \cos^2\alpha = \mathrm{ctg}^2\,\alpha\cos^2\alpha$;

3) $(\mathrm{tg}^2\,\alpha - \sin^2\alpha)\cdot\frac{\mathrm{ctg}^2\,\alpha}{\sin^2\alpha} = 1$.

16.13.• Доведіть тотожність:

1) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha = \sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

2) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$.

16.14.• Доведіть тотожність

$$2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) = -1.$$

16.15.• Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{3}$;

2) $\frac{2\cos^2\alpha - 7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha}$, якщо $\mathrm{ctg}\,\alpha = -2$;

3) $\dfrac{8\sin\alpha - 3\cos\alpha}{\sin^3\alpha + 5\sin^2\alpha\cos\alpha - 8\cos^3\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -3$.

16.16.• Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{5\cos\alpha + 6\sin\alpha}{3\sin\alpha - 7\cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}$;

2) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{3}{4}$;

3) $\dfrac{2\sin^3\alpha + 3\cos^3\alpha}{5\sin\alpha - \cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = -4$.

16.17.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt{\cos^2\beta(1 + \operatorname{tg}\beta) + \sin^2\beta(1 + \operatorname{ctg}\beta)}$, якщо $\pi < \beta < \dfrac{3\pi}{2}$;

2) $\dfrac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha\cos^2\beta}}{\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\alpha}$, якщо $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$;

3) $\sqrt{\dfrac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}}$, якщо $90° < \alpha < 180°$;

4) $\sqrt{2 - 2\cos^2\beta} + \sqrt{2\sin^2\beta - 2\sqrt{2}\sin\beta + 1}$, якщо $\dfrac{3\pi}{4} \leqslant \beta \leqslant \pi$.

16.18.•• Спростіть вираз:

1) $\sin\alpha - \sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha}$, якщо $180° < \alpha < 360°$;

2) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} - \sqrt{\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}}$, якщо $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\sqrt{4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha + 1} - \sqrt{4 - 4\sin^2\alpha}$, якщо $\dfrac{2\pi}{3} \leqslant \alpha \leqslant \pi$.

16.19.•• Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = b$. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin\alpha\cos\alpha$;
2) $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$;
3) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$;
4) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$;
5) $\dfrac{1}{\sin^4\alpha} + \dfrac{1}{\cos^4\alpha}$.

16.20.•• Дано: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = b$. Знайдіть значення виразу:

1) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$;
2) $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha$;
3) $\operatorname{tg}^4\alpha + \operatorname{ctg}^4\alpha$;
4) $(\cos\alpha + \sin\alpha)^2$.

16.21.•• Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $2\cos^2\alpha - 3\sin\alpha$;
2) $\operatorname{tg}^2\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha}$;
3) $1 - \sqrt{\cos^2\alpha} - 2\sin^2\alpha$;
4) $3\cos^2\alpha - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$.

16.22.•• Знайдіть найбільше і найменше значення виразу:

1) $3\sin^2\alpha + 2\cos\alpha$;
2) $1+\sqrt{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}$;
3) $2\sin^2\alpha + 3\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha$.

16.23.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin^2\sqrt{1-x^2} + \cos^2\sqrt{1-x^2}$;
2) $y = \mathrm{tg}^2\, x - \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

16.24.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin^2\sqrt{-x} + \cos^2\sqrt{-x}$;
2) $y = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \mathrm{ctg}^2\, x$.

16.25.* Знайдіть найбільше значення функції $f(x) = \sin^{14} x + \cos^{14} x$.

16.26.* Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = \sin^{10} x + \cos^{13} x$.

17. Формули додавання

Формулами додавання називають формули, які виражають $\cos(\alpha \pm \beta)$, $\sin(\alpha \pm \beta)$ і $\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta)$ через тригонометричні функції кутів α і β.

Доведемо, що

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Нехай точки P_1 і P_2 отримано в результаті повороту точки $P_0(1;\,0)$ на кути α і β відповідно.

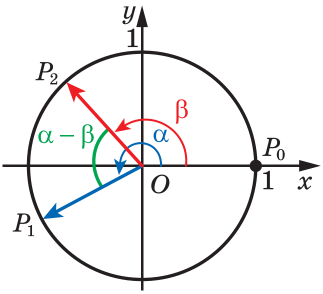


Рис. 17.1

Розглянемо випадок, коли $0 \leqslant \alpha - \beta \leqslant \pi$. Тоді кут між векторами $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$ дорівнює $\alpha - \beta$ (рис. 17.1). Координати точок P_1 і P_2 дорівнюють відповідно $(\cos\alpha;\,\sin\alpha)$ і $(\cos\beta;\,\sin\beta)$. Отже, вектор $\overrightarrow{OP_1}$ має координати $(\cos\alpha;\,\sin\alpha)$, а вектор $\overrightarrow{OP_2}$ — $(\cos\beta;\,\sin\beta)$.

Виразимо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$ через їхні координати:

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2} = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Водночас за означенням скалярного добутку векторів можна записати:

$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2} = \left|\overrightarrow{OP_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OP_2}\right|\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha-\beta).$$

Звідси отримуємо формулу, яку називають **косинусом різниці:**

$$\boxed{\mathbf{cos}\ (\alpha - \beta) = \mathbf{cos}\ \alpha\ \mathbf{cos}\ \beta + \mathbf{sin}\ \alpha\ \mathbf{sin}\ \beta} \qquad (1)$$

Покажемо, що доведення не зміниться при будь-якому виборі кутів α і β, зокрема, коли $(\alpha - \beta) \notin [0;\ \pi]$.

Кути поворотів α і β для точок P_1 і P_2 відповідно можна подати в такому вигляді:

$$\alpha = \alpha_1 + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z},\ \ \alpha_1 \in [0;\ 2\pi];$$
$$\beta = \beta_1 + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z},\ \ \beta_1 \in [0;\ 2\pi].$$

Тоді кут між векторами $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$ набуває одного із чотирьох значень: $\alpha_1 - \beta_1$ (рис. 17.2); $\beta_1 - \alpha_1$ (рис. 17.3); $2\pi - (\alpha_1 - \beta_1)$ (рис. 17.4); $2\pi - (\beta_1 - \alpha_1)$ (рис. 17.5).

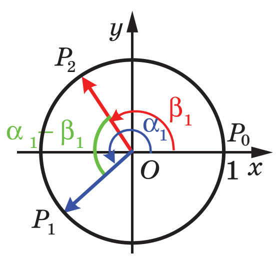


Рис. 17.2

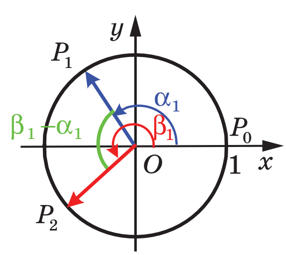


Рис. 17.3

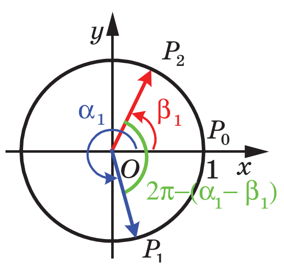


Рис. 17.4

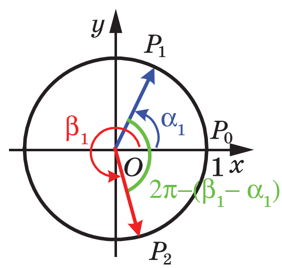


Рис. 17.5

У кожному із чотирьох випадків косинус кута між векторами $\overrightarrow{OP_1}$ і $\overrightarrow{OP_2}$ дорівнює $\cos\ (\alpha - \beta)$. Далі залишається тільки повторити наведені вище міркування для випадку, коли $(\alpha - \beta) \in [0;\ \pi]$.

Доведемо формулу **косинуса суми:**

$$\boxed{\mathbf{cos}\ (\alpha + \beta) = \mathbf{cos}\ \alpha\ \mathbf{cos}\ \beta - \mathbf{sin}\ \alpha\ \mathbf{sin}\ \beta}$$

Маємо: $\cos\ (\alpha + \beta) = \cos\ (\alpha - (-\beta)) = \cos\ \alpha\ \cos\ (-\beta) + \sin\ \alpha\ \sin\ (-\beta) =$ $= \cos\ \alpha\ \cos\ \beta - \sin\ \alpha\ \sin\ \beta$.

Доведемо формули **синуса суми** й **синуса різниці:**

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}$$

За допомогою формули (1) доведемо, що

$$\boxed{\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

Справді, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=\sin\alpha.$

Тепер доведемо, що

$$\boxed{\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$$

Маємо: $\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$

Тоді $\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)=$$
$$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

Формули **тангенса суми** й **тангенса різниці** мають вигляд:

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}} \qquad (2)$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}} \qquad (3)$$

Доведемо формулу (2). Маємо:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Припустивши, що $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$, отриманий дріб можна переписати так:

$$\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Формулу тангенса різниці (3) доведіть самостійно.

Тотожність (2) справедлива для всіх α і β, при яких $\cos(\alpha + \beta) \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$.

Тотожність (3) справедлива для всіх α і β, при яких $\cos(\alpha - \beta) \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$, $\cos\beta \neq 0$.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60° + \alpha)}{2\sin(60° + \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha}$.

Розв'язання. Маємо: $\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\cos(60° + \alpha)}{2\sin(60° + \alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} =$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2(\cos 60°\cos\alpha - \sin 60°\sin\alpha)}{2(\sin 60°\cos\alpha + \cos 60°\sin\alpha) - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + 2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$ ◄

ПРИКЛАД 2 Доведіть тотожність $\sin\alpha - \cos\alpha\,\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Розв'язання. $\sin\alpha - \cos\alpha\,\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sin\alpha - \dfrac{\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} =$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\left(\alpha - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$ ◄

ПРИКЛАД 3 Знайдіть значення виразу $\dfrac{1 - \operatorname{tg}70°\operatorname{tg}65°}{\operatorname{tg}70° + \operatorname{tg}65°}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу тангенса суми кутів $70°$ і $65°$, маємо: $\dfrac{1 - \operatorname{tg}70°\operatorname{tg}65°}{\operatorname{tg}70° + \operatorname{tg}65°} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(70° + 65°)} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}135°} =$

$$= \operatorname{ctg}135° = \operatorname{ctg}(180° - 45°) = -\operatorname{ctg}45° = -1.$$ ◄

ПРИКЛАД 4 Знайдіть cos 15°.

Розв'язання. Маємо:

$$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 5 Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$.

Розв'язання. Подамо даний вираз у вигляді синуса суми. Для цього помножимо та поділимо даний вираз на 2:

$$\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 2\left(\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right).$$

Ураховуючи, що $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$, отримуємо:

$$\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha = 2(\sin 30^\circ \cos\alpha + \cos 30^\circ \sin\alpha) = 2\sin(30^\circ + \alpha).$$

Отже, найбільше значення даного виразу дорівнює 2 (вираз набуває його при $\sin(30^\circ + \alpha) = 1$), найменше значення дорівнює -2 (вираз набуває його при $\sin(30^\circ + \alpha) = -1$). ◀

ПРИКЛАД 6 Дано: $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$. Знайдіть $\alpha + \beta$.

Розв'язання. Оскільки $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$, то $0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$. На проміжку $(0^\circ; 180^\circ)$ косинус набуває кожного свого значення з проміжку $(-1;\ 1)$ один раз. Отже, знайшовши $\cos(\alpha + \beta)$, можна визначити і значення $\alpha + \beta$. Маємо:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Тоді $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{5}{\sqrt{50}} = -\frac{5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Беручи до уваги, що $0^\circ < \alpha + \beta < 180^\circ$, отримуємо: $\alpha + \beta = 135^\circ$. ◀

ВПРАВИ

17.1.° Спростіть вираз:

1) $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$;
2) $\sin(30^\circ+\alpha)-\cos(60^\circ+\alpha)$;
3) $\sqrt{2}\sin(\alpha-45^\circ)-\sin\alpha+\cos\alpha$;
4) $2\cos(60^\circ-\alpha)-\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$.

17.2.° Спростіть вираз:

1) $\sin(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)$;
2) $\sin(30^\circ-\alpha)+\cos(60^\circ-\alpha)$;
3) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\alpha-\sin\alpha$.

17.3.° Спростіть вираз:

1) $\sin\alpha\cos 4\alpha+\cos\alpha\sin 4\alpha$;
2) $\cos 17^\circ\cos 43^\circ-\sin 17^\circ\sin 43^\circ$;
3) $\cos\frac{3\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{3\pi}{8}\sin\frac{\pi}{8}$;
4) $\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$;
5) $\sin 53^\circ\cos 7^\circ-\cos 53^\circ\sin(-7^\circ)$;
6) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$;
7) $\dfrac{\sin 20^\circ\cos 5^\circ-\cos 20^\circ\sin 5^\circ}{\cos 10^\circ\cos 5^\circ-\sin 10^\circ\sin 5^\circ}$;
8) $\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\sin\beta$.

17.4.° Спростіть вираз:

1) $\cos 6\alpha\cos 2\alpha-\sin 6\alpha\sin 2\alpha$;
2) $\sin 12^\circ\cos 18^\circ+\sin 18^\circ\cos 12^\circ$;
3) $\sin(-15^\circ)\cos 75^\circ+\cos 15^\circ\sin 75^\circ$;
4) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;
5) $\dfrac{\cos 64^\circ\cos 4^\circ+\sin 64^\circ\sin 4^\circ}{\sin 19^\circ\cos 41^\circ+\sin 41^\circ\cos 19^\circ}$;
6) $\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta$.

17.5.° Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{4}$. Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

17.6.° Відомо, що $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\operatorname{tg}\beta=5$. Знайдіть значення виразу $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

17.7.° Спростіть вираз:

1) $\frac{\operatorname{tg} 13^\circ + \operatorname{tg} 47^\circ}{1 - \operatorname{tg} 13^\circ \operatorname{tg} 47^\circ}$;

2) $\frac{\operatorname{tg} 1^\circ - \operatorname{tg} 46^\circ}{1 + \operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 46^\circ}$;

3) $\frac{1 - \operatorname{tg} 27^\circ \operatorname{tg} 33^\circ}{\operatorname{tg} 27^\circ + \operatorname{tg} 33^\circ}$;

4) $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{9} + \operatorname{tg} \frac{5\pi}{36}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{9} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{36}}$.

17.8.° Спростіть вираз:

1) $\frac{\operatorname{tg} 24^\circ + \operatorname{tg} 36^\circ}{1 - \operatorname{tg} 24^\circ \operatorname{tg} 36^\circ}$;

2) $\frac{\operatorname{tg} 5\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha}{1 + \operatorname{tg} 5\alpha \operatorname{tg} 3\alpha}$.

17.9.° Доведіть тотожність:

1) $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha \sin \beta}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta} = 1$;

2) $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta$;

3) $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2\cos(45^\circ + \alpha)}{2\sin(45^\circ + \alpha) - \sqrt{2} \sin \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$;

4) $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha$.

17.10.° Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin(\alpha + \beta) - \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta) + \sin \beta \cos \alpha} = 1$;

2) $\frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2\sin(45^\circ - \alpha)}{2\sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3} \cos \alpha} = \sqrt{2}$.

17.11.° Дано: $\sin \alpha = \frac{9}{41}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Знайдіть $\sin(\alpha + 45^\circ)$.

17.12.° Дано: $\cos \alpha = -0{,}6$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. Знайдіть $\cos(60^\circ - \alpha)$.

17.13.° Знайдіть $\cos(\alpha + \beta)$, якщо $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ і $\cos \beta = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

17.14.° Знайдіть $\sin(\alpha - \beta)$, якщо $\sin \alpha = -\frac{15}{17}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ і $\cos \beta = \frac{7}{25}$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$.

17.15.° Дано: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \beta = \frac{3}{5}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Знайдіть $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$.

17.16.° Відомо, що $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$. Знайдіть $\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)$.

17.17.° Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;   2) $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$.

17.18.° Доведіть тотожність $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$.

17.19.° Спростіть вираз:

1) $\cos\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{4} + \sin\dfrac{\alpha}{2}$;   3) $\dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha}$;

2) $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}2\alpha$;   4) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$.

17.20.° Спростіть вираз:

1) $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\operatorname{tg}\alpha$;   2) $\cos 4\alpha - \sin 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha$.

17.21.• Користуючись формулами додавання, знайдіть:

1) $\sin 15°$;   2) $\sin 105°$;   3) $\operatorname{ctg} 105°$.

17.22.• Користуючись формулами додавання, знайдіть:

1) $\cos 75°$;   2) $\sin 75°$.

17.23.• Спростіть вираз:

1) $\operatorname{tg}10° + \operatorname{tg}50° + \sqrt{3}\operatorname{tg}10°\operatorname{tg}50°$;

2) $\operatorname{tg}70° - \operatorname{tg}25° - \operatorname{tg}70°\operatorname{tg}25°$.

17.24.• Спростіть вираз:

1) $\operatorname{tg}80° - \operatorname{tg}20° - \sqrt{3}\operatorname{tg}80°\operatorname{tg}20°$;

2) $\operatorname{tg}35° + \operatorname{tg}10° + \operatorname{tg}35°\operatorname{tg}10°$.

17.25.• Доведіть тотожність:

1) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;

2) $(\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 - 2 = 2\cos(\alpha + \beta)$;

3) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha + \beta)} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha - \beta)} + 2\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{2}{\cos^2\alpha}$.

17.26.• Доведіть тотожність:

1) $\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$;

2) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) - \operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = 0$.

17.27.• Знайдіть найбільше значення виразу:

1) $\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha$;   3) $\sin\alpha + \cos\alpha$;

2) $4\sin\alpha + 5\cos\alpha$;   4) $2\sin\alpha - \cos\alpha$.

17.28.° Знайдіть найбільше значення виразу:

1) $\sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha$; 2) $\sqrt{5}\cos\alpha - 2\sqrt{5}\sin\alpha$; 3) $3\sin\alpha + \cos\alpha$.

17.29.•• Дано: $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = -\frac{2}{5}$, $\frac{5\pi}{6} < \alpha < \frac{4\pi}{3}$. Знайдіть $\sin\alpha$.

17.30.•• Дано: $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Знайдіть $\sin\alpha$.

17.31.•• Дано: $\cos(5° + \alpha) = 0{,}6$, $0° < \alpha < 55°$. Знайдіть $\operatorname{tg}(35° + \alpha)$.

17.32.•• Дано: $\sin(40° + \alpha) = b$, $0° < \alpha < 45°$. Знайдіть $\cos(70° + \alpha)$.

17.33.•• Дано: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{4}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Знайдіть $\alpha - \beta$.

17.34.•• Дано: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin\beta = \frac{\sqrt{21}}{14}$, $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$. Знайдіть $\alpha + \beta$.

17.35.•• Дано: $\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$, $\sin\beta = \frac{5\sqrt{7}}{14}$, $0° < \alpha < 90°$, $0° < \beta < 90°$. Знайдіть $\alpha + \beta$.

17.36.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{\operatorname{tg}2x - \operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}2x\operatorname{tg}x}$; 2) $y = \frac{\sqrt{3} + \operatorname{tg}x}{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg}x}$.

17.37.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{\operatorname{tg}3x - \operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tg}3x\operatorname{tg}x}$; 2) $y = \frac{\operatorname{tg}x - 1}{\operatorname{tg}x + 1}$.

17.38.•• Доведіть, що коли α, β, γ — кути непрямокутного трикутника, то $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

17.39.•• Доведіть, що коли α, β, γ — кути трикутника, то

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1.$$

17.40.•• Обчисліть $(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}\beta)$, якщо $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

17.41.•• Обчисліть $(1 + \operatorname{ctg}\alpha)(1 + \operatorname{ctg}\beta)$, якщо $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

17.42.•• Доведіть нерівність $\sin(\alpha + \beta) < \cos\alpha + \cos\beta$, де $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

17.43.•• Доведіть нерівність $\cos(\alpha-\beta) < \cos\alpha + \sin\beta$, де $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

17.44.* Відомо, що $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geqslant \sqrt{5}$. Доведіть, що

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant 2.$$

17.45.* Доведіть нерівність $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} \geqslant 1$, де α, β, γ — кути трикутника.

17.46.* Доведіть нерівність $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geqslant \sqrt{3}$, де α, β, γ — кути трикутника.

17.47.* Знайдіть усі функції f, визначені на $\mathbb{R}$, такі, що для всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x+y) = f(x)\cos y + f(y)\cos x$.

17.48.* Знайдіть усі функції f, визначені на проміжку $[-1; 1]$, такі, що для всіх $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f(\cos x)f(\cos y) + f(\sin x)f(\sin y) = \cos(x-y).$$

18. Формули зведення

Періодичність тригонометричних функцій дає змогу зводити обчислення значень синуса та косинуса до випадку, коли значення аргументу належить проміжку $[0; 2\pi]$, а обчислення значень тангенса та котангенса — до випадку, коли значення аргументу належить проміжку $[0; \pi]$. У цьому пункті ми розглянемо формули, які дають змогу в таких обчисленнях обмежитися лише кутами від 0 до $\frac{\pi}{2}$.

Кожний кут із проміжку $[0; 2\pi]$ можна подати у вигляді $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, або $\pi \pm \alpha$, або $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, де $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Наприклад, $\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$.

Обчислення синусів і косинусів кутів виду $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ можна звести до обчислення синуса або косинуса кута α. Наприклад:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha = -\sin\alpha;$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = \sin\alpha.$$

Застосовуючи формули додавання, аналогічно можна отримати:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$$

Ці шість формул називають **формулами зведення для синуса.**

Наступні шість формул називають **формулами зведення для косинуса:**

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$$

Обчислення тангенсів і котангенсів кутів виду $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ можна звести до обчислення тангенса або котангенса кута α. Наприклад:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Аналогічно можна отримати:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$$
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$$

Ці формули називають **формулами зведення для тангенса і котангенса.**

Проаналізувавши наведені формули зведення, можна виявити закономірності, завдяки яким не обов'язково заучувати ці формули.

Для того щоб записати будь-яку з них, можна керуватися такими правилами.

1. ***У правій частині рівності ставлять той знак, який має ліва частина за умови, що*** $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2. ***Якщо в лівій частині формули кут має вигляд*** $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ ***або*** $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, ***то синус міняють на косинус, тангенс — на котангенс і навпаки. Якщо кут має вигляд*** $\pi \pm \alpha$, ***то заміни функції не відбувається.***

Покажемо, як застосувати ці правила для виразу $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

Припустивши, що $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, доходимо висновку: $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ є кутом III координатної чверті. Тоді $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0$. За першим правилом у правій частині рівності має стояти знак «–».

Оскільки кут має вигляд $\frac{3\pi}{2} - \alpha$, то за другим правилом потрібно замінити синус на косинус.

Отже, $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\alpha$.

ПРИКЛАД 1 Зведіть до тригонометричної функції кута α:

1) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 2) $\operatorname{ctg}(\alpha - 90°)$.

Розв'язання

1) Маємо: $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)^2 = (-\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$.

2) $\operatorname{ctg}(\alpha - 90°) = -\operatorname{ctg}(90° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$. ◄

ПРИКЛАД 2 Замініть значення тригонометричної функції значенням функції гострого кута: 1) $\cos\frac{8\pi}{7}$; 2) $\operatorname{tg}(-125°)$.

Розв'язання. 1) $\cos\frac{8\pi}{7} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) = -\cos\frac{\pi}{7}$.

2) $\operatorname{tg}(-125°) = -\operatorname{tg}125° = -\operatorname{tg}(90° + 35°) = -(-\operatorname{ctg}35°) = \operatorname{ctg}35°$. ◄

ПРИКЛАД 3 Обчисліть $\operatorname{tg}41° \operatorname{tg}42° \operatorname{tg}43° \operatorname{tg}44° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg}49°$.

Розв'язання. Маємо: $\operatorname{tg}49° = \operatorname{ctg}41°$, $\operatorname{tg}48° = \operatorname{ctg}42°$ і т. д. Тоді, об'єднавши попарно множники, які рівновіддалені від кінців добутку, отримаємо чотири добутки, кожний з яких дорівнює 1:

$$\operatorname{tg}41° \operatorname{tg}49° = \operatorname{tg}42° \operatorname{tg}48° = \operatorname{tg}43° \operatorname{tg}47° = \operatorname{tg}44° \operatorname{tg}46° = 1.$$

Ще один множник даного добутку, $\operatorname{tg} 45°$, дорівнює 1. Отже,

$$\operatorname{tg} 41° \operatorname{tg} 42° \operatorname{tg} 43° \operatorname{tg} 44° \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 49° = 1. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 4 Спростіть вираз

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\alpha - \pi).$$

Розв'язання. Маємо: $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

Оскільки $\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{\pi}{2}$, то $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$. Отже,

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)} \operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\alpha - \pi) =$$

$$= \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} \cdot \left(-\operatorname{ctg}\left(\pi + \frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) + \sin\alpha \cdot (-\sin\alpha) =$$

$$= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot \left(-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right) - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha. \blacktriangleleft$$

ВПРАВИ

18.1.° Зведіть до тригонометричної функції кута α:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$;
2) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;
3) $\sin(\pi - \alpha)$;
4) $\cos(-\alpha + 270°)$;
5) $\cos(\alpha - 180°)$;
6) $\cos^2(3\pi - \alpha)$;
7) $\operatorname{ctg}^2(90° + \alpha)$;
8) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;
9) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$.

18.2.° Зведіть до тригонометричної функції кута α:

1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;
2) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;
3) $\cos(\pi - \alpha)$;
4) $\operatorname{ctg}(\alpha - 270°)$;
5) $\sin(180° + \alpha)$;
6) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)$.

18.3.° Зведіть до тригонометричної функції найменшого додатного аргументу:

1) $\cos 123°$; 2) $\sin 216°$; 3) $\cos(-218°)$; 4) $\cos\dfrac{5\pi}{9}$.

18.4.° Зведіть до тригонометричної функції найменшого додатного аргументу:

1) $\operatorname{tg} 124°$; 2) $\sin(-305°)$; 3) $\operatorname{ctg}(-0{,}7\pi)$; 4) $\sin\dfrac{14\pi}{15}$.

18.5.° Обчисліть:

1) $\cos 225°$; 2) $\sin 240°$; 3) $\cos\dfrac{5\pi}{4}$; 4) $\cos\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

18.6.° Обчисліть:

1) $\operatorname{tg} 210°$; 2) $\operatorname{ctg} 315°$; 3) $\cos(-150°)$; 4) $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)$.

18.7.° Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)$;

2) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

3) $\sin(\pi+\alpha)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;

4) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$;

5) $\cos^2(\pi+\alpha)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

6) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

18.8.° Спростіть вираз:

1) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)$;

2) $\sin(270°-\alpha)+\cos(270°+\alpha)$;

3) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)$;

4) $\sin^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

18.9.° Обчисліть:

1) $3\operatorname{tg} 135° - 2\sin 150° + \operatorname{tg} 300° - 2\sin 240°$;

2) $\dfrac{\sin^2 315°\cos 300° + \operatorname{tg}(-315°)}{\sin(-120°)\cos 150°}$;

3) $\sin\dfrac{5\pi}{4}\cos\dfrac{5\pi}{6}\operatorname{tg}\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\dfrac{4\pi}{3}$;

4) $\dfrac{\sin 20°\cos 10° + \cos 160°\cos 100°}{\sin 21°\cos 9° + \cos 159°\cos 99°}$;

5) $\dfrac{\cos 66^\circ \cos 6^\circ + \cos 84^\circ \cos 24^\circ}{\cos 65^\circ \cos 5^\circ + \cos 85^\circ \cos 25^\circ}$.

18.10.° Знайдіть значення виразу:

1) $4 \cos 225^\circ - 6 \cos 120^\circ + 3 \operatorname{ctg} 300^\circ + \operatorname{tg} 240^\circ$;

2) $\dfrac{6 \cos^2 (-240^\circ) \operatorname{ctg} 210^\circ}{\sin (-300^\circ) \cos^2 180^\circ}$;

3) $\sin \dfrac{7\pi}{4} \cos \dfrac{2\pi}{3} \operatorname{tg} \dfrac{4\pi}{3} \operatorname{ctg} \dfrac{7\pi}{6}$;

4) $\dfrac{\cos 64^\circ \cos 4^\circ - \cos 86^\circ \cos 26^\circ}{\cos 71^\circ \cos 41^\circ - \cos 49^\circ \cos 19^\circ}$.

18.11.• Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin (\pi + \alpha) \cos (2\pi - \alpha)}{\operatorname{tg} (\pi - \alpha) \cos (\pi - \alpha)}$;

2) $\sin (\pi - \beta) \cos \left(\beta - \dfrac{\pi}{2}\right) - \sin \left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right) \cos (\pi - \beta)$;

3) $\left(\sin \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \sin (\pi - x)\right)^2 + \left(\cos \left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) + \cos (2\pi - x)\right)^2$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg} (\pi - x) \sin \left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)}{\cos (\pi + x) \operatorname{ctg} \left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)}$;

5) $\dfrac{\sin^2 \left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)}{\operatorname{ctg}^2 (x - 2\pi)} + \dfrac{\sin^2 (-x)}{\operatorname{ctg}^2 \left(x - \dfrac{3\pi}{2}\right)}$;

6) $\dfrac{\operatorname{ctg} \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)\left(\sin \left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right) + \sin (\pi + \alpha)\right)}{\operatorname{ctg} (\pi + \alpha) (\cos (2\pi + \alpha) - \sin (2\pi - \alpha))}$.

18.12.• Доведіть тотожність:

1) $\sin (\pi + x) \cos \left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \cos (2\pi + x) \sin \left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = -1$;

2) $\dfrac{\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) \cos (180^\circ - \alpha) \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)}{\sin (90^\circ + \alpha) \operatorname{ctg} (90^\circ + \alpha) \operatorname{tg} (90^\circ + \alpha)} = 1$;

3) $\sin (2\pi - \varphi) \operatorname{tg} \left(\dfrac{3\pi}{2} - \varphi\right) - \cos (\varphi - \pi) - \sin (\varphi - \pi) = \sin \varphi$;

4) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\sin\alpha;$

5) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}-\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-1;$

6) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}=-1.$

18.13.•• Обчисліть:

1) $\operatorname{ctg}5°\operatorname{ctg}15°\operatorname{ctg}25°\cdot\ldots\cdot\operatorname{ctg}75°\operatorname{ctg}85°;$

2) $\operatorname{tg}20°+\operatorname{tg}40°+\operatorname{tg}60°+\ldots+\operatorname{tg}160°+\operatorname{tg}180°;$

3) $\sin 0°+\sin 1°+\sin 2°+\ldots+\sin 359°+\sin 360°.$

18.14.•• Обчисліть:

1) $\sin 110°+\sin 130°+\sin 150°+\ldots+\sin 230°+\sin 250°+\sin 270°;$

2) $\operatorname{tg}10°\operatorname{tg}20°\operatorname{tg}30°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}70°\operatorname{tg}80°;$

3) $\operatorname{ctg}15°+\operatorname{ctg}30°+\operatorname{ctg}45°+\ldots+\operatorname{ctg}165°.$

18.15.•• Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)}+\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)=1;$

2) $\dfrac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)+\sin^4\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)-1}=-\dfrac{1}{2}\operatorname{ctg}^2\alpha;$

3) $\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)(\operatorname{tg}^2\alpha-1)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\dfrac{5\pi}{4}\right)\sin^{-2}\left(\dfrac{5\pi}{4}+\alpha\right)=2.$

18.16.•• Знайдіть значення виразу

$$\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{11}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{22}.$$

18.17.•• Спростіть вираз:

1) $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi+\alpha);$

2) $\dfrac{\cos^2(20°-\alpha)}{\sin^2(70°+\alpha)}+\operatorname{tg}(\alpha+10°)\operatorname{ctg}(80°-\alpha).$

18.18.* Чи існує така функція f, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність:

1) $f(\cos x) = \sin x$; 2) $f(\sin x) = \cos x$?

18.19.* Чи існує така функція f, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(\sin x) = \sin 100x$?

18.20.* Сума додатних чисел α, β, γ дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Доведіть, що $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$.

18.21.* Сума додатних чисел α, β, γ менша від $\frac{\pi}{2}$. Доведіть, що $\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma > \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma$.

19. Формули подвійного, потрійного та половинного кутів

Формули, які виражають тригонометричні функції аргументу 2α через тригонометричні функції аргументу α, називають **формулами подвійного кута**.

У формулах додавання

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

покладемо $\beta = \alpha$. Отримаємо:

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Ці формули називають відповідно **формулами косинуса, синуса й тангенса подвійного кута**.

Оскільки $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ і $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, то з формули $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ отримуємо ще дві формули:

$$\boxed{\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

Інколи ці формули зручно використовувати в такому вигляді:

$$\boxed{\mathbf{1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha}}$$

$$\boxed{\mathbf{1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha}}$$

або в такому вигляді:

$$\boxed{\mathbf{\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}}$$

$$\boxed{\mathbf{\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}}$$

Дві останні формули називають **формулами пониження степеня.**

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}}$; 2) $\dfrac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; 3) $1 - 8\sin^2\beta\cos^2\beta$; 4) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи формулу косинуса подвійного кута $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ і формулу різниці квадратів, отримуємо:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= -\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

2) Застосовуючи формулу синуса подвійного кута для кута $\frac{\alpha}{2}$, отримуємо:

$$\frac{\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

3) $1 - 8\sin^2\beta\cos^2\beta = 1 - 2\cdot 4\sin^2\beta\cos^2\beta = 1 - 2\sin^2 2\beta = \cos 4\beta.$

4) $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha} = -\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} =$

$$= -\frac{2\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = -\frac{2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -2\operatorname{ctg} 2\alpha. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2 Обчисліть $\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{8}}{\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{8}}$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу тангенса подвійного кута, отримуємо: $\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{8}}{\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{8}} = 2\cdot\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{8}}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{8}} = \dfrac{2}{\mathrm{tg}\left(2\cdot\dfrac{\pi}{8}\right)} = \dfrac{2}{\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}} = 2.$ ◄

ПРИКЛАД 3 Подайте у вигляді добутку вираз: 1) $1+\cos 4\alpha$; 2) $1-\sin\alpha$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи формулу $1+\cos 2x = 2\cos^2 x$, отримуємо: $1+\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha$.

2) За допомогою формули зведення замінимо синус на косинус і застосуємо формулу $1-\cos 2x = 2\sin^2 x$:

$$1-\sin\alpha = 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right). \text{ ◄}$$

ПРИКЛАД 4 Доведіть тотожність $\dfrac{1+\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}}{1-\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}} = -\mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{4}$.

Розв'язання. Маємо: $\dfrac{1+\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}}{1-\cos\dfrac{\alpha}{2}-\sin\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{2\cos^2\dfrac{\alpha}{4}-2\sin\dfrac{\alpha}{4}\cos\dfrac{\alpha}{4}}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{4}-2\sin\dfrac{\alpha}{4}\cos\dfrac{\alpha}{4}} =$

$$= \frac{2\cos\dfrac{\alpha}{4}\left(\cos\dfrac{\alpha}{4}-\sin\dfrac{\alpha}{4}\right)}{2\sin\dfrac{\alpha}{4}\left(\sin\dfrac{\alpha}{4}-\cos\dfrac{\alpha}{4}\right)} = -\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{4}. \text{ ◄}$$

ПРИКЛАД 5 Доведіть тотожність

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha = \frac{\sin 32\alpha}{32\sin\alpha}.$$

Розв'язання. Помножимо та поділимо ліву частину даної рівності на $\sin\alpha$ і багаторазово застосуємо формулу синуса подвійного кута:

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{\sin 4\alpha \cos 4\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha}{4 \sin \alpha} =$$

$$= \frac{\sin 8\alpha \cos 8\alpha \cos 16\alpha}{8 \sin \alpha} = \frac{\sin 16\alpha \cos 16\alpha}{16 \sin \alpha} = \frac{\sin 32\alpha}{32 \sin \alpha}. \blacktriangleleft$$

Формули, які виражають тригонометричні функції аргументу 3α через тригонометричні функції аргументу α, називають **формулами потрійного кута.**

Маємо: $\sin 3\alpha = \sin (2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha =$

$$= 2 \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha =$$

$$= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha =$$

$$= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha =$$

$$= 2 \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha + \sin \alpha - 2 \sin^3 \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

Отже,

$$\boxed{\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}$$

Цю формулу називають **формулою синуса потрійного кута.**

Знайдемо формулу для $\cos 3\alpha$:

$$\cos 3\alpha = \cos (2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha =$$

$$= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cos \alpha - 2 \cos \alpha \sin \alpha \sin \alpha =$$

$$= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) =$$

$$= 2 \cos^3 \alpha - \cos \alpha - 2 \cos \alpha + 2 \cos^3 \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

Таким чином,

$$\boxed{\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha}$$

Цю формулу називають **формулою косинуса потрійного кута.**

ПРИКЛАД 6 Доведіть тотожність

$$4 \cos\alpha \cos (60° - \alpha) \cos (60° + \alpha) = \cos 3\alpha.$$

Розв'язання. Застосувавши формули косинуса різниці та косинуса суми, отримуємо:

$$4 \cos \alpha \cos (60° - \alpha) \cos (60° + \alpha) =$$

$$= 4 \cos \alpha (\cos 60° \cos \alpha + \sin 60° \sin \alpha) (\cos 60° \cos \alpha - \sin 60° \sin \alpha) =$$

$$= 4 \cos \alpha (\cos^2 60° \cos^2 \alpha - \sin^2 60° \sin^2 \alpha) = 4 \cos \alpha \left(\frac{1}{4} \cos^2 \alpha - \frac{3}{4} \sin^2 \alpha\right) =$$

$$= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \sin^2 \alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha (1 - \cos^2 \alpha) =$$

$$= \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha + 3 \cos^3 \alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \cos 3\alpha. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 7 Доведіть рівність $16\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = 1$.

Розв'язання. Маємо: $16\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ =$

$$= 16 \cdot \frac{1}{2}\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 8\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ.$$

Оскільки $40^\circ = 60^\circ - 20^\circ$, $80^\circ = 60^\circ + 20^\circ$, то можна застосувати тотожність, доведену в прикладі 6 цього пункту (при $\alpha = 20^\circ$):

$$8\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = 2\cos(3 \cdot 20^\circ) = 1.$$

Інше доведення можна отримати, міркуючи так само, як при розв'язуванні прикладу 5:

$$16\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \frac{8\sin 20^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{4\sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = 1. \blacktriangleleft$$

Формули, які виражають тригонометричні функції аргументу $\frac{\alpha}{2}$ через тригонометричні функції аргументу α, називають **формулами половинного кута**.

Замінивши у формулах пониження степеня α на $\frac{\alpha}{2}$, отримаємо:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Поділимо почленно першу рівність на другу. Отримаємо:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Тепер можна записати:

$$\boxed{\begin{aligned} \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right| &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \\ \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| &= \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \\ \left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right| &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \end{aligned}}$$

Ці формули називають відповідно **формулами синуса, косинуса й тангенса половинного кута**.

ПРИКЛАД 8 Дано: $\mathrm{tg}\,3\alpha = 3\frac{3}{7}$, $60° < \alpha < 90°$. Знайдіть $\sin\frac{3\alpha}{2}$, $\cos\frac{3\alpha}{2}$, $\mathrm{tg}\,\frac{3\alpha}{2}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{1}{\cos^2 3\alpha} = 1 + \mathrm{tg}^2\,3\alpha = 1 + \left(\frac{24}{7}\right)^2 = \frac{624}{49};\ \ \cos^2 3\alpha = \frac{49}{625}.$$

Оскільки $60° < \alpha < 90°$, то $180° < 3\alpha < 270°$. Отже, $\cos 3\alpha < 0$. Тоді $\cos 3\alpha = -\frac{7}{25}$.

Оскільки $90° < \frac{3\alpha}{2} < 135°$, то $\sin\frac{3\alpha}{2} > 0$, а $\cos\frac{3\alpha}{2} < 0$. Тоді

$$\sin\frac{3\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 3\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{7}{25}\right)} = \frac{4}{5},$$

$$\cos\frac{3\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos 3\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{7}{25}\right)} = -\frac{3}{5},$$

$$\mathrm{tg}\,\frac{3\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\cos\frac{3\alpha}{2}} = -\frac{4}{3}. \ ◄$$

ПРИКЛАД 9 Спростіть вираз $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

Розв'язання. Маємо: $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} =$

$$= \left|\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\right| + \left|\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\right| = \frac{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|} + \frac{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|^2 + \left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|^2}{\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} =$$

$$= \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{1}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{2}{\left|2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{2}{|\sin\alpha|}. \ ◄$$

За допомогою формул подвійного кута можна виразити $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ через $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$.

Маємо: $\sin\alpha = \dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Припустивши, що $\cos\dfrac{\alpha}{2}\neq 0$, поділимо чисельник і знаменник отриманого дробу на $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha = \frac{\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Отже,

$$\boxed{\mathbf{\sin\alpha = \frac{2\,tg\dfrac{\alpha}{2}}{1+tg^2\dfrac{\alpha}{2}}}}$$

Виразимо cos α через $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Отримуємо: $\cos\alpha = \dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Припустивши, що $\cos\dfrac{\alpha}{2}\neq 0$, поділимо чисельник і знаменник отриманого дробу на $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$:

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}+\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Отже,

$$\boxed{\cos\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}}$$

ПРИКЛАД 10 Дано: $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 3$. Знайдіть $\sin\alpha + \cos\alpha$.

Розв'язання. Маємо:

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{2\cdot 3}{1+9} = 0{,}6;\quad \cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{1-9}{1+9} = -0{,}8.$$

Тоді $\sin\alpha + \cos\alpha = 0{,}6 - 0{,}8 = -0{,}2$. ◄

ВПРАВИ

19.1.° Виразіть дані тригонометричні функції через функції вдвічі меншого аргументу:

1) $\cos\alpha$; 2) $\sin 3\alpha$; 3) $\cos 8\alpha$; 4) $\operatorname{tg} 7\alpha$.

19.2.° Виразіть дані тригонометричні функції через функції вдвічі меншого аргументу:

1) $\sin 10\alpha$; 2) $\cos\dfrac{\alpha}{4}$; 3) $\operatorname{tg} 3$; 4) $\operatorname{tg} 12\alpha$.

19.3.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$;

2) $\cos 2\alpha + \sin^2\alpha$;

3) $\dfrac{\sin 50^\circ}{2\cos 25^\circ}$;

4) $\dfrac{\cos 44^\circ + \sin^2 22^\circ}{\cos^2 22^\circ}$;

5) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$;

6) $\dfrac{\sin^2\alpha \operatorname{ctg}\alpha}{\sin 2\alpha}$;

7) $\left(\sin\dfrac{\alpha}{4} + \cos\dfrac{\alpha}{4}\right)\left(\sin\dfrac{\alpha}{4} - \cos\dfrac{\alpha}{4}\right)$;

8) $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} = 2$;

9) $\cos^4\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin^4\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$;

10) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha}$;

11) $\dfrac{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha)}{1 - \operatorname{tg}^2(45^\circ + \alpha)}$;

12) $4\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha$.

19.4.° Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 80°}{\cos 40°}$;

2) $2\cos^2\frac{11\alpha}{2}-1$;

3) $\cos 4\beta+\sin^2 2\beta$;

4) $2\sin 20°\cos 20°$;

5) $\cos^2 10\varphi-\sin^2 10\varphi$;

6) $\cos 6\alpha+2\sin^2 3\alpha$;

7) $\frac{\cos 70°}{\cos 35°+\sin 35°}$;

8) $\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$;

9) $\frac{\sin 4\alpha}{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}$;

10) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

11) $\sin^2(\beta-45°)-\cos^2(\beta-45°)$;

12) $\frac{2\operatorname{tg}1{,}5\alpha}{1+\operatorname{tg}^2 1{,}5\alpha}$.

19.5.° Обчисліть:

1) $2\sin 75°\cos 75°$;

2) $\cos^2 15°-\sin^2 15°$;

3) $1-2\sin^2\frac{\pi}{12}$;

4) $\sin 22°30'\cos 22°30'$;

5) $\frac{2\operatorname{tg}165°}{1-\operatorname{tg}^2 165°}$;

6) $\frac{1-\operatorname{tg}^2 15°}{\operatorname{tg}15°}$.

19.6.° Обчисліть:

1) $\cos^2 22°30'-\sin^2 22°30'$;

2) $\frac{2\operatorname{tg}75°}{1-\operatorname{tg}^2 75°}$;

3) $2\sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}$;

4) $1-2\cos^2\frac{\pi}{12}$.

19.7.° Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\sin\alpha=-0{,}6$ і $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$.

19.8.° Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$ і $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

19.9.° Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

19.10.° Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\sin\alpha=-\frac{1}{4}$.

19.11.° Знайдіть $\operatorname{tg}2\alpha$, якщо:

1) $\operatorname{tg}\alpha=4$;

2) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$ і $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

19.12.° Знайдіть $\operatorname{tg}2\alpha$, якщо:

1) $\operatorname{ctg}\alpha=2$;

2) $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ і $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

19.13.° Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $1-\cos 4\alpha$; 2) $1+\cos\dfrac{\alpha}{3}$; 3) $1-\cos 50°$; 4) $1+\sin 2\alpha$.

19.14.° Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $1-\cos\dfrac{5\alpha}{6}$; 2) $1+\cos 12\alpha$; 3) $1+\cos 40°$; 4) $1-\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

19.15.° Доведіть тотожність:

1) $2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha=1$;

2) $\operatorname{ctg} 3\alpha\,(1-\cos 6\alpha)=\sin 6\alpha$;

3) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}=2$;

4) $\dfrac{1-\cos 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^2 2\alpha$.

19.16.° Спростіть вираз:

1) $2\sin^2(135°-\alpha)-\sin 2\alpha$; 2) $\dfrac{1+\cos 8\alpha}{\sin 8\alpha}$.

19.17.° Знайдіть $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=5$.

19.18.° Знайдіть $\cos 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=-3$.

19.19.° Дано: $\cos 2\alpha=-0{,}6$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$.

19.20.° Дано: $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Знайдіть $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ і $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

19.21.° Знайдіть:

1) $\sin 15°$; 3) $\operatorname{tg} 75°$; 5) $\operatorname{tg} 112°30'$;

2) $\cos 15°$; 4) $\cos 75°$; 6) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8}$.

19.22.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$;

2) $\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$;

3) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\sin 2\alpha$;

4) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$;

5) $\dfrac{4\operatorname{tg}\alpha\,(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2}$;

6) $\dfrac{\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$;

7) $\dfrac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)}$;

8) $2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

19.23.° Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\frac{\sin 6\alpha}{\cos 2\alpha}$;

2) $\frac{2\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$;

3) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$;

4) $\left(\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)\sin 2\alpha$;

5) $(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha)\sin 2\alpha$;

6) $\frac{\cos 2\alpha+1-\cos^2\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right)}$.

19.24.• Доведіть тотожність:

1) $1+2\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=4\cos^2\alpha\cos 2\alpha$;

2) $\frac{1-\cos 4\alpha}{\cos^{-2}2\alpha-1}+\frac{1+\cos 4\alpha}{\sin^{-2}2\alpha-1}=2$;

3) $\frac{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

4) $\frac{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}{1-8\sin^2\alpha-\cos 4\alpha}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^4\alpha$;

5) $\frac{\cos 4\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{2}\sin 4\alpha$;

6) $\frac{2\cos 2\alpha-\sin 4\alpha}{2\cos 2\alpha+\sin 4\alpha}=\operatorname{tg}^2(45°-\alpha)$.

19.25.• Доведіть тотожність:

1) $\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+4\alpha\right)=-\sin 8\alpha$;

2) $1-2\cos 3\alpha+\cos 6\alpha=-4\sin^2\frac{3\alpha}{2}\cos 3\alpha$;

3) $\frac{\sin^2\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}=-\frac{1}{4}\sin 8\alpha$;

4) $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

19.26.• Доведіть, що $\operatorname{tg}15°+\operatorname{ctg}15°=4$.

19.27.• Доведіть, що $\operatorname{tg}75°-\operatorname{ctg}75°=2\sqrt{3}$.

19.28.• Доведіть тотожність:

1) $\frac{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=3$;

2) $\frac{\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

19.29.• Доведіть тотожність $\dfrac{\sin 3\alpha + 4\sin^3\alpha}{\cos 3\alpha - 4\cos^3\alpha} = \dfrac{\cos 3\alpha - \cos^3\alpha}{\sin 3\alpha + \sin^3\alpha}$.

19.30.• Дано: $\sin 2\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $135° < \alpha < 180°$. Знайдіть $\sin \alpha$.

19.31.• Дано: $\sin \alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $90° < \dfrac{\alpha}{2} < 135°$. Знайдіть $\cos \dfrac{\alpha}{2}$.

19.32.• Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $\cos \alpha + \sin \alpha = \dfrac{1}{3}$.

19.33.• Знайдіть $\sin \alpha$, якщо $\cos \dfrac{\alpha}{2} - \sin \dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{2}$.

19.34.• Спростіть вираз:

1) $\cos^4\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha$;

2) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \sin 2\alpha}$;

3) $\dfrac{2\sin 4\alpha\,(1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha)}{1 + \operatorname{ctg}^2\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\alpha\right)}$;

4) $\dfrac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4\alpha - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2\alpha}$;

5) $\dfrac{2\cos^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)}$;

6) $\dfrac{2\sin^2 4\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} + 4\alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{5\pi}{4} - 4\alpha\right)}$.

19.35.• Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin^2 2\alpha\,(\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha)}$;

2) $\dfrac{\sin^2 3\alpha}{\sin^2\alpha} - \dfrac{\cos^2 3\alpha}{\cos^2\alpha}$;

3) $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

4) $\dfrac{\sin^2(\alpha - \pi) - 4\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha - \dfrac{5\pi}{2}\right) - 4 + 4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{2}\right)}$;

5) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\sin 3\alpha\cos\alpha - \cos 3\alpha\sin\alpha}$;

6) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4} - 4\alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{5\pi}{4} + 4\alpha\right)}{1 - 2\cos^2 4\alpha}$.

19.36.•• Доведіть, що:

1) $\sin 18° \cos 36° = \frac{1}{4}$;

2) $8 \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = 1$;

3) $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7} = \frac{1}{8}$;

4) $\sin 6° \sin 42° \cos 12° \cos 24° = \frac{1}{16}$.

19.37.•• Доведіть, що:

1) $\sin 54° \cos 72° = \frac{1}{4}$;

2) $8 \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7} = -1$;

3) $\cos 3\alpha \cos 6\alpha \cos 12\alpha = \frac{\sin 24\alpha}{8 \sin 3\alpha}$;

4) $\cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{3}{15} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{7\pi}{15} = \frac{1}{128}$.

19.38.•• Виразіть через $\cos 4\alpha$:

1) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$;

2) $\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha$.

19.39.•• Обчисліть $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{24}$.

19.40.•• Доведіть тотожність:

1) $3 + 4 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha = 8 \cos^4 2\alpha$;

2) $\frac{\cos^2 (4\alpha - 3\pi) - 4\cos^2 (2\alpha - \pi) + 3}{\cos^2 (4\alpha + 3\pi) + 4\cos^2 (2\alpha + \pi) - 1} = \operatorname{tg}^4 2\alpha$.

19.41.•• Спростіть вираз:

1) $\frac{3 + 4 \cos \alpha + \cos 2\alpha}{3 - 4 \cos \alpha + \cos 2\alpha}$;

2) $\frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha - \cos^2 \alpha}{2(\cos \alpha - 1)}$.

19.42.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$, якщо $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

2) $\sqrt{\frac{\sin 4\alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} + 1}$, якщо $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$.

19.43.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) 2 \operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha + 2}$, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$;

2) $\sqrt{\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}}$, якщо $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

19.44.•• Доведіть тотожність:

1) $4\sin\alpha\sin(60^\circ-\alpha)\sin(60^\circ+\alpha)=\sin 3\alpha$;

2) $16\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=3$;

3) $\dfrac{4\sin 20^\circ\sin 50^\circ\sin 70^\circ}{\sin 80^\circ}=1$.

19.45.•• Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(60^\circ-\alpha)\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha$;

2) $\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ=\sqrt{3}$.

19.46.•• Доведіть тотожність

$$\sin 3\alpha\sin^3\alpha+\cos 3\alpha\cos^3\alpha=\cos^3 2\alpha.$$

19.47.•• Доведіть тотожність

$$\sin^3 2\alpha\cos 6\alpha+\cos^3 2\alpha\sin 6\alpha=\frac{3}{4}\sin 8\alpha.$$

19.48.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt{0{,}5+0{,}5\sqrt{0{,}5+0{,}5\cos\alpha}}$, якщо $0\leqslant\alpha\leqslant\pi$;

2) $\dfrac{\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1-\sin\alpha}}-\dfrac{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{1+\sin\alpha}}$, якщо $0^\circ<\alpha<90^\circ$.

19.49.•• Спростіть вираз:

1) $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\alpha}}$, якщо $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$;

2) $\sqrt{1+\sin\varphi}-\sqrt{1-\sin\varphi}$, якщо $\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$.

19.50.•• Знайдіть $\sin 2\alpha$, якщо $2\operatorname{tg}^2\alpha-7\operatorname{tg}\alpha+3=0$ і $\frac{5\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

19.51.•• Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{5}$. Знайдіть $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

19.52.* Обчисліть $\sin 18^\circ$.

19.53.* Доведіть, що $\sin 10^\circ$ — ірраціональне число.

19.54.* Доведіть, що $\cos 20^\circ$ — ірраціональне число.

19.55.* Доведіть рівність $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}}_{n\text{ радикалів}}=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

20. Формули для перетворення суми, різниці та добутку тригонометричних функцій

Спочатку розглянемо формули, які дають змогу перетворити суму та різницю синусів (косинусів) у добуток.

Запишемо формули додавання для синуса:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \qquad (1)$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y. \qquad (2)$$

Додавши почленно ліві й праві частини цих рівностей, отримаємо:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y. \qquad (3)$$

Введемо позначення:

$$x + y = \alpha,$$
$$x - y = \beta.$$

Звідси $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Зазначимо, що α і β можуть набувати будь-яких значень.

Тоді рівність (3) можна переписати так:

$$\boxed{\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Цю тотожність називають **формулою суми синусів**.

Віднімемо почленно від рівності (1) рівність (2):

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos x \sin y.$$

Якщо скористатися раніше введеними позначеннями, то отримаємо тотожність, яку називають **формулою різниці синусів:**

$$\boxed{\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Запишемо формули додавання для косинуса:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Додаючи і віднімаючи почленно ці рівності, відповідно отримуємо:

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y; \qquad (4)$$

$$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \sin y. \qquad (5)$$

Звідси, увівши позначення $x + y = \alpha$ і $x - y = \beta$, отримаємо відповідно **формули суми і різниці косинусів:**

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Перетворимо в добуток вираз $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$.

Маємо: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

Рівність

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

називають **формулою суми тангенсів.**

Аналогічно можна довести такі три рівності:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Їх називають формулами відповідно **різниці тангенсів, суми котангенсів, різниці котангенсів.**

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що коли $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Розв'язання

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1-\cos 2\beta}{2} + \sin^2\gamma =$$

$$= 1 - \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} + \sin^2\gamma = 1 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 1 - \cos^2\gamma =$$

$$= 2 - \cos(\pi-\gamma)\cos(\alpha-\beta) - \cos^2\gamma = 2 + \cos\gamma\cos(\alpha-\beta) - \cos^2\gamma =$$

$$= 2 + \cos\gamma(\cos(\alpha-\beta) - \cos\gamma) = 2 + \cos\gamma(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\pi-(\alpha+\beta))) =$$

$$= 2 + \cos\gamma(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)) = 2 + 2\cos\gamma\cos\alpha\cos\beta.$$ ◄

ПРИКЛАД 2 Обчисліть суму

$$S = \frac{1}{\cos 1 \cos 2} + \frac{1}{\cos 2 \cos 3} + \ldots + \frac{1}{\cos (n-1) \cos n}, \ n > 1.$$

Розв'язання. Використаємо тотожність

$$\operatorname{tg} k - \operatorname{tg} (k-1) = \frac{\sin 1}{\cos (k-1) \cos k} \quad \text{або}$$

$$\frac{1}{\cos (k-1) \cos k} = \frac{-\operatorname{tg} (k-1) + \operatorname{tg} k}{\sin 1}.$$

Скориставшись отриманим результатом, запишемо такі рівності:

$$\frac{1}{\cos 1 \cos 2} = \frac{-\operatorname{tg} 1 + \operatorname{tg} 2}{\sin 1};$$

$$\frac{1}{\cos 2 \cos 3} = \frac{-\operatorname{tg} 2 + \operatorname{tg} 3}{\sin 1};$$

$$\frac{1}{\cos 3 \cos 4} = \frac{-\operatorname{tg} 3 + \operatorname{tg} 4}{\sin 1};$$

$$\ldots$$

$$\frac{1}{\cos (n-1) \cos n} = \frac{-\operatorname{tg} (n-1) + \operatorname{tg} n}{\sin 1}.$$

Додавши дані рівності, отримаємо:

$$S = \frac{-\operatorname{tg} 1 + \operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 2 + \operatorname{tg} 3 - \operatorname{tg} 3 + \operatorname{tg} 4 - \ldots - \operatorname{tg} (n-1) + \operatorname{tg} n}{\sin 1} = \frac{-\operatorname{tg} 1 + \operatorname{tg} n}{\sin 1}.$$

Відповідь: $S = \dfrac{\operatorname{tg} n - \operatorname{tg} 1}{\sin 1}$. ◄

У ході доведення формул суми та різниці синусів (косинусів) було отримано тотожності:

$$\sin (x+y) + \sin (x-y) = 2 \sin x \cos y;$$
$$\cos (x+y) + \cos (x-y) = 2 \cos x \cos y;$$
$$\cos (x+y) - \cos (x-y) = -2 \sin x \sin y.$$

Перепишемо їх так:

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x \cos y &= \frac{1}{2}(\sin (x-y) + \sin (x+y)) \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2}(\cos (x-y) + \cos (x+y)) \\ \sin x \sin y &= \frac{1}{2}(\cos (x-y) - \cos (x+y)) \end{aligned}}$$

Ці тотожності називають **формулами перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.**

ПРИКЛАД 3 Доведіть рівність

$$\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}.$$

Розв'язання. Помножимо і поділимо ліву частину даної рівності на $2\sin\frac{\pi}{11}$. Отримуємо:

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{\pi}{11}+2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{3\pi}{11}+2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{5\pi}{11}+2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{7\pi}{11}+2\sin\frac{\pi}{11}\cos\frac{9\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}.$$

Застосуємо формулу $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$:

$$\frac{\sin\frac{2\pi}{11}-\sin\frac{2\pi}{11}+\sin\frac{4\pi}{11}-\sin\frac{4\pi}{11}+\sin\frac{6\pi}{11}-\sin\frac{6\pi}{11}+\sin\frac{8\pi}{11}-\sin\frac{8\pi}{11}+\sin\frac{10\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{10\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}=\frac{\sin\frac{\pi}{11}}{2\sin\frac{\pi}{11}}=\frac{1}{2}.$$ ◄

ВПРАВИ

20.1.° Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 8\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 8\alpha+\cos 2\alpha}$; 2) $\frac{\sin 5\alpha-\sin\alpha}{\cos 5\alpha-\cos\alpha}$; 3) $\frac{\cos 74^\circ-\cos 14^\circ}{\sin 74^\circ+\sin 14^\circ}$.

20.2.° Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos 6\alpha+\cos 4\alpha}{\cos\alpha+\cos 9\alpha}$; 2) $\frac{\cos\alpha-\cos 11\alpha}{\sin 11\alpha-\sin\alpha}$; 3) $\frac{\cos 58^\circ+\cos 32^\circ}{\sin 58^\circ+\sin 32^\circ}$.

20.3.° Перетворіть у добуток вираз:

1) $1-2\cos\alpha$; 2) $\sqrt{3}+2\cos\alpha$; 3) $1-\sqrt{2}\sin\alpha$; 4) $\sqrt{3}+\operatorname{ctg}\alpha$.

20.4.° Перетворіть у добуток вираз:

1) $1-2\sin\alpha$; 2) $\sqrt{3}-2\cos\alpha$; 3) $\sqrt{2}+2\cos\alpha$; 4) $\sqrt{3}-\operatorname{tg}\alpha$.

20.5.° Спростіть вираз:

1) $\sin\alpha(1+2\cos 2\alpha)$;

2) $\cos 2\alpha+2\sin(\alpha+30^\circ)\sin(\alpha-30^\circ)$.

20.6.° Спростіть вираз:

1) $2\sin 2\alpha \sin\alpha + \cos 3\alpha$;

2) $\sin\alpha - 2\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$.

20.7.• Доведіть тотожність:

1) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$;

2) $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha$;

3) $\frac{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1} = 2\cos\alpha$;

4) $\frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 - 1 + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$;

5) $\frac{(\cos\alpha - \cos 3\alpha)(\sin\alpha + \sin 3\alpha)}{1 - \cos 4\alpha} = \sin 2\alpha$.

20.8.• Доведіть тотожність:

1) $\sin\alpha + \sin 3\alpha - \sin 2\alpha = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\cos\frac{3\alpha}{2}$;

2) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$;

3) $\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha$;

4) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$;

5) $\left(\frac{\sin 4\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 4\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\sin 3\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}\right) = 4\operatorname{ctg}\alpha$.

20.9.• Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{ctg} 6\alpha - \operatorname{ctg} 4\alpha + \operatorname{tg} 2\alpha = -\operatorname{ctg} 6\alpha \operatorname{ctg} 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha$;

2) $\frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg} 3\alpha + \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{ctg} 4\alpha$;

3) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{8\cos^2 2\alpha}{\sin 6\alpha}$.

20.10.• Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha$;

2) $\frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha + \operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} 5\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \sin 2\alpha$.

20.11.$^{\bullet}$ Доведіть тотожність:

1) $1+\sin\alpha+\cos\alpha=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $\dfrac{1+\cos(4\alpha-2\pi)+\cos\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos(4\alpha+\pi)+\cos\left(4\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}=\operatorname{ctg}2\alpha$.

20.12.$^{\bullet}$ Доведіть тотожність:

1) $1-2\cos\alpha+\cos 2\alpha=-4\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

2) $1-\sin\alpha-\cos\alpha=2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2}-45^\circ\right)$.

20.13.$^{\bullet}$ Спростіть вираз:

1) $\sin^2\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$;

2) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;

3) $\cos^2(45^\circ+\alpha)-\cos^2(30^\circ-\alpha)+\sin 15^\circ\sin(75^\circ-2\alpha)$.

20.14.$^{\bullet}$ Спростіть вираз:

1) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$;

2) $\cos^2(45^\circ-\alpha)-\cos^2(60^\circ+\alpha)-\sin(75^\circ-2\alpha)\cos 75^\circ$.

20.15.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть рівність $\operatorname{tg}30^\circ+\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{tg}50^\circ+\operatorname{tg}60^\circ=\dfrac{8\cos 20^\circ}{\sqrt{3}}$.

20.16.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що коли $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то має місце тотожність:

1) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$;

2) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

3) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$;

4) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=-1-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

5) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$.

20.17.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що коли $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, то має місце тотожність

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=2+2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

20.18.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що коли $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то має місце тотожність:

1) $\sin 4\alpha+\sin 4\beta+\sin 4\gamma=-4\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$;

2) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}$;

3) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

20.19.•• Доведіть рівність:

1) $\cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{4\pi}{7} + \cos\dfrac{6\pi}{7} = -\dfrac{1}{2}$;

2) $\sin 10° + \sin 20° + \ldots + \sin 50° = \dfrac{\sin 25°}{2\sin 5°}$.

20.20.•• Доведіть рівність $\cos\dfrac{\pi}{19} + \cos\dfrac{3\pi}{19} + \ldots + \cos\dfrac{17\pi}{19} = \dfrac{1}{2}$.

20.21.* Обчисліть суму

$$S = \frac{1}{\sin\alpha\sin 2\alpha} + \frac{1}{\sin 2\alpha\sin 3\alpha} + \ldots + \frac{1}{\sin(n-1)\alpha\sin n\alpha}.$$

20.22.* Обчисліть суму

$$S = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\operatorname{tg}\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{1}{2^n}.$$

20.23.* Доведіть рівність

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + \cos\frac{2n\pi}{n} = 0.$$

20.24.* Обчисліть суму:

1) $S = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha$;

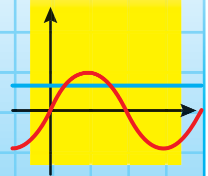
2) $S = \sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha$;

3) $S = \sin^2\alpha + \sin^2 2\alpha + \ldots + \sin^2 n\alpha$.

20.25.* Доведіть нерівність $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leqslant \dfrac{1}{8}$, де α, β, γ — кути трикутника.

20.26.* Відомо, що числа $\sin 2\alpha$, $\sin 5\alpha$ і $\sin 7\alpha$ є раціональними. Доведіть, що $\sin 12\alpha$ — також раціональне число.

§ 4 ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ



21. Рівняння $\cos x = b$

Оскільки областю значень функції $y = \cos x$ є проміжок $[-1; 1]$, то при $|b| > 1$ рівняння $\cos x = b$ не має розв'язків. Разом з тим при будь-якому b такому, що $|b| \leqslant 1$, це рівняння має корені, причому їх безліч.

Сказане легко зрозуміти, звернувшись до графічної інтерпретації: графіки функцій $y = \cos x$ і $y = b$, де $|b| \leqslant 1$, мають безліч спільних точок (рис. 21.1).

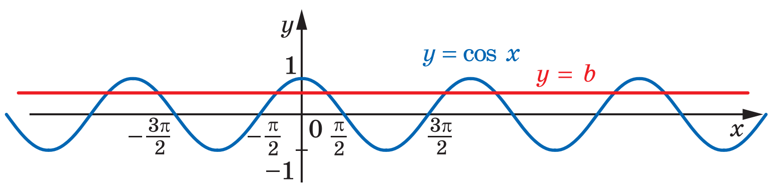


Рис. 21.1

Зрозуміти, як розв'язувати рівняння $\cos x = b$ у загальному випадку, допоможе розгляд окремого випадку. Наприклад, розв'яжемо рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$.

На рисунку 21.2 зображено графіки функцій $y = \cos x$ і $y = \frac{1}{2}$.

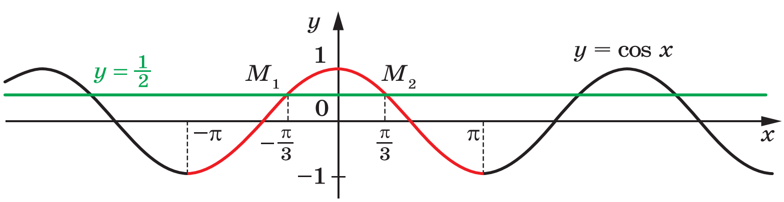


Рис. 21.2

Розглянемо функцію $y = \cos x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції (червона частина кривої на рисунку 21.2). Пряма $y = \frac{1}{2}$ перетинає графік функції $y = \cos x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ у двох точках M_1 і M_2, абсциси яких є протилежними числами. Отже, рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ має два корені. Оскільки $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, то цими коренями є числа $-\frac{\pi}{3}$ і $\frac{\pi}{3}$.

Функція $y = \cos x$ є періодичною з періодом 2π. З огляду на це кожен з інших коренів рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$ відрізняється від одного зі знайдених коренів $-\frac{\pi}{3}$ або $\frac{\pi}{3}$ на число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отже, корені розглядуваного рівняння можна задати формулами $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ і $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Зазвичай ці дві формули замінюють одним записом:

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Повернемося до рівняння $\cos x = b$, де $|b| \leqslant 1$. На рисунку 21.3 показано, що на проміжку $[-\pi; \pi]$ це рівняння має два корені α і $-\alpha$, де $\alpha \in [0; \pi]$ (при $b = 1$ ці корені збігаються та дорівнюють нулю).

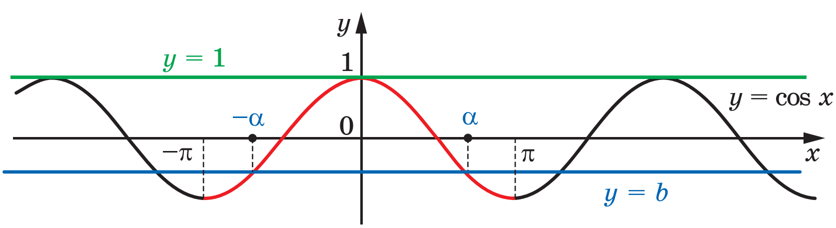


Рис. 21.3

Тоді всі корені рівняння $\cos x = b$ мають вигляд

$$x = \pm\alpha + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Ця формула показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\cos x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арккосинус.

Означення. Арккосинусом числа b, де $|b| \leqslant 1$, називають таке число α з проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює b.

Для арккосинуса числа b використовують позначення $\arccos b$. Наприклад,

$$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{3}\in[0;\pi] \text{ і } \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}, \text{ оскільки } \frac{3\pi}{4}\in[0;\pi] \text{ і } \cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\arccos 0=\frac{\pi}{2}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{2}\in[0;\pi] \text{ і } \cos\frac{\pi}{2}=0;$$

$$\arccos(-1)=\pi, \text{ оскільки } \pi\in[0;\pi] \text{ і } \cos\pi=-1.$$

Узагалі, **$\arccos b = \alpha$, *якщо* $\alpha \in [0; \pi]$ *і* $\cos \alpha = b$.**

Серед усіх кутів, косинус яких дорівнює даному числу, арккосинус — це єдиний кут, що належить проміжку $[0; \pi]$.

Наприклад, має місце рівність $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, але $-\frac{\pi}{3}\neq\arccos\frac{1}{2}$, оскільки $-\frac{\pi}{3}\notin[0;\pi]$.

Тепер формулу коренів рівняння $\cos x = b$, $|b| \leqslant 1$, можна записати в такому вигляді:

$$\boxed{x=\pm\arccos b+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}} \qquad (1)$$

Зазначимо, що окремі випадки рівняння $\cos x = b$ (для $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) було розглянуто раніше (див. п. 11). Нагадаємо отримані результати:

$\cos x = 1$	$\cos x = 0$	$\cos x = -1$
$x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$	$x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Такі самі результати можна отримати, використовуючи формулу (1). Ці три рівняння зустрічатимуться часто, тому радимо запам'ятати наведені формули.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 4x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{5}-7x\right)=0$; 4) $\cos \pi x^2 = 1$.

Розв'язання. 1) Використовуючи формулу (1), можемо записати:

$$4x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Далі отримуємо: $4x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$; $x = \pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$.

Відповідь: $\pm\frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

2) Маємо: $\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \quad \frac{x}{3} = \pm\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad x = \pm\pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n.$$

Відповідь: $\pm\pi - \frac{3\pi}{4} + 6\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3) Перепишемо дане рівняння так: $\cos\left(7x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$. Отримуємо:

$$7x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Тоді $7x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + \pi n$; $7x = \frac{7\pi}{10} + \pi n$; $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{7}, n \in \mathbb{Z}$.

4) Маємо: $\pi x^2 = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$x^2 = 2n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Оскільки $x^2 \geqslant 0$, то $2n \geqslant 0$, тобто $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Тепер можна записати: $x = \sqrt{2n}$ або $x = -\sqrt{2n}$, де $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Відповідь: $\sqrt{2n}$, $-\sqrt{2n}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = b$ на проміжку $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right)$ залежно від значення параметра b.

Розв'язання. Зобразимо графік функції $y = \cos x$ на проміжку $\left[0; \frac{5\pi}{4}\right)$ (рис. 21.4). Кількість коренів визначається кількістю точок перетину прямої $y = b$ з виділеною червоним кольором частиною графіка функції $y = \cos x$.

Звернемо увагу на те, що точка (0; 1) належить червоній кривій, а точка $\left(\frac{5\pi}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — не належить.

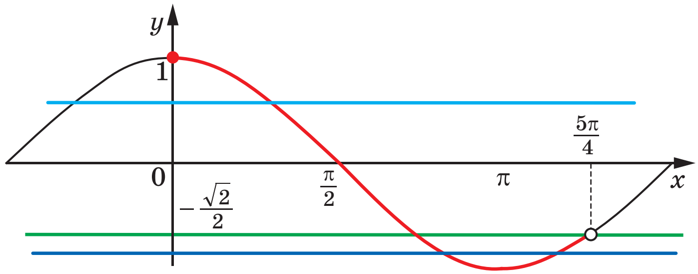


Рис. 21.4

Розглядаючи різні положення прямої $y = b$, отримуємо такі результати:

якщо $b < -1$, то коренів немає;

якщо $b = -1$, то один корінь;

якщо $-1 < b < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то два корені;

якщо $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant b \leqslant 1$, то один корінь;

якщо $b > 1$, то коренів немає.

Відповідь: якщо $b < -1$ або $b > 1$, то коренів немає; якщо $b = -1$ або $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant b \leqslant 1$, то один корінь; якщо $-1 < b < -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то 2 корені. ◄

ВПРАВИ

21.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x = \frac{1}{2}$;
3) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
5) $\cos x = \frac{\pi}{3}$;
2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\cos x = \frac{1}{3}$;
6) $\cos x = \frac{\pi}{4}$.

21.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 3) $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$; 4) $\cos x = \frac{4}{7}$.

21.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 3x = -\frac{1}{2}$;
3) $\cos 6x = 1$;
5) $\cos 9x = -\frac{1}{5}$;
2) $\cos \frac{5}{6}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $\cos \frac{2\pi x}{3} = 0$;
6) $\cos\left(-\frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

21.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x = \frac{1}{2}$; 2) $\cos \frac{x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos \frac{3x}{4} = -1$.

21.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos\left(\frac{x}{6} - 2\right) = -1$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $2\cos\left(\frac{\pi}{8} - 3x\right) + 1 = 0$.

21.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{9} - 4x\right) = 1$; 2) $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2} + 3\right) + 1 = 0$.

21.7.° Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

21.8.° Знайдіть найменший додатний корінь рівняння

$$\cos \frac{x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

21.9.• Скільки коренів рівняння $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$?

21.10.• Знайдіть усі корені рівняння $\cos\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}$, які задовольняють нерівність $-\frac{\pi}{6} < x < 4\pi$.

21.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos \frac{2\pi}{x} = 1$; 2) $\cos \pi\sqrt{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\cos(\cos x) = \frac{1}{2}$.

21.12.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos \frac{2\pi}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos(\cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

21.13.• При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $\cos 2x = -4a^2 + 4a - 2$?

21.14.• При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -a^2 - 1$?

21.15.•• При яких значеннях параметра a рівняння $(a^2 - 4)\cos x = a + 2$ має розв'язки?

21.16.•• При яких значеннях параметра a рівняння $3a\cos x = 2a + 2$ має розв'язки?

21.17.•• При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{\cos x - a}{\sqrt{\cos x - 3a + 1}} = 0$ має розв'язки?

21.18.•• При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{\cos x - a}{\cos x + \frac{1}{3}} = 0$ має розв'язки?

21.19.•• При яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить не менше ніж три корені рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$?

21.20.•• При яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить не менше ніж три корені рівняння $\cos x = -\frac{1}{2}$?

21.21.•• Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = a$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{11\pi}{6}\right]$ залежно від значення параметра a.

21.22.•• Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $\cos x = a$ на проміжку $\left[-\pi; \frac{\pi}{3}\right]$?

21.23.•• Визначте кількість коренів рівняння $\cos x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$ залежно від значень параметра a.

21.24.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x - a)\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

має єдиний корінь на проміжку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$?

21.25.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$(x + a)\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

має єдиний корінь на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$?

22. Рівняння $\sin x = b$

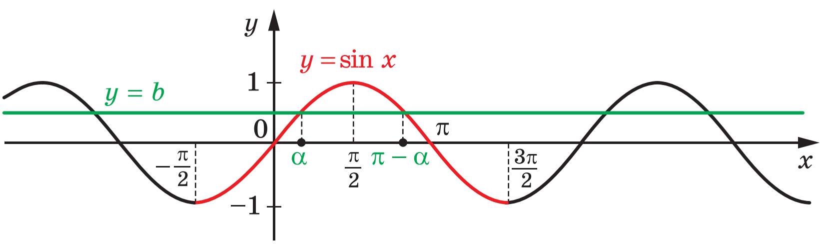
Оскільки областю значень функції $y = \sin x$ є проміжок $[-1; 1]$, то при $|b| > 1$ рівняння $\sin x = b$ не має розв'язків. Разом з тим при будь-якому b такому, що $|b| \leqslant 1$, це рівняння має корені, причому їх безліч.

Зазначимо, що окремі випадки рівняння $\sin x = b$ (для $b = 1$, $b = 0$, $b = -1$) було розглянуто раніше (див. п. 11). Нагадаємо отримані результати:

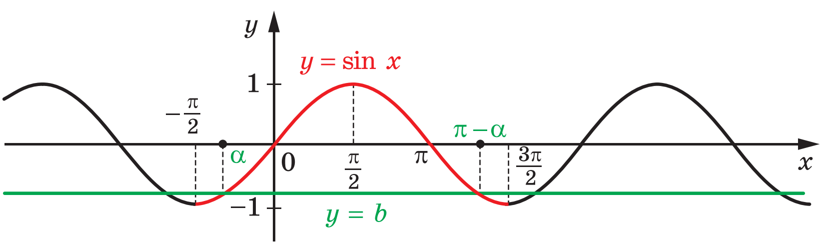
$\sin x = 1$	$\sin x = 0$	$\sin x = -1$
$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Для того щоб отримати загальну формулу коренів рівняння $\sin x = b$, де $|b| \leqslant 1$, звернемося до графічної інтерпретації.

На рисунку 22.1 зображено графіки функцій $y = \sin x$ і $y = b$, $|b| \leqslant 1$.



а



б

Рис. 22.1

Розглянемо функцію $y = \sin x$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції (червона частина кривої на рисунку 22.1). На цьому проміжку рівняння $\sin x = b$ має два корені. Позначимо корінь, який належить проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, через α. Оскільки $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, то другий корінь дорівнює $\pi - \alpha$. Зауважимо, що при $b = 1$ корені α і $\pi - \alpha$ збігаються та дорівнюють $\frac{\pi}{2}$.

Оскільки функція $y = \sin x$ є періодичною з періодом 2π, то кожен з інших коренів рівняння $\sin x = b$ відрізняється від одного зі знайдених коренів на число виду $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді корені рівняння $\sin x = b$ можна задати формулами

$$x = \alpha + 2\pi n \quad \text{і} \quad x = \pi - \alpha + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z}.$$

Ці дві формули можна замінити одним записом:

$$x = (-1)^k \alpha + \pi k, \; k \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Справді, якщо k — парне число, тобто $k = 2n$, $n \in \mathbb{Z}$, то отримуємо: $x = \alpha + 2\pi n$; якщо k — непарне число, тобто $k = 2n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$, то отримуємо: $x = -\alpha + \pi + 2\pi n = \pi - \alpha + 2\pi n$.

Формула (1) показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\sin x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арксинус.

Означення. Арксинусом числа b, де $|b| \leqslant 1$, називають таке число α з проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює b.

Для арксинуса числа b використовують позначення $\arcsin b$.

Наприклад,

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, \text{ оскільки } \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ і } \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}, \text{ оскільки } -\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ і } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\arcsin 0 = 0, \text{ оскільки } 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ і } \sin 0 = 0;$$

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \text{ оскільки } -\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ і } \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Узагалі, $\boldsymbol{\arcsin b = \alpha}$, ***якщо*** $\boldsymbol{\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$ ***і*** $\boldsymbol{\sin \alpha = b}$.

Зазначимо, що, наприклад, $\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$. Проте $\frac{5\pi}{6}\neq\arcsin\frac{1}{2}$, оскільки $\frac{5\pi}{6}\notin\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Тепер формулу (1) для коренів рівняння $\sin x=b$, $|b|\leqslant 1$, можна записати або у вигляді сукупності:

$$\boxed{\left[\begin{array}{l}\boldsymbol{x=\arcsin b+2\pi n,}\\ \boldsymbol{x=\pi-\arcsin b+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z},}\end{array}\right.}$$

або одним записом:

$$\boxed{\boldsymbol{x=(-1)^k\arcsin b+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}}} \qquad (2)$$

Узагалі, одну й ту саму відповідь до тригонометричних рівнянь часто можна подати в різних формах запису.

Зрозуміло, що формулу (2) можна застосовувати і для окремих випадків: $b=1$, $b=0$, $b=-1$. Проте рівняння $\sin x=1$, $\sin x=0$, $\sin x=-1$ зустрічатимуться досить часто, тому радимо запам'ятати формули їхніх коренів, які записано на початку пункту.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin\left(t+\frac{\pi}{10}\right)=-1$.

Розв'язання. 1) Використовуючи формулу (2), запишемо:

$$\frac{x}{2}=(-1)^n\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Далі отримуємо: $\frac{x}{2}=(-1)^n\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n$; $\frac{x}{2}=-(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$;

$$\frac{x}{2}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n;\quad x=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+2\pi n.$$

Відповідь: $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

2) Перепишемо дане рівняння у вигляді $-\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тоді $\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$3x-\frac{\pi}{3}=(-1)^n\cdot\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$$

$3x - \frac{\pi}{3} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n;$ $3x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi n;$ $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}.$

Відповідь: $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$

3) За формулою коренів рівняння $\sin x = -1$ можемо записати:

$$t + \frac{\pi}{10} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Далі маємо: $t = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10} + 2\pi n;$ $t = -\frac{3\pi}{5} + 2\pi n.$

Відповідь: $-\frac{3\pi}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$ ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2.$

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = 1.$$

Оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3}$, а $\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$, то можна записати:

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x = 1.$$

Використовуючи формулу синуса суми $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha + \beta)$, отримаємо:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 1.$$

Звідси $\frac{\pi}{3} + x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Відповідь: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$ ◄

Зауважимо, що під час розв'язування рівняння прикладу 2 можна було скористатися й іншими формулами додавання, наприклад формулою косинуса різниці $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$. Справді, оскільки $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$, а $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, то

$$\cos\frac{\pi}{6}\cos x + \sin\frac{\pi}{6}\sin x = 1; \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

Звідси отримуємо ту саму відповідь: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

ПРИКЛАД 3 Скільки коренів залежно від значення параметра b має на проміжку $[0; 2\pi)$ рівняння

$$(\sin x - b)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0? \qquad (3)$$

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = b, \\ \cos x = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Друге рівняння цієї сукупності на проміжку $[0; 2\pi)$ має два корені: $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{5\pi}{3}$.

При $|b| > 1$ рівняння $\sin x = b$ коренів не має. Отже, рівняння (3) має два корені.

Якщо $b = 1$ або $b = -1$, то рівняння $\sin x = b$ на проміжку $[0; 2\pi)$ має один корінь (це відповідно число $\frac{\pi}{2}$ або число $\frac{3\pi}{2}$), причому цей корінь не збігається з коренями другого рівняння сукупності. Таким чином, при $|b| = 1$ рівняння (3) має три корені.

Якщо $|b| < 1$, то рівняння $\sin x = b$ на проміжку $[0; 2\pi)$ має два корені. Через це може здаватися, що рівняння (3) в цьому випадку матиме чотири корені. Насправді один із коренів рівняння $\sin x = b$ може збігатися із числом $\frac{\pi}{3}$ або із числом $\frac{5\pi}{3}$.

Знайдемо значення параметра b, при яких числа $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{5\pi}{3}$ є коренями рівняння $\sin x = b$. Маємо:

1) $\sin \frac{\pi}{3} = b$; $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\sin \frac{5\pi}{3} = b$; $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

При $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ рівняння $\sin x = b$ на проміжку $[0; 2\pi)$ має два корені $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{2\pi}{3}$, а рівняння (3) має три корені: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

При $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ аналогічно отримуємо, що рівняння (3) має три корені: $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

Відповідь: якщо $b < -1$ або $b > 1$, то 2 корені; якщо $b = -1$, або $b = 1$, або $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$, або $b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то 3 корені; якщо $-1 < b < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $-\frac{\sqrt{3}}{2} < b < \frac{\sqrt{3}}{2}$, або $\frac{\sqrt{3}}{2} < b < 1$, то 4 корені. ◄

ВПРАВИ

22.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x = \frac{1}{4}$; 4) $\sin x = \sqrt{2}$.

22.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$; 4) $\sin x = 1{,}5$.

22.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin \frac{x}{6} = -\frac{1}{2}$; 2) $\sin \frac{4x}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin 5x = 1$; 4) $\sin(-8x) = \frac{2}{9}$.

22.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\sin \frac{x}{7} = 0$; 3) $\sin \frac{2x}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

22.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\sin\left(\frac{x}{3} + 1\right) = -1$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{8} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12} - 3x\right) - 1 = 0$.

22.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{18} - 8x\right) = 1$; 2) $2\sin\left(\frac{x}{5} - 4\right) + 1 = 0$.

22.7.° Знайдіть найменший додатний корінь рівняння

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

22.8.° Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння

$$\sin\left(3x - \frac{\pi}{15}\right) = -1.$$

22.9.° Знайдіть усі корені рівняння $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, які належать проміжку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

22.10.° Скільки коренів рівняння $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ належать проміжку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

22.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$;

2) $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 1$;

3) $3\sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} = 3$.

22.12.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 1$;

2) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

22.13.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\frac{2}{x} = 0$;

2) $\sin\pi\sqrt{x} = -1$;

3) $\sin(\cos x) = 0{,}5$.

22.14.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\frac{3\pi}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos(\pi\sin x) = 0$.

22.15.•• При яких значеннях параметра a рівняння $(a^2-1)\sin x = a+1$ має розв'язки?

22.16.•• При яких значеннях параметра a рівняння $(a+4)\sin^2 2x = a^2 - 16$ має розв'язки?

22.17.•• При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{\sin x - a}{\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}} = 0$ має розв'язки?

22.18.•• При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{\sin x + a}{\sin x - 2a + 1} = 0$ має розв'язки?

22.19.•• При яких додатних значеннях параметра a проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; a\right]$ містить не менше ніж чотири корені рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$?

22.20.•• При яких від'ємних значеннях параметра a проміжок $[a; 0]$ містить не менше ніж три корені рівняння $\sin x = -\frac{1}{2}$?

22.21.•• Визначте кількість коренів рівняння $\sin x = a$ залежно від значення параметра a на проміжку:

1) $\left[0; \frac{11\pi}{6}\right]$; 2) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$; 3) $\left[-\frac{\pi}{3}; 2\pi\right]$.

22.22.•• Визначте кількість коренів рівняння $\sin x = a$ залежно від значення параметра a на проміжку:

1) $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$; 2) $\left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

22.23.•• Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(\sin x - a) = 0$ на проміжку $[0; 2\pi)$?

22.24.•• Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $(\cos x - a)\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0$ на проміжку $(0; 2\pi]$?

23. Рівняння $\operatorname{tg} x = b$ і $\operatorname{ctg} x = b$

Оскільки областю значень функції $y = \operatorname{tg} x$ є множина $\mathbb{R}$, то рівняння $\operatorname{tg} x = b$ має розв'язки при будь-якому значенні b.

Для того щоб отримати формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} x = b$, звернемося до графічної інтерпретації.

На рисунку 23.1 зображено графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = b$.

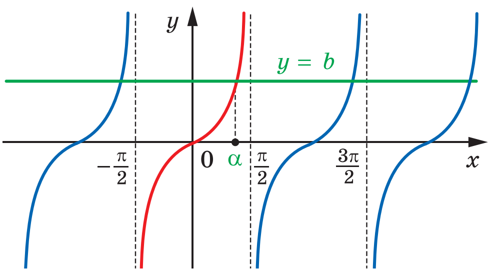


Рис. 23.1

Розглянемо функцію $y = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду даної функції (червона крива на рисунку 23.1). На цьому проміжку рівняння $\operatorname{tg} x = b$ при будь-якому b має єдиний корінь α.

Оскільки функція $y = \text{tg}\, x$ є періодичною з періодом π, то кожен з інших коренів рівняння $\text{tg}\, x = b$ відрізняється від знайденого кореня на число виду πn, $n \in \mathbb{Z}$.

Тоді множину коренів рівняння $\text{tg}\, x = b$ можна задати формулою

$$x = \alpha + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Отримана формула показує, що корінь α відіграє особливу роль: знаючи його, можна знайти всі інші корені рівняння $\text{tg}\, x = b$. Корінь α має спеціальну назву — арктангенс.

Означення. Арктангенсом числа b називають таке число α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює b.

Для арктангенса числа b використовують позначення $\text{arctg}\, b$.

Наприклад,

$\text{arctg}\, \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, оскільки $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\text{tg}\, \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$;

$\text{arctg}\, (-1) = -\frac{\pi}{4}$, оскільки $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$;

$\text{arctg}\, 0 = 0$, оскільки $0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\text{tg}\, 0 = 0$.

Узагалі, **$\text{arctg}\, b = \alpha$, *якщо* $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ *і* $\text{tg}\, \alpha = b$.**

Зазначимо, що, наприклад, $\text{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 1$. Проте $-\frac{3\pi}{4} \neq \text{arctg}\, 1$, оскільки $-\frac{3\pi}{4} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Тепер формулу коренів рівняння $\text{tg}\, x = b$ можна записати так:

$$\boxed{x = \text{arctg}\, b + \pi n, \ n \in \mathbb{Z}}$$

Оскільки областю значень функції $y = \text{ctg}\, x$ є множина $\mathbb{R}$, то рівняння $\text{ctg}\, x = b$ має розв'язки при будь-якому значенні b.

На рисунку 23.2 зображено графіки функцій $y = \text{ctg}\, x$ і $y = b$.

Розглянемо функцію $y = \text{ctg}\, x$ на проміжку $(0; \pi)$, тобто на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції (червона крива на рисунку 23.2). На цьому проміжку рівняння $\text{ctg}\, x = b$ при будь-якому b має єдиний корінь α.

Оскільки функція $y = \text{ctg}\, x$ є періодичною з періодом π, то кожен з інших коренів рівняння $\text{ctg}\, x = b$ відрізняється від знайденого кореня на число виду πn, $n \in \mathbb{Z}$.

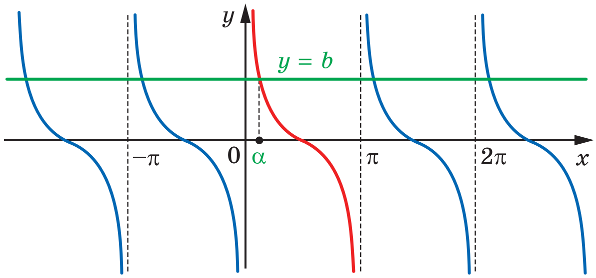


Рис. 23.2

Тоді множину коренів рівняння ctg $x = b$ можна задати формулою

$$x = \alpha + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Корінь α має спеціальну назву — арккотангенс.

Означення. Арккотангенсом числа b називають таке число α з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює b.

Для арккотангенса числа b використовують позначення arcctg b.

Наприклад,

$\text{arcctg}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\pi}{3}$, оскільки $\dfrac{\pi}{3} \in (0; \pi)$ і $\text{ctg}\,\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

$\text{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$, оскільки $\dfrac{5\pi}{6} \in (0; \pi)$ і $\text{ctg}\,\dfrac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$;

$\text{arcctg}\,0 = \dfrac{\pi}{2}$, оскільки $\dfrac{\pi}{2} \in (0; \pi)$ і $\text{ctg}\,\dfrac{\pi}{2} = 0$.

Узагалі, **arcctg $b = \alpha$, *якщо* $\alpha \in (0; \pi)$ *і* ctg $\alpha = b$.**

Зазначимо, що, наприклад, $\text{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$. Проте $-\dfrac{\pi}{4} \neq \text{arcctg}\,(-1)$, оскільки $-\dfrac{\pi}{4} \notin (0; \pi)$.

Тепер формулу коренів рівняння ctg $x = b$ можна записати так:

$$\boxed{x = \text{arcctg}\, b + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}}$$

ПРИКЛАД 1 Розв’яжіть рівняння:

1) $\text{tg}\,\dfrac{2x}{3} = -\sqrt{3}$; 2) $\text{ctg}\left(\dfrac{2\pi}{3} - x\right) = -1$.

Розв’язання. 1) Маємо: $\dfrac{2x}{3} = \text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

$$\frac{2}{3}x = -\frac{\pi}{3} + \pi k; \quad x = -\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k.$$

Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2) Маємо: $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1$;

$$x - \frac{2\pi}{3} = \operatorname{arcctg} 1 + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad x = \frac{11}{12}\pi + \pi k.$$

Відповідь: $\frac{11}{12}\pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Визначте, при яких значеннях параметра b рівняння $(x - b) \operatorname{tg} x = 0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ має єдиний корінь.

Розв'язання. Множина коренів рівняння $\operatorname{tg} x = 0$ визначається формулою $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Розглядуваному проміжку $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ належить лише один корінь $x = 0$.

Рівняння $x - b = 0$ має єдиний корінь $x = b$.

Якщо $b = 0$, то початкове рівняння має єдиний корінь $x = 0$.

Якщо $b \in \left[-\frac{\pi}{6}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то початкове рівняння на заданому проміжку має два корені: $x = 0$ і $x = b$.

Зрозуміло, що коли $b \notin \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$, то початкове рівняння має тільки один корінь.

Відповідь: $b = 0$, або $b < -\frac{\pi}{6}$, або $b \geqslant \frac{\pi}{2}$. ◄

ВПРАВИ

23.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;
2) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
3) $\operatorname{tg} x = -1$;
4) $\operatorname{tg} x = 5$;
5) $\operatorname{ctg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
6) $\operatorname{ctg} x = -1$;
7) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$;
8) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{7}$;
9) $\operatorname{ctg} x = 0$.

23.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} x = 1$; 3) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; 5) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; 7) $\operatorname{tg} x = 0$.

2) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 4) $\operatorname{tg} x = -2$; 6) $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

23.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} 2x = 1$; 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{7x}{4}\right) = \sqrt{3}$; 5) $\operatorname{ctg} 6x = \frac{6}{11}$;

2) $\operatorname{tg}\frac{x}{3} = \frac{1}{3}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 0$; 6) $\operatorname{ctg}(-9x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

23.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\frac{3}{5}x = 0$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$; 3) $\operatorname{ctg}\frac{3}{2}x = 5$.

23.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; 3) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0$;

2) $\operatorname{tg}(3 - 2x) = 2$; 4) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

23.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$; 2) $\operatorname{ctg}(4 - 3x) = 2$; 3) $3\operatorname{tg}(3x + 1) - \sqrt{3} = 0$.

23.7.° Скільки коренів рівняння $\operatorname{tg} 4x = 1$ належать проміжку $[0; \pi]$?

23.8.° Скільки коренів рівняння $\operatorname{ctg}\frac{x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$?

23.9.° Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{ctg} 2x = -\sqrt{3}$, які належать проміжку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

23.10.° Знайдіть суму коренів рівняння $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{3}$, які належать проміжку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

23.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x} = 0$; 2) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{\sqrt{x}} = 1$; 3) $\operatorname{tg}(\pi \sin x) = \sqrt{3}$.

23.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5x}=1$; 2) $\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{x}}=-1$; 3) $\operatorname{ctg}(\pi\cos x)=1$.

23.13.•• При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:

1) $\frac{\operatorname{tg}x-a}{\operatorname{ctg}x+3}=0$; 2) $\frac{\sin x-a}{3\operatorname{tg}^2x-1}=0$?

23.14.•• При яких значеннях параметра a має розв'язки рівняння:

1) $\frac{\operatorname{ctg}x+a}{\operatorname{tg}x-2}=0$; 2) $\frac{\cos x-a}{\operatorname{ctg}^2x-3}=0$?

23.15.•• При яких значеннях параметра a рівняння $(x+a)\left(\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\right)=0$ на проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь?

23.16.•• При яких значеннях параметра a рівняння $(x-a)(\operatorname{tg}x+1)=0$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};0\right)$ має єдиний корінь?

24. Функції $y=\arccos x$ і $y=\arcsin x$

Для будь-якого $a\in[-1;1]$ рівняння $\cos x=a$ на проміжку $[0;\pi]$ має єдиний корінь, який дорівнює $\arccos a$ (рис. 24.1). Отже, кожному числу x із проміжку $[-1;1]$ можна поставити у відповідність єдине число y із проміжку $[0;\pi]$ таке, що $y=\arccos x$.

Указане правило задає функцію $f(x)=\arccos x$ із областю визначення $D(f)=[-1;1]$ та областю значень $E(f)=[0;\pi]$.

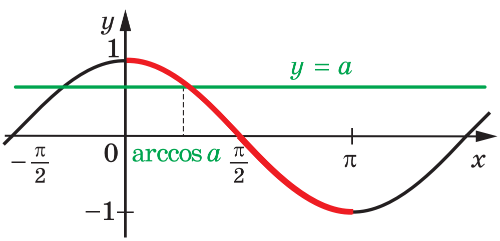


Рис. 24.1

Функція f є оберненою до функції $g(x)=\cos x$ із областю визначення $D(g)=[0;\pi]$.

Справді, $D(f)=E(g)=[-1;1]$;

$E(f)=D(g)=[0;\pi]$.

З означення арккосинуса випливає, що для всіх x із проміжку $[-1; 1]$ виконується рівність

$$\boxed{\cos(\arccos x) = x}$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Властивості взаємно обернених функцій, розглянуті в п. 3, дають змогу визначити деякі властивості функції $f(x) = \arccos x$.

Оскільки функція $g(x) = \cos x$, $D(g) = [0; \pi]$, є спадною, то з теореми 3.3 випливає, що функція $f(x) = \arccos x$ також є спадною.

Для будь-якого $x \in D(g)$ маємо: $f(g(x)) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in [0; \pi]$ виконується рівність

$$\boxed{\arccos(\cos x) = x}$$

Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Спираючись на це, можна побудувати графік функції $f(x) = \arccos x$ (рис. 24.2).

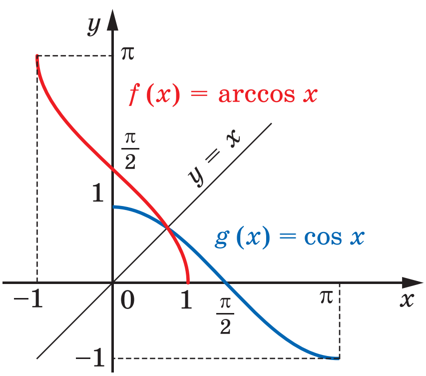


Рис. 24.2

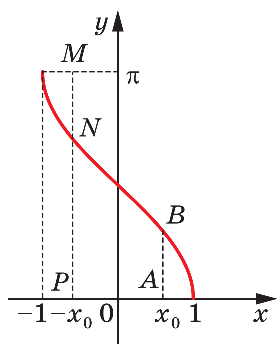


Рис. 24.3

Відзначимо ще одну властивість функції $y = \arccos x$: для будь-якого $x \in [-1; 1]$ виконується рівність

$$\boxed{\arccos(-x) = \pi - \arccos x} \qquad (1)$$

Наприклад, $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Ця властивість має просту графічну ілюстрацію. На рисунку 24.3 $AB = MN = \arccos x_0$, $NP = \arccos(-x_0)$, а $MN + NP = \pi$.

Доведемо рівність (1). Нехай $\arccos(-x) = \alpha_1$, $\pi - \arccos x = \alpha_2$. Зауважимо, що $\alpha_1 \in [0; \pi]$, $\alpha_2 \in [0; \pi]$. Функція $y = \cos x$ є спадною на проміжку $[0; \pi]$, тому на цьому проміжку кожного свого значення вона набуває тільки один раз. Отже, показавши, що $\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$, ми тим самим доведемо рівність $\alpha_1 = \alpha_2$.

Маємо: $\cos\alpha_1 = \cos(\arccos(-x)) = -x$;

$$\cos\alpha_2 = \cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x.$$

Для будь-якого $a \in [-1; 1]$ рівняння $\sin x = a$ на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ має єдиний корінь, який дорівнює $\arcsin a$ (рис. 24.4). Отже, кожному числу x із проміжку $[-1; 1]$ можна поставити у відповідність єдине число y із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ таке, що $y = \arcsin x$.

Указане правило задає функцію $f(x) = \arcsin x$ із областю визначення $D(f) = [-1; 1]$ та областю значень $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

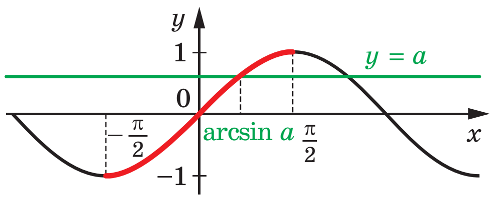


Рис. 24.4

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \sin x$ із областю визначення $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Справді, $D(f) = E(g) = [-1; 1]$;

$$E(f) = D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

З означення арксинуса випливає, що для всіх $x \in [-1; 1]$ виконується рівність

$$\boxed{\sin(\arcsin x) = x}$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Визначимо деякі властивості функції $f(x) = \arcsin x$.

Оскільки функція $g(x) = \sin x$, $D(g) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, є непарною, то функція $f(x) = \arcsin x$ також є непарною (див. ключову задачу 3.16).

Інакше кажучи, для будь-якого $x \in [-1;\ 1]$ виконується рівність

$$\boxed{\mathbf{\arcsin(-x) = -\arcsin x}}$$

Наприклад, $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}.$

Функція $g(x) = \sin x,\ D(g) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, є зростаючою. Отже, функція $f(x) = \arcsin x$ також є зростаючою (див. теорему 3.3).

Для будь-якого $x \in D(g)$ маємо: $f(g(x)) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ виконується рівність

$$\boxed{\mathbf{\arcsin(\sin x) = x}}$$

Знову скористаємося тим, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

На рисунку 24.5 показано, як за допомогою графіка функції $g(x) = \sin x,\ D(g) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, побудувати графік функції $f(x) = \arcsin x$.

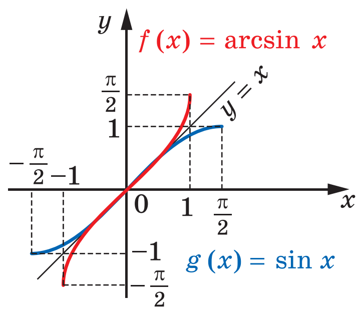


Рис. 24.5

Доведемо, що для будь-якого $x \in [-1;\ 1]$ виконується рівність

$$\boxed{\mathbf{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}}}$$

Для цього покажемо, що

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

Маємо: $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}.$

Крім того, $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$, а тому

$$-\pi \leqslant -\arccos x \leqslant 0;\quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{2} - \arccos x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Бачимо, що значення виразів $\arcsin x$ і $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ належать проміжку зростання функції $y = \sin x$. Отже, достатньо показати, що $\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)$.

Маємо: $\sin(\arcsin x) = x;\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x.$

ПРИКЛАД 1 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 4 - \arccos 3x$.

Розв'язання. Оскільки $0 \leqslant \arccos 3x \leqslant \pi$, то $-\pi \leqslant -\arccos 3x \leqslant 0$ і $4 - \pi \leqslant 4 - \arccos 3x \leqslant 4$.

Зазначимо, що $f\left(-\dfrac{1}{3}\right) = 4 - \pi$, $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 4$.

Відповідь: найменше значення дорівнює $4 - \pi$, найбільше значення дорівнює 4. ◄

ПРИКЛАД 2 Обчисліть: 1) $\arccos\left(\cos\dfrac{1}{3}\right)$; 2) $\arcsin(\sin 6)$.

Розв'язання. Використовуючи формулу $\arccos(\cos x) = x$, де $x \in [0; \pi]$, маємо: $\arccos\left(\cos\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{3}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{3}$.

2) Здавалося б, відповідь можна отримати одразу, зважаючи на рівність $\arcsin(\sin x) = x$. Проте число $x = 6$ не належить проміжку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, а отже, не може дорівнювати значенню арксинуса.

Правильне міркування має бути, наприклад, таким:

$\arcsin(\sin 6) = \arcsin(\sin(6 - 2\pi))$. Оскільки $6 - 2\pi \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$, то $\arcsin(\sin 6) = 6 - 2\pi$.

Відповідь: $6 - 2\pi$. ◄

ПРИКЛАД 3 Обчисліть $\sin\left(\arccos\dfrac{3}{5}\right)$.

Розв'язання. Нехай $\arccos\dfrac{3}{5} = \alpha$, тоді $\alpha \in [0; \pi]$ і $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$. Таким чином, задачу зведено до пошуку значення $\sin\alpha$.

Урахуємо, що коли $\alpha \in [0; \pi]$, то $\sin\alpha \geq 0$. Тоді отримуємо:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Відповідь: $\dfrac{4}{5}$. ◄

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\arccos(2x-1) > \frac{\pi}{3}$.

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність у такому вигляді:

$$\arccos(2x-1) > \arccos\frac{1}{2}.$$

Оскільки функція арккосинус є спадною, то дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} 2x-1<\frac{1}{2}, \\ 2x-1 \geqslant -1. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x<\frac{3}{4}, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

Відповідь: $\left[0; \frac{3}{4}\right)$. ◄

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $y = \arcsin(\sin x)$.

Розв'язання. Здається природним припустити, що шуканим графіком є пряма $y = x$. Проте це неправильно, оскільки $\arcsin(\sin x) = x$ лише за умови $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Дана функція є періодичною з періодом $T = 2\pi$, тому достатньо побудувати її графік на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ завдовжки в період.

Якщо $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin x) = x$. Отже, на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ шуканий графік — це відрізок прямої $y = x$.

Якщо $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}$, отже,

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x.$$

Таким чином, на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ шуканий графік — це відрізок прямої $y = \pi - x$.

Графік функції $y = \arcsin(\sin x)$ зображено на рисунку 24.6. ◄

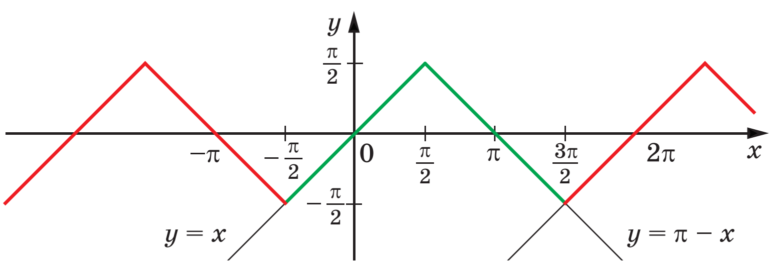


Рис. 24.6

ВПРАВИ

24.1.° Чи є правильною рівність:

1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\pi$;

2) $\arccos^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{25\pi^2}{36}$;

3) $\arcsin 1+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$;

4) $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{2}$;

5) $\arcsin 1\cdot\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{12}$;

6) $\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{16}$?

24.2.° Чи є правильною рівність:

1) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$;

2) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{12}$;

3) $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=0$;

4) $\arcsin 0+\arcsin\frac{1}{2}=\frac{7\pi}{6}$;

5) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi^2}{36}$?

24.3.° Обчисліть:

1) $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$;

2) $\cos\left(2\arccos\frac{1}{2}\right)$;

3) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

4) $\cos\left(3\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

24.4.° Обчисліть:

1) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $\operatorname{tg}(2\arccos(-1))$;

3) $\sin\left(3\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$;

4) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+2\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

24.5.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\arcsin(x-1)$;

2) $y=\arccos\sqrt{x}$;

3) $y=\arccos\frac{\pi}{x+4}$.

24.6.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \arcsin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $y = \arccos\sqrt{3 - x}$; 3) $y = \arccos\frac{2}{3x}$.

24.7.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$; 2) $y = \arccos x + 2$.

24.8.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y = \arccos x + \pi$; 2) $y = \arcsin x + 1$.

24.9.° Обчисліть: 1) $\cos\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$; 2) $\sin\left(\arcsin\frac{\pi}{6}\right)$.

24.10.° Обчисліть: 1) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)$; 2) $\cos\left(\arccos\frac{\pi}{4}\right)$.

24.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin x = -\frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos x = \frac{1}{2}$; 3) $\arcsin x = \frac{5\pi}{6}$.

24.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arccos x = -\frac{\pi}{6}$; 3) $\arccos(2x - 3) = \frac{\pi}{2}$.

24.13.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\arcsin x > -\frac{\pi}{2}$; 4) $\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$; 7) $\arccos x > 0$;

2) $\arcsin x \leqslant -\frac{\pi}{2}$; 5) $\arcsin x > \frac{\pi}{2}$; 8) $\arccos x < \pi$.

3) $\arcsin x \geqslant -\frac{\pi}{2}$; 6) $\arccos x \leqslant 0$;

24.14.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\arccos x \geqslant \pi$; 3) $\arccos x \geqslant 0$; 5) $\arccos x > \pi$.

2) $\arcsin x < \frac{\pi}{2}$; 4) $\arccos x \leqslant \pi$;

24.15.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\pi - \arccos x}$; 4) $y = \arcsin\left(\sqrt{x} + 1\right)$;

2) $y = \sqrt{\arccos x - \pi}$; 5) $y = \arccos(-1 - x^2)$.

3) $y = \sqrt{-\arccos x}$;

24.16.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}$; 2) $y = \sqrt{\arcsin x - \frac{\pi}{2}}$;

3) $y = \sqrt{\arccos x}$; 4) $y = \arccos(x^2 - 2x + 2)$; 5) $y = \arccos\dfrac{x^2+1}{2x}$.

24.17.° Знайдіть область значень функції:

1) $y = \arcsin\sqrt{x} + 4$; 3) $y = \dfrac{1}{\arcsin x}$;

2) $y = \sqrt{-\arccos x}$; 4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\arccos x}}$.

24.18.° Знайдіть область значень функції:

1) $y = \arccos\sqrt{x} + 2$; 3) $y = \dfrac{1}{\arccos x}$;

2) $y = \sqrt{\arcsin x}$; 4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{\arcsin x}}$.

24.19.° Доведіть, що при $|x| \leqslant 1$ виконується рівність

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}.$$

24.20.° Доведіть, що при $|x| \leqslant 1$ виконується рівність

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

24.21.° Обчисліть значення виразу:

1) $\cos\left(\arcsin\dfrac{4}{5}\right)$; 3) $\cos\left(\arcsin\dfrac{3}{5} - \arccos\dfrac{5}{13}\right)$;

2) $\sin\left(2\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$; 4) $\cos\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{1}{8}\right)$.

24.22.° Обчисліть значення виразу:

1) $\sin\left(\arccos\dfrac{1}{3}\right)$; 3) $\cos\left(2\arccos\dfrac{4}{5}\right)$;

2) $\sin\left(\arccos\dfrac{1}{3} + \arccos\dfrac{2}{3}\right)$; 4) $\cos\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{5}{13}\right)$.

24.23.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\arcsin(3x-2) = \arcsin(-x+2)$;

2) $\arccos(3x-16) = \arccos(x^2-26)$.

24.24.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\arccos(3x+2) = \arccos(5x+3)$;

2) $\arcsin(x^2-4) = \arcsin(2x+4)$.

24.25.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\arccos(2x-1) > \dfrac{\pi}{3}$; 2) $\arcsin 2x > \dfrac{\pi}{6}$; 3) $\arcsin(5-3x) < -\dfrac{\pi}{3}$.

24.26.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\arccos(4x-1) > \frac{3\pi}{4}$;
2) $\arcsin(2-3x) < \frac{\pi}{4}$;
3) $\arccos(4-7x) < \frac{5\pi}{6}$.

24.27.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\arcsin(3x-2) > \arcsin(5x-3)$;
2) $\arccos(2x-1) < \arccos\frac{1}{x}$.

24.28.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\arcsin(x^2-x) > \arcsin(3x-4)$;
2) $\arccos(1-2x) < \arccos\frac{1}{x-1}$.

24.29.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \arcsin|x-1|$;
2) $y = \arccos|2x+1|$.

24.30.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \arccos(|x|+1)$;
2) $y = \arcsin\left(\frac{1}{2}|x|-1\right)$.

24.31.•• Побудуйте графік функції $y = \frac{|\arcsin x|}{\arcsin|x|}$.

24.32.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \sin(\arcsin x)$;
2) $y = \cos(\arcsin x)$;
3) $y = \cos(2\arcsin x)$;
4) $y = \sin(\arcsin x + \arccos x)$.

24.33.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \cos(\arccos x)$;
2) $y = \sin(\arccos x)$;
3) $y = \cos(2\arccos x)$;
4) $y = \cos(\arcsin x + \arccos x)$.

24.34.•• Побудуйте графік функції $y = \arccos(\cos x)$.

24.35.•• Обчисліть значення виразу:

1) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{7}\right)$;
2) $\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{7}\right)$;
3) $\arcsin(\sin 3)$;
4) $\arcsin(\cos 8)$.

24.36.•• Обчисліть значення виразу:

1) $\arccos\left(\cos\frac{2\pi}{9}\right)$;
2) $\arccos\left(\cos\frac{11\pi}{9}\right)$;
3) $\arccos(\cos 6{,}28)$;
4) $\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{8}\right)$;
5) $\arccos(\sin 12)$.

24.37.•• Розв'яжіть рівняння $(\arcsin x)^2 + (\arccos x)^2 = \frac{5\pi^2}{36}$.

24.38.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $(\arcsin x)^2 - (\arccos x)^2 = \frac{\pi^2}{12}$; 2) $\arcsin x \cdot \arccos x = -\frac{3\pi^2}{16}$.

24.39.•• Доведіть, що $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ при $|x| < 1$.

24.40.•• Доведіть, що $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ при $|x| \leqslant 1$ і $x \neq 0$.

24.41.•• Доведіть, що $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{5}{13} = \arcsin\frac{56}{65}$.

24.42.•• Доведіть, що $\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$.

24.43.•• Розв'яжіть рівняння $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$.

24.44.•• Розв'яжіть рівняння $\arcsin x + \arcsin\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$.

25. Функції $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$

Для будь-якого a рівняння $\operatorname{tg} x = a$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ має єдиний корінь, який дорівнює $\operatorname{arctg} a$ (рис. 25.1). Отже, будь-якому числу x можна поставити у відповідність єдине число y із проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ таке, що $y = \operatorname{arctg} x$.

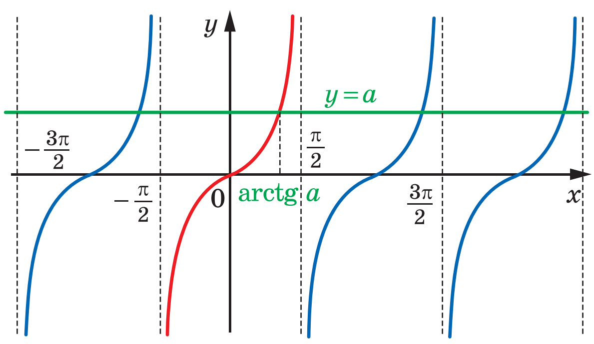


Рис. 25.1

Указане правило задає функцію $f(x) = \operatorname{arctg} x$ із областю визначення $D(f) = \mathbb{R}$ та областю значень $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \operatorname{tg} x$ із областю визначення $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Справді, $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$;

$$E(f) = D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

З означення арктангенса випливає, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x}$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Властивості взаємно обернених функцій, розглянуті в п. 3, дають змогу визначити деякі властивості функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Оскільки функція $g(x) = \operatorname{tg} x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, є зростаючою, то з теореми 3.3 випливає, що функція $f(x) = \operatorname{arctg} x$ також є зростаючою.

Оскільки функція $g(x) = \operatorname{tg} x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, є непарною, то функція $f(x) = \operatorname{arctg} x$ також є непарною (див. ключову задачу 3.16). Інакше кажучи, для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x}$$

Наприклад, $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$.

Для будь-якого $x \in D(g)$ маємо: $f(g(x)) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується рівність

$$\boxed{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x}$$

Нагадаємо, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. На рисунку 25.2 показано, як за допомогою графіка функції $g(x) = \operatorname{tg} x$, $D(g) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, побудувати графік функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

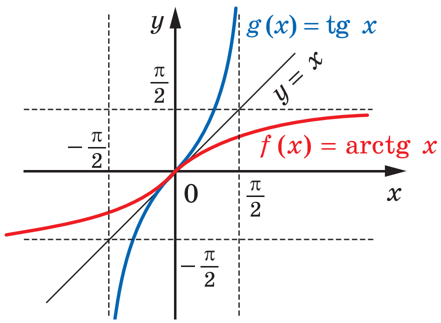


Рис. 25.2

Для будь-якого a рівняння $\operatorname{ctg} x = a$ на проміжку $(0; \pi)$ має єдиний корінь, який дорівнює $\operatorname{arcctg} a$ (рис. 25.3). Отже, будь-якому числу x можна поставити у відповідність єдине число y із проміжку $(0; \pi)$ таке, що $y = \operatorname{arcctg} x$.

Указане правило задає функцію $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ із областю визначення $D(f) = \mathbb{R}$ та областю значень $E(f) = (0; \pi)$.

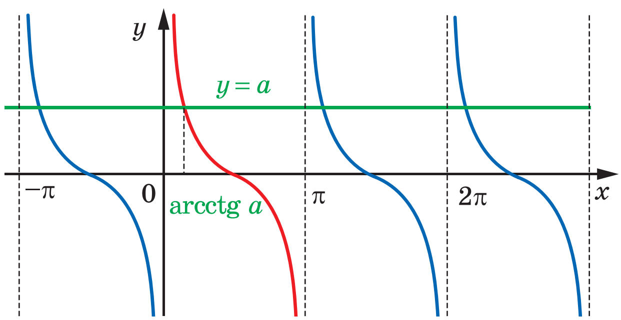


Рис. 25.3

Функція f є оберненою до функції $g(x) = \operatorname{ctg} x$ із областю визначення $D(g) = (0; \pi)$.

Справді, $D(f) = E(g) = \mathbb{R}$;

$E(f) = D(g) = (0; \pi)$.

З означення арккотангенса випливає, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\mathbf{ctg}\,(\mathbf{arcctg}\,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}}$$

Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$.

Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Визначимо деякі властивості функції $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

Оскільки функція $g(x) = \operatorname{ctg} x$, $D(g) = (0;\ \pi)$, є спадною, то функція $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ також є спадною.

Для будь-якого $x \in D(g)$ маємо: $f(g(x)) = x$. Це означає, що для будь-якого $x \in (0;\ \pi)$ виконується рівність

$$\boxed{\mathbf{arcctg}\,(\mathbf{ctg}\,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}}$$

На рисунку 25.4 показано, як за допомогою графіка функції $g(x) = \operatorname{ctg} x$, $D(g) = (0;\ \pi)$, побудувати графік функції $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

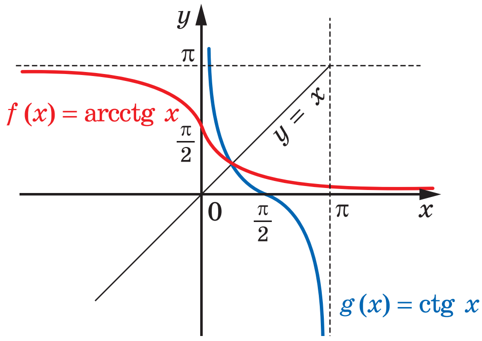


Рис. 25.4

Відзначимо ще одну властивість функції арккотангенс: для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\mathbf{arcctg}\,(-\boldsymbol{x}) = \pi - \mathbf{arcctg}\,\boldsymbol{x}}$$

Наприклад, $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Доведемо цю властивість.

Нехай $\operatorname{arcctg}(-x) = \alpha_1$ і $\pi - \operatorname{arcctg} x = \alpha_2$. Зауважимо, що $\alpha_1 \in (0;\ \pi)$, $\alpha_2 \in (0;\ \pi)$.

Функція $y = \operatorname{ctg} x$ спадає на проміжку $(0;\ \pi)$, тому на цьому проміжку кожного свого значення вона набуває тільки один раз. Отже, показавши, що $\operatorname{ctg}\alpha_1 = \operatorname{ctg}\alpha_2$, ми тим самим доведемо рівність $\alpha_1 = \alpha_2$.

Маємо: $\text{ctg}\ \alpha_1 = \text{ctg}(\text{arcctg}(-x)) = -x$;
$\text{ctg}\ \alpha_2 = \text{ctg}(\pi - \text{arcctg}\ x) = -\text{ctg}(\text{arcctg}\ x) = -x$.
Отже, $\text{ctg}\ \alpha_1 = \text{ctg}\ \alpha_2$.
Покажемо, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$\boxed{\textbf{arctg}\ \boldsymbol{x} + \textbf{arcctg}\ \boldsymbol{x} = \frac{\pi}{2}}$$

Достатньо показати, що $\text{arctg}\ x = \frac{\pi}{2} - \text{arcctg}\ x$.

Маємо: $-\frac{\pi}{2} < \text{arctg}\ x < \frac{\pi}{2}$, $0 < \text{arcctg}\ x < \pi$;

$$-\pi < -\text{arcctg}\ x < 0;\quad -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \text{arcctg}\ x < \frac{\pi}{2}.$$

Бачимо, що значення виразів $\text{arctg}\ x$ і $\frac{\pi}{2} - \text{arcctg}\ x$ належать проміжку зростання функції $y = \text{tg}\ x$. Отже, достатньо показати, що $\text{tg}(\text{arctg}\ x) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arcctg}\ x\right)$.

Маємо: $\text{tg}(\text{arctg}\ x) = x$, $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arcctg}\ x\right) = \text{ctg}(\text{arcctg}\ x) = x$.

ПРИКЛАД 1 Обчисліть $\cos\left(2\,\text{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Розв'язання. Нехай $\text{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) = \alpha$, тоді $\text{tg}\,\alpha = -\frac{1}{3}$.

Запишемо:

$$1 + \text{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};\quad \cos^2\alpha = \frac{9}{10}.$$

Звідси $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{9}{10} - 1 = \frac{4}{5}$.

Відповідь: $\frac{4}{5}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що $\text{arctg}\,\frac{1}{2} + \text{arctg}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = \text{arctg}\ x$ є зростаючою, то можна записати:

$$0 < \text{arctg}\,\frac{1}{2} < \text{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4},$$

$$0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Звідси $0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}.$

Отже, значення виразів, записаних у лівій і правій частинах рівності, яка доводиться, належать проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. На цьому проміжку функція $y = \operatorname{tg} x$ зростає.

Тоді для доведення достатньо показати, що

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

Маємо: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1;$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)}{1 - \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1.$$ ◄

ВПРАВИ

25.1.° Обчисліть значення виразу:

1) $\cos(2\operatorname{arctg} 1)$;

2) $\operatorname{ctg}\left(2\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$;

3) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6}\right)$;

4) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\operatorname{arctg} 1\right)$.

25.2.° Знайдіть значення виразу:

1) $\arcsin 1 + \arccos(-1) + \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)$;

2) $4\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 3\arccos 1 + 2\arcsin\frac{1}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

25.3.° Знайдіть значення виразу:

1) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arcctg} 1 + \arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

2) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 5\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\arcsin(-1)$.

25.4.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{\operatorname{arcctg} x}$;

2) $y = \sqrt{\operatorname{arctg}(x - 1)}$.

25.5.° Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{\pi - \operatorname{arcctg} x}$.

25.6.° Знайдіть область значень функції:

1) $y = \operatorname{arctg} x + 2$;
2) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$.

25.7.° Знайдіть область значень функції:

1) $y = \operatorname{arcctg} x + 4$;
2) $y = \sqrt{-\operatorname{arctg} x}$.

25.8.° Обчисліть значення виразу:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 4)$;
2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 5)$;
3) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}\right)$;
4) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} \pi)$.

25.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2x) = 5$;
2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(4 - 3x)) = 2$.

25.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$;
2) $\operatorname{arctg} x = 1$;
3) $\operatorname{arctg} x = \frac{3\pi}{4}$;
4) $\operatorname{arctg}(4x + 9) = -\frac{\pi}{6}$.

25.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{arcctg} x = \frac{3\pi}{4}$;
2) $\operatorname{arcctg} x = -1$;
3) $\operatorname{arcctg} x = -\frac{\pi}{4}$;
4) $\operatorname{arcctg}(5 - 8x) = \frac{2\pi}{3}$.

25.12.• Обчисліть значення виразу:

1) $\sin(\operatorname{arctg} 2)$;
2) $\cos(\operatorname{arctg} 2)$;
3) $\cos\left(-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{7}{8}\right)\right)$;
4) $\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2} - \operatorname{arcctg} 3\right)$.

25.13.• Обчисліть значення виразу:

1) $\sin(\operatorname{arcctg}(-2))$;
2) $\sin(\operatorname{arctg}(-3))$;
3) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \arccos\frac{3}{5}\right)$.

25.14.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{arctg}(5x + 3) > -\frac{\pi}{3}$;
2) $\operatorname{arcctg}(x - 2) < \frac{5\pi}{6}$.

25.15.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{arcctg}(3x - 7) > \frac{2\pi}{3}$;
2) $\operatorname{arctg}(x + 11) < \frac{\pi}{6}$.

25.16.$^\bullet$ Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$; 2) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$.

25.17.$^\bullet$ Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$; 2) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)$.

25.18.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння $(\operatorname{arctg} x)^2 + (\operatorname{arcctg} x)^2 = \frac{\pi^2}{8}$.

25.19.$^\bullet$ Розв'яжіть рівняння $\operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x = -\frac{5\pi^2}{18}$.

25.20.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

25.21.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.

25.22.$^{\bullet\bullet}$ Обчисліть значення виразу:

1) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{10\pi}{13}\right)$; 3) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{21}\right)$;

2) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)$; 4) $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 17)$.

25.23.$^{\bullet\bullet}$ Обчисліть значення виразу:

1) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{15\pi}{11}\right)$; 3) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\frac{15\pi}{19}\right)$;

2) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} 15)$; 4) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 10)$.

25.24.$^{\bullet\bullet}$ Числа x і y є такими, що $|xy| < 1$. Доведіть, що

1) $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

25.25.$^{\bullet\bullet}$ Чи існують такі числа x і y, що виконується нерівність $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y > \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$?

25.26.$^{\bullet\bullet}$ Чи існують такі числа x і y, що виконується нерівність $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$?

25.27.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть рівність $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

25.28.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть рівність $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} = \operatorname{arctg}\frac{49}{43}$.

25.29.* Обчисліть суму:

1) $S = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{1+n+n^2}$;

2) $S = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{2}{11} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{2n}{n^4+n^2+2}$.

25.30.* Обчисліть суму $S = \operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arcctg} 7 + \ldots + \operatorname{arcctg}(n^2+n+1)$.

25.31.* Про додатні числа x, y і z відомо, що

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z < \pi.$$

Доведіть, що $x + y + z > xyz$.

25.32.* Про додатні числа x, y і z відомо, що

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y + \operatorname{arctg} z < \frac{\pi}{2}.$$

Доведіть, що $xy + yz + zx < 1$.

26. Тригонометричні рівняння, які зводяться до алгебраїчних

У пунктах 21–23 ми отримали формули для розв'язування рівнянь виду $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$. Ці рівняння називають **найпростішими тригонометричними рівняннями**. За допомогою різних прийомів і методів багато тригонометричних рівнянь можна звести до найпростіших.

У цьому пункті розглянемо рівняння, які можна звести до найпростіших, увівши нову змінну та розв'язавши отримане алгебраїчне рівняння.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\sin x - 3\cos 2x = 2$.

Розв'язання. Використовуючи формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, перетворимо дане рівняння:

$$\sin x - 3(1 - 2\sin^2 x) - 2 = 0;$$
$$6\sin^2 x + \sin x - 5 = 0.$$

Нехай $\sin x = t$. Отримуємо квадратне рівняння $6t^2 + t - 5 = 0$. Звідси $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{5}{6}$.

Отже, дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{5}{6}. \end{array}\right.$$

Маємо: $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = (-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ (-1)^n \arcsin\frac{5}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^2 x} = 3.$

Розв'язання. Оскільки $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$ то дане рівняння можна записати так:

$$\operatorname{tg} x + (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 3.$$

Звідси $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0.$ Нехай $\operatorname{tg} x = t.$ Маємо: $t^2 + t - 2 = 0.$ Тоді $t_1 = 1,$ $t_2 = -2.$

Отримуємо, що дане рівняння рівносильне сукупності двох рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = -2. \end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \pi n,$ $-\operatorname{arctg}\ 2 + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}.$ ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $2\sin^2 x + \cos 4x - 2 = 0.$

Розв'язання. Можна записати: $1 - \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 - 2 = 0.$ Звідси $2\cos^2 2x - \cos 2x - 2 = 0.$ Зробимо заміну $\cos\ 2x = t.$ Тоді останнє рівняння набуває вигляду $2t^2 - t - 2 = 0.$ Розв'язавши його, отримуємо: $t_1 = \frac{1 - \sqrt{17}}{4},$ $t_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{4}.$

Оскільки $\frac{1 + \sqrt{17}}{4} > 1,$ а $\frac{1 - \sqrt{17}}{4} \in [-1; 1],$ то початкове рівняння рівносильне рівнянню $\cos 2x = \frac{1 - \sqrt{17}}{4},$ звідси

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1 + \sqrt{17}}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1 + \sqrt{17}}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ ◄

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x + 4 = 0.$$

Розв'язання. Маємо: $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 3(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) + 4 = 0.$

Нехай $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = y$. Підносячи обидві частини записаної рівності до квадрата, отримуємо: $\operatorname{tg}^2 x + 2 + \operatorname{ctg}^2 x = y^2$; $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = y^2 - 2$. Дане в умові рівняння набуває вигляду $y^2 - 2 + 3y + 4 = 0$, тоді $y^2 + 3y + 2 = 0$; $y_1 = -1$, $y_2 = -2$.

Маємо сукупність рівнянь: $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -1,\\ \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2.\end{array}\right.$ Розв'язуючи рівняння сукупності, знаходимо: $\operatorname{tg} x = -1$. Звідси $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. ◄

Означення. **Рівняння виду**

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \ldots + a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x + a_n \cos^n x = 0,$$

де $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — дійсні числа, які одночасно не дорівнюють нулю, $n \in \mathbb{N}$, називають однорідним тригонометричним рівнянням n-го степеня відносно $\sin x$ і $\cos x$.

З означення випливає, що суми показників степенів при $\sin x$ і $\cos x$ усіх доданків однорідного тригонометричного рівняння є рівними.

Наприклад, рівняння $2 \sin x - 3 \cos x = 0$ — однорідне тригонометричне рівняння першого степеня, а рівняння $\sin^2 x - 5 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$ і $2 \sin^2 x - \cos^2 x = 0$ — однорідні тригонометричні рівняння другого степеня.

Для однорідних рівнянь існує ефективний метод розв'язування. Ознайомимося з ним на прикладах.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння

$$7 \sin^2 x - 8 \sin x \cos x - 15 \cos^2 x = 0.$$

Розв'язання. Якщо $\cos x = 0$, то з даного рівняння випливає, що $\sin x = 0$. Але $\sin x$ і $\cos x$ не можуть одночасно дорівнювати нулю, оскільки має місце рівність $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Отже, множина коренів даного рівняння складається з таких чисел x, при яких $\cos x \neq 0$.

Поділивши обидві частини даного рівняння на $\cos^2 x$, отримаємо рівносильне рівняння:

$$\frac{7 \sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{8 \sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{15 \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$$

$$7 \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x - 15 = 0.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x=-1, \\ \operatorname{tg} x=\dfrac{15}{7};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n, \\ x=\operatorname{arctg}\dfrac{15}{7}+\pi n, n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Відповідь: $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\dfrac{15}{7}+\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння $3\sin^2 x+\sin 2x=2$.

Розв'язання. Це рівняння не є однорідним. Проте його можна легко звести до однорідного:

$$3\sin^2 x+2\sin x\cos x=2(\sin^2 x+\cos^2 x).$$

Звідси

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x-2\cos^2 x=0.$$

Отримали однорідне рівняння. Далі, діючи, як у попередньому прикладі, перейдемо до квадратного рівняння відносно $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x-2=0.$$

Завершіть розв'язування самостійно.

Відповідь: $\operatorname{arctg}\left(-1\pm\sqrt{3}\right)+\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $2\sin x-3\cos x=2$.

Розв'язання. Скористаємося формулами подвійного аргументу та основною тригонометричною тотожністю:

$$4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-3\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)=2\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right);$$

$$\sin^2\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-5\cos^2\frac{x}{2}=0.$$

Поділимо обидві частини останнього рівняння на $\cos^2\dfrac{x}{2}$ і зробимо заміну $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t$. Отримаємо: $t^2+4t-5=0$, звідси $t_1=1$, $t_2=-5$;

$$\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, \\ x=-2\operatorname{arctg} 5+2\pi n, n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $-2\operatorname{arctg} 5+2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ◄

Рівняння прикладу 7 є окремим випадком рівняння виду

$$a\sin x+b\cos x=c, \qquad (1)$$

де a, b, c — деякі числа, відмінні від нуля.

Під час розв'язування подібних рівнянь крім методу, розглянутого в прикладі 7, можна використовувати такий прийом. Перепишемо рівняння (1) у вигляді

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Оскільки

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1,$$

то точка $P\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ належить одиничному колу. Отже, існує такий кут φ, що $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Тепер рівняння набуває вигляду

$$\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Звідси $\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Таким чином, отримали найпростіше тригонометричне рівняння.

ПРИКЛАД 8 При яких значеннях параметра a рівняння $\sin^2 3x-\left(a+\frac{1}{2}\right)\sin 3x+\frac{a}{2}=0$ має на проміжку $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$ рівно: 1) два корені; 2) три корені?

Розв'язання. Розглянемо дане рівняння як квадратне відносно $\sin 3x$. Розв'язуючи його, отримаємо рівносильну сукупність рівнянь

$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x=\frac{1}{2},\\ \sin 3x=a.\end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності має на проміжку $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$ рівно два корені. У цьому можна переконатися, знайшовши ці корені або використовуючи графічну інтерпретацію рівняння (рис. 26.1). Отже, для задачі 1) треба, щоб друге рівняння сукупності не давало нових коренів на проміжку $\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$.

При $a = \frac{1}{2}$ очевидно, що корені рівнянь сукупності збігаються. При $a > 1$ або $a < 0$ рівняння $\sin 3x = a$ не має коренів на проміжку $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$. У цьому знов-таки можна переконатися, наприклад, використовуючи графічну інтерпретацію (рис. 26.1).

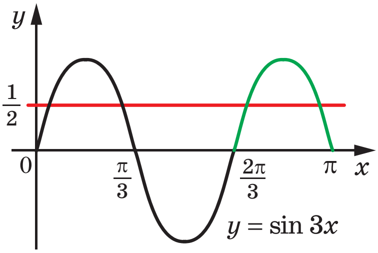


Рис. 26.1

Для задачі 2) друге рівняння сукупності на розглядуваному проміжку $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ повинно додавати до множини всіх коренів тільки один корінь. Зрозуміло, що це буде виконуватися тільки при $a = 1$.

Відповідь: 1) $a > 1$, або $a < 0$, або $a = \frac{1}{2}$; 2) $a = 1$. ◄

ВПРАВИ

26.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$;
2) $\sin^2 3x + 2\sin 3x - 3 = 0$;
3) $\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0$;
4) $3\operatorname{ctg}^2 2x + \operatorname{ctg} 2x - 4 = 0$.

26.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$;
2) $2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$;
3) $4\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$;
4) $3\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{3} - \operatorname{ctg}\frac{x}{3} - 2 = 0$.

26.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x - \cos x = 0$;
2) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$;
3) $\sin\frac{x}{3} + 5\cos\frac{x}{3} = 0$;
4) $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$;
5) $\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2} = 0$;
6) $3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$.

26.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x + \cos x = 0$;
2) $2\sin x + \cos x = 0$;
3) $\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0$;
4) $4\sin^2 x = 3\sin x\cos x + \cos^2 x$.

26.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$;
2) $\cos 2x = 1 + 4\cos x$;
3) $\cos 2x + \sin x = 0$;
4) $\cos\frac{2x}{3} - 5\cos\frac{x}{3} - 2 = 0$;
5) $\cos 2x - \cos^2 x - \sqrt{2}\sin x = 0$;
6) $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = -2$;
7) $8\sin^2 3x + 4\sin^2 6x = 5$;
8) $4\operatorname{tg} 5x + 3\operatorname{ctg} 5x = 7$;
9) $\frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + 3$;
10) $2\operatorname{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$.

26.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2\cos^2 x = 1 + \sin x$;
2) $\cos 2x + 8\sin x = 3$;
3) $\cos 2x + \sin^2 x = \cos x$;
4) $5\sin\frac{x}{6} - \cos\frac{x}{3} + 3 = 0$;
5) $2\cos^2 4x - 6\cos^2 2x + 1 = 0$;
6) $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x = 3$;
7) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 3 = \frac{3}{\cos^2 x}$;
8) $4\sin^2 x + 9\operatorname{ctg}^2 x = 6$.

26.7.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$;
2) $\cos^2 5x + 7\sin^2 5x = 4\sin 10x$;
3) $(\cos x + \sin x)^2 = 1 - \cos 2x$;
4) $3\sin^2 x - 7\sin x\cos x + 14\cos^2 x - 2 = 0$;
5) $5\cos^2 x - 3\sin^2 x - \sin 2x = 2$;
6) $3\sin^2 x + \sin x\cos x + 4\cos^2 x = 3$;
7) $3\sin x\cos x + \cos^2 x = 1$;
8) $\frac{2\cos x + \sin x}{7\sin x - \cos x} = \frac{1}{2}$.

26.8.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 x + 3\cos^2 x - 2\sin 2x = 0$;
2) $5\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 1$;
3) $6\sin^2 x + 2\sin 2x + 4\cos^2 x = 3$;
4) $2\cos^2 x + \sin 2x - 2 = 0$;
5) $3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$;
6) $\frac{2\sin x - \cos x}{5\sin x - 4\cos x} = \frac{1}{3}$.

26.9.• Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння
$$\sin^2 x + \cos x + 1 = 0.$$

26.10.• Знайдіть найбільший від'ємний корінь рівняння
$$\sin^2 x + 0{,}5\sin 2x = 1.$$

26.11.• Знайдіть найменший додатний корінь рівняння
$$6\sin^2 x + 2\sin^2 2x = 5.$$

26.12.$^{\bullet}$ Знайдіть найменший додатний корінь рівняння

$$\sin x \cos x + \cos^2 x = 0.$$

26.13.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \cos x \sin x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$;
2) $3 \cos x + 2 \operatorname{tg} x = 0$;
3) $8 \sin^2 x + 4 \sin^2 2x + 8 \cos 2x = 5$;
4) $3 + 5 \cos x = \sin^4 x - \cos^4 x$;
5) $\cos 2x - 9 \cos x + 6 = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$.

26.14.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $4 \operatorname{ctg} x - 5 \sin x = 0$;
2) $4 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 2 \sin^2 x = 6$;
3) $7 + 2 \sin 2x + 1{,}5 (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0$;
4) $\sin^2 x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$;
5) $2 \cos 4x - 2 \cos^2 x = 3 \cos 2x$.

26.15.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 2x - \frac{1}{4} = \cos 2x \cos 6x$;
2) $\sin 2x \sin x + \cos^2 x = \sin 5x \sin 4x + \cos^2 4x$.

26.16.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin \frac{x}{2} \sin \frac{3}{2} x + \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$;
2) $2 \sin x \cos 3x = \cos^2 4x - \sin 2x + 1$.

26.17.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \sin x - 8 \cos x = 3$;
2) $2 \sin x - 5 \cos x = 3$.

26.18.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $3 \sin x + 5 \cos x = -3$;
2) $3\sqrt{3} \sin x - 5 \cos x = 7$.

26.19.$^{\bullet}$ Скільки коренів рівняння $\cos 2x + \sin x = \cos^2 x$ належать проміжку $[-\pi; \pi]$?

26.20.$^{\bullet}$ Знайдіть суму коренів рівняння $2 \sin^2 x + 7 \cos x + 2 = 0$, які належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

26.21.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$;
2) $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0{,}5$.

26.22.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x$; 2) $\cos^4 3x + \cos^4\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}$.

26.23.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях параметра a має корені рівняння:

1) $\sin^2 x - (3a - 3)\sin x + a(2a - 3) = 0$;

2) $\cos^2 x + 2\cos x + a^2 - 6a + 10 = 0$?

26.24.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях параметра a має корені рівняння:

1) $\cos^2 x - \cos x + a - a^2 = 0$;

2) $\sin^2 x - 2a\sin x + 2a^2 - 4a + 4 = 0$?

26.25.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4$.

26.26.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^3 x = 4$.

26.27.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^3 x \sin x + \cos^2 x \sin^2 x - 3\cos x \sin^3 x - 3\sin^4 x = 0$;

2) $2\cos^2 x + \frac{5}{4}\sin^2 2x + \sin^4 x + \cos 2x = 0$;

3) $\sin^3 x = \sin x + \cos x$.

26.28.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3}\sin^2 x \cos x - 4\sin x \cos^2 x + \sqrt{3}\cos^3 x = 0$;

2) $\sin^3 2x + \cos^3 2x - \sin 2x = 0$.

26.29.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 3x + 2\cos x = 0$; 2) $\sin 6x + 2 = 2\cos 4x$.

26.30.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $3\sin\frac{x}{3} = \sin x$; 2) $\cos 3x - 1 = \cos 2x$.

26.31.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{5 - 2\sin x} = 6\sin x - 1$;

2) $\sqrt{-\cos 2x} = -\sqrt{2}\cos x$;

3) $\sqrt{2 - 3\cos 2x} = \sqrt{\sin x}$.

26.32.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{10 - 18\cos x} = 6\cos x - 2$;

2) $\sqrt{3\cos 2x - 1} = \sqrt{2}\sin x$;

3) $\sqrt{3 + 4\cos 2x} = \sqrt{2\cos x}$.

26.33.$^{\bullet\bullet}$ При яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить рівно три корені рівняння:

1) $2\sin^2 x - \sin x = 0$; 2) $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$?

26.34.$^{\bullet\bullet}$ Визначте, при яких додатних значеннях параметра a проміжок $[0; a]$ містить рівно n коренів рівняння:

1) $2\sin^2 x + \sin x = 0$, $n = 4$; 2) $2\cos^2 x + \cos x = 0$, $n = 3$.

26.35.•• Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння $\cos^2 x - \left(\frac{7}{10} + a\right)\cos x + \frac{7a}{10} = 0$ має на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}\right]$:

1) один корінь; 2) два корені.

26.36.•• Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння $\sin^2 x - \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sin x + \frac{a\sqrt{2}}{2} = 0$ має на проміжку $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$:

1) два корені; 2) три корені; 3) не менше трьох коренів.

26.37.•• Визначте, при яких значеннях параметра a рівняння $\cos^2 x - \left(a - \frac{1}{3}\right)\cos x - \frac{a}{3} = 0$ має на проміжку $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{3}\right)$:

1) два корені; 2) три корені; 3) не менше трьох коренів.

26.38.* При яких значеннях параметра a рівняння $\cos^2 x + (2a + 3) \times \times \sin x - a^2 = 0$ має:

1) один корінь на проміжку $[0; \pi]$;

2) один корінь на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right)$;

3) один корінь на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

4) два корені на проміжку $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$;

5) три корені на проміжку $[0; 2\pi)$;

6) чотири корені на проміжку $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}\right)$?

26.39.* При яких значеннях параметра a рівняння $\cos 2x + (4a - 1) \times \times \cos x + 2a^2 + 1$ має:

1) два корені на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) три корені на проміжку $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$?

26.40.* При яких значеннях параметра a рівняння $\sin x = 2\sin^2 x$ і $\sin 3x = (a + 1)\sin x - 2(a - 1)\sin^2 x$ рівносильні?

26.41.* При яких значеннях параметра a рівняння $\sin 2x + a = \sin x + 2a\cos x$ і $2\cos 2x + a^2 = 5a\cos x - 2$ рівносильні?

27. Розв'язування тригонометричних рівнянь методом розкладання на множники

Якщо права частина рівняння дорівнює нулю, а ліву частину вдалося розкласти на множники, то розв'язування цього рівняння можна звести до розв'язування кількох простіших рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\sin 2x + \cos x = 0$.

Розв'язання. Маємо: $2 \sin x \cos x + \cos x = 0$;

$$\cos x\,(2 \sin x + 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ 2\sin x + 1 = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \sin x = -\dfrac{1}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\\ x = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \ (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$.

Розв'язання. Маємо: $\sin 3x + \sin x - \sin 2x = 0$;

$$2 \sin 2x \cos x - \sin 2x = 0;\ \sin 2x\,(2 \cos x - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0,\\ \cos x = \dfrac{1}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi n}{2},\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi n}{2},\ \ \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$.

Розв'язання. Скориставшись формулами пониження степеня, запишемо:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} = \frac{3}{2}.$$

Далі маємо: $\cos 4x + (\cos 2x + \cos 6x) = 0$;

$$\cos 4x + 2 \cos 4x \cos 2x = 0;$$

$$2 \cos 4x \left(\frac{1}{2} + \cos 2x\right) = 0.$$

Отримуємо сукупність рівнянь
$$\left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0,\\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2}.\end{array}\right. \text{ Звідси } \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4},\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{4}$, $\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння
$$\sin 6x \cos 2x = \sin 5x \cos 3x - \sin 2x.$$

Розв'язання. Перетворивши добуток тригонометричних функцій у суму, отримуємо:
$$\frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 4x) = \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 2x) - \sin 2x;$$
$$\sin 4x + \sin 2x = 0;$$
$$2 \sin 3x \cos x = 0.$$

Перейдемо до сукупності рівнянь:
$$\left[\begin{array}{l}\sin 3x = 0,\\ \cos x = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi n}{3},\\ x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Відповідь: $\dfrac{\pi n}{3}$, $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $\sin 3x + 3 \sin 2x = 3 \sin x$.

Розв'язання. Застосувавши формули синуса подвійного та потрійного аргументів, отримуємо:
$$3 \sin x - 4 \sin^3 x + 6 \sin x \cos x = 3 \sin x.$$

Звідси $2 \sin x\,(3 \cos x - 2 \sin^2 x) = 0$;
$$2 \sin x\,(3 \cos x - 2(1 - \cos^2 x)) = 0;$$
$$2 \sin x\,(2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2) = 0.$$

Переходимо до сукупності рівнянь $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ 2 \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0.\end{array}\right.$

Звідси $\left[\begin{array}{l}x = \pi n,\\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Відповідь: πn, $\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння

$$1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0.$$

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння у вигляді

$$(1+\cos 2x)+\sin 2x+(\sin x+\cos x)=0.$$

Тепер можна записати: $2\cos^2 x+2\sin x\cos x+(\sin x+\cos x)=0;$

$$2\cos x(\sin x+\cos x)+(\sin x+\cos x)=0;$$

$$(2\cos x+1)(\sin x+\cos x)=0.$$

Отримуємо сукупність рівнянь $\left[\begin{array}{l}\cos x=-\dfrac{1}{2},\\ \sin x+\cos x=0.\end{array}\right.$

Звідси $\left[\begin{array}{l}x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$

Відповідь: $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$ ◄

ВПРАВИ

27.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x+\cos 3x=0;$
2) $\sin 5x-\sin x=0;$
3) $2\sin x\cos 2x-\sin x+2\cos 2x-1=0;$
4) $2\sin x\,\mathrm{tg}\,x+2\sqrt{3}\sin x-\mathrm{tg}\,x-\sqrt{3}=0.$

27.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 7x+\sin x=0;$
2) $\cos 9x-\cos x=0;$
3) $\mathrm{tg}^3 x+\mathrm{tg}^2 x-2\,\mathrm{tg}\,x-2=0;$
4) $\sqrt{2}\cos x\,\mathrm{ctg}\,x-3\sqrt{2}\cos x+\mathrm{ctg}\,x-3=0.$

27.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1;$
2) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1;$
3) $\sin 5x=\cos 4x;$
4) $\sin 10x-\cos 2x=0.$

27.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{12}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1;$
2) $\cos 5x+\sin 3x=0.$

27.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 2x+2\sin x=\cos x+1;$
2) $1+\cos 8x=\cos 4x;$
3) $\cos x+\cos 3x+\cos 2x=0;$
4) $2\sin 2x+\cos 3x-\cos x=0;$
5) $\cos x-\cos 3x+\sin x=0;$
6) $\sin 4x+2\cos^2 x=1;$

7) $\cos x - \cos 3x = 3 \sin^2 x$;
8) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$;
9) $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$;
10) $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$.

27.6.° Розв'яжіть рівняння:
1) $\sin 2x + 2 \sin x = 0$;
2) $\sin 2x - \cos x = 2 \sin x - 1$;
3) $1 - \cos 8x = \sin 4x$;
4) $\sin 2x + \sin 4x + \cos x = 0$;
5) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;
6) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$;
7) $\sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0$;
8) $\sqrt{2} \cos 5x + \sin 3x - \sin 7x = 0$.

27.7.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{3x}{2} = 1$;
2) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1,5$;
3) $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$;
4) $1 - \cos x = \mathrm{tg}\, x - \sin x$;
5) $\sin x + \sin 3x = 4 \cos^2 x$;
6) $\cos 2x = \sqrt{2} (\cos x - \sin x)$;
7) $\sin 3x + \sqrt{3} \cos 3x = 2 \cos 5x$;
8) $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x - \sin^2 4x = 0$;
9) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$;
10) $\cos 9x = 2 \sin \left(\frac{3\pi}{2} - 3x \right)$.

27.8.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\cos^2 6x + \cos^2 5x = 1$;
2) $\cos^2 x - \sin^2 2x + \cos^2 3x = \frac{1}{2}$;
3) $\cos 2x - \cos 4x = \sin 6x$;
4) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x$;
5) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$;
6) $\sin 6x = 2 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + 2x \right)$.

27.9.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0$;
2) $\sin 3x \cos 2x = \sin 5x$;
3) $2 \cos (x + 20°) \cos x = \cos 40°$;
4) $\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x$.

27.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sin x\sin 2x+\cos 3x=0$;
2) $\sin(x+45°)\sin(x-15°)=0{,}5$;
3) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0{,}5$;
4) $\sin 5x\cos 3x=\sin 9x\cos 7x$.

27.11.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 7x-\sqrt{2}\cos 5x+\sqrt{3}\cos 7x-\sqrt{2}\sin 5x=0$;
2) $2\sin 3x+\sin x-\cos 2x=\sqrt{3}(\sin 2x-\cos x)$;
3) $\sqrt{3}(2-\cos x)+4\sin 2x=\sin x$.

27.12.•• Розв'яжіть рівняння $\cos 3x-\sin x=-\sqrt{3}(\sin 3x-\cos x)$.

27.13.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 3x+\sin x-\sin 2x=2\cos^2 x-2\cos x$;
2) $(\cos x-\sin x)^2-0{,}5\sin 4x=\sin^4 x-\cos^4 x$.

27.14.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^3 4x+\cos^3 4x=1-0{,}5\sin 8x$;
2) $\cos 2x+\sin 2x=\sqrt{2}(\cos^4 2x-\sin^4 2x)$.

27.15.* При яких значеннях α триелементна множина $\{\sin\alpha, \sin 2\alpha, \sin 3\alpha\}$ збігається з множиною $\{\cos\alpha, \cos 2\alpha, \cos 3\alpha\}$?

28. Приклади розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\cos x+\sin x+\sin x\cos x=1$.

Розв'язання. Нехай $\cos x+\sin x=t$. Тоді $\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=t^2$; $\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}$. Дане в умові рівняння набуває вигляду $t+\frac{t^2-1}{2}=1$, або $t^2+2t-3=0$. Звідси $t_1=-3$, $t_2=1$.

З урахуванням заміни отримуємо сукупність рівнянь
$$\left[\begin{array}{l}\cos x+\sin x=-3,\\ \cos x+\sin x=1.\end{array}\right.$$

Оскільки $|\cos x|\leqslant 1$ і $|\sin x|\leqslant 1$, то перше рівняння сукупності коренів не має.

Залишається розв'язати рівняння $\cos x + \sin x = 1$. Маємо:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \quad \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \end{array}\right.$$

Відповідь: $2\pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\cos^3 x \cos 3x + \sin^3 x \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Розв'язання. Із формул синуса і косинуса потрійного аргументу знайдемо $\sin^3 x$ і $\cos^3 x$:

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}, \quad \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos 3x}{4}.$$

Тоді дане рівняння набуде вигляду

$$\frac{3\cos x + \cos 3x}{4} \cdot \cos 3x + \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} \cdot \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Маємо: $(\cos^2 3x - \sin^2 3x) + 3(\cos x \cos 3x + \sin x \sin 3x) = \sqrt{2}$;

$$\cos 6x + 3\cos 2x = \sqrt{2};$$

$$4\cos^3 2x - 3\cos 2x + 3\cos 2x = \sqrt{2};$$

$$\cos^3 2x = \frac{1}{2\sqrt{2}}; \quad \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad x = \pm\frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\pm\frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $4\cos x \cos 2x \cos 4x = \cos 7x$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на $\sin x$. Отримаємо рівняння-наслідок

$$4\sin x \cos x \cos 2x \cos 4x = \cos 7x \sin x.$$

Звідси $\sin 8x = 2\cos 7x \sin x$; $\sin 8x = \sin 8x - \sin 6x$; $\sin 6x = 0$; $x = \frac{\pi k}{6}, k \in \mathbb{Z}$.

Оскільки корені рівняння $\sin x = 0$ не є коренями заданого в умові рівняння, то з отриманих розв'язків необхідно виключити всі числа виду $x = \pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Маємо:

$$\frac{\pi k}{6} \neq \pi m, \text{ звідси } k \neq 6m.$$

Відповідь: $\frac{\pi k}{6}, k \in \mathbb{Z}, \ k \neq 6m, m \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\cos \frac{x^2 - 8x}{5} = x^2 + 1$.

Розв'язання. Оскільки при будь-якому значенні x виконуються нерівності $\cos \frac{x^2 - 8x}{5} \leqslant 1$ і $x^2 + 1 \geqslant 1$, то коренями даного рівняння є ті значення змінної, при яких значення його лівої і правої частин одночасно дорівнюють 1. Отже, дане рівняння рівносильне системі рівнянь $\begin{cases} \cos \frac{x^2 - 8x}{5} = 1, \\ x^2 + 1 = 1. \end{cases}$

Друге рівняння системи має єдиний корінь $x = 0$. Він також задовольняє перше рівняння системи.

Відповідь: 0. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $x^2 - 2x \sin \frac{\pi x}{2} + 1 = 0$.

Розв'язання. Розглянемо дане рівняння як квадратне відносно x. Оскільки для існування коренів рівняння дискримінант $D = 4 \sin^2 \frac{\pi x}{2} - 4$ має бути невід'ємним, то отримуємо: $\sin^2 \frac{\pi x}{2} \geqslant 1$. Звідси $\sin \frac{\pi x}{2} = 1$ або $\sin \frac{\pi x}{2} = -1$. Тепер зрозуміло, що задане в умові рівняння рівносильне сукупності двох систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2} = 1, \\ x^2 - 2x + 1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{2} = -1, \\ x^2 + 2x + 1 = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: 1; –1. ◄

ВПРАВИ

28.1.• Розв'яжіть рівняння $2\sin 2x = 3(\sin x + \cos x)$.

28.2.• Розв'яжіть рівняння $\sin 2x + 5(\sin x + \cos x) = 0$.

28.3.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$; 2) $\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x} + 2\cdot\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = 3$.

28.4.• Розв'яжіть рівняння $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$.

28.5.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $3\cos x + 3\sin x + \sin 3x - \cos 3x = 0$;

2) $\cos 4x = \cos^2 3x$;

3) $\sin^3 x \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x = \cos^3 4x$.

28.6.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^3 x + \sin 3x = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\sin 2x$;

2) $\cos 6x + 8\cos 2x - 4\cos 4x - 5 = 0$.

28.7.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \dfrac{1}{16}$;

2) $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = -0{,}5$;

3) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 1\dfrac{3}{4}$.

28.8.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \dfrac{1}{8}\cos 15x$;

2) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$;

3) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = -0{,}5$.

28.9.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2\cos\dfrac{x^2+2x}{6} = x^2 + 4x + 6$; 2) $3\cos x + 4\sin x = x^2 - 6x + 14$.

28.10.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\dfrac{\pi x}{4} = x^2 - 4x + 5$; 2) $\dfrac{2}{\sin x + \cos x} = \sqrt{2 - x^2}$.

28.11.•• Розв'яжіть рівняння $\sin x = x^2 + x + 1$.

28.12.•• Розв'яжіть рівняння $3x^2 = 1 - 2\cos x$.

28.13.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $4y^2 - 4y\cos x + 1 = 0$;

2) $(x+y)^2 + 10(x+y)\cos(\pi xy) + 25 = 0$.

28.14.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 8x\sin(xy) + 16 = 0$;

2) $y^2 - 3\sqrt{2}(\cos x - \sin x)\,y + 9 = 0$.

28.15.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos 2x + \cos\frac{5x}{2} = 2$; 2) $\sin 6x + \cos\frac{12x}{5} = -2$.

28.16.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos\frac{13x}{6}\cos\frac{5x}{6} = 1$; 2) $\sin 2x + \cos\frac{8x}{3} = 2$.

28.17.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\cos^7 x + \sin^4 x = 1$; 2) $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} = 1$.

28.18.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^3 x + \cos^9 x = 1$; 2) $\cos^4 x - \sin^7 x = 1$.

28.19.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^4 x$; 2) $\sqrt{2+\cos^2 2x} = \sin 3x - \cos 3x$.

28.20.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin 5x + \sin x = 2 + \cos^2 x$; 2) $\sqrt{5+\sin^2 3x} = \sin x + 2\cos x$.

28.21.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3 - \operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}\sin\pi x - \cos\pi x = 2$.

28.22.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2 2\pi x}\cos\pi x + \sin\pi x = \sqrt{2}$.

28.23.* Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(5 + \frac{3}{\sin^2 x}\right)(2 - \sin^6 x) = 7 + \cos 2y$;

2) $\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 = 12 + \frac{1}{2}\sin y$.

28.24.* Розв'яжіть рівняння:

1) $(\sin(x-y)+1)(2\cos(2x-y)+1) = 6$;

2) $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^4 y + 2\operatorname{ctg}^2 x\operatorname{ctg}^2 y = 3 + \sin^2(x+y)$.

28.25.* При яких значеннях параметра a рівняння $6a\cos\frac{\pi x}{2} - a^2(1+6|x|) + 7 = 0$ має єдиний корінь?

28.26.* При яких значеннях параметра a рівняння $a^2\cos\pi x - a(1+8x^2) = 6$ має єдиний корінь?

28.27.* При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 - 2a\sin(\cos x) + 2 = 0$ має єдиний корінь?

28.28.* При яких значеннях параметра a рівняння $2x^2 - a\,\mathrm{tg}(\cos x) + a^2 = 0$ має єдиний корінь?

28.29.* Знайдіть множину пар чисел $(a;\ b)$, для кожної з яких рівність $a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1$ виконується для всіх x.

28.30.* При яких значеннях параметра a рівняння $(a-1)\sin\frac{x}{8} + \sin x = 1$ і $(a - a^2)\cos 2x + \sin x = a$ мають рівні непорожні множини розв'язків?

29. Про рівносильні переходи під час розв'язування тригонометричних рівнянь

У попередніх пунктах ви ознайомилися з основними прийомами розв'язування тригонометричних рівнянь. Проте застосування кожного методу має свої «підводні рифи».

Очевидно, що поза областю визначення рівняння коренів бути не може (рис. 29.1). Якщо під час перетворень рівняння відбувається розширення області його визначення, то зрозуміло, що це може призвести до появи сторонніх коренів. Цю небезпеку потрібно брати до уваги, розв'язуючи тригонометричні рівняння.

Рис. 29.1

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $\dfrac{\cos^2 x - \cos x}{1 - \sin x} = 0.$

Розв'язання. Перейдемо до рівносильної системи:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = 1, \end{array}\right. \\ \sin x \neq 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi l,\ \ l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Очевидно, що при парних значеннях k розв'язки першого рівняння сукупності не задовольняють систему. При $k = 2m - 1,\ m \in \mathbb{Z}$, отримуємо: $x = \frac{\pi}{2} + \pi(2m - 1) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z};\ \ 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $\frac{\sin 3x - 2\sin x}{\cos 3x} = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\, x$.

Розв'язання. Застосуємо формули синуса і косинуса потрійного аргументу.

Отримаємо: $\frac{3\sin x - 4\sin^3 x - 2\sin x}{4\cos^3 x - 3\cos x} = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\, x$.

Звідси $\frac{\sin x\,(1 - 4\sin^2 x)}{\cos x\,(1 - 4\sin^2 x)} = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\, x$. Останнє рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\, x, \\ \sin x \neq \pm\frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \mathrm{tg}\, x = 0, \\ \mathrm{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}, \end{array}\right. \\ \sin x \neq \pm\frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \\ \sin x \neq \pm\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Відповідь: $\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\cos 2x}\cos x = 0$.

Розв'язання. Перейдемо до рівносильної системи:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos 2x = 0, \end{array}\right. \\ \cos 2x \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \\ \cos 2x \geqslant 0. \end{cases}$$

При $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ маємо: $\cos 2x = \cos(\pi + 2\pi k) = -1 < 0$.

При $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ маємо: $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 0 \geqslant 0$.

Відповідь: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. ◄

У деяких тригонометричних тотожностях вирази, записані в лівих і правих частинах, мають різні області визначення. Наведемо кілька прикладів.

$$\sin\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\alpha}{2}} \qquad (1)$$

Областю визначення лівої частини цієї тотожності є множина $\mathbb{R}$, а правої — множина $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \neq \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\mathrm{tg}\,(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta} \qquad (2)$$

Областю визначення лівої частини тотожності (2) є множина $\left\{(\alpha;\beta) \mid \alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$; областю визначення правої частини — множина

$$\left\{(\alpha;\beta) \mid \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ \beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi m,\ m \in \mathbb{Z},\ \ \alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Застосування цих формул справа наліво призводить до розширення області визначення рівняння, а отже, з'являється загроза появи сторонніх коренів.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $(1+\mathrm{tg}^2\,x)\sin x + \mathrm{tg}^2\,x - 1 = 0.$

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$(1+\mathrm{tg}^2\,x)\sin x = 1-\mathrm{tg}^2\,x.$$

Поділимо обидві частини останнього рівняння на $1+\mathrm{tg}^2\,x$. Зрозуміло, що таке перетворення не порушує рівносильності. Отримуємо: $\sin x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\,x}{1+\mathrm{tg}^2\,x}$. Оскільки має місце формула $\cos 2x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\,x}{1+\mathrm{tg}^2\,x}$, то виникає бажання замінити праву частину останнього рівняння на $\cos 2x$. Проте така заміна розширить його область визначення на множину чисел виду $\frac{\pi}{2}+\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Отже, дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \sin x = \cos 2x, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$ Звідси $$\begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0, \\ \cos x \neq 0; \end{cases} \qquad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \cos x \neq 0. \end{array}\right.$$

Отримуємо: $\sin x = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◄

Очевидно, що звуження області визначення рівняння — це загроза втрати коренів. Наприклад, застосування формул (1) і (2) зліва направо може призвести до втрати коренів.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg} 2x + \sin 2x = \frac{16}{15} \operatorname{ctg} x$.

Розв'язання. Застосувавши формули

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \text{і} \quad \operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x},$$

дане рівняння зручно звести до алгебраїчного рівняння відносно $\operatorname{tg} x$. Проте такі перетворення звужують область визначення рівняння та призводять (у цьому нескладно переконатися) до втрати коренів виду $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Цей факт треба врахувати, записуючи відповідь.

Розв'язавши рівняння $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{16}{15 \operatorname{tg} x}$, отримаємо: $x = \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi n, \ \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) = -1 - 5 \operatorname{ctg} x$.

Розв'язання. Очевидно, що вигідно застосувати тотожність $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} + x\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4} \operatorname{tg} x}$. Але при цьому область визначення рівняння звузиться на множину $\left\{\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Легко переконатися, що числа виду $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, є коренями даного рівняння. Ураховуючи це, запишемо сукупність, рівносильну даному рівнянню:

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \dfrac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\operatorname{tg} x} = -1 - \dfrac{5}{\operatorname{tg} x}. \end{array}\right.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = -1 - \dfrac{5}{\operatorname{tg} x}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}, \\ \operatorname{tg} x = \frac{5}{3}. \end{array}\right.$

Відповідь: $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \operatorname{arctg}\frac{5}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. ◄

ВПРАВИ

29.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{\sin x}{x + 2\pi} = 0$; 2) $\dfrac{2 - 3\sin x - \cos 2x}{6x^2 - \pi x - \pi^2} = 0$; 3) $\dfrac{1 - 5\sin \pi x + 2\cos^2 \pi x}{6x^2 + x - 5} = 0$.

29.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{\sin x - \cos x}{4x - \pi} = 0$;

2) $\dfrac{\cos 2x - 2\cos x + 1}{12x^2 - 8\pi x + \pi^2} = 0$;

3) $\dfrac{3\sin^2 2\pi x + 7\cos 2\pi x - 3}{4x^2 - 7x + 3} = 0$.

29.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0$;

2) $\dfrac{\sin 2x}{1 - \cos 2x} = 0$;

3) $\dfrac{\sin^2 x + \sin x}{1 + \cos x} = 0$;

4) $\dfrac{\sin 2x \cos 3x - \cos 2x \sin 3x}{1 + \cos x} = 0$;

5) $\dfrac{8\sin x \cos x \sin 2x - 1}{\sqrt{3} + 2\sin 4x} = 0$;

6) $\dfrac{\sin 2x}{1 + \sin x} = -2\cos x$.

29.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = 0$;

2) $\dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0$;

3) $\dfrac{2\sin^2 x + 3\sin x}{1 - \cos x} = 0$;

4) $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = 1 - \cos x$;

5) $\dfrac{\sin 2x}{1 - \cos x} = 2\sin x$.

29.5.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x-2}\sin \pi x = 0$;   2) $\sqrt{25-4x^2}\,(3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x) = 0$.

29.6.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{3-x}\cos \pi x = 0$;   2) $\sqrt{49-4x^2}\left(\sin \pi x + 3\cos \frac{\pi x}{2}\right) = 0$.

29.7.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\cos x - 4\sin^2 x\cos x}{\sin 3x + 1} = 0$;   3) $\frac{\sin x + \cos 4x - 2}{2\cos \frac{x}{2} - \sqrt{2}} = 0$.

2) $\frac{1-\cos x - \sin x}{\cos x} = 0$;

29.8.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{\cos^2 2x - \sin^2 x}{\sin 3x - 1} = 0$;   2) $\frac{\cos x + \cos 3x + 2}{\sin \frac{x}{2} - \frac{1}{2}} = 0$.

29.9.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{\sin x}\cos x = 0$;   3) $\sqrt{\cos x}\,(8\sin x + 5 - 2\cos 2x) = 0$.

2) $\sqrt{\operatorname{ctg} x - \sqrt{3}}\cos x = 0$;

29.10.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{\cos x}\sin x = 0$;   3) $\sqrt{\sin x}\,(4 - 5\cos x - 2\sin^2 x) = 0$.

2) $\sqrt{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}\sin x = 0$;

29.11.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{5\pi}{3}\right) = 2\operatorname{ctg} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{6}$;

2) $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6} = \frac{2\operatorname{ctg} x + 3}{\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$.

29.12.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\operatorname{tg} 2x + \sin 2x = \frac{8}{3}\operatorname{ctg} x$;

2) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3} + 3\operatorname{ctg} 2x$;

3) $2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + 5\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = -7$.

30. Тригонометричні нерівності

Нерівності виду $f(x) > a$, $f(x) < a$, де f — одна із чотирьох тригонометричних функцій, називають **найпростішими тригонометричними нерівностями**.

Підґрунтям для розв'язування цих нерівностей є таке наочне міркування: множиною розв'язків нерівності $f(x) > g(x)$ є множина тих значень змінної x, при яких точки графіка функції f розміщені вище за відповідні точки графіка функції g (рис. 30.1). За допомогою цього рисунка встановлюємо, що проміжок $(a; b)$ — множина розв'язків нерівності $f(x) > g(x)$.

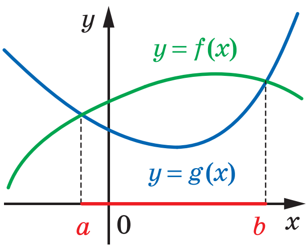


Рис. 30.1

Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей проводитимемо за такою схемою: знайдемо розв'язки на проміжку, довжина якого дорівнює періоду даної функції; усі інші розв'язки відрізняються від знайдених на Tn, де T — період даної функції, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Розглянемо приклади.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $\sin x > \frac{1}{2}$.

Розв'язання. На рисунку 30.2 зображено графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \frac{1}{2}$. Оскільки $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, то графіки перетинаються в точках з абсцисами $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ і $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

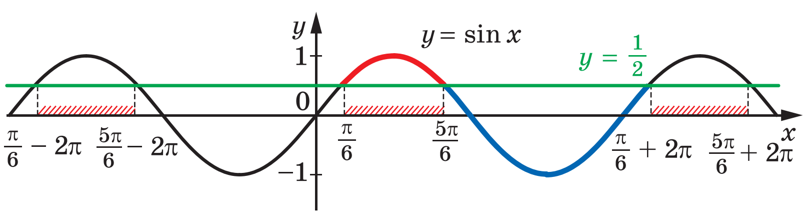


Рис. 30.2

Розв'яжемо цю нерівність на проміжку $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + 2\pi\right]$ завдовжки в період функції $y = \sin x$.

На цьому проміжку графік функції $y = \sin x$ знаходиться вище за графік функції $y = \frac{1}{2}$ при $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$ (рис. 30.2).

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. Таке об'єднання прийнято позначати так: $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$.

Відповідь записують одним із трьох способів:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ \text{або}\ \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{або}\ \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right). \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Оскільки $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, то розв'яжемо цю нерівність на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} + 2\pi\right]$, тобто на проміжку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$.

На розглядуваному проміжку графік функції $y = \sin x$ знаходиться нижче від графіка функції $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ при $x \in \left(\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right)$ (рис. 30.3).

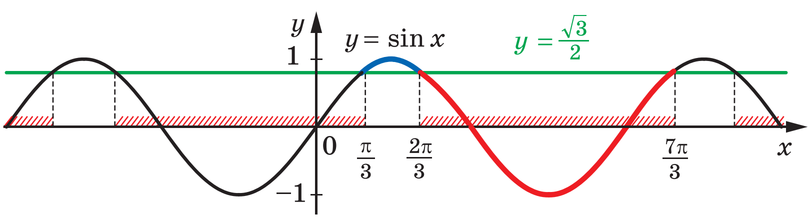


Рис. 30.3

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{7\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. $\blacktriangleleft$

У прикладах 1 і 2, розв'язуючи нерівності виду $\sin x > a$ і $\sin x < a$, ми розглядали проміжок виду $[\arcsin a; \arcsin a + 2\pi]$. Зрозуміло, що розв'язування можна провести, розглядаючи будь-який інший проміжок, довжина якого дорівнює 2π, наприклад проміжок $[-2\pi + \arcsin a; \arcsin a]$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язання. Маємо: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $\left[-2\pi + \frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, тобто на проміжку $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

На цьому проміжку графік функції $y = \cos x$ розміщений вище за графік функції $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x \in \left(-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$ (рис. 30.4).

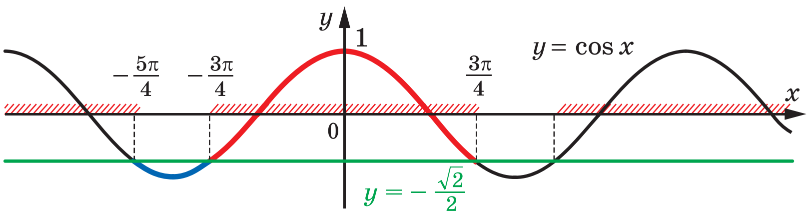


Рис. 30.4

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\operatorname{tg} x < 1$.

Розв'язання. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Оскільки $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, то на розглядуваному проміжку графік функції $y = \operatorname{tg} x$ розміщений нижче від графіка функції $y = 1$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right)$ (рис. 30.5).

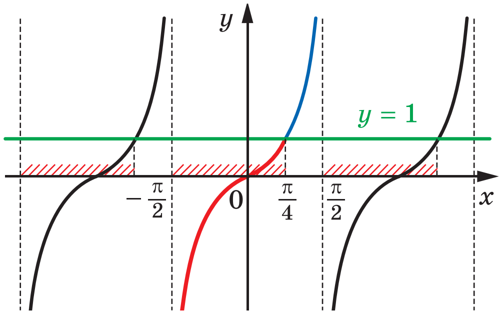


Рис. 30.5

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $-\frac{\pi}{2}+\pi n < x < \frac{\pi}{4}+\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\operatorname{ctg} x \geqslant -\sqrt{3}$.

Розв'язання. Розв'яжемо дану нерівність на проміжку $(0; \pi)$.

Оскільки $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{5\pi}{6}$, то на розглядуваному проміжку графік функції $y=\operatorname{ctg} x$ розміщений не нижче від графіка функції $y=-\sqrt{3}$ при $x \in \left(0; \frac{5\pi}{6}\right]$ (рис. 30.6).

Отже, множиною розв'язків даної нерівності є об'єднання всіх проміжків виду $\left(\pi n; \frac{5\pi}{6}+\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\pi n < x \leqslant \frac{5\pi}{6}+\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◄

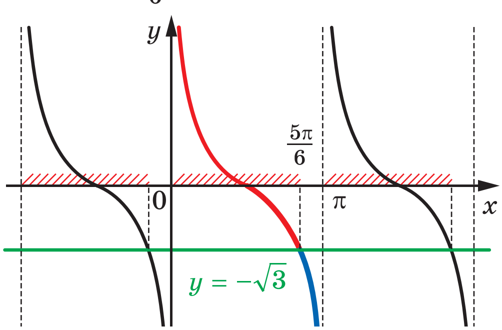


Рис. 30.6

Розв'язування найпростіших тригонометричних нерівностей можна інтерпретувати за допомогою одиничного кола.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqslant \cos x < \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких не менші від $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ і менші від $\frac{1}{2}$ (рис. 30.7).

Множина розв'язків даної нерівності — це множина таких чисел x, що точки $P_x = R_O^x(P_0)$ належать дузі AB або дузі CD.

Маємо:

$$\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \text{ і } \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

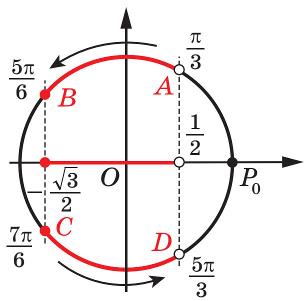


Рис. 30.7

Уявимо собі, що ми рухаємося по дугах AB і CD проти годинникової стрілки. Тоді можна записати: $A = R_O^{\frac{\pi}{3}}(P_0)$, $B = R_O^{\frac{5\pi}{6}}(P_0)$, $C = R_O^{\frac{7\pi}{6}}(P_0)$, $D = R_O^{\frac{5\pi}{3}}(P_0)$.

З урахуванням періодичності функції $y = \cos x$ переходимо до сукупності, яка рівносильна даній нерівності:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} + 2\pi n < x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \\ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$

або $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. ◄

У 9 класі ви ознайомилися з методом інтервалів для розв'язування раціональних нерівностей. Цей метод можна використовувати і для розв'язування тригонометричних нерівностей.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть нерівність $\sin 2x + \sin x > 0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sin 2x + \sin x$, $D(f) = \mathbb{R}$, яка є періодичною з періодом 2π.

Знайдемо нулі функції f на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Маємо: $\sin 2x + \sin x = 0$;

$$2\sin x \cos x + \sin x = 0;\ 2\sin x\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) = 0;\ \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \cos x = -\frac{1}{2};\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \pi n,\\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

На проміжку $[-\pi;\ \pi]$ функція f має п'ять нулів: $-\pi,\ -\frac{2\pi}{3},\ 0,\ \frac{2\pi}{3}$, π. Ці числа розбивають указаний проміжок на проміжки знакосталості (рис. 30.8).

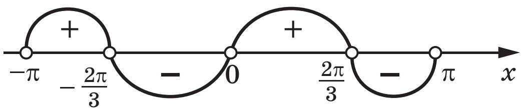


Рис. 30.8

Функція f набуває додатних значень на проміжках $\left(-\pi; -\frac{2\pi}{3}\right)$ і $\left(0; \frac{2\pi}{3}\right)$.

З урахуванням періодичності функції f запишемо відповідь.

Відповідь: $-\pi + 2\pi n < x < -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$

або $2\pi n < x < \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. ◄

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть нерівність $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\operatorname{tg} x \geqslant 0$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\operatorname{tg} x$. Вона є періодичною з періодом 2π.

Знайдемо нулі функції f на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Маємо: $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)\operatorname{tg} x = 0$; $\left[\begin{array}{l}\sin x = \frac{1}{2},\\ \operatorname{tg} x = 0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\\ x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$

На проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ функція f має чотири нулі: 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, π.

Функція f на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ не визначена в точках $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{2}$. Ці числа і нулі функції f розбивають проміжок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ на проміжки знакосталості (рис. 30.9).

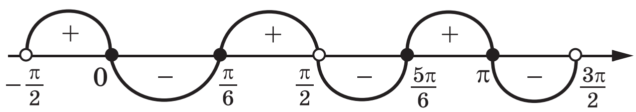


Рис. 30.9

З урахуванням періодичності функції f запишемо відповідь.

Відповідь: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x \leqslant 2\pi n$, або $\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, або $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. ◄

ВПРАВИ

30.1.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x < \frac{1}{2}$; 4) $\cos x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $\operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$; 10) $\operatorname{tg} x > 3$;

2) $\sin x \geqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\operatorname{tg} x < -1$; 8) $\operatorname{ctg} x > -1$; 11) $\sin x < a$;

3) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\operatorname{tg} x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$; 9) $\sin x < \frac{1}{6}$; 12) $\operatorname{ctg} x \geqslant a$.

30.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; 7) $\operatorname{ctg} x > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 10) $\operatorname{ctg} x < 2$;

2) $\sin x > -\frac{1}{2}$; 5) $\operatorname{tg} x \geqslant -1$; 8) $\operatorname{ctg} x \leqslant 1$; 11) $\cos x \geqslant a$;

3) $\cos x \leqslant \frac{1}{2}$; 6) $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$; 9) $\cos x > \frac{3}{5}$; 12) $\operatorname{tg} x < a$.

30.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \leqslant \sqrt{3}$;
2) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right) > -\frac{1}{2}$;
3) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) > \frac{1}{\sqrt{3}}$;
4) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-3x\right) \leqslant \sqrt{3}$;
5) $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
6) $\sin(1-2x) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

30.4.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \geqslant \sqrt{3}$;
2) $\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
3) $2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right) < 1$;
4) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{3}}{3}$;
5) $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \geqslant \frac{1}{2}$;
6) $\sin\left(4x+\frac{\pi}{5}\right) \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

30.5.• Розв'яжіть нерівність:

1) $-\frac{1}{2} \leqslant \sin x < \frac{1}{4}$;
2) $-1 \leqslant \operatorname{ctg} x \leqslant \sqrt{3}$;
3) $|\cos x| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $|\cos 3x| < \frac{\sqrt{2}}{2}$;
5) $|\operatorname{tg} x| > 2$.

30.6.• Розв'яжіть нерівність:

1) $-\frac{\sqrt{3}}{2} < \cos x \leqslant -\frac{1}{2}$;
2) $-\frac{\sqrt{3}}{3} < \operatorname{tg} x < 1$;
3) $|\sin 2x| < \frac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $|\operatorname{ctg} x| < \sqrt{3}$;
5) $|\operatorname{ctg} x| > 5$.

30.7.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right) \geqslant \sqrt{3}$;
2) $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x} > \sqrt{3}$.

30.8.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin^6 x+\cos^6 x \geqslant \frac{5}{8}$;
2) $\sin x \geqslant \cos x$.

30.9.• Розв'яжіть нерівність:

1) $2\cos^2 x+3\cos x-2 < 0$;
2) $\operatorname{tg}^2 x+\left(2-\sqrt{3}\right)\operatorname{tg} x-2\sqrt{3} < 0$;
3) $2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-3\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) > -1$;
4) $\operatorname{tg} x \geqslant 2\operatorname{ctg} x$.

30.10.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-3\geqslant 0$;
2) $\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg} x\geqslant 0$;
3) $4\sin^4 x+12\cos^2 x-7<0$;
4) $\dfrac{2}{\operatorname{tg} x+1}<2-\operatorname{tg} x$.

30.11.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin 2x-\sin 3x>0$;
2) $\cos 2x\operatorname{tg} x>0$;
3) $1-\sin 2x\geqslant \cos x-\sin x$;
4) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x>0$.

30.12.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sin 2x+2\sin x>0$;
2) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x<0$;
3) $\sin^2 x+\sin^2 2x-\sin^2 3x>0$;
4) $\cos x\cos 3x<\cos 5x\cos 7x$.

31. Тригонометрична підстановка

Застосування формул скороченого множення, використання відомих нерівностей, зведення тригонометричних рівнянь до алгебраїчних тощо — такі «чисто алгебраїчні» методи ви неодноразово використовували під час розв'язування тригонометричних задач.

Тут ми розглянемо певною мірою обернений прийом, який полягає в тому, що під час розв'язування задач деякий алгебраїчний вираз замінюють тригонометричним.

ПРИКЛАД 1 Відомо, що $m^2+n^2=1$, $p^2+q^2=1$, $mp+nq=0$. Обчисліть $mn+pq$.

Розв'язання. Оскільки $m^2+n^2=1$, $p^2+q^2=1$, то існують точки $A\,(m;\,n)$ і $B\,(p;\,q)$, які належать одиничному колу. Тоді існують такі α і β, що $m=\cos\alpha$, $n=\sin\alpha$, $p=\cos\beta$, $q=\sin\beta$.

Маємо: $mp+nq=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$. За умовою $mp+nq=0$. Тоді $\cos(\alpha-\beta)=0$.

Можна записати: $mn+pq=\cos\alpha\sin\alpha+\cos\beta\sin\beta=$

$$=\frac{1}{2}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)=\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

Оскільки $\cos(\alpha-\beta)=0$, то $mn+pq=0$.

Відповідь: 0. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ 4xy\,(2y^2-1)=1.\end{cases}$

Розв'язання. Рівняння $x^2+y^2=1$ дає змогу зробити таку заміну: $x=\sin\alpha$, $y=\cos\alpha$, де $\alpha\in[0;\,2\pi)$.

Тоді з другого рівняння системи маємо:

$$4\sin\alpha\cos\alpha\,(2\cos^2\alpha-1)=1;\quad \sin 4\alpha=1;\quad \alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}.$$

Зі знайденої множини коренів проміжку $[0; 2\pi)$ належать числа $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{9\pi}{8}$ і $\frac{13\pi}{8}$.

Якщо $\alpha=\frac{\pi}{8}$, то отримуємо:

$$x=\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\quad y=\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Аналогічно можна знайти й інші три розв'язки.

Відповідь: $\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$. ◄

Зауважимо, що відповідь до прикладу 2 можна було подати і в тригонометричному вигляді: $\left(\sin\frac{\pi}{8};\cos\frac{\pi}{8}\right)$, $\left(\sin\frac{5\pi}{8};\cos\frac{5\pi}{8}\right)$, $\left(\sin\frac{9\pi}{8};\cos\frac{9\pi}{8}\right)$, $\left(\sin\frac{13\pi}{8};\cos\frac{13\pi}{8}\right)$.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1-x^2}=4x^3-3x$.

Розв'язання. Оскільки має виконуватись умова $1-x^2\geqslant 0$, то $|x|\leqslant 1$. Тоді можна зробити заміну $x=\cos\alpha$, $\alpha\in[0;\pi]$.

Тепер дане рівняння можна записати так:

$$\sqrt{1-\cos^2\alpha}=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

Звідси $|\sin\alpha|=\cos 3\alpha$.

При $\alpha\in[0;\pi]$ є правильною нерівність $\sin\alpha\geqslant 0$. Маємо: $\sin\alpha=\cos 3\alpha$. Розв'язуючи це рівняння, отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z},\\ \alpha=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Із розв'язків сукупності оберемо ті, які задовольняють умову $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Це числа $\frac{\pi}{8}$, $\frac{5\pi}{8}$ і $\frac{3\pi}{4}$.

Відповідь: $\cos\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{5\pi}{8}$, $\cos\frac{3\pi}{4}$. ◄

ПРИКЛАД 4 Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ належать проміжку $[-1; 1]$, причому сума їхніх кубів дорівнює 0. Доведіть, що $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \frac{n}{3}$.

Розв'язання. Нехай $x_1 = \cos\alpha_1$, $x_2 = \cos\alpha_2$, ..., $x_n = \cos\alpha_n$, де $\alpha_i \in [0; \pi]$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

За умовою $\cos^3\alpha_1 + \cos^3\alpha_2 + \ldots + \cos^3\alpha_n = 0$.

Скориставшись рівністю $\cos\alpha = \frac{4\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{3}$, отримуємо:

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n =$$

$$= \frac{4\cos^3\alpha_1 - \cos 3\alpha_1}{3} + \frac{4\cos^3\alpha_2 - \cos 3\alpha_2}{3} + \ldots + \frac{4\cos^3\alpha_n - \cos 3\alpha_n}{3} =$$

$$= \frac{4}{3}\left(\cos^3\alpha_1 + \cos^3\alpha_2 + \ldots + \cos^3\alpha_n\right) - \frac{1}{3}\left(\cos 3\alpha_1 + \cos 3\alpha_2 + \ldots + \cos 3\alpha_n\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\cos 3\alpha_1 + \cos 3\alpha_2 + \ldots + \cos 3\alpha_n\right) \leqslant \frac{n}{3}.$$ ◄

ПРИКЛАД 5 Доведіть, що при будь-яких x і y виконується нерівність $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} \leqslant \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Зробимо заміну: $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$, де $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Маємо: $\frac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)} =$

$$= \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = \frac{1}{2}\sin 2(\alpha+\beta).$$

Звідси випливає справедливість нерівності, що доводиться. ◄

ПРИКЛАД 6 Доведіть, що

$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ac} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(1+ab)(1+bc)(1+ac)}.$$

Розв'язання. Скористаємося заміною $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$, $c = \operatorname{tg}\gamma$, де α, β, γ належать проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Тотожність, що доводиться, стає такою:

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}(\beta-\gamma)+\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}(\beta-\gamma)\operatorname{tg}(\gamma-\alpha).$$

Зауважимо, що $\alpha-\beta+\beta-\gamma+\gamma-\alpha=0$. Таким чином, задача звелася до доведення тотожності $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z=\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \operatorname{tg} z$ при $x+y+z=0$. Завершіть розв'язування самостійно. ◄

ПРИКЛАД 7 Доведіть, що з будь-яких п'яти різних чисел завжди можна вибрати такі два числа x і y, що $0<\frac{x-y}{1+xy}<1$.

Розв'язання. Нехай $t_1, t_2, \ldots, t_5$ — довільні числа. Тоді в проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ існують такі числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$, що $t_1=\operatorname{tg}\alpha_1$, $t_2=\operatorname{tg}\alpha_2, \ldots, t_5=\operatorname{tg}\alpha_5$.

Розглянемо чотири проміжки: $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$, $\left(-\frac{\pi}{4}; 0\right]$, $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$, $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. Зрозуміло, що з п'яти чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5$ знайдуться щонайменше два числа α_m і α_n ($\alpha_m>\alpha_n$), які належать одному із цих проміжків. Тоді $0<\alpha_m-\alpha_n<\frac{\pi}{4}$. Звідси $0<\operatorname{tg}(\alpha_m-\alpha_n)<\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; $0<\frac{\operatorname{tg}\alpha_m-\operatorname{tg}\alpha_n}{1+\operatorname{tg}\alpha_m \operatorname{tg}\alpha_n}<1$.

Позначивши $\operatorname{tg}\alpha_m=x$, $\operatorname{tg}\alpha_n=y$, отримаємо: $0<\frac{x-y}{1+xy}<1$. ◄

ПРИКЛАД 8 Відомо, що $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2$. Доведіть нерівність $\frac{1}{2} \leqslant x^2+xy+y^2 \leqslant 3$.

Розв'язання. Позначимо $x^2+y^2=r^2$, де $r>0$. З умови $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 2$ випливає, що точка $M(x; y)$ належить колу $x^2+y^2=r^2$, де $1 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}$ (рис. 31.1). Тоді можна записати, що $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$, де $\alpha \in [0; 2\pi)$.

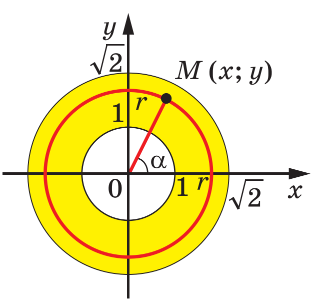


Рис. 31.1

Маємо:

$$x^2+xy+y^2=r^2\cos^2\alpha+r^2\cos\alpha\sin\alpha+$$
$$+r^2\sin^2\alpha=r^2\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right).$$

Оскільки $1 \leqslant r^2 \leqslant 2$ і $\frac{1}{2} \leqslant 1+\frac{1}{2}\sin 2\alpha \leqslant \frac{3}{2}$, то $\frac{1}{2} \leqslant x^2+xy+y^2 \leqslant 3$. ◄

ВПРАВИ

31.1. Числа a, b, c, d задовольняють умови $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$. Доведіть, що $|ac-bd|\leqslant 1$.

31.2. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\dfrac{1-|x|}{2}}=2x^2-1$.

31.3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1-x}=2x^2-1+2x\sqrt{1-x^2}$.

31.4. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\dfrac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}}+2x^2=1$.

31.5. Розв'яжіть рівняння $8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1$.

31.6. При яких значеннях параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ xy(2x^2-a^2)=1 \end{cases}$$

має розв'язок?

31.7. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} 2x+x^2y=y, \\ 2y+y^2z=z, \\ 2z+z^2x=x? \end{cases}$

31.8. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $\dfrac{3xy-4x^2}{x^2+y^2}$.

31.9. Чи існує 100-елементна множина, яка має таку властивість: разом з кожним числом x вона містить число $2x^2-1$?

31.10. Послідовність (x_n) задовольняє умови:

$$x_1=1,\quad x_{n+1}=\frac{a+x_n}{1-ax_n},\ n\in\mathbb{N}.$$

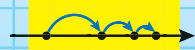
Чи існує таке a, що $x_{101}=\sqrt{3}$?

31.11. Дано функцію $f(x)=2x^2-1$. Розв'яжіть рівняння $f(f(f(x)))=x$.

31.12. Послідовність (a_n) задовольняє умови: $a_1=a$, $a_{n+1}=2a_n^2-1$, $n\in\mathbb{N}$. Укажіть хоча б одне значення a, при якому $a_{1000}=0$.

31.13. Послідовність (a_n) задовольняє умови: $a_1=0$, $a_2=a$, $ba_n=\dfrac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2}$, де $n\geqslant 2$, a і b — такі числа, що $a^2+b^2=1$. Доведіть, що для всіх $n\in\mathbb{N}$ виконується нерівність $|a_n|\leqslant 1$.

§ 5 ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ



32. Числові послідовності

З поняттям «числова послідовність» ви ознайомилися в 9 класі. Нагадаємо й уточнимо основні відомості.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, областю визначення якої є множина натуральних чисел. Тоді функція f задає нескінченну послідовність $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$, ... Або говорять так: *нескінченна послідовність — це функція, областю визначення якої є множина* $\mathbb{N}$. Можна сказати, що *нескінченна послідовність — це відображення множини* $\mathbb{N}$ *на деяку непорожню множину*.

Нагадаємо також, що коли областю визначення функції $y = f(x)$ є множина перших n натуральних чисел, то кажуть, що задано *скінченну послідовність*.

Надалі будемо розглядати тільки нескінченні послідовності. Випадки, коли розглядатимуться скінченні послідовності, будуть спеціально обумовлені.

Послідовність $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$, ... традиційно записують, позначаючи аргументи функції f у вигляді індексів, тобто:

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots\ .$$

Індекс указує порядковий номер члена послідовності. Для позначення самої послідовності використовують записи (f_n), (a_n), (b_n) тощо. Наприклад, нехай (p_n) — послідовність простих чисел. Тоді $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ і т. д.

Послідовність вважають заданою, якщо кожний її член можна визначити за його номером.

Повторимо основні способи задання послідовностей.

Розглянемо послідовність, перший член якої дорівнює 1, а кожний наступний член на 3 більший за попередній. Такий спосіб задання послідовності називають **описовим**. Його можна проілюструвати за допомогою запису з трьома крапками, виписавши кілька перших членів послідовності в порядку зростання номерів:

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ \ldots\ .$$

Цей запис доцільно застосовувати тоді, коли зрозуміло, які числа мають бути записані замість трьох крапок. Наприклад, у послідовності, яку ми розглядаємо, зрозуміло, що після числа 19 має бути записане число 22.

Послідовності можна задавати за допомогою формул. Наприклад, рівність $x_n = 2^n$, де змінна n набуває всіх натуральних значень, задає послідовність (x_n) натуральних степенів числа 2:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \ldots\ .$$

У таких випадках кажуть, що послідовність задано за допомогою **формули *n*-го члена**, або говорять, що послідовність задано **формулою загального члена**.

Розглянемо кілька прикладів.

Формула $a_n = 2n - 1$ задає послідовність непарних натуральних чисел:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots\ .$$

Формула $y_n = (-1)^n$ задає послідовність (y_n), у якій усі члени з непарними номерами дорівнюють -1, а члени з парними номерами дорівнюють 1:

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots\ .$$

Формула $c_n = 7$ задає послідовність (c_n), усі члени якої дорівнюють числу 7:

$$7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ \ldots\ .$$

Послідовність, усі члени якої рівні, називають **стаціонарною**.

Нерідко послідовність задають правилом, яке дає змогу знайти наступний член, знаючи попередній.

Розглянемо послідовність (a_n), перший член якої дорівнює 1, а кожний наступний член послідовності в 3 рази більший за попередній. Маємо:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \ldots\ .$$

Цю послідовність, задану описом, також визначають такі умови:

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Записані рівності вказують перший член послідовності та правило, користуючись яким за кожним членом послідовності можна знайти наступний член:

$a_1 = 1,$
$a_2 = 3a_1 = 3,$
$a_3 = 3a_2 = 9,$
$a_4 = 3a_3 = 27,$
...

Формулу, яка виражає член послідовності через один або кілька попередніх членів, називають **рекурентною формулою** (від латин. *recurro* — повертатися). У наведеному прикладі це формула $a_{n+1}=3a_n$. Умови, які визначають перший або кілька перших членів, називають **початковими умовами**. У розглядуваному прикладі початкова умова — це $a_1=1$.

Зауважимо, що знання лише однієї рекурентної формули не дозволяє задати послідовність. Ще мають бути вказані початкові умови.

При **рекурентному способі** задання послідовності перший або кілька перших членів послідовності є заданими, а всі інші обчислюють один за одним. Із цієї точки зору спосіб задання послідовності формулою n-го члена видається більш зручним: за його допомогою можна безпосередньо знайти потрібний член послідовності, знаючи лише його номер.

Означення. Числову послідовність (a_n) називають зростаючою (спадною), якщо для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n < a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$.

Наприклад, послідовність, яку задано формулою $a_n = n^2$, є зростаючою, а послідовність із загальним членом $a_n = \frac{1}{n}$ — спадною.

Означення. Числову послідовність (a_n) називають неспадною (незростаючою), якщо для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n \leqslant a_{n+1}$ $(a_n \geqslant a_{n+1})$.

Наприклад, послідовність (a_n) така, що $a_1=a_2=a_3=1$ і для всіх $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$ виконується рівність $a_n=2$, є неспадною.

Виходячи з означення, стаціонарну послідовність можна віднести як до неспадних, так і до незростаючих послідовностей.

Зростаючі, спадні, незростаючі, неспадні послідовності називають **монотонними послідовностями**.

Означення. Числову послідовність (a_n) називають обмеженою зверху, якщо існує таке число C, що для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n \leqslant C$.

Означення. Числову послідовність (a_n) називають обмеженою знизу, якщо існує таке число c, що для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n \geqslant c$.

Послідовність називають **обмеженою**, якщо вона обмежена і знизу, і зверху.

Наприклад, послідовність, яку задано формулою $a_n = \frac{n}{n+1}$, є обмеженою. Справді, для будь-якого натурального числа n виконується подвійна нерівність $0 < \frac{n}{n+1} < 1$.

Послідовності, задані формулами $b_n = n$, $c_n = -n!$, є прикладами **необмежених** послідовностей.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що послідовність, яку задано формулою $a_n = \frac{n}{2^n}$, є незростаючою.

Розв'язання. Маємо: $a_n - a_{n+1} = \frac{n}{2^n} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{2n-n-1}{2^{n+1}} = \frac{n-1}{2^{n+1}} \geqslant 0$. Отже, для будь-якого натурального числа n виконується нерівність $a_n \geqslant a_{n+1}$.

Зауважимо, що коли всі члени послідовності є додатними числами, то для дослідження послідовності на монотонність можна порівняти відношення $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ з одиницею.

У нашому прикладі легко показати (зробіть це самостійно), що $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant 1$. Звідси з огляду на те, що $a_{n+1} > 0$, отримуємо: $a_n \geqslant a_{n+1}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що послідовність, яку задано формулою $a_n = \frac{10\sqrt{n}}{n+25}$, є обмеженою.

Розв'язання. Оскільки $a_n > 0$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, то дана послідовність є обмеженою знизу.

Покажемо, що ця послідовність обмежена зверху. Застосувавши нерівність Коші до чисел n і 25, отримуємо: $\frac{10\sqrt{n}}{n+25} \leqslant \frac{10\sqrt{n}}{2\sqrt{25n}} = 1$.

Отже, для будь-якого натурального числа n маємо: $a_n \leqslant 1$. ◄

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що послідовність, задана формулою $x_n = 5^n - 4^n$, є необмеженою.

Розв'язання. За допомогою методу математичної індукції доведемо, що $5^n - 4^n \geqslant n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

База індукції: при $n = 1$ нерівність є правильною. Справді, $5^1 - 4^1 \geqslant 1$.

Індукційний перехід. Нехай при деякому $n = k$ має місце нерівність $5^k - 4^k \geqslant k$. Доведемо, що при $n = k + 1$ виконується нерівність $5^{k+1} - 4^{k+1} \geqslant k + 1$. Маємо:

$$5^{k+1} - 4^{k+1} = 5 \cdot 5^k - 4 \cdot 4^k = 5^k + 4(5^k - 4^k) \geqslant 5^k + 4k > k + 1.$$

За методом математичної індукції нерівність $5^n - 4^n \geqslant n$ встановлено для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Доведена нерівність означає, що послідовність (x_n) необмежена зверху, тобто не можна вказати таку сталу C, для якої нерівність $5^n - 4^n < C$ виконувалася б для всіх $n \in \mathbb{N}$. ◄

ВПРАВИ

32.1.° Доведіть, що послідовність (a_n) є зростаючою, якщо:

1) $a_n = 5n - 12$; 3) $a_n = 3^n - 2^n$; 5) $a_n = \dfrac{3n+1}{n+1}$;

2) $a_n = n^2 + n - 1$; 4) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$; 6) $a_n = \dfrac{3^n}{n+1}$.

32.2.° Доведіть, що послідовність (a_n) є спадною, якщо:

1) $a_n = 11 - 3n$; 3) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$; 5) $a_n = \dfrac{n}{4^n}$.

2) $a_n = -n^2 + n + 1$; 4) $a_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$;

32.3.° Доведіть, що послідовність (a_n) не є монотонною, якщо:

1) $a_n = (-1)^n$; 3) $a_n = \sin \dfrac{\pi n}{2}$; 5) $a_n = n + (-1)^n$;

2) $a_n = (n - 4)^2$; 4) $a_n = n^{(-1)^n}$; 6) $a_n = \sin n°$.

32.4.° Доведіть, що послідовність (a_n) не є монотонною, якщо:

1) $a_n = | n - 3 |$; 3) $a_n = n - (-1)^n$;

2) $a_n = \cos \dfrac{\pi n}{2}$; 4) $a_n = (1 + (-1)^n)\, n$.

32.5.• Наведіть приклад послідовності (a_n) з найменшим членом a_{15}.

32.6.• Наведіть приклад послідовності (a_n) з найбільшим членом a_{25}.

32.7.• Дослідіть на монотонність послідовність, задану формулою:

1) $a_n = [\sqrt{n}]$; 2) $a_n = \dfrac{n^3}{2^n}$; 3) $a_n = \dfrac{100^n}{n!}$.

32.8.• Доведіть, що послідовність (a_n) обмежена зверху:

1) $a_n = 12 - n^2$; 3) $a_n = \frac{4n}{n^2+1}$; 5) $a_n = \frac{3n^2-1}{n^2+1}$;

2) $a_n = -n^2 + 2n - 4$; 4) $a_n = \frac{2n+7}{n+2}$; 6) $a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}}$.

32.9.• Доведіть, що послідовність (a_n) обмежена знизу:

1) $a_n = n^3 - 8n$; 2) $a_n = \frac{1-2n}{n}$.

32.10.• Доведіть, що послідовність (x_n) є необмеженою:

1) $x_n = (-1)^n n$; 2) $x_n = \frac{n}{n+1+(-1)^n n}$.

32.11.• Чи є обмеженою послідовність (x_n), задана формулою n-го члена:

1) $x_n = n^{(-1)^n}$; 2) $x_n = \frac{n^2}{(n+1)^2+(-1)^n n^2}$?

32.12.• Доведіть, що послідовність (a_n) є обмеженою тоді й тільки тоді, коли існує таке число $M > 0$, що для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $|a_n| \leqslant M$.

32.13.• Для членів послідовностей (a_n) і (b_n) при кожному $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $a_n \leqslant b_n$. Чи є правильним твердження:

1) якщо послідовність (a_n) обмежена знизу, то й послідовність (b_n) обмежена знизу;
2) якщо послідовність (b_n) обмежена знизу, то й послідовність (a_n) обмежена знизу;
3) якщо послідовність (a_n) обмежена зверху, то й послідовність (b_n) обмежена зверху;
4) якщо послідовність (b_n) обмежена зверху, то й послідовність (a_n) обмежена зверху?

32.14.• Послідовності (a_n) і (b_n) обмежені. Чи можна стверджувати, що обмеженою буде послідовність (c_n), задана формулою:

1) $c_n = a_n + b_n$; 3) $c_n = a_n b_n$;

2) $c_n = a_n - b_n$; 4) $c_n = \frac{a_n}{b_n}$, якщо $b_n \neq 0$?

32.15.• Знайдіть найбільший член послідовності, заданої формулою:

1) $a_n = 3 - \left(n - \frac{7}{3}\right)^2$; 3) $a_n = \frac{2n+1}{2n-5}$;

2) $a_n = \frac{6\sqrt{n}}{n+9}$; 4) $a_n = \frac{20}{n^2-4n+24}$.

32.16.° Знайдіть найменший член послідовності, заданої формулою:

1) $a_n = n^2 - 4n + 1$;
2) $a_n = n + \frac{4}{n}$;
3) $a_n = 2 - \frac{3}{n^2 - 4n + 5}$;
4) $a_n = (n - 1)(n - 2)(n - 4)$;
5) $a_n = n + 3\cos \pi n$;
6) $a_n = \frac{(n+3)(n+12)}{n}$;
7) $a_n = \frac{6n - 11}{3n - 8}$.

32.17.•• Чи існує необмежена послідовність, яка для кожного $k \in \mathbb{N}$ містить k послідовних членів, рівних між собою?

32.18.•• Чи існує послідовність (a_n) натуральних чисел така, що для кожного $k \in \mathbb{N}$ усі члени послідовності (a_n), крім, можливо, скінченної кількості, діляться націло на k?

32.19.•• Чи є обмеженою послідовність:

1) $x_n = n^4 - 7n^3$;
2) $x_n = 4^n - 3^n$?

32.20.•• Доведіть, що дана послідовність є необмеженою:

1) $x_n = n - n^3$;
2) $x_n = 2^n - 7^n$.

32.21.•• Доведіть, що послідовність (a_n) є обмеженою, якщо:

1) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;
2) $a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$.

32.22.•• Доведіть, що послідовність (a_n) є обмеженою, якщо:

1) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$;
2) $a_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

32.23.•• Чи є обмеженою послідовність (τ_n), якщо τ_n — кількість натуральних дільників числа n?

32.24.•• Нехай σ_n — сума всіх натуральних дільників числа n. Доведіть, що послідовність, задана формулою n-го члена $\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}}$, є необмеженою.

32.25.•• Чи існує послідовність така, що кожне раціональне число є її деяким членом?

32.26.•• Чи існує послідовність така, що кожний проміжок $(a; b)$ містить нескінченну кількість її членів?

32.27.* Доведіть, що послідовність (a_n) є обмеженою, якщо:

1) $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$;
2) $a_n = \underbrace{\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{\ldots + \sqrt{5}}}}}_{n \text{ радикалів}}$.

32.28.* Нехай $a_n = \dfrac{n^2}{1{,}01^n}$. Знайдіть найбільший член послідовності (a_n).

32.29.* Чи є обмеженою послідовність, задана формулою

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n?$$

33. Границя числової послідовності

Розглянемо послідовність (a_n), задану формулою n-го члена $a_n = \dfrac{n}{n+1}$.

Випишемо кілька перших членів цієї послідовності:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ \frac{7}{8},\ \frac{8}{9},\ \dots .$$

Можна помітити, що зі збільшенням номера n члени послідовності **прямують** до числа 1.

Якщо члени цієї послідовності зображати точками на координатній прямій, то ці точки будуть розміщуватися все ближче й ближче до точки з координатою 1 (рис. 33.1).

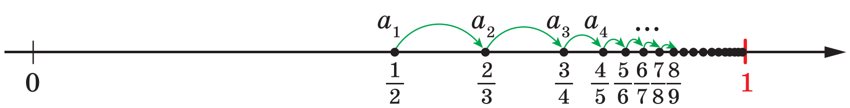


Рис. 33.1

Інакше кажучи, значення виразу $|a_n - 1|$ зі збільшенням номера n стає все меншим і меншим. Маємо:

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Тоді, наприклад, розв'язавши нерівність $\dfrac{1}{n+1} < 0{,}1$, установлюємо, що $|a_n - 1| < 0{,}1$ при $n \geqslant 10$, а розв'язавши нерівність $\dfrac{1}{n+1} < 0{,}0001$, установлюємо, що $|a_n - 1| < 0{,}0001$ при $n \geqslant 10\,000$ тощо. Узагалі, починаючи з деякого номера n_0, значення виразу $|a_n - 1|$ стає *меншим від будь-якого наперед заданого додатного* *числа* ε (читають «епсилон»). Знайти n_0 можна, розв'язавши нерівність $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$.

У такому разі говорять, що число 1 є **границею послідовності** (a_n).

Розглянемо послідовність (b_n), задану формулою n-го члена

$$b_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

Випишемо кілька перших членів цієї послідовності:

$$1,\ 2\frac{1}{2},\ 1\frac{2}{3},\ 2\frac{1}{4},\ 1\frac{4}{5},\ 2\frac{1}{6},\ 1\frac{6}{7},\ \dots .$$

Зі збільшенням номера n члени послідовності прямують до числа 2 (рис. 33.2).

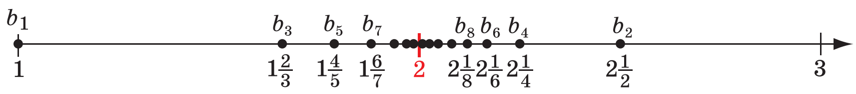


Рис. 33.2

Це означає, що для будь-якого додатного числа ε можна вказати такий номер n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $|b_n - 2| < \varepsilon$. Оскільки $|b_n - 2| = \left|2 + \frac{(-1)^n}{n} - 2\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$, то номер n_0 можна знайти, розв'язавши нерівність $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Означення. Число a називають границею послідовності (a_n), якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий номер n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$.

Записують: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ (тут *lim* — це початкові літери французького слова *limite* — границя).

Для прикладів, що розглядали вище, можна записати:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \lim_{n \to \infty} \left(2 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 2.$$

Послідовність, яка має границю, називають **збіжною**. Говорять, наприклад, що послідовність (b_n) **збігається до числа** 2.

Поняття границі послідовності має просту геометричну інтерпретацію.

Нерівність виду $|a_n - a| < \varepsilon$ рівносильна подвійній нерівності $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, тобто

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Це означає, що коли $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться номер n_0, починаючи з якого всі члени послідовності належать проміжку $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$. Іншими словами, яким би малим не був проміжок $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, члени послідовності, яка збігається до числа a, рано чи пізно потраплять у цей проміжок[1] і вже ніколи не вийдуть за його межі, тобто *поза вказаним інтервалом може знаходитися лише скінченна кількість членів послідовності* (a_n).

Теорема 33.1. ***Числова послідовність може мати тільки одну границю.***

Доведення. Припустимо, що існує послідовність, яка має дві границі, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, де $a \neq b$.

Оскільки $a \neq b$, то можна обрати таке додатне число ε, щоб $(a - \varepsilon; a + \varepsilon) \cap (b - \varepsilon; b + \varepsilon) = \varnothing$ (рис. 33.3).

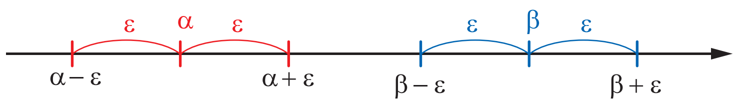


Рис. 33.3

Число a є границею послідовності (a_n), отже, починаючи з деякого номера n_0, усі члени послідовності (a_n) потраплять у проміжок $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, а поза цим проміжком знаходитиметься лише скінченна кількість членів послідовності. Отже, у проміжку $(b - \varepsilon;\ b + \varepsilon)$ буде знаходитися лише скінченна кількість членів послідовності (a_n). Це суперечить тому, що число b — границя послідовності (a_n). ◄

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}$.

Розв'язання. Нехай ε — довільне додатне число. Знайдемо номер n_0 такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність

$$\left| \frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| < \varepsilon.$$

Маємо: $\left| \frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2} \right| = \left| \frac{-5}{2(2n+1)} \right| = \frac{5}{2(2n+1)}$.

З'ясуємо, при яких $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $\frac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$.

[1] Проміжки виду $(a;\ b)$ називають також *інтервалами*.

Переходимо до рівносильних нерівностей:

$$5 < 4n\varepsilon + 2\varepsilon;$$
$$4n\varepsilon > 5 - 2\varepsilon;$$
$$n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

Як номер n_0 візьмемо, наприклад, число $\left[\frac{5}{4\varepsilon}\right] + 1$. Тоді, якщо $n \geqslant n_0$, то $n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$, і, переходячи до рівносильної нерівності $4n\varepsilon > 5 - 2\varepsilon$, а потім $5 < 4n\varepsilon + 2\varepsilon$, отримаємо врешті, що $\frac{5}{2(2n+1)} < \varepsilon$ і $\left|\frac{3n-1}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon$. Тому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-1}{2n+1} = \frac{3}{2}$. ◄

Послідовність, яка не має границі, називають **розбіжною**.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що послідовність (a_n), яку задано формулою $a_n = (-1)^n$, є розбіжною.

Розв'язання. Припустимо, що послідовність (a_n) є збіжною і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тоді для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| < \frac{1}{2}$.

Отже, при $n = 2n_0$ і $n = 2n_0 + 1$ одночасно мають виконуватися дві нерівності:

$|a_{2n_0} - a| < \frac{1}{2}$ і $|a_{2n_0+1} - a| < \frac{1}{2}$, тобто

$$|1 - a| < \frac{1}{2} \text{ і } |-1 - a| < \frac{1}{2}.$$

Легко показати (зробіть це самостійно), що система

$$\begin{cases} |1 - a| < \frac{1}{2}, \\ |1 + a| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

не має розв'язків. Отримали суперечність. ◄

У математиці часто використовують два спеціальних символи $\forall$ і $\exists$, які дають змогу значну кількість математичних тверджень записати в скороченому вигляді.

Символ $\forall$ (перевернута перша буква англійського слова *All* — кожний) називають **квантором загальності**. Він заміняє у словесних формулюваннях словосполучення: *для довільного, для будь-якого, для кожного*.

Символ $\exists$ (перевернута перша буква англійського слова *Exist* — існувати) називають **квантором існування**. Він заміняє у словесних формулюваннях слова: *існує*, *знайдеться*, *хоча б для одного*.

Означення границі послідовності містить слова: «для будь-якого», «існує», «для всіх». Тому, використовуючи квантори, його можна переписати так:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geqslant n_0\ \ |a_n - a| < \varepsilon.$$

Наведемо ще один приклад використання кванторів. Означення обмеженої зверху послідовності можна записати так:

$$\exists C\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n \leqslant C.$$

ВПРАВИ

33.1.° Укажіть (без обґрунтування), яке число є границею послідовності (x_n):

1) $x_n = 3 + \dfrac{1}{n}$; 2) $x_n = \dfrac{7}{\sqrt{n+1}}$; 3) $x_n = \dfrac{3 + \frac{1}{n}}{5 - \frac{2}{n}}$; 4) $x_n = \dfrac{\sin n}{n^5}$.

33.2.° Укажіть (без обґрунтування), яке число є границею послідовності (x_n):

1) $x_n = -\dfrac{1}{n} + 4$;

2) $x_n = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$;

3) $x_n = \cos n - \cos n$;

4) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n!}}$.

33.3.° Відомо, що деяка послідовність, членами якої є тільки цілі числа, є збіжною. Що можна сказати про цю послідовність (обґрунтовувати відповідь необов'язково)?

33.4.° Наведіть приклади трьох послідовностей, що збігаються до числа: 1) 3; 2) $-\sqrt{2}$.

33.5.° Чи для кожного числа a існує послідовність, що збігається до a?

33.6.• Використовуючи квантори, запишіть означення зростаючої послідовності.

33.7.$^{\bullet}$ Використовуючи квантори, запишіть означення обмеженої знизу послідовності.

33.8.$^{\bullet}$ Знайдіть принаймні одне число n_0 таке, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність:

1) $\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < \frac{1}{20}$; 2) $\left| \sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right| < 0{,}01$.

33.9.$^{\bullet}$ Знайдіть принаймні одне число n_0 таке, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність:

1) $\left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| < 0{,}3$; 2) $\left| \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} - 2 \right| < \frac{1}{1000}$.

33.10.$^{\bullet}$ Доведіть, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+5}{3n} = \frac{2}{3}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+2}{5n^2-1} = \frac{3}{5}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 3$;

33.11.$^{\bullet}$ Доведіть, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+1}{3n+5} = \frac{4}{3}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}+2} = \frac{1}{2}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+2}{n} = 2$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$;

33.12.$^{\bullet}$ Доведіть, що стаціонарна послідовність є збіжною. Чому дорівнює границя цієї послідовності?

33.13.$^{\bullet}$ Для довільного числа c і додатного раціонального r доведіть, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{c}{n^r} = 0$.

33.14.$^{\bullet}$ Нехай при будь-якому $\varepsilon > 0$ в інтервалі $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ міститься безліч членів послідовності (a_n). Чи можна стверджувати, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$?

33.15.$^{\bullet}$ Нехай при будь-якому $\varepsilon > 0$ поза інтервалом $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ міститься скінченна кількість членів послідовності (a_n). Чи можна стверджувати, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$?

33.16.$^{\bullet}$ Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Чи можуть у цій послідовності:

1) бути члени більші, ніж 1 000 000;
2) усі члени бути від'ємними;
3) усі члени бути більшими, ніж 10^{-100}?

33.17.• Зі збіжної послідовності викреслили всі члени, які стоять на парних місцях. Чи буде послідовність, що утворилася, збіжною?

33.18.• У збіжній послідовності змінили 100 перших членів. Чи залишиться послідовність збіжною? Чи може змінитися границя послідовності?

33.19.• Відомо, що границею послідовності (a_n) є число $\frac{1}{10}$. Доведіть, що, починаючи з деякого номера, кожний член послідовності (a_n) буде більшим за $\frac{1}{20}$.

33.20.• Покажіть, що коли в означенні границі замість «для будь-якого $\varepsilon > 0$» сказати «для будь-якого ε», то жодна послідовність не матиме границі.

33.21.• Запропонуємо таке «означення» границі послідовності: число a називають границею послідовності (a_n), якщо для будь-якого $\varepsilon \geqslant 0$ існує такий номер n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| \leqslant \varepsilon$. Які послідовності матимуть границю за такого «означення»?

33.22.• Відомо, що $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$. Чи можна стверджувати, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$?

33.23.• Відомо, що послідовність $(|a_n|)$ є збіжною. Чи можна стверджувати, що послідовність (a_n) також є збіжною?

33.24.•• Доведіть, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ тоді й тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n - a| = 0$.

33.25.•• Чи можна стверджувати, що коли послідовність (a_n) є збіжною, то послідовність $(|a_n|)$ також є збіжною?

33.26.•• Послідовність $(\sin a_n)$ є збіжною. Чи можна стверджувати, що послідовність (a_n) також є збіжною?

33.27.•• Чи можна стверджувати, що коли послідовності (a_n) і (b_n) мають одну й ту саму границю, то цю саму границю має й послідовність $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$?

33.28.•• Доведіть, що послідовність із загальним членом $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ є розбіжною.

33.29.•• Доведіть, що послідовність із загальним членом $a_n = n$ є розбіжною.

33.30.•• Нехай (x_n) — розбіжна послідовність. Чи можна стверджувати, що розбіжною є послідовність із загальним членом $y_n = (x_n)^n$?

33.31.•• Нехай (x_n) — розбіжна послідовність. Чи можна стверджувати, що розбіжною є послідовність із загальним членом $y_n = \sqrt[n+1]{|x_n|}$?

33.32.•• Нехай (x_n) — розбіжна послідовність. Чи можна стверджувати, що розбіжною є послідовність із загальним членом $y_n = n^{x_n}$?

33.33.•• Нехай (x_n) — розбіжна послідовність. Чи можна стверджувати, що розбіжною є послідовність із загальним членом $y_n = \frac{1}{n^{x_n}}$?

33.34.* Нехай (x_n) — така послідовність, що всі послідовності виду

$$x_2, x_4, x_6, \ldots,$$
$$x_3, x_6, x_9, \ldots,$$
$$x_4, x_8, x_{12}, \ldots,$$
$$\ldots$$

є збіжними. Чи можна стверджувати, що (x_n) — збіжна послідовність?

34. Теореми про арифметичні дії зі збіжними послідовностями

Знаходити границі збіжних послідовностей за допомогою означення границі — задача трудомістка. Полегшити процес пошуку границі дають змогу теореми про границі суми, добутку й частки двох послідовностей.

Теорема 34.1 (границя суми). ***Якщо послідовності (a_n) і (b_n) є збіжними, то послідовність $(a_n + b_n)$ також є збіжною, причому***

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n.$$

Теорема 34.2 (границя добутку). ***Якщо послідовності (a_n) і (b_n) є збіжними, то послідовність $(a_n b_n)$ також є збіжною, причому***

$$\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n \cdot \lim_{n \to \infty} b_n.$$

Теорема 34.3 (границя частки). ***Якщо послідовності*** (a_n) ***і*** (b_n) ***є збіжними, причому*** $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, $b_n \neq 0$, ***то послідовність*** $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ ***також є збіжною і***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

З доведенням теорем 34.1–34.3 ви зможете ознайомитися на с. 262–266, звернувшись до рубрики «Коли зроблено уроки».

ПРИКЛАД 1 Знайдіть $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n}$.

Розв'язання. Маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n}{n}+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)$.

Послідовність із загальним членом $a_n=\dfrac{2n+1}{n}$ подано у вигляді суми двох збіжних послідовностей із загальними членами $x_n=2$ і $y_n=\dfrac{1}{n}$. Тоді можна записати:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=2+0=2. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2 Обчисліть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+3}{11-4n}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник і знаменник дробу $\dfrac{5n+3}{11-4n}$ на n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{11-4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\frac{11}{n}-4}.$$

У чисельнику та знаменнику отриманого дробу записано загальні члени збіжних послідовностей. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{\frac{11}{n}-4}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{3}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{11}{n}-4\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{11}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}4}=\frac{5+0}{0-4}=-\frac{5}{4}. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 3 Обчисліть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n-1}{3n^3+n-2}$.

Розв'язання. Поділимо чисельник і знаменник дробу на n^3. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-1}{3n^3+n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{3+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)}=\frac{0}{3}=0.$$ ◄

ВПРАВИ

34.1.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{n+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+5}{n+4}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1000n}{n^2+1}$.

34.2.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{3n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{3n-4}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100\sqrt{n}}{n+2}$.

34.3.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+15}{2n^2-n+100}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-3n^2+44}{n^2+5n-7}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^5+5n^4+3n-2}{9n^5+n^3-1}$.

34.4.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^2+7n+1}{n^2+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-n}{n^2+3n-8}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-n^3-n^2-1}{-3n^4+n^2+12n}$.

34.5.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3-2n}\cdot\dfrac{n+3}{4n+5}\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n(3n-1)(n+4)}{(4+5n)(2n+1)(n+1)}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n-2)(2n+3)}{(4n-1)(n+3)(5n-2)}$.

34.6.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)(n+5)}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(3n-1)}{2n^2-3}$.

34.7.° Обчисліть границю послідовності, заданої формулою:

1) $a_n=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}$; 2) $x_n=\dfrac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}}$.

34.8.° Послідовність задано рекурентно: $x_1 = \sqrt{2},\ \ x_{n+1} = -\frac{x_n}{2}, n \in \mathbb{N}$.

Знайдіть границю $\lim\limits_{n \to \infty} (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$.

34.9.• Учитель запропонував обчислити границю $\lim\limits_{n \to \infty} 1$. Учень Василь Заплутайко розв'язав задачу так:

$$\lim_{n \to \infty} 1 = \lim_{n \to \infty} n \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ доданків}} =$$

$$= \underbrace{\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} + \ldots + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}}_{n \text{ доданків}} = \underbrace{0 + 0 + \ldots + 0}_{n \text{ доданків}} = 0.$$

Чи погоджуєтесь ви з розв'язанням Василя?

34.10.• Відомо, що $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Доведіть, що:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n^2 = a^2$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n^k = a^k$, де $k \in N$.

34.11.• Відомо, що $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$. Знайдіть границю:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n a_{n+1}$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2 a_n + a_{n+2}}{(a_n - n)^2 + 1}$.

34.12.• Послідовність (a_n) прямує до числа 3. Знайдіть границю:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + a_{n+1})(a_n - 2)$; 2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_{n+3} - 1}{a_n^2 + 5}$.

34.13.• Послідовність (a_n) така, що існує границя $\lim\limits_{n \to \infty} (a_{n+1} + a_n)$. Чи можна стверджувати, що послідовність (a_n) є збіжною?

34.14.•• З послідовності (x_n) утворили послідовність із загальним членом $y_n = x_n^2 - 5x_n + 6$. Відомо, що (y_n) — збіжна послідовність. Чи завжди є збіжною послідовність (x_n)?

34.15.•• За послідовністю (x_n) побудували послідовність (y_n) таку, що $y_n = x_n - x_{n+3}$. Виявилося, що послідовність (y_n) має границю. Чи обов'язково є збіжною послідовність (x_n)?

34.16.•• Члени послідовності (x_n) для всіх $n \in \mathbb{N}$ задовольняють умову $x_{n+1} = x_n^2 + 4x_n + 3$. Чи існує таке x_1, що (x_n) — збіжна послідовність?

34.17.•• Доведіть, що послідовність (a_n), члени якої для всіх $n \in \mathbb{N}$ задовольняють рівність $3a_{n+2}(a_{n+1} - 1) = 2a_n - 5$, є розбіжною.

34.18.•• З послідовності (x_n) утворили нову послідовність (S_n) за формулою $S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Виявилося, що (S_n) — збіжна послідовність. Чи обов'язково $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$?

34.19.•• Знайдіть границю послідовності (x_n), заданої формулою:

1) $x_n = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{n \cdot (n+1)}$;

2) $x_n = \dfrac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}$;

3) $x_n = \dfrac{1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!}{(n+1)!}$.

34.20.•• Знайдіть границю послідовності (x_n), заданої формулою:

1) $x_n = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \ldots + \dfrac{n}{(n+1)!}$;

2) $x_n = \dfrac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \dfrac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$;

3) $x_n = \dfrac{1^3 + 2^3 + \ldots + n^3}{n^4}$.

34.21.* Побудуйте графік функції $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x^{2n+1}}{1 + x^{2n}}$.

34.22.* Дослідіть на збіжність послідовність (x_n), якщо:

1) $x_n = \sin 6n$;

2) $x_n = \sin 1 + \sin 2 + \ldots + \sin n$.

34.23.* Чи існує границя послідовності із загальним членом $x_n = \cos 7n$?

Доведення теорем про арифметичні дії зі збіжними послідовностями

Означення. **Послідовність (a_n) називають *нескінченно малою*, якщо $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.**

Наприклад, послідовності, які задано формулами $a_n = \dfrac{100}{n}$, $b_n = -\dfrac{1}{n^2}$, $c_n = \dfrac{2}{\sqrt{n}}$, є нескінченно малими.

З означення границі послідовності випливає, що коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $|\beta_n| < \varepsilon$, то послідовність (β_n) є нескінченно малою.

Теорема 34.4. ***Число a є границею послідовності (a_n) тоді й тільки тоді, коли загальний член цієї послідовності можна подати у вигляді $a_n = a + \beta_n$, де (β_n) — нескінченно мала послідовність.***

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Розглянемо послідовність (β_n) таку, що $\beta_n = a_n - a$. Маємо: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$, тобто $|\beta_n| < \varepsilon$. Звідси отримуємо, що послідовність (β_n) є нескінченно малою.

Нехай тепер виконується рівність $a_n = a + \beta_n$, тобто $a_n - a = \beta_n$, де (β_n) — нескінченно мала послідовність. Маємо: для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $|\beta_n| < \varepsilon$, тобто $|a_n - a| < \varepsilon$. Звідси $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. ◄

Теорема 34.5. ***Добуток обмеженої послідовності і нескінченно малої послідовності є нескінченно малою послідовністю.***

Доведення. Нехай послідовність (a_n) є обмеженою, а послідовність (β_n) — нескінченно малою. Покажемо, що $\lim\limits_{n \to \infty} a_n\beta_n = 0$.

Згідно з ключовою задачею 32.12 існує таке число $C > 0$, що для всіх натуральних чисел n виконується нерівність $|a_n| \leqslant C$.

Нехай ε — додатне число. Тоді для додатного числа $\frac{\varepsilon}{C}$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{C}$.

Отже, для всіх $n \geqslant n_0$ можна записати:

$$|a_n\beta_n| = |a_n| \cdot |\beta_n| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Це означає, що $\lim\limits_{n \to \infty} a_n\beta_n = 0$. ◄

Наслідок. ***Добуток нескінченно малої та збіжної послідовностей є нескінченно малою послідовністю.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

Теорема 34.6. ***Сума двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.***

Доведення. Нехай (α_n) і (β_n) — нескінченно малі послідовності, тобто $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \lim\limits_{n \to \infty} \beta_n = 0$. Покажемо, що $\lim\limits_{n \to \infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0$.

Нехай ε — задане додатне число. Тоді для додатного числа $\frac{\varepsilon}{2}$ існує номер n_0 такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконуються нерівності $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ і $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тоді для всіх $n \geqslant n_0$ можна записати:

$$|\alpha_n + \beta_n| \leqslant |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Це означає, що $\lim\limits_{n \to \infty} (\alpha_n + \beta_n) = 0$. ◄

За допомогою методу математичної індукції можна показати, що сума скінченної кількості нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

Користуючись означенням нескіченно малої послідовності та теоремами 34.4–34.6, доведемо теореми, сформульовані на початку п. 34.

Теорема 34.1 (границя суми). ***Якщо послідовності (a_n) і (b_n) є збіжними, то послідовність $(a_n + b_n)$ також є збіжною, причому***

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \to \infty} a_n + \lim_{n \to \infty} b_n.$$

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$. Тоді за теоремою 34.4 можна записати:

$$a_n = a + \alpha_n,$$
$$b_n = b + \beta_n,$$

де (α_n) і (β_n) — нескінченно малі послідовності.

Звідси $a_n + b_n = a + b + (\alpha_n + \beta_n)$.

За теоремою 34.6 послідовність $(\alpha_n + \beta_n)$ є нескінченно малою. Отже, згідно з теоремою 34.4 послідовність $(a_n + b_n)$ є збіжною, причому $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$. ◄

ПРИКЛАД 1 Знайдіть $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n}$.

Розв'язання. Маємо: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2n}{n} + \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right)$.

Послідовність із загальним членом $a_n = \frac{2n+1}{n}$ подано у вигляді суми двох збіжних послідовностей із загальними членами $x_n = 2$ і $y_n = \frac{1}{n}$.

Тоді можна записати:

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=2+0=2. \blacktriangleleft$$

Теорема 34.2 (границя добутку). ***Якщо послідовності (a_n) і (b_n) є збіжними, то послідовність (a_nb_n) також є збіжною, причому***

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. Тоді згідно з теоремою 34.4 можна записати:

$$a_n=a+\alpha_n,$$
$$b_n=b+\beta_n,$$

де (α_n) і (β_n) — нескінченно малі послідовності.

Звідси $a_nb_n=(a+\alpha_n)(b+\beta_n)=ab+(a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n)$.

За теоремою 34.5 послідовності $(a\beta_n)$, $(b\alpha_n)$ і $(\alpha_n\beta_n)$ є нескінченно малими. Тоді за теоремою 34.6 послідовність $(a\beta_n+b\alpha_n+\alpha_n\beta_n)$ є нескінченно малою.

Отже, за теоремою 34.4 послідовність (a_nb_n) є збіжною, причому $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=ab$. $\blacktriangleleft$

Теорема 34.3 (границя частки). ***Якщо послідовності (a_n) і (b_n) є збіжними, причому $\lim\limits_{n\to\infty}b_n\neq 0$, $b_n\neq 0$, то послідовність $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ також є збіжною і***

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. Оскільки $b\neq 0$, то, починаючи з деякого номера n_0, для членів послідовності (b_n) виконується нерівність $|b_n|>r$, де r — деяке додатне число. Тоді для всіх $n\geqslant n_0$ виконується нерівність $\left|\frac{1}{b_n}\right|<\frac{1}{r}$. Отже, послідовність $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ є обмеженою.

За теоремою 34.4 можна записати:

$$a_n=a+\alpha_n,$$
$$b_n=b+\beta_n,$$

де (α_n) і (β_n) — нескінченно малі послідовності.

Розглянемо послідовність (γ_n), яку задано формулою $\gamma_n = \dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b}$.

Маємо: $\gamma_n = \dfrac{a_n}{b_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{a+\alpha_n}{b+\beta_n} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{b(a+\alpha_n) - a(b+\beta_n)}{(b+\beta_n)\,b} = \dfrac{b\alpha_n - a\beta_n}{b_n b}$.

Згідно з теоремами 34.5 і 34.6 послідовність $(b\alpha_n - a\beta_n)$ є нескінченно малою. Послідовність $\left(\dfrac{1}{b_n b}\right)$ є обмеженою. Отже, послідовність (γ_n) є нескінченно малою.

Тоді за теоремою 34.4 можна записати: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$. ◄

35. Властивості збіжних послідовностей

У цьому пункті розглянемо деякі властивості збіжних послідовностей.

Теорема 35.1. ***Збіжна послідовність є обмеженою.***

Доведення. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тоді, починаючи з деякого номера n_0, усі члени послідовності (a_n) потраплять у проміжок $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$, де ε — деяке додатне число. Поза цим проміжком знаходитиметься лише скінченна кількість членів послідовності (a_n). Тому проміжок $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ можна розширити так, щоб новий проміжок (позначимо його $(c;\ C)$) містив усі члени послідовності. Отже, для будь-якого натурального числа n виконуватиметься нерівність $c < a_n < C$. ◄

З теореми 35.1 випливає, що обмеженість послідовності є необхідною умовою збіжності цієї послідовності. Проте ця умова не є достатньою для збіжності. Наприклад, послідовність із загальним членом $a_n = (-1)^n$ є обмеженою, але, як було показано в прикладі 2 п. 33, вона не є збіжною.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що послідовність (a_n), яку задано формулою $a_n = \dfrac{n^3 - 6}{3n^2 + n}$, є розбіжною.

Розв'язання. Доведемо, що послідовність (a_n) є необмеженою, а отже, не може бути збіжною. Справді, для всіх $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, має місце нерівність

$$n^3 - 6 > \frac{n^3}{2}.$$

Крім того, для всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце нерівність

$$3n^2 + n \leqslant 4n^2.$$

Таким чином, для всіх $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$, маємо: $a_n = \dfrac{n^3 - 6}{3n^2 + n} > \dfrac{\frac{n^3}{2}}{4n^2} = \dfrac{n}{8}$.

Оскільки значення виразу $\dfrac{n}{8}$, де $n \in \mathbb{N}$, можуть бути як завгодно великими, то послідовність (a_n) не є обмеженою зверху, що доводить розбіжність послідовності (a_n). ◀

Теорема 35.2. ***Якщо*** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ ***і*** $a > b$ $(a < b)$, ***то, починаючи з деякого номера*** n_0, ***виконується нерівність*** $a_n > b$ $(a_n < b)$.

Доведення. Розглянемо випадок, коли $a > b$. Як задане додатне число ε візьмемо число $\dfrac{a-b}{2}$. Тоді, починаючи з деякого номера n_0, усі члени послідовності потраплять у проміжок $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Оскільки

$$a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} > b,$$

то проміжок $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ містить лише числа, більші за b (рис. 35.1).

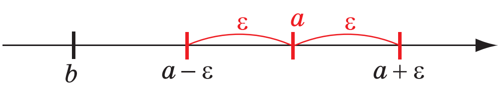


Рис. 35.1

Випадок, коли $a < b$, можна розглянути аналогічно. ◀

Наслідок. ***Якщо*** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, $a \neq 0$, ***то, починаючи з деякого номера*** n_0, ***виконується нерівність*** $|a_n| > r$, ***де*** r ***— деяке додатне число.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

Теорема 35.3. ***Якщо для всіх*** $n \in \mathbb{N}$ ***виконується нерівність*** $a_n \geqslant b_n$, ***причому існують границі*** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ ***і*** $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$, ***то*** $a \geqslant b$.

Доведення. Припустимо, що $a < b$. Оберемо додатне число ε так, щоб $(a-\varepsilon; a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon; b+\varepsilon) = \varnothing$ (рис. 35.2). Тоді, починаючи з деякого номера n_0, усі члени послідовності (a_n) потраплять у проміжок $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$, а всі члени послідовності (b_n) — у проміжок $(b-\varepsilon;\ b+\varepsilon)$, що суперечить нерівності $a_n \geqslant b_n$ при будь-якому натуральному n. ◀

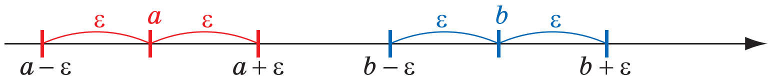


Рис. 35.2

Теорема 35.4 (про двох конвоїрів). ***Якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується подвійна нерівність $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$, причому послідовності (a_n) і (b_n) збігаються до спільної границі, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$, то послідовність (c_n) також є збіжною і $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.***

Доведення. Нехай ε — деяке додатне число. Тоді, починаючи з певного номера n_0, усі члени послідовностей (a_n) і (b_n) потраплять у проміжок $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$. Для всіх $n \geqslant n_0$ маємо:

$$a - \varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < a + \varepsilon.$$

Це означає, що для будь-якого додатного числа ε існує номер n_0, починаючи з якого всі члени послідовності (c_n) потраплять у проміжок $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. ◀

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+3}{\sqrt[3]{n^7+5n-2}} = 0.$

Розв'язання. Оскільки для всіх натуральних n має місце нерівність $5n - 2 > 0$, то

$$0 \leqslant \frac{n+3}{\sqrt[3]{n^7+5n-2}} < \frac{n+3}{\sqrt[3]{n^7}} \leqslant \frac{n+3n}{\sqrt[3]{n^7}} = \frac{4n}{n^{\frac{7}{3}}} = \frac{4}{n^{\frac{4}{3}}}.$$

Маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4}{n^{\frac{4}{3}}} = 0.$ Тоді за теоремою про двох конвоїрів

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+3}{\sqrt[3]{n^7+5n-2}} = 0. \ ◀$$

Під час розв'язування багатьох задач буває доцільним використовувати таке твердження:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0, \text{ де } a > 1}$$

Ідею доведення цього факту проілюструємо на конкретному прикладі.

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що послідовність (x_n), яку задано формулою $x_n = \dfrac{n}{1{,}21^n}$, є нескінченно малою.

Розв'язання. Скористаємося нерівністю Бернуллі $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, яка має місце для всіх $x > -1$ і $n \in \mathbb{N}$. Маємо:

$$1{,}21^n = (1{,}1)^{2n} = \left((1+0{,}1)^n\right)^2 \geqslant (1+n\cdot 0{,}1)^2 > \frac{n^2}{100}.$$

Звідси для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується подвійна нерівність:

$$0 < \frac{n}{1{,}21^n} < \frac{100}{n}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{100}{n} = 0$, то за теоремою про двох конвоїрів $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{1{,}21^n} = 0$. ◄

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.[1]

Розв'язання. Доведемо, що для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться номер n_0 такий, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується подвійна нерівність $1-\varepsilon < \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon$.

Зазначимо, що $1-\varepsilon < \sqrt[n]{n}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Розглянемо нерівність $\sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon$. Маємо: $n < (1+\varepsilon)^n$, $\dfrac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1$.

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{a^n} = 0$ для всіх $a > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{(1+\varepsilon)^n} = 0$. За теоремою 35.2 існує такий номер n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ має місце нерівність $\dfrac{n}{(1+\varepsilon)^n} < 1$.

Таким чином, для довільного $\varepsilon > 0$ доведено існування такого n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується подвійна нерівність $1-\varepsilon < \sqrt[n]{n} < 1+\varepsilon$. Це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. ◄

[1] При $n = 1$ під записом $\sqrt[n]{a_n}$ тут і далі будемо розуміти a_1.

ПРИКЛАД 5 Знайдіть границю $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{3^n + 1}$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою про двох конвоїрів. Маємо:

$$\sqrt[n]{3^n + 1} \geqslant \sqrt[n]{3^n} = 3.$$

Водночас для всіх $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ виконуються нерівності

$$\sqrt[n]{3^n + 1} \leqslant \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3 \cdot \sqrt[n]{2} \leqslant 3 \cdot \sqrt[n]{n}.$$

Оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} 3 \cdot \sqrt[n]{n} = 3$.

Тоді за теоремою про двох конвоїрів $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{3^n + 1} = 3$. ◄

Теорема 35.5. ***Якщо*** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, ***де*** $a_n \geqslant 0$, ***то*** $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Доведення. Зауважимо, що з умови $a_n \geqslant 0$ і теореми 35.3 випливає нерівність $a \geqslant 0$. Тому вираз $\sqrt{a}$ має зміст.

Розглянемо випадок $a = 0$, тобто $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$. Треба довести, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий номер n_0, що для всіх $n \geqslant n_0$ виконується нерівність $\left|\sqrt{a_n} - 0\right| < \varepsilon$, тобто $a_n < \varepsilon^2$. Обґрунтувати останню нерівність можна, якщо в означенні границі $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$:

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_0 \;\; \left|a_n - 0\right| < \varepsilon_1$$

покласти $\varepsilon_1 = \varepsilon^2$.

Розглянемо випадок, коли $a > 0$.

Помножимо та поділимо вираз $\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right|$ на двочлен $\sqrt{a_n} + \sqrt{a}$. Маємо:

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a_n} + \sqrt{a}\right)}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| = \left|a_n - a\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}.$$

З умови $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ випливає, що

$$\forall \varepsilon_1 > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_0 \;\; \left|a_n - a\right| < \varepsilon_1.$$

Крім цього, має місце нерівність $\frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}$, тому

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}\right| = \left|a_n - a\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} < \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{a}}.$$

Нехай $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_1}{\sqrt{a}}$. Тоді доведено, що

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant n_0 \;\; \left| \sqrt{a_n} - \sqrt{a} \right| < \varepsilon.$$

Таким чином, $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. ◄

Міркуючи аналогічним чином, можна довести й таку теорему.

Теорема 35.6 (границя кореня). ***Якщо*** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, ***де*** $a_n \geqslant 0$, ***то*** $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a}$, ***де*** $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$.

ПРИКЛАД 6 Обчисліть границю $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{4n^2 + n} - 2n \right)$.

Розв'язання. Проведемо тотожні перетворення:

$$\sqrt{4n^2 + n} - 2n = \frac{\left(\sqrt{4n^2 + n} + 2n \right)\left(\sqrt{4n^2 + n} - 2n \right)}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} =$$

$$= \frac{(4n^2 + n) - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} = \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} = \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2}.$$

Тепер отримуємо: $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{4n^2 + n} - 2n \right) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2} = \dfrac{1}{4}$. ◄

ВПРАВИ

35.1.° Доведіть, що границя послідовності (x_n) дорівнює нулю, якщо:

1) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$;
2) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^3 + 4}}$;
3) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$;
4) $x_n = \dfrac{-4}{n^4 + 5n + 1}$;
5) $x_n = \dfrac{n^2 + 2n - 1}{3n^3 + n - 2}$.

35.2.° Доведіть, що границя послідовності (x_n) дорівнює нулю, якщо:

1) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt[3]{n^{10} + 7}}$;
2) $x_n = \dfrac{-1}{\sqrt{n} + 2\sqrt{n-1}}$;
3) $x_n = \dfrac{n^3 + n}{n^5 + 2n + 3}$.

35.3.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{4n+1} + \sqrt{n+3}}$;
2) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n}{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{2 + n^2}}$.

35.4.$^{\bullet}$ Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+3}}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{4n^2+1}}$.

35.5.$^{\bullet}$ Знайдіть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{\sqrt[3]{n}}\right)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2}$; 5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+n}{3^n}$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{n}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n}+1\right)^2-n}{\sqrt{n}}$;

35.6.$^{\bullet}$ Знайдіть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{5}{n^2}\right)$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)^2-n^4$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-7n^3}{n^3}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{11n-2^n}{2^n}$.

35.7.$^{\bullet}$ Для даної збіжної послідовності (a_n) знайдіть таку нескінченно малу послідовність (β_n), що $a_n=a+\beta_n$, де a — границя послідовності (a_n):

1) $a_n=\dfrac{1}{n}$; 2) $a_n=\dfrac{n}{n+1}$; 3) $a_n=\dfrac{4n-2}{3n+1}$; 4) $a_n=\dfrac{n^2+(-1)^n}{n^2+1}$.

35.8.$^{\bullet}$ Для даної збіжної послідовності (a_n) знайдіть таку нескінченно малу послідовність (β_n), що $a_n=a+\beta_n$, де a — границя послідовності (a_n):

1) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $a_n=\dfrac{n+1}{n}$; 3) $a_n=2-\dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$; 4) $a_n=\dfrac{2n}{n+3}$.

35.9.$^{\bullet}$ Для членів послідовностей (a_n) і (b_n) при кожному $n\in\mathbb{N}$ виконуються нерівності $0\leqslant a_n\leqslant b_n$. Чи є правильним твердження:

1) якщо послідовність (b_n) нескінченно мала, то й послідовність (a_n) нескінченно мала;
2) якщо послідовність (a_n) нескінченно мала, то й послідовність (b_n) нескінченно мала?

35.10.$^{\bullet}$ Чи є збіжною послідовність:

1) $x_n=\dfrac{n^2+4}{n+3}$; 2) $x_n=\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}$; 3) $x_n=n^2\sin n^{\circ}$?

35.11.$^{\bullet}$ Чи є збіжною послідовність:

1) $x_n=\dfrac{n}{\sqrt{n+3}}$; 2) $x_n=2^n-\cos n$; 3) $x_n=n^{(-1)^n}$?

35.12.$^{\bullet\bullet}$ Обчисліть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

35.13.•• Обчисліть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+3}\right)$.

35.14.•• Обчисліть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-n\right)$.

35.15.•• Обчисліть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+3n}\right)$.

35.16.•• Доведіть рівність $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n=0$, де $q\in(-1;\ 1)$.

35.17.•• Доведіть рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, де $a\geqslant 1$.

35.18.•• Знайдіть границю послідовності:

1) $x_n=\dfrac{\sqrt{n}}{5^n}$; 2) $x_n=\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{2^n}$; 3) $x_n=\sqrt{\dfrac{3^n\cdot n}{5^n}}$; 4) $x_n=\dfrac{n-1}{2^n}$.

35.19.•• Доведіть, що є нескінченно малою послідовність:

1) $x_n=\dfrac{\sqrt[3]{n}}{2^n}$; 2) $x_n=\dfrac{n}{2^n+1}$; 3) $x_n=\sqrt{\sqrt[3]{\dfrac{3^n n^6}{5^n}}}$.

35.20.•• Послідовність (a_n) прямує до нуля. Чи можна стверджувати, що має границю послідовність (S_n), яку задано формулою $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$?

35.21.•• Знайдіть границю послідовності:

1) $x_n=\sqrt[n]{4^n+n}$; 3) $x_n=\sqrt[n^2]{n}$; 5) $x_n=\dfrac{5^n}{n!}$.

2) $x_n=\dfrac{\sin n}{n}$; 4) $x_n=\sqrt[n^2]{1^{n-1}+2^{n-1}+\ldots+n^{n-1}}$;

35.22.•• Знайдіть границю послідовності:

1) $x_n=\sqrt[n]{5^n+n-2}$; 3) $x_n=\sqrt[n]{1+2^n+7^n}$; 5) $x_n=\dfrac{n!}{n^n}$.

2) $x_n=\dfrac{\cos(n!)}{\sqrt{n}}$; 4) $x_n=\sqrt[n^2]{n!}$;

35.23.* Побудуйте графік функції $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{1+x^{2n}}$.

35.24.* Знайдіть границю послідовності

$$x_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n^n+1}}+\frac{1}{\sqrt[n]{n^n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[n]{n^n+n}}.$$

35.25.* Знайдіть границю послідовності $x_n=\dfrac{1^5+3^5+5^5+\ldots+(2n-1)^5}{n^7}$.

35.26.* Наведіть приклад такого $n\in\mathbb{N}$, що $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}>100$, і доведіть необмеженість послідовності $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}$.

36. Теорема Вейєрштрасса

Важливою ознакою збіжності послідовності є така теорема.

Теорема 36.1 (теорема Вейєрштрасса). ***Кожна зростаюча й обмежена зверху (спадна й обмежена знизу) послідовність має границю.***

Твердження цієї теореми має просту геометричну інтерпретацію. Справді, якщо послідовність (x_n) зростає, то кожний наступний її член буде розташований на числовій прямій правіше всіх попередніх членів (рис. 36.1). Крім цього, за рахунок обмеженості послідовності (x_n) зверху числом C її члени не можуть необмежено зростати. А отже, існує число x, до якого прямує послідовність (x_n).

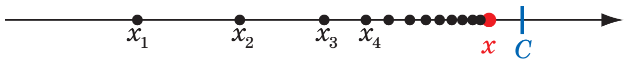


Рис. 36.1

Незважаючи на наочність геометричної інтерпретації, доведення теореми Вейєрштрасса вимагає точного розуміння таких складних понять як «числова пряма», «дійсне число» тощо. Пояснимо сказане.

Один із найпоширеніших способів побудови множини дійсних чисел пов'язаний з аксіоматичним описом її властивостей, на кшталт того, як у геометрії за допомогою аксіом було визначено основні властивості точки, прямої, площини. Серед аксіом дійсних чисел є, наприклад, такі:

1) $a + b = b + a$;
2) $(a + b)\, c = ac + bc$;
3) $(ab)\, c = a\, (bc)$;
4) якщо $a \leqslant b$ і $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$.

Повний перелік зазвичай містить більше 10 різних умов[1] і сформований так, щоб описати всі характерні властивості дійсних чисел, тобто дати змогу відрізняти множину дійсних чисел від інших множин. Тому серед аксіом дійсних чисел має бути й така умова, яка відрізняє множину дійсних чисел від множини раціональних чисел. Зауважимо, що жодна з аксіом 1–4 не є такою умовою, оскільки раціональні числа також задовольняють аксіоми 1–4.

[1] З ним ви зможете ознайомитися у вищому навчальному закладі або в підручниках з математичного аналізу.

Карл Теодор Вільгельм Веєрштрасс
(1815–1897)

Німецький математик, член Берлінської академії наук, Паризької академії наук, почесний член Петербурзької академії наук. Його основні роботи присвячені математичному аналізу. Одним із найважливіших його здобутків є система логічного обґрунтування математичного аналізу, заснована на побудованій ним теорії дійсних чисел. Веєрштрасс приділяв велику увагу застосуванню математики в механіці та фізиці й заохочував до цього своїх учнів.

Чим же принципово відрізняються у своїй будові множини дійсних і раціональних чисел? Говорячи неформально, сукупність раціональних чисел містить «прогалини»; множина ж дійсних чисел є повною, тобто не містить «дірок». Справді, якщо зобразити на прямій множину раціональних чисел, то отримаємо фігуру, яка складається з «окремих точок», у той час як дійсні числа «неперервно» заповнюють усю пряму.

Точного змісту ці глибокі та складні поняття набули лише в другій половині XIX ст. у роботах Карла Веєрштрасса, Ріхарда Дедекінда, Едуарда Гейне, Георга Кантора, Огюстена Коші, Шарля Мере. Ці науковці знайшли кілька різних способів опису відмінностей між раціональними і дійсними числами.

Сформулюємо одну з можливих умов, що відрізняє множину дійсних чисел від раціональних.

Принцип вкладених відрізків[1]. Будь-яка послідовність вкладених відрізків $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \dots$ має непорожній перетин, тобто існує число x_0, яке належить усім відрізкам $[a_k; b_k]$.

Наприклад, послідовність вкладених відрізків

$$[-1; 1] \supset \left[-1; \frac{1}{2}\right] \supset \left[-1; \frac{1}{3}\right] \supset \dots$$

має непорожній перетин — відрізок $[-1; 0]$, тобто існує число x_0, наприклад $x_0 = 0$, яке належить усім названим відрізкам.

[1] Проміжки виду $[a; b]$ називають також відрізками.

Розглянемо інший приклад. Як відомо, $\sqrt{2} = 1,414...$. Тоді послідовність вкладених відрізків

$$[1; 2] \supset [1,4; 1,5] \supset [1,41; 1,42] \supset [1,414; 1,415] \supset ... \qquad (1)$$

має непорожній перетин — одноелементну множину $\{\sqrt{2}\}$ (рис. 36.2).

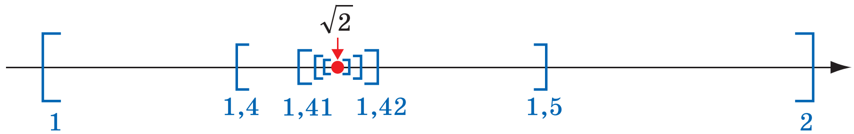


Рис. 36.2

Зауважимо, що для множини раціональних чисел принцип вкладених відрізків не виконується. Наприклад, якщо на множині раціональних чисел розглянути послідовність вкладених відрізків (1), то не знайдеться жодного раціонального числа, яке належить усім цих відрізкам.

Використовуючи принцип вкладених відрізків, можна довести важливі властивості множини дійсних чисел.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що не існує такої послідовності (x_n), серед членів якої є кожне число відрізка [0; 1].

Розв'язання. Розглянемо довільну послідовність (x_n). Оберемо на [0; 1] такий відрізок $[a_1; b_1]$, який не містить x_1 (зрозуміло, що такий відрізок існує). Далі на відрізку $[a_1; b_1]$ оберемо такий відрізок $[a_2; b_2]$, який не містить x_2. Продовжуючи цей процес, побудуємо послідовність вкладених відрізків

$$[0; 1] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset ...,$$

у якій відрізок $[a_k; b_k]$ не містить x_k, тобто $x_k \notin [a_k; b_k]$. Тому жоден член послідовності (x_n) не може належати перетину побудованих відрізків. Але цей перетин непорожній і містить деяке число $x \in [0; 1]$. Таким чином, доведено, що число x не представлене в послідовності (x_n), тобто доведено, що відрізок [0; 1] — незліченна множина. ◄

Використовуючи принцип вкладених відрізків, можна довести теорему Вейєрштрасса.

Доведення. Розглянемо випадок, коли (x_n) — зростаюча й обмежена зверху послідовність (випадок спадної та обмеженої знизу послідовності можна розглянути аналогічно). Тоді існує таке число C, що $x_n \leqslant C$.

Побудуємо послідовність вкладених відрізків

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \ldots .$$

Нехай $a_1 = x_1$ і $b_1 = C$. Тоді всі члени послідовності (x_n) належать відрізку $[a_1; b_1]$.

Розіб'ємо відрізок $[a_1; b_1]$ точкою d_1 навпіл. Можливі два випадки.

1) Нерівність $x_n \leqslant d_1$ виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто всі члени послідовності (x_n) не більші за число d_1 (рис. 36.3). У цьому випадку другий відрізок $[a_2; b_2]$ виберемо так: $a_2 = a_1$, $b_2 = d_1$.

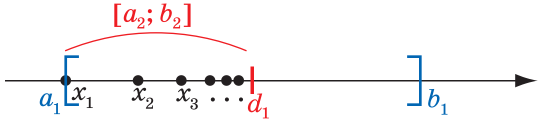


Рис. 36.3

2) Нерівність $x_n \leqslant d_1$ виконується не для всіх $n \in \mathbb{N}$, тобто існують члени послідовності (x_n), більші за число d_1 (рис. 36.4). У цьому випадку відрізок $[a_2; b_2]$ виберемо так: $a_2 = d_1$, $b_2 = b_1$.

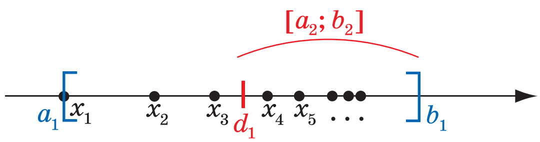


Рис. 36.4

В обох розглянутих випадках відрізок $[a_2; b_2]$ є частиною відрізка $[a_1; b_1]$ і містить деякі члени послідовності (x_n), причому для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $x_n \leqslant b_2$. Оскільки (x_n) — зростаюча послідовність, то поза відрізком $[a_2; b_2]$ знаходиться лише скінченна кількість членів послідовності (x_n).

Для побудови третього відрізка $[a_3; b_3]$ повторимо описану процедуру. Розіб'ємо відрізок $[a_2; b_2]$ точкою d_2 навпіл. Тоді, якщо нерівність $x_n \leqslant d_2$ виконується для всіх $n \in \mathbb{N}$, покладемо $a_3 = a_2$, $b_3 = d_2$; в іншому випадку — $a_3 = d_2$, $b_3 = b_2$.

Зрозуміло, що відрізок $[a_3; b_3]$ є частиною відрізка $[a_2; b_2]$ і містить деякі члени послідовності (x_n), причому для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність $x_n \leqslant b_3$. Оскільки (x_n) — зростаюча послідовність, то поза відрізком $[a_3; b_3]$ знаходиться лише скінченна кількість членів послідовності (x_n).

Міркуючи аналогічно, побудуємо послідовність вкладених відрізків $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \ldots$. Зауважимо, що поза кожним із цих відрізків знаходиться лише скінченна кількість членів послідовності (x_n). Крім цього, оскільки довжина відрізка $[a_k; b_k]$ дорівнює $\frac{b_1 - a_1}{2^{k-1}}$, то послідовність довжин відрізків $[a_k; b_k]$ прямує до нуля.

Використовуючи принцип вкладених відрізків, доходимо висновку, що існує число x, яке належить усім побудованим відрізкам.

Доведемо, що $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$. Справді, для будь-якого $\varepsilon > 0$ інтервал $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ міститиме деякий відрізок $[a_k; b_k]$. Оскільки поза відрізком $[a_k; b_k]$ знаходиться лише скінченна кількість членів послідовності (x_n), то й поза інтервалом $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ також знаходиться лише скінченна кількість членів послідовності (x_n). Отже, доведено, що x — границя послідовності (x_n).

Теорему Вейєрштрасса доведено. ◄

Зазначимо, що твердження теореми Вейєрштрасса можна узагальнити для довільних монотонних послідовностей, тобто ***кожна монотонна й обмежена послідовність має границю*** (доведіть це самостійно).

Зробимо ще одне зауваження. Теорема Вейєрштрасса є прикладом так званої *теореми існування*. Ця теорема вказує умови, за яких існує границя послідовності. Проте ні формулювання, ні доведення теореми не задає скінченний алгоритм, який дав би змогу знайти цю границю.

ПРИКЛАД 2 Послідовність (a_n) задано формулою

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_n}\right),$$

де (p_n) — послідовність простих чисел. Чи існує границя $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$?

Розв'язання. Оскільки для всіх $n \in \mathbb{N}$ мають місце нерівності $0 < a_n < 1$, то (a_n) — обмежена послідовність. Зі співвідношень $a_{n+1} = a_n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_{n+1}}\right) < a_n$ випливає, що (a_n) — спадна послідовність.

За теоремою Вейєрштрасса існує границя $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$. ◄

ПРИКЛАД 3 Послідовність (a_n) задано рекурентним способом: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Дослідіть послідовність (a_n) на збіжність і в разі збіжності знайдіть границю.

Розв'язання. Зазначимо, що $a_n > 0$.

Запишемо: $a_{n+1}^2 = 2 + a_n$, $a_{n+2}^2 = 2 + a_{n+1}$. Звідси $a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = a_{n+1} - a_n$. Очевидно, що $a_2 - a_1 > 0$. Водночас із припущення $a_{n+1} - a_n > 0$ випливає, що $a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 > 0$, тобто $a_{n+2} - a_{n+1} > 0$. За методом математичної індукції отримуємо, що (a_n) — зростаюча послідовність.

Маємо: $a_n^2 < a_{n+1}^2 = 2 + a_n$. Звідси $a_n^2 < 2 + a_n$, $-1 < a_n < 2$. Тому (a_n) — обмежена зверху послідовність.

За теоремою Вейєрштрасса існує границя $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Знайдемо значення границі a. Скористаємося рівністю $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} a_{n+1} = a$, а $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt{2 + a_n} = \sqrt{2 + a}$, то маємо рівняння $a = \sqrt{2 + a}$. Звідси $a = 2$.

Відповідь: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$. ◄

ВПРАВИ

36.1. Послідовність (a_n) є збіжною. Чи можна стверджувати, що послідовність (a_n) є: 1) монотонною; 2) обмеженою?

36.2. Послідовність (a_n) задано формулою

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{2^3}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Чи існує границя $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$?

36.3. Послідовність (a_n) задано формулою $a_n = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$.

Чи існує границя $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$?

36.4. Чи існує така послідовність вкладених відрізків

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \ldots,$$

що їхній перетин складається рівно з двох точок?

36.5. Чи обов'язково послідовність вкладених інтервалів

$$(a_1; b_1) \supset (a_2; b_2) \supset (a_3; b_3) \supset \ldots$$

має непорожній перетин?

36.6. Послідовність вкладених відрізків $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset \ldots$ задовольняє умову $\lim\limits_{n \to \infty} (b_n - a_n) = 0$. Доведіть, що відрізки $[a_n; b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, містять лише одну спільну точку.

36.7. Послідовність (a_n) складається з додатних чисел. Доведіть, що коли послідовність (b_n) із загальним членом $b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ є обмеженою, то вона є збіжною.

36.8. Доведіть збіжність послідовності:

1) $a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{2^n + 1}$;

2) $a_n = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$;

3) $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$;

4) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

36.9. Доведіть збіжність послідовності:

1) $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{7} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{3^n - 2}$;

2) $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n}$;

3) $a_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2}$;

4) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{5n}$.

36.10. Послідовність (x_n) задано рекурентним способом: $x_1 = 5$, $x_{n+1} = \sqrt{5 + x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Дослідіть на збіжність послідовність (x_n) і в разі збіжності знайдіть її границю.

36.11. Послідовність (x_n) задано рекурентним способом: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + 3x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Дослідіть на збіжність послідовність (x_n) і в разі збіжності знайдіть її границю.

36.12. Для $a > 1$ розглянемо послідовність (x_n) із загальним членом $x_n = \frac{n}{a^n}$. Знайдіть рекурентну формулу, що зв'язує x_{n+1} і x_n. Використовуючи знайдену формулу та теорему Вейєрштрасса, доведіть, що $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{a^n} = 0$.

36.13. Розглянемо послідовність (x_n) із загальним членом $x_n = \frac{a^n}{n!}$, де $a > 0$. Знайдіть рекурентну формулу, що зв'язує x_{n+1} і x_n. Використовуючи знайдену формулу та теорему Вейєрштрасса, доведіть, що $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

36.14. Послідовність задано рекурентним способом: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$, $n \in \mathbb{N}$. Чи є обмеженою послідовність (a_n)?

36.15. Послідовність задано рекурентним способом: $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \dfrac{2a_n^2 + 2na_n + 3}{n + a_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Чи є ця послідовність обмеженою?

36.16. Послідовність задано рекурентним способом: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \sqrt{\dfrac{a_n^2}{4} + 1}$, $n \in \mathbb{N}$. Чи є ця послідовність обмеженою?

36.17. Послідовність (x_n) є обмеженою. Доведіть існування такого числа x, що при кожному $\varepsilon > 0$ проміжок $(x - \varepsilon; x + \varepsilon)$ містить нескінченну кількість членів послідовності (x_n).

36.18. Послідовність (a_n) задано рекурентним способом: $a_1 \in (0; 1)$, $a_{n+1} = a_n - a_n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Покладемо $b_n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$. Доведіть, що послідовність (b_n) є збіжною і $\lim\limits_{n \to \infty} b_n < 1$.

36.19. Послідовності (a_n) і (b_n) задовольняють умови: $a_1 = 1$, $b_1 = 9$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Доведіть, що послідовності (a_n) і (b_n) збігаються та $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$.

36.20. Доведіть, що послідовність, задана формулою

$$x_n = \sqrt{1 + \sqrt[3]{2 + \sqrt[4]{3 + \sqrt[5]{\ldots + \sqrt[n+1]{n}}}}},$$

має границю.

Число Ейлера

Розглянемо послідовність із загальним членом $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ і доведемо її збіжність. Вибір цієї послідовності не є випадковим. Число, до якого прямує послідовність (x_n), є фундаментальною константою, що відіграє особливу роль не тільки в математиці, а й у фізиці, хімії, біології, економіці тощо.

Дослідимо властивості послідовностей (x_n) і (y_n), які задано формулами $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Для всіх $n \in \mathbb{N}$ *виконується нерівність* $x_n < y_n$.

Справді,

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n.$$

Послідовність (x_n) *є зростаючою.*

Достатньо довести нерівність

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \; n \in \mathbb{N}.$$

Застосуємо нерівність

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k} \geqslant \sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k}, \quad a_i \geqslant 0,$$

яку називають нерівністю Коші (рівність досягається при $a_1 = a_2 = \ldots = a_k$).

Покладемо $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1 + \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = 1$. Тоді при $k = n + 1$ маємо:

$$\frac{\overbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ldots + \left(1 + \frac{1}{n}\right)}^{n \text{ доданків}} + 1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot 1}.$$

Звідси $\dfrac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$.

Тоді $\left(\dfrac{n+1+1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$; $\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Послідовність (y_n) *є спадною.*

Доведіть це твердження самостійно, скориставшись нерівністю Коші для $k = n + 2$ і чисел $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}$, $a_{n+2} = 1$.

Послідовності (x_n) *і* (y_n) *є обмеженими.*

Цей факт випливає з нерівностей $x_1 \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant y_1, n \in \mathbb{N}$.

Отже, доведено, що (x_n) і (y_n) — монотонні й обмежені послідовності. Тому за теоремою Вейєрштрасса існують границі

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = a, \quad \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = b.$$

Якщо в рівності $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot x_n$ перейти до границі, то отримаємо:

$$b = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot \lim_{n\to\infty} x_n = 1\cdot a.$$

Таким чином, доведено, що (x_n) і (y_n) — збіжні послідовності, причому $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (або границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$) називають **числом Ейлера** та позначають буквою e. Рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ називають **другою чудовою границею**.

Можна довести, що e — число ірраціональне. Зазначимо, що при цьому всі члени послідовності (x_n) — числа раціональні.

Оскільки (x_n) — зростаюча, (y_n) — спадна послідовності, що мають спільну границю, то для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності

$$x_n < e < y_n.$$

Наведені оцінки дають можливість знайти наближене значення числа Ейлера, обчисливши x_n та y_n при «великих» значеннях n.

Наприклад, $x_{1000} = 2{,}716...$, а $y_{1000} = 2{,}719...$. Це означає, що $e = 2{,}71...$.

ПРИКЛАД Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$.

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \sqrt{e}.$$

Відповідь: $\sqrt{e}$. ◄

ВПРАВИ

36.21. Знаходячи $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, Василь Заплутайко записав: «Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1^n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$». Де помилився Василь?

36.22. Знайдіть границю:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n}\right)^n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{5n+2}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

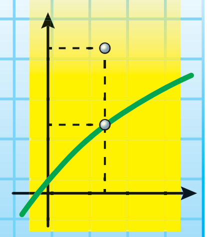
36.23. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)$.

36.24. Доведіть, що $0 < e-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \dfrac{3}{n}$. Для якого значення n треба обчислити $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, щоб отримати наближене значення числа Ейлера з точністю 10^{-4}?

36.25. Доведіть збіжність послідовності (x_n), яку задано формулою $x_n = \dfrac{e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}}{n}$.

36.26. Для всіх $n \in \mathbb{N}$ доведіть нерівності $n^n e^{-n+1} \leqslant n! \leqslant n^{n+1}e^{-n+1}$. Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

§ 6 ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ



37. Границя функції в точці

Розглянемо функції f, g, h, графіки яких зображено на рисунку 37.1, і точку x_0. Незважаючи на те що поведінка цих функцій у точці x_0 істотно різниться, усі вони мають таку властивість: якщо значення аргументу обирати все ближче й ближче до числа x_0, то відповідні значення функції все менше й менше відрізнятимуться від числа a.

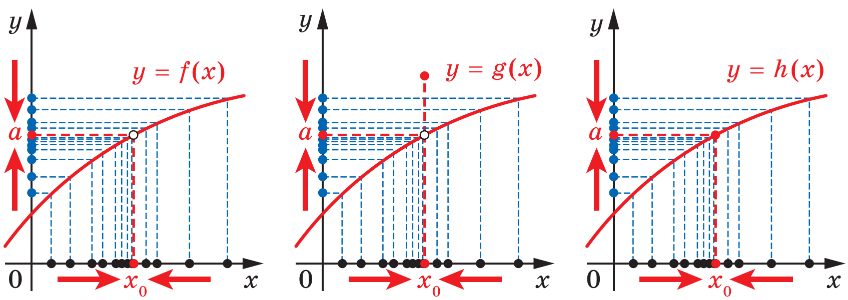


Рис. 37.1

Іншими словами, якщо довільна послідовність значень аргументу, відмінних від x_0, прямує до числа x_0, то відповідна послідовність значень функції прямує до числа a.

У такому випадку число a називають *границею функції в точці* x_0. Цей факт, наприклад, для функції $y = f(x)$ записують так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ (використовують також і запис: $f(x) \to a$ при $x \to x_0$).

Наприклад, за допомогою рисунка 37.2 можна зробити висновок, що $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$.

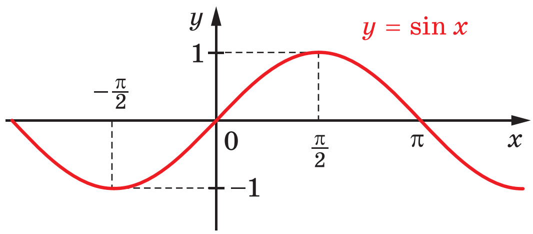


Рис. 37.2

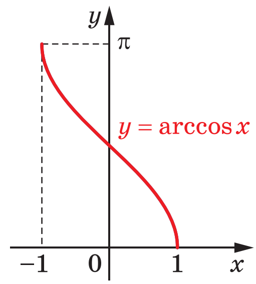


Рис. 37.3

Якщо звернутися до рисунка 37.3, то можна записати: $\lim\limits_{x \to 1} \arccos x = 0$, $\lim\limits_{x \to -1} \arccos x = \pi$.

На рисунку 37.4 зображено графік функції $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Бачимо, що $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

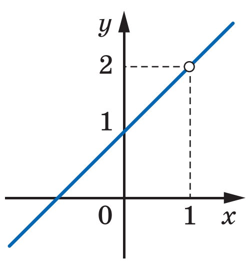


Рис. 37.4

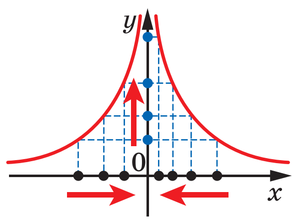


Рис. 37.5

Розглянемо функцію $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (рис. 37.5). Якщо послідовність значень аргументу x прямує до 0, то члени відповідної послідовності значень функції стають усе більшими й більшими і можуть стати як завгодно великими. Тому не існує числа, до якого прямують значення функції f за умови, що значення аргументу прямують до 0.

Отже, функція $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ не має границі в точці $x_0 = 0$.

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{|x|}{x}$. При $x > 0$ отримуємо: $f(x) = 1$, при $x < 0$ отримуємо: $f(x) = -1$. Графік функції f зображено на рисунку 37.6.

Якщо значення аргументу x, де $x \neq 0$, прямують до 0, то неможливо стверджувати, що значення функції f прямують до якогось певного числа. Справді, коли послідовність значень аргументу прямує до нуля і ці значення є від'ємними, то відповідна послідовність значень функції прямує до -1, а коли послідовність значень аргументу прямує до нуля і ці значення є додатними, то відповідна послідовність значень функції прямує до 1.

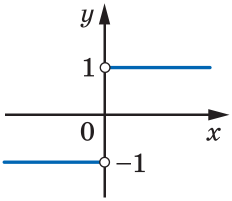


Рис. 37.6

Отже, функція $f(x) = \frac{|x|}{x}$ у точці $x_0 = 0$ не має границі.

Тепер, коли ви отримали уявлення про границю функції в точці, сформулюємо строге означення.

Розглянемо функцію f і точку x_0, для якої існує послідовність відмінних від x_0 значень аргументів, яка збігається до точки x_0. Доцільно прийняти таке означення.

Означення. **Число a називають *границею функції f у точці* x_0, якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності x_1, x_2, ..., x_n, ... значень аргументу функції f таких, що $x_n \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, відповідна послідовність $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, ... значень функції збігається до числа a.**

Зверніть увагу на умову $x_n \neq x_0$ в означенні границі. Ця умова означає, що границя функції в точці x_0 не залежить від значення $f(x_0)$, а також дозволяє функції мати границю в точці, у якій вона не визначена (прикладами є функції, графіки яких зображено на рисунку 37.1).

Також зазначимо, що збіжність послідовності $(f(x_n))$ для *будь-якої* послідовності (x_n) є істотною умовою. Якщо можна вказати хоча б одну послідовність (x_n), де $x_n \neq x_0$ і $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, для якої відповідна послідовність $(f(x_n))$ не буде збігатися до числа a, то це означатиме, що число a не є границею функції f у точці x_0.

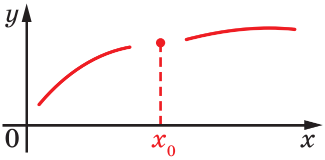


Рис. 37.7

На рисунку 37.7 зображено графік деякої функції. Для точки x_0 із області визначення не існує збіжної до x_0 послідовності відмінних від x_0 значень аргументів функції. Для таких функцій границю в точці x_0 не означають.

На рисунку 37.8 точка x_0 є такою, що праворуч (ліворуч) від неї немає точок, які належать області визначення функції f.

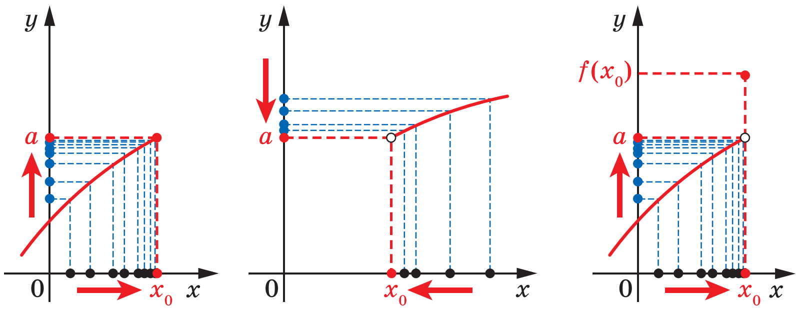


Рис. 37.8

У кожному з випадків, зображених на цьому рисунку, для будь-якої послідовності (x_n) аргументів функції f, де $x_n \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, відповідна послідовність $(f(x_n))$ значень функції прямує до числа a. Це означає, що число a є границею функції f у точці x_0.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть границю $\lim\limits_{x \to 10} \sqrt[4]{8x+1}$.

Розв'язання. Розглянемо довільну послідовність (x_n) значень аргументу функції $f(x) = \sqrt[4]{8x+1}$ таку, що $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 10$ і $x_n \neq 10$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді відповідна послідовність $(f(x_n))$ значень функції задається формулою $f(x_n) = \sqrt[4]{8x_n + 1}$. Скориставшись теоремами про арифметичні дії зі збіжними послідовностями та теоремою про границю кореня, отримуємо:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[4]{8x_n + 1} = \sqrt[4]{8 \cdot 10 + 1} = 3.$$

Оскільки послідовність (x_n) вибрано довільно, то

$$\lim_{x \to 10} \sqrt[4]{8x+1} = 3.$$ ◄

ПРИКЛАД 2 Знайдіть границю функції $y = \dfrac{9x^2 - 1}{3x - 1}$ у точці $x_0 = \dfrac{1}{3}$.

Розв'язання. Розглянемо довільну послідовність (x_n) таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{3}$ і $x_n \neq \frac{1}{3}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Тоді відповідна послідовність (y_n) значень функції задається формулою $y_n = \frac{9x_n^2 - 1}{3x_n - 1}$.

Маємо:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{9x_n^2 - 1}{3x_n - 1} = \lim_{n\to\infty} (3x_n + 1) = 3 \cdot \frac{1}{3} + 1 = 2.$$

Оскільки послідовність (x_n) вибрано довільно, то отримуємо, що $\lim\limits_{n\to\frac{1}{3}} \frac{9x^2 - 1}{3x - 1} = 2.$ ◄

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що функція $f(x) = \frac{|x|}{x}$ не має границі в точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Розглянемо послідовність значень аргументу функції f, задану формулою загального члена $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ і $x_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Послідовність відповідних значень функції задається формулою $f(x_n) = \frac{|x_n|}{x_n} = \frac{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|}{\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{1}{(-1)^n} = (-1)^n$. Ця послідовність не має границі.

Ми навели приклад збіжної до нуля послідовності (x_n), де $x_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, такої, що відповідна послідовність значень функції $(f(x_n))$ не має границі. Отже, функція f не має границі в точці $x_0 = 0$. ◄

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що функція $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ не має границі в точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Розглянемо послідовності (a_n) і (b_n) значень аргументу функції f такі, що

$$a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \quad b_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}.$$

Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ і $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Оскільки $f(a_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, то послідовність $(f(a_n))$ є стаціонарною послідовністю: 1, 1, 1, ...

Оскільки $f(b_n) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$, то послідовність $(f(b_n))$ є стаціонарною послідовністю: −1, −1, −1, ...

Маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = -1$.

Ми навели приклад двох збіжних до нуля послідовностей, члени яких відмінні від нуля. Відповідні їм послідовності значень функції f мають різні границі. Отже, функція f не має границі в точці $x_0 = 0$. ◄

Графік функції $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, побудований за допомогою комп'ютерної програми, зображено на рисунку 37.9.

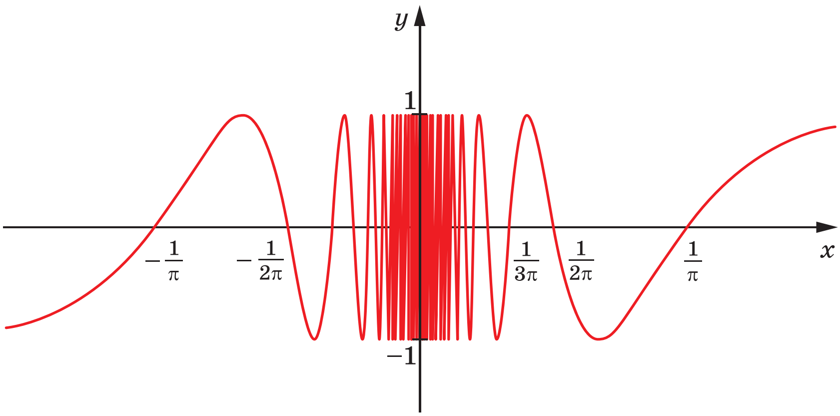


Рис. 37.9

ПРИКЛАД 5 Знайдіть границю функції $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Розглянемо довільну послідовність (x_n) таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ і $x_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Маємо:

$$-|x_n| \leqslant x_n \sin\frac{1}{x_n} \leqslant |x_n|.$$

Оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n| = 0$, то за теоремою про двох конвоїрів $\lim\limits_{n \to \infty} \left(x_n \sin \frac{1}{x_n} \right) = 0$.

Оскільки послідовність (x_n) було вибрано довільно, то це означає, що $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. ◄

Графік функції $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, побудований за допомогою комп'ютерної програми, зображено на рисунку 37.10.

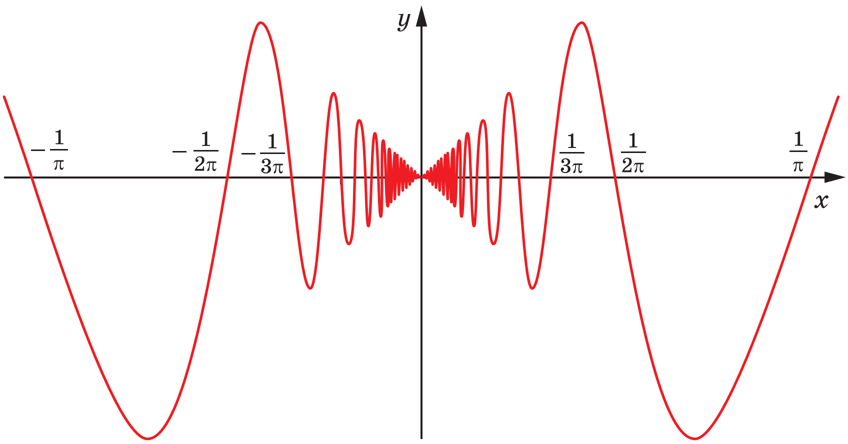


Рис. 37.10

ВПРАВИ

37.1.° Побудувавши графік функції f, укажіть (без обґрунтування), чи має функція f границю в точці x_0:

1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x_0 = 1$;
3) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, $x_0 = 2$;
4) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -2$;
5) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$;
6) $f(x) = \frac{|x - 2|}{2 - x}$, $x_0 = 2$.

37.2.° Побудувавши графік функції f, укажіть (без обґрунтування), чи має функція f границю в точці x_0:

1) $f(x) = 2x + 1$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$, $x_0 = -1$;

3) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$, $x_0 = -3$;

4) $f(x) = \frac{|x - 1|}{x - 1}$, $x_0 = 1$.

37.3.° Чи має функція, графік якої зображено на рис. 37.11, границю в точці x_0?

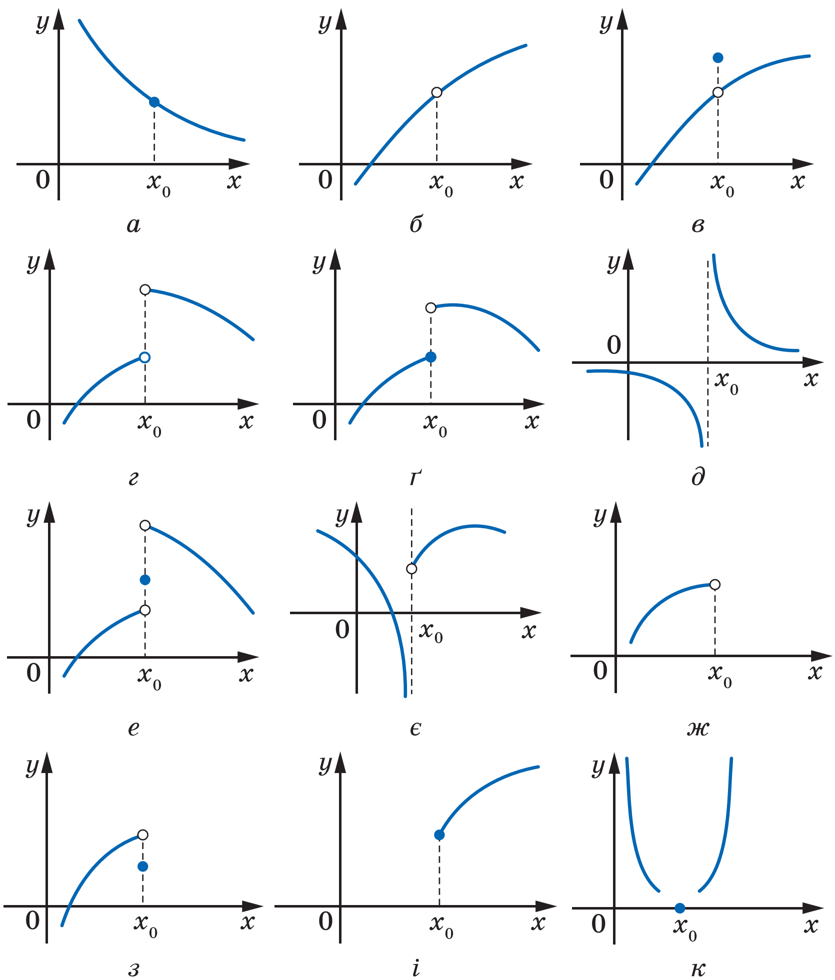


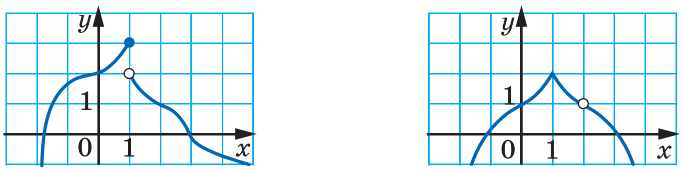
Рис. 37.11

37.4.° На рисунку 37.12 зображено графік функції $y = f(x)$.

1) Чому дорівнює значення функції f у точці $x_0 = 1$?

2) Чи існує границя функції f у точці $x_0 = 1$? У разі ствердної відповіді запишіть з використанням відповідної символіки, чому вона дорівнює.

3) Чи існує границя функції f у точці $x_0 = 2$? У разі ствердної відповіді запишіть з використанням відповідної символіки, чому вона дорівнює.



а *б*

Рис. 37.12

37.5.• За допомогою означення знайдіть границю функції в точці:

1) $\lim\limits_{x \to -1} (2x + 1)$; 2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 1}{x + 2}$; 3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$; 4) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{x^2 - x - 6}$.

37.6.• За допомогою означення знайдіть границю функції в точці:

1) $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 2)$; 2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x + 1}{x^2 + x}$; 3) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$; 4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}$.

37.7.• Визначена на $\mathbb{R}$ функція f є такою, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ для кожного $x_0 \in \mathbb{R}$. Чи можна стверджувати, що $f(x) = 0$ для кожного $x \in \mathbb{R}$?

37.8.• Доведіть, що $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$, де c — деяке число.

37.9.• Доведіть, що $\lim\limits_{x \to x_0} (kx + b) = kx_0 + b$.

37.10.• Наведіть приклад такої функції f, що:

1) $\lim\limits_{x \to 0} f(-x + 2) = -3$; 2) $\lim\limits_{x \to 2} (f(x) + \cos f(x)) = 1$.

37.11.• Наведіть приклад такої функції f, що:

1) $\lim\limits_{x \to 3} (2f(x) + 3) = 0$; 2) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)\sqrt{f^2(x) + 1} = 2$.

37.12.• Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{2x + 1}$.

37.13.° Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt[3]{5x+2}$; 2) $\lim\limits_{x \to 6} \sqrt[4]{3x-2}$.

37.14.•• Доведіть, що функція $f(x) = \dfrac{x-2}{|x-2|}$ не має границі в точці $x_0 = 2$.

37.15.•• Доведіть, що функція $f(x) = \dfrac{|x+1|}{x+1}$ не має границі в точці $x_0 = -1$.

37.16.•• Доведіть, що функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ не має границі в точці $x_0 = 0$.

37.17.•• Доведіть, що функція $f(x) = \cos\dfrac{1}{x}$ не має границі в точці $x_0 = 0$.

37.18.•• Доведіть, що функція Діріхле $\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ не має границі в жодній точці.

37.19.•• Доведіть, що $\lim\limits_{x \to 0} x \cos\dfrac{1}{x} = 0$.

37.20.•• Доведіть, що $\lim\limits_{x \to 0} x\,\mathfrak{D}(x) = 0$, де $\mathfrak{D}(x)$ — функція Діріхле.

37.21.•• Функція f є такою, що $D(f) = \mathbb{Q}$ і $f(x) = 1$ для будь-якого $x \in \mathbb{Q}$. Чи має функція f границю в точці: 1) $x_0 = 0$; 2) $x_0 = \sqrt{2}$?

37.22.•• Функція f визначена на $\mathbb{R}$ і $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

37.23.•• Функція f визначена на $\mathbb{R}$ і $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)$.

37.24.* Чи існує функція f така, що $D(f) = \mathbb{R}$ і функція f не має границі в жодній точці $x_0 \in \mathbb{R}$, але при цьому функція $y = \sin f(x)$ має границю в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$?

37.25.* Відомо, що функція $y = |f(x)|$ має границю в кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$. Чи можна стверджувати, що функція $y = f(x)$ має границю хоча б в одній точці $x_0 \in \mathbb{R}$?

37.26.* Чи існує така функція f, що $f(x) > 0$ для всіх $x \in D(f)$ і для всіх $p \in \mathbb{N}$ справджується рівність $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^p} = 0$?

37.27.* Про визначену на $\mathbb{R}$ функцію f відомо, що для довільного $x \in \mathbb{R}$ послідовність (y_n), де $y_n = f\left(\frac{x}{n}\right)$, прямує до нуля. Чи обов'язково $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$?

Означення границі функції в точці за Коші

Означення, наведене в п. 37, називають означенням границі функції в точці за Гейне[1]. Проте можна ввести поняття границі функції в точці іншим способом, не використовуючи границю послідовності.

На рисунку 37.13 зображено графік функції f і на осях абсцис та ординат позначено відповідно точки x_0 і a, де $a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Зазначимо, що $f(x_0) \neq a$.

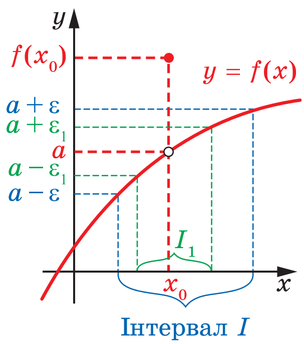


Рис. 37.13

Нехай ε — деяке додатне число. На осі ординат розглянемо інтервал $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$. На осі абсцис йому відповідає такий інтервал I, який містить точку x_0, що для будь-якого $x \in I \cap D(f)$, $x \neq x_0$, відповідні значення функції f належать проміжку $(a - \varepsilon;\ a + \varepsilon)$, тобто виконуються нерівності $a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$. Іншими словами, для будь-якого $x \in I \cap D(f)$, $x \neq x_0$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Звузимо проміжок на осі ординат, тобто розглянемо інтервал $(a - \varepsilon_1;\ a + \varepsilon_1)$, де $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Тоді для числа ε_1 можна вказати такий інтервал I_1 осі абсцис, який містить точку x_0, що для будь-якого $x \in I_1 \cap D(f)$, $x \neq x_0$, виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon_1$ (рис. 37.13).

[1] Гейне, Генріх Едуард (1821–1881) — німецький математик, член-кореспондент Прусської і Ґеттингенської академій наук. Основні його здобутки — у галузі теорії функцій, математичної фізики.

На рисунку 37.14 зображено графік такої функції f, що $x_0 \notin D(f)$. Рисунок 37.15 відповідає функції f, для якої $f(x_0) = a$.

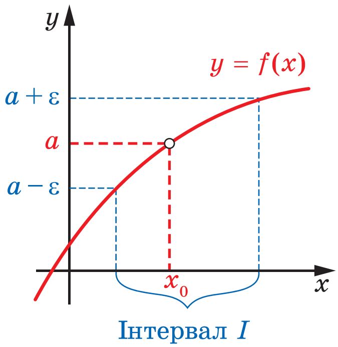


Рис. 37.14

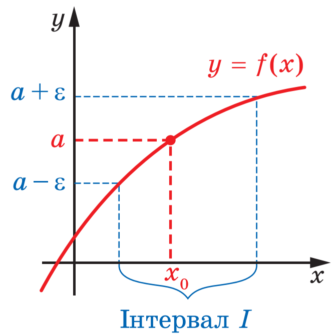


Рис. 37.15

У кожному з випадків, зображених на рисунках 37.13–37.15, для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати такий інтервал I, який містить точку x_0, що для всіх $x \in I \cap D(f)$ і $x \neq x_0$ виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Наведені міркування дозволяють дати таке означення границі функції f у точці x_0.

Означення. Число a називають границею функції f у точці x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий інтервал I, який містить точку x_0, що для будь-якого $x \in I \cap D(f)$ і $x \neq x_0$ виконується нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.

У цьому означенні розглядають такі функції f і точки x_0, що для будь-якого інтервалу I, який містить точку x_0, множина $(I \cap D(f)) \setminus \{x_0\}$ не є порожньою. Наприклад, для функції, графік якої зображено на рисунку 37.7, границю в точці x_0 не означають.

Якщо інтервал I містить точку x_0, то існує таке додатне число δ, що проміжок $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ належить I (рис. 37.16).

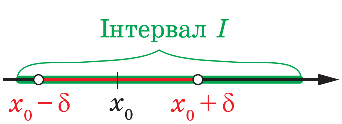


Рис. 37.16

Тоді, якщо точка x_0 належить інтервалу I, то цей інтервал містить множину, яка є розв'язком подвійної нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, де δ — деяке додатне число.

Тепер наведене означення границі функції f у точці можна переформулювати так.

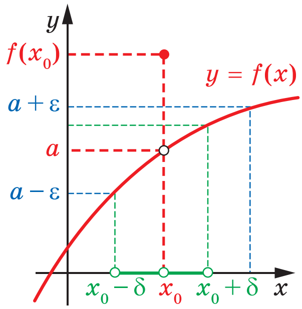


Рис. 37.17

Означення (Коші). **Число a називають границею функції f у точці x_0, якщо для будь-якого додатного числа ε існує таке додатне число δ, що для всіх $x \in D(f)$ з нерівностей $0 < |x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - a| < \varepsilon$.**

Рисунок 37.17 ілюструє це означення.

ПРИКЛАД 1 За допомогою означення Коші границі функції в точці доведіть, що $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 3) = 5$.

Розв'язання. Для кожного додатного числа ε розглянемо нерівність $|(2x + 3) - 5| < \varepsilon$. Перетворивши її, запишемо: $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$. Отримана нерівність підказує, яким чином для даного $\varepsilon > 0$ можна знайти потрібне число $\delta > 0$.

Нехай $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді з умови $0 < |x - 1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ випливає, що $|2x - 2| < \varepsilon$. Звідси $|(2x + 3) - 5| < \varepsilon$. Сказане означає, що число $a = 5$ є границею функції $y = 2x + 3$ в точці $x_0 = 1$. ◄

ПРИКЛАД 2 Використовуючи означення Коші границі функції в точці, доведіть, що функція $f(x) = \frac{|x|}{x}$ не має границі в точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Припустимо, що границя функції f у точці $x_0 = 0$ існує і дорівнює a. Покажемо, що, наприклад, для $\varepsilon = 1$ неможливо підібрати таке $\delta > 0$, щоб з нерівностей $0 < |x - 0| < \delta$ випливала нерівність $\left|\frac{|x|}{x} - a\right| < 1$.

Якщо $0 < x < \delta$, то нерівність $\left|\frac{|x|}{x} - a\right| < 1$ набуває вигляду $|1 - a| < 1$. Звідси $0 < a < 2$.

Якщо $-\delta < x < 0$, то нерівність $\left|\frac{|x|}{x} - a\right| < 1$ набуває вигляду $|-1 - a| < 1$. Звідси $-2 < a < 0$.

Оскільки не існує значень a, які б задовольняли кожну з нерівностей $0 < a < 2$ і $-2 < a < 0$, то функція f у точці $x_0 = 0$ не має границі. ◄

38. Теореми про арифметичні дії з границями функцій у точці

Вивчаючи границю функції у точці, будемо використовувати такі поняття.

Означення. **Проміжок виду $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, де $\delta>0$, називають** **δ-околом точки x_0.**

Означення. **Множину виду $(x_0-\delta; x_0)\cup(x_0; x_0+\delta)$, де $\delta>0$, називають** **проколотим δ-околом точки x_0.**

Поняття δ-околу та проколотого δ-околу точки x_0 проілюстровано на рисунках 38.1 38.2 відповідно.

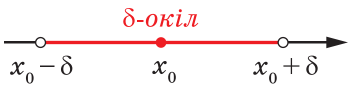


Рис. 38.1

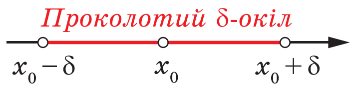


Рис. 38.2

У попередньому пункті ви навчилися обчислювати границю функції в точці за допомогою означення. Полегшити процес пошуку границі дають змогу теореми про границю суми, добутку й частки двох функцій.

У теоремах 38.1–38.3 будемо розглядати функції, що визначені в одних і тих самих точках деякого проколотого δ-околу точки x_0.

Теорема 38.1 (границя суми). ***Якщо функції f і g мають границю в точці x_0, то функція $y=f(x)+g(x)$ також має границю в точці x_0, причому***

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x).$$

Доведення. Позначимо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$. Нехай (x_n) — довільна збіжна до x_0 послідовність значень аргументу функцій f і g, де $x_n\neq x_0$ для всіх $n\in\mathbb{N}$. Тоді відповідні послідовності $(f(x_n))$ і $(g(x_n))$ значень функцій є збіжними до чисел a і b відповідно. За теоремою 34.1 послідовність $(f(x_n)+g(x_n))$ також є збіжною, причому $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n))=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)+\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=a+b$. Оскільки послідовність (x_n) було вибрано довільно, то це означає, що

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)+\lim_{x\to x_0}g(x). \blacktriangleleft$$

Розглянемо функції $f(x) = \sqrt{x}$ і $g(x) = \sqrt{-x}$. Кожна із цих функцій має границю в точці $x_0 = 0$. Проте функція $y = f(x) + g(x)$ визначена лише в точці $x_0 = 0$ і тому не має границі в цій точці. Цей приклад показує важливість вимоги того, що функції f і g мають бути визначені в одних і тих самих точках деякого проколотого δ-околу точки x_0.

Теорема 38.1 залишається справедливою для будь-якої скінченної кількості доданків. Цей факт можна довести за допомогою методу математичної індукції.

Теорема 38.2 (границя добутку). ***Якщо функції f і g мають границю в точці x_0, то функція $y = f(x)\,g(x)$ також має границю в точці x_0, причому***

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)\,g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Скориставшись ідеєю доведення теореми 38.1, доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 38.2 залишається справедливою для будь-якої скінченної кількості множників.

Наслідок. ***Якщо функція f має границю в точці x_0 і k — довільна стала, то функція $y = kf(x)$ також має границю в точці x_0, причому***

$$\lim_{x \to x_0} kf(x) = k \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Справедливість наслідку випливає з теореми про границю добутку.

Теорема 38.3 (границя частки). ***Якщо функції f і g мають границю в точці x_0, причому границя функції g відмінна від нуля, то функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також має границю в точці x_0, причому***

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}.$$

Скориставшись ідеєю доведення теореми 38.1, доведіть цю теорему самостійно.

Зазначимо, що теореми про арифметичні дії з границями функцій у точці є аналогами відповідних теорем для збіжних послідовностей. Така відповідність не обмежується лише теоремами 38.1–38.3. Прочитавши умови вправ 38.11–38.14, ви впізнаєте аналоги інших властивостей збіжних послідовностей.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = x_0^2$.

Розв'язання. З ключової задачі 37.9 випливає, що $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$. Тоді, якщо функцію $y = x^2$ подати у вигляді $y = x \cdot x$, то можна застосувати теорему про границю добутку. Маємо:

$$\lim_{x \to x_0} x^2 = \lim_{x \to x_0} (x \cdot x) = \lim_{x \to x_0} x \cdot \lim_{x \to x_0} x = x_0^2. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 4) = \lim\limits_{x \to 2} x^2 - \lim\limits_{x \to 2} 4 = 2^2 - 4 = 0$, то не можна застосувати теорему про границю частки до функції $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$. Перетворимо вираз $\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$. Маємо:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}, \text{ де } x \neq 2 \text{ і } x \neq -2.$$

Розглянемо функцію $g(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$. Оскільки $f(x) = g(x)$ при всіх $x \neq 2$, то $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} g(x)$. Використовуючи теореми про арифметичні дії з границями функцій, отримуємо:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x+2} = \frac{\lim\limits_{x \to 2} (x-3)}{\lim\limits_{x \to 2} (x+2)} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}. \quad \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 3 Знайдіть $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$, де $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, \text{ якщо } x \neq \dfrac{1}{2}, \\ 3, \quad \text{якщо } x = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

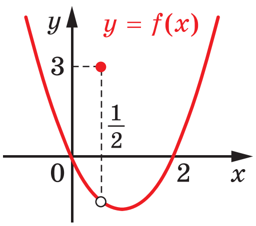


Рис. 38.3

Розв'язання. Розглянемо функцію $g(x) = x^2 - 2x$. Оскільки в будь-якому проколотому δ-околі точки $x_0 = \dfrac{1}{2}$ функції f і g збігаються (рис. 38.3), то $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} g(x)$. Тому достатньо знайти $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (x^2 - 2x)$. Використовуючи теореми про арифметичні дії з границями функцій, запишемо:

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} (x^2 - 2x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}} x^2 - \lim_{x \to \frac{1}{2}} 2x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{4}. \quad \blacktriangleleft$$

ВПРАВИ

38.1.° Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 - 3x - 1)$;
2) $\lim\limits_{x \to -1} x^4$;
3) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 3x - 2)$;
4) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x-1}{3x-2}$;
5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x^2 + 2x - 1}$;
6) $\lim\limits_{x \to -2} \left(x^2 - \dfrac{1}{x} + 2x - 3\right)$.

38.2.° Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x \to 1} (2x^2 + 3x + 5)$;
2) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 3x^2 + 2x + 2)$;
3) $\lim\limits_{x \to -2} (2x^3 - 3x^2 + 6)$;
4) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{7x-5}{10+2x}$;
5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$;
6) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 + 1}{(x-2)^{20}}$.

38.3.• Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$;
2) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x - 2}{x^3 - 8}$;
3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^4 - 5x^2 - 12x - 4}{x^2 - 4}$;
4) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^5 + 1}{x + 1}$.

38.4.• Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$;
2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 3x + 2}{x^5 - 4x + 3}$;
3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^4 - (1+4x)}{x^2 + x^4}$;
4) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$.

38.5.• Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$;
2) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2}{x^2 - 2x} - \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}\right)$.

38.6.• Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x \to -3} \left(\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{6}{x^2 - 9}\right)$;
2) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2}{2x^2 - 5x + 2} + \dfrac{x-4}{3(x^2 - 3x + 2)}\right)$.

38.7.• Нехай $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$. Знайдіть границю функції $y = (f(x) + 1)^2$ у точці $x_0 = 0$.

38.8.• Нехай $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = -1$. Знайдіть границю функції $y = \dfrac{xf(x) + 1}{x^2 + 5}$ у точці $x_0 = 3$.

38.9.• Знайдіть $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, де $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, \text{ якщо } x \neq 0, \\ -1, \qquad \text{якщо } x = 0. \end{cases}$

38.10.• Знайдіть $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$, де $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x, \text{ якщо } x \neq 3, \\ 2, \qquad \text{якщо } x = 3. \end{cases}$

38.11.• Про функцію f відомо, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ і $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$. Доведіть, що $a = b$.

38.12.• Доведіть, що число a є границею функції f у точці x_0 тоді й тільки тоді, коли функцію f можна подати у вигляді $f(x) = a + \beta(x)$, де β — така функція, що $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$.

38.13.• Функції f і g такі, що $f(x) \leqslant g(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, причому існують границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Доведіть, що $a \leqslant b$.

38.14.• Функції f, g і h такі, що $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, причому існують границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = a$. Доведіть, що функція g також має границю в точці x_0, причому $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = a$.

38.15.•• Наведіть приклад такої функції f, щоб мала місце рівність:

1) $\lim\limits_{x \to 1} (x + 2f(x)) = 4$; 2) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2f(x) - 3x}{x + f(x)} = 2$.

38.16.•• Наведіть приклад такої функції f, щоб мала місце рівність:

1) $\lim\limits_{x \to 0} xf(x) = 2$; 2) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{x - 3} = 5$.

38.17.•• Знайдіть $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^m + 1}{x^n + 1}$, де m і n — непарні натуральні числа.

38.18.•• Знайдіть $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$, де m і n — натуральні числа.

38.19.•• Функції f і g визначені на $\mathbb{R}$. Чи може функція $h(x) = f(x) + g(x)$ мати границю в точці x_0, якщо:

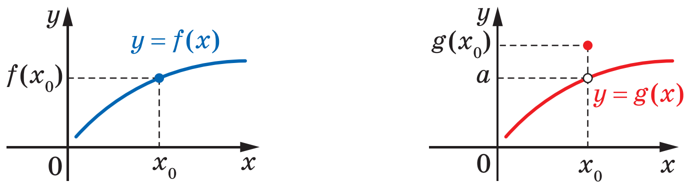
1) функція f має границю в точці x_0, а функція g не має границі в точці x_0;
2) функції f і g не мають границь у точці x_0?

38.20.•• Функції f і g визначені на $\mathbb{R}$. Чи може функція $h(x) = f(x)\, g(x)$ мати границю в точці x_0, якщо:

1) функція f має границю в точці x_0, а функція g не має границі в точці x_0;
2) функції f і g не мають границі в точці x_0?

39. Неперервність функції в точці

На рисунку 39.1 зображено графіки функцій f і g, які визначені в точці x_0. Проте поведінка цих функцій у точці x_0 істотно різниться. Графік функції g, на відміну від графіка функції f, у точці x_0 має *розрив*. Таку відмінність поведінки функцій f і g у точці x_0 можна охарактеризувати за допомогою границі.



а *б*

Рис. 39.1

Означення. Функцію f називають неперервною в точці x_0, якщо для будь-якої збіжної до x_0 послідовності $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ значень аргументу функції f відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ значень функції збігається до числа $f(x_0)$.

Так, якщо для функції f (рис. 39.1, *а*) вибрати довільну збіжну до x_0 послідовність $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ значень аргументу функції, то відповідна послідовність $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ значень функції збігається до числа $f(x_0)$. Таким чином, функція f є неперервною в точці x_0.

Разом з тим функція g (рис. 39.1, *б*) не є неперервною в точці x_0. Справді, якщо вибрати збіжну до x_0 послідовність $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ значень аргументу функції таку, що $x_n \neq x_0$ при всіх $n \in \mathbb{N}$, то відповідна послідовність $g(x_1), g(x_2), ..., g(x_n), ...$ значень функції збігається до числа a, яке не дорівнює $g(x_0)$.

Наведемо ще один приклад. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x-1}$ і точку $x_0 \in D(f)$. Оскільки для будь-якої збіжної до x_0 послідовності (x_n) аргументів функції f маємо

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{x_n - 1} = \sqrt{x_0 - 1} = f(x_0),$$

то функція f є неперервною в кожній точці $x_0 \in D(f)$, зокрема в точці $x_0 = 1$.

Зауважимо, що в означенні неперервності функції в точці порівняно з означенням границі функції в точці знято обмеження $x_n \neq x_0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Отже, послідовність (x_n) може містити будь-яку кількість членів, рівних x_0, і навіть складатися лише із членів, рівних x_0.

Наприклад, функція $g(x) = \sqrt{-x^2}$ визначена лише в точці $x_0 = 0$. Тому існує єдина послідовність (x_n) значень аргументу функції g: x_0, x_0, x_0, ... Тоді всі члени послідовності $(g(x_n))$ дорівнюють нулю, а тому $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = g(x_0)$. Це означає, що функція g є неперервною в точці $x_0 = 0$.

Так само неперервною в точці x_0 є функція, графік якої зображено на рисунку 39.2.

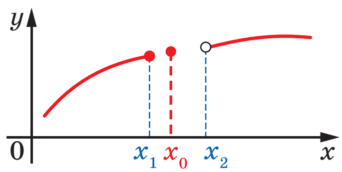


Рис. 39.2

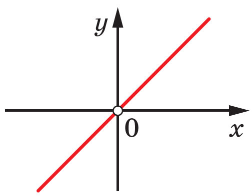


Рис. 39.3

Зауважимо, що коли функція f не визначена в точці x_0, то вона не є неперервною в цій точці. Наприклад, функція $f(x) = \frac{x^2}{x}$ не є неперервною в точці $x_0 = 0$ (рис. 39.3).

Неперервність функції в точці можна також установити, використовуючи поняття границі функції в точці.

Теорема 39.1. ***Нехай функція f визначена хоча б на одному з проміжків $(x_0 - \delta;\ x_0]$ або $[x_0;\ x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$. Тоді функція f неперервна в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Наприклад, для функції $f(x) = x^2 + x$ можна записати:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (x^2 + x) = \lim_{x \to x_0} x^2 + \lim_{x \to x_0} x = x_0^2 + x_0 = f(x_0).$$

Тому функція f неперервна в будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}$.

Якщо функція f визначена хоча б на одному з проміжків $(x_0 - \delta; x_0]$ або $[x_0; x_0 + \delta)$, де $\delta > 0$, то з теореми 39.1 випливає, що умову неперервності функції в цій точці можна виразити рівністю $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$.

Вище ми з'ясували, що функція g, графік якої зображено на рисунку 39.1, *б*), не є неперервною в точці x_0. Говорять, що точка x_0 є **точкою розриву** функції g. Наприклад, кожна точка виду $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$, є точкою розриву функції $y = \{x\}$ (рис. 39.4).

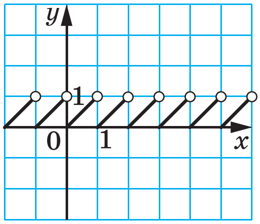


Рис. 39.4

Ефективним методом для доведення неперервності функції в точці є використання такої теореми.

Теорема 39.2 (про арифметичні дії з неперервними функціями). ***Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервними є і функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)\,g(x)$ і $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (остання за умови, що $g(x_0) \neq 0$).***

Доведення теореми проведемо лише для функції $y = f(x) + g(x)$ (для інших функцій доведіть теорему самостійно). Розглянемо довільну збіжну до x_0 послідовність (x_n) аргументів функції $y = f(x) + g(x)$. Оскільки функції f і g є неперервними в точці x_0, то $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$ і $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = g(x_0)$.

Використовуючи теорему про границю суми збіжних послідовностей, маємо, що $\lim\limits_{n \to \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = f(x_0) + g(x_0)$. Це означає, що функція $y = f(x) + g(x)$ є неперервною в точці x_0. ◄

Фактично теорема 39.2 складається з трьох теорем, які називають теоремами про неперервність суми, неперервність добутку та неперервність частки.

Використовуючи теорему про арифметичні дії з неперервними функціями, маємо, що кожна з функцій $y = f(x)$ і $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$, $g(x)$ — многочлени, є неперервною в кожній точці області визначення.

Якщо функція f є неперервною в кожній точці деякої множини $M \subset \mathbb{R}$, то говорять, що **вона неперервна на множині** M.

Якщо функція f є неперервною на множині $D(f)$, то таку функцію називають **неперервною**. Наприклад, функція $y = \dfrac{1}{x}$ є неперервною на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Тому $y = \dfrac{1}{x}$ —

неперервна функція. Узагалі, кожна раціональна функція[1] є неперервною. Функція, графік якої зображено на рисунку 39.2, також є неперервною.

Доведемо, що функція $y = \sin x$ є неперервною.

Лема 39.1. ***Для будь-якого*** $x \in \mathbb{R}$ ***виконується нерівність*** $|\sin x| \leqslant |x|$.

Доведення. Якщо $x = 0$ або $|x| \geqslant 1$, то нерівність, яка доводиться, є очевидною.

Нехай $x \in (0; 1)$. На рисунку 39.5 точку P_x отримано в результаті повороту точки $P_0\,(1; 0)$ навколо початку координат на кут x радіан. Оскільки $x \in (0; 1)$, то $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Тому точка P_x знаходиться в першій чверті.

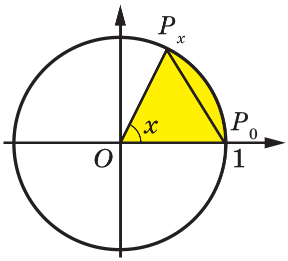


Рис. 39.5

Площа трикутника P_xOP_0 менша від площі сектора P_xOP_0 (рис. 39.5). Маємо:

$$S_{\Delta P_xOP_0} = \frac{1}{2}OP_0^2 \sin x = \frac{1}{2}\sin x;$$

$$S_{\text{сект}\,P_xOP_0} = \frac{1}{2}OP_0^2 x = \frac{1}{2}x.$$

Тоді $\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x$. Отримуємо: $\sin x < x$.

Нехай $x \in (-1; 0)$. Тоді $-x \in (0; 1)$. Можна записати: $\sin(-x) < -x$. Звідси $\sin x > x$.

Отже, якщо $x \in (0; 1)$, то $0 < \sin x < x$. Тому $|\sin x| < |x|$;
якщо $x \in (-1; 0)$, то $0 > \sin x > x$. Тому $|\sin x| < |x|$. ◄

Лема 39.2. ***Для будь-яких*** $x \in \mathbb{R}$ ***і*** $x_0 \in \mathbb{R}$ ***виконується нерівність*** $|\sin x - \sin x_0| \leqslant |x - x_0|$.

Доведення. Маємо:

$$|\sin x - \sin x_0| = \left|2\sin\frac{x - x_0}{2}\cos\frac{x + x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right|.$$

З леми 39.1 випливає, що $\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant \left|\frac{x - x_0}{2}\right|$. Тому можна записати:

$$|\sin x - \sin x_0| \leqslant 2\left|\sin\frac{x - x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| = |x - x_0|. \text{ ◄}$$

[1] Функцію виду $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ і $g(x)$ — многочлени, називають **раціональною**.

Теорема 39.3. ***Функція $y = \sin x$ неперервна на $\mathbb{R}$.***

Доведення. Установимо неперервність функції $y = \sin x$ у кожній точці $x_0 \in \mathbb{R}$. Нехай (x_n) — довільна послідовність така, що $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Тоді $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n - x_0| = 0$. Згідно з лемою 39.2

$$-|x_n - x_0| \leqslant \sin x_n - \sin x_0 \leqslant |x_n - x_0|.$$

За теоремою про двох конвоїрів отримуємо:

$$\lim_{n \to \infty} (\sin x_n - \sin x_0) = 0.$$

Звідси $\lim\limits_{n \to \infty} \sin x_n = \sin x_0$. Оскільки послідовність (x_n) вибрано довільно, то це означає, що функція $y = \sin x$ є неперервною. ◄

Теорема 39.4. ***Функція $y = \cos x$ неперервна на $\mathbb{R}$.***

Скориставшись рівністю $\cos x - \cos x_0 = -2\sin\frac{x - x_0}{2}\sin\frac{x + x_0}{2}$ та ідеєю доведення теореми 39.3, доведіть цю теорему самостійно.

Оскільки функції $y = \sin x$ і $y = \cos x$ неперервні, то з теореми про неперервність частки випливає, що функції $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ також є неперервними.

Ви знаєте, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Вони є рівними фігурами, а отже, мають багато однакових геометричних властивостей. Має місце таке твердження: якщо оборотна функція f визначена на деякому проміжку та є неперервною, то обернена до неї функція g також буде неперервною[1].

Як було встановлено вище, функція $y = x^2$ є неперервною. Тоді й оборотна функція $f(x) = x^2$, $D(f) = [0; +\infty)$, є неперервною. Отже, обернена до неї функція $g(x) = \sqrt{x}$ також є неперервною.

Міркуючи аналогічно, доходимо висновку, що функція $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, є неперервною. Так само встановлюємо, що неперервними є і функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$.

Теорема 39.5 (про неперервність складеної функції). ***Якщо функція $t = g(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y = f(t)$ неперервна в точці t_0, де $t_0 = g(x_0)$, то складена функція $y = f(g(x))$ є неперервною в точці x_0.***

---

[1] Доведення цього факту виходить за межі навчальної програми. Задача 39.34 показує суттєвість того, що областю визначення функції f є деякий проміжок.

Доведення. Нехай (x_n) — довільна послідовність значень аргументу функції $y = f(g(x))$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Позначимо $t_n = g(x_n)$ і $y_n = f(t_n) = f(g(x_n))$.

Оскільки функція g є неперервною в точці x_0, то послідовність $(g(x_n))$, тобто послідовність (t_n), збігається до числа $t_0 = g(x_0)$. Оскільки функція f є неперервною в точці t_0 і послідовність (t_n) збігається до числа t_0, то послідовність $(f(t_n))$, тобто послідовність (y_n), збігається до числа $f(t_0) = f(g(x_0))$.

Отже, ми показали, що для будь-якої збіжної до x_0 послідовності (x_n) значень аргументу функції $y = f(g(x))$ відповідна послідовність (y_n) значень функції збігається до числа $f(g(x_0))$. Тому функція $y = f(g(x))$ є неперервною в точці x_0. ◄

Наприклад, функція $t = 2x - 1$ неперервна в точці $x_0 = 5$, функція $y = \sqrt{t}$ неперервна в точці $t_0 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$. Тоді складена функція $y = \sqrt{2x-1}$ є неперервною в точці $x_0 = 5$. Міркуючи аналогічно, можна показати, що складена функція $y = \sqrt{2x-1}$ є неперервною в кожній точці своєї області визначення.

Ще приклади. Функції $y = \sin x$ і $y = 5x$ є неперервними. Тоді складена функція $y = \sin 5x$ також неперервна.

Кожна з функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = x^2$ є неперервною. Тоді складена функція $y = \sqrt{x^2}$, тобто функція $y = |x|$, також є неперервною.

ПРИКЛАД 1 Обчисліть $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = \sqrt{2x+1} - 3$ є неперервною, то $\lim\limits_{x\to 4}\left(\sqrt{2x+1}-3\right) = \sqrt{2\cdot 4+1} - 3 = 0$. Отже, застосувати теорему про границю частки не можна.

Перетворимо дріб, який стоїть під знаком границі:

$$\frac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3} = \frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)} = \frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(2x+1)-9} =$$

$$= \frac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{2(x-4)} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1}+3\right).$$

Оскільки функція $g(x) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1}+3\right)$ є неперервною, то можна записати: $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2x+1}+3\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2\cdot 4+1}+3\right) = 3$.

Відповідь: 3. ◄

ПРИКЛАД 2 Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-a^2}, \text{ якщо } x\neq 1 \text{ і } x\neq a^2,\\ a^2+a, \text{ якщо } x=1\end{cases}$ є неперервною в точці $x_0=1$.

Розв'язання. Розглянемо випадок, коли $a^2\neq 1$. Тоді $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-a^2}=0$. Для того щоб функція f була неперервною в точці $x_0=1$, потрібно, щоб $f(1)=a^2+a=0$. Звідси $a=0$ або $a=-1$. Умову $a^2\neq 1$ задовольняє лише $a=0$.

Якщо $a^2=1$, то маємо: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$. Тоді значення a, які задовольняють умову, знайдемо із системи $\begin{cases}a^2=1,\\ a^2+a=2.\end{cases}$ Звідси $a=1$.

Відповідь: $a=0$ або $a=1$. ◄

ПРИКЛАД 3 Чи існує функція, яка визначена на $\mathbb{R}$ і неперервна рівно в одній точці?

Розв'язання

Покажемо, що функція $f(x)=x\mathfrak{D}(x)=\begin{cases}x, \text{ якщо } x\in\mathbb{Q},\\ 0, \text{ якщо } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$ є неперервною лише в точці $x_0=0$.

Нехай (x_n) — довільна послідовність значень аргументу функції f така, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$. Оскільки значення $f(x_n)$ дорівнює або 0 (якщо x_n — ірраціональне число), або x_n (якщо x_n — раціональне число), то $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$. Сказане означає, що функція f є неперервною в точці $x_0=0$.

Покажемо, що в будь-якій точці x_0, відмінній від 0, функція $f(x)$ не є неперервною.

Нехай $x_0\neq 0$ і $x_0\in\mathbb{Q}$. Тоді $f(x_0)=x_0\neq 0$. Розглянемо послідовність (x_n), яка складається тільки з ірраціональних чисел, таку, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$. Тоді всі члени послідовності $(f(x_n))$ дорівнюють нулю, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0\neq f(x_0)$. Отже, функція f не є неперервною в точці x_0.

Нехай $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тоді $f(x_0) = 0 \neq x_0$. Розглянемо послідовність (x_n), яка складається тільки з раціональних чисел, таку, що $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Тоді $f(x_n) = x_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Маємо: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \neq f(x_0)$. Отже, функція f не є неперервною в точці x_0. ◄

ВПРАВИ

39.1.° Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x \to 9} \sqrt{x}$;
2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \sin x$;
3) $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{4}} \operatorname{tg} x$;
4) $\lim\limits_{x \to 0} \arcsin x$;
5) $\lim\limits_{x \to 1} \operatorname{arctg} x$.

39.2.° Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x}$;
2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x$;
3) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x$;
4) $\lim\limits_{x \to 0} \arccos x$;
5) $\lim\limits_{x \to -1} \operatorname{arcctg} x$.

39.3.° Доведіть неперервність функції:

1) $f(x) = \sqrt{x} + 3$;
2) $f(x) = \sqrt{x} - x^2$;
3) $f(x) = \sqrt{5x + 2}$;
4) $f(x) = \sqrt{x} \sin x$;
5) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

39.4.° Доведіть неперервність функції:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$;
2) $f(x) = \sin x + \operatorname{ctg} x$;
3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\cos x}$;
4) $f(x) = \operatorname{ctg} 5x$.

39.5.° Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{2x - 1}$;
2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin 3x$;
3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{5}} \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{5}\right)$;
4) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \cos^2 x$.

39.6.° Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{1 - 3x}$;
2) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \cos 4x$;
3) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} + 1}{x}$;
4) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{ctg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

39.7.• Чи є неперервною в точці x_0 функція:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & \text{якщо } x\neq 3,\\ 6, & \text{якщо } x=3,\end{cases}$ $x_0=3$;

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{\cos x}, & \text{якщо } x\neq \dfrac{\pi}{2},\\ 1, & \text{якщо } x=\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ $x_0=\dfrac{\pi}{2}$?

39.8.• Чи є неперервною в точці x_0 функція:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{x+1}, & \text{якщо } x\neq -1,\\ 0, & \text{якщо } x=-1,\end{cases}$ $x_0=-1$;

2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{\sin x}, & \text{якщо } x\neq \pi,\\ -2, & \text{якщо } x=\pi,\end{cases}$ $x_0=\pi$?

39.9.• Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

39.10.• Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sqrt{x}-3x}{3\sqrt{x}-2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{1-\sqrt{x}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

39.11.• Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$;

2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2+x}{1-\sqrt{x^2-3}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$.

39.12.• Обчисліть:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

39.13.• Доведіть, що функція Діріхле не є неперервною в жодній точці області визначення.

39.14.• Про неперервну на $\mathbb{R}$ функцію f відомо, що

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{5n^2+1}{(3n-1)(n+1)},\ n\in\mathbb{N}.$$

Знайдіть значення $f(0)$.

39.15.• Про неперервну на $\mathbb{R}$ функцію f відомо, що

$$f\left(\frac{2+n^2}{n^2+n}\right)=\frac{-n+2}{4n-1},\ n\in\mathbb{N}.$$

Знайдіть значення $f(1)$.

39.16.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ a, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$ є неперервною в точці $x_0=0$.

39.17.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\begin{cases} a\cos\frac{1}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ a^2-4a, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$ є неперервною в точці $x_0=0$.

39.18.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\begin{cases} \frac{(a^2-1)|x|}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ a^2+a, & \text{якщо } x=0,\end{cases}$ є неперервною в точці $x_0=0$.

39.19.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4}{x-a}, & \text{якщо } x\neq 2 \text{ і } x\neq a,\\ a^2+3a, & \text{якщо } x=2,\end{cases}$ є неперервною в точці $x_0=2$.

39.20.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-16}{x-a^2}, & \text{якщо } x\neq 4 \text{ і } x\neq a^2,\\ a^2+2a, & \text{якщо } x=4,\end{cases}$ є неперервною в точці $x_0=4$.

39.21.•• Функції f і g визначені на $\mathbb{R}$. Чи може функція $h(x)=f(x)+g(x)$ бути неперервною в точці x_0, якщо:

1) функція f є неперервною в точці x_0, а функція g не є неперервною в точці x_0;
2) функції f і g не є неперервними в точці x_0?

39.22.•• Функції f і g визначені на $\mathbb{R}$. Чи може функція $h(x) = f(x)\,g(x)$ бути неперервною в точці x_0, якщо:

1) функція f є неперервною в точці x_0, а функція g не є неперервною в точці x_0;

2) функції f і g не є неперервними в точці x_0?

39.23.•• Доведіть, що рівняння $\sin x = x$ має єдиний корінь — число 0.

39.24.•• Доведіть, що функція $f(x) = 1$, $D(f) = \mathbb{Q}$, є неперервною.

39.25.•• Знайдіть усі неперервні на $\mathbb{R}$ функції такі, що $f(x) = x^2$ для всіх $x \in \mathbb{Q}$.

39.26.•• Про неперервні на $\mathbb{R}$ функції f і g відомо, що $f(x) = g(x)$ для всіх $x \in \mathbb{Q}$. Розв'яжіть рівняння $f(x) = g(x)$.

39.27.•• Доведіть, що функція $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ є неперервною рівно в одній точці $x_0 = 0$.

39.28.•• Про визначену на $\mathbb{R}$ функцію f відомо, що вона не є неперервною в жодній точці. Чи може існувати границя $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

39.29.•• Доведіть, що функція $g(x) = x^2\mathfrak{D}(x)$ є неперервною рівно в одній точці $x_0 = 0$.

39.30.•• Наведіть приклад функції, яка визначена на $\mathbb{R}$ і є неперервною рівно в двох точках.

39.31.* Знайдіть усі неперервні в точці $x_0 = 0$ функції f такі, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$.

39.32.* Наведіть приклад функції, яка визначена на $\mathbb{R}$, не є неперервною в жодній точці та задовольняє умову $f(f(x)) = x$.

39.33.* Знайдіть усі неперервні в точці $x_0 = -1$ функції f такі, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x) = f(2x + 1)$.

39.34.* Графіки функцій f і g є рівними фігурами. Функція f є неперервною. Чи обов'язково функція g є неперервною?

39.35.* Функції f і g є неперервними на $\mathbb{R}$. Доведіть, що функції $y = \max\,\{f(x);\ g(x)\}$ і $y = \min\,\{f(x);\ g(x)\}$ також є неперервними на $\mathbb{R}$.

39.36.* Знайдіть границю послідовності (x_n), що задовольняє умову $x_{n+1} = \sin x_n$, $n \in \mathbb{N}$.

39.37.* Знайдіть границю послідовності (x_n), заданої формулою $x_n = \cos\left(2\pi\sqrt{n^2 + n}\right)$.

40. Деякі властивості неперервних функцій

Розглянемо низку властивостей неперервних функцій.

Теорема 40.1 (перша теорема Больцано—Коші). ***Якщо функція f є неперервною на відрізку $[a; b]$ і на кінцях цього проміжку набуває значень різних знаків, то існує така точка $c \in (a; b)$, що $f(c) = 0$.***

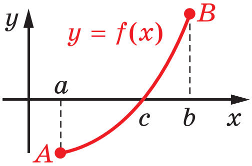


Рис. 40.1

Ця теорема є наочно очевидною. Справді, якщо точки A і B, які лежать у різних півплощинах відносно осі абсцис, сполучити неперервною кривою, то ця крива обов'язково перетне вісь абсцис (рис. 40.1).

З доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися на с. 320, 321.

Наслідок. ***Якщо функція неперервна і не має нулів на деякому проміжку I, то вона на цьому проміжку зберігає знак*** (рис. 40.2).

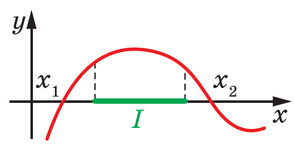


Рис. 40.2

Доведення. Припустимо, що дана функція f на проміжку I не зберігає знак, тобто існують такі $a \in I$ і $b \in I$, де $a < b$, що числа $f(a)$ і $f(b)$ мають різні знаки (рис. 40.1). Тоді за першою теоремою Больцано—Коші існує точка $c \in (a; b) \subset I$ така, що $f(c) = 0$. Отримали суперечність. ◄

Огюстен Луї Коші
(1789–1857)

Французький математик. Опублікував понад 800 робіт з арифметики, теорії чисел, алгебри, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, теоретичної та небесної механіки, математичної фізики; займався також дослідженнями з тригонометрії, теорії пружності, оптики, астрономії. Був членом Паризької академії наук, Лондонського королівського товариства та майже всіх академій наук світу.

Нагадаємо, що цей наслідок лежить в основі методу інтервалів для розв'язування нерівностей.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що рівняння $x^5 + 2x^2 - 11 = 0$ має корінь.

Розв'язання. Розглянемо неперервну функцію $f(x) = x^5 + 2x^2 - 11$.

Маємо: $f(0) = -11$, $f(2) = 29$. Отже, за першою теоремою Больцано—Коші на інтервалі $(0; 2)$ рівняння $f(x) = 0$ має корінь. ◄

ПРИКЛАД 2 Неперервна функція f є такою, що $D(f) = E(f) = [0; 1]$. Доведіть, що рівняння $f(x) = x$ має щонайменше один корінь.

Розв'язання. Розглянемо функцію $g(x) = f(x) - x$. Для розв'язання задачі достатньо показати, що функція g на відрізку $[0; 1]$ має хоча б один нуль. Очевидно, що функція $g(x)$ є неперервною на відрізку $[0; 1]$.

Якщо $g(0) = 0$ або $g(1) = 0$, то твердження задачі доведене.

Нехай $g(0) \neq 0$ і $g(1) \neq 0$. З урахуванням того, що $E(f) = [0; 1]$, отримуємо: $g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$ і $g(1) = f(1) - 1 < 0$. Тоді неперервна на відрізку $[0; 1]$ функція g у точках $x = 0$ і $x = 1$ набуває значень різних знаків, а отже, існує така точка $x_0 \in (0; 1)$, що $g(x_0) = 0$. ◄

Теорема 40.2 (друга теорема Больцано—Коші про проміжне значення функції). ***Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона набуває всіх значень між $f(a)$ і $f(b)$.***

Доведення. Розглянемо випадок, коли $f(a) < f(b)$ (випадок, коли $f(a) \geqslant f(b)$, розгляньте самостійно).

Бернард Больцано
(1781–1848)

Чеський математик, філософ і логік. Очолював кафедру історії релігії в Празькому університеті. За життя надрукував, причому анонімно, лише п'ять невеликих математичних творів. Основну частину рукописної спадщини Больцано вчені досліджували вже після його смерті. Трактат «Учення про функції», написаний у 1830 р., побачив світ тільки через 100 років. У ньому Больцано, на багато років раніше від Вейєрштрасса та Коші, сформулював і довів низку положень математичного аналізу. У роботі «Парадокси нескінченності» Больцано опрацьовував питання потужності нескінченних множин; у роботі «Наукознавство» висунув ідеї, які передували математичній логіці.

Нехай C — довільне число з проміжку $(f(a); f(b))$, тобто $f(a) < C < f(b)$. Доведемо, що існує точка $x_0 \in (a; b)$, для якої $f(x_0) = C$. Тим самим буде показано, що функція f набуває значення C.

Розглянемо функцію $g(x) = f(x) - C$. Функція g є неперервною на відрізку $[a; b]$.

Маємо: $g(a) = f(a) - C < 0$;

$g(b) = f(b) - C > 0$.

Отже, згідно з першою теоремою Больцано—Коші існує точка $x_0 \in (a; b)$ така, що $g(x_0) = 0$, тобто $f(x_0) - C = 0$; $f(x_0) = C$. ◄

Доведена теорема допомагає знаходити область значень неперервної функції.

Наслідок. ***Якщо областю визначення неперервної функції f є деякий проміжок,*** $\min\limits_{D(f)} f(x) = a$, $\max\limits_{D(f)} f(x) = b$ ***і*** $a \neq b$, ***то*** $E(f) = [a; b]$.

Доведіть цей наслідок самостійно.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть область значень функції $f(x) = \frac{x^2}{1 + x^4}$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{x^2}{1 + x^4} \geqslant 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $f(0) = 0$, то $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 0$.

Застосувавши нерівність Коші, запишемо:

$$\frac{x^2}{1 + x^4} \leqslant \frac{x^2}{2\sqrt{1 \cdot x^4}} = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

Оскільки $f(1) = \frac{1}{2}$, то $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{2}$.

Функція f неперервна на $\mathbb{R}$. З наслідку з теореми 40.2 випливає, що $E(f) = \left[0; \frac{1}{2}\right]$. ◄

Функція $f(x) = \sin x$ є такою, що для будь-якого $x \in D(f)$ виконується нерівність $|\sin x| \leqslant 1$. Функція $g(x) = x^2$ є такою, що для будь-якого $x \in [-1; 2]$ виконується нерівність $|g(x)| < 5$. Говорять, що функція f **обмежена** на $D(f)$, а функція g обмежена на відрізку $[-1; 2]$.

Узагалі, функцію f називають **обмеженою на множині** M, якщо існує таке число $C > 0$, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $|f(x)| \leqslant C$.

Функцію f, обмежену на $D(f)$, називають **обмеженою**.

Наприклад, функція $y = \text{arctg}\ x$ є обмеженою. Справді, для будь-якого $x \in D(y)$ виконується нерівність $|\text{arctg}\ x| < \frac{\pi}{2}$.

Функція $y = \text{ctg}\ x$ не є обмеженою на проміжку $(0; \pi)$. При цьому вона є обмеженою на будь-якому відрізку $[a; b]$, який належить проміжку $(0; \pi)$ (рис. 40.3).

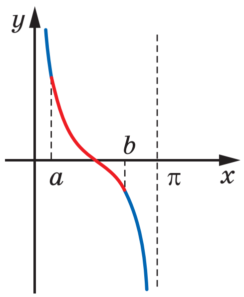


Рис. 40.3

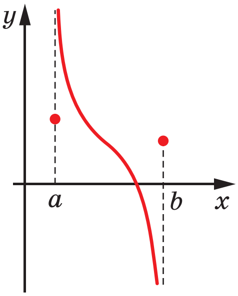


Рис. 40.4

Не будь-яка функція, визначена на відрізку $[a; b]$, є обмеженою (рис. 40.4). Проте для неперервних функцій має місце така теорема.

Теорема 40.3 (перша теорема Вейєрштрасса). ***Якщо функція f неперервна на відрізку*** $[a; b]$, ***то вона є обмеженою на цьому проміжку.***

З доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися на с. 321, 322.

Зауважимо, що для проміжків виду $(a; b]$, $[a; b)$, $(a; b)$ твердження теореми не є справедливим. Так, функція $y = \frac{1}{x}$ є неперервною на будь-якому проміжку виду $(0; a]$, проте вона не є обмеженою на цьому проміжку.

Не будь-яка функція, визначена та обмежена на відрізку $[a; b]$, досягає на цьому проміжку своїх найбільшого і найменшого значень. Це ілюструє рисунок 40.5.

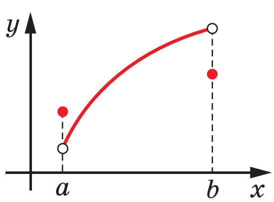
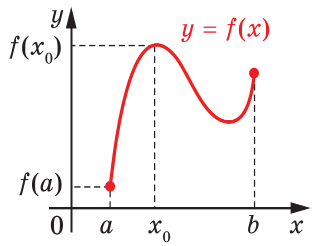


Рис. 40.5

Проте для неперервних функцій має місце така теорема.

Теорема 40.4 (друга теорема Веєрштрасса). ***Якщо функція f неперервна на відрізку [a; b], то на цьому відрізку вона набуває своїх найбільшого і найменшого значень.***

Ця теорема наочно очевидна. Якщо дві точки на координатній площині сполучити неперервною кривою, то на цій кривій знайдуться точки з найбільшою і найменшою ординатами (рис. 40.6). Доведення цієї теореми виходить за межі навчальної програми.



$$\max_{[a;\,b]} f(x) = f(x_0)$$

$$\min_{[a;\,b]} f(x) = f(a)$$

Рис. 40.6

Зазначимо, що коли в теоремі 40.4 відрізок $[a;\ b]$ замінити проміжком іншого виду, наприклад інтервалом $(a;\ b)$, то неперервна на цьому проміжку функція може не набувати своїх найбільшого і найменшого значень. Так, функція $y = x$, яка є неперервною на проміжку $(0;\ 1)$, не досягає на ньому своїх найбільшого і найменшого значень.

ВПРАВИ

40.1.° Доведіть, що рівняння має корінь:

1) $x^6 + 2x - 13 = 0$;
2) $3 \sin x = 2x - 1$;
3) $\operatorname{arctg}^3 x = 2 \operatorname{tg} x - 1$.

40.2.° Доведіть, що рівняння має корінь:

1) $x^3 + 3x - 8 = 0$;
2) $2 \cos x = x^2 + 4x - 6$;
3) $x^2 \arcsin x + 3x - 1 = 0$.

40.3.° Які з даних функцій є обмеженими:

1) $y = \frac{1}{x^2}$; 3) $y = [x]$; 5) $y = \frac{|x|}{x}$;

2) $y = \arccos x$; 4) $y = \{x\}$; 6) $y = x^3$?

40.4.° Які з даних функцій є обмеженими:

1) $y = \sin x + \cos x$; 3) $y = \text{arcctg}\, x$; 5) $y = \text{tg}\, x$;

2) $y = \frac{x^2}{x}$; 4) $y = \mathfrak{D}(x)$; 6) $y = \text{sgn}\,(x)$?

40.5.° Знайдіть область значень функції:

1) $y = \sin x + 2$; 2) $y = \cos x - 3$; 3) $y = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

40.6.° Знайдіть область значень функції:

1) $y = \sin x - 4$; 2) $y = 3 + \cos x$; 3) $y = \pi - \arccos x$.

40.7.• Знайдіть область значень функції:

1) $y = \frac{x^2}{9x^4 + 1}$; 2) $y = \sqrt{2x - x^2}$.

40.8.• Знайдіть область значень функції:

1) $y = \frac{x^2}{4x^4 + 3x^2 + 1}$; 2) $y = \sqrt{4x - x^2}$.

40.9.• Знайдіть область значень функції $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

40.10.• Знайдіть область значень функції $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

40.11.• При дослідженні кількості коренів рівняння $f(x) = a$ було з'ясовано, що при всіх $a \in (-5; 2]$ рівняння має два корені, при всіх $a \in (2; 3]$ — один корінь, при інших значеннях a рівняння не має жодного кореня. Чи може функція f бути неперервною, якщо $D(f) = [0;\ 1]$?

40.12.• Під час дослідження кількості коренів рівняння $f(x) = a$ було з'ясовано, що при всіх $a \in [-10; 3)$ рівняння має два корені, при всіх $a \in (3; 5]$ — один корінь, при інших значеннях a рівняння не має жодного кореня. Чи може функція f бути неперервною, якщо її областю визначення є деякий проміжок?

40.13.• Чи існує неперервна на $[0;\ 1]$ функція f з такою властивістю: для кожного $x \in [0; 1]$ знайдеться такий $y \in [0; 1]$, що $f(y) > f(x)$?

40.14.• Функція f, $D(f) = [a;\ b]$, є такою, що на відрізку $[a;\ b]$ існують точки x_1 та x_2, для яких виконується умова $f(x_1) = \min\limits_{[a;b]} f(x)$, і $f(x_2) = \max\limits_{[a;b]} f(x)$. Крім цього, функція f набуває всіх значень між $f(x_1)$ і $f(x_2)$. Чи обов'язково функція f є неперервною?

40.15.•• Неперервна функція f, де $D(f)=[a;\ b]$, для всіх $x\in[a;b]$ задовольняє нерівність $0<f(x)<1$. Доведіть, що функція $y=\dfrac{1}{f(x)(1-f(x))}$ є обмеженою.

40.16.•• Доведіть, що функція $f(x)=x\sin x$ не є обмеженою.

40.17.•• Доведіть, що функція $f(x)=x\sin x$ не є періодичною.

40.18.•• Доведіть, що функція $f(x)=x\cos x$ не є обмеженою.

40.19.•• Чи існує неперервна на $\mathbb{R}$ функція f така, що $f(x)\,f(x+1)=-1$ для всіх $x\in\mathbb{R}$?

40.20.•• Доведіть, що коли функція є неперервною й оборотною на проміжку, то вона або зростає, або спадає на цьому проміжку.

40.21.•• Функції f і g неперервні на відрізку $[0;\ 1]$. Відомо, що $f(0)<g(0)$ і $f(1)>g(1)$. Доведіть, що рівняння $f(x)=g(x)$ має корінь.

40.22.* Функція f є неперервною на $\mathbb{R}$. Доведіть, що коли рівняння $f(x)=x$ не має коренів, то рівняння $f(f(x))=x$ також не має коренів.

40.23.* Чи існує неперервна на $\mathbb{R}$ функція f, яка в раціональних точках набуває ірраціональних значень, а в ірраціональних точках — раціональних значень?

40.24.* Неперервна на $\mathbb{R}$ функція f є такою, що для всіх $x\in\mathbb{R}$ виконується рівність $f(f(x))\cdot f(x)=1$. Відомо, що $f(3)=\dfrac{1}{3}$. Знайдіть $f(2)$.

40.25.* Чи існує визначена на $\mathbb{R}$ функція, яка:

1) є неперервною і набуває кожного свого значення рівно два рази;
2) кожного свого значення набуває рівно два рази;
3) є неперервною і набуває кожного свого значення рівно три рази?

40.26.* Неперервна функція f визначена на відрізку $[0;\ 1]$, причому $f(0)=f(1)$. Доведіть, що існує хорда графіка[1] функції f, паралельна осі абсцис, довжина якої дорівнює $\dfrac{1}{3}$.

Доведення першої теореми Больцано—Коші

Розглянемо неперервну на відрізку $[a;\ b]$ функцію f таку, що числа $f(a)$ і $f(b)$ мають різні знаки. Доведемо існування такої точки $c\in(a;b)$, що $f(c)=0$.

Припустимо, що такої точки $c\in(a;b)$ не існує, тобто $f(c)\neq 0$ для всіх $c\in(a;b)$.

[1] Хордою графіка функції називають будь-який відрізок, що сполучає дві точки графіка.

Нехай c_0 — середина відрізка $[a;\ b]$.

Оскільки числа $f(a)$ і $f(b)$ різних знаків, то на кінцях одного з відрізків $[a;\ c_0]$ $[c_0;\ b]$ функція f набуває значень різних знаків. Позначимо цей відрізок $[a_1;\ b_1]$.

Нехай c_1 — середина відрізка $[a_1;\ b_1]$. Тоді на кінцях одного з відрізків $[a_1;\ c_1]$ і $[c_1;\ b_1]$ функція f набуває значень різних знаків. Позначимо цей відрізок $[a_2;\ b_2]$.

Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність вкладених відрізків

$$[a;\ b] \supset [a_1;\ b_1] \supset [a_2;\ b_2] \supset \ldots .$$

За принципом вкладених відрізків (див. п. 36) існує така точка c, яка належить усім відрізкам $[a_n;\ b_n]$. За припущенням $f(c) \neq 0$. Нехай, наприклад, $f(c) > 0$.

Оскільки $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n} = 0$. Отже, кожна з послідовностей (a_n) і (b_n) прямує до числа c. Нехай x_n є тією з точок a_n або b_n, для якої $f(x_n) < 0$. Послідовність (x_n) також прямує до числа c. Оскільки функція f неперервна в точці c, то $f(c) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \leqslant 0$. Отримали суперечність з нерівністю $f(c) > 0$. ◄

Доведення першої теореми Вейєрштрасса

Розглянемо неперервну на відрізку $[a;\ b]$ функцію f. Доведемо, що функція f є обмеженою на $[a;\ b]$.

Припустимо, що функція f не є обмеженою на $[a;\ b]$.

Нехай c_0 — середина відрізка $[a;\ b]$. Якби функція f була обмеженою на кожному з відрізків $[a;\ c_0]$ і $[c_0;\ b]$, то вона була б обмеженою і на відрізку $[a;\ b]$. Тому функція f не є обмеженою принаймні на одному з відрізків $[a;\ c_0]$ або $[c_0;\ b]$. Позначимо цей відрізок $[a_1;\ b_1]$ і виберемо на ньому таку точку x_1, що $|f(x_1)| > 1$.

Нехай c_1 — середина відрізка $[a_1;\ b_1]$. Тоді функція f не є обмеженою принаймні на одному з відрізків $[a_1;\ c_1]$ або $[c_1;\ b_1]$. Позначимо цей відрізок $[a_2;\ b_2]$ і виберемо на ньому таку точку x_2, що $|f(x_2)| > 2$.

Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність вкладених відрізків

$$[a;\ b] \supset [a_1;\ b_1] \supset [a_2;\ b_2] \supset \ldots .$$

За принципом вкладених відрізків (див. п. 36) існує така точка c, яка належить усім відрізкам $[a_n; b_n]$. На кожному з відрізків $[a_n; b_n]$

було вибрано таку точку x_n, що $|f(x_n)| > n$. Тому $(f(x_n))$ — розбіжна послідовність (вона не є обмеженою).

Оскільки $x_n \in [a_n; b_n]$ і $c \in [a_n; b_n]$, то

$$0 \leqslant |x_n - c| \leqslant (b_n - a_n).$$

Послідовність довжин відрізків $[a_n; b_n]$ прямує до нуля. Тому послідовність (x_n) прямує до числа c.

Оскільки функція f неперервна в точці c, то послідовність $(f(x_n))$ має збігатися до числа $f(c)$. Але це не так, оскільки $(f(x_n))$ — розбіжна послідовність. Отримана суперечність завершує доведення першої теореми Вейєрштрасса. ◄

41. Перша чудова границя

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Ця функція не визначена в точці $x_0 = 0$. Проте в цій точці існує границя функції f. Доведемо, що має місце така рівність:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1} \qquad (1)$$

Лема 41.1. ***Якщо*** $|x| < 1$ ***і*** $x \neq 0$, ***то***

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

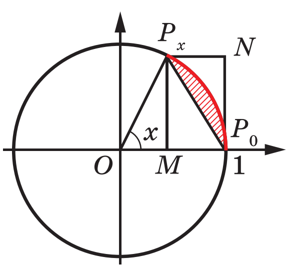


Рис. 41.1

Доведення. Нехай $x \in (0; 1)$. На рисунку 41.1 точку P_x отримано в результаті повороту точки $P_0\,(1; 0)$ навколо початку координат на кут x радіан. Оскільки $x \in (0; 1)$, тобто $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то точка P_x знаходиться в першій чверті.

Побудуємо прямокутник MP_xNP_0, для якого відрізок P_xP_0 є діагоналлю (рис. 41.1).

Оскільки $P_xM = \sin x$ і $OM = \cos x$, то

$$S_{\Delta P_xNP_0} = \frac{1}{2}\sin x\,(1 - \cos x) = \sin x \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Оскільки $x \in (0;\ 1)$, то за лемою 39.1 отримуємо: $\sin x \leqslant x$; $\sin^2 \dfrac{x}{2} \leqslant \left(\dfrac{x}{2}\right)^2$.

Отже,

$$S_{\Delta P_x N P_0} = \sin x \cdot \sin^2 \frac{x}{2} \leqslant x \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{4}.$$

Очевидно, що площа заштрихованого сегмента менша від площі трикутника $P_x N P_0$.

Маємо: $S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}_{P_x O P_0}} - S_{\Delta P_x O P_0} = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}\sin x$.

Тепер можна записати: $0 < \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}\sin x < \dfrac{x^3}{4}$.

Звідси з урахуванням того, що $x \in (0;\ 1)$, отримуємо:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

Оскільки функції $y = 1 - \dfrac{\sin x}{x}$ і $y = \dfrac{x^2}{2}$ є парними, то остання подвійна нерівність виконується також для всіх x із проміжку $(-1;\ 0)$. ◄

Тепер доведемо рівність (1).

Нехай (x_n) — довільна послідовність значень аргументу функції $f(x) = 1 - \dfrac{\sin x}{x}$ така, що $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$. Тоді існує таке $n_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n| < 1$.

Згідно з лемою 41.1 для будь-якого $n > n_0$ виконуються нерівності

$$0 < 1 - \frac{\sin x_n}{x_n} < \frac{x_n^2}{2}.$$

Тоді за теоремою про двох конвоїрів (теорема 35.4) отримуємо, що $\left(1 - \dfrac{\sin x_n}{x_n}\right)\left(1 - \dfrac{\sin x_n}{x_n}\right) = 0$.

Оскільки послідовність (x_n) вибрано довільно, то доходимо висновку, що $\lim\limits_{x \to 0}\left(1 - \dfrac{\sin x}{x}\right) = 0$, тобто $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. ◄

Цю рівність називають **першою чудовою границею**.

Нескладно показати, що має місце більш загальний факт: якщо $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ і в жодному проколотому δ-околі точки x_0 функція g тотожно не дорівнює нулю, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sin g(x)}{g(x)} = 1$.

Рівність $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ показує, що при досить малих значеннях x виконується наближена рівність $\sin x\approx x$. Більш того, із леми 41.1 випливає, що коли $|x|<1$, то виконується нерівність $|x-\sin x|\leqslant\frac{|x|^3}{2}$. Тому абсолютна похибка наближеної формули $\sin x\approx x$, де $|x|<1$, не перевищує $\frac{|x|^3}{2}$. Наприклад, якщо $x=0{,}1$, то $\sin 0{,}1\approx 0{,}1$ з точністю не менше ніж $\frac{0{,}1^3}{2}=0{,}0005$.

ПРИКЛАД 1 Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3.$ ◄

ПРИКЛАД 2 Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$ ◄

ПРИКЛАД 3 Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}$.

Розв'язання. $$\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{2\sin^2\frac{x}{2}}=6\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{4}}{\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=6\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}=\frac{6}{1^2}=6.$$ ◄

ПРИКЛАД 4 Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$.

Розв'язання.

Маємо: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x}{\arcsin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin(\arcsin x)}{\arcsin x}}=1.$ ◄

ВПРАВИ

41.1.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin\frac{x}{3}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{2x^2}$.

41.2.° Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{6x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin\frac{x}{4}}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 4x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\frac{x}{3}}{3x^3}$.

41.3.• Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{3x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\,\mathrm{tg}\,x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x+\sin 11x}{5x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 4x}{x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 13x}{\sin^2 x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0} x\,(\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{ctg}\,3x)$.

41.4.• Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{1-\cos 5x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,2x}{1-\cos 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 12x}{10x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 10x-\cos x}{4x^2}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,2x+\mathrm{tg}\,3x}{\sin 6x}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{ctg}\,5x-\mathrm{ctg}\,x)\,x$.

41.5.• Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\cos x)}{\cos x}$.

41.6.• Обчисліть границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,(\arccos x)}{\arccos x}$.

41.7.• Нехай $x_n = n\sin\dfrac{1}{n}$. Знайдіть границю послідовності (x_n).

41.8.• Нехай $x_n = \dfrac{\mathrm{ctg}\,\frac{1}{n}}{n^2}$. Знайдіть границю послідовності (x_n).

41.9.• У коло радіуса R послідовно вписують правильні n-кутники, $n\geqslant 3$. Використовуючи першу чудову границю, покажіть, що:

1) послідовність периметрів цих многокутників прямує до числа $2\pi R$;

2) послідовність площ цих многокутників прямує до числа πR^2.

41.10.° Навколо кола радіуса r послідовно описують правильні n-кутники, $n \geqslant 3$. Використовуючи першу чудову границю, покажіть, що:

1) послідовність периметрів цих многокутників прямує до числа $2\pi r$;

2) послідовність площ цих многокутників прямує до числа πr^2.

41.11.•• Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{\arcsin 3x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 7x}{\sin 3x}$; 3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\pi - 2x}{\arcsin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$.

41.12.•• Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{\operatorname{arctg} 5x}$; 2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 4x}{\operatorname{tg} 3x}$; 3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{4x - \pi}{3\arcsin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$.

41.13.•• Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$; 2) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{5}} \dfrac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{5} + x\right)}{(5x + \pi)^2}$; 3) $\lim\limits_{x \to 1} (1 - x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

41.14.•• Обчисліть границю:

1) $\lim\limits_{x \to -\frac{3\pi}{2}} \dfrac{2x + 3\pi}{\cos x}$; 2) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \sqrt{2}\cos x}$; 3) $\lim\limits_{x \to -2} (x + 2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}$.

41.15.•• При яких значеннях параметра a є неперервною в точці $x_0 = 0$ функція:

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 3ax}{2x^2}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } x = 0; \end{cases}$ 2) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{ctg} x, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 2a^2 + a, & \text{якщо } x = 0? \end{cases}$

41.16.•• При яких значеннях параметра a є неперервною в точці $x_0 = 0$ функція $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos ax}{x^2}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 2, & \text{якщо } x = 0? \end{cases}$

41.17.•• Знайдіть границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin \sin \sin x}{x}$.

41.18.•• Знайдіть границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{\operatorname{tg} \operatorname{tg} x^2}$.

41.19.* Знайдіть границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^2}$.

41.20.* Знайдіть границю $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

41.21.* Послідовність (a_n) задано такими умовами: $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n^2+1},\ n \in \mathbb{N}.$$

Обчисліть границю $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{2^n}$.

42. Асимптоти графіка функції

На рисунку 42.1 зображено графік функції $y = \operatorname{arctg} x$. Якщо значення аргументу x обирати все більшими й більшими, то відповідні значення функції $y = \operatorname{arctg} x$ усе менше й менше відрізнятимуться від числа $\frac{\pi}{2}$.

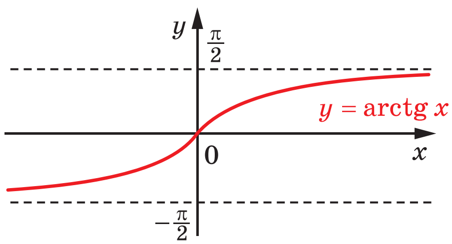


Рис. 42.1

Іншими словами, якщо довільна послідовність значень аргументу необмежено зростає, то відповідна послідовність значень функції $y = \operatorname{arctg} x$ прямує до числа $\frac{\pi}{2}$.

У такому випадку говорять, що число $\frac{\pi}{2}$ є *границею функції* $y = \operatorname{arctg} x$ *при* $x \to +\infty$. Цей факт записують так: $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ (використовують і такий запис: $\operatorname{arctg} x \to \frac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$).

Можна також сказати, що $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$.

Мають місце й такі рівності: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ (рис. 42.2), $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$ (рис. 42.3).

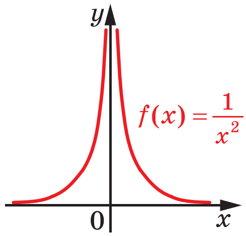


Рис. 42.2

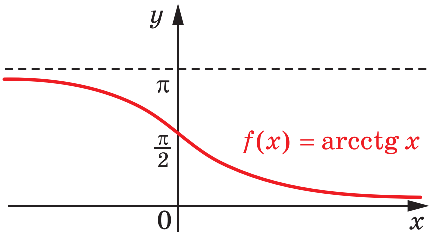


Рис. 42.3

Границі функції при $x \to \infty$ притаманні властивості, аналогічні властивостям границі функції в точці. Нехай функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають спільну область визначення.

Якщо $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = b$, то:

1) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) + g(x)) = a + b$;

2) $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x)\,g(x)) = ab$;

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ за умови, що $b \neq 0$.

Довести ці рівності можна аналогічно тому, як були доведені теореми про арифметичні дії з границями функцій у точці.

Зауважимо, що такі самі властивості виконуються і для границі функції при $x \to +\infty$ та при $x \to -\infty$.

ПРИКЛАД Обчисліть $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x-1}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+1}{x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 2 + \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x \to \infty} 1 - \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}} = \frac{2+0}{1-0} = 2.$$ ◄

Нехай $M\ (x;\ y)$ — довільна точка графіка функції $y = \operatorname{arctg} x$. Оскільки $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, то при $x \to +\infty$ відстань від точки M до прямої $y = \frac{\pi}{2}$ прямує до нуля (рис. 42.4). У такому разі говорять,

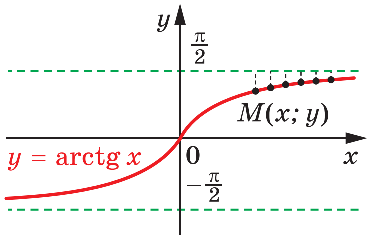


Рис. 42.4

що пряма $y = \frac{\pi}{2}$ є **горизонтальною асимптотою** графіка функції $y = \operatorname{arctg} x$ при $x \to +\infty$. Також можна показати, що пряма $y = -\frac{\pi}{2}$ є горизонтальною асимптотою графіка функції $y = \operatorname{arctg}\ x$ при $x \to -\infty$.

Означення. **Пряму $y = a$ називають горизонтальною асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), якщо $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = a\right)$.**

Так, прямі $y = 0$ і $y = \pi$ є горизонтальними асимптотами графіка функції $y = \operatorname{arcctg} x$ відповідно при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$ (рис. 42.5).

Приклад, розглянутий вище, показує, що пряма $y = 2$ є горизонтальною асимптотою графіка функції $y = \frac{2x+1}{x-1}$ при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$. Графік цієї функції зображено на рисунку 42.6.

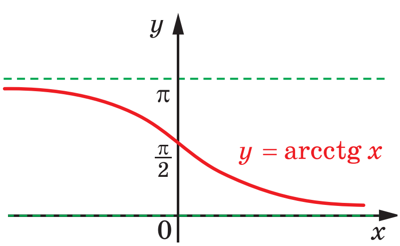


Рис. 42.5

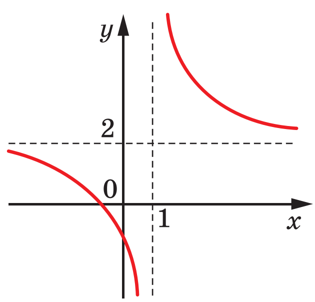


Рис. 42.6

Розглянемо функцію $f(x) = 2x - 1 + \frac{6}{x^2+1}$. Очевидно, що при $x \to +\infty$ значення функції f усе менше й менше відрізняються

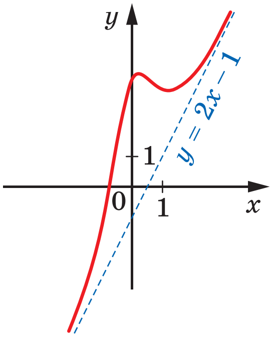


Рис. 42.7

від відповідних значень лінійної функції $y = 2x - 1$, тобто $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (2x - 1)) = 0$ (рис. 42.7). Це означає, що при $x \to +\infty$ відстань від точки графіка функції f до відповідної точки прямої $y = 2x - 1$ прямує до нуля.

У цьому разі говорять, що пряма $y = 2x - 1$ є **похилою асимптотою** графіка функції $f(x) = 2x - 1 + \frac{6}{x^2 + 1}$ при $x \to +\infty$. Також пряма $y = 2x - 1$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \to -\infty$.

Означення. Пряму $y = kx + b$ називають похилою асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), якщо

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx - b) = 0 \quad \left(\lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx - b) = 0\right).$$

Коли в рівнянні $y = kx + b$ похилої асимптоти $y = kx + b$ коефіцієнт k дорівнює нулю, то з означення випливає рівність $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - b) = 0$. Звідси $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$. Тому пряма $y = b$ є горизонтальною асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$. Таким чином, горизонтальну асимптоту можна розглядати як окремий випадок похилої асимптоти.

Для графіка функції $f(x) = x + \frac{1}{x - 1}$ пряма $y = x$ є його похилою асимптотою при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$. Справді, $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x - 1} = 0$. Але якщо розглядувану функцію $f(x) = x + \frac{1}{x - 1}$ подано у вигляді $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$, то здогадатися, що пряма $y = x$ є похилою асимптотою її графіка, досить важко. Пошук похилої асимптоти полегшує така теорема.

Теорема 42.1. ***Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$ тоді й тільки тоді, коли виконуються рівності***

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \tag{1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b. \tag{2}$$

Доведення. Нехай числа k і b задовольняють рівності (1) і (2). Доведемо, що пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції f.

Маємо:

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx - b) = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) - \lim_{x \to +\infty} b = b - b = 0.$$

Це означає, що пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції f.

Нехай пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$. Тоді $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$. Звідси $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b$.

Крім цього, маємо:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{kx + (f(x) - kx)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} k + \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) \cdot \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = k + b \cdot 0 = k. \blacktriangleleft$$

Теорема 42.1 дає змогу шукати похилі (горизонтальні) асимптоти графіка функції f при $x \to +\infty$ за такою схемою.

1. Знайти число k, де $k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Якщо цієї границі не існує, то графік функції f при $x \to +\infty$ не має похилої асимптоти.
2. Знайти число b, де $b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx)$. Якщо цієї границі не існує, то графік функції f при $x \to +\infty$ не має похилої асимптоти.
3. Пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$.

Аналогічна схема працює для пошуку похилої (горизонтальної) асимптоти при $x \to -\infty$.

Повертаючись до розглянутого вище прикладу, покажемо, як працює ця схема для пошуку похилої асимптоти графіка функції $f(x) = 2x - 1 + \frac{6}{x^2 + 1}$ при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$.

Маємо: $k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{6}{x(x^2 + 1)}\right) = 2;$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to \infty} \left(-1 + \frac{6}{x^2 + 1}\right) = -1.$$

Отже, пряма $y = 2x - 1$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$.

На рисунку 42.8 зображено графік функції $y = f(x)$. Розглянемо функцію f при $x > x_0$. Якщо такі значення аргументу x обирати все ближче й ближче до точки x_0, то відповідні значення функції стають усе більшими й більшими і можуть стати більшими від будь-якого наперед заданого додатного числа. Іншими словами, якщо послідовність (x_n) аргументів функції f задовольняє умови $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = x_0$ і $x_n > x_0$, де $n \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{x \to \infty} f(x_n) = +\infty$. Цей факт записують так: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = +\infty$. У цьому випадку пряму $x = x_0$ називають **вертикальною асимптотою** графіка функції f, коли x прямує до x_0 справа.

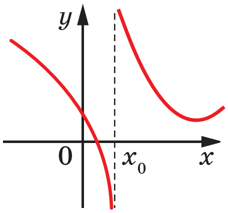


Рис. 42.8

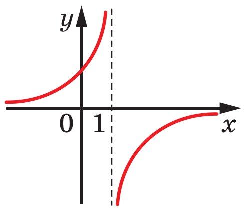


Рис. 42.9

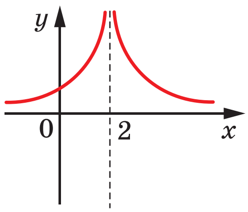


Рис. 42.10

Міркуючи аналогічно, можна сказати, що $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = -\infty$. Тому пряма $x = x_0$ є вертикальною асимптотою графіка функції f, коли x прямує до x_0 зліва.

Наприклад, $\lim\limits_{x \to x_0+} \frac{1}{1-x} = -\infty$ і $\lim\limits_{x \to x_0-} \frac{1}{1-x} = +\infty$ (рис. 42.9). Тому $x = 1$ — вертикальна асимптота графіка функції $y = \frac{1}{1-x}$, коли x прямує до $x_0 = 1$ як справа, так і зліва.

Наведемо ще кілька прикладів.

Оскільки $\lim\limits_{x \to 2-} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$ і $\lim\limits_{x \to 2+} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$ (у таких випадках записують: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{|x-2|} = +\infty$), то пряма $x = 2$ є вертикальною асимптотою графіка функції $f(x) = \frac{1}{|x-2|}$ при $x \to 2+$ і при $x \to 2-$ (рис. 42.10).

Оскільки $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty$ і $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty$, то пряма $x = \frac{\pi}{2}$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ при $x \to \frac{\pi}{2}-$ і при $x \to \frac{\pi}{2}+$. Ураховуючи періодичність функції $y = \operatorname{tg} x$, можна стверджувати, що кожна з прямих $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, є вертикальною асимптотою графіка функції $y = \operatorname{tg} x$ при $x \to \frac{\pi}{2} + \pi k +$ і при $x \to \frac{\pi}{2} + \pi k -$ (рис. 42.11).

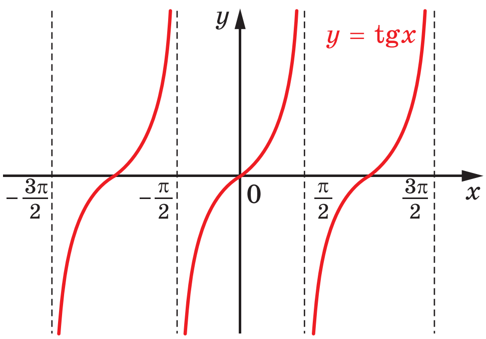


Рис. 42.11

Інших вертикальних асимптот функція $y = \operatorname{tg} x$ не має, оскільки вона неперервна в кожній точці x_0, відмінній від $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Узагалі, *якщо функція неперервна в точці x_0, то пряма $x = x_0$ не є вертикальною асимптотою її графіка*.

ВПРАВИ

42.1.° Перевірте виконання умов $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$ для послідовностей із загальним членом:

1) $a_n = -2n$;
2) $a_n = \frac{n+1}{n}$;
3) $a_n = \sqrt{n}$;
4) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$;
5) $a_n = \sin n$.

42.2.° Перевірте виконання умов $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -\infty$ для послідовностей із загальним членом:

1) $a_n = n^3$; 3) $a_n = \frac{2n-1}{n}$; 5) $a_n = \cos n$.

2) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$; 4) $a_n = \frac{2n^2+3}{n+1}$;

42.3.° Знайдіть границю:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2}$; 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(3 - \frac{5}{x}\right)$; 5) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 + 5x + 10}$;

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} 2$; 4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x-1}{x-2}$; 6) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$.

42.4.° Знайдіть границю:

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3}$; 3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(5 + \frac{3}{x}\right)$; 5) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 1}$;

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} 3$; 4) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x}{x+3}$; 6) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^5 - 3x^4 + 2x^2 - 1}{3x^5 + 2x^3 - 1}$.

42.5.° Знайдіть горизонтальні асимптоти графіка функції:

1) $y = \frac{3x+5}{4x-1}$; 2) $y = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + x - 1}$; 3) $y = \frac{x}{x^2+1}$.

42.6.° Знайдіть горизонтальні асимптоти графіка функції:

1) $y = \frac{2-x}{3x+2}$; 2) $y = \frac{x^2+1}{x^2 - x + 2}$; 3) $y = \frac{x^2+1}{x^3+2}$.

42.7.° Перевірте виконання умов $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ для функції:

1) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$, $x_0 = 0$; 3) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

2) $f(x) = \operatorname{ctg}^4 x$, $x_0 = \pi$;

42.8.° Перевірте виконання умов $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ для функції:

1) $f(x) = \frac{1}{(x+3)^4}$, $x_0 = -3$; 3) $f(x) = \left(\frac{x}{x+7}\right)^5$, $x_0 = -7$.

2) $f(x) = -|\operatorname{tg} x|$, $x_0 = \frac{3\pi}{2}$;

42.9.° Укажіть вертикальні асимптоти графіка функції:

1) $f(x) = \frac{1}{x-2}$; 2) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; 3) $f(x) = \frac{1}{|x + \sqrt{2}|}$;

4) $f(x)=\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 5) $f(x)=\frac{1}{\sin x}$; 6) $f(x)=\frac{1}{\arccos x}$.

42.10.° Укажіть вертикальні асимптоти графіка функції:

1) $f(x)=\frac{3}{x+1}$; 3) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$; 5) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$;

2) $f(x)=\frac{1}{|x|}$; 4) $f(x)=\operatorname{ctg} x$; 6) $f(x)=\frac{1}{\arcsin x}$.

42.11.• Обчисліть $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$.

42.12.• Обчисліть $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

42.13.• Чи може графік функції мати дві різні похилі асимптоти при $x\to+\infty$?

42.14.• Знайдіть похилі асимптоти графіка функції:

1) $f(x)=x+\frac{1}{x}$; 3) $f(x)=\frac{(2-x)^3}{(x-3)^2}$;

2) $f(x)=\frac{x^2+3x}{x-1}$; 4) $f(x)=\frac{x^4-8}{(x+1)^4}$.

42.15.• Знайдіть похилі асимптоти графіка функції:

1) $f(x)=x+\frac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$; 3) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$.

42.16.•• Графік функції f має асимптоту. Чи може бути так, що графік функції f перетинає асимптоту нескінченну кількість разів?

42.17.•• Зростаюча функція f є такою, що $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0.$

Чи обов'язково графік функції f має горизонтальну асимптоту при $x\to+\infty$?

42.18.•• Знайдіть горизонтальні асимптоти графіка функції

$$y=\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{3x+2}.$$

42.19.•• Знайдіть горизонтальні асимптоти графіка функції

$$y=\frac{\sqrt{x^2-1}}{2-x}.$$

42.20.•• Знайдіть горизонтальні асимптоти графіка функції:

1) $y=-x-\sqrt{x^2-x+2}$; 2) $y=\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}$.

42.21.•• Знайдіть горизонтальні асимптоти графіка функції:

1) $y=x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$; 2) $y=\sqrt{x^2-2}-\sqrt{x^2+2x}$.

42.22.•• Знайдіть асимптоти графіка функції $f(x)=\sqrt{x^2+x}+2x$.

42.23.•• Знайдіть асимптоти графіка функції $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

42.24.•• Василь Заплутайко шукає асимптоту графіка функції $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ при $x\to+\infty$ так:

1) при $x>0$ виконуються рівності $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}=x\cdot\sqrt{1+\frac{x+1}{x^2}}$;
2) оскільки $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{x+1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=1$, то при $x\to+\infty$ графік функції f майже не відрізняється від прямої $y=x$;
3) тому пряма $y=x$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x\to+\infty$.

Чи погоджуєтеся ви з міркуваннями Василя?

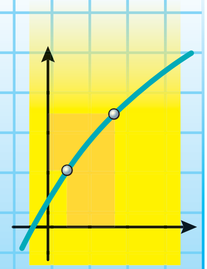
42.25.* Про функцію f відомо, що $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$. Чи обов'язково пряма $x=x_0$ є вертикальною асимптотою її графіка?

42.26.* Графіки функцій f і g є рівними фігурами. Чи обов'язково графік функції g має асимптоту, якщо графік функції f має асимптоту?

42.27.* Функція f є такою, що при кожному $x>0$ виконується рівність $\lim\limits_{n\to\infty}f(nx)=0$. Чи обов'язково $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$?

42.28.* Числа a, b, c такі, що при кожному $n\in\mathbb{N}$ значення виразу an^2+bn+c є четвертим степенем натурального числа. Доведіть, що $a=b=0$.

§ 7 ПОХІДНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ



43. Приріст функції. Задачі, які приводять до поняття похідної

Якщо функція є математичною моделлю реального процесу, то часто виникає потреба знаходити різницю значень цієї функції у двох точках. Наприклад, позначимо через $f(t)$ і $f(t_0)$ суми коштів, які накопичилися на депозитному[1] рахунку вкладника до моментів часу t і t_0. Тоді різниця $f(t) - f(t_0)$, де $t > t_0$, показує прибуток, який отримає вкладник за час $t - t_0$.

Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай x_0 — фіксована точка з області визначення функції f.

Якщо x — довільна точка області визначення функції f така, що $x \neq x_0$, то різницю $x - x_0$ називають **приростом аргументу функції f у точці** x_0 і позначають Δx (читають: «дельта ікс»)[2]. Маємо:

$$\Delta x = x - x_0.$$

Звідси

$$x = x_0 + \Delta x.$$

Говорять, що аргумент **отримав приріст** Δx у точці x_0.

Зазначимо, що приріст аргументу може бути як додатним, так і від'ємним: якщо $x > x_0$, то $\Delta x > 0$; якщо $x < x_0$, то $\Delta x < 0$.

Якщо аргумент у точці x_0 отримав приріст Δx, то значення функції f змінилося на величину

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Цю різницю називають **приростом функції f у точці** x_0 і позначають Δf (читають: «дельта еф»).

---

[1] Депозит (банківський вклад) — кошти, які вкладник передає банку на деякий строк, за що банк виплачує вкладнику проценти.

[2] Говорячи про приріст аргументу функції f у точці x_0, тут і далі припускатимемо, що в будь-якому інтервалі $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ є точки області визначення функції f, відмінні від x_0.

Маємо:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \text{ або}$$
$$\Delta f = f(x) - f(x_0).$$

Для приросту функції $y = f(x)$ прийнято також позначення Δy, тобто

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \text{ або } \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Приріст Δx аргументу в точці x_0 і відповідний приріст Δf функції показано на рисунку 43.1.

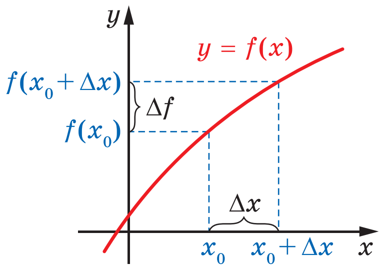


Рис. 43.1

Зауважимо, що для фіксованої точки x_0 приріст функції f у точці x_0 є функцією з аргументом Δx.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть приріст функції $y = x^2$ у точці x_0, який відповідає приросту Δx аргументу.

Розв'язання. Маємо:

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2.$$

Відповідь: $2x_0\Delta x + \Delta x^2$. ◄

Задача про миттєву швидкість

Нехай автомобіль, рухаючись прямолінійною ділянкою дороги в одному напрямку, за 2 год подолав шлях у 120 км. Тоді його середня швидкість руху дорівнює $v_{\text{сер}} = \frac{120}{2} = 60$ (км/год).

Знайдена величина дає неповне уявлення про характер руху автомобіля: на одних ділянках шляху автомобіль міг пересуватися швидше, на інших — повільніше, інколи міг зупинятися.

Разом із цим у будь-який момент часу спідометр автомобіля показував деяку величину — швидкість у даний момент часу. Значення швидкості в різні моменти повніше характеризує рух автомобіля.

Розглянемо задачу про пошук швидкості в даний момент часу на прикладі рівноприскореного руху.

Нехай матеріальна точка рухається по координатній прямій і через час t після початку руху має координату $s(t)$. Тим самим задано функцію $y = s(t)$, яка дає змогу визначити положення точки в будь-який момент часу. Тому цю функцію називають **законом руху** точки.

Наприклад, із курсу фізики відомо, що закон рівноприскореного руху задається формулою $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, де s_0 — координата точки на початку руху (при $t = 0$), v_0 — початкова швидкість, a — прискорення.

Нехай, наприклад, $s_0 = 0$, $v_0 = 1$ м/с, $a = 2$ м/с². Тоді $s(t) = t^2 + t$.

Зафіксуємо який-небудь момент часу t_0 і надамо аргументу в точці t_0 приріст Δt, тобто розглянемо проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$. За цей проміжок часу матеріальна точка здійснить переміщення Δs. Маємо:

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = \underbrace{(t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t)}_{s(t_0 + \Delta t)} - \underbrace{(t_0^2 + t_0)}_{s(t_0)} =$$

$$= t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t - t_0^2 - t_0 = 2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2.$$

Середня швидкість $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ руху точки за проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ дорівнює відношенню $\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Отримуємо:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2t_0\Delta t + \Delta t + \Delta t^2}{\Delta t} = 2t_0 + 1 + \Delta t, \text{ тобто } v_{\text{сер}}(\Delta t) = 2t_0 + 1 + \Delta t.$$

Позначення для середньої швидкості $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ наголошує, що при заданому законі руху $y = s(t)$ і фіксованому моменті часу t_0 значення середньої швидкості залежить тільки від Δt.

Якщо розглядати досить малі проміжки часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$, то з практичних міркувань зрозуміло, що середні швидкості $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ за такі проміжки часу мало відрізняються одна від одної, тобто величина $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ майже не змінюється. Чим менше Δt, тим ближчим є значення середньої швидкості до деякого числа, що визначає швидкість у момент часу t_0. Іншими словами, якщо при $\Delta t \to 0$ значення $v_{\text{сер}}(\Delta t)$ прямують до числа $v(t_0)$, то число $v(t_0)$ називають **миттєвою швидкістю** в момент часу t_0.

У наведеному прикладі, якщо $\Delta t \to 0$, то значення виразу $2t_0 + 1 + \Delta t$ прямують до числа $2t_0 + 1$, яке є значенням миттєвої швидкості $v(t_0)$, тобто

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0}(2t_0 + 1 + \Delta t) = 2t_0 + 1.$$

Цей приклад показує, що коли матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$, то її миттєву швидкість у момент часу t_0 визначають за допомогою формули

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{сер}}(\Delta t), \text{ тобто}$$

$$\boxed{v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}}$$

Задача про дотичну до графіка функції

Відоме означення дотичної до кола як прямої, що має з колом тільки одну спільну точку, незастосовне у випадку довільної кривої.

Наприклад, вісь ординат має з параболою $y = x^2$ тільки одну спільну точку (рис. 43.2). Проте інтуїція підказує, що неприродно вважати цю пряму дотичною до цієї параболи. Разом з тим у курсі алгебри ми нерідко казали, що парабола $y = x^2$ дотикається до осі абсцис у точці $x_0 = 0$.

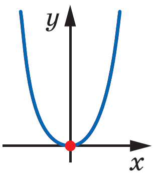


Рис. 43.2

Уточнимо наочне уявлення про дотичну до графіка функції.

Нехай M — деяка точка, що лежить на параболі $y = x^2$. Проведемо пряму OM, яку назвемо січною (рис. 43.3). Уявимо собі, що точка M, рухаючись по параболі, наближається до точки O. При цьому січна OM буде повертатися навколо точки O. Тоді кут між прямою OM і віссю абсцис ставатиме все меншим і меншим, а січна OM прагнутиме зайняти положення осі абсцис.

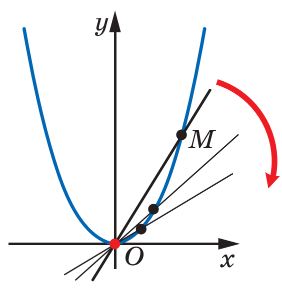


Рис. 43.3

Пряму, положення якої прагне зайняти січна OM з наближенням точки M до точки O, називатимемо дотичною до параболи $y = x^2$ у точці O.

Розглянемо графік деякої неперервної в точці x_0 функції f і точку $M_0(x_0; f(x_0))$. У точці x_0 надамо аргументу приріст Δx і розглянемо на графіку точку $M(x; f(x))$, де $x = x_0 + \Delta x$ (рис. 43.4).

З рисунка видно, що коли Δx стає все менше й менше, то точка M, рухаючись по графіку, наближається до точки M_0. Якщо при $\Delta x \to 0$ січна M_0M прагне зайняти положення деякої прямої (на рисунку 43.4 це пряма M_0T), то таку пряму називають **дотичною до графіка функції f у точці M_0**.

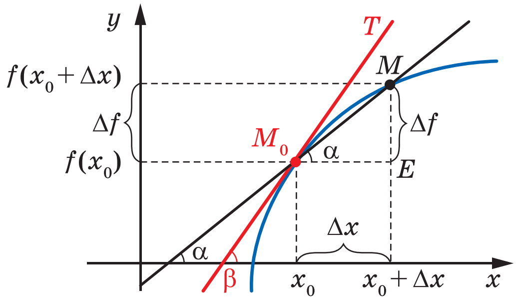


Рис. 43.4

Нехай січна M_0M має рівняння $y = kx + b$ і утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α. Як відомо, кутовий коефіцієнт k прямої M_0M дорівнює $\operatorname{tg} \alpha$, тобто $k = \operatorname{tg} \alpha$. Очевидно, що $\angle MM_0E = \alpha$ (рис. 43.4). Тоді з трикутника MM_0E отримуємо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ME}{M_0E} = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Уведемо позначення $k_{\text{січ}}(\Delta x)$ для кутового коефіцієнта січної M_0M, тим самим підкреслюючи, що для даної функції f і фіксованої точки x_0 кутовий коефіцієнт січної M_0M залежить від приросту Δx аргументу.

Маємо: $k_{\text{січ}}(\Delta x) = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Нехай дотична M_0T утворює з додатним напрямом осі абсцис кут β ($\beta \neq 90°$). Тоді її кутовий коефіцієнт $k\,(x_0)$ дорівнює $\operatorname{tg} \beta$.

Природно вважати, що чим менше Δx, тим менше значення кутового коефіцієнта січної відрізняється від значення кутового коефіцієнта дотичної. Іншими словами, якщо $\Delta x \to 0$, то $k_{\text{січ}}(\Delta x) \to k\,(x_0)$.

Узагалі, кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 визначають за допомогою формули

$$k\,(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{січ}}(\Delta x), \text{ тобто}$$

$$\boxed{\boldsymbol{k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}}$$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть формулу для обчислення кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2$ у точці з абсцисою x_0. Який кут з додатним напрямом осі абсцис утворює дотична, проведена до цього графіка в точці з абсцисою $x_0 = -\dfrac{1}{2}$?

Розв'язання. Маємо:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = -(x_0 + \Delta x)^2 - \left(-x_0^2\right) = -2x_0 \Delta x - \Delta x^2.$$

Тоді, скориставшись формулою для обчислення кутового коефіцієнта дотичної, можна записати:

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-2x_0 \Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-2x_0 - \Delta x).$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то значення виразу $-2x_0 - \Delta x$ прямують до числа $-2x_0$, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (-2x_0 - \Delta x) = -2x_0$. Звідси $k(x_0) = -2x_0$.

Ця формула дає змогу обчислити кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = -x^2$ у будь-якій точці, зокрема в точці з абсцисою $x_0 = -\frac{1}{2}$.

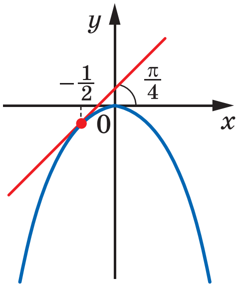


Рис. 43.5

Маємо: $k\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$.

Нехай дотична до параболи в точці з абсцисою $x_0 = -\frac{1}{2}$ утворює кут α $\left(0 \leqslant \alpha < \pi \text{ і } \alpha \neq \frac{\pi}{2}\right)$ з додатним напрямом осі абсцис. Тоді її кутовий коефіцієнт дорівнює $\operatorname{tg} \alpha$. Вище ми встановили, що $k\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$. Звідси $\operatorname{tg} \alpha = 1$. Оскільки $0 \leqslant \alpha < \pi$, то $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (рис. 43.5). ◄

ВПРАВИ

43.1.° Знайдіть приріст функції f у точці x_0, якщо:

1) $f(x) = 2x - 1$, $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}2$;

2) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$;

3) $f(x) = \frac{6}{x}$, $x_0 = 1{,}2$, $\Delta x = -0{,}3$.

43.2.° Знайдіть приріст функції f у точці x_0, якщо:

1) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}3$;

2) $f(x) = 0{,}5x^2$, $x_0 = -2$, $\Delta x = 0{,}8$.

43.3.° Для функції $f(x) = x^2 - 3x$ виразіть приріст Δf функції f у точці x_0 через x_0 і x. Знайдіть Δf, якщо:

1) $x_0 = 3$, $x = 2{,}5$; 2) $x_0 = -2$, $x = -1$.

43.4.° Для функції $f(x) = x^3$ виразіть приріст Δf функції f у точці x_0 через x_0 і x. Знайдіть Δf, якщо $x_0 = 0{,}5$, $x = 0{,}4$.

43.5.• Для функції $f(x) = x^2 - x$ і точки x_0 знайдіть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

43.6.• Для функції $f(x) = 5x + 1$ і точки x_0 знайдіть $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

43.7.• Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^2 + 3$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть миттєву швидкість матеріальної точки в момент $t_0 = 2$ с.

43.8.• Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 5t^2$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть:
1) середню швидкість тіла при зміні часу від $t_0 = 1$ с до $t_1 = 3$ с;
2) миттєву швидкість тіла в момент $t_0 = 1$ с.

43.9.• Електронагрівач від початку роботи за час t виділив $Q(t) = t^2 + 2t$ одиниць теплової енергії, де $0 \leqslant t \leqslant T$. Знайдіть:
1) середню потужність[1] нагрівача на проміжку часу від 0 до T;
2) кількість теплової енергії, яку виділив нагрівач за проміжок часу між t_0 і $t_0 + \Delta t$;
3) середню потужність нагрівача за проміжок часу між t_0 і $t_0 + \Delta t$;
4) потужність нагрівача в момент часу t_0.

43.10.• Під час хімічної реакції з речовин A і B утворюється речовина C. Через час t $(0 \leqslant t \leqslant T)$ від початку реакції кількість речовини C, що утворилася, дорівнює $f(t) = 4t - t^2$. Знайдіть:
1) середню швидкість хімічної реакції[2] на проміжку часу від 0 до T;
2) кількість речовини C, яка утворилася за проміжок часу між t_0 і $t_0 + \Delta t$;
3) середню швидкість хімічної реакції за проміжок часу між t_0 і $t_0 + \Delta t$;
4) миттєву швидкість хімічної реакції в момент часу t_0.

---

[1] Середня потужність нагрівача, який за проміжок часу t виділив Q одиниць теплової енергії, дорівнює $P = \frac{Q}{t}$.

[2] Середня швидкість хімічної реакції за продуктом реакції, під час якої за час t утворилося M одиниць речовини, дорівнює $v_R = \frac{M}{t}$.

43.11.• Кількість продукції, виготовленої робітником від початку роботи до моменту часу t $(0 \leqslant t \leqslant T)$, дорівнює $f(t) = 10t - 3t^2$. Знайдіть:

1) середню продуктивність[1] праці робітника на проміжку часу від 0 до T;
2) кількість продукції, яку виготовив робітник за проміжок часу між t_0 і $t_0 + \Delta t$;
3) середню продуктивність праці робітника за проміжок часу між t_0 і $t_0 + \Delta t$;
4) продуктивність праці робітника в момент часу t_0.

43.12.• На координатній прямій лежить стержень OA, площа перерізу якого дорівнює S. Кінці стержня O і A мають координати $x = 0$ і $x = a$ відповідно. Відомо, що маса частини стержня, яка лежить на відрізку $[0; x]$ координатної прямої, дорівнює $m(x) = 2aSx - Sx^2$, де $x \in [0; a]$. Знайдіть:

1) середню густину[2] речовини, з якої виготовлено стержень;
2) масу частини стержня між точками x_0 та $x_0 + \Delta x$;
3) середню густину речовини, з якої виготовлено частину стержня між точками x_0 та $x_0 + \Delta x$;
4) густину речовини, з якої виготовлено стержень, у точці x_0.

43.13.• Тіло рухалося по координатній прямій від початку координат до точки $x = a$ під дією сили, яка виконувала при цьому роботу $A(x) = x^3$, де $x \in [0; a]$ — координата тіла. Знайдіть:

1) середню величину сили[3], яка діяла на тіло під час його руху від початку координат до точки $x = a$;
2) виконану роботу під час руху тіла між точками з координатами x_0 та $x_0 + \Delta x$;
3) середню величину сили, яка діяла на тіло під час його руху між точками з координатами x_0 та $x_0 + \Delta x$;
4) величину сили, яка діяла на тіло тоді, коли воно мало координату x_0.

---

[1] Середня продуктивність праці робітника, який за проміжок часу t виготовив S одиниць продукції, дорівнює $\frac{S}{t}$.

[2] Середня густина речовини, з якої виготовлено тіло масою m і об'ємом V, дорівнює $\rho = \frac{m}{V}$.

[3] Середня величина сили, яка виконала роботу A, перемістивши тіло на відстань x, дорівнює $F = \frac{A}{x}$.

43.14.$^{\bullet}$ Знайдіть кутовий коефіцієнт:

1) січної графіка функції $y = x^2$, яка проходить через точки графіка з абсцисами $x_0 = 1$ і $x_1 = 1{,}6$;
2) дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

43.15.$^{\bullet}$ Знайдіть кутовий коефіцієнт:

1) січної графіка функції $y = x^3$, яка проходить через точки графіка з абсцисами $x_0 = 2$ і $x_1 = 1$;
2) дотичної до графіка функції $y = x^3$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$.

44. Поняття похідної

У попередньому пункті, розв'язуючи дві різні задачі про миттєву швидкість матеріальної точки та про кутовий коефіцієнт дотичної, ми дійшли до однієї і тієї самої математичної моделі — границі відношення приросту функції до приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля:

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

$$k(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

До аналогічних формул приводить розв'язання багатьох задач фізики, хімії, біології, економіки тощо. Це свідчить про те, що розглядувана модель заслуговує на особливу увагу. Їй варто дати назву, увести позначення, вивчити її властивості та навчитися їх застосовувати.

Означення. Похідною функції f у точці x_0 називають число, яке дорівнює границі відношення приросту функції f у точці x_0 до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу прямує до нуля.

Похідну функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначають так: $f'(x_0)$ (читають: «еф штрих від ікс нульового») або $y'(x_0)$. Можна записати:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

або

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}}$$

Похідну функції f у точці x_0 можна обчислити за такою схемою:

1) надавши в точці x_0 аргументу приріст Δx, знайти відповідний приріст Δf функції:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

2) знайти відношення $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$;

3) з'ясувати, до якого числа прямує відношення $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, тобто знайти границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть похідну функції $f(x) = \dfrac{1}{x}$ у точці $x_0 = 1$.

Розв'язання. Дотримуючись наведеної схеми, запишемо:

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \dfrac{1}{x_0 + \Delta x} - \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{1 + \Delta x} - \dfrac{1}{1} = \dfrac{-\Delta x}{1 + \Delta x}$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = -\dfrac{1}{1 + \Delta x}$;

3) при $\Delta x \to 0$ значення виразу $-\dfrac{1}{1 + \Delta x}$ прямують до числа -1, тобто $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\left(-\dfrac{1}{1 + \Delta x}\right) = -1$.

Відповідь: -1. ◄

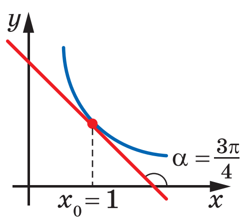


Рис. 44.1

Зазначимо, що, знайшовши значення $f'(1)$, ми тим самим знайшли кутовий коефіцієнт $k(x_0)$ дотичної, проведеної до графіка функції $f(x) = \dfrac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$. Він дорівнює -1, тобто $k(1) = -1$. Тоді, позначивши через α кут, утворений цією дотичною з додатним напрямом осі абсцис, можемо записати: $\operatorname{tg} \alpha = -1$. Звідси $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$ (рис. 44.1).

Узагалі, можна зробити такий висновок: *кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, дорівнює значенню похідної функції f у точці x_0*, тобто

$$\boxed{k(x_0) = f'(x_0)}$$

Ця рівність виражає **геометричний зміст похідної.**

Зважаючи на означення миттєвої швидкості, можна зробити такий висновок: *якщо $y = s(t)$ — закон руху матеріальної точки по координатній прямій, то її миттєва швидкість у момент часу t_0 дорівнює значенню похідної функції $y = s(t)$ у точці t_0*, тобто

$$\boxed{v(t_0) = s'(t_0)}$$

Ця рівність виражає **механічний зміст похідної.**

Якщо функція f має похідну в точці x_0, то цю функцію називають **диференційовною в точці** x_0.

Нехай функція f є диференційовною в точці x_0. З геометричного змісту похідної випливає, що до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 можна провести *невертикальну* дотичну (рис. 44.2). І навпаки, якщо до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну, то функція f є диференційовною в точці x_0.

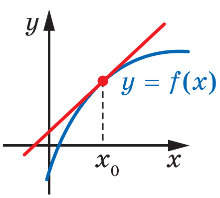


Рис. 44.2

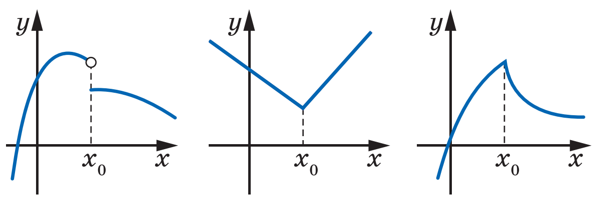


Рис. 44.3

На рисунку 44.3 зображено графіки функцій, які в точці x_0 мають розрив або «злом». До цих графіків у точці з абсцисою x_0 не можна провести дотичну. Ці функції не диференційовні в точці x_0.

На рисунку 44.4 зображено графіки функцій, які в точці з абсцисою x_0 мають вертикальну дотичну. Отже, ці функції не диференційовні в точці x_0.

Рис. 44.4

Покажемо, наприклад, що функція $f(x) = |x|$, графік якої має «злом» у точці $x_0 = 0$, не є диференційовною в цій точці. Маємо:

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |x_0 + \Delta x| - |x_0| = |0 + \Delta x| - |0| = |\Delta x|$;

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$;

3) у прикладі 3 п. 37 було показано, що функція $f(x) = \frac{|x|}{x}$ не має границі в точці $x_0 = 0$; це означає, що не існує границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$, тобто функція f не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

Теорема 44.1. ***Якщо функція f є диференційовною в точці x_0, то вона є неперервною в цій точці.***

Доведення. Оскільки функція f диференційовна в точці x_0, то можна записати: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Маємо: $\Delta x = x - x_0$. Очевидно, що коли $\Delta x \to 0$, то $x \to x_0$. Тоді

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Маємо: $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right) =$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Отже, $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$. Звідси $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Це означає, що функція f є неперервною в точці x_0. ◄

Зазначимо, що неперервна в точці $x_0 = 0$ функція $f(x) = |x|$ не є диференційовною в цій точці. Цей приклад показує, що неперервність функції в точці є необхідною, але не є достатньою умовою диференційовності функції в цій точці (рис. 44.5).

Нехай M — множина точок, у яких функція f диференційовна. Кожному числу $x \in M$ поставимо у відповідність число $f'(x)$. Таке правило задає функцію з областю визначення M. Цю функцію називають **похідною функції** $y = f(x)$ і позначають f' або y'.

Якщо функція f диференційовна в кожній точці деякої множини M, то говорять, що вона **диференційовна на множині** M. Наприклад, на рисунку 44.6 зображено графік функції, диференційовної на інтервалі I. На інтервалі I цей графік не має розривів і «зломів».

Якщо функція f диференційовна на $D(f)$, то її називають **диференційовною**.

Знаходження похідної функції f називають **диференціюванням** функції f.

Рис. 44.5

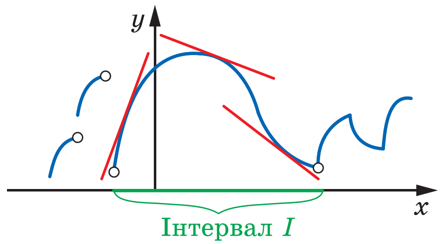


Рис. 44.6

ПРИКЛАД 2 Продиференціюйте функцію $f(x) = kx + b$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0, де x_0 — довільна точка області визначення функції f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k\ (x_0 + \Delta x) + b) - (kx_0 + b) = k\Delta x$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{k\Delta x}{\Delta x} = k$;

3) за означенням похідної $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} k = k$.

Отже, $f'(x_0) = k$.

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції f, то остання рівність означає, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f'(x) = k$. ◄

Висновок про те, що похідна лінійної функції $f(x) = kx + b$ дорівнює k, записують також у вигляді

$$\boxed{(kx + b)' = k} \qquad (1)$$

Якщо у формулу (1) підставити $k = 1$ і $b = 0$, то отримаємо:

$$\boxed{(x)' = 1}$$

Якщо ж у формулі (1) покласти $k = 0$, то отримаємо:

$$\boxed{(b)' = 0}$$

Ця рівність означає, що похідна функції, яка є константою, у кожній точці дорівнює нулю.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0, де x_0 — довільна точка області визначення функції f.

1) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x;$

3) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції $f(x) = x^2$, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f'(x) = 2x. \blacktriangleleft$$

Останню рівність записують також у вигляді

$$\boxed{(x^2)' = 2x} \qquad (2)$$

ПРИКЛАД 4 Знайдіть похідну функції $f(x) = x^3$.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0, де x_0 — довільна точка області визначення функції f.

1) $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = (x_0 + \Delta x - x_0)\left((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)\,x_0 + x_0^2\right) =$
$= \Delta x\left((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)\,x_0 + x_0^2\right);$

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x\left((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)\,x_0 + x_0^2\right)}{\Delta x} =$
$= (x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)\,x_0 + x_0^2;$

3) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left((x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)\,x_0 + x_0^2\right) = 3x_0^2.$

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції f, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f'(x) = 3x^2. \blacktriangleleft$$

Отриману рівність можна записати так:

$$\boxed{(x^3)' = 3x^2} \qquad (3)$$

Формули (2) і (3) є окремими випадками більш загальної формули

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1} \qquad (4)$$

Наприклад, $(x^5)' = 5x^4$, $(x^7)' = 7x^6$.

ПРИКЛАД 5 Доведіть, що похідна функції $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, дорівнює nx^{n-1}.

Розв'язання. Знайдемо похідну функції f у точці x_0, де x_0 — довільна точка області визначення функції f.

1) $\Delta f = (x_0 + \Delta x)^n - x_0^n;$

2) нагадаємо, що $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$. Тоді можна записати:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x - x_0)\left((x_0 + \Delta x)^{n-1} + (x_0 + \Delta x)^{n-2} x_0 + \ldots + x_0^{n-1}\right)}{\Delta x} =$$

$$= (x_0 + \Delta x)^{n-1} + (x_0 + \Delta x)^{n-2} x_0 + \ldots + x_0^{n-1};$$

3) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left((x_0 + \Delta x)^{n-1} + (x_0 + \Delta x)^{n-2} x_0 + \ldots + x_0^{n-1}\right) =$

$$= \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \ldots + x_0^{n-1}}_{n \text{ доданків}} = nx_0^{n-1}.$$

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції f, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f'(x) = nx^{n-1}. \blacktriangleleft$$

Формула (4) залишається справедливою для будь-якого $n \in \mathbb{Z}$ і $x \neq 0$, тобто

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbb{Z}} \qquad (5)$$

Доведіть це твердження самостійно.

Наприклад, скористаємося формулою (5) для знаходження похідної функції $f(x) = \frac{1}{x}$. Маємо:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Таким чином, для будь-якого $x \neq 0$ виконується рівність $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ або

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$$

ПРИКЛАД 6 Продиференціюйте функцію $f(x) = \sqrt{x}$.

Розв'язання. Нехай x_0 — довільна точка області визначення функції f, тобто $x_0 \geqslant 0$.

1) $\Delta f = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$.

2) Маємо: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \dfrac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x}\right)^2 - \left(\sqrt{x_0}\right)^2}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} =$

$$= \frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{\Delta x \cdot \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}.$$

3) Знайдемо границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. При $x_0 > 0$ маємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

При $x_0 = 0$ маємо: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$. Тому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{\Delta x}} = +\infty$. Звідси випливає, що функція $f(x) = \sqrt{x}$ не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

Таким чином, функція $f(x) = \sqrt{x}$ є диференційовною на множині $(0; +\infty)$, причому $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. ◄

Отже, для $x > 0$ можна записати: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ або

$$\boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Формулу (5) також можна узагальнити для будь-якого $r \in \mathbb{Q}$ і $x > 0$:

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1},\ r \in \mathbb{Q}} \qquad (6)$$

Наприклад, знайдемо похідну функції $f(x) = \sqrt{x}$ на множині $(0; +\infty)$, скориставшись формулою (6). Маємо:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Зазначимо, що знаходити похідну функції $y = \sqrt[3]{x}$, замінюючи її на функцію $y = x^{\frac{1}{3}}$, не можна, оскільки у цих функцій різні області визначення. Покажемо, як можна отримати формулу для знаходження похідної функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Маємо: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}\right)\left(\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\right)^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\,\sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2\right)}{\Delta x\left(\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\right)^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\,\sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0}\right)^2\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x \left(\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \right)^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\, \sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0} \right)^2 \right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \right)^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\, \sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0} \right)^2 \right)}.$$

Зрозуміло, що коли $x_0 = 0$, то цієї границі не існує, отже, функція $f(x) = \sqrt[3]{x}$ не диференційовна в точці $x_0 = 0$.

Якщо $x_0 \neq 0$, то можна записати:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\left(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \right)^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x}\, \sqrt[3]{x_0} + \left(\sqrt[3]{x_0} \right)^2 \right)} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x_0^2}}.$$

Отже, для будь-якого $x \neq 0$ виконується рівність

$$f'(x) = f'(x) = \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}$$

або

$$\boxed{\left(\sqrt[3]{\boldsymbol{x}} \right)' = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3} \sqrt[3]{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}}}$$

Узагалі, похідну функції $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, можна знаходити за формулою

$$\boxed{\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{x}} \right)' = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n} \sqrt[n]{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}}}} \qquad (7)$$

Якщо n — непарне натуральне число, то формула (7) дає змогу знаходити похідну функції f у всіх точках x таких, що $x \neq 0$.

Якщо n — парне натуральне число, то формула (7) дає змогу знаходити похідну функції f для всіх додатних значень x.

Звернемося до тригонометричних функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$. Ці функції є диференційовними, і їхні похідні знаходять за такими формулами:

$$\boxed{\begin{aligned} (\sin \boldsymbol{x})' &= \cos \boldsymbol{x} \\ (\cos \boldsymbol{x})' &= -\sin \boldsymbol{x} \end{aligned}}$$

Доведемо це.

Нехай $f(x) = \sin x$.

Для довільної точки x_0 маємо:

1) $\Delta f = \sin (x_0 + \Delta x) - \sin x_0$;

2) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x}$;

3) $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \right).$$

Скориставшись першою чудовою границею $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$ і неперервністю функції $y = \cos x$, можна записати:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x_0.$$

Отже, формулу $(\sin x)' = \cos x$ доведено.

Формулу $(\cos x)' = -\sin x$ можна довести аналогічно.

Під час обчислювання похідних зручно користуватися таблицею похідних, розміщеною на форзаці 4.

У п. 39 (приклад 3) було показано, що функція $f(x) = x\mathfrak{D}(x)$, де $\mathfrak{D}$ — функція Діріхле, будучи визначеною на $\mathbb{R}$, є неперервною рівно в одній точці $x_0 = 0$, причому $\lim\limits_{x \to 0} x\mathfrak{D}(x) = 0$.

Цікаво з'ясувати, чи є функція f диференційовною в точці $x_0 = 0$.

Маємо: $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \dfrac{(0 + \Delta x)\,\mathfrak{D}\,(0 + \Delta x) - 0}{\Delta x} = \mathfrak{D}\,(\Delta x)$.

Оскільки функція Діріхле не має границі в жодній точці області визначення, то не існує границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \mathfrak{D}(\Delta x)$. Отже, функція f не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

Розв'язуючи вправу 39.29, ви показали, що функція $g(x) = x^2\mathfrak{D}(x)$ також є неперервною рівно в одній точці $x_0 = 0$.

Дослідимо на диференційовність функцію g у точці $x_0 = 0$.

Маємо:

$$g'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(0 + \Delta x)^2\,\mathfrak{D}\,(0 + \Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x\,\mathfrak{D}\,(\Delta x) = 0.$$

Отже, похідна функції g в точці $x_0 = 0$ існує і дорівнює нулю.

Зауважимо, що $g(x) = x^2\mathfrak{D}(x)$ — це приклад функції, яка визначена на $\mathbb{R}$ і диференційовна рівно в одній точці.

ВПРАВИ

44.1.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = 5x - 6$; 2) $y = \frac{1-x}{3}$; 3) $y = 9$.

44.2.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^4$; 3) $y = x^{-15}$; 5) $y = x^{-2,8}$;

2) $y = x^{20}$; 4) $y = \frac{1}{x^{17}}$; 6) $y = x^{\frac{1}{5}}$.

44.3.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^{10}$; 3) $y = \frac{1}{x^8}$; 5) $y = x^{\frac{7}{6}}$;

2) $y = x^{-6}$; 4) $y = 8 - 3x$; 6) $y = x^{-0,2}$.

44.4.° Продиференціюйте функцію:

1) $y = \sqrt[4]{x}$; 2) $y = \sqrt[8]{x^7}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}$.

44.5.° Продиференціюйте функцію:

1) $y = \sqrt[9]{x}$; 2) $y = \sqrt[6]{x^5}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt[12]{x^7}}$.

44.6.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{4}$; 2) $f(x) = \cos x,\ x_0 = -\frac{\pi}{6}$.

44.7.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = \sin x,\ x_0 = \frac{\pi}{6}$; 2) $f(x) = \cos x,\ x_0 = -\frac{\pi}{4}$.

44.8.• Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = x\sqrt{x},\ x_0 = 81$; 3) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}},\ x_0 = 16$;

2) $f(x) = x^3\sqrt[4]{x},\ x_0 = 1$; 4) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[6]{x}},\ x_0 = 64$.

44.9.• Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0:

1) $f(x) = x\sqrt[4]{x},\ x_0 = 256$; 2) $f(x) = \sqrt[8]{x\sqrt{x}},\ x_0 = 1$.

44.10.• Користуючись означенням похідної, знайдіть $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = \frac{3}{x}$; 2) $f(x) = 4 - x^2$.

44.11.• Користуючись означенням похідної, знайдіть $f'(x)$, якщо:

1) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$; 2) $f(x) = x^2 + 3x - 2$.

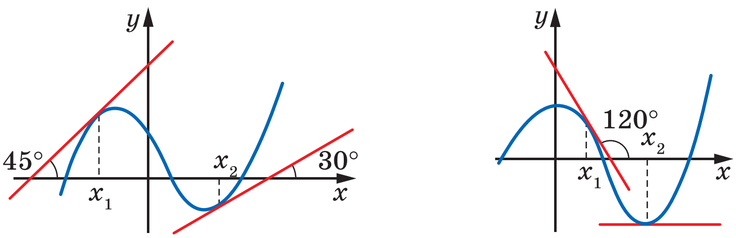
44.12.• Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$;
2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = 2$;
4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.

44.13.• Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = x^4$, $x_0 = -2$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 27$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $x_0 = -3$;
4) $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$.

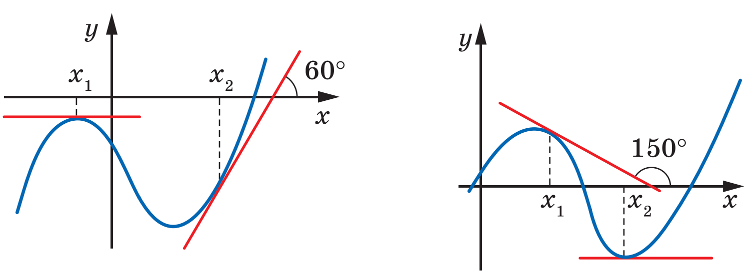
44.14.• Знайдіть за допомогою графіка функції f (рис. 44.7) значення $f'(x_1)$ і $f'(x_2)$.



а *б*

Рис. 44.7

44.15.• Знайдіть за допомогою графіка функції f (рис. 44.8) значення $f'(x_1)$ і $f'(x_2)$.



а *б*

Рис. 44.8

44.16.$^{\bullet}$ На рисунку 44.9 зображено графік функції f. Укажіть кілька значень аргументу x, для яких:

1) $f'(x) > 0$; 2) $f'(x) < 0$; 3) $f'(x) = 0$.

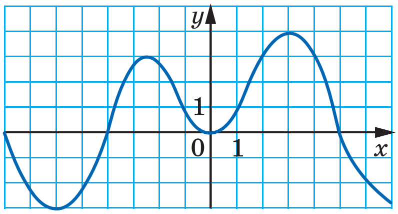


Рис. 44.9

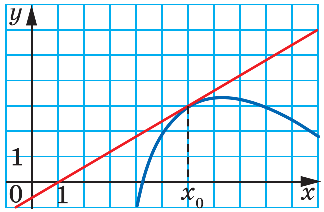


Рис. 44.10

44.17.$^{\bullet}$ До графіка функції f у точці з абсцисою x_0 проведено дотичну (рис. 44.10). Знайдіть $f'(x_0)$.

44.18.$^{\bullet}$ До графіка функції f у точці з абсцисою x_0 проведено дотичну (рис. 44.11). Знайдіть $f'(x_0)$.

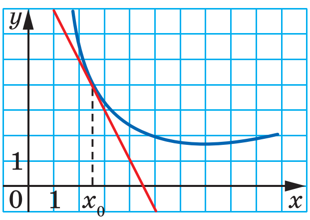


Рис. 44.11

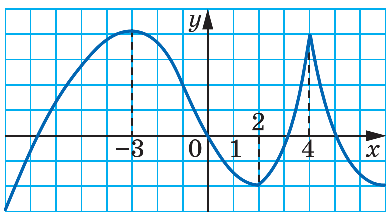


Рис. 44.12

44.19.$^{\bullet}$ На рисунку 44.12 зображено графік функції f. Укажіть точки, у яких похідна дорівнює нулю, і точки, у яких похідна не існує.

44.20.$^{\bullet}$ На рисунку 44.13 зображено графік функції f. Укажіть точки, у яких похідна дорівнює нулю, і точки, у яких похідна не існує.

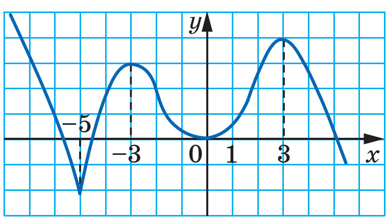


Рис. 44.13

44.21.• На рисунку 44.14 зображено графік функції f. Порівняйте числа:

1) $f'(-5)$ і $f'(1)$;
2) $f'(-1)$ і $f'(6)$;
3) $f'(-2)$ і $f'(4)$;
4) $f'(0)$ і $f'(5)$.

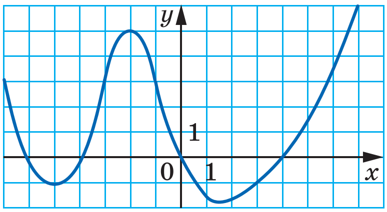


Рис. 44.14

44.22.• Дотична до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 має кутовий коефіцієнт k. Знайдіть x_0, якщо:

1) $f(x) = x^3$, $k = 3$;
2) $f(x) = \sqrt{x}$, $k = \frac{1}{4}$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $k = -\frac{1}{4}$;
4) $f(x) = \sin x$, $k = 0$.

44.23.• Дотична до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 має кутовий коефіцієнт k. Знайдіть x_0, якщо:

1) $f(x) = x^4$, $k = -32$;
2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $k = \frac{1}{27}$;
3) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $k = -\frac{1}{27}$;
4) $f(x) = \cos x$, $k = 1$.

44.24.• Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^2$. Знайдіть $s'\left(\frac{1}{2}\right)$. Який механічний зміст має знайдена величина?

44.25.• Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^3$. Знайдіть $s'(2)$. Який механічний зміст має знайдена величина?

44.26.•• Доведіть, користуючись означенням, що функція $y = \sqrt[n]{x}$ не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

44.27.•• Доведіть, користуючись означенням, що функція $y = \sqrt[3]{x^2}$ не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

44.28.•• Доведіть, користуючись означенням, що функція $y = \sqrt[3]{x^4}$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$. Знайдіть її похідну в цій точці.

44.29.•• Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x) = x\,|\,x\,|$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$. Проілюструйте отриманий результат графічно.

44.30.•• Знайдіть похідну функції $f(x) = x^2\,|\,x\,|$ у точці $x_0 = 0$.

44.31.•• Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, \text{ якщо } x < 0, \\ 1, \quad\quad \text{ якщо } x \geqslant 0, \end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$. Проілюструйте отриманий результат графічно.

44.32.•• Знайдіть похідну функції $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, \text{ якщо } x \leqslant 2, \\ 4x - 6, \text{ якщо } x > 2, \end{cases}$ у точці $x_0 = 2$.

44.33.•• Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ якщо } x \geqslant 0, \\ x, \quad\quad \text{ якщо } x < 0, \end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

44.34.•• Доведіть, користуючись означенням, що функція $y = \sqrt{1 - x^2}$ не є диференційовною в точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$. Проілюструйте отриманий результат графічно.

44.35.•• Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x \neq 0, \\ 0, \quad\quad\quad \text{ якщо } x = 0, \end{cases}$ не є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

44.36.•• Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x \neq 0, \\ 0, \quad\quad\quad \text{ якщо } x = 0, \end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$, і знайдіть $f'(0)$.

44.37.•• Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x}, \text{ якщо } x \neq 0, \\ 0, \quad\quad\quad \text{ якщо } x = 0, \end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

44.38.•• Доведіть, що функція $f(x) = \begin{cases} x^2, \quad \text{ якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ -x^2, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ є диференційовною рівно в одній точці $x_0 = 0$. Наведіть приклад функції, що є диференційовною в усіх точках координатної прямої, крім точки $x_0 = 0$.

44.39.•• Наведіть приклад функції, диференційовної рівно у двох точках.

44.40.* Функція f визначена на $\mathbb{R}$ і диференційовна в точці x_0. Знайдіть границю послідовності (a_n), яка задана формулою загального члена:

1) $a_n = n\left(f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f(x_0)\right)$; 2) $a_n = n\left(f\left(x_0 + \frac{1}{n^2}\right) - f\left(x_0 - \frac{1}{n}\right)\right)$.

44.41.* Функція f визначена на $\mathbb{R}$ і диференційовна в точці x_0. Знайдіть границю послідовності (a_n), яка задана формулою загального члена $a_n = n\left(f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) - f\left(x_0 - \frac{1}{n}\right)\right)$.

44.42.* Доведіть, користуючись означенням, що функція $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sin x}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$.

45. Правила обчислення похідних

Знайдемо, користуючись означенням, похідну функції $f(x) = x^2 + x$ у точці $x_0 \in \mathbb{R}$.

1) $\Delta f = \underbrace{(x_0 + \Delta x)^2 + (x_0 + \Delta x)}_{f(x_0 + \Delta x)} - \underbrace{\left(x_0^2 + x_0\right)}_{f(x_0)} =$

$$= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + x_0 + \Delta x - x_0^2 - x_0 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x;$$

2) $\frac{\Delta f}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x + 1;$

3) якщо $\Delta x \to 0$, то значення виразу $2x_0 + \Delta x + 1$ прямують до числа $2x_0 + 1$. Отже, при будь-якому $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x + 1) = 2x_0 + 1.$$

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції $f(x) = x^2 + x$, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність

$$f'(x) = 2x + 1,$$

тобто

$$(x^2 + x)' = 2x + 1.$$

З попереднього пункту вам відомо, що $(x^2)' = 2x$ і $(x)' = 1$. Таким чином, отримуємо:

$$(x^2 + x)' = (x^2)' + (x)'.$$

Отже, похідну функції $f(x) = x^2 + x$ можна було знайти як суму похідних функцій $y = x^2$ і $y = x$.

Справедливою є така теорема[1].

Теорема 45.1 (похідна суми). ***У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x) + g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Коротко говорять: *похідна суми дорівнює сумі похідних*.

Використовують і такий спрощений запис:

$$\boxed{(f + g)' = f' + g'}$$

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка, у якій функції f і g є диференційовними. Знайдемо приріст функції $y = f(x) + g(x)$ у точці x_0. Маємо:

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0) = (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) + (g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)) = \Delta f + \Delta g.$

Запишемо: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right).$

Оскільки функції f і g є диференційовними в точці x_0, то існують границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$. Звідси отримуємо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Отже, функція $y = f(x) + g(x)$ є диференційовною в точці x_0, причому її похідна в цій точці дорівнює $f'(x_0) + g'(x_0)$. ◄

Теорему 45.1 можна узагальнити для будь-якої скінченної кількості доданків:

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)' = f_1' + f_2' + \ldots + f_n'.$$

Використовуючи метод математичної індукції, доведіть цей факт самостійно.

Дві теореми, наведені нижче, також спрощують знаходження похідної.

---

[1] Умовами теорем 45.1–45.4 передбачено таке: якщо функції f і g є диференційовними в точці x_0, то відповідно функції $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)\,g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ та $y = f(g(x))$ визначені на деякому проміжку, що містить точку x_0.

Теорема 45.2 (похідна добутку). ***У тих точках, у яких є диференційовними функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$, також є диференційовною функція $y = f(x)\ g(x)$, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(f(x)\,g(x))' = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x).$$

Використовують і такий спрощений запис:

$$\boxed{(fg)' = f'g + g'f}$$

Доведення. Нехай x_0 — довільна точка, у якій функції f і g є диференційовними. Знайдемо приріст функції $y = f(x)\ g(x)$ у точці x_0. Ураховуючи рівності $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$, $g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) + \Delta g$, маємо:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x)\ g(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\ g(x_0) =$$
$$= (f(x_0) + \Delta f)\ (g(x_0) + \Delta g) - f(x_0)\ g(x_0) =$$
$$= f(x_0)\,g(x_0) + \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g - f(x_0)\,g(x_0) =$$
$$= \Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g.$$

Запишемо:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f \cdot g(x_0) + \Delta g \cdot f(x_0) + \Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f \cdot \Delta g}{\Delta x} \right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x \right).$$

Оскільки функції f і g є диференційовними в точці x_0, то існують границі $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}$.

Тепер можна записати:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot f(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x =$$
$$= f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)\,f(x_0) + f'(x_0) \cdot g'(x_0) \cdot 0 = f'(x_0)\,g(x_0) + g'(x_0)\,f(x_0).$$

Таким чином, функція $y = f(x)\ g(x)$ є диференційовною в точці x_0, причому її похідна в цій точці дорівнює $f'(x_0)\,g(x_0) + g'(x_0)\,f(x_0)$. ◀

Наслідок. ***У тих точках, у яких є диференційовною функція $y = f(x)$, також є диференційовною функція $y = kf(x)$, де k — деяке число, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$(kf(x))' = kf'(x).$$

Коротко говорять: *постійний множник можна виносити за знак похідної*.

Використовують і такий спрощений запис:

$$\boxed{(kf)' = kf'}$$

Доведення. Оскільки функція $y = k$ диференційовна в будь-якій точці, то, застосовуючи теорему про похідну добутку, можна записати:

$$(kf(x))' = (k)' f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x). \blacktriangleleft$$

Теорема 45.3 (похідна частки). ***У тих точках, у яких функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є диференційовними та значення функції g не дорівнює нулю, функція $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ також є диференційовною, причому для всіх таких точок виконується рівність***

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{(g(x))^2}.$$

Використовують і такий спрощений запис:

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}}$$

З доведенням теореми 45.3 ви можете ознайомитися на заняттях математичного гуртка.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть похідну функції: 1) $y = \frac{1}{x} - \sin x + 4x^2$; 2) $y = x^{-\frac{1}{2}}(5x - 3)$; 3) $y = x^3 \cos x$; 4) $y = \frac{2x^2 + 1}{3x - 2}$; 5) $h(x) = \sqrt[3]{x} \sin x$.

Розв'язання. 1) Користуючись теоремою про похідну суми та наслідком з теореми про похідну добутку, отримуємо:

$$y' = \left(\frac{1}{x} - \sin x + 4x^2\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' - (\sin x)' + 4 \cdot (x^2)' =$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \cos x + 4 \cdot 2x = -\frac{1}{x^2} - \cos x + 8x.$$

2) За теоремою про похідну добутку отримуємо:

$$y' = \left(x^{-\frac{1}{2}}(5x - 3)\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' \cdot (5x - 3) + (5x - 3)' \cdot x^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot (5x - 3) + 5 \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3 - 5x}{2\sqrt{x^3}} + \frac{5}{\sqrt{x}} = \frac{3 - 5x + 10x}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3 + 5x}{2\sqrt{x^3}}.$$

3) Маємо: $y' = (x^3 \cos x)' = (x^3)' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x^3 =$

$$= 3x^2 \cos x - \sin x \cdot x^3 = 3x^2 \cos x - x^3 \sin x.$$

4) За теоремою про похідну частки отримуємо:

$$y' = \left(\frac{2x^2+1}{3x-2}\right)' = \frac{(2x^2+1)'(3x-2)-(3x-2)'(2x^2+1)}{(3x-2)^2} =$$

$$= \frac{4x(3x-2)-3(2x^2+1)}{(3x-2)^2} = \frac{12x^2-8x-6x^2-3}{(3x-2)^2} = \frac{6x^2-8x-3}{(3x-2)^2}.$$

5) Маємо:

$$h'(x) = \left(\sqrt[3]{x}\sin x\right)' = \left(\sqrt[3]{x}\right)' \sin x + \sqrt[3]{x}\,(\sin x)' = \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x}\cos x.$$

Проте помилковим було б вважати, що отриманий результат є відповіддю до даної задачі.

Річ у тім, що при обчисленні похідних спиратися на теорему про похідну добутку двох функцій можна лише тоді, коли обидві ці функції є диференційовними. У даному прикладі функція $f(x) = \sqrt[3]{x}$ не є диференційовною в точці $x_0 = 0$, а в усіх інших точках координатної прямої і функція $f(x) = \sqrt[3]{x}$, і функція $g(x) = \sin x$ є диференційовними. Це означає, що теорему про похідну добутку було коректно застосовано для обчислення похідної функції $h(x) = \sqrt[3]{x}\sin x$ для всіх $x \neq 0$. Застосовувати ж цю теорему для обчислення похідної добутку функцій $f(x) = \sqrt[3]{x}$ і $g(x) = \sin x$ у точці $x_0 = 0$ не можна. Проте це ще не означає, що розглядувана функція $h(x) = \sqrt[3]{x}\sin x$ не диференційовна в точці $x_0 = 0$. У таких випадках звертаються до означення похідної.

Маємо: $\dfrac{\Delta h}{\Delta x} = \dfrac{h(0+\Delta x) - h(0)}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}\sin \Delta x}{\Delta x}.$

Тоді $h'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sqrt[3]{\Delta x}\dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sqrt[3]{\Delta x} \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 0 \cdot 1 = 0.$

Таким чином, функція $h(x) = \sqrt[3]{x}\sin x$ є диференційовною в точці $x_0 = 0$, причому $h'(0) = 0$.

Маємо відповідь: $h'(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x}\cos x, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$ ◄

Використовуючи теорему про похідну частки, легко довести, що

$$\boxed{\begin{aligned}(\mathrm{tg}\, x)' &= \frac{1}{\cos^2 x}\\ (\mathrm{ctg}\, x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}\end{aligned}}$$

Справді, $(\mathrm{tg}\, x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Формулу $(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ доведіть самостійно.

Розглянемо функцію $y = \sin^2 x$. Обчислити похідну цієї функції нескладно, якщо подати її у вигляді $y = \sin x \cdot \sin x$ і застосувати теорему про похідну добутку. Але для обчислення похідної, наприклад, функції $y = \sin^7 x$ цей підхід не є ефективним. Функція $y = \sin^7 x$ є складеною функцією $y = f(g(x))$, де $f(t) = t^7$, $g(x) = \sin x$.

Знаходити похідну складеної функції можна за допомогою такої теореми.

Теорема 45.4 (похідна складеної функції). ***Якщо функція $t = g(x)$ диференційовна в точці x_0, а функція $y = f(t)$ диференційовна в точці t_0, де $t_0 = g(x_0)$, то складена функція $h(x) = f(g(x))$ є диференційовною в точці x_0, причому***

$$h'(x_0) = f'(t_0) \cdot g'(x_0).$$

З доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися на с. 374.

Наприклад, функція $h(x) = \sin^7 x$ є складеною функцією $h(x) = f(g(x))$, де $f(t) = t^7$, $g(x) = \sin x$. Обчислимо похідну цієї складеної функції в точці $x_0 \in \mathbb{R}$. Маємо: $t_0 = g(x_0) = \sin x_0$. Оскільки $f'(t_0) = 7t_0^6 = 7\sin^6 x_0$, $g'(x_0) = \cos x_0$, то за теоремою про похідну складеної функції $h'(x_0) = 7\sin^6 x_0 \cdot \cos x_0$.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть похідну функції:

1) $y = (3x - 7)^6$; 2) $y = \sqrt{4x^2 + 1}$; 3) $y = \sin \dfrac{x}{2}$; 4) $y = \mathrm{tg}^3\, 5x$.

Розв'язання. 1) Дана функція $y = (3x - 7)^6$ є складеною функцією $y = f(g(x))$, де $f(t) = t^6$, $g(x) = 3x - 7$. Оскільки $f'(t) = 6t^5$, а $g'(x) = 3$, то за теоремою про похідну складеної функції можна записати:

$$y'(x) = f'(t)\, g'(x) = 6t^5 \cdot 3 \text{ при } t = 3x - 7,$$

тобто

$$y'(x) = 6\,(3x - 7)^5 \cdot 3 = 18\,(3x - 7)^5.$$

Розв'язання цієї задачі можна оформити й так:

$$y' = ((3x - 7)^6)' = 6\,(3x - 7)^5 \cdot (3x - 7)' = 6\,(3x - 7)^5 \cdot 3 = 18\,(3x - 7)^5.$$

2) $y' = \left(\sqrt{4x^2 + 1}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{4x^2 + 1}} \cdot (4x^2 + 1)' = \dfrac{8x}{2\sqrt{4x^2 + 1}} = \dfrac{4x}{\sqrt{4x^2 + 1}}.$

3) $y' = \left(\sin \dfrac{x}{2}\right)' = \cos \dfrac{x}{2} \cdot \left(\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{1}{2} \cos \dfrac{x}{2}.$

4) $y' = (\operatorname{tg}^3 5x)' = 3\operatorname{tg}^2 5x \cdot (\operatorname{tg} 5x)' = 3\operatorname{tg}^2 5x \cdot \dfrac{(5x)'}{\cos^2 5x} = \dfrac{15 \operatorname{tg}^2 5x}{\cos^2 5x}.$ ◄

ПРИКЛАД 3 Знайдіть значення похідної функції $h(x) = \sqrt[3]{x^2 \sin x}$ у точці $x_0 = 0$.

Розв'язання. Дана функція є складеною функцією $h(x) = f(g(x))$, де $f(t) = \sqrt[3]{t}$, $g(x) = x^2 \sin x$. Функція g є диференційовною в точці $x_0 = 0$, але функція f не є диференційовною в точці $t_0 = g(0) = 0$. Отже, теорему 45.4 для пошуку похідної складеної функції h у точці $x_0 = 0$ застосувати не можна.

Скориставшись означенням похідної, отримуємо:

$$h'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x^2 \sin \Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt[3]{\frac{\sin \Delta x}{\Delta x}} = 1.$$

Отже, незважаючи на недиференційовність функції f у точці $t_0 = 0$, похідна складеної функції в точці $x_0 = 0$ існує і дорівнює 1. ◄

Розглянемо неперервну та оборотну функцію f, область визначення якої — деякий проміжок (рис. 45.1). Якщо функція f є диференційовною в точці x_0, то до графіка цієї функції в точці $(x_0; y_0)$, де $y_0 = f(x_0)$, можна провести дотичну. Нехай ця дотична не є горизонтальною прямою, тобто $f'(x_0) \neq 0$.

Позначимо через g функцію, обернену до f. Ви знаєте, що графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$. Вони є рівними фігурами, а отже, мають багато однакових геометричних властивостей. Має місце таке твердження: якщо неперервна та оборотна функція f визначена на деякому проміжку і графік функції f має негоризонтальну дотичну в точці $(x_0; y_0)$, то графік оберненої функції g в точці $(y_0; x_0)$ має невертикальну дотичну (рис. 45.1). Це означає, що обернена функція g є диференційовною в точці y_0.

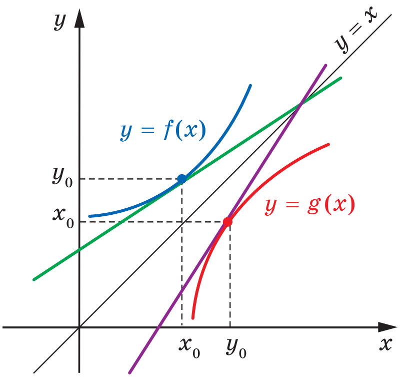


Рис. 45.1

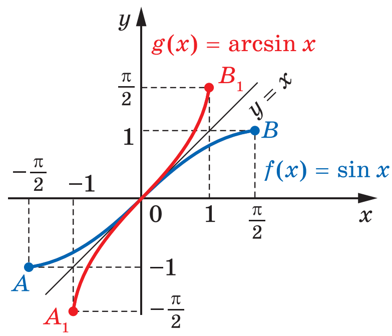


Рис. 45.2

Розглянемо неперервну та оборотну функцію $f(x) = \sin\, x$, $D(f) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 45.2). У точках $A\left(-\frac{\pi}{2}; -1\right)$ і $B\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ графік функції f має горизонтальні дотичні. Це означає, що графік оберненої функції $g(x) = \arcsin\, x$ у точках $A_1\left(-1; -\frac{\pi}{2}\right)$ і $B_1\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$ має вертикальні дотичні. Тому функція $g(x) = \arcsin\, x$ не є диференційовною в точках -1 і 1.

У точках, відмінних від A і B, графік функції f має негоризонтальні дотичні. Тому графік функції g у точках, відмінних від A_1 і B_1, має невертикальні дотичні. Отже, функція $g(x) = \arcsin\, x$ є диференційовною на інтервалі $(-1; 1)$.

Знайдемо похідну функції $g(x) = \arcsin\, x$.

Маємо: $\sin\,(\arcsin\, x) = x$. Диференціюючи обидві частини цієї рівності, отримуємо:

$$\cos\,(\arcsin\, x) \cdot (\arcsin\, x)' = 1.$$

Оскільки $\cos\,(\arcsin\, x) = \sqrt{1 - x^2}$ і $\sqrt{1 - x^2} \neq 0$ для всіх $x \in (-1; 1)$, то

$$\boxed{(\arcsin\, x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

Із курсу алгебри 10 класу ви знаєте, що $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Оскільки функція $y = \arcsin x$ не є диференційовною в точках -1 і 1, то функція $y = \arccos x$ також не є диференційовною в точках -1 і 1.

Для будь-якого $x \in (-1; 1)$ можна записати:

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отже,

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Міркуючи аналогічно, ви можете самостійно довести диференційовність функцій $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$ та вивести такі формули:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Зв'язок між похідними взаємно обернених функцій установлює така теорема.

Теорема 45.5. ***Нехай оборотна функція $y = f(x)$ має в точці x_0 похідну, відмінну від нуля, а обернена до неї функція $x = g(y)$ є неперервною в точці y_0, де $y_0 = f(x_0)$. Тоді функція g є диференційовною в точці y_0 і $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.***

З доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися на с. 375.

ВПРАВИ

45.1.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 6x - 10$;
2) $y = x^{-6} + 20\sqrt{x}$;
3) $y = x^8 + 7x^6 + \frac{4}{x} - 1$;
4) $y = 4 \sin x - 5 \cos x$;
5) $y = \operatorname{tg} x - 9x$;
6) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8} + 2$.

45.2.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = 2x^5 - x$;
2) $y = -3 \sin x + 2 \cos x$;
3) $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 7x$;

4) $y = x - \frac{5}{x}$; 5) $y = 12 - \operatorname{ctg} x$; 6) $y = 0{,}4x^{-5} + \sqrt{3}$.

45.3.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = (x+2)(x^2 - 4x + 5)$; 3) $y = x^2 \sin x$;

2) $y = (3x+5)(2x^2 - 1)$; 4) $y = x \operatorname{ctg} x$.

45.4.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = (x^3 - 2)(x^2 + 1)$; 3) $y = x^4 \cos x$;

2) $y = (x+5)(1 - x^3)$; 4) $y = x \operatorname{tg} x$.

45.5.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{2x-3}{4-5x}$; 3) $y = \frac{5x^2 - x - 2}{x}$; 5) $y = \frac{3 - x^2}{4 + 2x}$;

2) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$; 4) $y = \frac{x^3}{\cos x}$; 6) $y = \frac{x^2 - 5x}{x - 7}$.

45.6.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = \frac{3x+5}{x-8}$; 2) $y = \frac{2x^2}{1-6x}$; 3) $y = \frac{\sin x}{x}$; 4) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

45.7.° Чому дорівнює значення похідної функції f у точці x_0, якщо:

1) $f(x) = \frac{8}{x} + 5x - 2$, $x_0 = 2$; 3) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 10\sqrt[5]{x}$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = (1 + 3x)\sqrt{x}$, $x_0 = 9$; 4) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)\cos x$, $x_0 = 0$.

45.8.° Обчисліть значення похідної функції f у точці x_0, якщо:

1) $f(x) = \sqrt{x} - 16x$, $x_0 = \frac{1}{4}$; 3) $f(x) = x^{-2} - 4x^{-3}$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - x}$, $x_0 = 0$; 4) $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 1}{x + 1}$, $x_0 = 1$.

45.9.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = (2x+3)^5$; 4) $y = 3\operatorname{ctg}\frac{x}{5}$; 7) $y = (6 - 7x)^{-4}$;

2) $y = \cos 2x$; 5) $y = \sqrt[5]{-1 - x - x^2}$; 8) $y = \sqrt{2 + \sin x}$.

3) $y = \sin^2 x$; 6) $y = \frac{1}{4x + 5}$;

45.10.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = (2x^2 - 3x + 4)^3$; 4) $y = 2 \operatorname{tg} 4x$; 7) $y = (9x - 2)^{-3}$;

2) $y = \sin\frac{x}{3}$; 5) $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$; 8) $y = \sqrt{3 - \cos x}$.

3) $y = \cos^2 x$; 6) $y = \sqrt[7]{-2x^2 - x - 2}$;

45.11.° Василь Заплутайко для знаходження похідної функції $y = \sin 2x$ застосовує такий алгоритм:

1) робить заміну $2x = t$ і отримує функцію $y = \sin t$;
2) далі пише: $y' = (\sin t)' = \cos t$;
3) потім підставляє значення $2x = t$ і робить висновок, що $(\sin 2x)' = \cos 2x$.

У чому полягає помилка Василя?

45.12.° Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t) = \sqrt{4t^2 - 6t + 11}$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть швидкість руху тіла в момент часу $t_0 = 5$ с.

45.13.° Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = (t + 2)^2 (t + 5)$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть її швидкість руху в момент часу $t_0 = 3$ с.

45.14.• Знайдіть похідну функції:

1) $y = x\sqrt{2x^2 + x + 1}$;
2) $y = \sin x \cos 2x$;
3) $y = \operatorname{tg} x \sin (2x + 5)$;
4) $y = \dfrac{\cos 3x}{x - 1}$;
5) $y = (x + 1)^3 (x - 2)^4$;
6) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

45.15.• Знайдіть похідну функції:

1) $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{6}{x^2} - \dfrac{5}{x^6}$;
2) $y = x\sqrt{x^2 + 3}$;
3) $y = \sin 2x \cos x$;
4) $y = (x + 2)^5 (x - 3)^4$;
5) $y = \dfrac{2x - 3}{\sin \dfrac{x}{4}}$.

45.16.• Василь Заплутайко знаходить похідну функції $f(x) = \arcsin x + \arccos x$ на її області визначення так:

$$f'(x) = (\arcsin x + \arccos x)' = (\arcsin x)' + (\arccos x)' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} = 0$$

для всіх $x \in D(f)$.

Чи погоджуєтеся ви з розв'язанням Василя? Чи правильну відповідь отримав Василь?

45.17.• Знайдіть похідну функції $y = \operatorname{arctg} 4x + \operatorname{arcctg} 4x$.

45.18.• Матеріальна точка масою 4 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^2 + 4$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть імпульс $p(t) = mv(t)$ матеріальної точки в момент часу $t_0 = 2$ с.

45.19.• Тіло масою 2 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 3t^2 - 4t + 2$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть кінетичну енергію $E(t) = \frac{mv^2(t)}{2}$ тіла в момент часу $t_0 = 4$ с.

45.20.• Тіло рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^2 - 8t + 15$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Визначте координату тіла в момент часу, коли його кінетична енергія дорівнює нулю.

45.21.• Знайдіть похідну функції:

1) $y = \cos^3 2x$; 2) $y = \sqrt{2 + \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{4}\right)}$; 3) $y = \left(\sin\frac{x}{3} - 5\right)^6$.

45.22.• Обчисліть:

1) $f'(0)$, якщо $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2x-1}}$;

2) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, якщо $f(x) = \sin^2\frac{x}{2}$;

3) $f'(0)$, якщо $f(x) = (\cos 3x + 6)^3$.

45.23.• Знайдіть похідну функції:

1) $y = \operatorname{arctg} x^3$;

2) $y = \frac{\arccos x}{x^2 - 1}$;

3) $y = \operatorname{arcctg}(x^2 - 1)$;

4) $y = \operatorname{arctg}^2\frac{1}{x}$.

45.24.• Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^2 \operatorname{arcctg} x$;

2) $y = \frac{\arcsin\sqrt{x}}{x^2 - x}$;

3) $y = x^2 \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

4) $y = \operatorname{arctg}^2 3x$.

45.25.•• У точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$ знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^2 - 4|x| + 3$; 2) $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$.

45.26.•• У точках $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$ знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = x^2 - 6|x| + 5$; 2) $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$.

45.27.•• Про функцію f відомо, що $f(1) = -1$, $f'(1) = 2$. Знайдіть $g'(1)$, якщо:

1) $g(x) = f(x^2)$;

2) $g(x) = f^3(x)$;

3) $g(x) = \frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos(\pi f(x))}$;

4) $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$

45.28.•• Про функцію f відомо, що $f(2)=1$, $f'(2)=3$. Знайдіть $g'(2)$, якщо:

1) $g(x)=xf(x)$; 2) $g(x)=(f(x)-2x)^5$; 3) $g(x)=f\left(1+\sqrt{f(x)}\right)$.

45.29.•• Про диференційовну функцію f відомо, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f^3(x)+x^2f(x)+1=x$. Знайдіть $f'(1)$.

45.30.•• Про диференційовну функцію f відомо, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $x^2f^3(x)+f(x)=x$. Знайдіть $f'(0)$.

45.31.•• Доведіть, що похідна періодичної функції є періодичною функцією. Наведіть приклади.

45.32.•• Доведіть, що похідна парної функції є непарною функцією. Наведіть приклади.

45.33.•• Доведіть, що похідна непарної функції є парною функцією. Наведіть приклади.

45.34.•• Функції f і g визначені на $\mathbb{R}$. Що можна стверджувати про диференційовність функції $y=f(x)+g(x)$ у точці x_0, якщо:

1) f є диференційовною в точці x_0, а g — ні;
2) f і g не диференційовні в точці x_0?

45.35.•• Функції f і g визначені на $\mathbb{R}$. Що можна стверджувати про диференційовність функції $y=f(x)\,g(x)$ у точці x_0, якщо:

1) f є диференційовною в точці x_0, а g — ні;
2) f і g не диференційовні в точці x_0?

45.36.•• Наведіть приклад функцій f і g таких, щоб функція $f(g(x))$ була диференційовною в точці x_0, причому:

1) f є диференційовною в точці $g(x_0)$, а g не є диференційовною в точці x_0;
2) g є диференційовною в точці x_0, а f не є диференційовною в точці $g(x_0)$;
3) f не є диференційовною в точці $g(x_0)$ і g не є диференційовною в точці x_0.

45.37.•• Василь Заплутайко шукає похідну функції $y=\sqrt[3]{x^5}$ так:

1) розглядає функцію $y=\sqrt[3]{x^5}$ як складену функцію $y=f(g(x))$, де $f(t)=\sqrt[3]{t}$, $g(x)=x^5$;
2) використовуючи теорему про похідну складеної функції, записує:

$$y'=\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x^5)^2}}\cdot(x^5)'=\frac{5x^4}{3\cdot\sqrt[3]{x^{10}}}=\frac{5\sqrt[3]{x^{12}}}{3\cdot\sqrt[3]{x^{10}}};$$

3) далі при $x \neq 0$ отримує висновок, що $y' = \dfrac{5\sqrt[3]{x^2}}{3}$, а в точці $x = 0$ дана функція не є диференційовною.

Чи погоджуєтеся ви з Василем?

45.38.•• Знайдіть похідну функції $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{tg}\,x$ на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

45.39.•• Знайдіть похідну функції $f(x) = \sqrt[3]{\sin^4 x + x^4}$.

45.40.* Знайдіть $f'(0)$, якщо $f(x) = (x+1)(x+2)\ldots(x+10)\sin x$.

45.41.* Обчисліть суму $S = 100 \cdot 3^{99} + 98 \cdot 3^{97} + 96 \cdot 3^{95} + \ldots + 2 \cdot 3$.

45.42.* Обчисліть суму $S = 4^{30} - 2 \cdot 4^{29} + 3 \cdot 4^{28} - \ldots + 29 \cdot 4^2 - 30 \cdot 4$.

45.43.* Знайдіть усі такі многочлени P, що $P(P(x)) = x^{100}$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

45.44.* Доведіть, що функція $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \end{cases}$ є диференційовною на $\mathbb{R}$, але функція $y = f'(x)$ не є неперервною.

45.45.* На дошці записано функції $y = (x-1)^2$ і $y = \dfrac{x}{x^2+1}$. Якщо на дошці записано функції f і g, то дозволяється дописати будь-яку з функцій $y = f^2(x)$, $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)g(x)$, $y = f(g(x))$, $y = f(x) + c$, $y = cf(x)$, де c — довільна стала. Чи може в результаті виконання декількох таких дій на дошці з'явитися функція $y = \dfrac{1}{x^2+1}$?

Доведення теорем про похідні складеної та оберненої функцій

Лема 45.1. ***Нехай функція f визначена на деякому проміжку, що містить точку x_0. Функція f диференційовна в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли існує така неперервна в точці x_0 функція φ, що для всіх $x \in D(f)$ виконується рівність $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\varphi(x)$. При цьому $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.***

Доведення. Нехай функція f диференційовна в точці x_0. Тоді існує границя $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, яка дорівнює $f'(x_0)$.

Розглянемо функцію

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & \text{якщо } x\neq x_0,\\ f'(x_0), & \text{якщо } x=x_0.\end{cases}$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=f'(x_0)=\varphi(x_0)$, то функція φ неперервна в точці x_0. Тепер очевидно, що для всіх $x\in D(f)$ виконується рівність $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\,\varphi(x)$. Тим самим доведено першу частину леми.

Нехай тепер існує така неперервна в точці x_0 функція φ, що для всіх $x\in D(f)$ виконується рівність $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)\,\varphi(x)$. Тоді для всіх $x\in D(f)$, $x\neq x_0$, можна записати:

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Оскільки функція φ неперервна в точці x_0, то існує границя

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$$

Це означає, що функція f є диференційовною в точці x_0 і $\varphi(x_0)=f'(x_0)$. ◄

Доведення теореми про похідну складеної функції

Доведемо, що складена функція $h(x)=f(g(x))$, де функція $t=g(x)$ диференційовна в точці x_0, а функція $y=f(t)$ диференційовна в точці $t_0=g(x_0)$, є диференційовною в точці x_0, причому

$$h'(x_0)=f'(t_0)\cdot g'(x_0).$$

Доведення. Оскільки функція $y=f(t)$ диференційовна в точці t_0, то за лемою 45.1 існує неперервна в точці t_0 функція $y=\varphi(t)$ така, що для всіх $t\in D(f)$ виконується рівність

$$f(t)-f(t_0)=(t-t_0)\,\varphi(t) \qquad (1)$$

і $f'(t_0)=\varphi(t_0)$.

Зробивши в рівності (1) підстановки $t=g(x)$, $t_0=g(x_0)$, отримаємо рівність

$$f(g(x))-f(g(x_0))=(g(x)-g(x_0))\,\varphi(g(x)), \qquad (2)$$

яка виконується для всіх x із області визначення складеної функції $h(x)=f(g(x))$.

Оскільки функція $t = g(x)$ є диференційовною в точці x_0, то за лемою 45.1 для неї існує неперервна в точці x_0 функція $t = \varphi_1(x)$ така, що для всіх $x \in D(g)$ виконується рівність

$$g(x) - g(x_0) = (x - x_0)\,\varphi_1(x) \qquad (3)$$

і $g'(x_0) = \varphi_1(x_0)$.

З урахуванням рівності (3) рівність (2) можна переписати так:

$$f(g(x)) - f(g(x_0)) = (x - x_0)\,\varphi_1(x)\,\varphi(g(x)).$$

Функція $y = \varphi_1(x)\,\varphi(g(x))$ є неперервною в точці x_0 (доведіть це самостійно). Тому за лемою 45.1 складена функція $h(x) = f(g(x))$ є диференційовною в точці x_0 і

$$h'(x_0) = \varphi_1(x_0)\,\varphi(g(x_0)) = \varphi_1(x_0)\,\varphi(t_0) = g'(x_0)\,f'(t_0). \blacktriangleleft$$

Доведення теореми про похідну оберненої функції

Нехай функція $y = f(x)$ є диференційовною в точці x_0 і $f'(x_0) \neq 0$. Доведемо, що коли функція $x = g(y)$, обернена до функції $y = f(x)$, є неперервною в точці $y_0 = f(x_0)$, то вона є диференційовною в цій точці.

Доведення. Оскільки функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x_0, то за лемою 45.1 існує неперервна в точці x_0 функція $y = \varphi(x)$ така, що для всіх $x \in D(f)$ виконується рівність

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\,\varphi(x) \qquad (4)$$

і $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Зробивши в рівності (4) підстановки $x = g(y)$, $x_0 = g(y_0)$, отримаємо рівність

$$f(g(y)) - f(g(y_0)) = (g(y) - g(y_0))\,\varphi(g(y)),$$

$$y - y_0 = (g(y) - g(y_0))\,\varphi(g(y)), \qquad (5)$$

яка виконується для всіх $y \in D(g)$. З рівності (5) випливає, що $\varphi(g(y)) \neq 0$ при всіх $y \in D(g)$, де $y \neq y_0$. Крім цього, $\varphi(g(y)) = \varphi(x_0) = f'(x_0) \neq 0$. Тому $\varphi(g(y)) \neq 0$ для всіх $y \in D(g)$. Тоді рівність (5) можна переписати так:

$$g(y) - g(y_0) = \frac{1}{\varphi(g(y))}(y - y_0).$$

Функція $x = \dfrac{1}{\varphi(g(y))}$ є неперервною в точці y_0 (доведіть це самостійно). Тому за лемою 45.1 функція $x = g(y)$ є диференційовною в точці y_0 і

$$g'(y_0) = \frac{1}{\varphi(g(y_0))} = \frac{1}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}. \blacktriangleleft$$

46. Рівняння дотичної

Нехай функція f є диференційовною в точці x_0. Тоді до графіка функції f у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну (рис. 46.1).

Із курсу геометрії 9 класу ви знаєте, що рівняння невертикальної прямої має вигляд $y = kx + b$, де k — кутовий коефіцієнт цієї прямої.

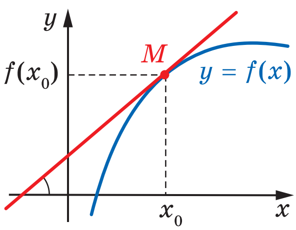


Рис. 46.1

Зважаючи на геометричний зміст похідної, отримуємо: $k = f'(x_0)$.

Тоді рівняння дотичної можна записати так:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b. \qquad (1)$$

Ця пряма проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$. Отже, координати цієї точки задовольняють рівняння (1). Маємо:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x + b.$$

Звідси $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$. Підставимо знайдене значення b у рівняння (1):

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Перетворивши праву частину отриманої рівності, можна зробити висновок: **рівняння дотичної, проведеної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0,** має вигляд

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

Наприклад, знайдемо рівняння дотичної до прямої $f(x) = kx + b$ у точці з абсцисою x_0. Маємо: $f(x_0) = kx_0 + b$; $f'(x) = k$; $f'(x_0) = k$. Підставивши знайдені значення в рівняння дотичної, отримуємо: $y = k(x - x_0) + kx_0 + b$. Звідси $y = kx + b$.

Оскільки x_0 вибрано довільно, то можна зробити такий висновок: дотична до прямої у будь-якій її точці збігається із самою прямою.

Цей приклад показує, що дотична до графіка функції може мати з графіком не одну, а навіть нескінченну кількість спільних точок.

ПРИКЛАД 1 Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2 - 4x - 3x^2$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

Розв'язання. Маємо: $f(x_0) = f(-2) = 2 - 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2)^2 = -2$; $f'(x) = -4 - 6x$;

$f'(x_0) = f'(-2) = -4 - 6 \cdot (-2) = 8$. Підставивши знайдені числові значення в рівняння дотичної, отримуємо: $y = 8\ (x + 2) - 2$, тобто $y = 8x + 14$.

Відповідь: $y = 8x + 14$. ◄

ПРИКЛАД 2 Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \frac{x+4}{x-4}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = -2x + 4$.

Розв'язання. Маємо:

$$f'(x) = \frac{(x+4)'(x-4) - (x-4)'(x+4)}{(x-4)^2} = \frac{(x-4)-(x+4)}{(x-4)^2} = -\frac{8}{(x-4)^2}.$$

Якщо дотична паралельна прямій $y = -2x + 4$, то її кутовий коефіцієнт k дорівнює -2.

Оскільки $f'(x_0) = k$, де x_0 — абсциса точки дотику шуканої прямої та графіка функції f, то $f'(x_0) = -2$, тобто $-\frac{8}{(x_0-4)^2} = -2$. Звідси

$$(x_0 - 4)^2 = 4; \quad \left[\begin{array}{l} x_0 - 4 = 2, \\ x_0 - 4 = -2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_0 = 6, \\ x_0 = 2. \end{array}\right.$$

Отже, на графіку функції $f(x) = \frac{x+4}{x-4}$ існують дві точки, у яких дотичні до нього паралельні даній прямій.

При $x_0 = 6$ маємо: $f(x_0) = 5$. Тоді рівняння дотичної має вигляд $y = -2\ (x - 6) + 5$; $y = -2x + 17$.

При $x_0 = 2$ отримуємо: $f(x_0) = -3$. Тоді рівняння дотичної має вигляд $y = -2\ (x - 2) - 3$; $y = -2x + 1$.

Відповідь: $y = -2x + 17$; $y = -2x + 1$. ◄

ПРИКЛАД 3 Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2 - 5x - 6$, яка проходить через точку $M\ (-1; -1)$.

Розв'язання. Зауважимо, що $f(-1) \neq -1$. Із цього випливає, що точка $M\ (-1; -1)$ не належить графіку функції f.

Нехай $A\ (x_0; f(x_0))$ — точка дотику шуканої прямої до графіка функції f. Оскільки $f(x_0) = -x_0^2 - 5x_0 - 6$ і $f'(x_0) = -2x_0 - 5$, то рівняння дотичної має вигляд

$$y = (-2x_0 - 5)(x - x_0) + \left(-x_0^2 - 5x_0 - 6\right).$$

Ураховуючи, що координати точки $M\ (-1; -1)$ задовольняють отримане рівняння, маємо:

$$-1 = (-2x_0 - 5)(-1 - x_0) + \left(-x_0^2 - 5x_0 - 6\right).$$

Звідси, розкривши дужки та розв'язавши квадратне рівняння, отримаємо: $x_0 = 0$ або $x_0 = -2$. Таким чином, через точку M проходять дві дотичні до графіка функції f: $y = -5x - 6$ і $y = -x - 2$.

Відповідь: $y = -5x - 6$; $y = -x - 2$. ◄

ВПРАВИ

46.1.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x) = x^3 - 27$, $x_0 = 2$;
2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$;
3) $f(x) = 4\sqrt{x} - 3$, $x_0 = 9$;
4) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$;
5) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$;
6) $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
7) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x_0 = -2$;
8) $f(x) = \sqrt{2x+5}$, $x_0 = 2$.

46.2.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x$, $x_0 = 1$;
2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
3) $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x}$, $x_0 = -1$;
4) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$, $x_0 = 3$.

46.3.• Запишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в точці його перетину з віссю ординат:

1) $f(x) = x^2 - 3x - 3$;
2) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$.

46.4.• Запишіть рівняння дотичної до графіка даної функції в точці його перетину з віссю ординат:

1) $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$;
2) $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

46.5.• Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці його перетину з віссю абсцис:

1) $f(x) = 8x^3 - 1$;
2) $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

46.6.• Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці його перетину з віссю абсцис:

1) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 1}$;
2) $f(x) = 3x - x^2$.

46.7.• Знайдіть координати точки параболи $y = 2x^2 - x + 1$, у якій дотична до неї паралельна прямій $y = 7x - 8$.

46.8.° У яких точках дотичні до графіка функції $y = \frac{1}{x}$ паралельні прямій $y = -x$?

46.9.° До графіка функції $f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$ проведено дотичні в точках з абсцисами $x_1 = \frac{\pi}{2}$ і $x_2 = \frac{3\pi}{2}$. Яке взаємне розміщення цих дотичних?

46.10.° Знайдіть таку точку графіка функції f, що проведена в цій точці дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α, якщо:

1) $f(x) = x^2 - 7x + 3$, $\alpha = 45°$;
2) $f(x) = -3x^2 + 2\sqrt{3}x - 2$, $\alpha = 60°$;
3) $f(x) = \sqrt{3x + 2}$, $\alpha = 45°$;
4) $f(x) = \frac{x + 7}{x - 2}$, $\alpha = 135°$.

46.11.° Знайдіть таку точку графіка функції f, що проведена в цій точці дотична утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α, якщо:

1) $f(x) = \sqrt{3}x - \frac{x^3}{3}$, $\alpha = 60°$;
2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, $\alpha = 45°$.

46.12.° Доведіть, що будь-яка дотична до графіка функції f утворює тупий кут з додатним напрямом осі абсцис:

1) $f(x) = 6 - x - x^3$;
2) $f(x) = \frac{5 - x}{x - 3}$.

46.13.° Доведіть, що будь-яка дотична до графіка функції f утворює гострий кут з додатним напрямом осі абсцис:

1) $f(x) = x^5 + 2x - 8$;
2) $f(x) = \frac{4}{1 - x}$.

46.14.° Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції:

1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$;
2) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 1$.

46.15.° Знайдіть рівняння горизонтальних дотичних до графіка функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$.

46.16.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = x^2 - 5x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = -x$;
2) $f(x) = x - \frac{1}{x^2}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 3x$;
3) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 10x - 1$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 2x + 1$.

46.17.$^{\bullet}$ Складіть рівняння дотичної до графіка функції:

1) $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = -7x + 3$;
2) $f(x) = \sqrt{x}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = x$.

46.18.$^{\bullet}$ Установіть, чи є пряма $y = 12x - 10$ дотичною до графіка функції $f(x) = 4x^3$. У разі ствердної відповіді вкажіть абсцису точки дотику.

46.19.$^{\bullet}$ Установіть, чи є пряма $y = x$ дотичною до графіка функції $y = \sin x$. У разі ствердної відповіді вкажіть абсцису точки дотику.

46.20.$^{\bullet}$ Установіть, чи є пряма $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ дотичною до графіка функції $y = \sqrt{x}$. У разі ствердної відповіді вкажіть абсцису точки дотику.

46.21.$^{\bullet}$ Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = x^2 - 4$ у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

46.22.$^{\bullet}$ Обчисліть площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = x^3 + x^2 - 6x + 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$.

46.23.$^{\bullet}$ Знайдіть площу трикутника, утвореного прямою $y = 2 - x$, віссю абсцис і дотичною до параболи $y = 1 + 2x - x^2$ у точці її перетину з віссю ординат.

46.24.$^{\bullet}$ Знайдіть площу трикутника, обмеженого віссю x, прямою $x = 4$ і дотичною до графіка функції $f(x) = x^2 - 2x + 4$ у точці з абсцисою $x_0 = 4$.

46.25.$^{\bullet}$ Василь Заплутайко шукає дотичну до графіка функції $f(x) = 3x - 1 + \sin x$ у точці $x_0 = 0$. Оскільки $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, то біля точки $x_0 = 0$ графік функції f поводиться майже так само, як і графік лінійної функції $y = 3x - 1$. Тому пряма $y = 3x - 1$ є дотичною до графіка функції f у точці $x_0 = 0$. Чи погоджуєтеся ви з міркуваннями Василя?

46.26.$^{\bullet}$ На графіку функції $f(x) = -\sqrt{2x+1}$ знайдіть точку, у якій дотична до нього перпендикулярна до прямої $y - 2x + 1 = 0$.

46.27.$^{\bullet}$ Чи існують дотичні до графіка функції $f(x) = x^3 + 2x - 1$, які перпендикулярні до прямої $y = -x$?

46.28.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях b і c парабола $y = x^2 + bx + c$ дотикається до прямої $y = 4x + 1$ у точці з абсцисою $x_0 = 1$?

46.29.•• При яких значеннях a і b пряма $y = 7x - 2$ дотикається до параболи $y = ax^2 + bx + 1$ у точці A (1; 5)?

46.30.•• Парабола з вершиною на осі x дотикається до прямої, яка проходить через точки A (1; 2) і B (2; 4), у точці B. Знайдіть рівняння параболи.

46.31.•• Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -2x^4 + 1$, якщо ця дотична проходить через точку $M\left(-\frac{5}{4}; 17\right)$.

46.32.•• Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2x^3 + 2$, якщо ця дотична проходить через точку M (0; −2).

46.33.•• У якій точці графіка функції $f(x) = \frac{4x - 1}{x}$ потрібно провести дотичну, щоб ця дотична проходила через початок координат?

46.34.•• У якій точці графіка функції $y = x + \frac{3}{x}$ потрібно провести дотичну, щоб ця дотична перетнула вісь ординат у точці (0; 6)?

46.35.•• Функція g є оберненою до функції $f(x) = x^5 + 3x - 1$. Складіть рівняння дотичної до графіка функції g у точці з абсцисою $x_0 = 3$.

46.36.•• Функція g є оберненою до функції $f(x) = x^3 + 6x + 5$. Складіть рівняння дотичної до графіка функції g у точці з абсцисою $x_0 = -2$.

46.37.•• Скільки розв'язків має система $\begin{cases} y = x^4, \\ y + 8 = a\left(x + \frac{5}{4}\right) \end{cases}$ залежно від значення параметра a?

46.38.•• Скільки розв'язків має система $\begin{cases} y = x^3, \\ y = ax + a - 5 \end{cases}$ залежно від значення параметра a?

46.39.•• Дві перпендикулярні дотичні до графіка функції $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2$ перетинаються в точці A, яка належить осі ординат. Знайдіть координати точки A.

46.40.•• Дві перпендикулярні дотичні до графіка функції $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}$ перетинаються в точці A, яка належить осі ординат. Знайдіть координати точки A.

46.41.•• Наведіть приклад диференційовної на $\mathbb{R}$ функції f такої, що $f(x) = \frac{1}{x-3}$ для всіх $x \in (-\infty; 2)$.

46.42.•• Наведіть приклад диференційовної на $\mathbb{R}$ функції f такої, що $f(x) = \sqrt{3x-5}$ для всіх $x \in [3; +\infty)$.

46.43.•• При яких значеннях a пряма $y = ax + 1$ є дотичною до графіка функції $f(x) = \sqrt{4x+1}$?

46.44.•• При яких значеннях a пряма $y = 2x + a$ є дотичною до графіка функції $f(x) = \sqrt{4x-1}$?

46.45.•• Знайдіть рівняння спільної дотичної до графіків функцій $f(x) = x^2 - 2x + 5$ і $g(x) = x^2 + 2x - 11$.

46.46.•• Знайдіть рівняння спільної дотичної до графіків функцій $f(x) = x^2 + 4x + 8$ і $g(x) = x^2 + 8x + 4$.

46.47.* На координатній площині зображено графік функції $f(x) = \frac{k}{x}$, на якому позначено точку A. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте дотичну до графіка функції f у точці A.

46.48.* На координатній площині зображено графік функції $f(x) = ax^2$, на якому позначено точку A. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте дотичну до графіка функції f у точці A.

46.49.* Знайдіть рівняння прямої, яка дотикається до графіка функції $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 1$ у двох точках.

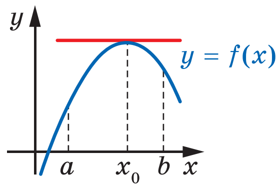
46.50.* Нехай P — многочлен степеня n і A — точка на координатній площині. Доведіть, що існує не більше ніж n прямих, які проходять через точку A і дотикаються до графіка многочлена P.

46.51.* Про диференційовну на $\mathbb{R}$ функцію f відомо, що вона в раціональних точках набуває раціональних значень, а в ірраціональних — ірраціональних. Чи обов'язково графіком функції f є пряма?

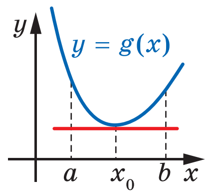
46.52.* До графіка функції f у точці A проведено дотичну. Графік функції g отримано з графіка функції f у результаті перетворення руху, а точка B є образом точки A. Чи обов'язково в точці B до графіка функції g можна провести дотичну?

47. Теореми Ферма, Ролля, Лагранжа

Розглянемо функцію f і таку точку x_0 інтервалу $(a; b)$, що $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$ (рис. 47.1, *а*). На рисунку 47.1, *б* зображено графік функції g такої, що $\min\limits_{[a;b]} g(x) = g(x_0)$.



а



б

Рис. 47.1

Нехай функції f і g є диференційовними в точці x_0. Тоді до графіків цих функцій у точці з абсцисою x_0 можна провести дотичні. З наочних міркувань очевидно, що ці дотичні будуть горизонтальними прямими. Оскільки кутовий коефіцієнт горизонтальної прямої дорівнює нулю, то $f'(x_0) = 0$ і $g'(x_0) = 0$.

Цей висновок можна проілюструвати за допомогою механічної інтерпретації.

Якщо матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $y = s(t)$, $t \in [a; b]$, і функція $y = s(t)$ набуває в точці $t_0 \in (a; b)$ найбільшого (найменшого) значення, то це означає, що в момент часу t_0 матеріальна точка змінює напрям руху на протилежний. Зрозуміло, що в цей момент часу швидкість матеріальної точки дорівнює нулю, тобто $v(t_0) = s'(t_0) = 0$.

Отримані висновки підтверджує така теорема.

Теорема 47.1 (теорема Ферма). ***Нехай функція f, визначена на проміжку [a; b], у точці $x_0 \in (a; b)$ набуває свого найменшого (найбільшого) значення. Якщо функція f є диференційовною в точці x_0, то $f'(x_0) = 0$.***

Доведення. Розглянемо випадок, коли $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$ (випадок $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_0)$ можна розглянути аналогічно).

Нехай $x \in [a;\ b]$, тоді $\Delta f = f(x) - f(x_0) \geqslant 0$. Якщо $\Delta x = x - x_0 > 0$ (рис. 47.2), то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0$. Звідси $\lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geqslant 0$.

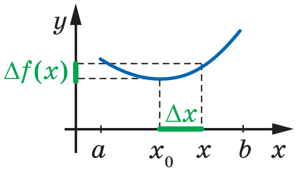


Рис. 47.2

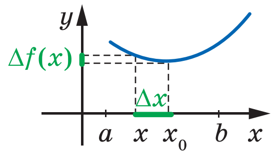
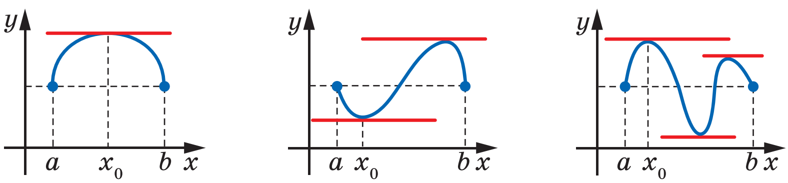


Рис. 47.3

Якщо $\Delta x < 0$ (рис. 47.3), то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0$. Звідси $\lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0$.

Оскільки функція f є диференційовною в точці x_0, то існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. Тоді $0 \leqslant \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leqslant 0$. Звідси $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = 0$, тобто $f'(x_0) = 0$. ◄

На рисунку 47.4 зображено графік функції f, неперервної на відрізку $[a;\ b]$ і диференційовної на інтервалі $(a;\ b)$. Функція f у точках a і b набуває однакових значень.



а *б* *в*

Рис. 47.4

Мішель Ролль
(1652–1719)

Французький математик,
член Паризької академії наук.
Основні праці присвячені методам
чисельного розв’язування рівнянь.
Більшість наукових здобутків М. Ролля не були
помічені науковою спільнотою за його життя;
їх оцінили значно пізніше.

З рисунка видно: існує щонайменше одна така точка $x_0 \in (a; b)$, що дотична до графіка в точці з абсцисою x_0 є горизонтальною прямою, тобто $f'(x_0) = 0$.

Цей висновок можна проілюструвати за допомогою механічної інтерпретації.

Якщо матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $y = s(t)$, $t \in [a; b]$, то рівність $s(a) = s(b)$ означає, що в момент часу $t = b$ матеріальна точка повернулася в початкове положення. Отже, у деякий момент часу $t_0 \in (a; b)$ вона змінила напрям руху на протилежний, тобто $v(t_0) = s'(t_0) = 0$.

Отримані висновки підтверджує така теорема.

Теорема 47.2 (теорема Ролля). ***Якщо функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна на інтервалі $(a; b)$, причому $f(a) = f(b)$, то існує така точка $x_0 \in (a; b)$, що $f'(x_0) = 0$.***

Доведення. Оскільки функція неперервна на відрізку $[a; b]$, то за другою теоремою Вейєрштрасса на відрізку $[a; b]$ існують такі значення аргументу, при яких функція f досягає своїх найбільшого та найменшого значень. Іншими словами, існують такі числа m і M, що $\min\limits_{[a;b]} f(x) = m$, $\max\limits_{[a;b]} f(x) = M$. Тоді для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Якщо $m = M$, то функція f є константою на проміжку $[a; b]$. Отже, $f'(x) = 0$ для будь-якого $x \in (a; b)$.

Розглянемо випадок, коли $m \neq M$. Тоді функція f не може на одному кінці відрізка $[a; b]$ набувати найбільшого значення, а на іншому — найменшого. Справді, $f(a) = f(b)$, а $m \neq M$. Отже, існує така точка $x_0 \in (a; b)$, що функція в цій точці набуває свого найбільшого або найменшого значення. Оскільки функція f диференційовна в точці x_0, то за теоремою Ферма $f'(x_0) = 0$. ◄

ПРИКЛАД 1 Диференційовна на $\mathbb{R}$ функція f має n нулів. Доведіть, що функція f' має не менше ніж $n - 1$ нулів.

Розв'язання. Нехай $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ — нулі функції f. На кожному з $(n - 1)$ відрізків $\left[x_i; x_{i+1}\right]$ функція f задовольняє всі умови теореми Ролля. Тому на кожному з інтервалів $(x_i; x_{i+1})$ є щонайменше один нуль функції f'. ◄

ПРИКЛАД 2 Рівняння $x^4 + ax^3 + bx^2 + c = 0$ має чотири різних дійсних корені. Доведіть, що $a^2 > \frac{32}{9}b$.

Розв'язання. Позначимо ліву частину даного рівняння через $f(x)$. За умовою рівняння $f(x) = 0$ має чотири різних дійсних корені. Тоді за допомогою прикладу 1 цього пункту встановлюємо, що рівняння $f'(x) = 0$, тобто рівняння $4x^3 + 3ax^2 + 2bx = 0$, має три різних дійсних корені. Це рівняння має корінь $x = 0$. Отже, квадратне рівняння $4x^2 + 3ax + 2b = 0$ має два різних дійсних корені. Його дискримінант $D = 9a^2 - 32b$. Оскільки $D > 0$, то $a^2 > \frac{32}{9}b$. ◄

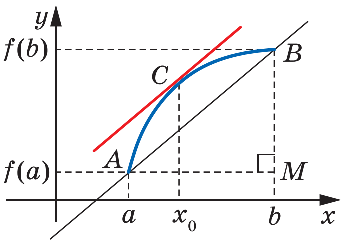


Рис. 47.5

На рисунку 47.5 зображено графік функції, неперервної на відрізку $[a; b]$ і диференційовної на інтервалі $(a; b)$.

Проведемо пряму AB. Із трикутника AMB можна знайти кутовий коефіцієнт цієї прямої:

$$\operatorname{tg} \angle BAM = \frac{BM}{AM} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

З рисунка видно: на дузі AB існує така точка C, що дотична до графіка в цій точці паралельна прямій AB.

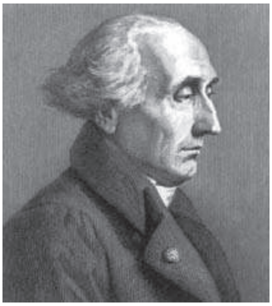
Кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$ цієї дотичної дорівнює кутовому коефіцієнту прямої AB, тобто існує точка $x_0 \in (a; b)$ така, що

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Отриманий висновок ілюструє також механічна інтерпретація.

Якщо матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $y = s(t)$, $t \in [a; b]$, то її середня швидкість дорівнює:

$$v_{\text{сер}} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$



Жозеф Луї Лагранж
(1736–1813)

Французький математик, механік і астроном, президент Берлінської академії наук, член Паризької академії наук. Основні праці — у галузі математичного аналізу, варіаційного числення, алгебри, теорії чисел, диференційних рівнянь, механіки. Кавалер ордена Почесного легіону.

Зрозуміло, що під час руху є такий момент $t_0 \in (a;\ b)$, коли миттєва швидкість дорівнює середній, тобто

$$v(t_0) = s'(t_0) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

Отримані висновки підтверджує така теорема.

Теорема 47.3 (теорема Лагранжа). ***Якщо функція f неперервна на відрізку [a; b] і диференційовна на інтервалі (a; b), то існує така точка*** $x_0 \in (a;\ b)$, ***що***

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доведення. Розглянемо допоміжну функцію $g(x) = f(x) - \lambda x$, де $\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Легко перевірити (зробіть це самостійно), що $g(a) = g(b)$. Тепер очевидно, що функція g задовольняє всі умови теореми Ролля.

Таким чином, існує точка $x_0 \in (a;\ b)$ така, що $g'(x_0) = 0$. Оскільки $g'(x) = f'(x) - \lambda$, то $f'(x_0) - \lambda = 0$. Звідси $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. ◄

Зауважимо, що теорема Лагранжа є узагальненням теореми Ролля. Справді, якщо $f(a) = f(b)$, то за теоремою Лагранжа $f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$.

Звернемо увагу, що теореми Ролля і Лагранжа не вказують, як знайти точку x_0. Вони лише гарантують, що існує точка з певною властивістю.

ПРИКЛАД 3 Доведіть нерівність $\cos\frac{1}{4} - \cos\frac{1}{3} < \frac{1}{36}$.

Розв'язання. Скористаємося теоремою Лагранжа для функції $f(x) = \cos x$ на відрізку $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$.

Тоді $\cos\frac{1}{3} - \cos\frac{1}{4} = -\sin x_0 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$, де $x_0 \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$.

Звідси $\cos\frac{1}{4} - \cos\frac{1}{3} = \frac{\sin x_0}{12}$.

Оскільки $\sin x_0 < x_0 < \frac{1}{3}$, то $\cos\frac{1}{4} - \cos\frac{1}{3} < \frac{1}{36}$. ◄

ВПРАВИ

47.1.° Відомо, що функція f у точці x_0 набуває найбільшого або найменшого значення. Перевірте рівність $f'(x_0) = 0$, якщо:

1) $f(x) = x^6$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

47.2.° Відомо, що функція f у точці x_0 набуває найбільшого або найменшого значення. Перевірте рівність $f'(x_0) = 0$, якщо:

1) $f(x) = 5 - x^2$, $x_0 = 0$;
2) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \pi$.

47.3.° Проілюструйте графічно (зобразіть графік функції f) таке твердження: для кожного числа $x_0 \in (a; b)$ існує така неперервна на $[a; b]$ і диференційовна на $(a; b)$ функція f, що $f(a) = f(b)$ і $f'(x) = 0$ лише при $x = x_0$.

47.4.° Проілюструйте графічно (зобразіть графік функції f) таке твердження: для кожного числа $x_0 \in (a; b)$ існує така неперервна на $[a; b]$ і диференційовна на $(a; b)$ функція f, що $f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ лише при $x = x_0$.

47.5.• Запишіть теорему Лагранжа для функції f і відрізка $[1; 2]$. На інтервалі $(1; 2)$ знайдіть таку точку x_0, для якої виконується рівність $f(2) - f(1) = f'(x_0)$, якщо:

1) $f(x) = x^3$;
2) $f(x) = \frac{1}{x}$;
3) $f(x) = \sin \frac{\pi x}{2}$.

47.6.• Запишіть теорему Лагранжа для функції f і відрізка $[1; 3]$. На інтервалі $(1; 3)$ знайдіть таку точку x_0, для якої виконується рівність $\frac{f(3) - f(1)}{2} = f'(x_0)$, якщо:

1) $f(x) = x^2$;
2) $f(x) = \sqrt{x}$;
3) $f(x) = \cos \frac{\pi x}{4}$.

47.7.• Використовуючи теорему Ферма, доведіть, що функція f не набуває в точці x_0 ні найбільшого, ні найменшого значень, якщо:

1) $f(x) = x^4 + x + 1$, $x_0 = -0{,}5$;
2) $f(x) = \frac{1}{1 - x} - x - \frac{1}{x}$, $D(f) = (1; 3)$, $x_0 = 2$;
3) $f(x) = \sin x + \cos x^2$, $D(f) = [1; 2]$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

47.8.$^{\bullet}$ Доведіть, що функція f не набуває в точці x_0 ні найбільшого, ні найменшого значень, якщо:

1) $f(x) = (x^2 + 6x + 8)(x^2 + 14x + 48),\ \ x_0 = -3;$

2) $f(x) = \dfrac{2}{x} + x^2 + \dfrac{1}{x+3},\ D(f) = (0;\ +\infty),\ x_0 = 1;$

3) $f(x) = \cos x - \sin x^2,\ D(f) = [0;\ 2],\ x_0 = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}.$

47.9.$^{\bullet}$ Функція f, $D(f) = [a;\ b]$, неперервна на відрізку $[a;\ b]$ і диференційовна на інтервалі $(a;\ b)$, причому $f'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a; b)$. Доведіть, що функція f є оборотною.

47.10.$^{\bullet}$ Функція f диференційовна на відрізку $[0;\ 1]$, причому $f'(x) \neq 1$ для всіх $x \in [0; 1]$. Доведіть, що $f(1) \neq f(0) + 1$.

47.11.$^{\bullet}$ Використовуючи теорему Лагранжа, доведіть нерівність
$n(b-a)a^{n-1} \leqslant b^n - a^n \leqslant n(b-a)b^{n-1}$, де $0 < a < b$, $n \in \mathbb{N}$.

47.12.$^{\bullet}$ Доведіть нерівність $\dfrac{x-y}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} < \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} < \dfrac{x-y}{n\sqrt[n]{y^{n-1}}}$, де $0 < y < x$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

47.13.$^{\bullet}$ Доведіть нерівність:

1) $|\cos x - \cos y| \leqslant |x - y|;$

2) $|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geqslant |x - y|,\ \ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right),\ \ y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right).$

47.14.$^{\bullet}$ Доведіть нерівність:

1) $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|;$

2) $|\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} y| \geqslant |x - y|,\ \ x \in (0;\ \pi),\ y \in (0;\ \pi).$

47.15.$^{\bullet}$ Доведіть, що $\sin\dfrac{6}{5} - \sin\dfrac{7}{6} < \dfrac{1}{60}$.

47.16.$^{\bullet}$ Доведіть, що $\operatorname{tg}\dfrac{5}{6} - \operatorname{tg}\dfrac{4}{5} > \dfrac{1}{15}$.

47.17.$^{\bullet}$ Про диференційовну на $[1;\ 3]$ функцію f відомо, що $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$. Доведіть існування такого x_0, що $f'(x_0) = 0$.

47.18.$^{\bullet}$ Функція f диференційовна на $\mathbb{R}$. Для довільного x доведіть існування такого c, що $f(x) = f(0) + xf'(c)$.

47.19.$^{\bullet\bullet}$ Нехай $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Для довільного $x \neq 0$ доведіть існування такого c, що $f(x) = 1 + xf'(c)$.

47.20.$^{\bullet\bullet}$ Нехай $f(x) = x\ \operatorname{ctg}\ x$. Для довільного $x \in (0; \pi)$ доведіть існування такого c, що $f(x) = 1 + xf'(c)$.

47.21.•• Числа a і b такі, що рівняння $\sin x = ax + b$ має принаймні два розв'язки. Доведіть, що рівняння $\cos x = a$ має безліч розв'язків.

47.22.•• Доведіть, що рівняння $x^n + ax + b = 0$ має не більше ніж три корені.

47.23.•• Числа a і b такі, що рівняння $\operatorname{tg} x = ax + b$ має принаймні два розв'язки на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Доведіть, що рівняння $\cos x = \frac{1}{\sqrt{a}}$ має безліч розв'язків.

47.24.•• Функція f диференційовна на $\mathbb{R}$. Скориставшись теоремою Ролля для функції $g(x) = f(x)\sin x$, доведіть, що рівняння $f'(x)\sin x + f(x)\cos x = 0$ має принаймні один корінь на відрізку $[0; \pi]$.

47.25.•• Функція f диференційовна на $\mathbb{R}$. Доведіть, що рівняння $f'(x) = f(x)\operatorname{tg} x$ має принаймні один корінь на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

47.26.•• Василь Заплутайко хоче довести, що похідна функції $f(x) = |x|$ у точці $x_0 = 0$ дорівнює нулю. Він міркує так. Маємо: $f(-1) = f(1)$. Тому за теоремою Ролля існує точка $x_0 \in (-1; 1)$ така, що $f'(x_0) = 0$. Але на інтервалі $(0; 1)$ такої точки x_0 не існує, бо на цьому проміжку $f(x) = x$ і $f'(x) = 1$. Так само її немає на інтервалі $(-1; 0)$. Виходить, що $x_0 = 0$. Отже, $f'(x_0) = f'(0) = 0$. Чи правий Василь?

47.27.* Доведіть, що коли $a_0 + \frac{a_1}{2} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$, то рівняння $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = 0$ має щонайменше один корінь.

47.28.* Доведіть, що при будь-яких дійсних $a_1, a_2, \ldots, a_n$ рівняння $a_n \cos nx + a_{n-1} \cos(n-1)x + \ldots + a_1 \cos x = 0$ має щонайменше один корінь.

47.29.* Натуральне число n не є точним квадратом. Доведіть, що $\{\sqrt{n}\} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$, де через $\{a\}$ позначено дробову частину числа a.

47.30.* Послідовність (x_n) задовольняє умови: $x_1 \in [0; 1]$ і $x_{n+1} = \cos x_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Доведіть збіжність цієї послідовності.

47.31.* Функція f диференційовна на відрізку $[-2; 2]$. Доведіть існування такого значення $x \in [-2; 2]$, що $\frac{f'(x)}{1 + f^2(x)} < 1$.

47.32.* Про диференційовну на [1; 3] функцію f відомо, що $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=1$. Для довільного $a \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ доведіть існування такого $x \in [1; 3]$, що $f'(x)=a$.

47.33.* Про диференційовну на [1; 3] функцію f відомо, що $f(1)=2$, $f(2)=3$, $f(3)=1$. Для довільного $a \in \left[-2; -\frac{1}{2}\right]$ доведіть існування такого $x \in [1; 3]$, що $f'(x)=a$.

48. Ознаки зростання і спадання функції

Ви знаєте, що коли функція є константою, то її похідна дорівнює нулю. Виникає запитання: якщо функція f є такою, що для всіх x із проміжку I виконується рівність $f'(x)=0$, то чи є функція f константою на проміжку I?

Звернемося до механічної інтерпретації.

Нехай $y=s(t)$ — закон руху матеріальної точки по координатній прямій. Якщо в будь-який момент часу t від t_1 до t_2 виконується рівність $s'(t)=0$, то протягом розглядуваного проміжку часу миттєва швидкість дорівнює нулю, тобто точка не рухається і її координата не змінюється. Це означає, що на розглядуваному проміжку функція $y=s(t)$ є константою.

Ці міркування підказують, що справедливою є така теорема.

Теорема 48.1 (ознака сталості функції). ***Якщо для всіх x із проміжку I виконується рівність $f'(x)=0$, то функція f є константою на цьому проміжку.***

Доведення. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу функції f, узяті з проміжку I, причому $x_1 < x_2$.

Оскільки $[x_1; x_2] \subset I$ і функція f диференційовна на проміжку I, то для відрізка $[x_1; x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа. Тоді існує точка $x_0 \in (x_1; x_2)$ така, що

$$f'(x_0)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Оскільки $x_0 \in I$, то $f'(x_0)=0$. Отже, $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=0$. Звідси $f(x_2)=f(x_1)$. Ураховуючи, що числа x_1 і x_2 вибрано довільним чином, можемо зробити висновок: функція f є константою на проміжку I. ◄

На рисунку 48.1 зображено графік деякої функції f, яка є диференційовною на проміжку $[a; b]$. Цей графік має таку властивість: будь-яка дотична до графіка утворює гострий кут з додатним напрямом осі абсцис.

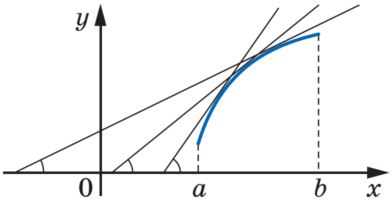


Рис. 48.1

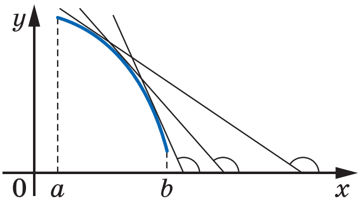


Рис. 48.2

Оскільки тангенс гострого кута є додатним числом, то кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної також є додатним. Тоді, виходячи з геометричного змісту похідної, можна зробити такий висновок: для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f'(x) > 0$.

З рисунка 48.1 видно, що функція f зростає на розглядуваному проміжку.

На рисунку 48.2 зображено графік деякої функції f, яка є диференційовною на проміжку $[a; b]$. Будь-яка дотична до графіка утворює тупий кут з додатним напрямом осі абсцис.

Оскільки тангенс тупого кута є від'ємним числом, то кутовий коефіцієнт будь-якої дотичної також є від'ємним. Тоді для будь-якого $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f'(x) < 0$.

З рисунка 48.2 видно, що функція f спадає на розглядуваному проміжку.

Ці приклади показують, що знак похідної функції на деякому проміжку I пов'язаний з тим, чи є ця функція зростаючою (спадною) на проміжку I.

Зв'язок між знаком похідної та зростанням (спаданням) функції можна виявити також за допомогою механічної інтерпретації. Якщо швидкість, тобто похідна функції $y = s(t)$, є додатною, то точка на координатній прямій рухається вправо (рис. 48.3). Це означає, що з нерівності $t_1 < t_2$ випливає нерівність $s(t_1) < s(t_2)$, тобто функція $y = s(t)$ є зростаючою. Аналогічно, якщо швидкість є від'ємною, то точка рухається вліво, тобто функція $y = s(t)$ є спадною.

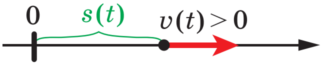


Рис. 48.3

Зв'язок між знаком похідної та зростанням (спаданням) функції установлюють такі дві теореми.

Теорема 48.2 (ознака зростання функції). ***Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на цьому проміжку.***

Теорема 48.3 (ознака спадання функції). ***Якщо для всіх x із проміжку I виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція f спадає на цьому проміжку.***

Доведемо теорему 48.2 (теорему 48.3 можна довести аналогічно).

Доведення. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу функції f, узяті з проміжку I, причому $x_2 > x_1$.

Оскільки $[x_1; x_2] \subset I$ і функція f диференційовна на проміжку I, то для відрізка $[x_1; x_2]$ виконуються всі умови теореми Лагранжа. Тоді існує точка $x_0 \in (x_1; x_2)$ така, що

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Оскільки $x_0 \in I$, то $f'(x_0) > 0$. Отже, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$. Тоді з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, тобто функція f зростає на проміжку I. ◄

Наприклад, розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$. Оскільки $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ для всіх $x \in (0; +\infty)$, то з теореми 48.2 випливає, що функція $f(x) = \sqrt{x}$ зростає на проміжку $(0; +\infty)$.

Водночас теорема 48.2 не дає змоги стверджувати, що функція $f(x) = \sqrt{x}$ зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Узагалі, якщо функція f визначена на проміжку $[a; +\infty)$ і для всіх $x \in (a; +\infty)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, то це не означає, що вона зростає на проміжку $[a; +\infty)$ (рис. 48.4).

Довести зростання функції $f(x) = \sqrt{x}$ на проміжку $[0; +\infty)$ можна за допомогою такого твердження: *якщо функція f неперервна в точці a і для всіх $x \in (a; +\infty)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, то функція f зростає на проміжку $[a; +\infty)$.*

Використовуючи теорему Лагранжа, доведіть це твердження самостійно.

У такий самий спосіб можна обґрунтувати зростання (спадання) функції f на проміжках іншого виду, наприклад на $[a; b)$, $(-\infty; b]$, $[a; b]$.

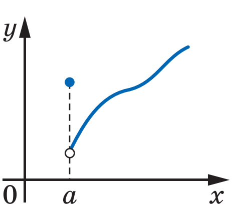


Рис. 48.4

Якщо диференційовна на проміжку I функція є зростаючою (спадною), то помилковим було б вважати, що вона обов'язково має додатну (від'ємну) похідну на цьому проміжку. Наприклад, функція $y = x^3$ є зростаючою, але її похідна в точці $x_0 = 0$ дорівнює нулю.

Теорема 48.4 (властивість зростаючої функції і спадної функції). ***Якщо диференційовна на проміжку I функція f є зростаючою (спадною), то для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$.***

Доведення. Доведемо теорему для випадку, коли функція f є зростаючою (для випадку, коли функція f є спадною, доведення аналогічне).

Нехай x_0 — довільна точка, яка належить проміжку I. Надамо аргументу функції f приріст $\Delta x = x - x_0$ у точці x_0. Ураховуючи зростання функції f, отримуємо: $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0.$ Тому

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що функція $f(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^3}{3} + x - 100$ зростає на множині дійсних чисел.

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = x^4 + x^2 + 1$. Оскільки $x^4 + x^2 + 1 > 0$ при всіх $x \in \mathbb{R}$, то функція f зростає на множині дійсних чисел. ◄

ПРИКЛАД 2 Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$;

2) $f(x) = -\dfrac{3}{4}x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$;

4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$.

Розв'язання. 1) Маємо: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x + 3)(x - 1)$.

Дослідивши знак похідної методом інтервалів (рис. 48.5) і врахувавши неперервність функції f у точках $x = -3$ і $x = 1$, отримуємо, що вона зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -3]$ і $[1; +\infty)$ та спадає на проміжку $[-3; 1]$.

2) Маємо: $f'(x) = -3x^3 + 12x^2 - 12x = -3x(x^2 - 4x + 4) = -3x(x - 2)^2$.

Дослідивши знак похідної (рис. 48.6), доходимо висновку, що функція зростає на проміжку $(-\infty; 0]$ і спадає на кожному з проміжків $[0; 2]$ і $[2; +\infty)$, тобто спадає на проміжку $[0; +\infty)$.

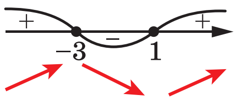


Рис. 48.5

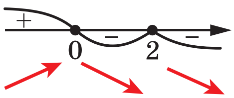


Рис. 48.6

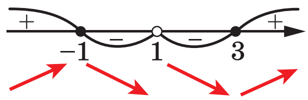


Рис. 48.7

3) Маємо: $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. Знайшовши похідну функції f, отримуємо: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$.

Дослідимо знак функції $y = f'(x)$ (рис. 48.7). Отже, дана функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -1]$ і $[3; +\infty)$ та спадає на кожному з проміжків $[-1; 1)$ і $(1; 3]$.

4) Маємо: $D(f) = (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$. Знайдемо похідну функції f на множині $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$: $f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - 3x}\right)' = \dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}}$. Зауважимо, що в точках $x = 0$ і $x = 3$ функція f не є диференційовною, але є неперервною.

Нерівність $\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}} > 0$ рівносильна системі $\begin{cases} 2x - 3 > 0, \\ x^2 - 3x > 0. \end{cases}$ Розв'язавши її, отримуємо, що множиною розв'язків розглядуваної нерівності є проміжок $(3; +\infty)$.

Далі легко встановити, що множиною розв'язків нерівності $\dfrac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x}} < 0$ є проміжок $(-\infty; 0)$.

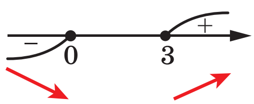


Рис. 48.8

Отже, якщо $x < 0$, то $f'(x) < 0$; якщо $x > 3$, то $f'(x) > 0$ (рис. 48.8).

Урахувавши неперервність функції f у точках 0 і 3, можна зробити висновок: функція f зростає на проміжку $[3; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty; 0]$. ◀

Якщо функція f є зростаючою (спадною), то з рівності $f(a) = f(b)$ випливає, що $a = b$. Розглянемо приклад, у якому використовується цей факт.

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 2(x^2 - y^2) = \cos 2y - \cos 2x, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо: $\begin{cases} 2x^2 + \cos 2x = 2y^2 + \cos 2y, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 6. \end{cases}$

Розглянемо функцію $f(t) = 2t^2 + \cos\ 2t$. Тоді перше рівняння отриманої системи можна подати у вигляді $f(x) = f(y)$.

Із другого рівняння системи випливає, що $x > 0$ і $y > 0$. Тому будемо розглядати функцію f на множині $(0;\ +\infty)$.

Маємо: $f'(t) = 4t - 2\sin 2t = 2(2t - \sin 2t)$.

У п. 39 було доведено, що $t > \sin t$ при $t > 0$. Тоді $f'(t) > 0$ при всіх $t \in (0;\ +\infty)$. Отже, функція f зростає на $(0;\ +\infty)$. Тому з рівності $f(x) = f(y)$ отримуємо, що $x = y$.

Маємо: $\begin{cases} x = y, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} = 6. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x = \dfrac{1}{9}, \\ y = \dfrac{1}{9}. \end{cases}$

Відповідь: $\left(\dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{9}\right)$. ◄

Під час доведення нерівностей часто використовують міркування такого роду: *якщо диференційовні на* $[a; +\infty)$ *функції* f *і* g *задовольняють умови* $f(a) = g(a)$ *і* $f'(x) > g'(x)$ *для всіх* $x > a$, *то* $f(x) > g(x)$ *для всіх* $x > a$. Справді, розглянемо функцію $h(x) = f(x) - g(x)$, $D(h) = [a; +\infty)$. Маємо: $h(a) = f(a) - g(a) = 0$. Оскільки $h'(x) = f'(x) - g'(x) > 0$ для всіх $x \in (a; +\infty)$ і функція h неперервна в точці $x_0 = a$, то функція h є зростаючою. Тому $h(x) > h(a) = 0$ для всіх $x > a$, тобто $f(x) - g(x) > 0$ для всіх $x > a$.

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що для всіх $x < 1$ виконується нерівність $x^9 + 4x < 3 + 2x^5$.

Розв'язання. Для доведення даної нерівності скористаємося таким твердженням: *якщо диференційовні на* $(-\infty; a]$ *функції* f *і* g *задовольняють умови* $f(a) = g(a)$ *і* $f'(x) > g'(x)$ *для всіх* $x < a$, *то* $f(x) < g(x)$ *для всіх* $x < a$.

Розглянемо функції $f(x) = x^9 + 4x$ і $g(x) = 3 + 2x^5$. Маємо: $f(1) = g(1)$. Обчислимо похідні функцій f і g: $f'(x) = 9x^8 + 4$, $g'(x) = 10x^4$. Розглянемо нерівність $f'(x) > g'(x)$, тобто нерівність $9x^8 - 10x^4 + 4 > 0$. Квадратний тричлен $9t^2 - 10t + 4$ має від'ємний дискримінант. Тому нерівність $9x^8 - 10x^4 + 4 > 0$ виконується при всіх $x \in \mathbb{R}$. Звідси

$f'(x) > g'(x)$ для всіх $x < 1$. Тому при $x < 1$ виконується нерівність $x^9 + 4x < 3 + 2x^5$. ◄

У цьому пункті ви ознайомилися з ознакою сталості функції. Цю теорему можна використовувати для доведення тотожностей. Так, якщо вдалося встановити, що похідна функції f на проміжку I дорівнює нулю і для деякого $x_0 \in I$ виконується рівність $f(x_0) = A$, то тим самим установлено, що $f(x) = A$ для всіх $x \in I$.

ПРИКЛАД 5 Для всіх $x \in (-1; 1)$ доведіть тотожність

$$2 \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = 2 \operatorname{arctg} x - \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$, $D(f) = (-1;\ 1)$. Маємо:

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)' =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2 - 4x^2}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{1+x^2} - \frac{1+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Отже, функція $f(x)$ є константою на $(-1;\ 1)$. Знайти цю константу можна, обчисливши значення функції f у «зручній» точці проміжку $(-1;\ 1)$. Наприклад, $f(0) = 0$. ◄

ВПРАВИ

48.1.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x^2 + 4x - 7$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$;
3) $f(x) = -x^3 + 9x^2 + 21x$;
4) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;
5) $f(x) = x^3 + 4x - 8$;
6) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x + 9$.

48.2.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 5$;
2) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$;
3) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$;
4) $f(x) = x^4 + 4x - 20$.

48.3.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$;

2) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$;

3) $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{10}{3}x^3 + 9x - 6$;

4) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$;

5) $f(x) = x + \frac{9}{x}$;

6) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$;

7) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3 - x}$;

8) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$.

48.4.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = 3x^4 - 20x^3 + 36x^2 - 4$;

2) $f(x) = 9 + 4x^3 - x^4$;

3) $f(x) = \frac{2x - 9}{x - 5}$;

4) $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$;

5) $f(x) = 3x + \frac{12}{x^2}$;

6) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

48.5.° На рисунку 48.9 зображено графік похідної функції f, диференційовної на $\mathbb{R}$. Укажіть проміжки спадання функції f.

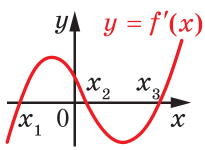


Рис. 48.9

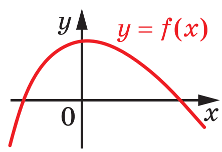


Рис. 48.10

48.6.° На рисунку 48.10 зображено графік функції $y = f(x)$, диференційовної на $\mathbb{R}$. Серед наведених на рисунку 48.11 графіків укажіть той, який може бути графіком функції $y = f'(x)$.

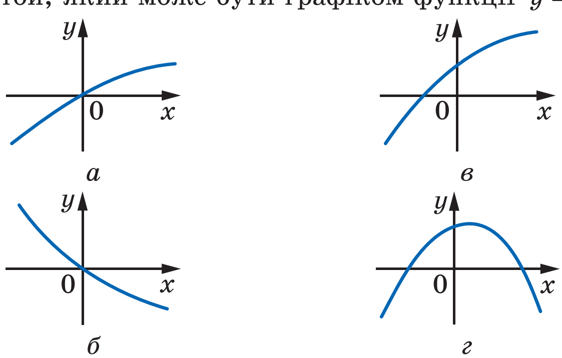


Рис. 48.11

48.7.° На рисунку 48.12 зображено графік похідної функції f, диференційовної на $\mathbb{R}$. Укажіть проміжки зростання функції f.

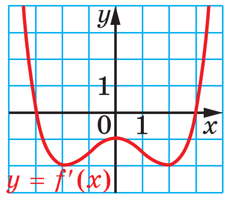


Рис. 48.12

48.8.° На рисунку 48.13 зображено графіки похідних функцій f, g і h, диференційовних на $\mathbb{R}$. Яка з функцій f, g і h спадає на відрізку $[-1; 1]$?

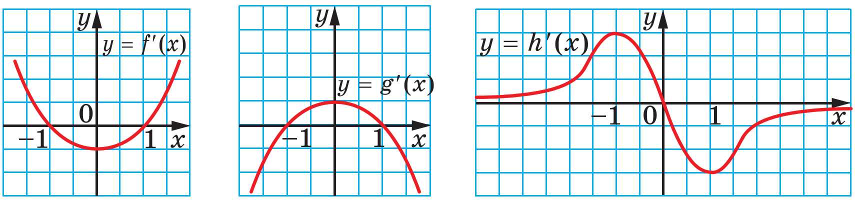


Рис. 48.13

48.9.° На рисунку 48.14 зображено графіки похідних функцій f, g і h. Яка з функцій f, g і h спадає на $\mathbb{R}$?

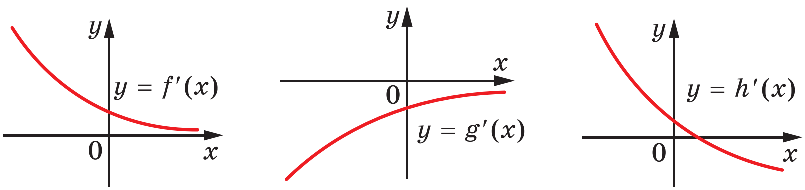


Рис. 48.14

48.10.° Доведіть, що функція є спадною на множині дійсних чисел:

1) $f(x) = 6 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$;
2) $f(x) = -2x^3 + 2x^2 - 10x + 80$;
3) $f(x) = \sin 2x - 3x$.

48.11.° Доведіть, що функція є зростаючою на множині дійсних чисел:

1) $f(x) = 10x^3 - 9x^2 + 24x - 90$; 2) $f(x) = \cos 3x + 4x$.

48.12.• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = x\sqrt{2} + \sin x$; 2) $f(x) = x - \cos x$; 3) $y = \cos x + \frac{x\sqrt{3}}{2}$.

48.13.• Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x) = \sin x - x$; 2) $f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{2} - \sin x$; 3) $f(x) = \sin^2 x - \frac{x}{2}$.

48.14.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції:

1) $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$;   2) $f(x)=\sqrt{6x-x^2}$.

48.15.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції $f(x)=\sqrt{x^2-1}$.

48.16.° На рисунку 48.15 зображено графіки функцій f і g, визначених на $\mathbb{R}$. Використовуючи ці графіки, розв'яжіть нерівність:

1) $f'(x)\leqslant 0$;   2) $g'(x)\geqslant 0$.

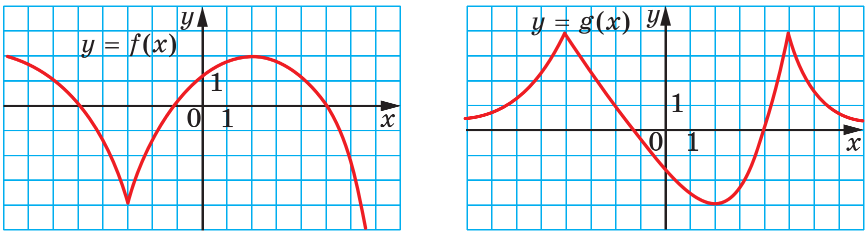


Рис. 48.15

48.17.° На рисунку 48.16 зображено графіки функцій f і g, визначених на $\mathbb{R}$. Використовуючи їх, розв'яжіть нерівність:

1) $f'(x)\geqslant 0$;   2) $g'(x)\leqslant 0$.

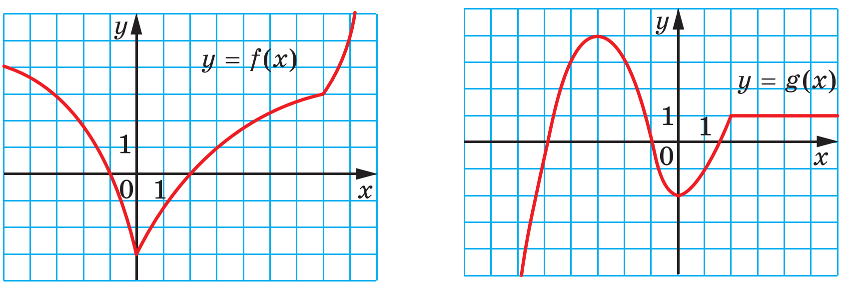


Рис. 48.16

48.18.° Функція f неперервна на проміжку I і диференційовна на множині $I\setminus\{x_0\}$, де x_0 — деяка точка, яка належить проміжку I. Відомо, що $f'(x)=0$ для всіх $x\in I\setminus\{x_0\}$. Чи можна стверджувати, що функція f є константою на проміжку I?

48.19.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції

$$f(x)=\operatorname{tg}\,x-2x.$$

48.20.° Знайдіть проміжки зростання і спадання функції

$$f(x)=\operatorname{ctg}\,x+4x.$$

48.21.• При яких значеннях параметра a є зростаючою функція:

1) $y = x^3 - ax$;
2) $y = 3\sin 4x + ax$;
3) $y = -2\sqrt{1-x} + ax$;
4) $y = \frac{x^3}{3} + 2(a+1)x^2 + 9x - 4$?

48.22.• При яких значеннях параметра a є спадною функція:

1) $y = ax - x^5$;
2) $y = 2\cos 3x + ax$;
3) $y = -2\sqrt{x+3} + ax$;
4) $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} - 4x + 21$?

48.23.•• Розв'яжіть рівняння $x^5 + 4x + \cos x = 1$.

48.24.•• Розв'яжіть рівняння $x^3 + 6x + 2\sqrt{10+x} = \cos \pi x$.

48.25.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x - y = \sin x - \sin y, \\ 3x + 4y = 7. \end{cases}$

48.26.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x - 2y = \cos y - \cos x, \\ x + y = 8. \end{cases}$

48.27.•• Розв'яжіть нерівність $x^7 + 3x > 2x^4 + 2$.

48.28.•• Розв'яжіть нерівність $x^5 + 4x < 2x^3 + 3$.

48.29.•• Доведіть нерівність $\cos x \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$.

48.30.•• Доведіть нерівність $x < \operatorname{tg} x$, де $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

48.31.•• Доведіть нерівність $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ для всіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

48.32.•• Доведіть нерівність $\operatorname{arctg} x < x$ для всіх $x > 0$.

48.33.•• Доведіть нерівність $\arcsin x > x$ для всіх $x \in (0; 1]$.

48.34.•• Доведіть нерівність $\operatorname{tg} x + \sin x > 2x$ для всіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

48.35.•• Доведіть нерівність $\operatorname{tg} x + 2\sin x > 3x$ для всіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

48.36.•• Доведіть тотожність:

1) $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;
2) $\arccos x = 2\arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

48.37.•• Доведіть тотожність:

1) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
2) $\arcsin x + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\pi}{2}$.

48.38.•• При яких значеннях параметра c функція
$$f(x) = (c - 12)\ x^3 + 3\ (c - 12)\ x^2 + 6x + 7$$
зростає на $\mathbb{R}$?

48.39.•• При яких значеннях параметра a функція
$$y = (a + 3)\ x^3 + 3\ (a + 3)\ x^2 - 5x + 12$$
спадає на $\mathbb{R}$?

48.40.•• Знайдіть усі значення параметра b, при кожному з яких функція $f(x) = \sin 2x - 8\ (b + 2) \cos x - (4b^2 + 16b + 6)\ x$ спадає на $\mathbb{R}$.

48.41.•• Знайдіть усі значення параметра a, при кожному з яких функція $f(x) = \sin\ 2x - 8\ (a + 1)\ \sin\ x + (4a^2 + 8a - 14)\ x$ зростає на $\mathbb{R}$.

48.42.•• При яких значеннях параметра a функція
$$f(x) = \sin x - a \sin 2x - \frac{1}{3} \sin 3x + 2ax$$
зростає на $\mathbb{R}$?

48.43.•• При яких значеннях параметра a функція
$$f(x) = \frac{1}{3} \sin^3 x - \sin x\,(a + \cos x) + (1 - 2a)\, x - 2$$
спадає на $\mathbb{R}$?

48.44.* Доведіть нерівність
$$\sin A + \sin B + \sin C + \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C > 2\pi,$$
де A, B, C — кути гострокутного трикутника.

48.45.* Спростіть вираз $\arccos x - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$.

48.46.* Спростіть вираз $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1 - x}{1 + x}$.

48.47.* Порівняйте значення виразів $\frac{\pi}{100} \sin \frac{\pi}{101}$ і $\frac{\pi}{101} \sin \frac{\pi}{100}$.

48.48.* Порівняйте значення виразів $\frac{1}{20} \operatorname{tg} \frac{1}{21}$ і $\frac{1}{21} \operatorname{tg} \frac{1}{20}$.

48.49.* Знайдіть усі такі функції f, що для всіх дійсних x і y виконується нерівність $|f(x) - f(y)| \leqslant (x - y)^2$.

48.50.* Знайдіть усі такі диференційовні на $\mathbb{R}$ функції f, що для всіх дійсних x і y виконується рівність $f(x) + f(y) = f(x + y)$.

48.51.* Про диференційовну на $\mathbb{R}$ функцію f відомо, що $f'(x_0) > 0$. Чи обов'язково знайдеться такий δ-окіл точки x_0, що функція f є зростаючою в цьому околі?

49. Точки екстремуму функції

Ознайомлюючись з такими поняттями, як границя та неперервність функції в точці, ми досліджували поведінку функції поблизу цієї точки або, як прийнято говорити, у її **околі**.

Означення. **Інтервал $(a; b)$, який містить точку x_0, називають околом точки x_0.**

Зрозуміло, що будь-яка точка має безліч околів. Наприклад, проміжок $(-1; 3)$ — один з околів точки 2,5. Разом з тим цей проміжок не є околом точки 3.

На рисунку 49.1 зображено графіки чотирьох функцій. Усі ці функції мають спільну особливість: існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$.

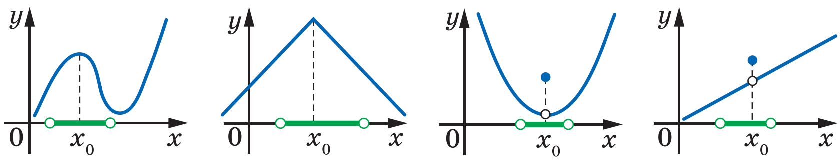


Рис. 49.1

Означення. **Точку x_0 називають точкою максимуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$.**

Наприклад, точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ є точкою максимуму функції $y = \sin x$ (рис. 49.2). Записують: $x_{max} = \frac{\pi}{2}$.

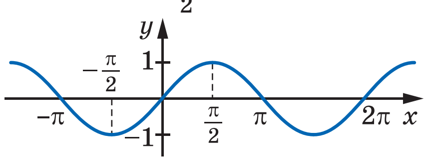


Рис. 49.2

На рисунку 49.1 $x_{max} = x_0$.

Означення. **Точку x_0 називають точкою мінімуму функції f, якщо існує окіл точки x_0 такий, що для всіх x із цього околу виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$.**

Наприклад, точка $x_0 = -\frac{\pi}{2}$ є точкою мінімуму функції $y = \sin x$ (рис. 49.2). Записують: $x_{\min} = -\frac{\pi}{2}$.

На рисунку 49.3 зображено графіки функцій, для яких x_0 є точкою мінімуму, тобто $x_{\min} = x_0$.

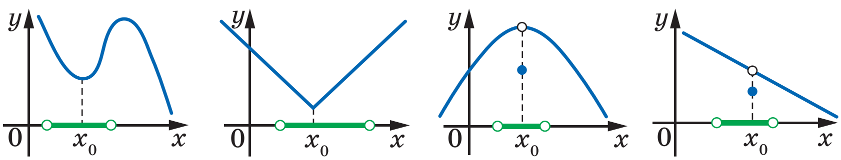


Рис. 49.3

Точки максимуму і мінімуму мають спільну назву: їх називають **точками екстремуму** функції (від латин. *extremum* — край, кінець).

На рисунку 49.4 точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 є точками екстремуму функції f.

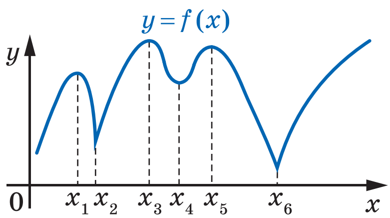


Рис. 49.4

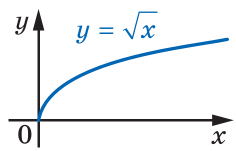


Рис. 49.5

З означень точок максимуму і мінімуму випливає, що точки екстремуму є внутрішніми точками[1] області визначення функції. Це означає, що, наприклад, точка $x_0 = 0$ не є точкою мінімуму функції $y = \sqrt{x}$ (рис. 49.5), а точка $x_0 = 1$ не є точкою максимуму функції $y = \arcsin x$ (рис. 49.6). Разом з тим найменше значення функції $y = \sqrt{x}$ на множині $[0; +\infty)$ дорівнює нулю, тобто $\min\limits_{[0;+\infty)} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$,

а $\max\limits_{[-1;1]} \arcsin x = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

[1] Точку $x_0 \in M$ називають *внутрішньою* точкою множини M, якщо існує окіл точки x_0, який є підмножиною множини M.

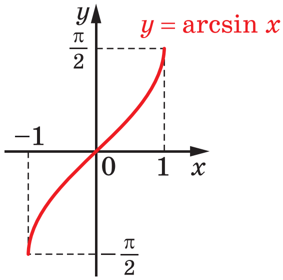


Рис. 49.6

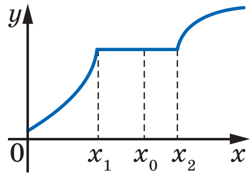


Рис. 49.7

На рисунку 49.7 зображено графік деякої функції f, яка на проміжку $[x_1; x_2]$ є константою. Точка x_1 є точкою максимуму, точка x_2 — мінімуму, а будь-яка точка інтервалу $(x_1; x_2)$ є одночасно як точкою максимуму, так і точкою мінімуму функції f.

Зауважимо, що також буває доцільним виділяти точку *строгого максимуму*, тобто таку точку x_0, для якої існує проколотий δ-окіл такий, що для всіх x із цього проколотого δ-околу виконується строга нерівність $f(x_0) > f(x)$. Аналогічно означають і точку *строгого мінімуму*. Наприклад, на рисунку 49.4 кожна точка максимуму (мінімуму) є також точкою строгого максимуму (мінімуму). На рисунку 49.7 жодна з точок відрізка $[x_1; x_2]$ не є точкою строгого максимуму або строгого мінімуму.

Графіки функцій, зображених на рисунках 49.8 і 49.9, показують, що точки екстремуму можна поділити на два види: ті, у яких похідна дорівнює нулю (на рисунку 49.8 дотична до графіка в точці з абсцисою x_0 є горизонтальною прямою), і ті, у яких функція є недиференційовною (рис. 49.9).

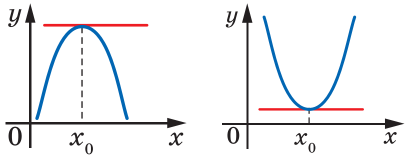


Рис. 49.8

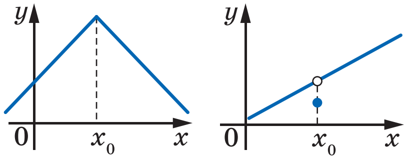


Рис. 49.9

Теорема 49.1. ***Якщо x_0 є точкою екстремуму функції f, то або $f'(x_0) = 0$, або функція f не є диференційовною в точці x_0.***

Справедливість цієї теореми випливає з теореми Ферма.

Виникає природне запитання: чи обов'язково є точкою екстремуму внутрішня точка області визначення функції, у якій похідна дорівнює нулю або не існує?

Відповідь на це запитання заперечна.

Так, на рисунку 49.10 зображено графік функції, недиференційовної в точці x_0. Проте точка x_0 не є точкою екстремуму.

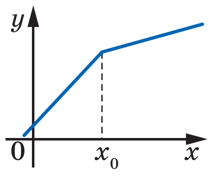


Рис. 49.10

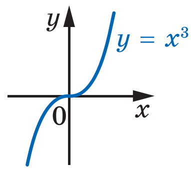


Рис. 49.11

Наведемо ще один приклад. Для функції $f(x) = x^3$ маємо: $f'(x) = 3x^2$. Тоді $f'(0) = 0$. Проте точка $x_0 = 0$ не є точкою екстремуму функції f (рис. 49.11).

Ці приклади показують, що теорема 49.1 дає необхідну, але не достатню умову існування екстремуму в даній точці.

Означення. **Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, називають критичними точками функції.**

Наприклад, точка $x_0 = 0$ є критичною точкою функцій $y = x^3$ і $y = |x|$; точка $x_0 = \frac{\pi}{2}$ є критичною точкою функції $y = \sin x$.

Зі сказаного вище випливає, що *кожна точка екстремуму функції є її критичною точкою, проте не кожна критична точка є точкою екстремуму*. Іншими словами, *точки екстремуму потрібно шукати серед критичних точок*. Цей факт проілюстровано на рисунку 49.12.

На рисунку 49.13 зображено графіки функцій, для яких x_0 є критичною точкою.

На рисунках 49.13, *а–г* критична точка x_0 є точкою екстремуму, на рисунках 49.13, *ґ*, *д* критична точка x_0 не є точкою екстремуму.

Рис. 49.12

Наявність екстремуму функції в точці x_0 зумовлена поведінкою функції в околі цієї точки. Так, для функцій, графіки яких зображено на рисунках 49.13, *а–г*, маємо: функція зростає (спадає) на проміжку $(a; x_0]$ і спадає (зростає) на проміжку $[x_0; b)$.

Функції, графіки яких зображено на рисунках 49.13, *ґ*, *д*, такої властивості не мають: перша з них зростає на кожному з проміжків $(a; x_0]$ і $[x_0; b)$, друга спадає на цих проміжках.

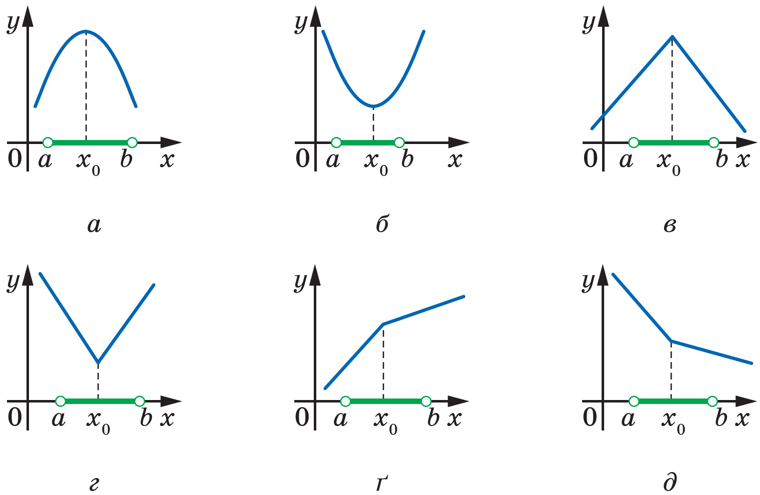


Рис. 49.13

Узагалі, якщо область визначення неперервної функції розбито на скінченну кількість проміжків зростання і спадання, то легко знайти всі точки екстремуму (рис. 49.14).

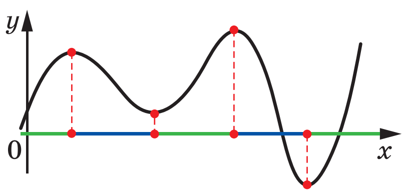


Рис. 49.14

Ви знаєте, що за допомогою похідної можна знаходити проміжки зростання (спадання) диференційовної функції. Дві теореми, наведені нижче, показують, як за допомогою похідної можна знаходити точки екстремуму функції.

Теорема 49.2 (ознака точки максимуму функції). ***Нехай функція f є диференційовною на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$ та неперервною в точці x_0. Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) \geqslant 0$, а для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) \leqslant 0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції f*** (рис. 49.13, *а*, *в*).

Теорема 49.3 (ознака точки мінімуму функції). ***Нехай функція f є диференційовною на кожному з проміжків $(a; x_0)$ і $(x_0; b)$ та неперервною в точці x_0. Якщо для всіх $x \in (a; x_0)$ виконується нерівність $f'(x) \leqslant 0$, а для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність $f'(x) \geqslant 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f*** (рис. 49.13, *б*, *г*).

Доведемо теорему 49.2 (теорему 49.3 можна довести аналогічно).

Доведення. Нехай x — довільна точка проміжку $(a; x_0)$. За теоремою Лагранжа для функції f на відрізку $[x; x_0]$ можна записати:

$$\frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = f'(c),$$

де $c \in (x; x_0)$. За умовою теореми $f'(c) \geqslant 0$, тому $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Аналогічно доводимо, що для довільного $x \in (x_0; b)$ також виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$. Отже, для будь-якого $x \in (a; b)$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$. Таким чином, x_0 — точка максимуму. ◄

Інколи зручно користуватися спрощеними формулюваннями цих двох теорем: *якщо при переході через точку x_0, у якій функція є неперервною, похідна змінює знак із плюса на мінус, то x_0 — точка максимуму*; *якщо похідна змінює знак із мінуса на плюс, то x_0 — точка мінімуму*.

Зазначимо, що вимога неперервності функції f у точці x_0 в умовах теорем 49.2 і 49.3 є суттєвою. На рисунку 49.15 похідна функції f при переході через критичну точку x_0 змінює знак із мінуса на плюс, при цьому точка x_0 є точкою максимуму; на рисунку 49.16 похідна функції f при переході через критичну точку x_0 змінює знак із плюса на мінус, при цьому точка x_0 не є точкою екстремуму.

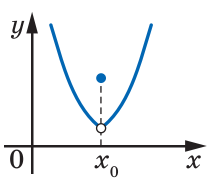


Рис. 49.15

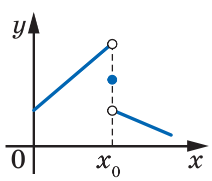


Рис. 49.16

Для функції f точки екстремуму можна шукати за такою схемою.

1) Знайти $f'(x)$.

2) Дослідити знак похідної в околах критичних точок.

3) Користуючись відповідними теоремами, стосовно кожної критичної точки з'ясувати, чи є вона точкою екстремуму.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$;

2) $f(x) = 2x^2 - x^4$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 4}{x - 1}$;

4) $f(x) = \dfrac{x + 2}{\sqrt{x}}$;

5) $f(x) = 3\,|\,x\,|\,(x + 2) - 4x^3$.

Розв'язання. 1) Маємо:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6\,(x^2 - x - 2) = 6\,(x + 1)\,(x - 2).$$

Методом інтервалів дослідимо знак похідної в околах критичних точок $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (рис. 49.17). Отримуємо: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 2$.

Рис. 49.17

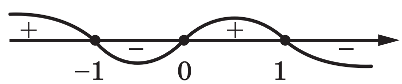


Рис. 49.18

2) $f'(x) = 4x - 4x^3 = -4x\,(x^2 - 1) = -4x\,(x + 1)\,(x - 1)$.

Дослідивши знак похідної (рис. 49.18), отримуємо: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 0$ і $x_{\max} = 1$.

3) Маємо: $f'(x) = \dfrac{(x^2 - x + 4)'\,(x - 1) - (x - 1)'\,(x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} =$

$$= \frac{(2x - 1)\,(x - 1) - (x^2 - x + 4)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x + 1)\,(x - 3)}{(x - 1)^2}.$$

Дослідимо знак похідної в околах критичних точок $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ (рис. 49.19). Отримуємо: $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 3$.

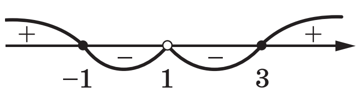


Рис. 49.19

4) Маємо:

$$f'(x) = \frac{(x + 2)' \cdot \sqrt{x} - \left(\sqrt{x}\right)' \cdot (x + 2)}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\sqrt{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,(x + 2)}{x} =$$

$$= \frac{2x - (x + 2)}{2x\sqrt{x}} = \frac{x - 2}{2x\sqrt{x}}.$$

Якщо $0 < x \leqslant 2$, то $f'(x) \leqslant 0$; якщо $x \geqslant 2$, то $f'(x) \geqslant 0$. Отже, критична точка $x = 2$ є точкою мінімуму, тобто $x_{\min} = 2$.

5) Якщо $x < 0$, то $f(x) = -4x^3 - 3x^2 - 6x$. Якщо $x > 0$, то $f(x) = -4x^3 + 3x^2 + 6x$. Тоді для будь-якого $x \in (-\infty; 0)$ маємо: $f'(x) = -12x^2 - 6x - 6$, а для будь-якого $x \in (0; +\infty)$ маємо: $f'(x) = -12x^2 + 6x + 6$.

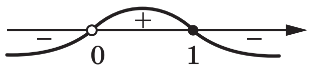


Рис. 49.20

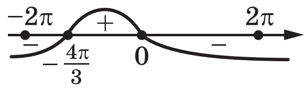


Рис. 49.21

На рисунку 49.20 показано результат дослідження знака похідної на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Функція f є неперервною в точках $x = 0$ і $x = 1$. Тепер можна зробити висновок: $x = 0$ — точка мінімуму, $x = 1$ — точка максимуму. ◄

ПРИКЛАД 2 Знайдіть точки екстремуму функції

$$f(x) = \sin\frac{x}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{x}{2} - \frac{x-3}{2}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}.$$

Знайдемо критичні точки даної функції:

$$\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 4\pi k, \\ x = -\frac{4\pi}{3} + 4\pi k. \end{array}\right.$$

Функція $f'(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}$ є періодичною з періодом $T = 4\pi$. Методом інтервалів дослідимо її знак на проміжку $[-2\pi; 2\pi]$ завдовжки в період. Цьому проміжку належать дві критичні точки: $x = 0$ і $x = -\frac{4\pi}{3}$.

На рисунку 49.21 показано результат дослідження знака похідної на проміжку $[-2\pi; 2\pi]$. Тепер можна зробити висновок: $x_{max} = 0$, $x_{min} = -\frac{4\pi}{3}$.

Узагальнюючи отриманий результат, отримуємо відповідь: $x_{max} = 4\pi k$, $x_{min} = -\frac{4\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. ◄

ВПРАВИ

49.1.° На рисунку 49.22 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-10; 9]$. Укажіть: 1) критичні точки функції; 2) точки мінімуму; 3) точки максимуму.

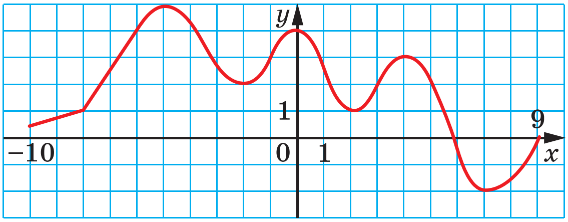


Рис. 49.22

49.2.° На рисунку 49.23 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-7; 7]$. Укажіть: 1) критичні точки функції; 2) точки мінімуму; 3) точки максимуму.

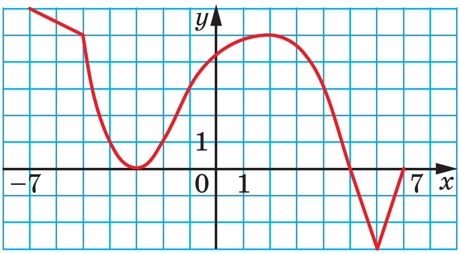


Рис. 49.23

49.3.° На рисунку 49.24 укажіть графік функції, для якої точка x_0 є точкою мінімуму.

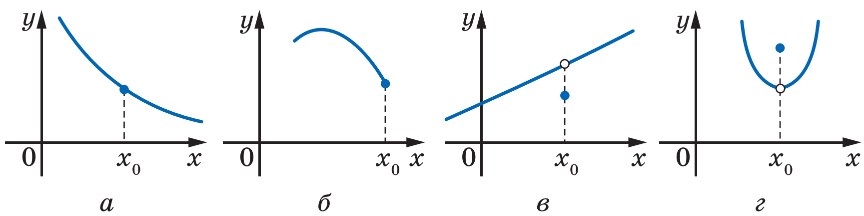


Рис. 49.24

49.4.° Чи має критичні точки функція:

1) $f(x) = x$; 3) $f(x) = 5$; 5) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

2) $f(x) = x^5 + 1$; 4) $f(x) = \sin x$; 6) $f(x) = \sqrt{x}$?

49.5.° На рисунку 49.25 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині дійсних чисел. Чи є правильною рівність:

1) $f'(-3) = 0$; 3) $f'(0) = 0$; 5) $f'(2) = 0$;

2) $f'(-2) = 0$; 4) $f'(1) = 0$; 6) $f'(3) = 0$?

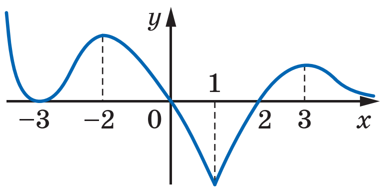


Рис. 49.25

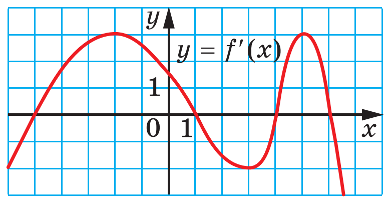


Рис. 49.26

49.6.° Функція $y = f(x)$ диференційовна на множині дійсних чисел. На рисунку 49.26 зображено графік її похідної. Укажіть точки максимуму і мінімуму функції $y = f(x)$.

49.7.° Функція $y = f(x)$ диференційовна на множині дійсних чисел. На рисунку 49.27 зображено графік функції $y = f'(x)$. Скільки точок екстремуму має функція $y = f(x)$?

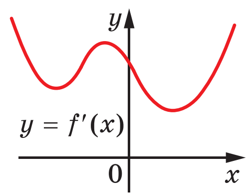


Рис. 49.27

49.8.° Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

1) $f(x) = 0,5x^4$; 4) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$;

2) $f(x) = x^2 - 6x$; 5) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$;

3) $f(x) = 12x - x^3$; 6) $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{2}$.

49.9.° Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$; 4) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 4$;

2) $f(x) = 4x - \frac{1}{3}x^3$; 5) $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2$;

3) $f(x) = -x^2 + 4x - 3$; 6) $f(x) = 2 + x^2 + 2x^3 - 2x^4$.

49.10.° Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 7$; 3) $f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{5}x^5 + x^4 + 3$.

2) $f(x) = (x - 1)^3 (x - 2)^2$;

49.11.° Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 9$; 2) $f(x) = (x+4)^4 (x-3)^3$.

49.12.° Доведіть, що дана функція не має точок екстремуму:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 10$; 2) $f(x) = \sin x - x$.

49.13.° Доведіть, що дана функція не має точок екстремуму:

1) $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - 20$; 2) $f(x) = \cos x + x$.

49.14.• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$; 4) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{9}{x^2}$; 7) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 16}$;

2) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x - 2}$; 5) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2}$; 8) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.

3) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$; 6) $f(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}$;

49.15.• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 6x}{x + 2}$; 3) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$; 5) $f(x) = \frac{1}{16 - x^2}$;

2) $f(x) = x + \frac{9}{x}$; 4) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$; 6) $f(x) = 2x - \sqrt{x}$.

49.16.• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x^2\sqrt{1 - x}$; 3) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$;

2) $f(x) = (1 - x)\sqrt{x}$; 4) $f(x) = \frac{2x - 7}{\sqrt{3 - x}}$.

49.17.• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x^2\sqrt{x + 2}$; 2) $f(x) = (x - 2)^2\sqrt{x}$; 3) $f(x) = \frac{3x + 1}{\sqrt{x - 1}}$.

49.18.• Чи є правильним твердження:

1) значення функції в точці максимуму може бути меншим від значення функції в точці мінімуму;
2) функція в точці екстремуму може бути недиференційовною;
3) якщо похідна в деякій точці дорівнює нулю, то ця точка є точкою екстремуму функції?

49.19.• Чи є правильним твердження:
1) у точці екстремуму похідна функції дорівнює нулю;
2) якщо функція в деякій точці недиференційовна, то ця точка є точкою екстремуму функції?

49.20.• Точка x_0 — критична точка функції f. Для всіх $x < x_0$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, а для всіх $x > x_0$ — нерівність $f'(x) < 0$. Чи може точка x_0 бути точкою мінімуму?

49.21.• Точка x_0 — критична точка функції f. Для всіх u і v таких, що $u < x_0$ і $v > x_0$, виконується нерівність $f'(u)f'(v) < 0$. Чи обов'язково точка x_0 є точкою екстремуму?

49.22.• Точка x_0 — критична точка функції f. Для всіх u і v таких, що $u < x_0$ і $v > x_0$, виконується нерівність $f'(u)f'(v) > 0$. Чи може точка x_0 бути точкою екстремуму?

49.23.• Доведіть, що многочлен степеня n має не більше ніж $(n - 1)$ точку екстремуму.

49.24.•• Для кожного $n \in \mathbb{N}$ доведіть існування многочлена степеня n, що має $(n - 1)$ точку екстремуму.

49.25.•• Доведіть, що між довільними двома точками мінімуму (максимуму) неперервної на $\mathbb{R}$ функції є точка максимуму (мінімуму).

49.26.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \frac{x}{2} - \sin x$; 2) $f(x) = \cos 2x - x\sqrt{3}$.

49.27.•• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = \cos x + \frac{x}{2}$; 2) $f(x) = \sin 2x - x\sqrt{2}$.

49.28.•• Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $f(x) = x\,|x - 1| - 5x^3$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,(x - 1)$.

49.29.•• Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $f(x) = 3\,|x|\,(x - 3) - x^3$; 2) $f(x) = x\sqrt[3]{(x + 2)^2}$.

49.30.•• При яких значеннях параметра a функція $y = x^3 - 3ax^2 + 27x - 5$ має тільки одну критичну точку?

49.31.•• При яких значеннях параметра a функція

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2ax^2 + 4x - 15$$

має тільки одну критичну точку?

49.32.•• Чи є правильним твердження: якщо $\max\limits_{M} f(x) = f(x_0)$, $x_0 \in M$, і функція f є диференційовною в точці x_0, то $f'(x_0) = 0$?

49.33.•• Чи може мати тільки одну точку екстремуму: 1) парна функція; 2) непарна функція; 3) періодична функція?

49.34.•• Для всіх $x \in D(f)$ виконується нерівність $f(x) \geqslant f(x_0)$. 1) Чи є правильним твердження, що x_0 — точка мінімуму функції f? 2) Чи зміниться відповідь, якщо $D(f) = \mathbb{R}$?

49.35.•• Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

1) $f(x) = \sin x \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 3) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{1 - \sqrt{3}x}{2}$;

2) $f(x) = \sin x - \cos x + x$; 4) $f(x) = \sin^2 x - \cos x$.

49.36.•• Знайдіть точки мінімуму і максимуму функції:

1) $f(x) = \cos x \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; 3) $f(x) = 5\sin x + 12\cos x - 13x$.

2) $f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x - x$;

49.37.•• При яких значеннях параметра a функція

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{3a + 1}{2}x^2 + (2a^2 + 2a)x - 17$$

має додатну точку мінімуму?

49.38.•• При яких значеннях параметра a функція

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{3a - 1}{2}x^2 + (2a^2 - a)x + 19$$

має додатну точку мінімуму?

49.39.•• При яких значеннях параметра a точка $x_0 = 1$ є точкою мінімуму функції $y = \frac{x^3}{3} + ax^2 + (a^2 - 4)x + 7$?

49.40.•• При яких значеннях параметра a точка $x_0 = 0$ є точкою максимуму функції $y = \frac{x^3}{3} - ax^2 + (a^2 - 1)x - 9$?

49.41.•• При яких значеннях параметра a точка $x_0 = 1$ є точкою екстремуму функції $y = x^3 - ax^2 + (a^2 - 2a)x - 7$?

49.42.•• При яких значеннях параметра a точка $x_0 = 2$ є точкою екстремуму функції $y = x^3 - 2ax^2 + (2a^2 - 2a)x + 9$?

49.43.•• Знайдіть усі значення параметра p, при яких рівняння $x^3 - 3px^2 + p = 0$ має три різних корені.

49.44.•• При яких значеннях параметра a нерівність $2(x - a)^4 \leqslant 1 - x$ має хоча б один розв'язок?

49.45.* При яких значеннях параметра a функція
$$f(x) = x(1-a) + 3(1-2a)\sin\frac{x}{3} + \frac{3}{2}\sin\frac{2x}{3}$$
має не більше двох точок екстремуму на проміжку $(\pi;\ 5\pi)$?

49.46.* Про диференційовну на $\mathbb{R}$ функцію f відомо, що x_0 — її точка мінімуму. Чи обов'язково знайдеться такий окіл I точки x_0, що для всіх $x < x_0$, $x \in I$ виконується нерівність $f'(x) \leqslant 0$, а для всіх $x > x_0$, $x \in I$ — нерівність $f'(x) \geqslant 0$?

49.47.* Чи можна стверджувати, що x_0 — точка мінімуму визначеної на $\mathbb{R}$ функції f, якщо в будь-якому інтервалі координатної прямої знайдеться така точка x, що $f(x_0) < f(x)$?

49.48.* Чи існує визначена на $(-1;\ 1)$ функція така, що кожна точка інтервалу $(-1;\ 1)$ є точкою строгого максимуму цієї функції?

50. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Яку кількість продукції треба випустити підприємству, щоб отримати найбільший прибуток? Як, маючи обмежені ресурси, виконати виробниче завдання за найменший час? Як доставити товар у торговельні точки так, щоб витрати палива були найменшими?

З такими й подібними задачами на пошук найкращого або, як говорять, оптимального розв'язку людині досить часто доводиться стикатися у своїй діяльності.

Уявимо, що відомо функцію, яка описує, наприклад, залежність прибутку підприємства від кількості виготовленої продукції. Тоді задача зводиться до пошуку аргументу, при якому функція набуває найбільшого значення.

У цьому пункті ми з'ясуємо, як можна знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку $[a;\ b]$. Обмежимося розглядом лише неперервних функцій.

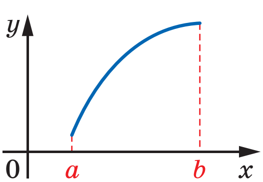
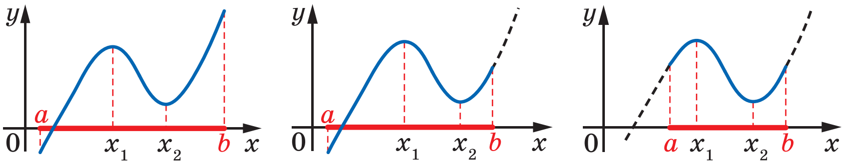


Рис. 50.1

Зауважимо, що точка, у якій функція набуває найменшого значення, не обов'язково є точкою мінімуму. Наприклад, на рисунку 50.1 $\min\limits_{[a;\,b]} f(x) = f(a)$, а точок мінімуму функція f не має. Також точка мінімуму не обов'язково є точкою, у якій функція набуває найменшого значення. На рисунку 50.2, *а* точка x_2 — єдина точка мінімуму, а найменше значення $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ досягається в точці a.

Аналогічне зауваження стосується і точок максимуму та точок, у яких функція досягає найбільшого значення.

На рисунку 50.2 подано різні випадки розташування точок екстремумів і точок, у яких функція набуває найбільшого та найменшого значень.



$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_2)$

$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$ $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$

а *б* *в*

Рис. 50.2

Тут важливо зрозуміти, що властивість функції мати точку екстремуму x_0 означає таке: функція набуває в точці x_0 найбільшого (найменшого) значення порівняно зі значеннями функції в усіх точках деякого, можливо, дуже малого околу точки x_0. Щоб наголосити на цьому факті, точки екстремуму називають іще **точками локального максимуму** або **точками локального мінімуму** (від латин. *locus* — місце).

Неперервна на відрізку $[a; b]$ функція набуває на цьому проміжку своїх найбільшого і найменшого значень[1] або на кінцях відрізка, або в точках екстремуму (рис. 50.2).

Тоді для такої функції пошук найбільшого і найменшого значень на відрізку $[a; b]$ можна проводити, користуючись такою схемою.

1. Знайти критичні точки функції f, які належать відрізку $[a; b]$.

2. Обчислити значення функції в знайдених критичних точках і на кінцях розглядуваного відрізка.

3. З усіх знайдених значень вибрати найбільше і найменше.

Зрозуміло, що цей алгоритм можна реалізувати лише тоді, коли розглядувана функція f має скінченну кількість критичних точок на відрізку $[a; b]$.

[1] Нагадаємо, що існування найбільшого та найменшого значень неперервної на відрізку функції гарантує друга теорема Вейєрштрасса (теорема 40.4).

Якщо визначити, які з критичних точок є точками екстремуму, то кількість точок, у яких треба шукати значення функції, можна зменшити. Проте щоб виявити точки екстремуму, зазвичай потрібна більша технічна робота, ніж для обчислення значень функції в критичних точках.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x + 6$ на відрізку $[-2; 0]$.

Розв'язання. Знайдемо критичні точки даної функції:

$$f'(x) = 12x^2 - 18x - 12;$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0; \quad x = 2 \text{ або } x = -\frac{1}{2}.$$

Таким чином, функція f має дві критичні точки, а проміжку $[-2; 0]$ належить одна: $x = -\frac{1}{2}$.

Маємо: $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $f(-2) = -38$, $f(0) = 6$.

Отже, $\max\limits_{[-2;\,0]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{4}$, $\min\limits_{[-2;\,0]} f(x) = f(-2) = -38$.

Відповідь: $\frac{37}{4}$; -38. ◄

ПРИКЛАД 2 Подайте число 8 у вигляді суми двох таких невід'ємних чисел, щоб сума куба першого числа та квадрата другого була найменшою.

Розв'язання. Нехай перше число дорівнює x, тоді друге дорівнює $8 - x$. З умови випливає, що $0 \leqslant x \leqslant 8$.

Розглянемо функцію $f(x) = x^3 + (8 - x)^2$, визначену на відрізку $[0; 8]$, і знайдемо, при якому значенні x вона набуває найменшого значення.

Маємо: $f'(x) = 3x^2 - 2(8 - x) = 3x^2 + 2x - 16$. Знайдемо критичні точки даної функції:

$$3x^2 + 2x - 16 = 0;$$

$$x = 2 \text{ або } x = -\frac{8}{3}.$$

Серед знайдених чисел проміжку $[0; 8]$ належить тільки число 2. Отримуємо:

$$f(2) = 44, \ f(0) = 64, \ f(8) = 512.$$

Отже, функція f набуває найменшого значення при $x = 2$.

Відповідь: $8 = 2 + 6$. ◄

ПРИКЛАД 3 Знайдіть сторони прямокутника, вписаного в коло радіуса R, при яких площа прямокутника набуває найбільшого значення.

Розв'язання. Розглянемо прямокутник $ABCD$, вписаний у коло радіуса R (рис. 50.3). Нехай $AB = x$, тоді $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{4R^2 - x^2}$. Звідси площа прямокутника $ABCD$ дорівнює $x\sqrt{4R^2 - x^2}$. З умови задачі випливає, що значення змінної x задовольняють нерівність $0 < x < 2R$, тобто належать проміжку $(0;\ 2R)$. Таким чином, задача звелася до знаходження найбільшого значення функції $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ на інтервалі $(0;\ 2R)$.

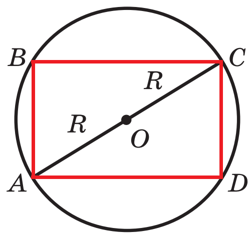


Рис. 50.3

Розглянемо неперервну функцію $f(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, $D(f) = [0;\ 2R]$, і визначимо її найбільше значення на відрізку $[0;\ 2R]$.

Знайдемо критичні точки функції f:

$$f'(x) = (x)' \cdot \sqrt{4R^2 - x^2} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{4R^2 - x^2}} \cdot \left(4R^2 - x^2\right)' =$$

$$= \sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{(4R^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \frac{4R^2 - 2x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

Функція f має одну критичну точку $x = R\sqrt{2}$.

Маємо: $f\left(R\sqrt{2}\right) = 2R^2$, $f(0) = f(2R) = 0$.

Отже, $\max\limits_{[0;\,2R]} f(x) = f\left(R\sqrt{2}\right) = 2R^2$.

Звідси отримуємо, що функція $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$ на інтервалі $(0;\ 2R)$ набуває найбільшого значення при $x = R\sqrt{2}$. Тоді $AB = R\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}$.

Отже, серед прямокутників, вписаних у коло радіуса R, найбільшу площу має квадрат зі стороною $R\sqrt{2}$. ◄

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x}$, $D(f) = [2;\ 4]$. Для всіх $x \in (2;\ 4)$ маємо: $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}}$.

Розв'яжемо рівняння $f'(x) = 0$.

Запишемо: $\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{(4-x)^3}} = 0$. Звідси легко знайти, що $x = 3$. Отже, функція f на відрізку $[2; 4]$ має єдину критичну точку $x = 3$.

Оскільки функція f є неперервною на відрізку $[2; 4]$, то її найбільше і найменше значення знаходяться серед чисел $f(3)$, $f(2)$, $f(4)$. Маємо: $f(3) = 2$, $f(2) = f(4) = \sqrt[4]{2}$.

Таким чином, $\max\limits_{[2;4]} f(x) = f(3) = 2$, причому найбільшого значення функція f набуває лише при $x = 3$.

Оскільки нам потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 2$, то отримуємо, що $x = 3$ є його єдиним коренем.

Відповідь: 3. ◄

ПРИКЛАД 5 Пункти A, B і C розміщені у вершинах прямокутного трикутника ($\angle ACB = 90°$), $BC = 3$ км, $AC = 5$ км. З пункту A в пункт C веде шосейна дорога. Турист починає рухатися з пункту A по шосе. На якій відстані від пункту A турист має звернути із шосе, щоб за найменший час дійти з пункту A до пункту B, якщо швидкість туриста по шосе дорівнює 5 км/год, а поза шосе — 4 км/год?

Розв'язання. Позначимо через D точку, у якій турист має звернути із шосе, щоб найшвидше подолати шлях (рис. 50.4).

Нехай $AD = x$ км. Маємо: $DC = 5 - x$, $DB = \sqrt{DC^2 + BC^2} = \sqrt{(5-x)^2 + 9}$.

Тоді час, за який турист подолає шлях, дорівнює $\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{(5-x)^2+9}}{4}$.

Тепер зрозуміло, що для розв'язання задачі достатньо знайти найменше значення функції $f(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{(5-x)^2+9}}{4}$, заданої на відрізку $[0; 5]$. Маємо: $f'(x) = \frac{1}{5} - \frac{5-x}{4\sqrt{(5-x)^2+9}}$. Розв'язавши рівняння $\frac{1}{5} - \frac{5-x}{4\sqrt{(5-x)^2+9}} = 0$ (зробіть це самостійно), установлюємо, що число $x = 1$ є його єдиним коренем. Порівнюючи числа $f(0) = \frac{\sqrt{34}}{4}$, $f(1) = \frac{29}{20}$ і $f(5) = \frac{7}{4}$, установлюємо, що $f(1) = \frac{29}{20}$ — найменше значення функції f на відрізку $[0; 5]$.

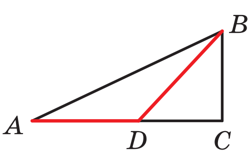


Рис. 50.4

Відповідь: 1 км. ◄

ВПРАВИ

50.1.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = 3x^2 - x^3$, $[-1; 3]$;
2) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $[0; 2]$;
3) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 3$, $[1; 3]$;
4) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 3$, $[-1; 4]$;
5) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 60x - 7$, $[-1; 3]$;
6) $f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$, $[-3; 0]$.

50.2.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$, $[0; 3]$;
2) $f(x) = x - 1 - x^3 - x^2$, $[-2; 0]$;
3) $f(x) = 2x^4 - 8x$, $[-2; 1]$;
4) $f(x) = \frac{x^4}{4} - 8x^2$, $[-1; 2]$.

50.3.• Доведіть нерівність $-20 \leqslant x^3 - 3x^2 \leqslant 16$, де $x \in [-2; 4]$.

50.4.• Доведіть нерівність $0 \leqslant x^3 - 2x^2 + x \leqslant 2$, де $x \in [0; 2]$.

50.5.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$, $[-6; 8]$;
2) $f(x) = \sqrt{0{,}5x^2 + 3x + 5}$, $[2; 4]$;
3) $f(x) = (x + 1)^2 (x - 2)^2$, $[-2; 4]$;
4) $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$, $[-4; -1]$.

50.6.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = \sqrt{9 + 8x - x^2}$, $[0; 7]$;
2) $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$, $[-2; 4]$;
3) $f(x) = (x - 1)^2 (x + 5)^2$, $[-3; 2]$;
4) $f(x) = -x - \frac{9}{x}$, $[-6; -1]$.

50.7.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = \sin x - \cos x$, $[0; \pi]$;
2) $f(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$, $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$;
3) $f(x) = x\sqrt{3} - \cos 2x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

50.8.• Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$, $[0; \pi]$;
2) $f(x) = 2\cos\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$, $\left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{3}\right]$.

50.9.$^{\bullet}$ Подайте число 8 у вигляді суми двох таких невід'ємних чисел, щоб добуток одного із цих чисел і куба другого числа був найбільшим.

50.10.$^{\bullet}$ Подайте число 12 у вигляді суми двох таких невід'ємних чисел, щоб добуток квадрата одного із цих чисел і подвоєного другого числа був найбільшим.

50.11.$^{\bullet}$ Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = 2\sin 2x + \cos 4x$, $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$;

2) $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x - 5$, $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$;

3) $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$, $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

50.12.$^{\bullet}$ Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному відрізку:

1) $f(x) = 2\cos x - \sin 2x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $f(x) = 2\sqrt{3}\cos x + 2\sin x$, $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

50.13.$^{\bullet\bullet}$ Розбийте число 180 на три таких невід'ємних доданки, щоб два з них відносились як 1 : 2, а добуток усіх трьох доданків був найбільшим.

50.14.$^{\bullet\bullet}$ Подайте число 18 у вигляді суми трьох таких невід'ємних чисел, щоб два з них відносились як 8 : 3, а сума кубів цих трьох чисел була найменшою.

50.15.$^{\bullet\bullet}$ У трикутник ABC вписано прямокутник так, що дві його вершини лежать на стороні AC, а дві інші — на сторонах AB і BC. Знайдіть найбільше значення площі такого прямокутника, якщо $AC = 12$ см, $BD = 10$ см, де BD — висота трикутника ABC.

50.16.$^{\bullet\bullet}$ У прямокутний трикутник з гіпотенузою 16 см і гострим кутом 30° вписано прямокутник, дві вершини якого лежать на гіпотенузі, а дві інші — на катетах. Якими мають бути сторони прямокутника, щоб його площа була найбільшою?

50.17.$^{\bullet\bullet}$ У півколо радіуса 20 см вписано прямокутник найбільшої площі. Знайдіть сторони прямокутника.

50.18.$^{\bullet\bullet}$ У півколо радіуса 6 см вписано прямокутник найбільшого периметра. Знайдіть сторони прямокутника.

50.19.•• Дві вершини прямокутника належать графіку функції $y = 12 - x^2$, $D(y) = \left[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right]$, а дві інші — осі абсцис. Яку найбільшу площу може мати такий прямокутник?

50.20.•• Дві вершини прямокутника належать графіку функції $y = 0{,}5x^2$, $D(y) = \left[-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right]$, а дві інші — прямій $y = 9$. Яку найбільшу площу може мати такий прямокутник?

50.21.•• Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. Якою має бути довжина основи трикутника, щоб його площа набувала найбільшого можливого значення?

50.22.•• Василь Заплутайко вирішив знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на відрізку $[-1; 1]$. Він знайшов похідну $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ і встановив, що рівняння $-\frac{1}{x^2} = 0$ не має розв'язків. Порівнявши значення $f(-1) = -1$ і $f(1) = 1$, Василь стверджує, що найбільше значення функції f на відрізку $[-1; 1]$ дорівнює 1, а найменше дорівнює -1. Чи правильно міркує Василь?

50.23.•• У трапеції менша основа й бічні сторони дорівнюють a. Знайдіть більшу основу трапеції, при якій її площа набуває найбільшого значення.

50.24.•• У рівнобедрений трикутник вписано коло радіуса r. Яким має бути кут при основі трикутника, щоб його площа була найменшою?

50.25.•• Яким має бути кут при вершині рівнобедреного трикутника заданої площі, щоб радіус вписаного в цей трикутник кола був найбільшим?

50.26.•• На колі радіуса R позначили точку A. На якій відстані від точки A треба провести хорду BC, паралельну дотичній у точці A, щоб площа трикутника ABC була найбільшою?

50.27.•• Фігуру обмежено графіком функції $y = \sqrt{x}$, прямою $y = 2$ і віссю ординат. У якій точці графіка функції $y = \sqrt{x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 4)$ треба провести дотичну, щоб вона відтинала від указаної фігури трикутник найбільшої площі?

50.28.•• На координатній площині розміщено прямокутний трикутник ABC ($\angle ABC = 90°$). Вершина A має координати $(-2; 0)$, вершина B належить відрізку $[2; 3]$ осі абсцис, а вершина C — параболі $y = x^2 - 4x + 1$. Якими мають бути координати точки C, щоб площа трикутника ABC була найбільшою?

50.29.•• Пункти A, B і C знаходяться у вершинах прямокутного трикутника ABC ($\angle ACB = 90°$), $AC = 285$ км, $BC = 60$ км. Пункти A і C сполучає залізниця. У яку точку відрізка AC треба провести ґрунтову дорогу з пункту B, щоб час перебування в дорозі від пункту A до пункту B був найменшим, якщо відомо, що швидкість руху залізницею дорівнює 52 км/год, а ґрунтовою дорогою — 20 км/год?

50.30.•• Завод A розміщено на відстані 50 км від прямолінійної ділянки залізниці, яка прямує в місто B, і на відстані 130 км від міста B. Під яким кутом до залізниці треба провести шосе від заводу A, щоб доставка вантажів з A до B була найдешевшою, якщо вартість перевезення по шосе у 2 рази більша, ніж залізницею?

50.31.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = -5x^3 + x\,|x-1|$ на проміжку $[0; 2]$.

50.32.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 4x^3 - x\,|x-2|$ на проміжку $[0; 3]$.

50.33.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{5-x} + \sqrt{x-3} = x^2 - 8x + 18$.

50.34.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+7} + \sqrt{1-x} = x^2 + 6x + 13$.

50.35.* Знайдіть усі такі значення параметра a, при яких найменше значення функції $f(x) = -x^4 + \frac{2ax^3}{9} + \frac{a^2x^2}{3}$ на відрізку $[-1; 0]$ досягається в точці $x = -1$.

50.36.* Знайдіть усі значення параметра a, при яких найменше значення функції $y = x^3 - 2ax^2 + 1$ на відрізку $[0; 1]$ досягається в точці $x = 1$.

51. Друга похідна. Поняття опуклості функції

Нехай матеріальна точка рухається за законом $y = s(t)$ по координатній прямій. Тоді миттєву швидкість $v(t)$ у момент часу t визначають за формулою

$$v(t) = s'(t).$$

Розглянемо функцію $y = v(t)$. Її похідну в момент часу t називають прискоренням руху та позначають $a(t)$, тобто

$$a(t) = v'(t).$$

Таким чином, функція прискорення руху — це похідна функції швидкість руху, яка у свою чергу є похідною функції закон руху, тобто

$$a(t) = v'(t) = (s'(t))'.$$

У таких випадках говорять, що функція прискорення руху $y = a(t)$ є **другою похідною функції** $y = s(t)$. Записують:

$$a(t) = s''(t)$$

(запис $s''(t)$ читають: «ес два штрихи від те»).

Наприклад, якщо закон руху матеріальної точки задано формулою $s(t) = t^2 - 4t$, то маємо:

$$s'(t) = v(t) = 2t - 4;$$
$$s''(t) = v'(t) = a(t) = 2.$$

Ми отримали, що матеріальна точка рухається зі сталим прискоренням. Як ви знаєте з курсу фізики, такий рух називають рівноприскореним.

Узагальнимо сказане.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, диференційовну на деякій множині M. Тоді її похідна також є деякою функцією, заданою на цій множині. Якщо функція f' є диференційовною в деякій точці $x_0 \in M$, то похідну функції f' у точці x_0 називають **другою похідною функції** $\boldsymbol{y = f(x)}$ **у точці** x_0 та позначають $f''(x_0)$ або $y''(x_0)$. Саму функцію f називають **двічі диференційовною в точці** x_0.

Функцію, яка числу x_0 ставить у відповідність число $f''(x_0)$, називають **другою похідною функції** $y = f(x)$ і позначають f'' або y''.

Наприклад, якщо $y = \sin x$, то $y'' = -\sin x$.

Якщо функція f є двічі диференційовною в кожній точці множини M, то її називають **двічі диференційовною на множині** M. Якщо функція f двічі диференційовна на $D(f)$, то її називають **двічі диференційовною.**

Ви знаєте, що функцію характеризують такі властивості, як парність (непарність), періодичність, зростання (спадання) тощо. Ще однією важливою характеристикою функції є опуклість угору та опуклість униз.

Звернемося до прикладів.

Про функції $y = x^2$, $y = |x|$ говорять, що вони є опуклими вниз (рис. 51.1), а функції $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$ є опуклими вгору (рис. 51.2).

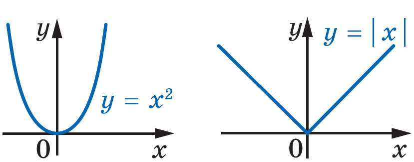


Рис. 51.1

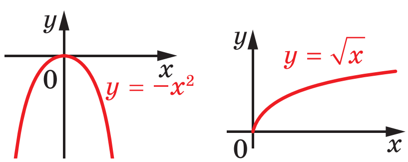


Рис. 51.2

Функція $y = \sin x$ є опуклою вгору на проміжку $[0; \pi]$ та опуклою вниз на проміжку $[\pi; 2\pi]$ (рис. 51.3).

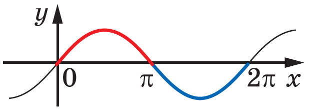


Рис. 51.3

Надалі, вивчаючи поняття опуклості функції на проміжку I, обмежимося випадком, коли функція f є диференційовною[1] на цьому проміжку.

Нехай функція f диференційовна на проміжку I. Тоді в будь-якій точці її графіка з абсцисою $x \in I$ можна провести невертикальну дотичну. Якщо при цьому графік функції на проміжку I розміщений не вище за будь-яку таку дотичну (рис. 51.4), то функцію f називають **опуклою вгору на проміжку** I; якщо ж графік на проміжку I розміщено не нижче від кожної такої дотичної (рис. 51.5) — **опуклою вниз на проміжку** I.

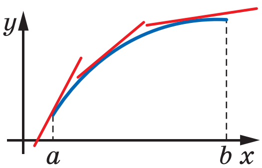


Рис. 51.4

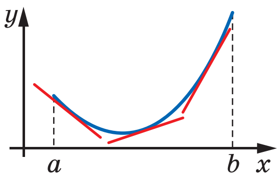


Рис. 51.5

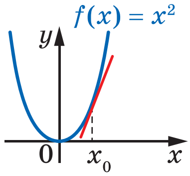


Рис. 51.6

Наприклад, доведемо, що функція $f(x) = x^2$ є опуклою вниз на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Проведемо дотичну до графіка функції $f(x) = x^2$ у точці з абсцисою x_0 (рис. 51.6). Рівняння цієї дотичної має вигляд

$$y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2.$$

Розглянемо різницю

$$f(x) - \left(2x_0(x - x_0) + x_0^2\right) = x^2 - \left(2x_0(x - x_0) + x_0^2\right) =$$
$$= x^2 - 2x_0 x + x_0^2 = (x - x_0)^2.$$

Оскільки ця різниця набуває лише невід'ємних значень, то це означає, що графік функції f лежить не нижче від будь-якої дотичної. Отже, функція $f(x) = x^2$ є опуклою вниз на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Аналогічно можна довести, що функція $y = x^3$ є опуклою вгору на проміжку $(-\infty; 0]$ і опуклою вниз на проміжку $[0; +\infty)$ (рис. 51.7).

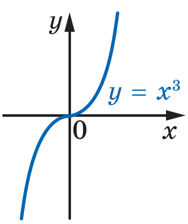


Рис. 51.7

[1] У вищій школі поняття опуклості узагальнюють і на більш широкі класи функцій, наприклад на неперервні.

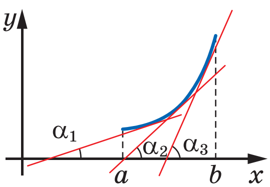
Кожна лінійна функція є як опуклою вгору, так і опуклою вниз на $\mathbb{R}$.

Зауважимо, що також буває доцільним виділяти строго опуклі функції.

Розглянемо графік функції f, опуклої вгору на проміжку I. Проведемо дотичну до нього в точці з абсцисою $x \in I$. Якщо графік на проміжку I має з кожною такою дотичною лише одну спільну точку, то говорять, що функція f є *строго опуклою вгору на проміжку* I. Аналогічно означають функцію, *строго опуклу вниз на проміжку* I.

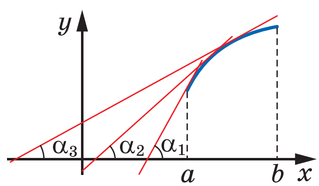
Наприклад, функція $y = x^2$ є строго опуклою вниз на $\mathbb{R}$. Жодна лінійна функція не є строго опуклою.

На рисунку 51.8 зображено графік функції f, яка є опуклою вниз на проміжку $[a; b]$. З рисунка видно, що зі збільшенням аргументу x кут нахилу відповідної дотичної збільшується. Це означає, що функція f' зростає на проміжку $[a; b]$.



$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$

Рис. 51.8



$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots$

Рис. 51.9

Нехай функція f є опуклою вгору на проміжку $[a; b]$ (рис. 51.9). З рисунка видно, що зі збільшенням аргументу x кут нахилу відповідної дотичної зменшується. Це означає, що функція f' спадає на проміжку $[a; b]$.

Ці приклади показують, що характер опуклості функції f на деякому проміжку I пов'язаний зі зростанням (спаданням) функції f' на цьому проміжку.

Для двічі диференційовної на проміжку I функції f зростання (спадання) функції f' визначається знаком другої похідної функції f на проміжку I. Таким чином, характер опуклості двічі диференційовної функції пов'язаний зі знаком її другої похідної.

Цей зв'язок установлюють такі дві теореми.

Теорема 51.1 (ознака опуклості функції вниз). ***Якщо для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f''(x) \geqslant 0$, то функція f є опуклою вниз на проміжку I.***

Теорема 51.2 (ознака опуклості функції вгору). ***Якщо для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f''(x) \leqslant 0$, то функція f є опуклою вгору на проміжку I.***

Доведемо теорему 51.1 (теорему 51.2 можна довести аналогічно).

Доведення. У точці з абсцисою $x_0 \in I$ проведемо дотичну до графіка функції f. Рівняння цієї дотичної має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Розглянемо функцію $r(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$.

Значення функції r показують, наскільки відрізняється ордината точки графіка функції f від ординати відповідної точки, яка лежить на проведеній дотичній (рис. 51.10).

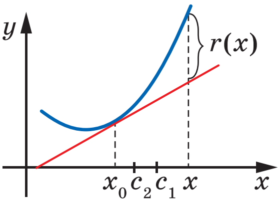


Рис. 51.10

Якщо ми покажемо, що $r(x) \geqslant 0$ для всіх $x \in I$, то таким чином доведемо, що на проміжку I графік функції f лежить не нижче від проведеної до нього дотичної.

Нехай $x \in I$ і $x > x_0$ (випадок, коли $x \leqslant x_0$, розгляньте самостійно).

Маємо: $r(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$.

Для функції f і відрізка $[x_0; x]$ застосуємо теорему Лагранжа: $f(x) - f(x_0) = f'(c_1)(x - x_0)$, де $c_1 \in (x_0; x)$.

Звідси $r(x) = f'(c_1)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$,

$$r(x) = (f'(c_1) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Оскільки функція $y = f'(x)$ є диференційовною на відрізку $[x_0; c_1]$, то можна застосувати теорему Лагранжа:

$$f'(c_1) - f'(x_0) - f''(c_2)(c_1 - x_0),\ \text{де } c_2 \in (x_0; c_1).$$

Звідси $r(x) = f''(c_2)(c_1 - x_0)(x - x_0)$.

На рисунку 51.10 показано розміщення точок c_1 і c_2.

З нерівностей $x_0 < c_2 < c_1 < x$ випливає, що $(c_1 - x_0)\ (x - x_0) > 0$. Оскільки $c_2 \in I$, то з урахуванням умови теореми отримуємо: $f''(c_2) \geqslant 0$. Звідси для всіх $x \in I$ виконується нерівність $r(x) \geqslant 0$, тому функція f є опуклою вниз на проміжку I. ◀

Також можна довести, що *коли функція f є опуклою вниз* (*угору*) *і двічі диференційовною на проміжку I, то для всіх $x \in I$ виконується нерівність $f''(x) \geqslant 0$* $(f''(x) \leqslant 0)$.

ПРИКЛАД 1 Дослідіть на опуклість функцію $f(x) = \operatorname{tg} x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Звідси $f''(x) = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' =$
$= (\cos^{-2} x)' = -2(\cos x)^{-3}(\cos x)' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

Нерівність $f''(x) \geqslant 0$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується при $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Таким чином, функція $y = \operatorname{tg} x$ є опуклою вниз на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 51.11).

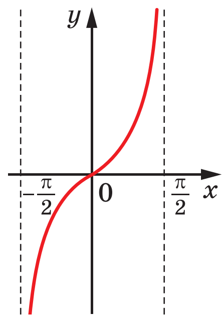
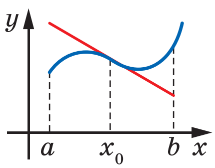


Рис. 51.11

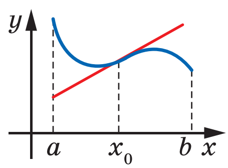
Нерівність $f''(x) \leqslant 0$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується при $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0$. Отже, функція $y = \operatorname{tg} x$ є опуклою вгору на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ (рис. 51.11). ◄

Нагадаємо, що функція тангенс є періодичною з періодом $T = \pi$. Ми дослідили її на опуклість на проміжку, довжина якого дорівнює періоду цієї функції. Отже, можна зробити висновок, що функція $y = \operatorname{tg} x$ є опуклою вниз на кожному з проміжків виду $\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ і опуклою вгору на кожному з проміжків виду $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

На рисунку 51.12 зображено графіки функцій і дотичні, проведені до них у точках з абсцисою x_0. Кожна з наведених функцій на проміжках $(a; x_0]$ і $[x_0; b)$ має різний характер опуклості, тому на цих проміжках графік функції розташований у різних півплощинах відносно дотичної. У такому разі говорять, що точка x_0 є **точкою перегину** функції.



а



б

Рис. 51.12

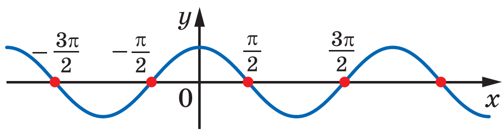


Рис. 51.13

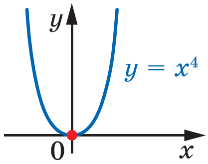


Рис. 51.14

Наприклад, точка $x_0 = 0$ є точкою перегину функції $y = x^3$ (рис. 51.7); точки виду $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, є точками перегину функції $y = \cos x$ (рис. 51.13).

Теорема 51.3. ***Якщо x_0 є точкою перегину функції f і в цій точці функція двічі диференційовна, то $f''(x_0) = 0$.***

Наведемо ідею доведення цієї теореми (за бажанням ви зможете відновити всі пропущені кроки доведення самостійно).

Розглянемо випадок, коли на проміжку $[x_0; b)$ графік функції f розташований не нижче від дотичної, а на проміжку $(a; x_0]$ — не вище за дотичну (рис. 51.12, *а*). Тоді, використовуючи рівняння дотичної, можна показати, що для всіх $x \in (x_0; b)$ виконується нерівність

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant f'(x_0).$$

Звідси за теоремою Лагранжа $f'(c) \geqslant f'(x_0)$. Тоді $\frac{f'(c) - f'(x_0)}{c - x_0} \geqslant 0$. Тепер неважко встановити, що $f''(x_0) \geqslant 0$. Розглядаючи проміжок $(a; x_0)$, аналогічно встановлюємо, що $f''(x_0) \leqslant 0$. Тому $f''(x_0) = 0$. ◀

Зазначимо, що коли в точці x_0 друга похідна дорівнює нулю, то не обов'язково ця точка є точкою перегину функції. Наприклад, для функції $f(x) = x^4$ маємо: $f''(x) = 12x^2$. Тоді $f''(0) = 0$. Проте $x_0 = 0$ не є точкою перегину (рис. 51.14).

ПРИКЛАД 2 Дослідіть характер опуклості та знайдіть точки перегину функції $f(x) = \frac{x^5}{20} - \frac{x^4}{12}$.

Розв'язання. Маємо: $f'(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}$; $f''(x) = x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$.

Використовуючи метод інтервалів, дослідимо знак функції $y = f''(x)$ (рис. 51.15). Отримуємо, що функція f є опуклою вгору на проміжку $(-\infty;\ 1]$ та опуклою вниз на проміжку $[1;\ +\infty)$.

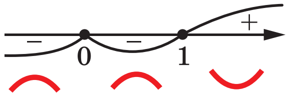


Рис. 51.15

Функція f на проміжках $(-\infty;\ 1]$ і $[1;\ +\infty)$ має різний характер опуклості. У точці з абсцисою $x_0 = 1$ до графіка функції f можна провести дотичну. Отже, $x_0 = 1$ є точкою перегину функції f. ◄

ВПРАВИ

51.1.° Знайдіть другу похідну функції:

1) $y = x^3$;
2) $y = x^2 - 2x + 5$;
3) $y = \dfrac{1}{x}$;
4) $y = \sqrt{x}$;
5) $y = \cos x$;
6) $y = (2x - 1)^5$;
7) $y = \sin 3x$;
8) $y = \cos^2 x$;
9) $y = \sin \dfrac{x}{4}$;
10) $y = x \sin x$.

51.2.° Знайдіть другу похідну функції:

1) $y = x^4$;
2) $y = 3 - 5x + x^3$;
3) $y = \dfrac{1}{x - 1}$;
4) $y = \sqrt[3]{x}$;
5) $y = (1 - 3x)^3$;
6) $y = \cos 2x$;
7) $y = \sin^2 x$;
8) $y = x \cos x$.

51.3.° На рисунку 51.16 зображено графік функції f. Укажіть кілька значень аргументу x, для яких:

1) $f''(x) \geqslant 0$;
2) $f''(x) \leqslant 0$.

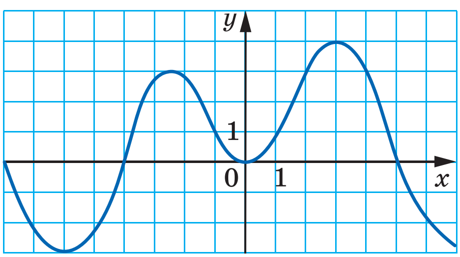


Рис. 51.16

51.4.° Доведіть, що функція $y = f(x)$ є опуклою вниз (угору) на проміжку I тоді й тільки тоді, коли функція $y = -f(x)$ є опуклою вгору (униз) на проміжку I.

51.5.° Двічі диференційовні на проміжку I функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є опуклими вниз (угору) на проміжку I. Доведіть, що функція $y = f(x) + g(x)$ є опуклою вниз (угору) на проміжку I.

51.6.° Чому дорівнює значення другої похідної функції $y = 5 \sin x - 3 \cos 4x$ у точці: 1) $x = \frac{\pi}{6}$; 2) $x = -\frac{\pi}{2}$?

51.7.° Матеріальна точка рухається по координатній прямій за законом $s(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть її прискорення в момент часу $t_0 = 2$ с.

51.8.° Одне тіло рухається по координатній прямій за законом $s_1(t) = t^3 - t^2 + 3t - 2$, а друге — за законом $s_2(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 5t - 8$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть прискорення кожного тіла в момент часу, коли їхні швидкості рівні.

51.9.° Тіло масою 5 кг рухається по координатній прямій за законом $s(t) = t^3 - 6t + 4$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах). Знайдіть силу $F(t) = ma(t)$, що діє на тіло через 3 с після початку руху.

51.10.° Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:
1) $y = x^3 - 3x + 2$;
2) $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - x + 1$.

51.11.° Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:
1) $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$;
2) $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 3x + 4$.

51.12.° Знайдіть точки перегину функції
$$y = 3x^5 - 10x^4 + 10x^3 + 12x + 3.$$

51.13.° Знайдіть точки перегину функції $y = 3x^5 + 10x^4 + 10x^3 - 5x - 4$.

51.14.° Доведіть, що функція $f(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 11x - 7$ є опуклою вниз на $\mathbb{R}$.

51.15.° Доведіть, що функція $f(x) = \sin^2 x - 2x^2$ є опуклою вгору на $\mathbb{R}$.

51.16.• Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:
1) $y = \frac{x}{1 + x^2}$;
2) $y = \frac{x}{(x - 1)^2}$.

51.17.• Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:
1) $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$;
2) $y = \frac{x}{(x + 1)^2}$.

51.18.• Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції $y = x^2 + 4 \sin x$.

51.19.• Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції $y = x^2 - 4 \cos x$.

51.20.• Знайдіть другу похідну функції $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

51.21.• Знайдіть другу похідну функції $f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ 1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$

51.22.• Функція f двічі диференційовна на $\mathbb{R}$. На рисунку 51.17 зображено графік похідної функції f. Укажіть проміжки опуклості та точки перегину функції f.

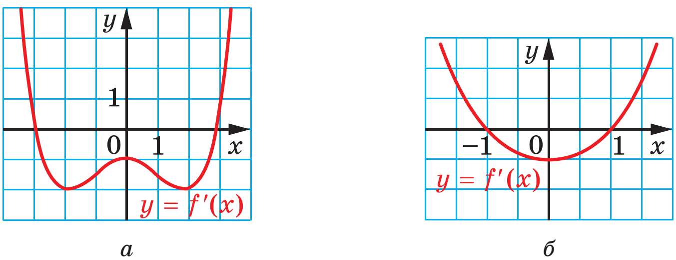


Рис. 51.17

51.23.• Функція f двічі диференційовна на $\mathbb{R}$. На рисунку 51.18 зображено графік похідної функції f. Укажіть проміжки опуклості та точки перегину функції f.

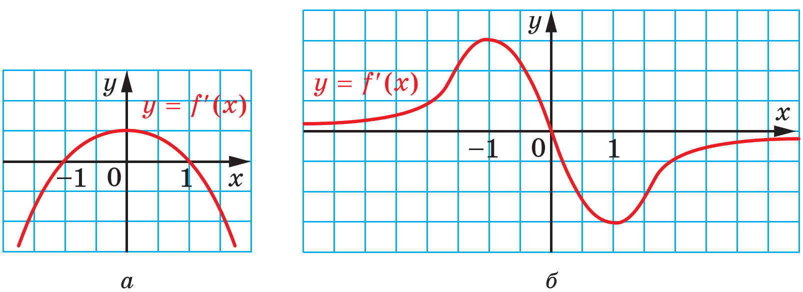


Рис. 51.18

51.24.•• На рисунку 51.19 зображено графік другої похідної функції f. Відомо, що $f'(x_0) = 0$. З'ясуйте, чи є x_0 точкою екстремуму функції f, якщо: 1) $x_0 = -1{,}5$; 2) $x_0 = 0$; 3) $x_0 = 1$.

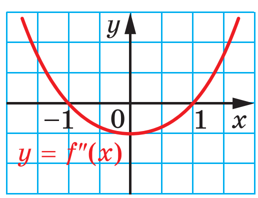


Рис. 51.19

51.25.•• На рисунку 51.20 зображено графік другої похідної функції f. Відомо, що $f'(x_0) = 0$. З'ясуйте, чи є x_0 точкою екстремуму функції f, якщо: 1) $x_0 = -1$; 2) $x_0 = 1$; 3) $x_0 = 0$.

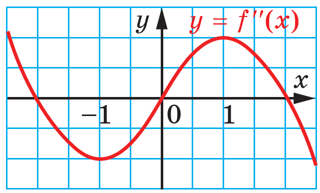


Рис. 51.20

51.26.•• На рисунку 51.21 зображено графік функції

$$f(x) = x^4 + ax^2 + bx + c.$$

Знайдіть знаки чисел a, b і c.

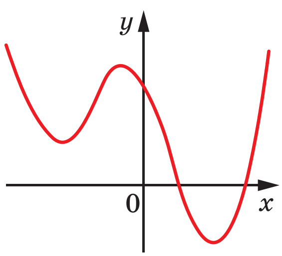


Рис. 51.21

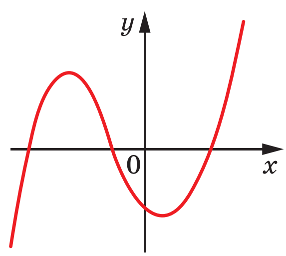


Рис. 51.22

51.27.•• На рисунку 51.22 зображено графік функції

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$$

Знайдіть знаки чисел a, b і c.

51.28.•• Для всіх $x \in \mathbb{R}$ доведіть нерівність $\cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

51.29.•• Для всіх $x \geqslant 0$ доведіть нерівність $\sqrt{1+x} \geqslant 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.

51.30.•• Про функцію f відомо, що $f''(x) > 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ ($f''(x) < 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$). Доведіть, що довільна пряма має з графіком функції f не більше двох спільних точок.

51.31.•• Розв'яжіть рівняння $2x^2 + \cos\frac{\pi x}{2} = x + 1$.

51.32.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1+x} = 2x^4 + 3x + 1$.

51.33.* Обчисліть суму

$S = 60 \cdot 59 \cdot 2^{58} + 59 \cdot 58 \cdot 2^{57} + 58 \cdot 57 \cdot 2^{56} + \ldots + 3 \cdot 2 \cdot 2^{1} + 2 \cdot 1 \cdot 2^{0}$.

51.34.* Обчисліть суму $S = 1^2 \cdot 2^{n-1} + 2^2 \cdot 2^{n-2} + 3^2 \cdot 2^{n-3} + \ldots + n^2 \cdot 2^0$.

51.35.* Доведіть, що функція $y = x \sin x$ не є періодичною.

51.36.* Доведіть, що функція $y = \cos x + \sin \sqrt{2}x$ не є періодичною.

51.37.* Кожне із чисел x, y, z належить відрізку [1; 2]. Доведіть нерівність $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \leqslant 5$.

51.38.* Кожне із чисел x, y, z належить відрізку [1; 2]. Доведіть нерівність $(x + y + z) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leqslant 10$.

Нерівність Єнсена

Теорема 51.4. ***Якщо функція f є опуклою вгору на проміжку I, то для будь-яких a і b з проміжку I виконується нерівність***

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Ця теорема має просту геометричну інтерпретацію (рис. 51.23). Якщо функція f є опуклою вгору на відрізку $[a; b]$, то ордината точки M є не меншою, ніж ордината точки M_1.

Доведення. Проведемо дотичну до графіка функції f у точці M (рис. 51.23). Оскільки функція f опукла вгору, то точка A лежить не нижче від точки A_1, а точка B — не нижче від точки B_1. Тому середина відрізка AB (точка M) лежить не нижче від середини відрізка A_1B_1 (точка M_1). Це й означає, що ордината точки M є не меншою, ніж ордината точки M_1. ◄

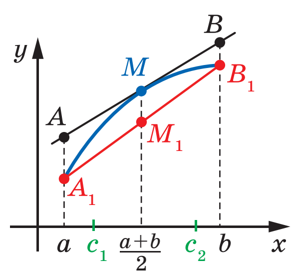


Рис. 51.23

Теорема 51.4 має таке узагальнення.

Теорема 51.5. ***Якщо функція f є опуклою вгору на проміжку I, то для будь-яких x_1, x_2, ..., x_n з проміжку I виконується нерівність***

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}. \quad (1)$$

Нерівність (1) називають **нерівністю Єнсена для опуклої вгору функції.**

Доведемо теорему 51.5.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.

З теореми 51.4 випливає, що нерівність (1) є правильною при $n = 2$. Доведемо, що коли нерівність (1) є правильною для $n = k$, $k \geqslant 2$, то вона є правильною для $n = 2k$.

Розглянемо $2k$ чисел $x_1, x_2, \dots, x_{2k}$, які належать проміжку I.

Очевидно, що кожне із чисел $\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_3 + x_4}{2}, \dots, \frac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2}$ належить проміжку I.

Маємо: $$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2k}}{2k}\right) = f\left(\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} + \dots + \frac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2}}{k}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2}\right)}{k} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2} + \dots + \frac{f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})}{2}}{k} =$$
$$= \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{2k})}{2k}.$$

Тепер можемо зробити висновок, що нерівність (1) є правильною для $n = 2$, $n = 4$, $n = 8$ і т. д., тобто для всіх натуральних степенів числа 2.

Нехай m — такий степінь числа 2, що $m > n$.

Розглянемо m чисел:
$$\underbrace{x_1, x_2, \dots, x_n}_{n \text{ чисел}}, \quad \underbrace{A, A, \dots, A}_{m - n \text{ чисел}}, \text{ де } A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Для цих m чисел застосуємо доведену нерівність (1):
$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n + A + A + \dots + A}{m}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) + f(A) + f(A) + \dots + f(A)}{m}.$$

Звідси $$f\left(\frac{nA + (m-n)A}{m}\right) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) + (m-n)f(A)}{m};$$
$$mf(A) \geqslant f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) + mf(A) - nf(A);$$
$$nf(A) \geqslant f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n);$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}. \blacktriangleleft$$

Зауважимо, що для опуклої вниз функції f знак нерівності (1) змінюється на протилежний, тобто *для будь-яких* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *з проміжку I виконується нерівність*

$$\boldsymbol{f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n}}.$$

Цю нерівність називають **нерівністю Єнсена для опуклої вниз функції.**

ПРИКЛАД 1 Для кутів A, B і C трикутника ABC доведіть нерівність $\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2} \geqslant \sqrt{3}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\operatorname{tg}x$, $D(f)=\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Оскільки дана функція опукла вниз на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{3} \geqslant \operatorname{tg}\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}.$$

Звідси $\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2} \geqslant 3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Відомо, що $a>0$, $b>0$, $c>0$ і $a+b+c=1$. Доведіть нерівність $\frac{1}{3+a^2}+\frac{1}{3+b^2}+\frac{1}{3+c^2} \leqslant \frac{27}{28}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{3+x^2}$, $D(f)=(0;\ 1)$. Маємо: $f'(x)=\frac{-2x}{(3+x^2)^2}$, $f''(x)=\frac{6(x^2-1)}{(3+x^2)^3}$. Отримуємо, що $f''(x)<0$ для будь-якого $x \in (0;\ 1)$. Тому функція f є опуклою вгору. Зазначимо, що $a \in (0;\ 1)$, $b \in (0;\ 1)$, $c \in (0;\ 1)$. Для функції f можна застосувати нерівність (1):

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3+a^2}+\frac{1}{3+b^2}+\frac{1}{3+c^2}\right) \leqslant \frac{1}{3+\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2}.$$

Звідси $\frac{1}{3+a^2}+\frac{1}{3+b^2}+\frac{1}{3+c^2} \leqslant \frac{3}{3+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{27}{28}$. ◄

ВПРАВИ

51.39. Для кутів A, B і C трикутника ABC доведіть нерівність:

1) $\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

2) $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

3) $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \geqslant 3\sqrt{3}$.

51.40. Доведіть нерівність $\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^k \leqslant \frac{x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k}{n}$, де $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $\ldots$, $x_n \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$.

51.41. Відомо, що $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $\ldots$, $x_n > 0$ і $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$. Доведіть, що $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \ldots + \frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{n}{2}$.

51.42. Відомо, що $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ і $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Доведіть, що $\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2} + \frac{z}{1+z^2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

52. Побудова графіків функцій

Коли вам доводилося будувати графіки, ви зазвичай робили так: позначали на координатній площині деяку кількість точок, які належать графіку, а потім сполучали їх. Точність побудови залежала від кількості позначених точок.

На рисунку 52.1 зображено кілька точок, які належать графіку деякої функції $y = f(x)$. Ці точки можна сполучити по-різному, наприклад так, як показано на рисунках 52.2 і 52.3.

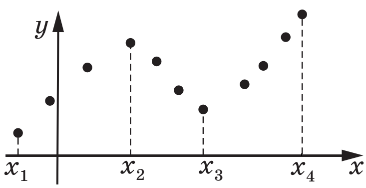


Рис. 52.1

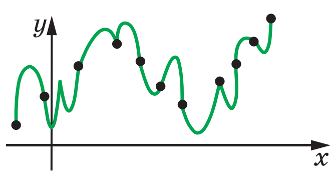


Рис. 52.2

Проте якщо знати, що функція f зростає на кожному з проміжків $[x_1; x_2]$ і $[x_3; x_4]$, спадає на проміжку $[x_2; x_3]$ та є диференційовною, то, скоріше за все, буде побудовано графік, показаний на рисунку 52.4.

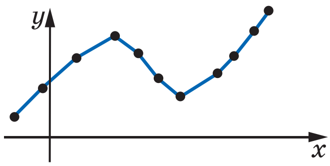


Рис. 52.3

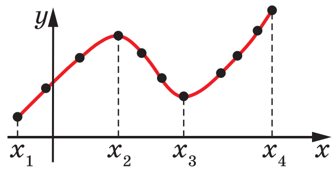


Рис. 52.4

Ви знаєте, які особливості мають графіки парної, непарної, періодичної функцій тощо. Узагалі, чим більше властивостей функції вдалося з'ясувати, тим точніше можна побудувати її графік.

Дослідження властивостей функції проводитимемо за таким планом.

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність.
3. Знайти нулі функції.
4. Знайти проміжки знакосталості функції.
5. Дослідити функцію на неперервність, знайти вертикальні асимптоти.
6. Знайти похилі асимптоти графіка функції.
7. Знайти проміжки зростання і спадання функції.
8. Знайти точки екстремуму та значення функції в точках екстремуму.
9. Знайти проміжки опуклості функції і точки перегину.
10. Виявити інші особливості функції (періодичність функції, поведінку функції в околах окремих важливих точок тощо).

Зауважимо, що наведений план дослідження має рекомендаційний характер і не є незмінним та вичерпним. Під час дослідження функції важливо виявити такі її властивості, які дадуть змогу коректно побудувати графік.

ПРИКЛАД 1 Дослідіть функцію $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3$ і побудуйте її графік.

Розв'язання. 1. Функція визначена на множині дійсних чисел, тобто $D(f)=\mathbb{R}$.

2. Маємо: $f(-x)=\frac{3}{2}(-x)^2-\frac{1}{4}(-x)^3=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}x^3$. Звідси $f(-x)\neq f(x)$ і $f(-x)\neq -f(x)$, тобто функція $y=f(-x)$ не збігається ні з функцією $y=f(x)$, ні з функцією $y=-f(x)$. Таким чином, дана функція не є ні парною, ні непарною.

3–4. Маємо: $f(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3=\frac{x^2}{4}(6-x)$. Числа 0 і 6 є нулями функції f. Застосувавши метод інтервалів (рис. 52.5), знаходимо проміжки знакосталості функції f, а саме: установлюємо, що $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;0)\cup(0;6)$ і $f(x)<0$ при $x\in(6;+\infty)$.

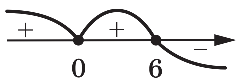


Рис. 52.5

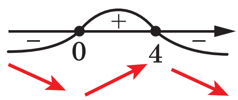


Рис. 52.6

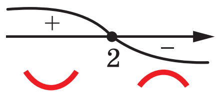


Рис. 52.7

5. Функція f неперервна на $\mathbb{R}$, тому її графік не має вертикальних асимптот.

6. Маємо: $\frac{f(x)}{x}=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}x^2$. Оскільки функція $y=\frac{f(x)}{x}$ не має границі ні при $x\to+\infty$, ні при $x\to-\infty$, то графік функції f не має похилих асимптот.

7–8. Маємо: $f'(x)=3x-\frac{3x^2}{4}=\frac{3x}{4}(4-x)$. Дослідивши знак похідної (рис. 52.6), доходимо висновку, що функція f зростає на проміжку $[0;\,4]$, спадає на кожному з проміжків $(-\infty;\,0]$ і $[4;\,+\infty)$, $x_{\max}=4$, $x_{\min}=0$. Отримуємо: $f(4)=8$, $f(0)=0$.

9. Маємо: $f''(x)=3-\frac{3x}{2}$. Дослідивши знак другої похідної (рис. 52.7), робимо висновок, що функція f є опуклою вниз на проміжку $(-\infty;2]$, опуклою вгору на проміжку $[2;\,+\infty)$. Отже, $x_0=2$ є точкою перегину і $f(2)=4$.

Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції (рис. 52.8). ◄

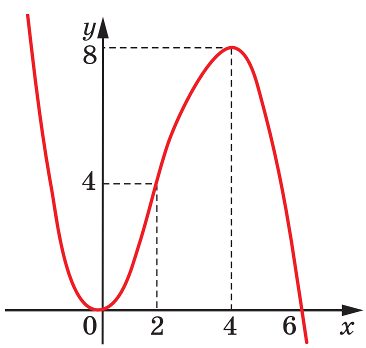


Рис. 52.8

ПРИКЛАД 2 Дослідіть функцію $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-2}$ і побудуйте її графік.

Розв'язання

1. Функція визначена на множині $\left(-\infty;\sqrt[3]{2}\right)\cup\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$.

2. Функція не є ні парною, ні непарною.

3. Розв'язавши рівняння $\dfrac{x^4}{x^3-2}=0$, установлюємо, що $x=0$ — єдиний нуль даної функції.

4. $f(x)>0$ при $x\in\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$, $f(x)<0$ при $x\in(-\infty;0)\cup\left(0;\sqrt[3]{2}\right)$.

5. Функція f неперервна на множині $\left(-\infty;\sqrt[3]{2}\right)\cup\left(\sqrt[3]{2};+\infty\right)$. Тому вертикальною асимптотою графіка функції f може бути лише пряма $x=\sqrt[3]{2}$. Маємо: $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}-}\dfrac{x^4}{x^3-2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\sqrt[3]{2}+}\dfrac{x^4}{x^3-2}=+\infty$. Отже, пряма $x=\sqrt[3]{2}$ — вертикальна асимптота графіка даної функції.

6. Дослідимо графік функції f на наявність похилих асимптот $y=kx+b$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\dfrac{2}{x^3}}=1.$$

Тому $k=1$.

Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-2}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^3-2}=0.$$

Отже, $b=0$.

Таким чином, пряма $y=x$ — похила асимптота графіка даної функції при $x\to+\infty$ і при $x\to-\infty$.

7–8. Маємо: $f'(x)=\dfrac{x^6-8x^3}{(x^3-2)^2}=\dfrac{x^3(x^3-8)}{(x^3-2)^2}$.

Дослідивши знак f' (рис. 52.9), доходимо висновку, що функція f спадає на кожному з проміжків $\left[0;\sqrt[3]{2}\right)$ і $\left(\sqrt[3]{2};2\right]$, зростає на кожному з проміжків $(-\infty;0]$ і $[2;+\infty)$, $x_{\min}=2$, $f(2)=\dfrac{8}{3}$, $x_{\max}=0$, $f(0)=0$.

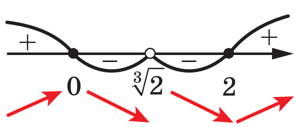


Рис. 52.9

9. Маємо: $f''(x) = \dfrac{12x^2(x^3+4)}{(x^3-2)^3}$.

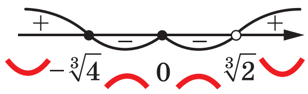


Рис. 52.10

Дослідивши знак f'' (рис. 52.10), доходимо висновку, що функція f є опуклою вниз на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\sqrt[3]{4}\right]$ і $\left(\sqrt[3]{2}; +\infty\right)$, опуклою вгору на проміжку $\left[-\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{2}\right)$, $x = -\sqrt[3]{4}$ — точка перегину і $f\left(-\sqrt[3]{4}\right) = -\dfrac{2\sqrt[3]{4}}{3}$.

Ураховуючи отримані результати, будуємо графік функції (рис. 52.11). ◄

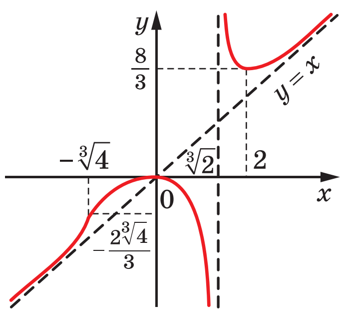


Рис. 52.11

ВПРАВИ

52.1.• Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = 3x - x^3 - 2$;
2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$;
3) $f(x) = 3x - \dfrac{x^3}{9}$;
4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;
5) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$;
6) $f(x) = (x+3)^2(x-1)^2$.

52.2.• Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = x^3 + 3x^2$;
2) $f(x) = 4x - \dfrac{1}{3}x^3$;
3) $f(x) = x - x^3$;
4) $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - 4x^2$;
5) $f(x) = 8x^2 - 7 - x^4$;
6) $f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - x^3$.

52.3.•• Побудуйте графік функції:

1) $f(x) = \dfrac{4-x}{x+2}$;
2) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1}$;
3) $f(x) = \dfrac{6x-6}{x^2+3}$;

4) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-4}$; 6) $f(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}$; 8) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$.

5) $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$; 7) $f(x)=\dfrac{2(x-1)}{x^2}$;

52.4.•• Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$; 3) $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$; 5) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-9}$;

2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}$; 4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$; 6) $f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)^2}$.

52.5.•• Побудуйте графік функції $f(x)=x^2(2x-3)$ і знайдіть, користуючись ним, кількість коренів рівняння $f(x)=a$ залежно від значення параметра a.

52.6.•• Побудуйте графік функції $f(x)=-x^2(x^2-4)$ і знайдіть, користуючись ним, кількість коренів рівняння $f(x)=a$ залежно від значення параметра a.

52.7.•• Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$; 3) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$;

2) $f(x)=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$; 4) $f(x)=\dfrac{x^4-8}{(x+1)^4}$.

52.8.•• Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; 3) $\dfrac{x^3-4}{(x-1)^3}$.

52.9.•• Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)(x-2)^2}$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^3}$.

52.10.•• Дослідіть функцію $f(x)=\sqrt[3]{x(x-3)^2}$ та побудуйте її графік.

52.11.•• Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\sin 2x-x$; 2) $f(x)=2\sin x-\cos 2x$.

52.12.•• Побудуйте графік функції:

1) $\sin x+\dfrac{1}{2}x$; 2) $f(x)=2\cos x-\cos 2x$.

52.13.•• При яких значеннях параметра a рівняння $x^3+ax+2=0$ має три корені?

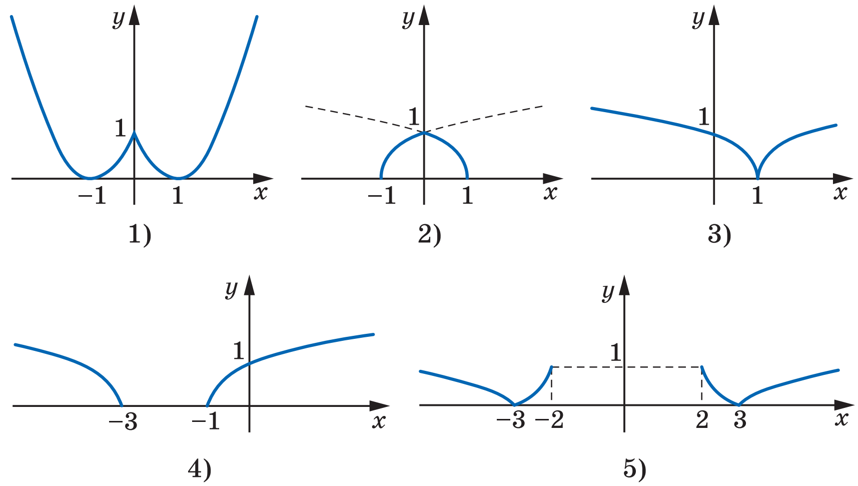
52.14.•• При яких значеннях параметра a рівняння $x^3-ax+2a+32=0$ має три корені?

Відповіді та вказівки до вправ

1.1. $\left(\frac{a}{b}\right)^2$. **1.2.** 1. **1.3.** 1. **1.4.** $-\frac{b^2+b+1}{b}$. **1.8.** 1. **1.9.** $\frac{x^8-x^4+1}{x^8+x^4+1}$. **1.10.** 1. **1.12.** $\frac{2^{n+1}}{1-b^{2^{n+1}}}$. **1.13.** *Вказівка.* З умови випливає, що $a-\frac{1}{a}=1$. Помножте ліву частину даної рівності на вираз $\left(a-\frac{1}{a}\right)$. **1.14.** *Вказівка.* З умови випливає, що $ab+bc+ac=0$. Далі $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)=$ $=a^2+b^2+c^2$. **1.16.** $(x-y)(z-y)(z-x)$. *Вказівка.* Розглянемо даний вираз як многочлен зі змінною x та параметрами y і z. Покажіть, що цей многочлен має корені y і z. **1.17.** $(x-y)(z-x)(y-z)$. **1.18.** *Вказівка.* З умови випливають рівності $a-b=\frac{b-c}{bc}$, $b-c=\frac{c-a}{ca}$, $c-a=\frac{a-b}{ab}$. Перемноживши почленно ліві та праві частини цих рівностей, отримуємо: $(a-b)(b-c)(c-a)=$ $=\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2b^2c^2}$. **1.19.** 8. **1.20.** -115. **1.21.** 4. **1.22.** 1. **1.23.** $\sqrt{3}+1$. **1.24.** $3+\sqrt{2}$. **1.25.** 3. **1.26.** 0. **1.31.** $\sqrt{10}+\sqrt{2}$. **1.32.** 1. **1.33.** 0. **1.34.** Якщо $a>1$, то $a+1$; якщо $0<a<1$, то $-a-1$. **1.35.** $\sqrt{1-x^2}$. **1.36.** -1. **1.37.** Якщо $0\leqslant a<\sqrt{2}$, то $6-4a$; якщо $a\geqslant\sqrt{2}$, то $2(a-1)^2$. **1.38.** $\frac{b^2-1}{\sqrt{b}}$. **1.39.** Якщо $0<b<a$, то 0; якщо $0<a<b$, то $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. **1.40.** $2\left(ab+\sqrt{a^2-1}\sqrt{b^2-1}\right)$. *Вказівка.* Помножте чисельник і знаменник даного дробу на вираз $\left(a-\sqrt{a^2-1}\right)\left(b-\sqrt{b^2-1}\right)$. **1.41.** $\frac{1-b}{1+b}$. **1.42.** Якщо $a>2$, то 2; якщо $1\leqslant a<2$, то -2. **1.43.** Якщо $4<x<8$, то $\frac{4x}{x-4}$; якщо $x\geqslant 8$, то $\frac{2x}{\sqrt{x-4}}$. **1.44.** 1) 7; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{-5\pm\sqrt{345}}{10}$; 4) 0; $\frac{-5\pm\sqrt{3}}{2}$; 5) $[-2;\ 3]$; 6) -7; -1; 7) $\{5\}\cup[1;2]$. **1.45.** 1) -1; $-\frac{7}{2}$; 2) $\frac{27}{5}$; 3) 5; $-\frac{5}{4}$; 4) $-\frac{5}{2}$; 0; 5) $(3;\ +\infty)$; 6) -2; 4. **1.46.** 1) Якщо $a\neq-4$, то $x=\frac{20+3a}{4+a}$; якщо $a=-4$, то коренів немає; 2) якщо $a\neq 1$, то $x=\frac{a-2}{2}$; якщо $a=1$, то коренів немає. **1.47.** Якщо $a\neq-\frac{1}{3}$ і $a\neq-\frac{1}{4}$, то $x=\frac{2+12a}{3a+1}$; якщо $a=-\frac{1}{3}$ або $a=-\frac{1}{4}$, то коренів немає. **1.48.** 1) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};1\right)\cup(5;+\infty)$; 2) $[1;5]\cup\left\{\frac{1}{3}\right\}$; 3) $(-\infty;-1]\cup[1;2]\cup[3;+\infty)$; 4) $(-3;-1)\cup\left(\frac{1}{3};2\right)\cup(2;7)$; 5) $(-\infty;-1]\cup\left(3-\sqrt{2};3+\sqrt{2}\right)$; 6) $(-\infty;-3)\cup(-3;2]\cup(4;+\infty)$; 7) $(-7;-5)\cup(4;+\infty)$;

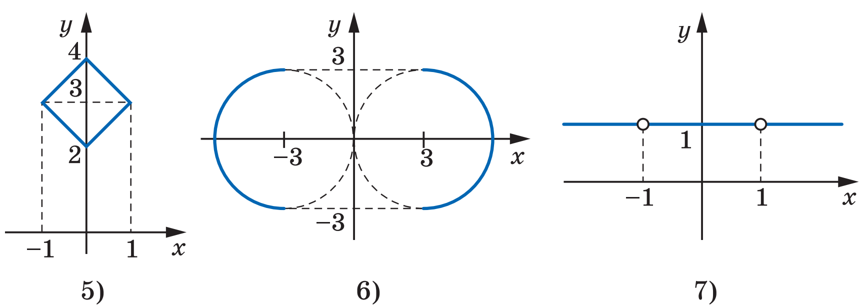
8) $(-1;+\infty)$; 9) $(-1;1)\cup(4;6)$; 10) $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; 11) $(-\infty;-4]\cup[-2;-1]\cup[1;+\infty)$; 12) $[-4;-3)\cup\left[-\frac{3}{2};0\right)\cup[1;+\infty)$; 13) $(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$; 14) $\left[\frac{2}{3};1\right]\cup(2;+\infty)$; 15) $\left(1-\sqrt{3};2-\sqrt{2}\right)$; 16) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **1.49.** 1) $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right)\cup\left(-\frac{1}{4};1\right)\cup(9;+\infty)$; 2) $[1;9]\cup\left\{-\frac{1}{4}\right\}$; 3) $(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)\cup\{2\}$; 4) $(-\infty;-2)\cup(-2;3)$; 5) $\left(-2;\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right]\cup(0;2)\cup\left[\frac{3+\sqrt{17}}{2};+\infty\right)$; 6) $(-2;-1)\cup(2;3)$; 7) $(-\infty;-1]\cup(0;1]\cup$ $\cup(2;3]$; 8) $(2;+\infty)$; 9) $\left[-3-\sqrt{5};-4\right)\cup(-2;0]$; 10) $\left[\frac{-3-\sqrt{17}}{4};-1\right)\cup\left[\frac{-5+\sqrt{41}}{4};+\infty\right)$; 11) $(2;5)$; 12) $(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup(0;+\infty)$. **1.50.** $a<-4$ або $a\geqslant 8$. **1.51.** $a=1$ або $a=-2$. **1.52.** $a=1$. **1.53.** $a=3$ або $a=\frac{3}{2}$. **1.54.** $a=2$. **1.55.** $a<-6$. **1.56.** $a<-3$ або $a\geqslant 1$. **1.57.** $a>6$. **1.58.** $a>0$. **1.59.** $a<-1$ або $a>0$. **1.60.** $0\leqslant a\leqslant 4$. **1.61.** $a>1$. **1.62.** $a\geqslant\frac{4}{5}$. **1.63.** $1\leqslant a\leqslant 2$. **1.64.** $-5<a<1$. **1.65.** $q\leqslant 0$. **1.66.** 1) -4; 2; 3) 1; -1; 4) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; -1; 2; 5) 3; $\frac{4}{5}$; 6) $\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$; 7) $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{21}}{2}$. **1.67.** 1) 2; 3; 2) 1; 3) -6; -2; $-4+\sqrt{13}$; $-4-\sqrt{13}$; 4) $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$; 5) $1\pm\sqrt{7}$. **1.68.** 1) $(-3;1]$; 2) $[-2;0]\cup\left\{\frac{3}{2}\right\}$. **1.69.** 1) $\left(-\infty;\frac{3}{4}\right)\cup(4;7]$; 2) $[2;3)\cup(3;+\infty)\cup\{1\}$. **1.70.** 2) $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$; 3) $[1;+\infty)$; 4) $(-\infty;4]$. **1.71.** 3) $[0;2]$; 4) $(-\infty;2]$. **1.72.** Найбільше значення дорівнює $\frac{1}{6}$, найменшого значення не існує. **1.73.** Найбільше значення дорівнює 1, найменшого значення не існує. **1.74.** 2) 2. **1.75.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\sqrt{6}$. **1.76.** 1) $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=5a-3$; $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=5a+5$; 2) якщо $-1<a\leqslant 2$, то $\max\limits_{[-1;a]} f(x)=5$, $\min\limits_{[-1;a]} f(x)=a^2-4a$; якщо $2<a\leqslant 5$, то $\max\limits_{[-1;a]} f(x)=5$, $\min\limits_{[-1;a]} f(x)=-4$; якщо $a>5$, то $\max\limits_{[-1;a]} f(x)=a^2-4a$, $\min\limits_{[-1;a]} f(x)=-4$. **1.77.** 2) Якщо $a<0$, то $\max\limits_{[a;2]} f(x)=1$, $\min\limits_{[a;2]} f(x)=2a-a^2$; якщо $0\leqslant a\leqslant 1$, то $\max\limits_{[a;2]} f(x)=1$, $\min\limits_{[a;2]} f(x)=0$; якщо $1<a<2$, то $\max\limits_{[a;2]} f(x)=2a-a^2$; $\min\limits_{[a;2]} f(x)=0$. **1.78.** 1. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що функція $y=\sqrt{x}+2\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}$ є зростаючою. **1.79.** 2. **1.80.** 1. *Вказівка*. Доведіть, що $|x|+|x-2|\geqslant 2$, а $2-\sqrt{x-1}\leqslant 2$. **1.81.** 2. *Вказівка*. Перепишіть дане рівняння у вигляді $\sqrt{4x-x^2}=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$. **1.82.** 3) Парна; 4) непарна. **1.83.** 3) Парна.

1.85. Див. рисунок.



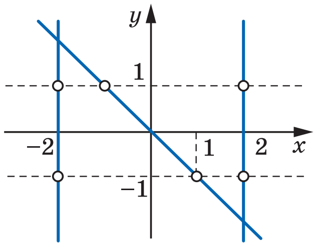
До задачі 1.85

1.87. *а*) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$. **1.88.** *а*) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$. **1.89.** Якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a = 0$ або $1 < a < 8$, то 4 корені; якщо $0 < a < 1$, то 8 коренів; якщо $a = 1$, то 6 коренів; якщо $a = 8$, то 3 корені; якщо $a > 8$, то 2 корені. **1.90.** Якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a = 0$ або $a > 1$, то 2 корені; якщо $0 < a < 1$, то 4 корені; якщо $a = 1$, то 3 корені. **1.91.** Ні. **1.92.** $\max y = 1$, $\min y = -10$. *Вказівка*. Зробіть заміну $\frac{2x^2}{1+x^4} = t$ і покажіть, що $0 \leqslant t \leqslant 1$. Далі розгляньте функцію $f(t) = t^2 - 12t + 1$, $D(f) = [0;\ 1]$. **1.93.** 1) $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$; 2) $(0;\ 0)$. **1.94.** 1) $\left(\frac{9}{4}; \frac{3}{4}\right)$. **1.95.** Див. рисунок.

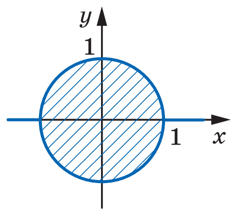


До задачі 1.95

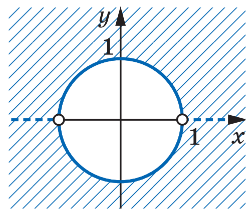
1.96. 7) Див. рисунок. **1.97.** 4) Див. рисунок. **1.98.** 4) Див. рисунок.



До задачі 1.96 (7)

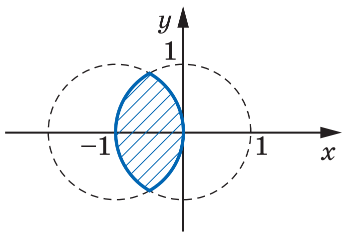


До задачі 1.97 (4)

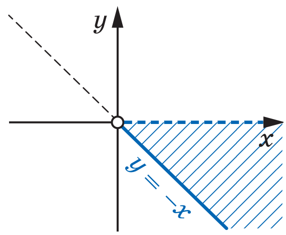


До задачі 1.98 (4)

1.99. 2) Див. рисунок. **1.101.** 1) Див. рисунок.



До задачі 1.99 (2)



До задачі 1.101 (1)

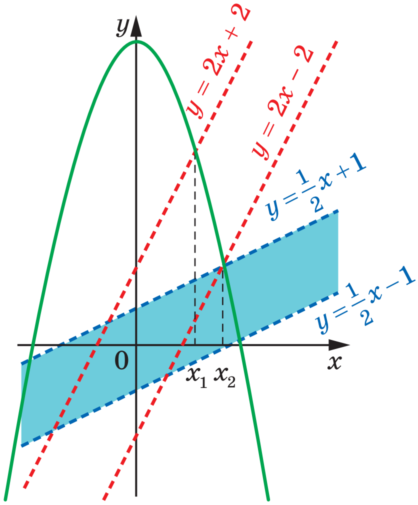
2.1. 1) $-\frac{3}{4}$; 2) $-\frac{1}{27}$. **2.2.** 1) -2500; 2) $\frac{1}{3}$. **2.9.** 4) 1. **2.10.** 2) 1. **2.11.** 1) $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2)\cup(2; +\infty)$. **2.14.** 1) Якщо $a = 6$, то 1 корінь; якщо $a > 6$, то 2 корені; якщо $a < 6$, то коренів немає; 2) якщо $a = 1$ або $a = -8$, то 1 корінь; якщо $a < -8$ або $a > 1$, то 2 корені; якщо $-8 < a < 1$, то коренів немає. **2.15.** Якщо $a = 0$, або $a = 3$, або $a = -3$, то 1 корінь; якщо $a < -3$ або $0 < a < 3$, то 2 корені; якщо $-3 < a < 0$ або $a > 3$, то коренів немає. **2.24.** 4) $\min\limits_{(-\infty; -2]} f(x) = 256$, найбільшого значення не існує; 5) $\min\limits_{(-2; 1)} f(x) = 0$, найбільшого значення не існує. **2.25.** 1) $\max\limits_{\left[\frac{1}{3}; 2\right]} f(x) = 27$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{3}; 2\right]} f(x) = \frac{1}{8}$; 2) $\max\limits_{[-2; -1]} f(x) = -\frac{1}{8}$, $\min\limits_{[-2; -1]} f(x) = -1$; 3) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{(-\infty; -3]} f(x) = -\frac{1}{27}$; 4) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{(0; 2]} f(x) = \frac{1}{8}$. **2.26.** 1) Парним; 2) непарним; 3) непарним; 4) установити неможливо; 5) парним; 6) установити неможливо. **2.28.** 1) 4 розв'язки; 2) 2 розв'язки. **2.29.** 1) 3 розв'язки; 2) 2 розв'язки. **2.30.** $f(x) = x^7$. *Вказівка.* Зробимо заміну $y = x^3$. Оскільки область значень функції $y = x^3$ дорівнює $\mathbb{R}$, то для всіх $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(y) = y^7$. **2.31.** $f(x) = \frac{1}{x^3|x|}$. **2.32.** $f(x) = |x|^5$. **2.33.** 1) 1; 2) -1; 1. *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x) = 2x^4 + x^{10}$. Вона є парною. Тому досить знайти невід'ємні корені даного рівняння. На проміжку $[0; +\infty)$ функція f є зростаючою, отже, рівняння $f(x)=3$ на цьому проміжку має не більше одного кореня. **2.34.** 1) -1; 2) -1; 1. **2.35.** Якщо $-1 < a \leqslant 0$, то $\min\limits_{[-1;\,a]} f(x)=f(a)=a^8$, $\max\limits_{[-1;\,a]} f(x)=f(-1)=1$; якщо $0<a\leqslant 1$, то $\min\limits_{[-1;\,a]} f(x)=f(0)=0$, $\max\limits_{[-1;\,a]} f(x)=f(-1)=1$; якщо $a>1$, то $\min\limits_{[-1;\,a]} f(x)=f(0)=0$, $\max\limits_{[-1;\,a]} f(x)=f(a)=a^8$. **2.36.** Якщо $a<-2$, то $\min\limits_{[a;\,2]} f(x)=f(0)=0$, $\max\limits_{[a;\,2]} f(x)=$ $=f(a)=a^6$; якщо $-2\leqslant a\leqslant 0$, то $\min\limits_{[a;\,2]} f(x)=f(0)=0$, $\max\limits_{[a;\,2]} f(x)=f(2)=64$; якщо $0<a<2$, то $\min\limits_{[a;\,2]} f(x)=f(a)=a^6$, $\max\limits_{[a;\,2]} f(x)=f(2)=64$. **2.37.** 1. *Вказівка*. Перепишіть рівняння у вигляді $\frac{2}{x^{17}}+\frac{3}{x^9}=5$ і виконайте заміну $\frac{1}{x}=t$. **2.38.** -1. **2.39.** $f_n(x)=x^n$. **2.40.** $f_n(x)=x^n$. **2.41.** $f(x)=x$. *Вказівка*. Підставте $y=0$. **2.42.** Таких функцій не існує. *Вказівка*. Підставте $y=0$. **2.43.** $f(x)=0$. *Вказівка*. Підставте $x=1$ і зробіть заміну $z=y+f(1)$. **2.44.** Так. Наприклад, $f(x)=\begin{cases} x^5, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}$ **2.45.** $f(x)=x^2$. *Вказівка*. Підставте $y=\frac{2}{3}x$ і зробіть заміну $t=2x$.

3.6. 3) $y=\frac{1-x}{2x}$. **3.7.** 1) $y=5\ (x-3)$. **3.8.** 2) $y=\frac{x^2+1}{2}$, $D(y)=[0;+\infty)$. **3.9.** 4) $y=\begin{cases} \sqrt{2-x}, & \text{якщо } x\leqslant 1, \\ 2-x, & \text{якщо } x>1. \end{cases}$ **3.16.** *Вказівка*. Нехай функція f непарна, функція g — обернена до неї. Маємо: $f(x_0)=y_0$, $g(y_0)=x_0$. Тоді $g(-y_0)=$ $=g(-f(x_0))=g(f(-x_0))=-x_0=-g(y_0)$. **3.17.** 1) 1; 2) -7; 3) 1 корінь при будь-якому c. **3.18.** 2) Коренів немає. **3.19.** -1. *Вказівка*. Дане рівняння рівносильне такому: $f(g(x))=f(x^3+x+3)$. **3.20.** 2. **3.21.** 1. *Вказівка*. Скористайтеся наслідком з теореми 3.4. **3.22.** 2. **3.23.** $\frac{2\pm\sqrt{2}}{4}$. *Вказівка*. Функція $f(x)=x^2+\frac{1}{8}$, $D(f)=[0;+\infty)$, є оберненою до функції $g(x)=\sqrt{x-\frac{1}{8}}$. Крім того, функції f і g є зростаючими. **3.24.** $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. *Вказівка*. Зробіть заміну $\sqrt{x}=t$. Далі розгляньте функції $f(t)=\sqrt{1+t}$, $D(f)=[0;+\infty)$ і $g(t)=t^2-1$, $D(g)=[1;+\infty)$.

3.25. $g(x)=\begin{cases} -\sqrt{x}, & \text{якщо } x\in[0;1), \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x\in[9;16). \end{cases}$ **3.26.** $g(x)=\begin{cases} -\sqrt{-x}, & \text{якщо } x\in[-9;-4), \\ \sqrt{-x}, & \text{якщо } x\in(-1;0]. \end{cases}$

3.27. Так. *Вказівка*. Наприклад, $f(n)=n+1$, де $D(f)=\mathbb{N}\cup\{0\}$. **3.28.** Так. *Вказівка*. Наприклад, $f(n)=1-2n$ при $n\leqslant 0$, $f(n)=2n$ при $n>0$, $D(f)=\mathbb{Z}$.

3.30. Так. *Вказівка.* Існування шуканої функції випливає з того, що $\mathbb{Q}$ — зліченна множина. **3.31.** Наведемо два приклади: 1) $f(x)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}x$, $g(x)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}x$; 2) $f(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x$, $g(x)=-\frac{\sqrt{5}+1}{2}x$. *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x)=kx$, $k\neq 0$. **3.32.** $\frac{\sqrt{17}+3}{4}$. *Вказівка.* Графік функції f належить «смузі», обмеженій прямими $y=\frac{1}{2}x-1$ і $y=\frac{1}{2}x+1$ (див. рисунок). Оскільки графіки функцій f і g є симетричними відносно прямої $y=x$, то графік функції g належить «смузі», обмеженій прямими $y=2x+2$ і $y=2x-2$. Нехай x_1 і x_2 ($x_1>0$, $x_2>0$) — абсциси точок перетину параболи $y=10-2x^2$ із цими прямими відповідно. Оскільки корінь рівняння $g(x)=10-2x^2$ належить проміжку $(x_1;\ x_2)$ і $x_2-x_1<0{,}5$, то за відповідь до задачі можна обрати середину проміжку $(x_1;\ x_2)$.

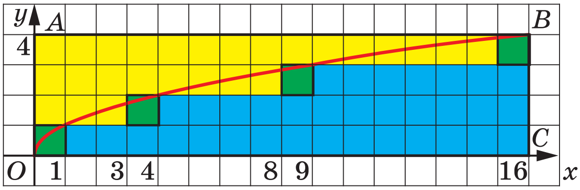


До задачі 3.32

3.34. 1) *Вказівка.* Скористайтеся методом від супротивного. 2) $f(x)=3x$. *Вказівка.* При $y=0$ і $x\neq 0$ отримуємо: $f(f(x))=9x$. Звідси випливає, що f — оборотна функція (див. задачу 3.34 (1)). При $y=x$ і $x\neq 0$ маємо: $f(f(x)-2x)=f(x)$.

4.3. 2) 56. **4.4.** 2) $58\frac{1}{3}$. **4.5.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$; 3) $[3;+\infty)\cup\{0\}$. **4.6.** 1) $[2;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$; 3) $[6;+\infty)\cup\{0\}$. **4.7.** 1) $[-2;\ +\infty)$; 2) $\mathbb{R}$; 3) $[0;\ +\infty)$. **4.8.** 1) $[-4;\ +\infty)$; 2) $\mathbb{R}$; 3) $[0;\ +\infty)$. **4.9.** 3) 4 і 5; 4) −5 і −4.

4.14. 1) $(-\infty; -3) \cup [-1; 1] \cup (3; +\infty)$; 2) $[-6; 3)$. **4.15.** 1) $(-\infty; -6) \cup [-4; 4] \cup (6; +\infty)$; 2) $(-4; -3] \cup [3; +\infty)$. **4.16.** 1) -1; 2; 2) -1; 3. **4.17.** 1) -3; 2; 2) -3; 1. **4.20.** 1) $\max\limits_{[-3;-1]} f(x) = \sqrt[4]{3}$, $\min\limits_{[-3;-1]} f(x) = 1$; 2) $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = \sqrt[4]{2}$, $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = 0$; 3) найбільшого значення не існує, $\min\limits_{[-3;+\infty)} f(x) = 0$. **4.21.** 3) Найбільшого значення не існує, $\min\limits_{(-\infty;2)} f(x) = 0$. **4.22.** 1) $(-\infty; 21)$; 2) $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$; 3) $(4; +\infty)$. **4.23.** 1) $(-1; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{1}{5}; 16\right]$; 3) $[-5; -2) \cup (2; 5]$. **4.24.** 1) *Вказівка*. З припущення $\sqrt[3]{2} = \frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб, маємо рівність $2n^3 = m^3$. Звідки $m \vdots 2$, тобто $m = 2m_1$, $m_1 \in \mathbb{Z}$. Тоді $n^3 = 4m_1^3$. Отже, $n \vdots 2$. Отримали суперечність із тим, що $\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб. **4.26.** 1) Один корінь при будь-якому значенні a; 2) якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a \geqslant 0$, то 1 корінь. **4.27.** Якщо $a > 1$ або $a = 0$, то 1 корінь; якщо $0 < a \leqslant 1$, то 2 корені; якщо $a < 0$, то коренів немає. **4.28.** 1) Якщо $a \leqslant -1$, то 1 корінь; якщо $a > -1$, то 2 корені; 2) якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a \geqslant 0$, то 1 корінь; 3) якщо $a < 0$ або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $0 \leqslant a < 1$ або $a > 1$, то 2 корені. **4.29.** 1) Якщо $a \geqslant -1$, то 1 корінь; якщо $a < -1$, то 2 корені; 2) якщо $a < 0$ або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $a \geqslant 0$ і $a \neq 1$, то 2 корені. **4.30.** 27. *Вказівка*. Функція $y = \sqrt[4]{x - 26} + \sqrt[3]{x}$ є зростаючою. **4.31.** 10. **4.32.** (3; 3). *Вказівка*. Скористайтеся тим, що функція $f(t) = t + \sqrt[6]{t}$ зростає на $D(f)$. **4.33.** (1; 1), $(-1; -1)$. **4.34.** $f(x) = \sqrt[10]{|x|}$. **4.35.** $f(x) = \sqrt[5]{x|x|^7}$. **4.36.** $f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{x}, & x \geqslant 0, \\ g(x), & x < 0, \end{cases}$ де $g(x)$ — будь-яка функція, що визначена на $(-\infty; 0)$. **4.37.** 2. *Вказівка*. Скористайтеся нерівністю $\sqrt[3]{24} < \sqrt[3]{27}$. **4.38.** 1. **4.39.** $a - a^5$. *Вказівка*. Розгляньте зростаючі та взаємно обернені функції $f(a) = a^5 + x$ і $g(a) = \sqrt[5]{a - x}$. Інше розв'язання можна отримати, якщо врахувати зростання функції $\varphi(x) = a^5 + x$ і спадання функції $\psi(x) = \sqrt[5]{a - x}$. **4.40.** *Вказівка*. Розгляньте графік функції $y = \sqrt[k]{x}$, $D(y) = [0; n^k]$ (на рисунку зображено випадок, коли $n = 4$, $k = 2$). Нехай $S_с$, $S_з$ та $S_ж$ — відповідно площі синьої, зеленої та жовтої



До задачі 4.40

фігур. Тоді $X = S_с + S_з$, $Y = S_ж + S_з$. Далі врахуйте, що площа прямокутника $OABC$ дорівнює $S_с + S_ж + S_з$. **4.41.** *Вказівка.* Позначимо $A = \sqrt{a + \sqrt[3]{b + \sqrt[4]{c}}}$. Тоді, очевидно, виконуються нерівності $A \geqslant \sqrt{a}$, $A \geqslant \sqrt{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[6]{b}$, $A \geqslant \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{c}}} = \sqrt[24]{c}$. Звідси $A^2 \geqslant a$, $A^6 \geqslant b$, $A^{24} \geqslant c$. Перемноживши почленно три останні нерівності, отримуємо: $A^{32} \geqslant abc$.

5.7. 2) $\sqrt[30]{b^7}$; 3) $\sqrt[3]{x^2}$; 4) $\sqrt[12]{128}$. **5.8.** 3) $\sqrt[6]{x^5}$; 4) $\sqrt[3]{a}$. **5.15.** 1) $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$; 2) $a \geqslant 0$, $b \leqslant 0$; 3) a і b — довільні числа. **5.16.** 2) [3; 7]. **5.19.** 1) $m^2\sqrt[4]{-m}$; 2) $2m^4n^4\sqrt[4]{2m^2n}$; 3) $a^2b^3\sqrt[4]{b}$; 4) $|x| \cdot y\sqrt[6]{y}$; 5) $a^3b^3\sqrt[4]{a^3b^3}$; 6) $-a^3b^6\sqrt[8]{-ab^2}$. **5.20.** 1) $-2a\sqrt[4]{2a^2}$; 2) $-5a\sqrt[4]{-a}$; 3) $ab\sqrt[6]{ab}$; 4) $a^3b^3\sqrt[6]{a^2b}$. **5.21.** 1) $\sqrt[4]{2a^4}$; 2) $\sqrt[4]{mn}$; 3) $-\sqrt[6]{6a^3b^4}$; 4) $-\sqrt[4]{a^5b^6}$; 5) $\sqrt[6]{6b^6}$, якщо $b \geqslant 0$, $-\sqrt[6]{6b^6}$, якщо $b < 0$; 6) $-\sqrt[6]{-a^7}$. **5.22.** 1) $-\sqrt[8]{3c^8}$; 2) $\sqrt[6]{a^7}$; 3) $-\sqrt[8]{3a^4b^3}$; 4) $-\sqrt[4]{-a^7}$. **5.24.** 1) 1; 2) 2. **5.25.** 1) 1; 2) $\sqrt{23}$. **5.28.** [3; 5]. **5.30.** 1) $\sqrt[6]{x}$; 2) $-\sqrt[4]{a}$; 3) $\sqrt[6]{a^2-1}$. **5.34.** $\dfrac{1}{\sqrt[32]{2}-1}$.
5.35. Якщо $a = 1$, то 2^6; якщо $a \neq 1$, то $\dfrac{a-1}{\sqrt[64]{a}-1}$. **5.36.** $\dfrac{1}{\sqrt[15]{3}-\sqrt[15]{2}}$. **5.37.** $\dfrac{5}{\sqrt[17]{3}+\sqrt[17]{2}}$.
5.38. $x^3 - 9x - 12$. *Вказівка.* Піднесіть обидві частини рівності $x = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ до куба. **5.39.** *Вказівка.* Якщо $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5} = x$, де $x \in \mathbb{Q}$, то $x^3 = \left(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5}\right)^3$; $x^3 = 7 + 3 \cdot \sqrt[3]{10}x$. Оскільки $x \neq 0$, то отримуємо, що $\sqrt[3]{10} = \dfrac{x^3 - 7}{3x} \in \mathbb{Q}$.
5.40. *Вказівка.* Використовуючи метод математичної індукції, доведіть рівність $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{6}}}}}}_{n\text{ радикалів}} = \sqrt[2^n]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[2^n]{2-\sqrt{3}}$.

6.1. 2) $\dfrac{5}{3}$; 4) $\dfrac{1}{2}$. **6.2.** 4) 4. **6.3.** 2) $[3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$. **6.5.** 4) 4. **6.6.** 2) 49; 4) 32. **6.7.** 2) $\left(\sqrt[8]{a}\right)^8$. **6.11.** 1) $a^{0,5} - 2b^{0,5}$; 6) $3^{\frac{1}{5}}$. **6.12.** 2) $1 + \dfrac{b}{a^{\frac{1}{2}}}$; 3) $x^{2,5}y^{2,5} \cdot \dfrac{x^{0,5} - y^{0,5}}{x^{0,5} + y^{0,5}}$; 6) $2^{\frac{1}{2}}$. **6.13.** 1) $[2; +\infty)$; 2) $(2; +\infty)$. **6.15.** 1) $12\dfrac{4}{9}$; 2) 2; 3) $\dfrac{2}{15}$; 4) 3. **6.16.** 1) 7; 2) 10; 3) $\dfrac{1}{4}$; 4) 21. **6.17.** 1) 125; 2) 6; 3) коренів немає.
6.18. 1) $\dfrac{1}{9}$; 3) 5. **6.21.** 1) $a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}$; 2) -1. **6.22.** $\dfrac{x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{4}}}$. **6.23.** 2^{77}. **6.24.** 2^{-7}.
6.26. 24, якщо $a = 1$; $\dfrac{a^{7,4} - a^{0,2}}{a^{0,3} - 1}$, якщо $a \in [0; 1) \cup (1; +\infty)$. **6.27.** $\dfrac{b^{12,8} + b^{3,3}}{b^{0,1} + 1}$.

7.1. 1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) коренів немає; 4) 3. **7.2.** 2) Коренів немає; 3) −5; 7; 4) 7. **7.3.** 1) 1; 2) 3; 3) 1; 2; 4) $\frac{6-\sqrt{6}}{3}$; 5) 3; 6) −4. **7.4.** 1) −5; 2) 0; 3) $\frac{3-\sqrt{13}}{2}$; 4) 5. **7.5.** 2) 0; $\frac{1}{2}$; 3) 8; 4) 25. **7.6.** 3) 5; 4) −1. **7.10.** 1) 6; 2) $\frac{14+\sqrt{7}}{2}$; 3) −1; 3; 4) −2. **7.11.** 1) 2; 2) $22-\sqrt{464}$. **7.12.** 1) 6; 9; 2) $\frac{137}{16}$; 3) $6-4\sqrt{2}$; 4) 1; −3. **7.14.** 1) 4; 2) 2; 3) коренів немає; 4) 7; 8. **7.15.** 1) −1; 2) 6. **7.16.** 1) 27; 2) [5; 10]; 3) коренів немає. **7.17.** 1) 10; 2) [−4; +∞). **7.18.** 1) 2; $\frac{-2-4\sqrt{13}}{3}$; 2) −2; 1; 13. **7.19.** 1) 0; 2; 2) −2; $\frac{-2+2\sqrt{91}}{3}$. **7.20.** При $a<\frac{1}{4}$ коренів немає, при $a\geqslant\frac{1}{4}$ $x=a-\sqrt{a}$. *Вказівка.* $x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}=\left(\sqrt{x+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)^2$. **7.21.** При $a<1$ коренів немає, при $a\geqslant 1$ $x=a-2\sqrt{a}$. **7.22.** $\frac{1}{5}\leqslant a<\frac{1}{3}$ або $a=\frac{8}{15}$. *Вказівка.* Розгляньте графіки функцій $y=ax-1$ і $y=\sqrt{8x-x^2-15}$. **7.23.** $1<a\leqslant 3$ або $a=2-\sqrt{2}$.

8.1. 1) 16; 2) 1; 3) 8; 4) 0; 1; 5) 1; 29; 6) 0; 16; 7) $\frac{9}{8}$; 8) 8. **8.2.** 1) 1; 512; 2) 4; 3) −8; 1; 4) −61; 5) 0; 1; 6) 2,8; −1,1. **8.3.** 1) 1; 4; 2) $\pm\sqrt{11}$; $\pm\sqrt{6}$; 3) −1; 4; 4) −2; 5; 5) −4; 1; $\frac{-3\pm\sqrt{22}}{2}$; 6) 1024. **8.4.** 1) −1; 5; 2) 1; 2; 3) 1; 2; 4) −6; 4. **8.5.** 1) (9; 4), (4; 9); 2) (64; 1); 3) (8; 1), (1; 8); 4) (41; 40); 5) (6; 3), (3; 1,5); 6) (−2; 3), (12; 24). **8.6.** 1) (27; 1), (−1; −27); 2) (4; 1), (1; 4); 3) (2; 3), $\left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}\right)$. **8.7.** 1. *Вказівка.* Скористайтеся заміною $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=t$ або властивостями зростаючих і спадних функцій. **8.8.** 3. *Вказівка.* Заміна $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}=y$. **8.9.** 3. **8.10.** $1+\sqrt{6}$. *Вказівка.* Заміна $\frac{x}{\sqrt{2x+5}}=t$. **8.11.** 3; $\frac{81-9\sqrt{97}}{8}$. *Вказівка.* Поділіть обидві частини рівняння на x^2. **8.12.** 1; $\frac{1+\sqrt{109}}{18}$. **8.13.** −2; 5. *Вказівка.* Нехай $\sqrt[3]{x+3}=a$, $\sqrt[3]{6-x}=b$. Тоді $a^3+b^3=9$. **8.14.** −3; 4. **8.15.** 8. **8.16.** $-\frac{17}{5}$; $\frac{63}{5}$. **8.17.** 10. *Вказівка.* Заміна $\sqrt[3]{x-2}=a$, $\sqrt{x-1}=b$. Тоді $a^3-b^2=-1$. Інше розв'язання можна отримати, якщо врахувати зростання функції $f(x)=\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x-1}$. **8.18.** 1; 2; 10. **8.19.** 1. *Вка-*

зівка. Нехай $\sqrt{2-x}=y$. Тоді можна отримати систему $\begin{cases}\sqrt{2-x}=y,\\ \sqrt{2-y}=x.\end{cases}$ **8.20.** 2.
8.21. 1) 4. *Вказівка*. Помноживши обидві частини рівняння на вираз $\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}$, отримаємо: $6x=3x\left(\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}\right)$. Зазначимо, що $x=0$ не є коренем початкового рівняння. Далі додамо почленно початкове рівняння і рівняння $\sqrt{2x^2+3x+5}-\sqrt{2x^2-3x+5}=2$; 2) −1. *Вказівка*. Помножте обидві частини рівняння на вираз $\sqrt{x+1}-1$. **8.22.** 1) $\frac{7+\sqrt{13}}{6}$; 2) 2.

9.2. 1) [3; 5]; 2) [0; +∞); 3) $(-\infty;-1]\cup[0;1)$; 4) (4; +∞); 5) [−8; −4]; 6) $(-\infty;-1)\cup[2;+\infty)$. **9.3.** 1) $\left[\frac{2}{3};4\right)$; 2) $(-\infty;-4]\cup[1;+\infty)$; 3) ∅. **9.4.** 1) $\left(3;\frac{24}{5}\right]$; 2) [1; +∞); 3) [0; 3]; 4) $[-1;0)\cup(0,6;1]$; 5) $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$; 6) [1; 6]. **9.5.** 1) $\left[2\frac{2}{9};4\right)\cup$ $\cup(5;+\infty)$; 2) (3; +∞); 3) $[-2;-1,6]\cup[0;2]$; 4) ∅. **9.6.** 1) (−∞; 1); 2) [−7; 2]; 3) (−∞; −1]; 4) $\left[\frac{8}{3};+\infty\right)$; 5) $(-\infty;-2]\cup(2;+\infty)$; 6) (3; 5]. **9.7.** 1) [−2; 2); 2) [−7; 1); 3) (−∞; −3]; 4) $(-\infty;-5]\cup[1;+\infty)$. **9.8.** 1) 4; 2) $[-2;4]\cup[5;+\infty)$; 3) −2; 2. **9.9.** 1) [3; 12]; 2) $\{-2,1\}\cup[3;+\infty)$; 3) $[-4;-3]\cup[3;4]$. **9.10.** 1) $\left[\frac{1}{2};2\right)\cup(5;+\infty)$; 2) $\left[-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right]$; 3) $[-4;1]\cup\{2\}$; 4) $(-\infty;-1]\cup[4;6)\cup(8;+\infty)$. **9.11.** 1) $(-1;+\infty)$; 2) $[-20;0)\cup(5;+\infty)$; 3) $\{-4\}\cup[2;3]$; 4) [−7; −5). **9.12.** 1) $(1;+\infty)$; 2) $\left[-1;-\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{15}}{4};1\right]$; 3) $\left(\frac{2\sqrt{21}}{3};+\infty\right)$. **9.13.** 1) $[6;+\infty)$; 2) $\left(\frac{16}{5};4\right)$. **9.14.** $[1;+\infty)$. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що функція $y=\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{x^3+x+6}$ є зростаючою. **9.15.** [−2; 2). **9.16.** $a=\frac{7}{40}$. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що графіком функції $y=\sqrt{1-(x+2a)^2}$ є півколо радіуса 1 із центром у точці *A* (−2*a*; 0). **9.17.** $a=\frac{7}{20}$.

10.3. 2) $\frac{9\pi}{2}$. **10.10.** 1) (0; −1); 3) (0; 1); 6) (1; 0). **10.11.** 2) (−1; 0); 5) (−1; 0). **10.12.** 3) $\frac{3\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; 4) 2π; −2π. **10.13.** *б*) $-\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **10.14.** *б*) $\frac{7\pi}{15}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **10.15.** 1) (0; −1); 2) (0; 1), (0; −1); 3) (1; 0), (−1; 0). **10.17.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$;

2) $\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **10.18.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **10.20.** 1) $\{\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\}$; 2) $\varnothing$; 3) $\left\{\frac{\pi n}{3} \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 4) $\left\{\frac{3\pi}{2}+3\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$. **10.21.** 1) $\{\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\}$; 2) $\{2\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\}$; 3) $\left\{\frac{\pi}{2}+\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 4) $\left\{\frac{\pi}{3}+\pi n \mid n\in\mathbb{Z}\right\}$.

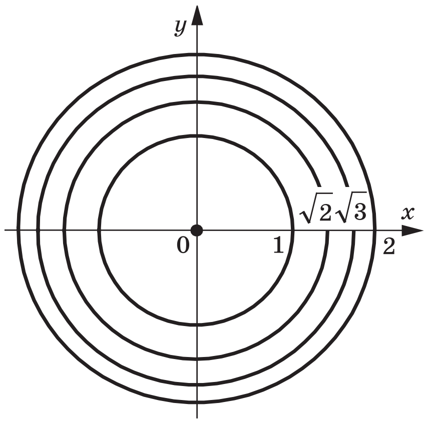
11.1. 2) -3; 3) $\frac{7}{4}$. **11.2.** 2) 9. **11.3.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **11.4.** 1) Ні; 3) так. **11.5.** 1) 3; 1; 3) 1; 0. **11.6.** 2) -1; -3; 4) 10; 4. **11.9.** 1) $a=0$; 2) $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$; 3) $1\leqslant a\leqslant 2$ або $3\leqslant a\leqslant 4$. **11.10.** 1) $1\leqslant a\leqslant 3$; 2) таких значень a не існує; 3) $a=1$. **11.13.** 1) Найбільшого значення не існує; $\frac{1}{2}$ — найменше; 2) найбільше значення 1, найменшого не існує; 3) найбільшого і найменшого значень не існує. **11.14.** 1) $-\frac{1}{3}$; -1; 2) найбільшого і найменшого значень не існує; 3) 1; -1. **11.15.** 1) $\left[\frac{1}{3};1\right]$; 2) $[0,5;+\infty)$; 3) $\left(-\infty;-\frac{2}{7}\right]\cup[2;+\infty)$. **11.16.** 1) $\left[\frac{1}{2};1\right]$; 2) $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$; 3) $(-\infty;-1]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

12.3. 1) 2; 2) 4. **12.4.** 1) 1,5; 2) $4\sqrt{3}-3$. **12.9.** 1) $2\sin\alpha$; 2) $-2\cos\alpha$; 3) 0. **12.10.** 1) 0; 2) 0; 3) $-2\operatorname{ctg}\beta$. **12.11.** 1) II; 3) I або II. **12.12.** 2) IV; 4) I або III.

13.1. 1) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 5) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 7) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **13.2.** 1) 1; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **13.7.** 4) 1; 5) $\frac{1}{6}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **13.8.** 2) 4π; 3) π; 6) 4. **13.12.** π. **13.13.** *Вказівка*. Якщо припустити, що дана функція є періодичною з періодом T, то обов'язково одне із чисел $0-T$ або $0+T$ не належатиме області визначення, тоді як $0\in D(f)$. **13.15.** 1) 4π; 2) $\frac{40\pi}{3}$; 3) 6; 4) 2. **13.16.** 1) 10π; 2) 176π; 3) 36; 4) 14. **13.17.** $a=0$. **13.18.** $a=0$. **13.19.** $a=-1$ або $a=\frac{1}{5}$. **13.20.** $a=-1$; 0; $\frac{1}{3}$. **13.21.** 1; -1; 5; -5. *Вказівка*. Рівність $\cos n(x+5\pi)\sin\frac{15(x+5\pi)}{n^2}=\cos nx\sin\frac{15x}{n^2}$ має виконуватися при всіх $x\in\mathbb{R}$, а при $x=0$ маємо: $\cos 5\pi n\sin\frac{75\pi}{n^2}=0$. Оскільки $\cos 5\pi n\neq 0$, то $\sin\frac{75\pi}{n^2}=0$; $\frac{75\pi}{n^2}=\pi k$; $\frac{75}{n^2}=k$, де $k\in\mathbb{R}$. Звідси випливає, що n^2 — дільник числа 75. **13.22.** Так. Наприклад, $T=\frac{2\pi}{101}$. **13.23.** Не існує. *Вказівка*. Сума двох ірраціональних чисел може бути раціональним числом. **13.24.** *Вказівка*. Функція $g(t) = t^3 + t$ є зростаючою, а отже, і оборотною. Нехай T — період функції $y = (f(x))^3 + f(x)$. Тоді для будь-якого $x \in D(f)$ виконується рівність $(f(x + T))^3 + f(x + T) = (f(x))^3 + f(x)$. Звідси для будь-якого $x \in D(f)$ виконується рівність $f(x + T) = f(x)$. **13.25.** Ні. *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$ **13.26.** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. *Вказівка*. Слід помітити, що $x = 0$ — корінь цього рівняння при будь-якому значенні a. Тоді, якщо a — раціональне число, то функція $y = 2\cos ax - 3\,\mathrm{tg}^2\,x - 2$ є періодичною і дане рівняння має безліч коренів. Далі треба показати, що коли a — ірраціональне число, то дане рівняння не має інших коренів, крім $x = 0$. Для цього перепишемо дане рівняння у вигляді $2\cos ax = 3\,\mathrm{tg}^2\,x + 2$. Оскільки $2\cos ax \leqslant 2$, $3\,\mathrm{tg}^2\,x + 2 \geqslant 2$, то це рівняння рівносильне системі $\begin{cases} 2\cos ax = 2, \\ 3\,\mathrm{tg}^2\,x + 2 = 2. \end{cases}$ **13.27.** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **13.28.** *Вказівка*. Припустимо, що f має додатний раціональний період $T = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді число $nT = m$ — також період функції f. Далі доведіть, що серед чисел $f(1)$, $f(2)$, ... не більше ніж m різних. **13.29.** Існує. *Вказівка*. Наприклад, $f(x) = \begin{cases} n, \text{ якщо } x = n + m\sqrt{2}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, \\ 0 \text{ в інших випадках.} \end{cases}$ **13.30.** Може. *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, функції $f(x) = x^2$, $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$ **13.31.** 1. *Вказівка*. $f(x+4) = f((x+2)+2) = \dfrac{f(x+2)}{5f(x+2)-1} = \dfrac{\dfrac{f(x)}{5f(x)-1}}{\dfrac{5f(x)}{5f(x)-1} - 1} = f(x)$. **13.32.** *Вказівка*. Замінивши в даній рівності x на $x + 1$ і на $x - 1$, відповідно отримаємо дві рівності: 1) $f(x+2) + f(x) = \sqrt{2}\,f(x+1)$; 2) $f(x) + f(x-2) = \sqrt{2}\,f(x-1)$. Тепер легко встановити, що $f(x + 2) + f(x - 2) = 0$. Підставимо замість x до останньої рівності $x + 2$. Тоді $f(x + 4) = -f(x)$. Тепер можна записати: $f(x + 8) = f((x + 4) + 4) = -f(x + 4) = f(x)$. Отже, число 8 — період даної функції. **13.33.** 1) *Вказівка*. Легко перевірити, що $f\left(x + \dfrac{1}{5}\right) = f(x)$; 2) *Вказівка*. Доведіть дану рівність для $x \in \left[0; \dfrac{1}{5}\right)$. Далі скористайтеся періодичністю функції f з попереднього завдання.

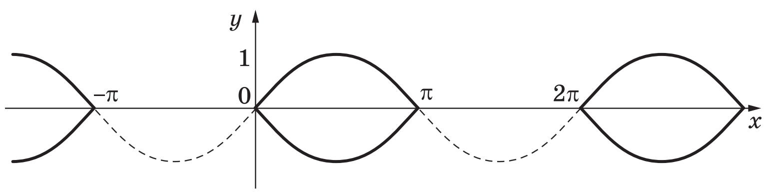
14.5. 2) $\cos 20° > \cos 21°$; 4) $\cos\dfrac{10\pi}{9} < \cos\dfrac{25\pi}{18}$; 6) $\sin 2 > \sin 2{,}1$. **14.6.** 2) $\sin\dfrac{5\pi}{9} > \sin\dfrac{17\pi}{18}$; 4) $\cos\dfrac{10\pi}{7} > \cos\dfrac{11\pi}{9}$. **14.9.** 1) $\sin 58° > \cos 58°$;

2) sin 18° < cos 18°; 3) cos 80° < sin 70°. **14.10.** 1) Так; 2) ні. **14.19.** 19. *Вказівка*. Побудуйте графіки функцій $y = \sin x$, $y = \frac{x}{10\pi}$. **14.20.** 10. **14.21.** 1) Див. рисунок. *Вказівка*. $\pi(x^2 + y^2) = \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x^2 + y^2 = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.



До задачі 14.21 (1)

14.23. 3) Графіком рівняння є пряма, яка збігається з віссю ординат; 4) *Вказівка*. Дане рівняння ма є розв'язок лише за умови $\sin x \geqslant 0$. Тому дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \sin x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} y = \sin x, \\ y = -\sin x. \end{array}\right. \end{cases}$ Шуканий графік зображено на рисунку.



До задачі 14.23 (4)

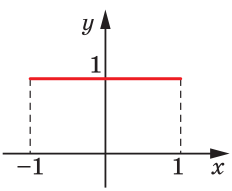
14.24. 3) Графіком рівняння є множина всіх точок виду $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; 0\right), k \in \mathbb{Z}$.

14.25. $-8\pi < a < -6\pi$ або $6\pi < a < 8\pi$. **14.26.** Не існує. *Вказівка*. При $x = \frac{\pi}{2}$ і $x = -\frac{\pi}{2}$ отримуємо: $|f(0) + 1| < 1$ і $|f(0) - 1| < 1$. Звідси $\begin{cases} -2 < f(0) < 0, \\ 0 < f(0) < 2. \end{cases}$

15.3. 2) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}<\operatorname{tg}\frac{7\pi}{15}$; 3) tg 1 < tg 1,5; 5) $\operatorname{ctg}(-40°)<\operatorname{ctg}(-60°)$. **15.4.** 1) tg 100° > tg 92°; 4) $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{8}>\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{12}$; 6) $\operatorname{ctg}(-3)<\operatorname{ctg}(-3{,}1)$. **15.9.** 1) Ні. *Вказівка*. $\operatorname{tg}80°>\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}$; 2) ні; 3) так. **15.10.** 2) sin 40° < ctg 20°. **15.15.** 1) Графік рівняння — об'єднання множини прямих виду $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, і осі абсцис, з якої «виколото» точки виду $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;0\right)$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) множина всіх парабол $y=x^2+k$, $k\in\mathbb{Z}$; 4) множина всіх точок перетину прямих виду $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, з прямими виду $y=\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **15.16.** 2) Множина прямих виду $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, з яких «виколото» точки, ординати яких мають вид $\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\operatorname{tg}x=0,\\ \sin y\neq0,\\ \cos y\neq0.\end{cases}$

16.1. 5) $2\cos^2\alpha$; 6) $-\sin^2\alpha$; 7) $\cos^2\frac{x}{2}$; 8) 2. **16.2.** 4) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 5) 1; 6) 1; 7) 1; 8) 4. **16.5.** 1) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$; 2) 1; 3) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 4) $\frac{1}{\sin x}$; 5) 0; 6) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$; 7) 1; 8) $\cos^2\alpha$; 9) $\sin^4\alpha$; 10) $\frac{1}{\cos\beta}$. **16.6.** 1) $\frac{2}{\sin^2\beta}$; 2) 1; 3) $\frac{2}{\cos\beta}$; 4) $\frac{1}{\cos x}$; 5) $\operatorname{tg}^2\alpha$; 6) tg α; 7) 1; 8) $-\cos^2\alpha$. **16.7.** 2) $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$; 3) $\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{2}$. **16.8.** 1) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{12}{5}$; 4) $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{50}}$, $\cos\alpha=-\frac{7}{\sqrt{50}}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{7}$. **16.11.** 2) *Вказівка*. Подайте доданок $2\sin^2\alpha$ у вигляді суми $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha$; 4) *Вказівка*. Розгляньте різницю лівої і правої частин даної рівності та доведіть, що вона дорівнює нулю. **16.15.** 1) $-\frac{1}{2}$. *Вказівка*. Поділіть чисельник і знаменник даного дробу на cos α; 2) $\frac{1}{4}$; 3) −27. *Вказівка*. Помножте чисельник даного дробу на $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$. **16.16.** 1) $-\frac{16}{11}$; 2) $\frac{12}{7}$; 3) $\frac{125}{357}$. **16.17.** 1) −sin β − − cos β; 2) −sin α cos β; 3) −2 tg α; 4) 1. **16.18.** 1) $\frac{1}{\sin\alpha}$; 2) 2 ctg α; 3) −1. *Вказівка*. Оскільки $\frac{2\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\pi$, то $\cos\frac{2\pi}{3}\geqslant\cos\alpha$. **16.19.** 1) $\frac{b^2-1}{2}$. *Вказівка*. $b^2=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\frac{b(3-b^2)}{2}$; 3) $\frac{1+2b^2-b^4}{2}$; 4) $\frac{1+6b^2-3b^4}{4}$;

5) $\dfrac{8(1+2b^2-b^4)}{(b^2-1)^4}$. **16.20.** 1) b^2-2; 2) $b(b^2-3)$; 3) b^4-4b^2+2; 4) $\dfrac{b+2}{b}$. *Вказівка*. З умови випливає, що $\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=b$. Звідси $2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{2}{b}$.
16.21. 1) $3\dfrac{1}{8}$, -3. *Вказівка*. $2\cos^2\alpha-3\sin\alpha=2(1-\sin^2\alpha)-3\sin\alpha=-2\sin^2\alpha-$ $-3\sin\alpha+2$. Позначимо $\sin\alpha=t$ і розглянемо функцію $f(t)=-2t^2-3t+2$, визначену на проміжку $[-1; 1]$. Це квадратична функція зі старшим від'ємним коефіцієнтом $a=-2$. Вона набуває найбільшого значення в точці $t_0=-\dfrac{-3}{2\cdot(-2)}=-\dfrac{3}{4}$, яка належить проміжку $[-1; 1]$. Отже, $\max\limits_{[-1;1]} f(t)=f\left(-\dfrac{3}{4}\right)=$ $=-2\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2-3\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)+2=3\dfrac{1}{8}$. Для знаходження найменшого значення обчислимо значення функції $f(t)$ на кінцях проміжку $[-1; 1]$: $f(-1)=$ $=-2+3+2=3$, $f(1)=-2-3+2=-3$. Отже, $\min\limits_{[-1;1]} f(t)=-3$; 2) найбільшого значення не існує, найменше дорівнює -1; 3) 0; $-1\dfrac{1}{8}$; 4) найбільшого і найменшого значень не існує. **16.22.** 1) $3\dfrac{1}{3}$; -2; 2) $3\dfrac{1}{8}$; 2; 3) найбільшого і найменшого значень не існує. **16.23.** 1) Див. рисунок; 2) пряма $y=-1$, з якої «виколото» точки виду $\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k; -1\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **16.24.** 1) Пряма $y=1$, з якої «виколото» точки виду $\left(\dfrac{\pi k}{2}; 1\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **16.25.** 1. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $\sin^{14}x\leqslant\sin^2 x$ і $\cos^{14}x\leqslant\cos^2 x$. **16.26.** 1; -1.



До задачі 16.23 (1)

17.1. 3) 0; 4) 0. **17.2.** 3) 0. **17.3.** 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\cos\beta$; 5) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 6) $\sin 2\beta$; 7) $\operatorname{tg} 15°$; 8) $\cos(\alpha-\beta)$. **17.4.** 2) $\dfrac{1}{2}$; 3) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\cos 2\beta$; 6) $\cos(\alpha+\beta)$. **17.5.** $\dfrac{6}{7}$. **17.7.** 2) -1; 3) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **17.8.** 1) $\sqrt{3}$. **17.11.** $-\dfrac{31\sqrt{2}}{82}$. **17.12.** $-\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}$. **17.13.** $-\dfrac{24}{25}$. **17.14.** $-\dfrac{297}{425}$. **17.15.** 2. **17.16.** 5. **17.19.** 1) $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{4}$; 2) $\dfrac{1}{\sin 2\alpha}$; 3) $\cos 2\alpha$; 4) $-\dfrac{1}{\cos\alpha}$. **17.20.** 1) 1; 2) -1. **17.21.** 1) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 3) $\sqrt{3}-2$. **17.22.** 1) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **17.23.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 1. **17.24.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 1. **17.27.** 1) 2;

2) $\sqrt{41}$; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{5}$. **17.28.** 1) 2; 2) 5; 3) $\sqrt{10}$. **17.29.** $\frac{\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{10}$. *Вказівка.* $\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\right)$. **17.30.** −0,6. **17.31.** $\frac{48+25\sqrt{3}}{11}$. **17.32.** $\frac{\sqrt{3(1-b^2)}-b}{2}$. **17.33.** $-\frac{\pi}{4}$. **17.34.** 60°. **17.35.** 120°. **17.36.** 1) Із графіка функції $y=\operatorname{tg} x$ вилучіть точки, абсциси яких дорівнюють $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$. **17.38.** *Вказівка.* Із рівності $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ випливає, що $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$. Тоді $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}(\pi-\gamma)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)+$ $+\operatorname{tg}\gamma=-\operatorname{tg}\gamma(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}\gamma=-\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$. **17.40.** 2. *Вказівка.* З рівності $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ випливає, що $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=$ $=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$. Тоді $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=1+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=$ $=1+\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=1+1-$ $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=2$. **17.41.** 2. **17.44.** *Вказівка.* Припустимо, що $\cos\alpha+$ $+\cos\beta+\cos\gamma>2$. Тоді $(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2>4$ і $(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2\geqslant 5$. Почленно додавши дві останні нерівності, отримаємо: $3+2(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+$ $+\cos(\gamma-\alpha))>9$. **17.45.** *Вказівка.* Скористаємося тотожністю для кутів трикутника (див. задачу 17.39): $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1$. Маємо:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}-\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2+\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}-\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2\right)\geqslant 0.$$

Звідси $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}-1\geqslant 0$. **17.46.** *Вказівка.* Розгляньте вираз $\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2$ і скористайтеся результатами задачі 17.45. **17.47.** $f(x)=$ $=a\sin x$, де a — довільне дійсне число. *Вказівка.* Підставляючи $y=\frac{\pi}{2}$, $x=t-\frac{\pi}{2}$, отримуємо: $f(t)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin t$. Перевіркою встановлюємо, що всі функції виду $f(x)=a\sin x$ задовольняють умову задачі. **17.48.** $f(x)=x$ або $f(x)=-x$. *Вказівка.* Підставляючи $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$, отримуємо: $f(1)\ f(0)=0$. Якщо $f(1)=0$, то, підставляючи в дану рівність $y=\frac{\pi}{2}$, отримуємо:

$f(\cos x)\, f(0) = \sin x$. Остання рівність неможлива, оскільки функція $g_1(x) = f(\cos x)\, f(0)$ є парною, а $g_2(x) = \sin x$ — непарною. Якщо $f(0) = 0$ і $f(1) \neq 0$, то, підставляючи в дану рівність $y = 0$, отримуємо: $f(\cos x)\, f(1) = \cos x$, тобто $f(\cos x) = a \cos x$. Тоді $f(t) = at$ для всіх $t \in [-1; 1]$. Перевіркою встановлюємо, що $a = 1$ або $a = -1$.

18.3. 3) $-\cos 38°$; 4) $-\sin\frac{\pi}{18}$. **18.4.** 3) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$; 4) $\sin\frac{\pi}{15}$. **18.7.** 2) -1; 6) $2\cos\alpha$. **18.8.** 3) 0; 4) 1. **18.9.** 1) -4; 2) $\frac{5}{3}$; 3) $\frac{\sqrt{6}}{4}$; 4) 1. *Вказівка.* Зведіть кожну функцію до найменшого додатного аргументу; 5) 1. **18.10.** 1) $3 - 2\sqrt{2}$; 2) 3; 3) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; 4) -1. **18.11.** 1) $-\cos\alpha$; 2) 1; 3) 2; 4) 1; 5) 1; 6) $-\operatorname{tg}^2\alpha$. **18.13.** 1) 1; 2) 0; 3) 0. **18.14.** 1) -1; 2) 1; 3) 0. **18.16.** 2. *Вказівка.* Оскільки $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{11} + \frac{5\pi}{22} = \frac{\pi}{2}$, то $\cos^2\frac{3\pi}{8} = \sin^2\frac{\pi}{8}$ і $\cos^2\frac{5\pi}{22} = \sin^2\frac{3\pi}{11}$. **18.17.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\frac{1}{\cos^2(\alpha + 10°)}$. **18.18.** 1) Не існує. *Вказівка.* $y = f(\cos x)$ — парна функція, а $y = \sin x$ — непарна функція; 2) не існує. *Вказівка.* Якщо така функція існує, то виконується рівність $f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, тобто $f(\cos x) = \sin x$. **18.19.** Не існує. *Вказівка.* Якщо така функція існує, то виконується рівність $f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \sin 100\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, тобто $f(\cos x) = \sin 100x$. Але функція $y = f(\cos x)$ є парною, а $y = \sin 100x$ — непарною. **18.20.** *Вказівка.* З умови випливає, що $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$. Тоді $\alpha < \frac{\pi}{2} - \beta$; $\cos\alpha > \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \sin\beta$. Аналогічно доводимо, що $\cos\beta > \sin\gamma$, $\cos\gamma > \sin\alpha$.

19.3. 1) $2\cos\alpha$; 2) $\cos^2\alpha$; 3) $\sin 25°$; 4) 1; 5) $\cos\alpha + \sin\alpha$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $-\cos\frac{\alpha}{2}$; 8) $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\alpha$; 9) $\sin 2\alpha$; 10) 1; 11) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg} 2\alpha$; 12) $\sin 4\alpha$. **19.4.** 1) $2\sin 40°$; 2) $\cos 11\alpha$; 3) $\cos^2 2\beta$; 4) $\sin 40°$; 5) $\cos 20\varphi$; 6) 1; 7) $\cos 35° - \sin 35°$; 8) $\frac{1}{4}\sin 4\alpha$; 9) $2\sin 2\alpha$; 10) $\frac{1}{2}\cos 2\alpha$; 11) $-\sin 2\beta$; 12) $\sin 3\alpha$. **19.5.** 1) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; 5) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; 6) $2\sqrt{3}$. **19.11.** 2) $-4\sqrt{5}$. **19.12.** 2) $-\frac{24}{7}$. **19.16.** 1) 1; 2) $\operatorname{ctg} 4\alpha$. **19.17.** $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$. **19.18.** $-0{,}8$. **19.19.** $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. **19.20.** $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{14}}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{7}}{7}$. **19.21.** 1) $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$;

2) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$; 3) $2+\sqrt{3}$; 4) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$; 5) $-(1+\sqrt{2})$; 6) $\sqrt{2}-1$. **19.22.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$; 3) 2; 4) tg 2α; 5) sin 4α; 6) sin 2α; 7) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 8) cos α. **19.23.** 1) 2 ctg 4α; 2) sin 2α; 3) tg 2α; 4) 4 sin α; 5) 1; 6) $-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. **19.30.** $\frac{1}{2}$. **19.31.** $-\frac{1}{2}$. **19.32.** $-\frac{8}{9}$. **19.33.** $\frac{3}{4}$. **19.34.** 1) cos 4α; 2) tg α; 3) sin 8α; 4) $\operatorname{tg}^4\alpha$; 5) 1; 6) -1. **19.35.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 8 cos 2α; 3) $-\frac{1}{4}\sin^2\alpha$; 4) $\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}$; 5) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}2\alpha$; 6) $-\frac{1}{2}$. **19.38.** 1) $\frac{3+\cos 4\alpha}{4}$; 2) $\frac{17+14\cos 4\alpha+\cos^2 4\alpha}{32}$. **19.39.** $\frac{10+3\sqrt{3}}{16}$. **19.41.** 1) $\operatorname{ctg}^4\frac{\alpha}{2}$; 2) $\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **19.42.** 1) -2; 2) 0. **19.43.** 1) 4; 2) $-\frac{1}{2}\sin 2\alpha$. **19.48.** 1) $\cos\frac{\alpha}{4}$; 2) $\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$. **19.49.** 1) Якщо $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{4}$, то $2\cos\alpha$; якщо $\frac{\pi}{4}<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, то $2\sin\alpha$; 2) $2\cos\frac{\varphi}{2}$. **19.50.** $\frac{3}{5}$. **19.51.** 2 або $-\frac{1}{3}$. **19.52.** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. *Вказівка*. Маємо: $\sin 36°=\cos 54°$. Тоді $\sin(2\cdot 18°)=\cos(3\cdot 18°)$; $2\sin 18°\cos 18°=4\cos^3 18°-3\cos 18°$; $2\sin 18°\cos 18°=\cos 18°(4\cos^2 18°-3)$; $2\sin 18°=4\cos^2 18°-3$; $2\sin 18°=4(1-\sin^2 18°)-3$; $2\sin 18°=4-4\sin^2 18°-3$; $4\sin^2 18°+2\sin 18°-1=0$. Розгляньте останню рівність як квадратне рівняння відносно $\sin 18°$ і врахуйте, що $\sin 18°>0$. **19.53.** *Вказівка*. Скористайтеся рівністю $\sin 30°=3\sin 10°-4\sin^3 10°$. **19.55.** *Вказівка*. Скористайтеся методом математичної індукції.

20.1. 1) tg 5α; 2) $-$ctg 3α; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **20.2.** 1) $\frac{\cos\alpha}{\cos 4\alpha}$; 2) tg 6α; 3) 1. **20.3.** 1) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $4\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 3) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)\times$ $\times\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}{\sin\alpha}$. **20.4.** 1) $4\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)$; 2) $4\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$; 3) $4\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\alpha}$. **20.5.** 1) sin 3α; 2) 0,5. **20.6.** 1) cos α; 2) $\frac{1}{2}$. **20.13.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) 1; 3) $-$sin 2α. **20.14.** 1) 1; 2) sin 2α. **20.19.** 1) *Вказівка*. Помножте та поділіть ліву частину рівності на $2\sin\frac{\pi}{7}$. **20.21.** $\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}n\alpha}{\sin\alpha}$. *Вказівка*. Скористайтеся рівністю $\dfrac{\sin\alpha}{\sin k\alpha\sin(k+1)\alpha}=\operatorname{ctg}k\alpha-\operatorname{ctg}(k+1)\alpha$. **20.22.** $\dfrac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\dfrac{1}{2^n}-\operatorname{ctg}1$. *Вказівка*. Скористайтеся рівністю $\operatorname{tg}\beta-\operatorname{ctg}\beta=-2\operatorname{ctg}2\beta$. **20.23.** *Вказівка*. Помножте та поділіть ліву частину рівності на $2\sin\dfrac{\pi}{n}$. Зазначимо, що дана задача має й геометричне розв'язання. Розглянемо точки $A_k\left(\cos\left(\dfrac{2\pi k}{n}\right);\sin\left(\dfrac{2\pi k}{n}\right)\right)$, де k набуває всіх натуральних значень від 1 до n. Ці точки є вершинами правильного n-кутника із центром у точці O (0; 0). Сума векторів $\vec{s}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$. Водночас перша координата вектора $\vec{s}$ дорівнює $\cos\dfrac{2\pi}{n}+\cos\dfrac{4\pi}{n}+\ldots+\cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n}+\cos\dfrac{2n\pi}{n}$. **20.24.** 1) Якщо $\alpha=2\pi k, k\in\mathbb{Z}$, то $S=n$; якщо $\alpha\neq2\pi k$, то $S=\dfrac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\cos\dfrac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$. *Вказівка*. При $\alpha\neq2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, помножте та поділіть дану суму на $2\sin\dfrac{\alpha}{2}$; 2) якщо $\alpha=\pi k, k\in\mathbb{Z}$, то $S=0$; якщо $\alpha\neq\pi k$, то $S=\dfrac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}$. *Вказівка*. При $\alpha\neq\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, помножте та поділіть дану суму на 2 $\sin\alpha$; 3) якщо $\alpha=\pi k, k\in\mathbb{Z}$, то $S=0$; якщо $\alpha\neq\pi k$, то $S=\dfrac{n}{2}-\dfrac{\sin n\alpha\cos(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$. *Вказівка*. Скористайтеся формулами пониження степеня. **20.25.** *Вказівка*. Перепишемо дану нерівність у вигляді $8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1\leqslant0$. Перетворимо вираз $8\cos\alpha\cos\beta\times\cos\gamma$. Маємо: $8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1=4(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))\cos\gamma-1=4(\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma)\cos\gamma-1=4\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma-4\cos^2\gamma-1=(4\cos(\alpha-\beta)\times\cos\gamma-4\cos^2\gamma-\cos^2(\alpha-\beta))+\cos^2(\alpha-\beta)-1=-(\cos(\alpha-\beta)-2\cos\gamma)^2-\sin^2(\alpha-\beta)$. Тепер нерівність стає очевидною. **20.26.** *Вказівка*. Скористайтеся рівностями $\sin7\alpha-\sin5\alpha=2\sin\alpha\cos6\alpha$, $\sin7\alpha+\sin5\alpha=2\cos\alpha\sin6\alpha$.

21.3. 2) $\pm\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{12\pi n}{5}, n\in\mathbb{Z}$; 6) $\pm3\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}+6\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **21.4.** 2) $\pm\dfrac{25\pi}{6}+10\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\dfrac{4\pi}{3}+\dfrac{8\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}$. **21.5.** 3) $12+6\pi+12\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $\dfrac{\pi}{24}\pm\dfrac{2\pi}{9}+\dfrac{2\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}$. **21.6.** 2) $\pm\dfrac{3\pi}{2}-6+4\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **21.7.** $-\dfrac{\pi}{6}$. **21.8.** 3π. **21.9.** 4 корені. **21.10.** $\dfrac{7\pi}{12}$; $\dfrac{31\pi}{12}$; $\dfrac{5\pi}{4}$; $\dfrac{13\pi}{4}$. **21.11.** 2) $\left(\dfrac{5}{6}+2k\right)^2$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\left(-\dfrac{5}{6}+2n\right)^2$, $n\in\mathbb{N}$; 3) розв'язків немає. **21.12.** 1) $\dfrac{64}{(8k+1)^2}, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\dfrac{64}{(8n-1)^2}, n\in\mathbb{N}$; 2) $\pm\arccos\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, $\pm\arccos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **21.13.** $a=\dfrac{1}{2}$. **21.14.** $a=0$. **21.15.** $a\leqslant1$ або $a\geqslant3$.

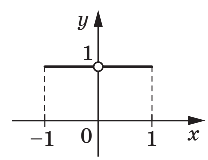
21.16. $a \leqslant -\frac{2}{5}$ або $a \geqslant 2$. **21.17.** $-1 \leqslant a < \frac{1}{2}$. *Вказівка*. Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \cos x = a, \\ \cos x > 3a - 1, \end{cases}$ яка має розв'язок тоді, коли $\begin{cases} -1 \leqslant a \leqslant 1, \\ a > 3a - 1. \end{cases}$
21.18. $-1 \leqslant a < -\frac{1}{3}$ або $-\frac{1}{3} < a \leqslant 1$. **21.19.** $a \in \left[\frac{7\pi}{3}; +\infty\right)$. **21.20.** $a \in \left[\frac{8\pi}{3}; +\infty\right)$.
21.21. Якщо $a < -1$ або $a > 1$, то коренів немає; якщо $a = -1$ або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $-1 < a \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ або $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$, то 2 корені; якщо $\frac{\sqrt{2}}{2} < a \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, то 3 корені. **21.22.** Якщо $\frac{1}{2} \leqslant a < 1$, то 2 корені; якщо $-1 \leqslant a < \frac{1}{2}$ або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $a < -1$ або $a > 1$, то коренів немає. **21.23.** Якщо $a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $a > 1$, то коренів немає; якщо $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant a < 0$ або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $0 \leqslant a < 1$, то 2 корені. **21.24.** $a < \pi$, або $a > \frac{3\pi}{2}$, або $a = \frac{7\pi}{6}$. **21.25.** $a < 0$, або $a > \frac{\pi}{2}$, або $a = \frac{\pi}{4}$.

22.3. 3) $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{(-1)^{n+1}}{8} \arcsin \frac{2}{9} + \frac{\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z}$. **22.4.** 3) $(-1)^{n+1} \times \frac{5\pi}{6} + \frac{5\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$. **22.5.** 2) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. **22.6.** 2) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{5\pi}{6} + 20 + 5\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **22.7.** $\frac{13\pi}{12}$. **22.8.** $-\frac{13\pi}{90}$. **22.9.** $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$. **22.10.** 6 коренів.
22.11. 1) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $\pi + 4\pi n$, $\frac{\pi}{3} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
22.12. 1) $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **22.13.** 2) $\left(2k - \frac{1}{2}\right)^2, k \in \mathbb{N}$; 3) $\pm\arccos\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **22.14.** 1) $\frac{81}{(3k + (-1)^{k+1})^2}, k \in \mathbb{N}$; 2) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **22.15.** $a \leqslant 0$ або $a \geqslant 2$. **22.16.** $a = -4$ або $4 \leqslant a \leqslant 5$. **22.17.** $\frac{1}{2} < a \leqslant 1$. **22.18.** $-1 \leqslant a < \frac{1}{3}$ або $\frac{1}{3} < a \leqslant 1$. **22.19.** $a \geqslant \frac{17\pi}{6}$. **22.20.** $a \leqslant -\frac{13\pi}{6}$. **22.21.** 1) Якщо $a < -1$ або $a > 1$, то коренів немає; якщо $a = -1$, або $-\frac{1}{2} < a < 0$, або $a = 1$, то 1 корінь; якщо $-1 < a \leqslant -\frac{1}{2}$ або $0 \leqslant a < 1$, то 2 корені; 2) якщо $a < -1$ або $a > 1$, то коренів немає; якщо $a = 1$, або $a = -1$, або $-\frac{\sqrt{2}}{2} < a \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$, то 1 корінь; якщо

$-1<a\leqslant-\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1,$ то 2 корені; 3) якщо $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant a\leqslant 0,$ то 3 корені; якщо $0<a<1$ або $-1<a<-\frac{\sqrt{3}}{2},$ то 2 корені; якщо $a=-1$ або $a=1,$ то 1 корінь; якщо $a<-1$ або $a>1$, то коренів немає. **22.22.** 1) Якщо $a\leqslant-\frac{1}{2}$ або $a>1$, то коренів немає; якщо $-\frac{1}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2}$ або $a=1$, то 1 корінь; якщо $\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant a<1,$ то 2 корені; 2) якщо $-1<a\leqslant-\frac{1}{2},$ то 3 корені; якщо $-\frac{1}{2}<a<1$ або $a=-1$, то 2 корені; якщо $a=1$, то 1 корінь; якщо $a<-1$ або $a>1$, то коренів немає. **22.23.** Якщо $-1<a<-\frac{\sqrt{2}}{2},$ або $-\frac{\sqrt{2}}{2}<a<\frac{\sqrt{2}}{2},$ або $\frac{\sqrt{2}}{2}<a<1,$ то 4 корені; якщо $a=-1,$ або $a=-\frac{\sqrt{2}}{2},$ або $a=\frac{\sqrt{2}}{2},$ або $a=1,$ то 3 корені; якщо $a<-1$ або $a>1,$ то 2 корені. **22.24.** Якщо $-1<a<-\frac{\sqrt{3}}{2},$ або $-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2},$ або $\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1,$ то 4 корені; якщо $a=-1,$ або $a=-\frac{\sqrt{3}}{2},$ або $a=\frac{\sqrt{3}}{2},$ або $a=1$, то 3 корені; якщо $a<-1$ або $a>1$, то 2 корені.

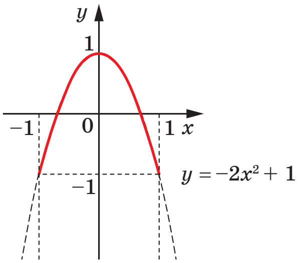
23.3. 3) $-\frac{4\pi}{21}+\frac{4\pi n}{7}, n\in\mathbb{Z};$ 5) $\frac{1}{6}\operatorname{arcctg}\frac{6}{11}+\frac{\pi n}{6}, n\in\mathbb{Z}.$ **23.4.** 2) $\frac{5\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$ **23.5.** 2) $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}.$ **23.6.** 3) $-\frac{1}{3}+\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}.$ **23.7.** 4 корені. **23.8.** 1 корінь. **23.9.** $-\frac{\pi}{4}.$ **23.10.** $-\frac{2\pi}{3}.$ **23.11.** 2) $\frac{16}{(4k+1)^2}, k\in\mathbb{N}\cup\{0\};$ 3) $(-1)^k\arcsin\frac{1}{3}+\pi k,$ $(-1)^k\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)+\pi k, k\in\mathbb{Z}.$ **23.12.** 1) $\frac{8}{20k+5}, k\in\mathbb{Z};$ 2) $\frac{16}{(4\pi k-\pi)^2}, k\in\mathbb{N};$ 3) $\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi k,$ $\pm\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$ **23.13.** 1) $a<-\frac{1}{3},$ або $-\frac{1}{3}<a<0,$ або $a>0$; 2) $-1<a<-\frac{1}{2},$ або $-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2},$ або $\frac{1}{2}<a<1.$ **23.14.** 1) $a<-\frac{1}{2},$ або $-\frac{1}{2}<a<0,$ або $a>0$; 2) $-1<a<-\frac{\sqrt{3}}{2},$ або $-\frac{\sqrt{3}}{2}<a<\frac{\sqrt{3}}{2},$ або $\frac{\sqrt{3}}{2}<a<1.$ **23.15.** $a=-\frac{\pi}{3},$ або $a\leqslant-\frac{\pi}{2},$ або $a\geqslant 0.$ **23.16.** $a=-\frac{\pi}{4},$ або $a\leqslant-\frac{\pi}{2},$ або $a\geqslant 0.$

24.5. 1) $[0;\ 2]$; 2) $[0;\ 1]$; 3) $(-\infty;\ -\pi-4]\cup[\pi-4;+\infty)$. **24.6.** 1) $\left[-\frac{\pi}{2}-1;1-\frac{\pi}{2}\right]$; 2) $[2;\ 3]$; 3) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$. **24.7.** 1) π; 0; 2) $2+\pi$; 2. **24.8.** 1) 2π; π; 2) $\frac{\pi}{2}+1$; $-\frac{\pi}{2}+1$. **24.9.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{\pi}{6}$. **24.10.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{\pi}{4}$. **24.11.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\cos\frac{1}{2}$; 3) коренів немає. **24.12.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) коренів немає; 3) $\frac{3}{2}$. **24.13.** 1) $(-1;\ 1]$; 2) $\{-1\}$; 3) $[-1;\ 1]$; 4) $[-1;\ 1]$; 5) розв'язків немає; 6) $\{1\}$; 7) $[-1;1)$; 8) $(-1;\ 1]$. **24.14.** 1) $\{-1\}$; 2) $[-1;\ 1)$; 3) $[-1;\ 1]$; 4) $[-1;\ 1]$; 5) розв'язків немає. **24.15.** 1) $[-1;\ 1]$; 2) $\{-1\}$; 3) $\{1\}$; 4) $\{0\}$; 5) $\{0\}$. **24.16.** 1) $[-1;\ 1]$; 2) $\{1\}$; 3) $[-1;\ 1]$; 4) $\{1\}$; 5) $\{-1;\ 1\}$. *Вказівка*. Якщо $x>0$, то $\frac{x^2+1}{2x}\geqslant 1$, причому рівність досягається тільки при $x=1$; якщо $x<0$, то $\frac{x^2+1}{2x}\leqslant -1$, причому рівність досягається тільки при $x=-1$. **24.17.** 1) $\left[4;\frac{\pi}{2}+4\right]$; 2) $\{0\}$. *Вказівка*. Оскільки $-\arccos x\leqslant 0$, то область визначення даної функції складається з однієї точки $x=1$; 3) $\left(-\infty;-\frac{2}{\pi}\right]\cup\left[\frac{2}{\pi};+\infty\right)$; 4) $\left[\sqrt{\frac{1}{\pi}};+\infty\right)$. **24.18.** 1) $\left[2;\frac{\pi}{2}+2\right]$; 2) $\left[0;\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$; 3) $\left[\frac{1}{\pi};+\infty\right)$; 4) $\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}};+\infty\right)$. **24.21.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{24}{25}$. *Вказівка*. $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)=2\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$; 3) $\frac{56}{65}$; 4) $\frac{3}{4}$. **24.22.** 1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$; 3) $\frac{7}{25}$; 4) $\frac{5}{\sqrt{26}}$. **24.23.** 1) 1; 2) 5. **24.24.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) -2. **24.25.** 1) $\left[0;\frac{3}{4}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$; 3) $\left(\frac{\sqrt{3}+10}{6};2\right]$. **24.26.** 1) $\left[0;\frac{2-\sqrt{2}}{8}\right)$; 2) $\left(\frac{4-\sqrt{2}}{6};1\right]$; 3) $\left[\frac{3}{7};\frac{8+\sqrt{3}}{14}\right)$. **24.27.** 1) $\left[\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right)$; 2) розв'язків немає. **24.28.** 1) $\left[1;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$; 2) $\{0\}$. **24.31.** Див. рисунок. *Вказівка*. Якщо $-1\leqslant x<0$, то $\arcsin x<0$ і $|\arcsin x|=-\arcsin x$, $\arcsin|x|=\arcsin(-x)=-\arcsin x$. Тоді $y=1$. Якщо $0<x\leqslant 1$, то $\arcsin x>0$ і $|\arcsin x|=\arcsin x$, $\arcsin|x|=\arcsin x$. Тоді $y=1$. **24.32.** 3) Див. рисунок. *Вказівка*. Зауважимо, що $D(y)=[-1;\ 1]$. Запишемо: $\cos(2\arcsin x)=1-2\sin^2(\arcsin x)=1-2x^2$. Отже, шуканим графіком є частина параболи $y=-2x^2+1$; 4) *Вказівка*. Оскільки $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$, то $y=1$. Проте шуканий графік — це не пряма $y=1$, а лише її відрізок,

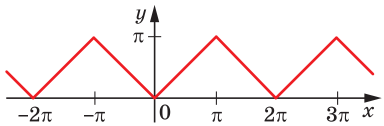


До задачі 24.31

оскільки $D(y)=[-1;\ 1]$. **24.33.** 2) *Вказівка.* $\sin(\arccos x) = = \sqrt{1-x^2}$; 3) *Вказівка.* $\cos(2\arccos x)=2x^2-1$ за умови $|x|\leqslant 1$. **24.34.** Див. рисунок.



До задачі 24.32 (3)



До задачі 24.34

24.35. 1) $\frac{\pi}{7}$; 2) $\frac{3\pi}{7}$; 3) $\pi-3$; 4) $\frac{5\pi}{2}-8$. **24.36.** 1) $\frac{2\pi}{9}$; 2) $\frac{7\pi}{9}$. *Вказівка.* $\cos\frac{11\pi}{9}=\cos\left(2\pi-\frac{7\pi}{9}\right)$; 3) $2\pi-6{,}28$; 4) $\frac{3\pi}{8}$; 5) $\frac{9\pi}{2}-12$. **24.37.** $x=\frac{1}{2}$ або $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Вказівка.* Тотожність $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ дає змогу перейти до системи $\begin{cases}(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2=\frac{5\pi^2}{36},\\ \arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ Після очевидної заміни $\arcsin x=t$, $\arccos x=z$ отримуємо: $\begin{cases}t^2+z^2=\frac{5\pi^2}{36},\\ t+z=\frac{\pi}{2},\\ -\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0\leqslant z\leqslant\pi.\end{cases}$ **24.38.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **24.41.** *Вказівка.* Вигідно довести таку рівність: $\arcsin\frac{3}{5}=\arcsin\frac{56}{65}-\arcsin\frac{5}{13}$. Значення виразів, записаних у лівій і правій частинах цієї рівності, належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, тобто проміжку, на якому функція $y=\sin x$ зростає, тому достатньо довести, що $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=\sin\left(\arcsin\frac{56}{65}-\arcsin\frac{5}{13}\right)$. **24.43.** $\sqrt{\frac{3}{28}}$. *Вказівка.* Це рівняння перепишемо так: $\arcsin 2x=\frac{\pi}{3}-\arcsin x$. Його наслідком буде рівняння $\sin(\arcsin 2x)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\arcsin x\right)$. Звідси

$2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{2}x$; $5x=\sqrt{3-3x^2}$. Це рівняння рівносильне системі $\begin{cases}25x^2=3-3x^2,\\ x\geqslant 0,\end{cases}$ розв'язуючи яку отримуємо: $x=\sqrt{\frac{3}{28}}$. Крім того, $\sqrt{\frac{3}{28}}<\frac{1}{2}$. Тому $0<\arcsin 2\sqrt{\frac{3}{28}}<\frac{\pi}{2}$ і $0<\frac{\pi}{3}-\arcsin\sqrt{\frac{3}{28}}<\frac{\pi}{2}$. **24.44.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

25.1. 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **25.2.** 1) $\frac{8\pi}{3}$; 2) $\frac{19\pi}{6}$. **25.3.** 2) -2π. **25.4.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $[1;+\infty)$. **25.5.** $\mathbb{R}$. **25.6.** 1) $\left(2-\frac{\pi}{2};2+\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\left[0;\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$. **25.7.** 1) $(4;\pi+4)$; 2) $\left[0;\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$. **25.8.** 1) 4; 2) 5; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) π. **25.9.** 1) $\frac{5}{2}$; 2) $\frac{2}{3}$. **25.10.** 1) 1; 2) tg 1; 3) коренів немає; 4) $-\frac{27+\sqrt{3}}{12}$. **25.11.** 1) -1; 2) коренів немає; 3) коренів немає; 4) $\frac{15+\sqrt{3}}{24}$. **25.12.** 1) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 3) $-\frac{7}{\sqrt{113}}$; 4) $\frac{7}{\sqrt{50}}$. **25.13.** 1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; 2) $-\frac{3}{\sqrt{10}}$; 3) $\frac{13}{85}$. **25.14.** 1) $\left(-\frac{3+\sqrt{3}}{5};+\infty\right)$; 2) $\left(2-\sqrt{3};+\infty\right)$. **25.15.** 1) $\left(-\infty;\frac{21-\sqrt{3}}{9}\right)$; 2) $\left(-\infty;\frac{\sqrt{3}}{3}-11\right)$. **25.16.** 1) *Вказівка.* $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)=x$ при будь-якому x. **25.17.** 2) *Вказівка.* $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg}x)=\frac{1}{x}$. **25.18.** 1. *Вказівка.* Скористайтеся тотожністю $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2}$. **25.19.** $-\sqrt{3}$. **25.22.** 1) $-\frac{3\pi}{13}$; 2) $5-2\pi$; 3) $-\frac{5\pi}{42}$; 4) $\frac{11\pi}{2}-17$. **25.23.** 2) $\frac{4\pi}{11}$; 3) $15-4\pi$; 4) $\frac{27\pi}{38}$; 5) $\frac{7\pi}{2}-10$. **25.24.** 1) *Вказівка.* Якщо $x>0$, $y>0$, то нерівність $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y$ є очевидною, а нерівність $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y<\frac{\pi}{2}$ рівносильна нерівності $\operatorname{arctg}x<\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}y$; $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)<\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}y\right)=\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg}y)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}y)}$, тобто $x<\frac{1}{y}$; $xy<1$. Інші випадки розгляньте самостійно. **25.25.** Так. **25.26.** Так. **25.27.** *Вказівка.* Скористайтеся задачею 25.24. **25.29.** 1) $S=$ $=\operatorname{arctg}(n+1)-\frac{\pi}{4}$. *Вказівка.* Доведіть, що $\operatorname{arctg}\frac{1}{1+k+k^2}=\operatorname{arctg}\frac{(k+1)-k}{1+(k+1)k}=$ $=\operatorname{arctg}(k+1)-\operatorname{arctg}k$. Тепер можна записати такі рівності: $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=$

$=\operatorname{arctg}\dfrac{2-1}{1+2\cdot 1}=\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}1;$ $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}=\operatorname{arctg}\dfrac{3-2}{1+3\cdot 2}=\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}2;$ ...; $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1+n+n^2}=\operatorname{arctg}\dfrac{(n+1)-n}{1+(n+1)\,n}=\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}n.$ Додавши отримані рівності, маємо: $S=\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}1=\operatorname{arctg}(n+1)-\dfrac{\pi}{4}.$ Інший розв'язок може спиратися на формулу задачі 25.24. Обчисливши суму кількох перших доданків, можна помітити закономірність і сформулювати припущення $S=\operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+2}.$ Цю рівність можна довести, наприклад, методом математичної індукції; 2) $S=\operatorname{arctg}(n^2+n+1)-\dfrac{\pi}{4}.$ *Вказівка.* $\dfrac{2k}{k^4+k^2+2}=$ $=\dfrac{2k}{1+(k^4+k^2+1)}=\dfrac{(k^2+k+1)-(k^2-k+1)}{1+(k^2+k+1)(k^2-k+1)}.$ **25.30.** $S=\operatorname{arctg}(n+1)-\dfrac{\pi}{4}.$ **25.31.** *Вказівка*. Нехай $\alpha=\operatorname{arctg}x,$ $\beta=\operatorname{arctg}y,$ $\gamma=\operatorname{arctg}z.$ Тоді $x+y+z-xyz=$ $=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}\gamma(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=$ $=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}+\operatorname{tg}\gamma\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\sin\gamma\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}>0.$

26.1. 1) $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z};$ 2) $\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z};$ 3) $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,$ $\operatorname{arctg}3+\pi n,$ $n\in\mathbb{Z};$ 4) $\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2},$ $\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{4}{3}\right)+\dfrac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}.$ **26.2.** 1) $(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi n,$ $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z};$ 2) $\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n,$ $\pi n,$ $n\in\mathbb{Z};$ 3) $\dfrac{\pi}{4}+\pi n,$ $-\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z};$ 4) $\dfrac{3\pi}{4}+3\pi n,$ $3\operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{2}{3}\right)+3\pi n, n\in\mathbb{Z}.$ **26.3.** 1) $\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z};$ 2) $-\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z};$ 3) $-3\operatorname{arctg}5+$ $+3\pi n,$ $n\in\mathbb{Z};$ 4) $\dfrac{\pi}{4}+\pi n,$ $\operatorname{arctg}4+\pi n,$ $n\in\mathbb{Z};$ 5) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,$ $2\operatorname{arctg}2+2\pi n, n\in\mathbb{Z};$ 6) $\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$ **26.4.** 1) $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z};$ 2) $-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z};$ 3) $\operatorname{arctg}2+\pi n,$ $\operatorname{arctg}3+\pi n, n\in\mathbb{Z};$ 4) $\dfrac{\pi}{4}+\pi n,$ $-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$ **26.5.** 1) $(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi n,$ $(-1)^n\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z};$ 2) $\pm\arccos\left(1-\sqrt{2}\right)+2\pi n, n\in\mathbb{Z};$ 3) $(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi n,$ $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z};$ 4) $\pm 2\pi+6\pi n,$ $n\in\mathbb{Z};$ 5) $\pi n,$ $n\in\mathbb{Z};$ 6) $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z};$ 7) $\pm\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{\pi n}{3},$ $n\in\mathbb{Z};$ 8) $\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{\pi n}{5},$ $\dfrac{1}{5}\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}+\dfrac{\pi n}{5}, n\in\mathbb{Z};$ 9) $-\dfrac{\pi}{4}+\pi n,$ $\operatorname{arcctg}2+\pi n,$ $n\in\mathbb{Z};$ 10) $\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$ **26.6.** 1) $(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi n,$ $-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z};$ 2) $(-1)^n\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)+\pi n,$ $n\in\mathbb{Z};$ 3) $\dfrac{\pi}{2}+\pi n,$ $2\pi n,$ $n\in\mathbb{Z};$ 4) $(-1)^{n+1}\pi+6\pi n,$ $n\in\mathbb{Z};$ 5) $\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi n}{2},$ $n\in\mathbb{Z};$

6) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg} 2+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 7) $\frac{\pi}{6}+\pi n$, πn, $n\in\mathbb{Z}$; 8) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$.
26.7. 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg} 2+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{5}$, $\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\frac{\pi n}{5}, n\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 4) $\operatorname{arctg} 3+\pi n$, $\operatorname{arctg} 4+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 5) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 7) πn, $\operatorname{arctg} 3+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$.
26.8. 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg} 3+\pi n, n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. $\sin 2x=2\sin x\cos x$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 4) πn, $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **26.9.** $-\pi$. **26.10.** $-\frac{\pi}{2}$. **26.11.** $\frac{\pi}{4}$. **26.12.** $\frac{\pi}{2}$.
26.13. 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n\cdot\arcsin\frac{1-\sqrt{10}}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 4) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 5) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **26.14.** 1) $\pm\arccos\frac{\sqrt{29}-2}{5}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 4) $\pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 5) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **26.15.** 1) $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{11}+\frac{2\pi n}{11}, n\in\mathbb{Z}$.
26.16. 1) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$. **26.17.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $-2\operatorname{arctg}\frac{11}{5}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $2\operatorname{arctg}\left(-1\pm\sqrt{5}\right)+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **26.18.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $2\operatorname{arctg} 4+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $2\operatorname{arctg} 2\sqrt{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **26.19.** 4 корені. **26.20.** 2π.
26.21. 1) πn, $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) πn, $n\in\mathbb{Z}$. **26.22.** 1) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}$. **26.23.** 1) $[-1;\ 2]$; 2) 3. **26.24.** 1) $[-1;\ 2]$; 2) таких значень a не існує. **26.25.** $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **26.26.** $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. $(\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x)+(\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x)-4=0$. Зробіть заміну $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=y$. **26.27.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, πn, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. $2\cos^2 x+5\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x+\cos^2 x-\sin^2 x=0$; $\sin^2 x-3\cos^2 x=5\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x$. Помножте ліву частину на вираз $\sin^2 x+\cos^2 x$; 3) $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **26.28.** 1) $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $\frac{\pi}{6}+\pi n$,

$\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$. **26.29.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$. **26.30.** 1) $3\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\arccos\frac{1-\sqrt{13}}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **26.31.** 1) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **26.32.** 1) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **26.33.** 1) $\frac{5\pi}{6}\leqslant a<\pi$; 2) $\frac{3\pi}{2}\leqslant a<\frac{11\pi}{6}$. **26.34.** 1) $\frac{11\pi}{6}\leqslant a<2\pi$; 2) $\frac{4\pi}{3}\leqslant a<\frac{3\pi}{2}$. **26.35.** 1) $a<-1$, або $a=\frac{7}{10}$, або $a>\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{7}{10}<a\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $\frac{1}{2}<a<\frac{7}{10}$, або $a=-1$. **26.36.** 1) $a<-\frac{\sqrt{3}}{2}$, або $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, або $a>1$; 2) $a=1$ або $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant a<0$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}<a\leqslant 1$ або $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant a<\frac{\sqrt{2}}{2}$. **26.37.** 1) $a>\frac{\sqrt{2}}{2}$, або $a=-\frac{1}{3}$, або $a<-1$; 2) $\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $a=-1$; 3) $-\frac{1}{3}<a\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ або $-1\leqslant a<-\frac{1}{3}$. **26.38.** 1) 3; 2) $\left(\frac{1-\sqrt{10}}{2};\frac{1+\sqrt{10}}{2}\right)\cup\left\{-\frac{13}{12}\right\}$; 3) $[1;3]\cup\left\{-\frac{13}{12}\right\}$; 4) $\left[\frac{1-\sqrt{10}}{2};-1\right)\cup\left[\frac{1+\sqrt{10}}{2};3\right)$; 5) -1; 6) $\left(-\frac{13}{12};-1\right)$. **26.39.** 1) $\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2};-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left\{\frac{1}{8}\right\}$; 2) $\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2};0\right]$. **26.40.** $a<0$, або $a=2$, або $a=3$, або $a>4$. *Вказівка*. Покажіть, що друге рівняння рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=\frac{1}{2},\\ \sin x=\frac{a-2}{2}.\end{array}\right.$ **26.41.** $a=2$. *Вказівка*. Зауважимо, що число $\frac{\pi}{3}$ є коренем першого рівняння при всіх значеннях a. Підставляючи $x=\frac{\pi}{3}$ у друге рівняння, отримуємо: $2a^2-5a+2=0$. Звідси $a=2$ або $a=\frac{1}{2}$. Залишається перевірити знайдені значення параметра.

27.1. 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 4) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $-\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **27.2.** 1) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi n}{4}, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi n}{4}, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n$, $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 4) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $\operatorname{arcctg}3+\pi n$,

$n\in\mathbb{Z}$. **27.3.** 1) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{6}$, $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}, n\in\mathbb{Z}$. **27.4.** 1) $\frac{\pi}{12}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}, n\in\mathbb{Z}$. **27.5.** 1) $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+$ $+\pi n$, $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 5) πn, $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 7) πn, $\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{2\pi n}{5}$, $\pi+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 9) $\frac{\pi n}{5}$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi n}{5}, n\in\mathbb{Z}$; 10) $\frac{\pi n}{2}$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{21}+\frac{\pi n}{7}, n\in\mathbb{Z}$. **27.6.** 1) πn, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $2\pi n$, $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+$ $+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{4}$, $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}, n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi n}{5}, n\in\mathbb{Z}$; 7) $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi n}{7}, n\in\mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$. **27.7.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n\in\mathbb{Z}$; 4) $2\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 7) $\frac{\pi}{48}+\frac{\pi n}{4}$, $-\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 8) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка.* $\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}-\frac{1-\cos 6x}{2}-\frac{1-\cos 8x}{2}=0$; 9) $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 10) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\pm\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}$. **27.8.** 1) $\frac{\pi}{22}+\frac{\pi n}{11}, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$. **27.9.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 3) $-60^\circ+180^\circ n$, $40^\circ+180^\circ n, n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{10}, n\in\mathbb{Z}$. **27.10.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $45^\circ+180^\circ n$, $-75^\circ+180^\circ n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi n}{4}$, $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{12}, n\in\mathbb{Z}$. **27.11.** 1) $-\frac{\pi}{24}+\pi n$, $\frac{5\pi}{144}+\frac{\pi n}{6}, n\in\mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $(-1)^n\arcsin\frac{1}{4}-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка.* $4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 2x\right)-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)=0$; $2\left(\sin\frac{\pi}{3}+\sin 2x\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$; $4\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$; $4\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}\right)=0$. **27.12.** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{12}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **27.13.** 1) $2\pi n$,

$-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$ *Вказівка.* $2\sin 2x\cos x-2\sin x\cos x-2\cos x\times$ $\times(\cos x-1)=0$; $2\cos x(\sin 2x-\sin x-\cos x+1)=0$; $2\cos x((1+\sin 2x)-$ $-(\sin x+\cos x))=0$; $2\cos x((\sin x+\cos x)^2-(\sin x+\cos x))=0$; $2\cos x\times$ $\times(\sin x+\cos x)(\sin x+\cos x-1)=0$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n,\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$ **27.14.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}.$ *Вказівка.* $(\sin 4x+\cos 4x)(\sin^2 4x+\cos^2 4x-\sin 4x\cos 4x)-$ $-(1-\sin 4x\cos 4x)=0$; $(\sin 4x+\cos 4x-1)(1-\sin 4x\cos 4x)=0$; 2) $-\frac{\pi}{8}+\pi n$, $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}.$ **27.15.** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}.$ *Вказівка.* Якщо α задовольняє умову задачі, то $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha=\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$, $\sin 2\alpha(1+2\cos\alpha)=$ $=\cos 2\alpha(1+2\cos\alpha)$, $(1+2\cos\alpha)(\sin 2\alpha-\cos 2\alpha)=0.$

28.1. $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$ **28.2.** $(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{29}-5}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$ **28.3.** 1) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$ *Вказівка.* $(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=1$; 2) πn, $\operatorname{arctg} 2+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$ *Вказівка.* Зробіть заміну $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}=t.$ **28.4.** $2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$ **28.5.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) πn, $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}.$ *Вказівка.* $\cos 4x=\frac{1+\cos 6x}{2}$; $4\cos^2 2x-2=1+4\cos^3 2x-3\cos 2x$; $4\cos^3 2x-4\cos^2 2x-$ $-3\cos 2x+3=0$; $4\cos^2 2x(\cos 2x-1)-3(\cos 2x-1)=0$; $(4\cos^2 2x-3)(\cos 2x-1)=$ $=0$; 3) $\frac{\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}.$ **28.6.** 1) $\frac{\pi n}{2}$, $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) πn, $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$ **28.7.** 1) $\frac{2\pi k}{15}, k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 15p, p\in\mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{17}+\frac{2\pi n}{17}, n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 17m+8, m\in\mathbb{Z}$, 2) $\frac{2\pi k}{9}$, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 9p, p\in\mathbb{Z}.$ *Вказівка.* Помножте обидві частини рівності на $2\sin\frac{x}{2}$; 3) $\frac{\pi k}{9}, k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 9p, p\in\mathbb{Z}.$ *Вказівка.* Скористайтеся формулою пониження степеня. **28.8.** 1) $\frac{\pi k}{14}, k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 14p, p\in\mathbb{Z}$, 2) $\frac{2\pi k}{3}, k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 3p, p\in\mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi k}{9}, k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 9p, p\in\mathbb{Z}.$ **28.9.** 1) -2; 2) коренів немає. **28.10.** 1) 2; 2) коренів немає. **28.11.** Коренів немає. *Вказівка.* Якщо $x>0$ або $x<-1$, то $x^2+x+1>1$. При $x\in[-1;0]$ $\sin x\leqslant 0$, а $x^2+x+1>0$. **28.12.** Коренів немає. **28.13.** 1) $x=2\pi k$, $y=\frac{1}{2}$ або $x=\pi+2\pi k$, $y=-\frac{1}{2}, k\in\mathbb{Z}$; 2) $x=\frac{-5+\sqrt{25-8k}}{2}$, $y=\frac{-5-\sqrt{25-8k}}{2}$, або $x=\frac{-5-\sqrt{25-8k}}{2}$, $y=\frac{-5+\sqrt{25-8k}}{2}$, або $x=\frac{5+\sqrt{21-8n}}{2}$,

$y=\frac{5-\sqrt{21-8n}}{2}$, або $x=\frac{5-\sqrt{21-8n}}{2}$, $y=\frac{5+\sqrt{21-8n}}{2}, k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}$, $k\leqslant 3$, $n\leqslant 2$. **28.14.** 1) $x=-4$, $y=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}$ або $x=4$, $y=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 2) $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $y=-3$ або $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $y=3$, $n\in\mathbb{Z}$. **28.15.** 1) $4\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{5\pi}{4}+\frac{5\pi n}{3}, n\in\mathbb{Z}$. **28.16.** 1) $6\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{9\pi}{4}+3\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **28.17.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. Запишемо дві очевидні нерівності: $\cos^7 x\leqslant\cos^2 x$; $\sin^4 x\leqslant\sin^2 x$. Додаючи почленно ці нерівності, отримуємо: $\cos^7 x+\sin^4 x\leqslant 1$. Тепер очевидно, що початкове рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\cos^7 x=\cos^2 x,\\ \sin^4 x=\sin^2 x;\end{cases}$ 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. Покажіть, що при всіх допустимих значеннях x виконуються нерівності $\sqrt{\cos x}\geqslant\cos^2 x$ і $\sqrt{\sin x}\geqslant\sin^2 x$. **28.18.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, πk, $k\in\mathbb{Z}$. **28.19.** 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. Запишемо очевидні нерівності: $\sin^5 x\leqslant\sin^2 x$; $\cos^5 x\leqslant\cos^2 x$. Звідси $\sin^5 x+\cos^5 x\leqslant$ $\leqslant\sin^2 x+\cos^2 x=1$. Разом з тим зрозуміло, що $2-\sin^4 x\geqslant 1$. Таким чином, початкове рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\sin^5 x=\sin^2 x,\\ \cos^5 x=\cos^2 x,\\ 2-\sin^4 x=1;\end{cases}$ 2) $\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

28.20. 1) $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) розв'язків немає. *Вказівка*. Покажіть, що $\sin x+2\cos x\leqslant\sqrt{5}$. **28.21.** $\frac{2}{3}+2n, n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. Перетворіть рівняння до вигляду $\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}\sin(\pi x-\alpha)=2$, де $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}}$. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2\frac{3\pi x}{2}}}$. Тепер треба помітити, що ліва частина отриманого рівняння не більша за 2. **28.22.** $\frac{1}{4}+2n, n\in\mathbb{Z}$. **28.23.** 1) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $y=\pi n, k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. Оцінимо кожний із множників лівої частини даного рівняння. З одного боку, маємо: $5+\frac{3}{\sin^2 x}\geqslant 8$ і $2-\sin^6 x\geqslant 1$. Тоді $\left(5+\frac{3}{\sin^2 x}\right)(2-\sin^6 x)\geqslant 8$. З другого боку, очевидно, що $7+\cos 2y\leqslant 8$. Отже, початкове рівняння рівносильне системі $\begin{cases}5+\frac{3}{\sin^2 x}=8,\\ 2-\sin^6 x=1,\\ 7+\cos 2y=8,\end{cases}$ звідси $\begin{cases}\sin^2 x=1,\\ \cos 2y=1;\end{cases}$ 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $y=\frac{\pi}{2}+2\pi n, k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}$.

Вказівка. Для будь-яких дійсних чисел a і b є правильною нерівність $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}(a+b)^2$. Тоді $\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}\left(\sin^2 x+\cos^2 x+\right.$ $\left.+\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2=\frac{1}{2}\left(1+\frac{4}{\sin^2 2x}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}$. **28.24.** 1) $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi(n-k)$, $y=-\pi+$ $+2\pi(n-2k), k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}$; 2) $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $y=\frac{\pi}{4}+\pi\left(n-\frac{k}{2}\right), k\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{Z}$. *Вказівка*. Скористайтеся нерівністю $a^2+b^2\geqslant 2ab$. Тоді $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^4 y\geqslant 2\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 y$ і $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{tg}^4 y+2\operatorname{ctg}^2 x\operatorname{ctg}^2 y\geqslant 2(\operatorname{tg}^2 x\operatorname{tg}^2 y+\operatorname{ctg}^2 x\operatorname{ctg}^2 y)\geqslant 4$. **28.25.** 7. *Вказівка*. Зауважимо, що коли число x_0 — корінь даного рівняння, то й число $(-x_0)$ — теж корінь цього рівняння. Тоді дане рівняння може мати єдиний корінь лише за умови $x_0=0$. **28.26.** 3. **28.27.** $\frac{1}{\sin 1}$. **28.28.** 0; tg 1. **28.29.** (0; 0), (1; 0). *Вказівка*. Підставивши замість x числа 0, 2π і $\frac{\pi}{2}$, можна отримати необхідні умови, яким задовольняють числа a і b. **28.30.** $a=1$. *Вказівка*. Число 2π є періодом функції $y=(a-a^2)\cos 2x+\sin x-a$. Нехай x_0 — корінь рівняння $(a-a^2)\cos 2x+\sin x=a$. Тоді числа x_0 і $x_0+8\pi$ — корені рівняння $(a-1)\sin\frac{x}{8}+\sin x=1$. Маємо: $(a-1)\sin\frac{x_0}{8}+\sin x_0=1$ і $-(a-1)\sin\frac{x_0}{8}+$ $+\sin x_0=1$. Віднімаючи почленно від першої рівності другу, отримуємо: $2(a-1)\sin\frac{x_0}{8}=0$. Звідси $a=1$ або $x_0=8\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Проте жодне із чисел виду $8\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, не є коренем рівняння $(a-1)\sin\frac{x}{8}+\sin x=1$.

29.1. 1) πk, $k\in\mathbb{Z}$, $k\neq -2$; 2) $\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$, $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $(-1)^k\cdot\frac{1}{6}+k, k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 1$. **29.2.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 0$; 2) $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$; 3) $\frac{1}{4}+\frac{k}{2}, k\in\mathbb{Z}$, $k\neq 1$. **29.3.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 4) $2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 6) $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **29.4.** 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) πn, $n\in\mathbb{Z}$; 3) $\pi+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 4) $2\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 5) $\pi+2\pi n$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **29.5.** 1) $x=n, n\in\mathbb{N}$, $n\neq 1$; 2) $x=0$, $x=\pm 1$, $x=\pm 2$, $x=\pm\frac{5}{2}$. **29.6.** 1) $x=3$, $x=\frac{1}{2}+n, n\in\mathbb{Z}$, $n\leqslant 2$; 2) $x=\pm\frac{7}{2}$, $x=\pm 3$, $x=\pm 1$. **29.7.** 1) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{2}+4\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

Вказівка. Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos 4x = 1, \\ \cos \frac{x}{2} \neq \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$ **29.8.** 1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ \ -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ 2) $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$ **29.9.** 1) $\pi n,\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ 2) $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ 3) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ **29.10.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$ 2) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \ 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z};$ 3) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ \ \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}.$ **29.11.** 1) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},$ $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$ 2) $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ -\operatorname{arctg}\frac{6+\sqrt{3}}{11} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ ***29.12.*** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n,$ $\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ 2) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ \ -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{3}}{13} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$ 3) $\frac{\pi}{2} + \pi n,$ $\operatorname{arctg}\frac{3\left(5 - \sqrt{3}\right)}{11} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

30.1. 2) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ 3) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ 6) $\frac{\pi}{6} + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ 8) $\pi n < x < \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ 9) $\pi - \arcsin\frac{1}{6} + 2\pi n < x < 2\pi + \arcsin\frac{1}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$ **30.2.** 2) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ 3) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ 6) $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ 8) $\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant x < \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ 10) $\operatorname{arcctg} 2 + \pi n < x < \pi + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$ **30.3.** 1) $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x \leqslant \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ 2) $-\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ 3) $\frac{11\pi}{12} + \pi n < x < \frac{5\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ 4) $-\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z};$ 5) $\pi + 4\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z};$ 6) $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$ **30.4.** 1) $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x \leqslant \pi n, n \in \mathbb{Z};$ 2) $\frac{5\pi}{6} + 4\pi n < x < \frac{11\pi}{6} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z};$ 3) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ 4) $-\frac{9\pi}{4} + 3\pi n < x < -\frac{\pi}{4} + 3\pi n, n \in \mathbb{Z};$ 5) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ 6) $\frac{17\pi}{60} + \frac{\pi n}{2} \leqslant x \leqslant \frac{22\pi}{60} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$ **30.5.** 1) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leqslant x < \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n$ або $\pi - \arcsin\frac{1}{4} + 2\pi n < x \leqslant \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ 2) $\frac{\pi}{6} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ 3) $-\frac{\pi}{4} + \pi n \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$ 4) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z};$

5) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<-\operatorname{arctg}2+\pi n$ або $\operatorname{arctg}2+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **30.6.** 1) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n<x\leqslant-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$ або $\frac{2\pi}{3}+2\pi n\leqslant x<\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 5) $\pi n<x<\operatorname{arcctg}5+\pi n$ або $\pi-\operatorname{arcctg}5+\pi n<x<\pi+\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **30.7.** 1) $2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{5\pi}{12}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **30.8.** 1) $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{4}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **30.9.** 1) $\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $-\operatorname{arctg}2+\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 4) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n\leqslant x<\frac{\pi}{2}+\pi n$ або $-\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n\leqslant x<\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **30.10.** 1) $\frac{\pi}{3}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pi n<x\leqslant\frac{\pi}{2}+\pi n$ або $\frac{3\pi}{4}+\pi n\leqslant x<\pi+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\pi n<x<\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 4) $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x<-\frac{\pi}{4}+\pi n$ або $\pi n<x<\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **30.11.** 1) $\frac{\pi}{5}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{5}+2\pi n,$ або $\pi+2\pi n<x<\frac{7\pi}{5}+2\pi n,$ або $\frac{9\pi}{5}+2\pi n<x<2\pi+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$; 3) $-\frac{\pi}{2}+2\pi n\leqslant x\leqslant 2\pi n$ або $\frac{\pi}{4}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 4) $2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n,$ або $\frac{2\pi}{3}+2\pi n<x<\pi+2\pi n,$ або $\frac{4\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **30.12.** 1) $2\pi n<x<\pi+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 2) $-\frac{2\pi}{5}+2\pi n<x<2\pi n,$ або $\frac{2\pi}{5}+2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n,$ або $\frac{4\pi}{5}+2\pi n<x<\pi+2\pi n,$ або $\frac{6\pi}{5}+2\pi n<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$ або $\frac{\pi}{2}+\pi n<x<\frac{5\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$ або $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z}$.

31.2. $\cos\frac{\pi}{5}$, $-\cos\frac{\pi}{5}$. **31.3.** $\cos\frac{3\pi}{10}$. **31.4.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **31.5.** $\cos\frac{2\pi}{9}$, $\cos\frac{4\pi}{9}$, $\cos\frac{6\pi}{9}$, $\cos\frac{8\pi}{9}$, $\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$, $\cos\frac{5\pi}{7}$. *Вказівка*. Доведіть, що всі корені даного рівняння належать проміжку $(-1; 1)$. Зробіть заміну $x=\cos\alpha$, $\alpha\in(0;\pi)$. **31.6.** $|a|\geqslant\sqrt{2}$. *Вказівка*. Зробіть заміну $x=|a|\cos\alpha$, $y=|a|\sin\alpha$, де $\alpha\in[0;2\pi)$. **31.7.** 7 розв'язків. *Вказівка*. Якщо покласти $x=\operatorname{tg}\alpha$, $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то отримаємо: $y=\operatorname{tg}2\alpha$, $z=\operatorname{tg}4\alpha$, $x=\operatorname{tg}8\alpha$. Тоді $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}8\alpha$ і $\alpha=\frac{\pi n}{7}$. **31.8.** $\frac{1}{2}$; $-\frac{9}{2}$. *Вказівка*. Зробіть заміну $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$, де

$r > 0$. **31.9.** Існує. Прикладом такої множини можуть бути числа $\cos\alpha$, $\cos 2\alpha$, ..., $\cos 2^{99}\alpha$, де $\alpha = \frac{2\pi}{2^{100}+1}$. **31.10.** Існує. Наприклад, $a = \operatorname{tg}\frac{\pi}{1200}$.
31.11. 1; $\cos\frac{2\pi}{7}$; $\cos\frac{4\pi}{7}$; $\cos\frac{6\pi}{7}$; $\cos\frac{2\pi}{9}$; $\cos\frac{4\pi}{9}$; $\cos\frac{6\pi}{9}$; $\cos\frac{8\pi}{9}$. *Вказівка.* Легко перевірити, що при $|x| > 1$ $f(f(f(x))) > f(f(x)) > f(x) > |x| \geqslant x$. Отже, розв'язків, які задовольняють умову $|x| > 1$, рівняння не має. Якщо $|x| \leqslant 1$, то можна зробити заміну $x = \cos t$, де $t \in [0; \pi]$. Отримуємо: $\cos 8t = \cos t$.
31.12. Наприклад, $\cos\frac{\pi}{2^{1000}}$. **31.13.** *Вказівка.* Існує α таке, що $\sin\alpha = a$, $\cos\alpha = b$. Покажіть, що $a_n = \sin(n-1)\alpha$.

32.7. 1) Неспадна; 2) не є монотонною; 3) не є монотонною. *Вказівка.* Розгляньте відношення $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. **32.8.** 2) *Вказівка.* $a_n = -3 - (n-1)^2$; 3) *Вказівка.* $\frac{4n}{n^2+1} \leqslant \frac{4n}{2\sqrt{n^2}}$; 4) *Вказівка.* $\frac{2n+7}{n+2} = 2 + \frac{3}{n+2} \leqslant 3$; 6) *Вказівка.* $\frac{n-1}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} < \frac{n}{\sqrt{n^2}}$. **32.14.** 1) Так; 4) ні. **32.15.** 1) $a_2 = \frac{26}{9}$; 2) $a_9 = 1$; 3) $a_3 = 7$; 4) $a_2 = 1$. **32.16.** 1) $a_2 = -3$; 2) $a_2 = 4$; 3) $a_2 = -1$; 4) $a_3 = -2$; 5) $a_1 = -2$; 6) $a_6 = 27$. *Вказівка.* $a_n = \frac{n^2+15n+36}{n} = n + \frac{36}{n} + 15$; 7) $a_2 = -\frac{1}{2}$. **32.17.** Так. Наприклад, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ... **32.18.** Так. Наприклад, $a_n = n!$. **32.19.** 1) Ні; 2) ні. **32.21.** 1) *Вказівка.* $a_n = \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; 2) *Вказівка.* Доведіть, що $a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. **32.23.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте τ_n для чисел $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$.
32.24. *Вказівка.* Число n є дільником числа n. Тому $\sigma_n \geqslant n$ і $\frac{\sigma_n}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$.
32.25. Так. *Вказівка.* Оскільки множина раціональних чисел злічення, то існує послідовність (r_n), яка містить усі раціональні числа. **32.26.** Так. *Вказівка.* Розгляньте послідовність, що складається з усіх раціональних чисел. **32.27.** 1) *Вказівка.* $a_n < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}$, $n > 1$; 2) *Вказівка.* Доведіть методом математичної індукції, що $a_n < 3$ для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.
32.28. $a_{201} = \frac{201^2}{1{,}01^{201}}$. *Вказівка.* Розв'язавши нерівність $a_{n+1} > a_n$, де $n \in \mathbb{N}$, отримаємо: $n \leqslant 200$. **32.29.** Ні. *Вказівка.* Використовуючи нерівність Бернуллі $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$, де $n \in \mathbb{N}$, $x > -1$, маємо: $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geqslant 1 + n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$.

33.3. З деякого номера вона стає стаціонарною. **33.5.** Так. **33.6.** $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n < a_{n+1}$. **33.13.** *Вказівка.* Знайдіть n з нерівності $\left|\frac{c}{\sqrt[k]{n^m}}\right| < \varepsilon$. **33.14.** Ні. Наприклад, у будь-якому інтервалі $(0-\varepsilon;\ 0+\varepsilon)$ міститься безліч членів послідовності 0, 1, 0, 1, 0, 1, ... **33.15.** Так. **33.16.** 1) Так, 2) так; 3) ні. **33.17.** Так. **33.18.** Послідовність залишиться збіжною; границя не зміниться. **33.20.** *Вказівка.* Розгляньте нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$ для $\varepsilon < 0$. **33.21.** Ті послідовності, які, починаючи з деякого місця, стають стаціонарними. **33.22.** Так. **33.23.** Ні. **33.24.** *Вказівка.* Скористайтесь означенням границі послідовності. **33.25.** Так. **33.26.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад послідовність, задану формулою $a_n = \pi n$. **33.27.** Так. **33.30.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, $x_n = (-1)^n$. **33.31.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, $x_n = (-1)^n$. **33.32.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, $x_n = -n$. **33.33.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, $x_n = n$. **33.34.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте послідовність, у якої $x_{p_k} = 1$, де (p_k) — послідовність простих чисел, а решта членів $x_n = 0$.

34.1. 1) 2; 2) 1; 3) 0. **34.2.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0. **34.3.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -3; 3) $\frac{4}{9}$. **34.4.** 1) -2; 2) 0; 3) $-\frac{1}{3}$. **34.5.** 1) $-\frac{1}{4}$; 2) $\frac{3}{5}$; 3) 0,1. **34.6.** 1) 1; 2) 3. **34.9.** Рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}_{n \text{ доданків}} = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\ldots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}_{n \text{ доданків}}$ помилкова, оскільки теорему про границю суми можна використовувати для скінченної (фіксованої) кількості послідовностей. **34.10.** 1) *Вказівка.* Скористайтеся теоремою про границю добутку. **34.11.** 1) 4; 2) 2. **34.12.** 1) 6; 2) $\frac{1}{7}$. **34.13.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, послідовність (a_n) із загальним членом $a_n = (-1)^n$. **34.14.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, послідовність (x_n), задану формулами: $x_{2i} = 2$, $x_{2i-1} = 3$, $i \in \mathbb{N}$. **34.15.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, послідовність (x_n), задану формулою $x_n = n$. **34.16.** Ні. *Вказівка.* Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = x$ і $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 + 4x_n + 3 = x^2 + 4x + 3$. Маємо рівняння $x = x^2 + 4x + 3$, яке не має розв'язків. **34.17.** Так. *Вказівка.* $x_n = S_n - S_{n-1}$. **34.19.** 1) 1. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}$; 2) $\frac{1}{3}$. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; 3) 1. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $k \cdot k! = (k+1)! - k!$. **34.20.** 1) 1. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$; 2) $\frac{2}{3}$.

Вказівка. Скористайтеся рівностями $k^3-1=(k-1)(k^2+k+1)$, $(k+1)^3+1=$ $=(k+2)((k+1)^2-(k+1)+1)=(k+2)(k^2+k+1)$; 3) $\frac{1}{4}$. *Вказівка*. Скористайтеся рівністю $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. **34.21.** *Вказівка*. При $|x|>1$ $f(x)=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x^{2n}}+1\right)}=\frac{x}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}+\lim\limits_{n\to\infty}1}=\frac{x}{0+1}$. Тому $f(x)=x$ при $|x|>1$. Розглядаючи інші випадки, маємо: $f(x)=0$ при $|x|<1$, $f(1)=\frac{1}{2}$, $f(-1)=-\frac{1}{2}$. **34.22.** 1) Розбіжна. *Вказівка*. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\sin 6n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sin 6(n+1)=a$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\sin 6(n-1)=a$. Тоді ліва частина рівності $\sin 6(n+1)+\sin 6(n-1)=2\sin 6n\cdot\cos 6$ прямує до $2a$, а права — до $2a\cos 6$. Отже, $a=0$. З рівності $\sin 6(n+1)-\sin 6(n-1)=2\sin 6\cdot\cos 6n$ знаходимо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\cos 6n=0$. Але тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos^2 6n+\sin^2 6n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^2 6n+\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2 6n=0$; 2) розбіжна. *Вказівка*. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-1})=a-a=0$. **34.23.** Ні.

35.1. 2) *Вказівка*. Скористайтеся теоремою про двох конвоїрів і нерівностями $0\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^3+4}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^3}}=\frac{1}{\sqrt{n}}$; 5) скористайтеся нерівностями $0\leqslant\frac{n^2+2n-1}{3n^3+n-2}\leqslant$ $\leqslant\frac{n^2+2n^2}{3n^3+n-2}\leqslant\frac{n^2+2n^2}{n^3}\leqslant\frac{3}{n}$. **35.2.** 2) *Вказівка*. Скористайтеся нерівностями $\frac{-1}{\sqrt{n}}\leqslant\frac{-1}{\sqrt{n}+2\sqrt{n-1}}\leqslant 0$. **35.3.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. *Вказівка*. Поділіть чисельник і знаменник дробу на $\sqrt{n}$; 2) 1. **35.4.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. **35.5.** 1) 1; 2) 3; 5) 1. **35.6.** 3) 2. **35.7.** 1) $\frac{1}{n}$; 2) $-\frac{1}{n+1}$; 3) $-\frac{10}{9n+3}$; 4) $\frac{(-1)^n-1}{n^2+1}$. **35.8.** 1) $\frac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $\frac{1}{n}$; 3) $-\frac{(-1)^n}{n^2+1}$; 4) $-\frac{6}{n+3}$. **35.9.** 1) Так; 2) ні. **35.10.** 2) Ні. *Вказівка*. При $n\geqslant 64$ мають місце нерівності: $|x_n|=\sqrt[3]{n}\cdot\left(\sqrt[6]{n}-1\right)\geqslant\sqrt[3]{n}$. Тому (x_n) — необмежена послідовність. **35.11.** 3) Ні. *Вказівка*. При парних значеннях n маємо, що $x_n=n$. **35.12.** 0. *Вказівка*. Скористайтеся рівністю $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. **35.13.** 0. **35.14.** $-\frac{1}{2}$. **35.15.** $-\frac{3}{2}$. **35.16.** *Вказівка*. Скористайтеся рівністю $nq^n=\frac{n}{\left(\frac{1}{q}\right)^n}$, де $\left|\frac{1}{q}\right|>1$, $q\neq 0$. **35.17.** *Вказівка*. Починаючи з деякого номера n_0, виконуються нерівності $1 \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{n}$. **35.18.** 1) 0. *Вказівка*. Скористайтеся теоремою про двох конвоїрів і нерівностями $0 \leqslant \frac{\sqrt{n}}{5^n} \leqslant \frac{n}{5^n}$. Інший спосіб розв'язування може спиратися на теорему 35.5 і рівність $x_n = \sqrt{\frac{n}{25^n}}$; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **35.19.** 3) *Вказівка*. Маємо: $x_n = \frac{n}{\left(\sqrt[6]{\frac{5}{3}}\right)^n}$. **35.20.** Ні. *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, послідовність 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, ... **35.21.** 1) 4; 2) 0; 3) 1; 4) 1. *Вказівка*. Скористайтеся співвідношеннями $1 \leqslant$ $\leqslant \sqrt[n^2]{1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + n^{n-1}} \leqslant \sqrt[n^2]{\underbrace{n^{n-1} + n^{n-1} + \ldots + n^{n-1}}_{n \text{ доданків}}} = \sqrt[n^2]{n \cdot n^{n-1}} = \sqrt[n^2]{n^n} = \sqrt[n]{n}$; 5) 0. *Вказівка*. Скористайтеся співвідношеннями $\frac{5^n}{n!} = \frac{5^5}{5!} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{n} \leqslant \frac{5^5}{5!} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}$, де $n \geqslant 5$. **35.22.** 1) 5; 2) 0; 3) 7; 4) 1; 5) 0. *Вказівка*. Скористайтеся співвідношеннями $0 \leqslant \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$. **35.23.** *Вказівка*. При $|x| \geqslant 1$ виконуються нерівності $|x| \leqslant \sqrt[2n]{1 + x^{2n}} \leqslant \sqrt[2n]{2x^{2n}} = |x| \cdot \sqrt[2n]{2}$. Тому $f(x) = |x|$ при $|x| \geqslant 1$. Розглядаючи випадок $|x| < 1$, отримаємо: $f(x) = 1$. **35.24.** 1. *Вказівка*. Мають місце нерівності $x_n \leqslant \frac{n}{\sqrt[n]{n^n + 1}} < 1$ і $x_n \geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{n^n + n}} \geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{n^n + n^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$. Далі скористайтеся теоремою про двох конвоїрів. **35.25.** 0. *Вказівка*. $x_n \leqslant \frac{n \cdot (2n-1)^5}{n^7} \leqslant \frac{n \cdot (2n)^5}{n^7} = \frac{32}{n}$. **35.26.** *Вказівка*. Нехай $n = 2^k$. Згрупуємо доданки наступним чином: $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^k}\right)$. Сума дробів кожної дужки більша за $\frac{1}{2}$, наприклад, $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} +$ $+ \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Тому $x_n > \frac{k}{2}$. Отже, потрібна нерівність досягається, наприклад, при $k = 200$, тобто при $n = 2^{200}$.

36.1. 1) Ні; 2) так. **36.2.** Так. **36.3.** Так. **36.4.** Ні. *Вказівка*. Якщо кожний з відрізків $[a_k; b_k]$ містить точки x і y $(x < y)$, то кожний з відрізків $[a_k; b_k]$ містить відрізок $[x; y]$. **36.5.** Ні. *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, послідовність $(0;1) \supset \left(0; \frac{1}{2}\right) \supset \left(0; \frac{1}{3}\right) \supset \ldots$. **36.8.** 1) *Вказівка*. Для доведення обмеженості послідовності (a_n) скористайтеся нерівністю $\frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}$;

2) *Вказівка*. Доведіть, що $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^n}$ при $n \geqslant 4$; 4) *Вказівка*. Доведіть, що $a_n > a_{n+1}$. **36.9.** 1) *Вказівка*. Скористайтеся нерівністю $\frac{1}{3^n - 2} \leqslant \frac{1}{3^{n-1}}$; 3) *Вказівка*. Скористайтеся нерівністю $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} \leqslant \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-2)^2} + \frac{1}{(2n-1)^2}$. **36.10.** $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$. **36.11.** $\frac{3+\sqrt{13}}{2}$. **36.12.** $x_{n+1} = \frac{n+1}{na} x_n$. **36.13.** $x_{n+1} = \frac{a}{n+1} x_n$. **36.14.** Ні. *Вказівка*. Послідовність (a_n) є зростаючою. Якщо (a_n) — обмежена послідовність, то за теоремою Вейєрштрасса існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Переходячи в рекурентній формулі до границі, маємо рівняння $a = a + \frac{1}{a^2}$, яке не має розв'язків. **36.15.** Ні. *Вказівка*. Маємо: $a_{n+1} = 2a_n + \frac{3}{n + a_n}$, $a_n \geqslant 0$. Тому послідовність (a_n) є зростаючою. Якщо (a_n) — обмежена послідовність, то за теоремою Вейєрштрасса існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Переходячи в рекурентній формулі до границі, маємо рівняння $a = 2a$, звідки $a = 0$. Але границя зростаючої послідовності невід'ємних чисел не може дорівнювати нулю. **36.16.** Ні. **36.17.** *Вказівка*. Нехай $x_n \in [a; b]$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Послідовно розбиваючи побудовані відрізки навпіл, отримайте послідовність вкладених відрізків $[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \ldots$, кожний з яких містить нескінченну кількість членів послідовності (x_n). **36.18.** *Вказівка*. Використовуючи метод математичної індукції, неважко показати, що $a_n \in (0; 1)$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Послідовність (b_n) — зростаюча. Оскільки $a_n^2 = a_n - a_{n+1}$, то $b_n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \ldots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1} \leqslant a_1$. Отже, (b_n) — обмежена послідовність. За теоремою Вейєрштрасса існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant a_1 < 1$. **36.19.** *Вказівка*. Використовуючи нерівність Коші, покажіть, що $0 < a_n \leqslant b_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Далі доведіть, що $a_n \leqslant a_{n+1}$, $b_{n+1} \leqslant b_n$. Звідси $a_1 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_1$. Отже, (a_n), (b_n) — монотонні та обмежені послідовності. За теоремою Вейєрштрасса існують границі $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Переходячи в обох частинах рівності $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ до границі при $n \to \infty$, маємо: $b = \frac{a+b}{2}$. Тому $a = b$. **36.20.** *Вказівка*. Доведіть нерівності $\sqrt[n+1]{n} \leqslant 2$, $\sqrt[k]{k+1} \leqslant 2$ і скористайтеся ними. **36.22.** 1) $\sqrt[3]{e}$; 2) e^5; 3) $\frac{1}{e}$. **36.23.** 1. *Вказівка*. З нерівностей $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$, де $n > 1$,

випливає, що $1 < n\left(\sqrt[n]{e}-1\right) < \frac{n}{n-1}$. **36.24.** *Вказівка.* $e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{n} < \frac{3}{n}$. **36.25.** *Вказівка.* Доведіть, що $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{ne^{\frac{1}{n+1}}}{n+1} < 1$. Далі скористайтеся теоремою Вейєрштрасса. **36.26.** $\frac{1}{e}$. *Вказівка.* Скористайтеся методом математичної індукції.

37.5. 2) $\frac{5}{4}$; 3) 6; 4) $-\frac{1}{5}$. **37.6.** 3) −4; 4) $-\frac{1}{2}$. **37.7.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \neq 0, \\ 1, \text{ якщо } x = 0. \end{cases}$ **37.10.** 1) *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = -3$. **37.12.** 1) 2; 2) 1. **37.13.** 1) 3; 2) 2. **37.18.** *Вказівка.* Розгляньте дві послідовності: раціональних та ірраціональних чисел, кожна з яких збігається до числа x_0. **37.21.** 1) Так; 2) так. **37.22.** 1. *Вказівка.* Нехай (x_n) — довільна збіжна до нуля послідовність, де $x_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Покладемо $t_n = \frac{x_n}{2}$. Тоді послідовність (t_n) також збігається до нуля і $t_n \neq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. З умови маємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) = 1$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\frac{x_n}{2}\right) = 1$. **37.23.** 1. **37.24.** Існує. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \begin{cases} \pi, \text{ якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ **37.25.** Ні. **37.26.** Так. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію f таку, що $D(f) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$ і $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^n}$, де $n \in \mathbb{N}$. **37.27.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію, задану таким чином: $f(x) = 1$, якщо $x = \frac{1}{\sqrt{p}}$, де p — просте число, і $f(x) = 0$ в інших випадках. Доведемо, що серед членів послідовності (y_n) не може бути більше однієї одиниці. Якщо $x = 0$, то це твердження очевидне. Якщо при $x \neq 0$ припустити існування двох членів $f\left(\frac{x}{n}\right)$, $f\left(\frac{x}{m}\right)$, рівних 1, то $\frac{x}{n} = \frac{1}{\sqrt{p}}$ і $\frac{x}{m} = \frac{1}{\sqrt{q}}$, де p, q — прості числа. Звідси $\frac{n}{m} = \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$. Отримали суперечність, оскільки $\frac{n}{m}$ — раціональне число, а $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}$ — ірраціональне.

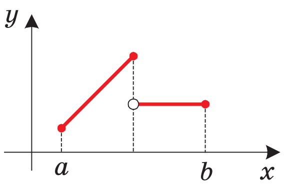
38.2. 1) 10; 2) 2; 3) −22; 4) 1,5; 5) 1; 6) 28. **38.3.** 1) 4; 2) 0,75; 3) 16; 4) 5. **38.4.** 1) 0,5; 2) 1; 3) 6. *Вказівка.* Розкрийте дужки у виразі $(1+x)^4$;

4) $\frac{5}{3}$. **38.5.** 1) -1; 2) 0,5. **38.6.** 1) $-\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{9}$. **38.7.** 9. **38.8.** $-\frac{1}{7}$. **38.9.** 2. **38.10.** 0. **38.15.** 1) $f(x)=\frac{4-x}{2}$; 2) *Вказівка*. Оберіть функцію g таку, що $g(x)\neq 0$ для всіх $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, причому $\lim\limits_{x\to -2} g(x)=0$. Знайдіть функцію f з рівняння $\frac{2f(x)-3x}{x+f(x)}=2+g(x)$. **38.17.** $\frac{m}{n}$. **38.18.** $\frac{m}{n}$. **38.19.** 1) Ні. *Вказівка*. Якщо функція h має границю в точці x_0, то й функція $g(x)=h(x)-f(x)$ також буде мати границю в точці x_0; 2) так. *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, випадок, коли $g(x)=-f(x)$. **38.20.** 1) Так. *Вказівка*. Розгляньте функцію f таку, що $f(x)=0$ для будь-якого $x\in\mathbb{R}$; 2) так.

39.7. 1) Так; 2) ні. **39.8.** 1) Ні; 2) так. **39.9.** 1) -1; 2) $\frac{1}{4}$; 3) -3. **39.10.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) -2; 3) $\frac{2}{3}$. *Вказівка*. $\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\sqrt[6]{x}+1\right)}{\left(\sqrt[6]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[6]{x}+1\right)}$. **39.11.** 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{16}$; 4) 3. *Вказівка*. $\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}=\frac{\left(\sqrt{6-x}-1\right)\left(\sqrt{6-x}+1\right)\left(3+\sqrt{4+x}\right)}{\left(3-\sqrt{4+x}\right)\left(3+\sqrt{4+x}\right)\left(\sqrt{6-x}+1\right)}$; 5) 4; 6) 3. *Вказівка*. $\frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}=\frac{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}$. **39.12.** 1) 4; 2) $-\frac{1}{56}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) $\frac{1}{144}$. **39.14.** $\frac{5}{3}$. **39.15.** $-\frac{1}{4}$. **39.16.** $a=0$. **39.17.** $a=0$. **39.18.** $a=-1$. *Вказівка*. Границя даної функції в точці $x_0=0$ існує лише при $a=1$ або $a=-1$. Проте при $a=1$ зазначена границя не збігається зі значенням $f(0)$. **39.19.** $a=0$ або $a=-3$. **39.20.** $a=0$ або $a=2$. **39.21.** 1) Ні. *Вказівка*. Якщо функція h є неперервною в точці x_0, то й функція $g(x)=h(x)-f(x)$ також буде неперервною в точці x_0; 2) так. *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, випадок, коли $g(x)=-f(x)$. **39.22.** 1) Так. *Вказівка*. Розгляньте функцію f таку, що $f(x)=0$ для всіх $x\in\mathbb{R}$; 2) так. **39.23.** *Вказівка*. Скористайтеся лемою 39.1. **39.25.** $f(x)=x^2$ для всіх $x\in\mathbb{R}$. *Вказівка*. Нехай $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ і (x_n) — збіжна до x_0 послідовність раціональних чисел. Тоді $f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=$ $=\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2=x_0^2$. **39.26.** $(-\infty;+\infty)$. *Вказівка*. Розгляньте функцію $y=f(x)-g(x)$. **39.28.** Так. *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, функцію $f(x)=$ $=\begin{cases} x, & \text{якщо } x\in\mathbb{Q}\setminus\{0\},\\ -x, & \text{якщо } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\\ 1, & \text{якщо } x=0.\end{cases}$ **39.30.** $f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{якщо } x\in\mathbb{Q},\\ 1, & \text{якщо } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$ **39.31.** $f(x)=c$, де c — довільна константа. *Вказівка*. При заміні x на $\frac{x}{2}$ рівність $f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$ перетвориться на рівність $f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{4}\right)$. Тоді $f(x)=f\left(\frac{x}{4}\right)$ для будь-якого

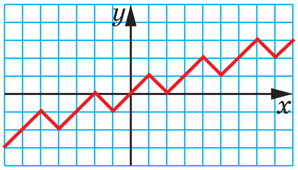
$x \in \mathbb{R}$. Скориставшись методом математичної індукції, можна довести, що $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ і всіх $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{x}{2^n} = 0$ і функція f неперервна в точці $x_0 = 0$, то $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(0)$. Звідси $f(x) = f(0) = c$, де c — константа. Зрозуміло, що будь-яка така функція задовольняє умову задачі. **39.32.** $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ -\frac{1}{x}, & \text{якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ **39.33.** $f(x) = c$, де c — довільна константа. *Вказівка.* Доведіть, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x) = f\left(\frac{x+1}{2^n} - 1\right)$. **39.34.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ 1 + x, & \text{якщо } x < -1, \end{cases}$ і обернену до неї функцію g. **39.35.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\max\{a; b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$, $\min\{a; b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}$. **39.36.** 0. *Вказівка.* Нехай $\sin x_1 \geqslant 0$ (випадок $\sin x_1 < 0$ можна розглянути аналогічно). Доведіть, що члени послідовності (x_n) задовольняють нерівності $0 \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n$ для всіх $n > 1$. Тоді за теоремою Вейєрштрасса існує границя $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Переходячи до границі в рівності $x_{n+1} = \sin x_n$ і використовуючи неперервність функції $y = \sin x$, отримуємо: $a = \sin a$. Звідси $a = 0$. **39.37.** -1. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $x_n = \cos\left(2\pi\left(\sqrt{n^2 + n} - n\right)\right)$ і $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\sqrt{n^2 + n} - n\right) = \frac{1}{2}$.

40.5. 1) $[1; 3]$; 2) $[-4; -2]$; 3) $[0; \pi]$. **40.6.** 1) $[-5; -3]$; 2) $[2; 4]$; 3) $[0; \pi]$. **40.7.** 1) $\left[0; \frac{1}{6}\right]$; 2) $[0; 1]$. **40.8.** 1) $\left[0; \frac{1}{7}\right]$. *Вказівка.* Скористайтеся нерівністю $\frac{x^2}{4x^4 + 3x^2 + 1} \leqslant \frac{x^2}{2\sqrt{4x^4 \cdot 1} + 3x^2}$; 2) $[0; 2]$. **40.9.** $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. **40.10.** $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$. **40.11.** Ні. *Вказівка.* Маємо: $E(f) = (-5; 3]$. За другою теоремою Вейєрштрасса неперервна на $[0; 1]$ функція має досягати свого найменшого значення. **40.12.** Ні. *Вказівка.* Скориставшись теоремою про проміжне значення, доведіть, що рівняння $f(x) = a$ має корінь при $a = 3$. **40.14.** Ні. *Вказівка.* Див. рисунок. **40.16.** *Вказівка.* Покажіть, що для будь-якого $M > 0$ знайдеться $x_0 \in \mathbb{R}$ таке, що $f(x_0) > M$. За x_0 візьміть число виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



До задачі 40.14

40.17. *Вказівка*. Припустимо, що функція f є періодичною з періодом $T > 0$. На відрізку $[0;\ T]$ функція f є неперервною, а тому вона є обмеженою на цьому відрізку. Звідси випливає, що функція f є обмеженою на $\mathbb{R}$. Але її значення при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ утворюють необмежену послідовність. **40.19.** Ні. *Вказівка*. Припустимо, що така функція f існує. З умови випливає, що функція f набуває як додатних, так і від'ємних значень. Тому за першою теоремою Больцано—Коші існує нуль цієї функції. **40.20.** *Вказівка*. Припустимо протилежне. Нехай, наприклад, знайшлися такі числа $x_1 < x_2 < x_3$, що $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$ (інші випадки можна розглянути аналогічно). Тоді за другою теоремою Больцано—Коші на проміжку $[x_1;\ x_2]$ знайдеться точка c така, що $f(c) = f(x_3)$. Оскільки $c \neq x_3$, то функція f не є оборотною. **40.22.** *Вказівка*. Доведіть, що неперервна функція $g(x) = f(x) - x$ зберігає знак на всій області визначення. Якщо, наприклад, $g(x) > 0$, то з нерівності $f(x) > x$ випливає, що $f(f(x)) > f(x) > x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. **40.23.** Ні. *Вказівка*. Якщо така функція f існує, то функція $\varphi\ (x) = f(x) - x$ набуває тільки ірраціональних значень. Нехай α_1 і α_2 — два будь-яких значення функції φ. Припустимо, що ці значення різні ($\alpha_1 < \alpha_2$). Оскільки функція φ є неперервною на $\mathbb{R}$, то вона набуває всіх значень із проміжку $[\alpha_1;\ \alpha_2]$, а отже, серед її значень є раціональні числа. Це суперечить описаній вище властивості функції φ. Отже, $\alpha_1 = \alpha_2$. **40.24.** *Вказівка*. При $x = 3$ отримуємо: $f(f(3)) \cdot f(3) = 1$. Звідси $f\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = 1$; $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3$. Оскільки функція f є неперервною на відрізку $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$, то вона набуває всіх значень з відрізку $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$. Тоді існує таке $x_0 \in \mathbb{R}$, що $f(x_0) = 2$. Маємо: $f(f(x_0)) \cdot f(x_0) = 1$. Звідси $f(2) \cdot 2 = 1$; $f(2) = \frac{1}{2}$. **40.25.** 1) Ні. *Вказівка*. Розглянемо відрізок $[a;\ b]$ такий, що $f(a) = f(b)$. Позначимо $A = f(a) = f(b)$. Щонайменше одне із чисел $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ або $\min\limits_{[a;b]} f(x)$ не дорівнює числу A. Нехай, наприклад, $\max\limits_{[a;b]} f(x) \neq A$ і $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_1)$, де $x_1 \in (a; b)$. Далі розгляньте точку x_2 таку, що $f(x_1) = f(x_2)$; 2) так. *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \begin{cases} |\,x\,|, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}, \\ x - 1, \text{ якщо } x \in \mathbb{N}; \end{cases}$ 3) так. *Вказівка*. Див. рисунок.



До задачі 40.25 (3)

40.26. *Вказівка*. Розгляньте функцію $g(x) = f\left(x + \frac{1}{3}\right) - f(x)$. Ця функція визначена та неперервна на відрізку $\left[0; \frac{2}{3}\right]$. Маємо, що $g\left(\frac{2}{3}\right) + g\left(\frac{1}{3}\right) + g(0) =$
$= \left(f(1) - f\left(\frac{2}{3}\right)\right) + \left(f\left(\frac{2}{3}\right) - f\left(\frac{1}{3}\right)\right) + \left(f\left(\frac{1}{3}\right) - f(0)\right) = f(1) - f(0) = 0$. Це означає, що

серед чисел $g\left(\frac{2}{3}\right)$, $g\left(\frac{1}{3}\right)$, $g(0)$ є принаймні одне невід'ємне та принаймні одне недодатне число. Тому за першою теоремою Больцано—Коші існує така точка x_0, що $g(x_0)=0$. Тоді відрізок, кінці якого мають координати $(x_0; f(x_0))$ і $\left(x_0+\frac{1}{3}; f\left(x_0+\frac{1}{3}\right)\right)$, паралельний осі абсцис і має довжину $\frac{1}{3}$.

41.1. 1) 2; 2) 9; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{8}$. **41.2.** 1) $\frac{5}{6}$; 2) 8; 3) $\frac{5}{4}$; 4) $\frac{1}{81}$. **41.3.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) 8; 3) 4; 4) -10; 5) 84; 6) $\frac{4}{3}$. **41.4.** 1) $\frac{4}{25}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) $-\frac{9}{10}$; 4) $-\frac{99}{8}$; 5) $\frac{5}{6}$; 6) $-\frac{4}{5}$. **41.5.** sin 1. **41.6.** Границі не існує. **41.7.** 1. **41.8.** 0. **41.11.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{7}{3}$; 3) 2. **41.12.** 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{4}{3}$; 3) $\frac{4}{3}$. **41.13.** 1) -1; 2) $\frac{1}{50}$; 3) $\frac{2}{\pi}$. **41.14.** 1) -2; 2) 1; 3) $-\frac{4}{\pi}$. **41.15.** 1) $a=\frac{2}{3}$ або $a=-\frac{2}{3}$; 2) $a=-1$ або $a=\frac{1}{2}$. **41.16.** $a=2$ або $a=-2$. **41.17.** 1. **41.18.** 0. **41.19.** 0. *Вказівка.* Скористайтеся лемою 41.1. **41.20.** π. *Вказівка.* $n\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right)=n\sin\left(2\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right)=n\cdot\dfrac{\sin\left(2\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right)}{2\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)}\times$

$\times 2\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=n\cdot\dfrac{\sin\left(2\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\right)}{2\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)}\cdot 2\pi\cdot\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$. **41.21.** $\frac{2}{\pi}$. *Вказівка.*

Позначимо $a_1=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$. Тоді $a_2=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{4}+1}=\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}+\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}=\dfrac{2\cos^2\frac{\pi}{8}}{2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}}=$

$=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}$. Використовуючи метод математичної індукції, можна довести, що $a_n=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2^{n+1}}$.

42.3. 4) 4; 5) 3; 6) 2. **42.4.** 4) 2; 5) 0,5; 6) $\frac{1}{3}$. **42.5.** 1) $y=\frac{3}{4}$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$; 2) $y=\frac{1}{2}$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$; 3) $y=0$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$. **42.6.** 1) $y=-\frac{1}{3}$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$; 2) $y=1$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$; 3) $y=0$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$. **42.11.** $\frac{1}{2}$. *Вказівка.* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x}$. **42.12.** 0. **42.14.** 1) $y=x$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$; 2) $y=x+4$ при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$; 3) $y=-x$ при

$x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$; 4) $y = 1$ при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$. **42.15.** 1) $y = x$ при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$; 2) $y = x - 1$ при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$; 3) $y = x$ при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$. **42.16.** Так. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. **42.17.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \sqrt{x}$. **42.18.** $y = -\frac{1}{3}$ при $x \to -\infty$ і $y = \frac{1}{3}$ при $x \to +\infty$. *Вказівка.* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{3x + 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{3x + 2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}{3 + \frac{2}{x}} = -\frac{1}{3}$. **42.19.** $y = 1$ при $x \to -\infty$ і $y = -1$ при $x \to +\infty$. **42.20.** 1) $y = -\frac{1}{2}$ при $x \to -\infty$; 2) $y = -\frac{5}{2}$ при $x \to -\infty$ і $y = \frac{5}{2}$ при $x \to +\infty$. **42.21.** 1) $y = \frac{1}{2}$ при $x \to +\infty$; 2) $y = 1$ при $x \to -\infty$ і $y = -1$ при $x \to +\infty$. **42.22.** $y = x - \frac{1}{2}$ при $x \to -\infty$ і $y = 3x + \frac{1}{2}$ при $x \to +\infty$. **42.23.** $y = -2x$ при $x \to -\infty$ і $y = 0$ при $x \to +\infty$. **42.24.** Ні. *Вказівка.* Василь подав функцію f у вигляді $f(x) = x \cdot g(x)$, де $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 1$. Але з рівності $f(x) = x \cdot g(x)$, узагалі кажучи, не випливає, що $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$. Тому у Василя немає підстав стверджувати, що пряма $y = x$ є похилою асимптотою графіка функції f при $x \to +\infty$. Насправді графік функції f має похилу асимптоту $y = x + \frac{1}{2}$ (перевірте це самостійно). **42.25.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ -\frac{1}{x}, & \text{якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ або функцію $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$ і точку $x_0 = 0$. **42.26.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{x}, & \text{якщо } x > 1 \text{ і } x \notin \mathbb{N}, \end{cases}$ і функцію g, обернену до функції f. **42.27.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію f таку, що $f\left(\sqrt{p}\right) = 1$, де p — просте число, $f(x) = 0$ при всіх інших значеннях x. Тоді легко довести, що при будь-якому $x_0 > 0$ серед членів послідовності $(x_0 n)$ числа виду $\sqrt{p}$, де p — просте, зустрінуться не більше одного разу. **42.28.** *Вказівка.* Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[4]{ax^2 + bx + c}$. Тоді

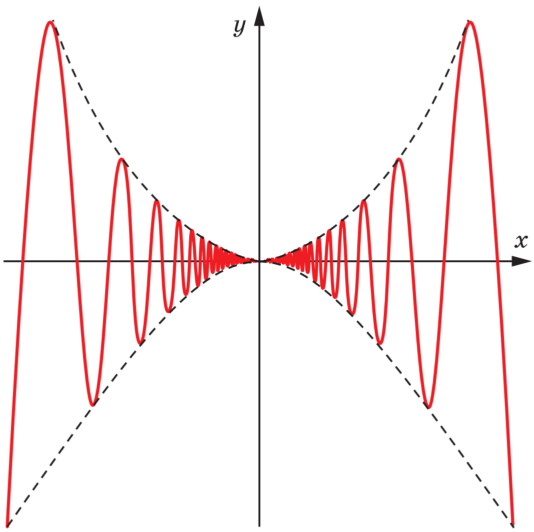
$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=0.$ Це означає, що функція f набуває однакових значень при всіх натуральних значеннях $x=n$, де $n\geqslant n_0$.

43.7. 8 м/с. **43.8.** 1) 20 м/с; 2) 10 м/с. **43.14.** 1) 2,6; 2) 2. **43.15.** 1) 7; 2) 12.

44.6. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$. **44.7.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **44.8.** 1) 13,5; 2) $\frac{13}{4}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{176}{3}$. **44.9.** 1) 5; 2) $\frac{3}{16}$. **44.10.** 1) $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$; 2) $f'(x)=-2x$. **44.11.** 1) $f'(x)=\frac{2}{x^3}$; 2) $f'(x)=2x+3$. **44.12.** 1) 3; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) 1. **44.13.** 1) -32; 2) $\frac{1}{27}$; 3) $-\frac{1}{27}$; 4) 1. **44.22.** 1) -1; 1; 2) 4; 3) 2; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **44.23.** 1) -2; 2) -27; 27; 3) -3; 3; 4) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **44.24.** 1. Величина $s'\left(\frac{1}{2}\right)=1$ задає миттєву швидкість матеріальної точки в момент часу $t_0=\frac{1}{2}$ с. **44.25.** 12. **44.36.** 0. **44.39.** *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x)=\begin{cases}x^2(x-1)^2, & \text{якщо } x\in\mathbb{Q},\\ -x^2(x-1)^2, & \text{якщо } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$ **44.40.** 1) $f'(x_0)$. *Вказівка.* За означенням Гейне, якщо $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_0+x_n)-f(x_0)}{x_n}=f'(x_0)$. Далі розгляньте таку послідовність (x_n), що $x_n=\frac{1}{n}$; 2) $f'(x_0)$. **44.41.** $2f'(x_0)$. **44.42.** *Вказівка.* Скористайтеся лемою 41.1.

45.12. $\frac{17}{9}$ м/с. **45.13.** 105 м/с. **45.14.** 1) $y'=\frac{8x^2+3x+2}{2\sqrt{2x^2+x+1}}$; 2) $y'=\cos x\cos 2x-2\sin x\sin 2x$; 3) $y'=\frac{\sin(2x+5)}{\cos^2 x}+2\operatorname{tg}x\cos(2x+5)$; 4) $y'=\frac{3(1-x)\sin 3x-\cos 3x}{(x-1)^2}$; 5) $y'=(x+1)^2(x-2)^3(7x-2)$; 6) $y'=-\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}$. **45.15.** 1) $y'=\frac{30}{x^7}-\frac{1}{x^2}-\frac{12}{x^3}$; 2) $y'=\frac{2x^2+3}{\sqrt{x^2+3}}$; 3) $y'=2\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x$; 4) $y'=(x-3)^3(x+2)^4\times(9x-7)$; 5) $y'=\frac{2\sin\frac{x}{4}-\frac{1}{4}(2x-3)\cos\frac{x}{4}}{\sin^2\frac{x}{4}}$. **45.16.** *Вказівка.* Розв'язання Василя є помилковим, а отримана відповідь — правильна. У точках $x=-1$ і $x=1$ функції $y=\arcsin x$ і $y=\arccos x$ не є диференційовними, тому перехід від виразу $(\arcsin x+\arccos x)'$ до виразу $(\arcsin x)'+(\arccos x)'$ не є коректним. Отримана відповідь є правильною, оскільки $f(x)=\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$

для всіх $x \in D(f)$. Тому $f'(x) = 0$ для всіх $x \in D(f)$. **45.17.** $y' = 0$. **45.18.** 16 кг · м/с. **45.19.** 400 Дж. **45.20.** 7 м. **45.21.** 1) $y' = -6\cos^2 2x \sin 2x$; 2) $y' = \dfrac{\cos\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{4}\right)}{10\sqrt{2 + \sin\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{4}\right)}}$; 3) $y' = 2\cos\frac{x}{3}\left(\sin\frac{x}{3} - 5\right)^5$. **45.22.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 3) 0. **45.23.** 1) $y' = \frac{3x^2}{1 + x^6}$; 2) $y' = \frac{\sqrt{1 - x^2} - 2x\arccos x}{(x^2 - 1)^2}$; 3) $y' = -\frac{2x}{x^4 - 2x^2 + 2}$; 4) $y' = -\frac{2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}}{1 + x^2}$. **45.24.** 1) $y' = 2x\,\mathrm{arcctg}\,x - \frac{x^2}{1 + x^2}$; 2) $y' = -\frac{\sqrt{x - x^2} + 2(2x - 1)\arcsin\sqrt{x}}{2(x^2 - x)^2}$; 3) $y' = 2x\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{x} - \frac{x^2}{x^2 + 1}$; 4) $y' = -\frac{6\,\mathrm{arctg}\,3x}{1 + 9x^2}$. **45.25.** 1) 2; 0; 2) −6; 0. **45.26.** 1) 2; −2; 2) −10; 2. **45.27.** 1) 4; 2) 6; 3) 0; 4) 8. **45.28.** 3) $\frac{9}{2}$. **45.29.** 1. *Вказівка.* Продиференціюйте обидві частини рівності $f^3(x) + x^2 f(x) + 1 = x$. **45.30.** 1. **45.34.** 1) Не диференційовна; 2) може бути як диференційовною, так і не диференційовною. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функції $f(x) = |x|$, $g(x) = -|x|$. **45.35.** 1) Може бути як диференційовною, так і не диференційовною. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функції $f(x) = 0$, $g(x) = |x|$. **45.36.** 1) $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, $x_0 = 0$; 2) $g(x) = x^2$, $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$; 3) $f(x) = |x|$, $g(x) = \begin{cases} -1, \text{ якщо } x < 0, \\ 1, \text{ якщо } x \geqslant 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$. **45.37.** Ні. *Вказівка.* Оскільки функція $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ не є диференційовною в точці $f'(x_0)$, то для обчислення похідної даної функції в точці $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0)$ (зазначимо, що $g(0) = 0$) використовувати теорему про похідну складеної функції не можна. Насправді функція x_0 є диференційовною в точці $x \in D(f)$ і похідна функції x_0 в цій точці дорівнює нулю. **45.38.** $f'(x) = f'(2) = 3$. **45.39.** $f'(x) = \frac{4(\cos x \sin^3 x + x^3)}{3\sqrt[3]{(\sin^4 x + x^4)^2}}$, де $x \neq 0$; $f'(0) = 0$. **45.40.** 10!. *Вказівка.* Запишіть $f(x) = \sin x \cdot g(x)$, де $g(x) = (x + 1)(x + 2) \ldots (x + 10)$. Тоді $f'(x) = \cos x \cdot g(x) + g'(x) \cdot \sin x$. **45.41.** $\frac{798 \cdot 3^{101} + 6}{64}$. *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x) = x^{100} + x^{98} + \ldots + x^2 + 1 = \frac{x^{102} - 1}{x^2 - 1}$. Тоді $S = f'(3)$. **45.42.** $\frac{4^{32} - 616}{25}$. *Вказівка.* Розгляньте функцію $g'(2)$. Тоді $S = 4^{30} \cdot f'\left(\frac{1}{4}\right)$. **45.43.** $P(x) = x^{10}$. *Вказівка.* Легко зрозуміти, що степінь многочлена P дорівнює 10, а степінь многочлена P' дорівнює 9. Продиференціюємо обидві частини рівності $P(P(x))=x^{100}$. Маємо: $P'(P(x))\cdot P'(x)=100x^{99}$. Звідси многочлени $P'(x)$ і $P'(P(x))$ мають вигляд $P'(x)=ax^9$, $P'(P(x))=bx^{90}$, де a і b — деякі сталі. Підставляючи $t=P(x)$ до рівності $P'(t)=at^9$, отримуємо: $P'(P(x))=$ $=a(P(x))^9=bx^{90}$. Звідси $P(x)=cx^{10}$, де c — деяка стала. **45.44.** *Вказівка*. На рисунку зображено графік функції f. Обчисліть похідну функції f і доведіть, що функція f' не має границі в точці $x_0=0$. **45.45.** Ні. *Вказівка*. Доведіть, що для кожної записаної на дошці функції f виконується рівність $f'(1)=0$.



До задачі 45.44

46.1. 1) $y=12x-43$; 2) $y=-4x+4$; 3) $y=\frac{2}{3}x+3$; 4) $y=x$; 5) $y=-1$; 6) $y=$ $=2x-\pi+1$; 7) $y=x+4$; 8) $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$. **46.2.** 1) $y=3x-4$; 2) $y=-x+\frac{\pi}{2}$; 3) $y=$ $=-2{,}5x-1{,}5$; 4) $y=5x-18$. **46.3.** 1) $y=-3x-3$; 2) $y=\frac{\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{2}$. **46.4.** 1) $y=$ $=-5x+2$; 2) $y=\frac{3\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **46.5.** 1) $y=6x-3$; 2) $y=2x-2$, $y=2x+2$. **46.6.** 1) $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$; 2) $y=-3x+9$; $y=3x$. **46.7.** (2; 7). **46.8.** (1; 1), (−1; −1). **46.9.** Дотичні перетинаються. **46.10.** 1) (4; −9); 2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{5}{4}\right)$; 3) $\left(\frac{1}{12};\frac{3}{2}\right)$;

4) (5; 4), (−1; −2). **46.11.** 1) (0; 0); 2) (0; −1), $\left(\frac{4}{3}; -\frac{23}{27}\right)$. **46.14.** 1) $y = -1$, $y = 3$; 2) $y = 1$, $y = -7$. **46.15.** $y = -5$, $y = \frac{17}{3}$. **46.16.** 1) $y = -x - 4$; 2) $y = 3x - 3$; 3) $y = 2x - 8$, $y = 2x + 19$. **46.17.** 1) $y = -7x - 9$; 2) $y = x + \frac{1}{4}$. **46.18.** Ні. **46.19.** Так, $x_0 = 0$. **46.20.** Так, $x_0 = 1$. **46.21.** 8. **46.22.** 2. **46.23.** $\frac{25}{12}$. **46.24.** 12. **46.25.** Ні. *Вказівка*. Подібні міркування можуть привести, наприклад, до висновку, що і пряма $y = -1$ буде дотичною до графіка функції f, оскільки $\lim\limits_{x \to 0}(3x + \sin x) = 0$. З рівності $\lim\limits_{x \to 0}(f(x) - (kx + b)) = 0$, на яку спирається Василь, випливає лише те, що $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = kx_0 + b$. **46.26.** (1,5; −2). *Вказівка*. Скористайтеся тим, що прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли виконується рівність $k_1k_2 = -1$. **46.27.** Ні. **46.28.** $b = c = 2$. **46.29.** $a = 3$, $b = 1$. **46.30.** $y = \frac{1}{4}(x + 2)^2$. **46.31.** $y = -8x + 7$, $y = 64x + 97$. **46.32.** $y = 6x - 2$. **46.33.** $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$. **46.34.** (1; 4). **46.35.** $y = \frac{x+5}{8}$. **46.36.** $y = \frac{x-7}{9}$. **46.37.** Якщо $a < -32$ або $a > 4$, то 2 розв'язки; якщо $a = -32$ або $a = 4$, то 1 розв'язок; якщо $-32 < a < 4$, то розв'язків немає. **46.38.** Якщо $a < 3$, то 1 розв'язок; якщо $a = 3$, то 2 розв'язки; якщо $a > 3$, то 3 розв'язки. **46.39.** $\left(0; \frac{7}{2}\right)$. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що добуток кутових коефіцієнтів перпендикулярних прямих дорівнює −1. **46.40.** (0; −3). **46.41.** Наприклад, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, \text{ якщо } x < 2, \\ -x + 1, \text{ якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$ *Вказівка*. Розгляньте дотичну до графіка функції $y = \frac{1}{x-3}$ в точці $x_0 = 2$. **46.42.** Наприклад, $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}, \text{ якщо } x < 3, \\ \sqrt{3x-5}, \text{ якщо } x \geqslant 3. \end{cases}$ **46.43.** 2. **46.44.** 0. **46.45.** $y = 8x - 20$. *Вказівка*. Запишіть рівняння дотичних до графіків функцій f і g у точках A $(x_1; f(x_1))$ і B $(x_2; g(x_2))$ відповідно, а потім установіть, за яких умов ці дотичні збігаються. **46.46.** $y = 8x + 4$. **46.47.** *Вказівка*. Доведіть, що коли точка A має координати $(x_0; y_0)$, то пряма, яка проходить через точки M $(x_0; 0)$ і N $(0; y_0)$, паралельна шуканій дотичній. **46.48.** *Вказівка*. Доведіть, що коли точка A має координати $(x_0; y_0)$, то шукана дотична проходить через точки $M\left(\frac{x_0}{2}; 0\right)$ і N $(0; -y_0)$. **46.49.** $y = x - 1$. *Вказівка*. Якщо пряма $y = kx + b$ дотикається до графіка многочлена P у точці x_0, то многочлен $P(x) - (kx + b)$ можна подати у вигляді $P(x) - (kx + b) = (x - x_0)^2 Q(x)$, де Q — деякий многочлен. Звідси

випливає, що $f(x)-(kx+b)=(x-x_1)^2(x-x_2)^2$, де x_1, x_2 — точки дотику прямої $y = kx + b$ до графіка многочлена f. Значення k і b можна знайти, прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях многочленів $f(x) - (kx + b)$ і $(x-x_1)^2(x-x_2)^2$. **46.50.** *Вказівка.* Рівняння дотичної до графіка многочлена P у точці з абсцисою x^* має вигляд $y=P'(x^*)(x-x^*)+P(x^*)$. Ця дотична проходить через точку $A(x_0;y_0)$ тоді й тільки тоді, коли $y_0=P'(x^*)(x_0-x^*)+P(x^*)$. Оскільки $Q(t)=P'(t)(x_0-t)+P(t)-y_0$ — ненульовий многочлен n-го степеня, то рівняння $y_0=P'(x^*)(x_0-x^*)+P(x^*)$, де x^* — шукана змінна, має не більше ніж n коренів. **46.51.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f=\begin{cases}2-x, \text{ якщо } x<1,\\ \dfrac{1}{x}, \quad \text{ якщо } x\geqslant 1.\end{cases}$ Зауважимо, що пряма $y = 2 - x$ є дотичною до графіка функції $y=\dfrac{1}{x}$ у точці $x_0=1$. **46.52.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x)=\begin{cases}x, \quad \text{ якщо } 0<x<1,\\ x-2, \text{ якщо } 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ точку A (2; 0) і функцію, обернену до функції f.

47.5. 1) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) $2-\dfrac{2}{\pi}\arccos\dfrac{2}{\pi}$. **47.6.** 1) 2; 2) $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\dfrac{4}{\pi}\arcsin\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}$. **47.17.** *Вказівка.* На проміжку (2; 3) існує така точка c, що $f(c) = 2$. Далі скористайтеся теоремою Ролля для функції f на відрізку $[1; c]$. **47.19.** *Вказівка.* Розгляньте неперервну на $\mathbb{R}$ функцію $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ якщо } x\neq 0,\\ 1, \quad \text{ якщо } x=0.\end{cases}$

47.21. *Вказівка.* Скористайтеся прикладом 1 п. 47. **47.22.** *Вказівка.* Розглянемо многочлен $f(x) = x^n + ax + b$, де $n > 3$. Припустимо, що він має не менше ніж чотири корені. Тоді за прикладом 1 п. 47 функція $y=f'(x)$, тобто функція $y=nx^{n-1}+a$ має не менше трьох нулів. **47.25.** *Вказівка.* Розгляньте функцію $g(x) = f(x)\cos x$. **47.26.** Ні. *Вказівка.* Функція $f(x) = |x|$ не є диференційовною в точці $x_0=0$. Тому застосування теореми Ролля для функції f і відрізка $[-1; 1]$ не є коректним. **47.27.** *Вказівка.* Розглянемо функцію $F(x)=a_0x+\dfrac{a_1x^2}{2}+\dfrac{a_2x^3}{4}+\ldots+\dfrac{a_nx^{n+1}}{n+1}$. Зауважимо, що $F(0) = F(1) = 0$. Тоді за теоремою Ролля існує число $x_0 \in (0; 1)$ таке, що $F'(x_0) = 0$. **47.28.** *Вказівка.* Розгляньте на відрізку $[0; 2\pi]$ функцію $F(x)=\dfrac{a_n\sin nx}{n}+\dfrac{a_{n-1}\sin(n-1)x}{n-1}+\ldots+a_1\sin x$. **47.29.** *Вказівка.* Нехай $k^2<n<(k+1)^2, k\in\mathbb{N}$. Скористайтеся теоремою Лагранжа для функції $f(x)=\sqrt{x}$ на відрізку

$[k^2; n]$. **47.30.** *Вказівка.* Зазначимо, що $x_n \in [0; 1]$. Нехай $x_0 \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ — корінь рівняння $x = \cos x$, тобто $x_0 = \cos x_0$. Доведемо, що $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Оскільки $|x_{n+1} - x_0| = |\cos x_n - \cos x_0|$, то, використовуючи теорему Лагранжа, отримаємо: $|x_{n+1} - x_0| = |\sin c| \cdot |x_n - x_0|$, де $c \in (0; x_n) \subset (0; 1)$. Тому нерівність $|x_{n+1} - x_0| \leqslant \sin 1 \cdot |x_n - x_0|$ має місце для всіх $n \in \mathbb{N}$. Звідси $|x_{n+1} - x_0| \leqslant \leqslant \sin 1 \cdot |x_n - x_0| \leqslant \sin^2 1 \cdot |x_{n-1} - x_0| \leqslant \ldots \leqslant \sin^n 1 \cdot |x_1 - x_0|$. Оскільки $\sin^n 1 \times \times |x_1 - x_0| \to 0$, то $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. **47.31.** *Вказівка.* Розгляньте функцію $g(x) = = \operatorname{arctg} f(x)$ і скористайтеся для неї теоремою Лагранжа на відрізку $[-2; 2]$. **47.32.** *Вказівка.* Нехай $g(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$, $D(g) = [2; 3]$. Оскільки $g(2) = = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 1$, $g(3) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = -\frac{1}{2}$, то неперервна функція g набуває всіх значень від $-\frac{1}{2}$ до 1. Отже, для довільного $a \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$ знайдеться таке число $c \in [2; 3]$, що $g(c) = \frac{f(c) - f(1)}{c - 1} = a$. Якщо скористатися теоремою Лагранжа для функції f на відрізку $[1; c]$, то можна довести існування такого x_0, що $f'(x_0) = a$, де $a \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$. **47.33.** *Вказівка.* Розгляньте функцію $h(x) = \frac{f(3) - f(x)}{3 - x}$, $D(h) = [1; 2]$.

48.1. 1) Зростає на $[-2; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -2]$; 2) зростає на $(-\infty; 0]$ і $[1; +\infty)$, спадає на $[0; 1]$; 3) зростає на $[-1; 7]$, спадає на $(-\infty; -1]$ і $[7; +\infty)$; 4) зростає на $[-1; 0]$ і $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -1]$ і $[0; 1]$; 5) зростає на $\mathbb{R}$; 6) зростає на $[2; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 2]$. **48.2.** 1) Зростає на $(-\infty; 3]$, спадає на $[3; +\infty)$; 2) зростає на $(-\infty; -3]$ і $[1; +\infty)$, спадає на $[-3; 1]$; 3) зростає на $[-2; 0]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -2]$ і $[0; 2]$; 4) зростає на $[-1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -1]$. **48.3.** 1) Зростає на $[0; 1]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$ і $[1; 2]$; 2) зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 1]$; 3) зростає на $(-\infty; -3]$, $[-1; 1]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[-3; -1]$ і $[1; 3]$; 4) зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0)$ і $(0; 1]$; 5) зростає на $(-\infty; -3]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[-3; 0)$ і $(0; 3]$; 6) зростає на $(-\infty; -3]$ і $[-1; +\infty)$, спадає на $[-3; -2)$ і $(-2; -1]$; 7) зростає на $[1; 3)$ і $(3; 5]$, спадає на $(-\infty; 1]$ і $[5; +\infty)$; 8) спадає на $(-\infty; -3)$, $(-3; 3)$ і $(3; +\infty)$. **48.4.** 1) Зростає на $[0; 2]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$ і $[2; 3]$; 2) зростає на $(-\infty; 3]$, спадає на $[3; +\infty)$; 3) спадає на $(-\infty; 5)$ і $(5; +\infty)$; 4) зростає на $(-\infty; -2]$ і $[10; +\infty)$, спадає на $[-2; 4)$ і $(4; 10]$; 5) зростає на $(-\infty; 0)$ і $[2; +\infty)$, спадає на $(0; 2]$; 6) зростає на $(-\infty; -2)$ і $(-2; 0]$, спадає на $[0; 2)$ і $(2; +\infty)$. **48.5.** $(-\infty; x_1]$ і $[x_2; x_3]$. **48.7.** $(-\infty; -3]$ і $[3; +\infty)$. **48.12.** 1) Зростає на $\mathbb{R}$; 2) зростає на $\mathbb{R}$; 3) зростає на проміжках виду

$\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi k; \frac{7\pi}{3}+2\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{2\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

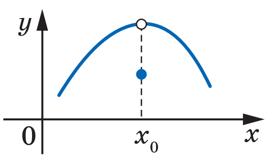
48.13. 1) Спадає на $\mathbb{R}$; 2) зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{7\pi}{4}+2\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$; 3) зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{12}+\pi k; \frac{5\pi}{12}+\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[-\frac{7\pi}{12}+\pi k; \frac{\pi}{12}+\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.
48.14. 1) Зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -4]$; 2) зростає на $[0; 3]$, спадає на $[3; 6]$. **48.15.** Зростає на $[1; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -1]$. **48.16.** 1) $(-\infty;-3)\cup$ $\cup[2;+\infty)$; 2) $(-\infty;-4)\cup[2;5)$. **48.17.** 1) $(0;7)\cup(7;+\infty)$; 2) $[-3;0]\cup(2;+\infty)$.
48.18. Так. **48.19.** Зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$ і $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{3\pi}{4}+\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{4}+\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$. **48.20.** Зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{6}+\pi k; \frac{5\pi}{6}+\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{6}+\pi k; \pi k\right)$ і $\left(\pi k; \frac{\pi}{6}+\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$. **48.21.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $[12; +\infty)$; 3) $[0; +\infty)$; 4) $\left[-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right]$.
48.22. 1) $(-\infty; 0]$; 2) $(-\infty; -6]$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $[-4; 4]$. **48.23.** 0. **48.24.** -1.
48.25. $(1; 1)$. **48.26.** $(4; 4)$. **48.27.** $x>1$. **48.28.** $x<1$. **48.38.** $[12; 14]$.
48.39. $\left[-\frac{14}{3}; -3\right]$. **48.40.** $b\leqslant -3-\sqrt{3}$ або $b\geqslant\sqrt{3}-1$. *Вказівка*. Маємо: $f'(x)=2\cos 2x+8(b+2)\sin x-(4b^2+16b+6)$. Розв'яжемо таку нерівність: $2(1-2\sin^2 x)+8(b+2)\sin x-(4b^2+16b+6)\leqslant 0$. Після очевидних перетворень отримуємо: $\left(\sin x-\left(b+2+\sqrt{3}\right)\right)\cdot\left(\sin x-\left(b+2-\sqrt{3}\right)\right)\geqslant 0$. Тепер зрозуміло, що шукані значення b — розв'язки сукупності $\left[\begin{array}{l} b+2+\sqrt{3}\leqslant -1, \\ b+2-\sqrt{3}\geqslant 1. \end{array}\right.$ **48.41.** $a<-2-\sqrt{5}$ або $a>\sqrt{5}$. **48.42.** $a\geqslant 1$. **48.43.** $a\geqslant 1$. **48.44.** *Вказівка*. Скористайтеся результатом задачі 48.34. **48.45.** $\begin{cases} 0, \text{ якщо } 0<x\leqslant 1, \\ \pi, \text{ якщо } -1\leqslant x<0. \end{cases}$ **48.46.** $\begin{cases} -\frac{3\pi}{4}, \text{ якщо } x<-1, \\ \frac{\pi}{4}, \quad \text{ якщо } x>-1. \end{cases}$

48.47. $\frac{\pi}{100}\sin\frac{\pi}{101}>\frac{\pi}{101}\sin\frac{\pi}{100}$. *Вказівка*. Розгляньте функцію $f(x)=\frac{\sin x}{x}$.
48.49. f — будь-яка стала функція. *Вказівка*. З умови задачі випливає нерівність $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|\leqslant|x-y|$, тобто $-|x-y|\leqslant\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\leqslant|x-y|$. Зафіксуємо значення y і покладемо $x=y+\Delta y$. Маємо: $-|\Delta y|\leqslant\frac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y}\leqslant|\Delta y|$.

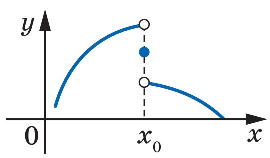
Оскільки $\lim\limits_{\Delta y \to 0} |\Delta y| = 0,$ то існує границя $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y} = 0,$ тобто $f'(y) = 0$ для всіх $y \in \mathbb{R}$. Звідси f — стала функція. За допомогою перевірки переконуємося, що кожна функція, яка є константою, задовольняє умову задачі. **48.50.** $f(x) = kx$, де k — будь-яка стала. *Вказівка.* Розглянемо ліву і праву частини рівності $f(x) + f(y) = f(x + y)$ як функції змінної x (зафіксуємо значення y). Обчисливши похідні цих функцій, отримаємо, що для всіх x і y виконується рівність $f'(x) = f'(x + y)$. Поклавши в останній рівності $y = -x$, маємо, що $f'(x) = f'(0)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, тобто $f'(x)$ — функція-константа. Оскільки $f'(x) = k$ для всіх x, то неважко показати, що $f(x) = kx + b$, де k і b — деякі сталі. Справді, якщо розглянути допоміжну функцію $g(x) = f(x) - kx$, то отримаємо, що $g'(x) = (f(x) - kx)' = f'(x) - k = 0.$ Звідси $g(x) = b$ для всіх x. За допомогою перевірки переконуємося, що серед функцій виду $f(x) = kx + b$ умову задачі задовольняють усі функції виду $f(x) = kx$. **48.51.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, функцію $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \cos \dfrac{1}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$ і точку $x_0 = 0$. Доведіть, що $f'(0) = 1$. Припустимо, що існує такий окіл точки $x_0 = 0$, у якому функція f зростає. Тому $f'(x) \geqslant 0$ для всіх x із цього околу. Далі покажіть, що в точках виду $x = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, k \in \mathbb{Z}$, функція $y = f'(x)$ набуває від'ємних значень.

49.7. Жодної. **49.8.** 1) $x_{\min} = 0$; 2) $x_{\min} = 3$; 3) $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = 2$; 4) $x_{\min} = -2$, $x_{\min} = 2$, $x_{\max} = 0$; 5) $x_{\min} = 5$, $x_{\max} = -1$; 6) $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -1$, $x_{\max} = 1$. **49.9.** 1) $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = -1$; 2) $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = 2$; 3) $x_{\max} = 2$; 4) $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = -7$; 5) $x_{\min} = \dfrac{3}{2}$; 6) $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -\dfrac{1}{4}$, $x_{\max} = 1$. **49.10.** 1) Зростає на $[6; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 6]$, $x_{\min} = 6$; 2) зростає на $\left(-\infty; \dfrac{8}{5}\right]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $\left[\dfrac{8}{5}; 2\right]$, $x_{\min} = 2$, $x_{\max} = \dfrac{8}{5}$; 3) зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$. **49.11.** 1) Зростає на $[0; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$; 2) зростає на $(-\infty; -4]$ і $[0; +\infty)$, спадає на $[-4; 0]$, $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -4$. **49.14.** 1) Зростає на $(-\infty; 0)$ і $[2; +\infty)$, спадає на $(0; 2]$, $x_{\min} = 2$; 2) зростає на $(-\infty; 1]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[1; 2)$ і $(2; 3]$, $x_{\min} = 3$, $x_{\max} = 1$; 3) зростає на $(-\infty; 0]$, спадає на $[0; +\infty)$, $x_{\max} = 0$; 4) зростає на $\left[-\sqrt{6}; 0\right)$ і $\left[\sqrt{6}; +\infty\right)$, спадає на $\left(-\infty; -\sqrt{6}\right]$ і $\left(0; \sqrt{6}\right]$, $x_{\min} = -\sqrt{6}$, $x_{\min} = \sqrt{6}$; 5) зростає на $(0; 2]$, спадає на $(-\infty; 0)$ і $[2; +\infty)$, $x_{\max} = 2$; 6) зростає на $(3; +\infty)$, спадає на $(-\infty; 3)$, точок екстремуму немає; 7) зростає на $(-\infty; -4)$ і $(-4; 0]$, спадає на $[0; 4)$ і $(4; +\infty)$, $x_{\max} = 0$; 8) зростає на $[0; 1]$, спадає на $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$. **49.15.** 1) Зростає на $(-\infty; -6]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $[-6; -2)$ і $(-2; 2]$, $x_{\max} = -6$, $x_{\min} = 2$; 2) зростає на $(-\infty; -3]$ і $[3; +\infty)$, спадає на $[-3; 0)$ і $(0; 3]$, $x_{\max} = -3$, $x_{\min} = 3$; 3) зростає на $[0; +\infty)$,

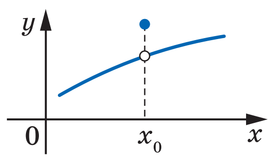
спадає на $(-\infty; 0]$, $x_{\min} = 0$; 4) зростає на $(-\infty; -1)$, спадає на $(-1; +\infty)$, точок екстремуму немає; 5) зростає на $[0; 4)$ і $(4; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -4)$ і $(-4; 0]$, $x_{\min} = 0$; 6) зростає на $\left[\frac{1}{16}; +\infty\right)$, спадає на $\left[0; \frac{1}{16}\right]$, $x_{\min} = \frac{1}{16}$.
49.16. 1) Зростає на $\left[0; \frac{4}{5}\right]$, спадає на $(-\infty; 0]$ і $\left[\frac{4}{5}; 1\right]$, $x_{\max} = \frac{4}{5}$, $x_{\min} = 0$; 2) зростає на $\left[0; \frac{1}{3}\right]$, спадає на $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$, $x_{\max} = \frac{1}{3}$; 3) зростає на $[0; 1]$, спадає на $[1; +\infty)$, $x_{\max} = 1$; 4) зростає на $(-\infty; 2{,}5]$, спадає на $[2{,}5; 3)$, $x_{\max} = 2{,}5$.
49.17. 1) Зростає на $\left[-2; -\frac{8}{5}\right]$ і $[0; +\infty)$, спадає на $\left[-\frac{8}{5}; 0\right]$, $x_{\max} = -\frac{8}{5}$, $x_{\min} = 0$; 2) зростає на $\left[0; \frac{2}{5}\right]$ і $[2; +\infty)$, спадає на $\left[\frac{2}{5}; 2\right]$, $x_{\max} = \frac{2}{5}$, $x_{\min} = 2$; 3) зростає на $\left[\frac{7}{3}; +\infty\right)$, спадає на $\left(1; \frac{7}{3}\right]$, $x_{\min} = \frac{7}{3}$. **49.20.** Може. *Вказівка*. Див. рисунок. **49.21.** Ні. *Вказівка*. Див. рисунок. **49.22.** Так. *Вказівка*. Див. рисунок.



До задачі 49.20



До задачі 49.21



До задачі 49.22

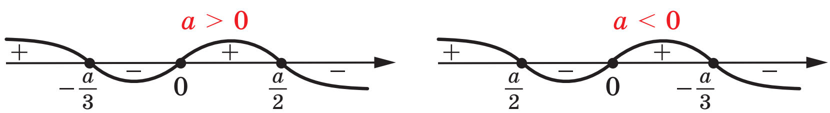
49.24. *Вказівка*. Нехай x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$ — сусідні корені многочлена. Далі, скориставшись другою теоремою Вейєрштрасса для відрізка $[x_1; x_2]$, доведіть, що многочлен має точку екстремуму на інтервалі $(x_1; x_2)$.
49.25. *Вказівка*. Нехай x_1 і x_2 $(x_1 < x_2)$ — точки мінімуму функції f. Тоді на відрізку $[x_1; x_2]$ функція f досягає найбільшого значення в точці, відмінній від x_1 і x_2. **49.26.** 1) Спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$, зростає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $x_{\max} = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x_{\min} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) зростає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{3} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k\right]$, $x_{\max} = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, $x_{\min} = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **49.27.** 1) Зростає на проміжках виду $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right]$, спадає на проміжках виду

$\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right]$, $x_{\max}=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $x_{\min}=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; 2) зростає на проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{8}+\pi k; \frac{\pi}{8}+\pi k\right]$, спадає на проміжках виду $\left[\frac{\pi}{8}+\pi k; \frac{7\pi}{8}+\pi k\right]$, $x_{\max}=\frac{\pi}{8}+\pi k$, $x_{\min}=-\frac{\pi}{8}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **49.28.** 1) $x_{\min}=-\frac{1}{3}$, $x_{\max}=\frac{1}{5}$; 2) $x_{\min}=\frac{2}{5}$, $x_{\max}=0$. **49.29.** 1) $x_{\min}=-3$, $x_{\max}=0$; 2) $x_{\min}=-\frac{6}{5}$, $x_{\max}=-2$. **49.30.** -3; 3. **49.31.** -1; 1. **49.32.** Ні. *Вказівка*. Розгляньте функцію $f(x)=x$ на множині $M=[0;\ 1]$. **49.33.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **49.34.** 1) Ні; 2) так. Якщо $D(f)=\mathbb{R}$, то $x_{\min}=x_0$. **49.35.** 1) $x_{\min}=\frac{\pi}{8}+\pi k$, $x_{\max}=-\frac{3\pi}{8}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$; 2) $x_{\min}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x_{\max}=\pi+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; 3) $x_{\min}=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_{\max}=\frac{\pi}{12}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$; 4) $x_{\min}=\pi k$, $x_{\max}= \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **49.36.** 1) $x_{\min}=\frac{2\pi}{3}+\pi k$, $x_{\max}=\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$; 2) $x_{\min}=\pi+2\pi k$, $x_{\max}=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; 3) точок екстремуму немає. **49.37.** $(-1;1)\cup(1;+\infty)$. **49.38.** $(0;1)\cup(1;+\infty)$. **49.39.** 1. **49.40.** 1. **49.41.** 1. **49.42.** 2. **49.43.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. *Вказівка*. Розглянемо функцію $f(x)=x^3-3px^2+p$. Маємо: $f'(x)=3x^2-6px=3x(x-2p)$. Звідси $x=0$ і $x=2p$ — критичні точки. Якщо $p=0$, то функція f має єдиний нуль. Якщо $p\neq 0$, то функція f має дві точки екстремуму: $x=0$ і $x=2p$. Одна із цих точок є точкою максимуму, друга — точкою мінімуму. Тоді достатньо вимагати, щоб $f(0)\,f(2p)<0$. **49.44.** $a\leqslant\frac{11}{8}$. **49.45.** $a\leqslant -1$, або $a=-\frac{1}{2}$, або $a\geqslant\frac{1}{2}$. *Вказівка*. Маємо: $f'(x)=(1-a)+(1-2a)\cos\frac{x}{3}+\cos\frac{2x}{3}$, $f'(x)=2\left(\cos\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{3}-a\right)$. При будь-якому значенні параметра a критичними точками функції f на проміжку $(\pi;\ 5\pi)$ є 2π і 4π. При $a\neq-\frac{1}{2}$ ці точки є точками екстремуму. **49.46.** Ні. *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, функцію $f(x)=\begin{cases}2x^2+x^2\cos\frac{1}{x}, & \text{якщо } x\neq 0,\\ 0, & \text{якщо } x=0.\end{cases}$

Доведіть, що $x_0=0$ є точкою мінімуму функції f. Далі розгляньте значення функції $y=f'(x)$ у точках виду $x=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$, $k\geqslant 1$, і в точках виду $x=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$, $k\leqslant -1$, $k\in\mathbb{Z}$. **49.47.** Ні. *Вказівка*. Розгляньте, наприклад, функцію $f(x)=\begin{cases} x, & \text{якщо } x\in\mathbb{Q}, \\ -x, & \text{якщо } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$ і точку $x_0=0$. **49.48.** Ні. *Вказівка.* Нехай $x_0\in(-1;1)$ — точка строгого максимуму. Тоді кожній такій точці $x_0\in(-1;1)$ поставимо у відповідність додатне число δ таке, що $f(x_0)>f(x)$ для всіх x із проколотого δ-околу точки x_0. Нехай x_0' і x_0'' — дві точки з інтервалу (−1; 1) такі, що відповідні їм числа $\delta>\frac{1}{2}$. Тоді відстань між такими точками x_0' і x_0'' не може бути меншою від $\frac{1}{2}$ (інакше кожна із цих точок попаде до відповідного проколотого δ-околу іншої точки й одночасно будуть виконуватися нерівності $f(x_0')>f(x_0'')$ і $f(x_0'')>f(x_0')$). Це означає, що на інтервалі (−1; 1) існує не більше чотирьох точок, яким відповідають числа $\delta>\frac{1}{2}$. Аналогічно на інтервалі (−1; 1) існує не більше восьми точок, яким відповідають числа $\frac{1}{2}\geqslant\delta>\frac{1}{4}$. Узагалі, на інтервалі (−1; 1) існує не більше 2^{n+1} точок, яким відповідають числа $\frac{1}{2^{n-1}}\geqslant\delta>\frac{1}{2^n}$. Це означає, що множину всіх точок строгого максимуму функції f можна подати як зліченне об'єднання скінченних множин. Тому множина точок строгого максимуму зліченна.

50.1. 1) 4; 0; 2) 13; 4; 3) 30; 4; 4) −3; −30; 5) 60; −75; 6) −4; −8. **50.2.** 1) 0; $-\frac{16}{3}$; 2) 1; −2; 3) 48; −6; 4) 0; −28. **50.5.** 1) 10; 6; 2) 5; $\sqrt{13}$; 3) 100; 0; 4) −2; −2,5. **50.6.** 1) 5; 3; 2) 2; −2; 3) 81; 0; 4) 10; 6. **50.7.** 1) $\sqrt{2}$; −1; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{2+\pi\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2-\pi\sqrt{3}}{2}$. **50.8.** 1) 2; −1; 2) 2; −2. **50.9.** $8=2+6$. **50.10.** $12=8+4$. **50.11.** 1) $\frac{3}{2}$; 1; 2) −3; −4; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; −2. **50.12.** 1) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; 0; 2) 4; −2. **50.13.** $180=40+80+60$. **50.14.** $18=8+3+7$. **50.15.** 30 см². **50.16.** 8 см і $2\sqrt{3}$ см. **50.17.** $20\sqrt{2}$ см і $10\sqrt{2}$ см. **50.18.** $\frac{24\sqrt{5}}{5}$ см, $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ см. **50.19.** 32. **50.20.** $12\sqrt{6}$. **50.21.** 16 см. **50.23.** $2a$. **50.24.** $\frac{\pi}{3}$. **50.25.** $\frac{\pi}{3}$. **50.26.** $1{,}5R$. **50.27.** $\left(\frac{16}{9};\frac{4}{3}\right)$. **50.28.** $\left(\frac{7}{3};-\frac{26}{9}\right)$. **50.29.** Шукана точка знаходиться на відстані 25 км від пункту C. **50.30.** 60°. **50.31.** $\frac{3}{25}$; −38. *Вказівка.* Дослідіть функцію на відрізках [0; 1] і [1; 2]. **50.32.** 105; $-\frac{11}{27}$. **50.33.** 4. **50.34.** −3. **50.35.** $\frac{1-\sqrt{28}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1+\sqrt{28}}{3}$. *Вказівка.* Якщо $a=0$, то $f(x)=-x^4$.

Отже, $a=0$ задовольняє умову задачі. Розглянемо випадок $a\neq 0$. Маємо: $f'(x)=-4x^3+\frac{2ax^2}{3}+\frac{2a^2x}{3}=-4x\left(x+\frac{a}{3}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)$. Дослідивши знак похідної (див. рисунок), отримуємо, що $x=-\frac{a}{3}$ і $x=\frac{a}{2}$ — точки максимуму функції f, а $x=0$ — точка мінімуму. Звідси отримуємо, що $f(0)<f\left(-\frac{a}{3}\right)$ і $f(0)<f\left(\frac{a}{2}\right)$. Тому під час дослідження даної функції на найменше значення на вказаному відрізку немає потреби розглядати точки $x=-\frac{a}{3}$ і $x=\frac{a}{2}$, достатньо лише вимагати, щоб $f(-1)\leqslant f(0)$. Маємо: $-1-\frac{2}{9}a+\frac{a^2}{3}\leqslant 0$. **50.36.** $a\geqslant\frac{3}{4}$.

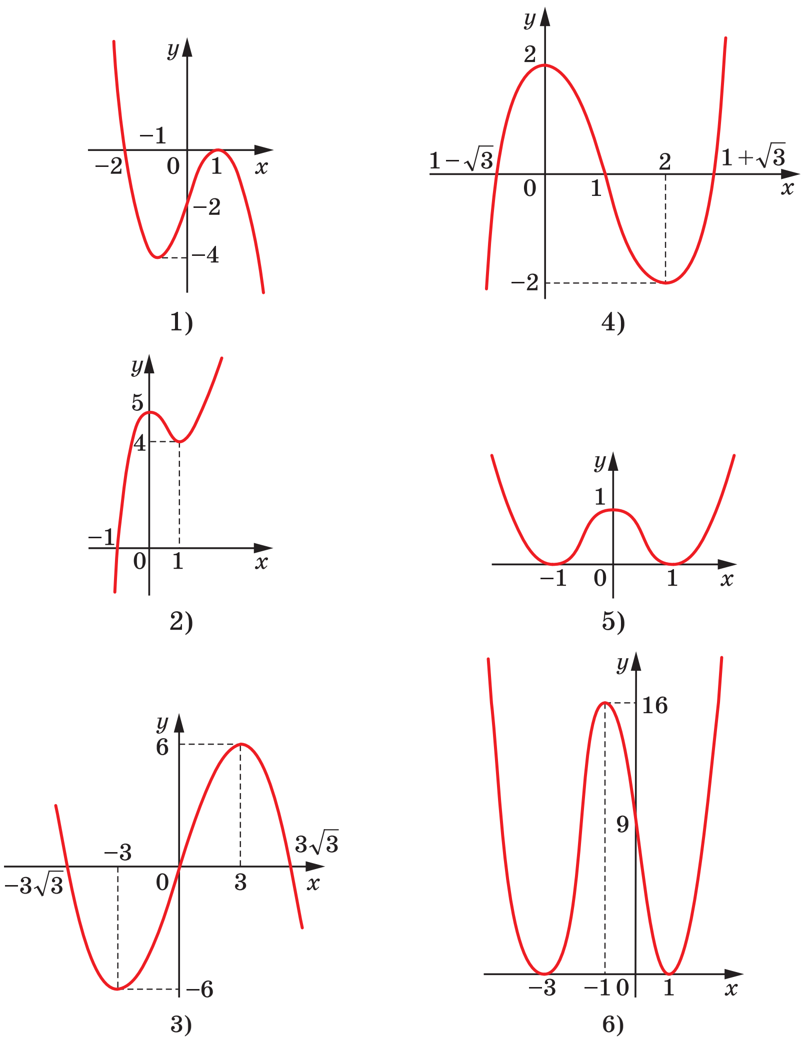


До задачі 50.35

51.1. 6) $80(2x-1)^3$; 7) $-9\sin 3x$; 8) $-2\cos 2x$; 10) $2\cos x - x\sin x$. **51.2.** 5) $54(1-3x)$; 6) $-4\cos 2x$; 7) $2\cos 2x$; 8) $-2\sin x - x\cos x$. **51.6.** 1) −26,5; 2) 53. **51.7.** 14 м/с^2. **51.8.** 10 м/с^2, 5 м/с^2. **51.9.** 90 Н. **51.10.** 1) Опукла вгору на $(-\infty; 0]$, опукла вниз на $[0; +\infty)$, $x=0$ — точка перегину; 2) опукла вгору на $[1; 3]$, опукла вниз на $(-\infty; 1]$ і $[3; +\infty)$, $x=1$ і $x=3$ — точки перегину. **51.11.** 1) Опукла вгору на $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$, опукла вниз на $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$, $x=\frac{2}{3}$ — точка перегину; 2) опукла вгору на $[1; 2]$, опукла вниз на $(-\infty; 1]$ і $[2; +\infty)$, $x=1$ і $x=2$ — точки перегину. **51.12.** 0. **51.13.** 0. **51.16.** 1) Опукла вгору на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right]$ і $\left[0; \sqrt{3}\right]$, опукла вниз на кожному з проміжків $\left[-\sqrt{3}; 0\right]$ і $\left[\sqrt{3}; +\infty\right)$, $x=-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$ — точки перегину; 2) опукла вгору на $(-\infty; -2]$, опукла вниз на кожному з проміжків $[-2; 1)$ і $(1; +\infty)$, $x=-2$ — точка перегину. **51.17.** 1) Опукла вгору на $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, опукла вниз на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ і $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}; +\infty\right)$, $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ і $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ — точки перегину; 2) опукла вгору на кожному з проміжків $(-\infty; -1)$ і $(-1; 2]$, опукла вниз на $[2; +\infty)$, $x=2$ — точка перегину. **51.18.** Опукла вгору на кожному з проміжків виду $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right]$, опукла вниз на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right]$, точками перегину є точки виду $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

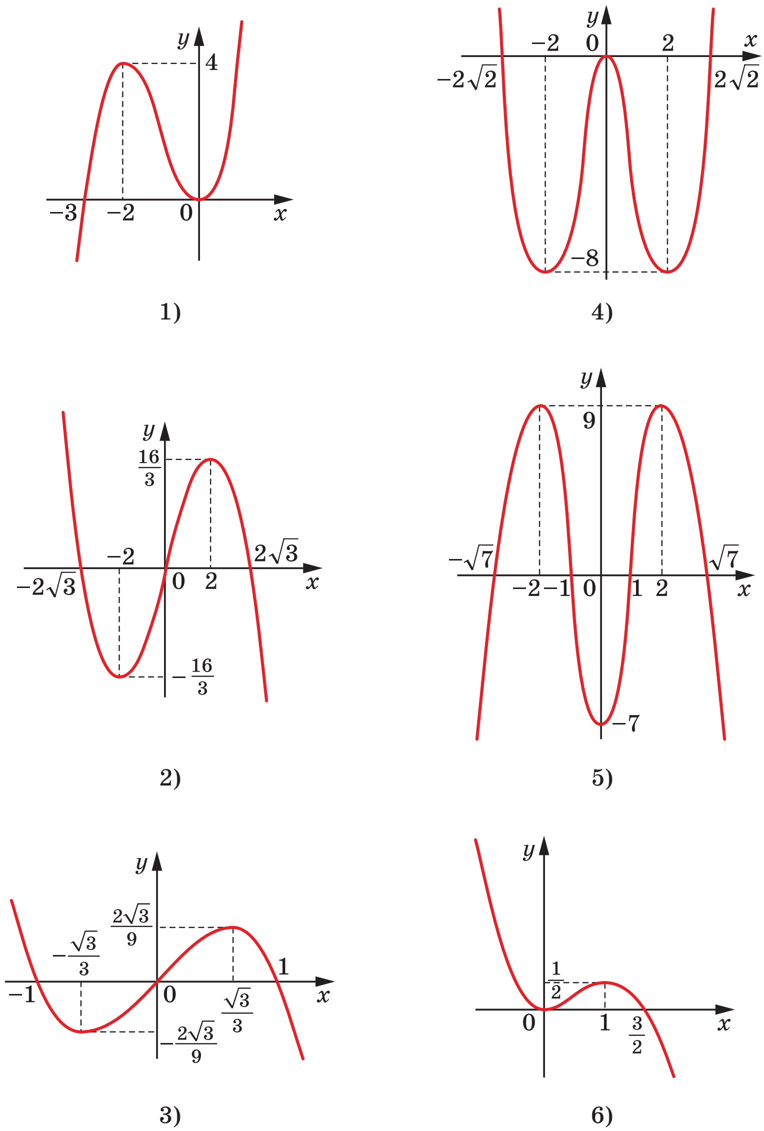
51.19. Опукла вгору на кожному з проміжків виду $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right]$, опукла вниз на кожному з проміжків виду $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$, точками перегину є точки виду $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$. **51.22.** *а*) Опукла вгору на кожному з проміжків $(-\infty;-2]$ і $[0;\ 2]$, опукла вниз на кожному з проміжків $[-2;\ 0]$ і $[2;+\infty)$, $x=-2$, $x=0$, $x=2$ — точки перегину; *б*) опукла вгору на $(-\infty;0]$, опукла вниз на $[0;+\infty)$, $x=0$ — точка перегину. **51.23.** *б*) Опукла вгору на $[-1;\ 1]$, опукла вниз на кожному з проміжків $(-\infty;-1]$ і $[1;+\infty)$, $x=-1$, $x=1$ — точки перегину. **51.24.** 1) Так. *Вказівка.* Оскільки $f''(x)>0$ для всіх $x\in(-\infty;-1)$, то на проміжку $(-\infty;-1)$ функція f опукла вниз. Тому графік функції f на проміжку $(-\infty;-1)$ розташований не нижче від горизонтальної дотичної, проведеної в точці з абсцисою $x_0=-1{,}5$; 2) так; 3) ні. **51.26.** $a<0$, $b<0$, $c>0$. **51.27.** $a>0$, $b<0$, $c<0$. **51.28.** *Вказівка.* Нехай $f(x)=\cos x$, $g(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$. Функції f і g парні; тому нерівність будемо доводити лише для $x\geqslant 0$. Оскільки $f(0)=g(0)$, то для доведення нерівності покажемо, що $f'(x)\leqslant g'(x)$ для всіх $x\geqslant 0$, тобто доведемо нерівність $-\sin x\leqslant -x+\frac{x^3}{6}$ для всіх $x\geqslant 0$. Для доведення останньої нерівності знову скористаємося тими самими міркуваннями. Оскільки $f'(0)=g'(0)$, треба довести нерівність $f''(x)\leqslant g''(x)$ для всіх $x\geqslant 0$. **51.30.** *Вказівка.* Припустимо, що рівняння $f(x)=kx+b$ має принаймні 3 корені. Тоді за ключовою задачею п. 47 рівняння $f'(x)=k$ має принаймні 2 корені. Але функція $y=f'(x)$ є зростаючою (спадною). Тому рівняння $f'(x)=k$ має не більше одного кореня. **51.31.** 0; 1. *Вказівка.* Скористайтеся ключовою задачею 51.30. **51.32.** –1; 0. **51.33.** $107\cdot 2^{64}-2$. *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x)=x^{60}+x^{59}+\ldots+x+1=\frac{x^{61}-1}{x-1}$. Тоді $S=f''(2)$. **51.34.** $6\cdot 2^n-n^2-4n-6$. *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(x)=1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Тоді $S=$ $=2^{n-1}(xf'(x))'$ при $x=\frac{1}{2}$. **51.35.** *Вказівка.* Якщо припустити періодичність даної функції з періодом $T>0$, то функція $y'=x\cos x+\sin x$ також є періодичною з періодом T. З аналогічних міркувань з періодичності функції $y=x\cos x+\sin x$ випливає періодичність (з тим самим періодом T) функції $y'=-x\sin x+2\cos x$. Якщо додати дві періодичні з періодом T функції $y=x\sin x$ і $y=-x\sin x+2\cos x$, то отримаємо періодичну з періодом T функцію $y=2\cos x$. Звідси T є числом виду $2\pi n, n\in\mathbb{N}$. Залишилося переконатися в тому, що жодне із чисел виду $2\pi n, n\in\mathbb{N}$, не є періодом функції $y=x\sin x$. **51.37.** *Вказівка.* Зафіксуємо змінні y і z. Розглянемо функцію $f(x)=x^3+y^3+z^3-3xyz$, $D(f)=[1;\ 2]$. Оскільки $f''(x)=6x>0$ на $[1;\ 2]$, то функція f є опуклою вниз. Тому найбільше значення функції f дорівнює $f(0)$ або $f(1)$. Аналогічні міркування можна провести для змінних y і z. Тепер очевидно, що коли значення хоча б однієї зі змінних x, y або z відмінне від чисел 1 і 2, то значення виразу $x^3+y^3+z^3-3xyz$ можна збільшити. Оскільки змінні входять до даної нерівності симетричним чином, то залишилося перевірити цю нерівність для таких наборів (x, y, z): (1; 1; 1), (2; 1; 1), (2; 2; 1) і (2; 2; 2).

52.1. Див. рисунок.



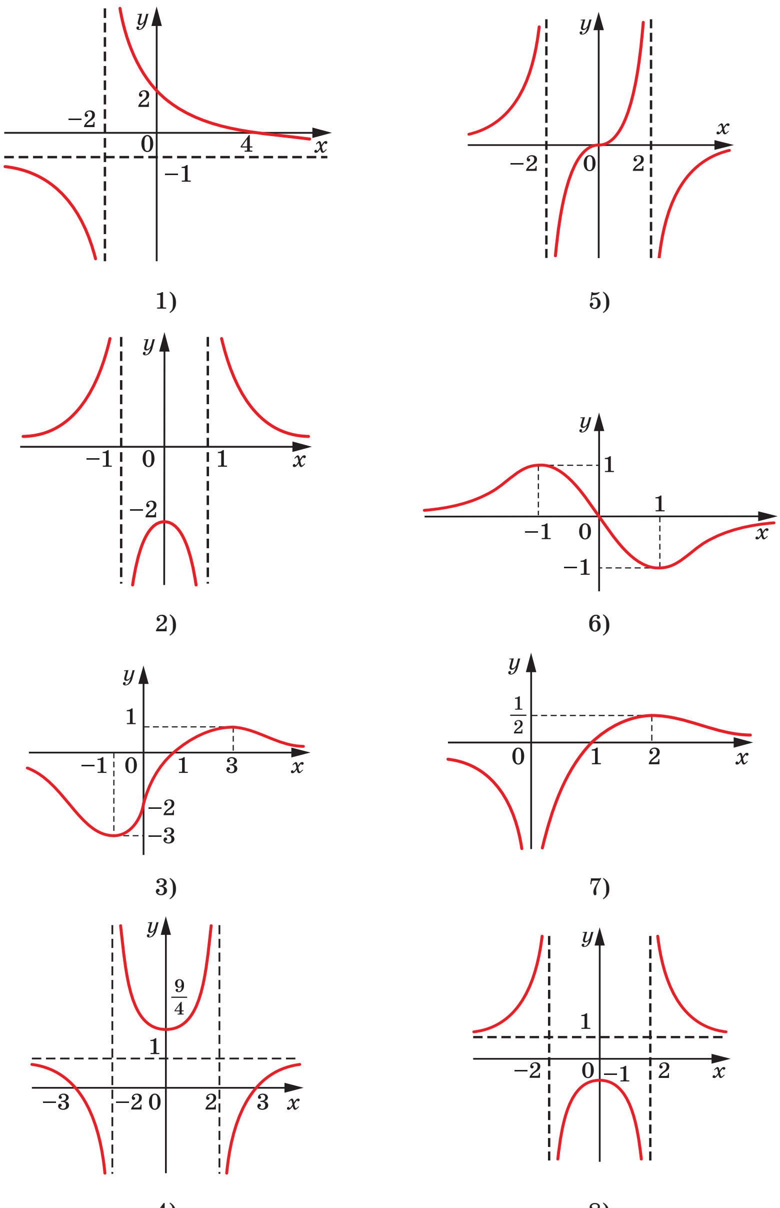
До задачі 52.1

52.2. Див. рисунок.



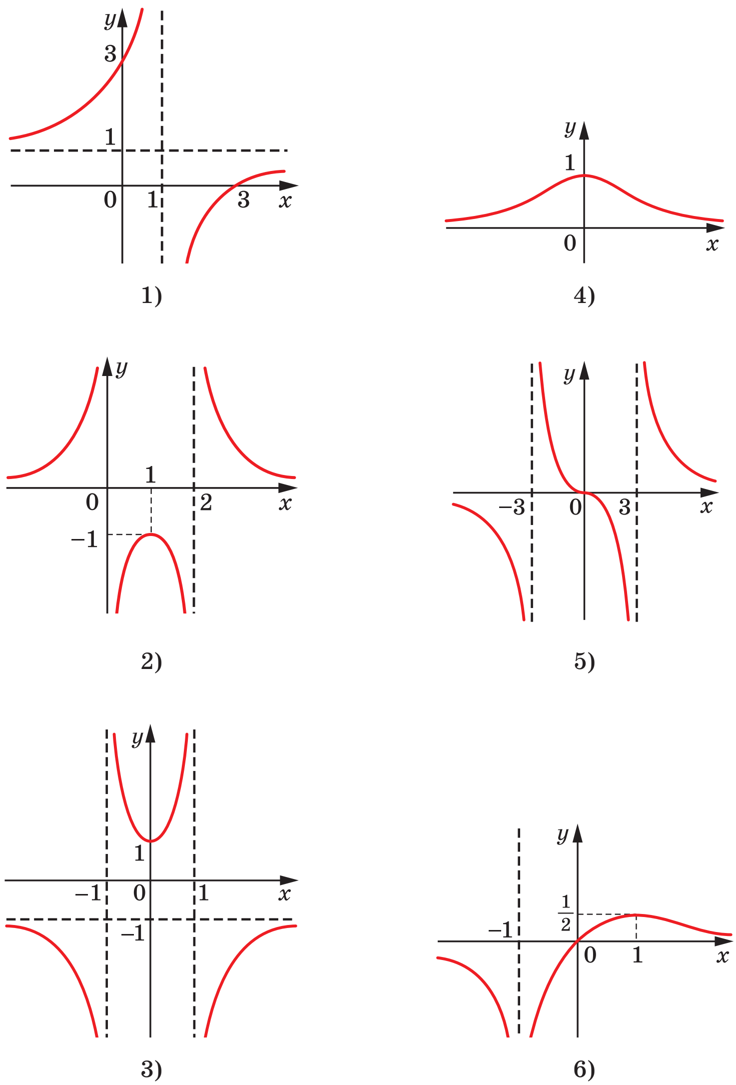
До задачі 52.2

52.3. Див. рисунок.



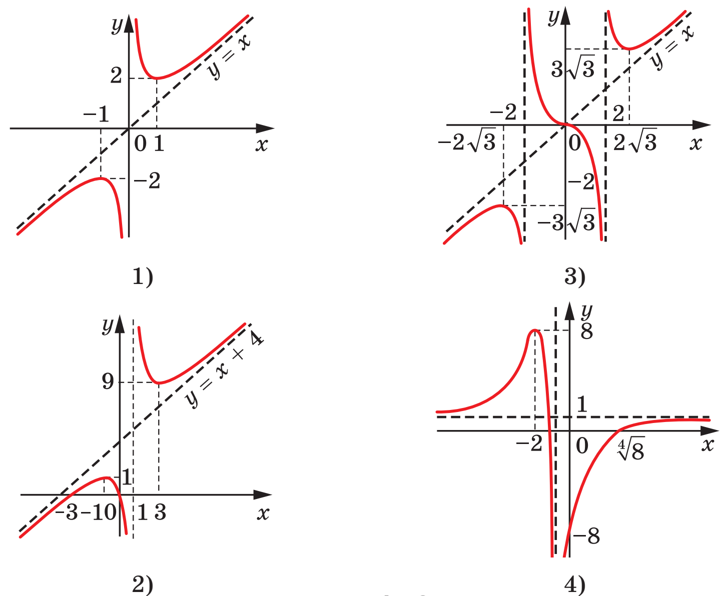
До задачі 52.3

52.4. Див. рисунок. **52.5.** Якщо $a < -1$ або $a > 0$, то 1 корінь; якщо $a = -1$ або $a = 0$, то 2 корені; якщо $-1 < a < 0$, то 3 корені. **52.6.** Якщо $a > 4$, то коренів немає; якщо $a = 4$ або $a < 0$, то 2 корені; якщо $a = 0$, то 3 корені; якщо $0 < a < 4$, то 4 корені.



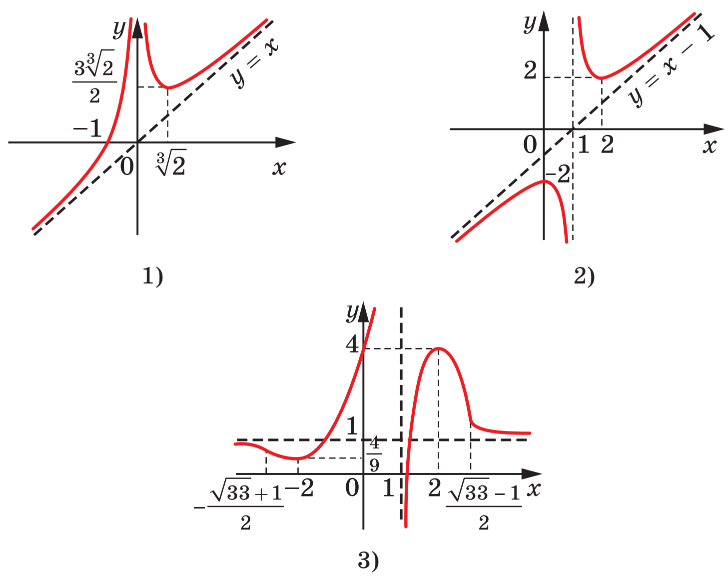
До задачі 52.4

52.7. Див. рисунок.



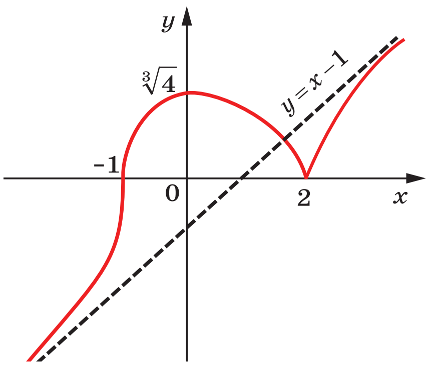
До задачі 52.7

52.8. Див. рисунок.

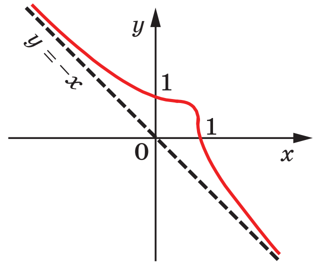


До задачі 52.8

52.9. Див. рисунок. **52.10.** Див. рисунок. **52.11.** Див. рисунок.

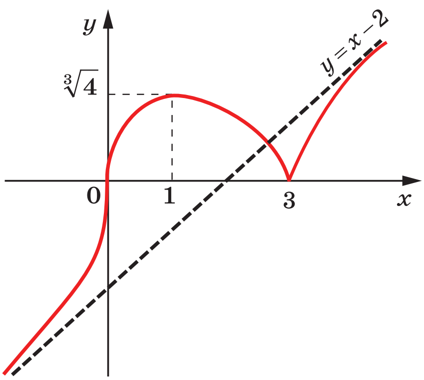


1)

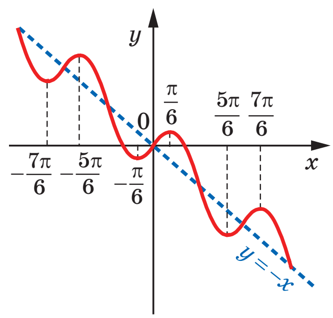


2)

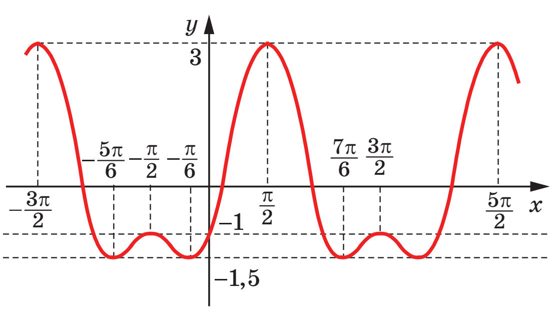
До задачі 52.9



До задачі 52.10

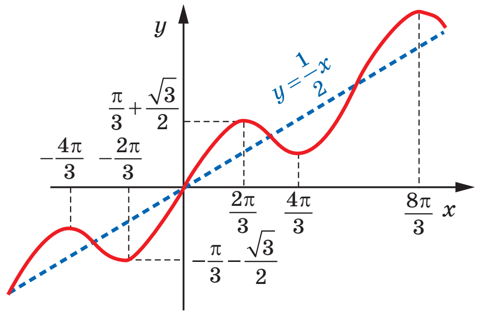


До задачі 52.11 (1)

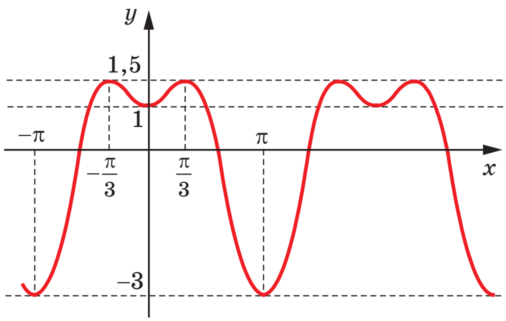


До задачі 52.11 (2)

52.12. Див. рисунок.



До задачі 52.12 (1)



До задачі 52.12 (2)

52.13. $a < -3$. *Вказівка*. Дане рівняння рівносильне такому: $-\frac{x^3+2}{x}=a$. Побудуйте графік функції $f(x)=-\frac{x^3+2}{x}$. **52.14.** $a > 48$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
НОМІРОВСЬКИЙ Дмитро Анатолійович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ
ПОЧАТОК ВИВЧЕННЯ НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ З 8 КЛАСУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

підручник для 10 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Відповідальний за випуск *Д. В. Москаленко*
Літературний редактор *Т. Є. Цента*
Художнє оформлення та дізайн *Д. В. Висоцький*
Технічний редактор *О. В. Гулькевич*
Коректор *А. Ю. Вєнза*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 32,00. Обл.-вид. арк. 27,36.
Тираж 10 712 прим. Замовлення №

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua
www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

Форзац 3

Співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin\ \alpha}$; $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$

Формули додавання

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$; $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$; $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

Формули подвійного аргументу

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Формули пониження степеня

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \qquad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Формули суми і різниці синусів (косинусів)

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

Формули перетворення добутку в суму

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

Формули синуса і косинуса потрійного аргументу

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha; \qquad \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Форзац 4

Значення тригонометричних функцій деяких кутів

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	0

Таблиця похідних деяких функцій

Функція f	Похідна f'	Функція f	Похідна f'
k (стала)	0	x	1
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Правила диференціювання

$$(f+g)' = f' + g'; \qquad (f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'; \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\cdot g - f\cdot g'}{g^2}$$

Рівняння дотичної

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

9 789664 743133