А. П. Єршова, В. В. Голобородько,
О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов

Геометрія

(профільний рівень)

підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти

Харків
Видавництво «Ранок»
2018

УДК [37.016:514](075.3)
Г36

Авторський колектив:
А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов

Г36 **Геометрія** (профільний рівень): підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / [А. П. Єршова, В. В. Голобородько, О. Ф. Крижановський, С. В. Єршов]. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018.

ISBN

УДК [37.016:514](075.3)

Інтернет-підтримка
Електронні матеріали
до підручника розміщено на сайті
interactive.ranok.com.ua

ISBN

ЗМІСТ

Розділ IV
КООРДИНАТИ, ВЕКТОРИ
ТА ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ В ПРОСТОРІ

Дорогі десятикласники і десятикласниці!

У вашому шкільному житті розпочався новий етап — ви прийшли до старшої школи. На новий рівень виходить і вивчення геометрії. Наш подальший курс буде присвячено стереометрії — розділу геометрії, який вивчає фігури в просторі.

Навіщо потрібна стереометрія? По-перше, вона знайомить із різноманіттям просторових форм, законами сприйняття і зображення тривимірних тіл — і завдяки цьому допомагає орієнтуватися в навколишньому світі. Важко уявити роботу інженерів, архітекторів, конструкторів, будівельників без уміння відтворити на кресленні уявні тривимірні об'єкти, їхні деталі та вузли. За статистикою, кожен десятий винахід людства здійснений із застосуванням геометрії, зокрема стереометрії, — за рахунок вибору оптимальної форми, вдалого розміщення тощо. Видатний архітектор XX ст. Ле Корбюзьє не випадково назвав піраміду Хеопса «німим трактатом з геометрії», а саму геометрію — «граматикою архітектури».

По-друге, стереометрія відкриває нові методи наукового пізнання, сприяє розвитку логічного мислення. Ви вже звикли до того, що вивчення геометрії щоразу змушує звертатися до логіки, опановувати закономірності правильного мислення. Курс стереометрії в цьому розумінні не є винятком, адже, за влучним спостереженням видатних математиків, стереометрія є таким поєднанням живої уяви і строгої логіки, завдяки якому вони взаємно організують і спрямовують одна одну.

І, нарешті, стереометрія сама по собі надзвичайно цікава. Чимало дивовижних просторових форм створені не людиною, а самою природою. Такими є, наприклад, кристали — природні многогранники, властивості яких визначаються їхньою будовою. Давньогрецькі філософи надавали геометричної форми елементам першооснов буття — вогню, землі, воді й повітрю. Історія розвитку стереометрії пов'язана з іменами відомих учених — Евкліда, Піфагора, Ейлера, Лобачевського, Декарта.

Отже, ваші батьки і вчителі можуть щиро позаздрити вам — адже перше знайомство зі скарбами наукової думки, зібраними під обкладинкою цього підручника, подарує вам те вишукане задоволення, яке завжди відчуває людина, доторкаючись до Вічного.

Бажаємо вам успіхів!

Як користуватися підручником

Підручник має чотири розділи, кожний із яких складається з параграфів, а параграфи — з пунктів. У тексті міститься як теоретичний матеріал, так і приклади розв'язування задач. Найважливіші поняття і факти виділені **напівжирним шрифтом**.

Вправи і задачі, які подано в підручнику, поділяються на декілька груп. Усні вправи (рубрика ***«Обговорюємо теорію»***) допоможуть вам зрозуміти, наскільки успішно ви засвоїли теоретичний матеріал. Ці вправи не обов'язково виконувати подумки — для їх розв'язування ви можете використати рисунки, провести необхідні міркування в чернетці. Після усних можна переходити до практичних вправ (рубрика ***«Моделюємо»***). Далі йдуть письмові задачі (рубрика ***«Розв'язуємо задачі»***). Спочатку перевірте свої знання, виконуючи завдання ***рівня* А**. Деякі з усних і практичних вправ та задач рівня А мають позначення «•» як такі, що відповідають *початковому* рівню, решта завдань рівня А відповідають *середньому* рівню. Більш складними є задачі ***рівня* Б** (*достатній* рівень). Якщо ви добре опанували матеріал і бажаєте виявити свої творчі здібності, на вас чекають задачі ***рівня* В** (*високий* рівень). Позначення і біля номерів вправ означають, що ці вправи на розсуд учителя можуть бути використані для роботи в парах і групах відповідно. Після кожного параграфа у рубриці ***«Повторення»*** зазначено, які саме поняття й факти слід пригадати для успішного вивчення наступного матеріалу, та наведено задачі, які підготують вас до сприйняття наступної теми. Для самостійної роботи вдома призначені задачі, номери яких мають позначення . Розв'язувати всі задачі всіх груп не обов'язково.

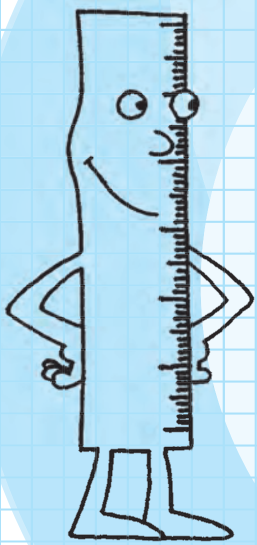
Оскільки вивчення геометрії у просторі має сприяти всебічному розвитку та вихованню особистості, до підручника включено як класичні задачі з геометрії (зокрема задачі практичного змісту), так і завдання, призначені для формування й розвитку, окрім математичної, інших ключових компетентностей. Такі завдання мають позначення К. Їх тематика присвячена оволодінню державною та іноземними мовами, опануванню природничих наук, використанню інформаційно-комунікативних технологій, усвідомленню необхідності розв'язування актуальних екологічних та соціальних проблем тощо.

У підручнику розміщено ***тестові завдання для самоперевірки***, завдяки яким ви зможете краще підготуватися до тематичного оцінювання. Крім того, ви маєте змогу самостійно перевірити рівень вашої підготовки, пройшовши онлайн-тестування на сайті interactive.ranok.com.ua. Про можливість скористатися матеріалами сайта вам нагадуватиме позначення i. ***Додаткові задачі*** до розділів допоможуть вам узагальнити вивчене, а ***задачі підвищеної складності*** відкриють нові грані геометрії, красу нестандартного мислення.

Підсумкові огляди наприкінці кожного розділу — своєрідний геометричний компас, за допомогою якого ви зможете орієнтуватися у вивченому матеріалі. Рубрика ***«Історична довідка»*** познайомить з цікавими фактами з розвитку геометрії і діяльністю видатних учених-геометрів.

Розділ I

Вступ до стереометрії



Інженер має споглядати простір, інакше він не буде здатний до розробки самостійних проектів... Вивчення геометрії якнайкраще розвиває просторове мислення.

Леон де Баньоль,
французький математик

Першим етапом вивчення стереометрії є дослідження прямих і площин у просторі.

Так само, як і планіметрія, стереометрія розпочинається з низки основних положень (аксіом), які приймаються без доведення і слугують фундаментом для подальших міркувань і доведень.

Найбільш незвичним (а для декого, можливо, і складним) на цьому етапі буде процес формулювання й обґрунтування тверджень, які на перший погляд видаються очевидними. Але майже одразу ви переконаєтесь, що ця очевидність удавана, адже вона ґрунтується лише на планіметричних уявленнях. Радимо звернути особливу увагу на розбіжності у формулюваннях окремих тверджень про одні й ті самі фігури на площині та в просторі, аби краще зрозуміти нові поняття й факти, з якими знайомить стереометрія.

§ 1 Аксіоми стереометрії

1.1. Вступ до стереометрії. Просторові фігури

Вивчення геометрії в просторі, як і на площині, розпочнемо з уведення основних неозначуваних фігур, властивості яких виражаються аксіомами. У планіметрії такими фігурами були точка і пряма; у стереометрії до них додається також площина. Зауважимо, що геометрична роль площини змінюється: якщо скористатися мовою театру, то в планіметрії площина слугувала лише декорацією, на тлі якої розгорталися геометричні «події», а в стереометрії вона стає повноправною дійовою особою.

Стереометрія — від грецького «стерео» — просторовий і «метріо» — вимірюю — просторове вимірювання.

Отже, **основними неозначуваними фігурами в просторі є точка, пряма і площина.**

Площину можна уявити як рівну поверхню стола, стіни або лану. Площину, як і пряму, вважають нескінченною, тому на рисунках зображають лише частину площини — у вигляді паралелограма або області, обмеженої замкненою лінією (рис. 1). Площину прийнято вважати непрозорою, тому частини ліній, які «сховані» під площиною, зображають пунктиром.

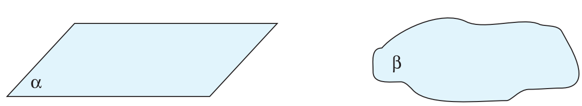
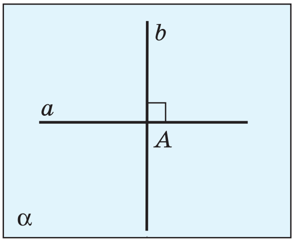
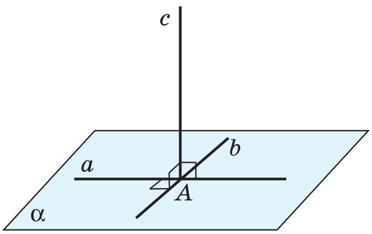


Рис. 1. Зображення площини



а



б

Рис. 2. Розв'язання задачі про перпендикулярні прямі на площині й у просторі

Площини зазвичай позначаються грецькими буквами α, β, γ і т. д. Окремо зазначимо, що **в будь-якій площині справджуються всі твердження планіметрії.**

У зв'язку з цим виникає питання: чи всі твердження, які справджуються для фігур на площині, є правильними для них у просторі? Аби переконатися, що це не завжди так, розглянемо такі приклади. Нехай через дану точку A необхідно провести найбільшу можливу кількість попарно перпендикулярних прямих. Очевидно, що на площині можна провести лише дві такі прямі (рис. 2, *а*). Але якщо не обмежувати розв'язання задачі однією площиною, то через дану точку можна провести принаймні три попарно перпендикулярні прямі (рис. 2, *б*).

Розглянемо ще одну задачу: із шістьох однакових сірників необхідно скласти чотири рівносторонні трикутники зі стороною, що дорівнює довжині сірника. Розв'язати таку задачу на площині неможливо. Але якщо «вийти у простір» і скласти сірники у вигляді піраміди (рис. 3), ми отримаємо чотири шукані трикутники.

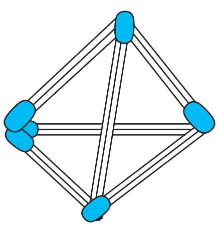


Рис. 3. Розв'язання задачі про шість сірників

Отже, наведені приклади переконливо доводять, що розв'язання задачі на площині і в просторі можуть суттєво відрізнятися, а розгляд стереометричних задач потребує знання додаткових закономірностей і співвідношень.

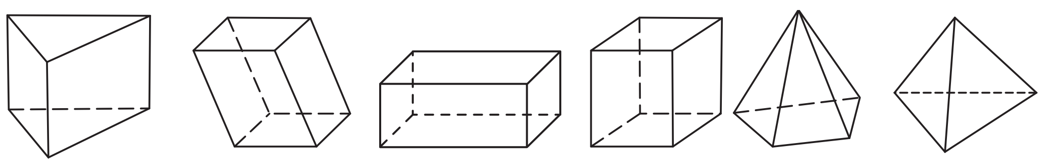
Очевидно також, що не завжди існує площина, яка містить усі елементи фігур, що розглядаються. Не лежать в одній площині всі елементи просторових фігур, зокрема многогранників.

Многогранник являє собою тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості плоских многокутників (тобто многокутників з їх внутрішніми областями). Ці многокутники є ***гранями многогранника***, а їхні сторони — ***ребрами многогранника***.

Призма є многогранником, дві грані якого — рівні n-кутники (***основи призми***), площини яких не мають спільних точок, а решта n граней (***бічні грані***) — паралелограми (рис. 4, *а*). Окремим випадком призми є ***паралелепіпед*** (рис. 4, *б*), усі грані якого — паралелограми. Окремим випадком паралелепіпеда є прямокутний паралелепіпед (рис. 4, *в*), усі грані якого — прямокутники. Якщо всі грані прямокутного паралелепіпеда є квадратами, то одержимо куб (рис. 4, *г*).

Тетраедр — від грецького «тетра» — чотири і «едра» — грань

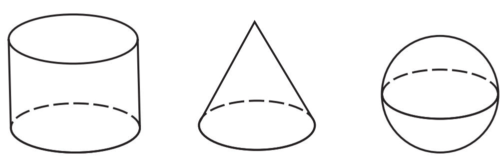
Многогранником є також **піраміда** (рис. 4, *д*), одна з граней якої — многокутник (***основа піраміди***), а решта граней — трикутники зі спільною вершиною (***вершиною піраміди***). Піраміду з основою-трикутником називають також ***тетраедром***, а тетраедр, усі ребра якого рівні,— ***правильним тетраедром*** (рис. 4, *е*).



а б в г д е

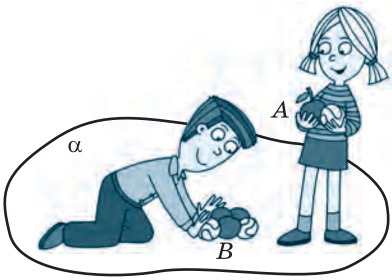
Рис. 4. Многогранники

Окреме місце в стереометрії займають ***тіла обертання***, які утворюються внаслідок обертання плоских фігур навколо прямої. Найбільш відомі серед них — ***циліндр*** (рис. 5, *а*), ***конус*** (рис. 5, *б*) і ***куля*** (рис. 5, *в*).



а б в

Рис. 5. Тіла обертання



$A \notin \alpha$, $B \in \alpha$

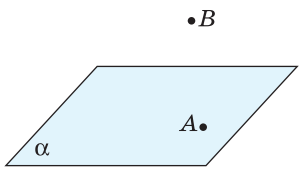


Рис. 6. До аксіоми належності точок площини

а

б

Рис. 7. До обговорення аксіоми проведення прямої в просторі

Ґрунтовне вивчення многогранників і тіл обертання чекає вас надалі, але вже зараз ми будемо використовувати їх для вивчення окремих властивостей взаємного розміщення прямих і площин у просторі.

1.2. Основні аксіоми стереометрії

Включення площини до переліку основних геометричних фігур потребує введення нових аксіом, які описують властивості площини й особливості взаємного розміщення точок, прямих і площин у просторі. Сформулюємо чотири основні аксіоми стереометрії.

Аксіома належності точок площині

> Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, що не належать їй.

Дана аксіома стверджує, що для довільної площини в просторі можна вибрати будь-яку кількість точок цієї площини і будь-яку кількість точок поза нею. На рис. 6 точка A належить площині α (інакше кажуть, що точка A лежить у площині α або площина α проходить через точку A), а точка B не належить площині α. Коротко це позначають так: $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$.

Аксіома проведення прямої в просторі

> Через будь-які дві точки простору можна провести пряму, і тільки одну.

Нагадаємо, що на площині за аксіомою через дві точки* проходить єдина пряма. Але чи не виникне випадку, коли прямі, проведені через дві дані точки у двох різних площинах, будуть різни-

* Тут і далі, кажучи «дві точки» («дві прямі», «дві площини» тощо), вважатимемо, що ці точки (прямі, площини) різні.

ми? Адже, наприклад, на площині через точки N і S проходить єдине коло з діаметром NS, а в просторі таких кіл безліч — пригадаємо меридіани, які проходять через Північний та Південний полюси (рис. 7, *а*). Щойно сформульована аксіома унеможливлює такий випадок для прямих у просторі. Отже, пряма, проведена через будь-які дві точки простору, єдина (рис. 7, *б*).

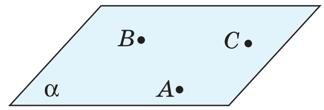


Рис. 8. До аксіоми проведення площини

Аксіома проведення площини

Через три точки, що не належать одній прямій, можна провести площину, і тільки одну.

Зміст даної аксіоми ілюструє рис. 8: площина, яка проходить через точки A, B і C, єдина. На підставі цього факту прийнято ще один спосіб позначення площини в просторі — за трьома її точками, що не належать одній прямій. Так, площину α на рис. 8 можна позначити так: (ABC). Цей запис читають «площина ABC».

Рис. 9. Ілюстрація аксіоми проведення площини

Аксіома проведення площини має наочну побутову ілюстрацію: журнальний стіл на трьох ніжках або штатив у формі триноги (рис. 9) не хитатимуться на підлозі, адже кінці трьох ніжок не лежать на одній прямій, але лежать в одній площині — площині підлоги. А ось одна з чотирьох ніжок звичайного прямокутного столу може «висіти в повітрі», унаслідок чого такий стіл буде нестійким.

Зауважимо також, що поряд із формулюванням «три точки належать одній площині» в стереометрії часто кажуть і про чотири точки (декілька точок, прямі, фігури), що *не лежать в одній площині*. Таке формулювання означає, що неможливо провести площину, яка містила б усі дані точки (прямі, фігури). Наприклад, вершини P, A, B і C тетраедра $PABC$ не лежать в одній площині (рис. 10), хоча будь-які три з них належать одній площині (назвіть ці площини самостійно).

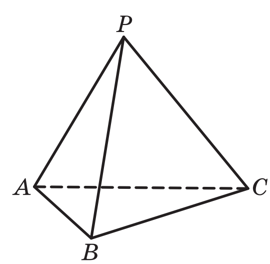


Рис. 10. Чотири вершини тетраедра не лежать в одній площині

Звернемось тепер до розгляду взаємного розміщення двох площин. Для цього розглянемо чотирикутну піраміду $PABCD$, основа якої — прямокутник $ABCD$ (рис. 11, *а*), і спробуємо визначити, скільки спільних точок мають площини PAD і PBC. На перший погляд, відповідь очевидна: одну — точку P. Але така відповідь неправильна. Аби переконатися в цьому, прикладемо зігнутий аркуш паперу до піраміди так, щоб одна його частина лежала на грані PAD, а інша — на грані PBC (рис. 11, *б*). При такому моделюванні стає зрозумілим, що всі точки прямої l перегину аркуша (у тому числі й точка P) є спільними точками площин PAD і PBC.

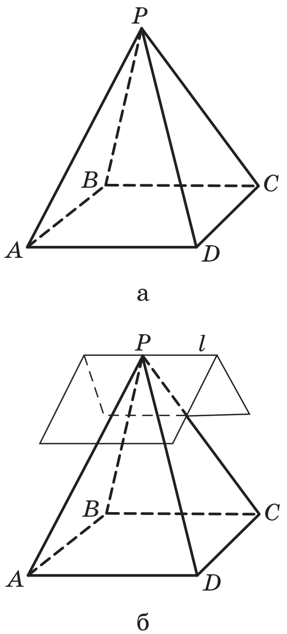


Рис. 11. До обговорення перетину двох площин

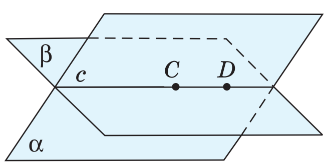


Рис. 12. До аксіоми перетину площин

Аксіома перетину площин

Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

Площини α і β, які мають спільну точку C і перетинаються по прямій c, яка містить цю точку, зображено на рис. 12. З даної аксіоми, зокрема, випливає, що площини α і β не мають інших спільних точок, крім точок прямої c. У такому випадку кажуть, що площини α і β перетинаються по прямій c, і записують так: $\alpha \cap \beta = c$. Очевидно також, що коли точки C і D — спільні точки площин α і β, то дані площини перетинаються по прямій CD.

Наочними прикладами перетину двох площин по прямій є розкритий зошит, стіна й підлога кімнати тощо.

За допомогою наведеної аксіоми знаходять перетин площин з іншими просторовими фігурами, зокрема многогранниками. Такий перетин — спільну частину даної площини й многогранника — називають **перерізом многогранника**, а дану площину — **січною площиною**. На рис. 13

показано переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною B_1EF. Розглядати й зображати перерізи (без повного обґрунтування) ми почнемо вже з перших занять, а згодом будемо розв'язувати задачі на побудову перерізів більш докладно.

Крім основних властивостей точок, прямих і площин у просторі, чотири з яких щойно було сформульовано, система аксіом стереометрії включає в себе також аксіоми планіметрії. Докладніше питання про аксіоми стереометрії висвітлено в Додатку 1. Окремо зазначимо, що ознаки рівності й подібності трикутників, відомі з курсу планіметрії, справедливі й для трикутників, що не лежать в одній площині (подаємо цей факт без обґрунтування).

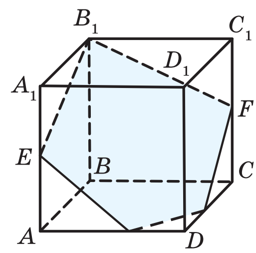


Рис. 13. Переріз куба площиною

1.3. Рисунки і моделі в стереометрії

Ключем до розуміння стереометрії є поєднання строгої логіки міркувань з інтуїтивною просторовою уявою. Першим етапом розв'язування просторової задачі є навіть не побудова рисунка, а спроба уявити геометричну ситуацію, яка описана в умові, і пошук найбільш зручного способу її відтворення на кресленні.

Розглянемо найпростішу умову: пряма a і площина α мають єдину спільну точку A. Кожен із рис. 14, *а*–*в* відображає описану умову, але корисним для розв'язування задач буде лише рис. 14, *в*. Досить часто під час пошуку найбільш вдалої геометричної конфігурації для розв'язування задачі доводиться робити декілька рисунків або розглядати деякі фрагменти розв'язання на окремих рисунках.

Але навіть вдало побудований рисунок не гарантує правильності подальшого розв'язування задачі. Справа в тому, що рисунок у стереометрії якісно відрізняється від рисунка в планіметрії. Рисунок у планіметрії, як правило, виконують

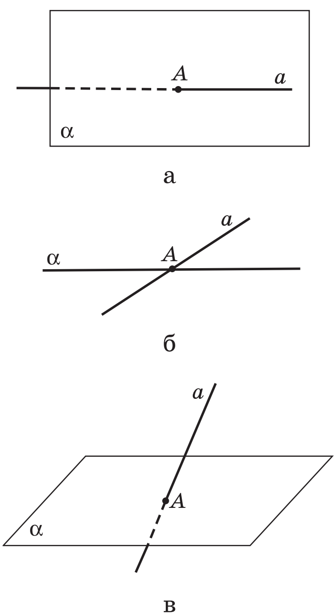


Рис. 14. Пошук оптимальної конфігурації для розв'язування задачі

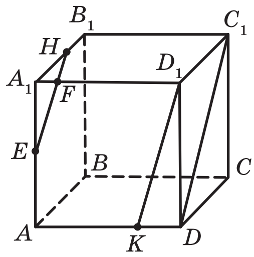


Рис. 15

відповідно до наявних даних — умов задачі або теореми: якщо прямі перетинаються за умовою, то вони перетинаються й на рисунку; якщо відрізки рівні за умовою, то вони рівні й на рисунку, і т. д. У стереометрії навіть вдалий рисунок може містити безліч прихованих «пасток», які ускладнюють розв'язування задачі. Як приклад проаналізуємо зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на рис. 15. Достатньо розглянути разом із цим рисунком будь-яку модель куба, аби переконатися, що:

- прямі DD_1 і BC, які на рисунку «перетинаються», насправді не мають спільних точок;
- кут ABC, який видається тупим, є прямим, адже $ABCD$ — квадрат;
- сума кутів A_1AB і BAD не дорівнює, як у планіметрії, куту A_1AD, більш того, усі ці кути прямі;
- «нерівні» відрізки CD і CC_1 насправді рівні;
- точки E, F і H, які начебто належать одній прямій, насправді є вершинами трикутника;
- «паралельні» на рисунку прямі C_1D і D_1K насправді не є паралельними.

Зрозуміло, що під час розв'язування задач недостатня увага до цих «тонкощів» може призвести до помилок. Але в стереометрії існують рецепти їх уникнення. Один із них — використання моделей. Моделювати взаємне розміщення прямих і площин можна за допомогою олівців та аркушів паперу. Для створення моделей просторових фігур зазвичай використовують тонкий дріт, пластилін, інші підручні матеріали. Поверхні многогранників і тіл обертання зручно склеїти з цупкого паперу.

Ще одна корисна порада — приділяти особливу увагу запитанням і практичним задачам, пов'язаним з моделюванням і моделями. Такі вправи сприяють розвитку геометричної інтуїції та просторової уяви.

Хоча рисунки в геометрії не мають сили доведень, наочний і конструктивний рисунок — неоціненний помічник у процесі доведення й розв'язування стереометричних задач. Недарма великий математик Леонард Ейлер зауважував: «Мій олівець буває дотепнішим за мою голову».

1.4. Поняття про аксіоматику та побудову науки

Становлення будь-якої природничої науки починається з накопичення певних фактів. Далі вони систематизуються та перетворюються на струнку теорію. Як приклад можна навести механіку Ньютона у фізиці, теорію Дарвіна в біології, періодичний закон Менделєєва в хімії. Після того як певна наукова система створена, вчені вдосконалюють її, зокрема суто теоретичними логічними міркуваннями. Але при цьому неодмінно перевіряють, чи відповідають теоретичні надбання практичній сфері їх застосування.

На початку III ст. до н. е. у роботах давньогрецького філософа Арістотеля (384–322 рр. до н. е.) була остаточно сформульована така ідея побудови наукової теорії. Фундаментом теорії ставали положення, основані на даних, отриманих на підставі досвіду, тобто таких, які не викликають сумніву. Усі інші положення мали бути отримані з них логічним (дедуктивним) шляхом. Стосовно геометрії її реалізував Евклід (III ст. до н. е.). За його книгою «Начала» геометрію вивчали понад 20 століть. Так геометрія перетворилася з емпіричної (досвідної) на дедуктивну (логічну) науку. Не випадково герой А. Конана Дойла детектив Шерлок Холмс так говорив про суть свого дедуктивного методу: «...людину, яка вміє спостерігати та аналізувати, обдурити просто неможливо. Її висновки будуть безпомилкові, як теореми Евкліда...»

Евклід

Наукова система Евкліда проіснувала понад два тисячоліття практично без змін. Але у XIX–XX ст. зусиллями багатьох науковців у ній були усунені певні недоліки, а сама система набула більш стрункого, сучасного та чіткого вигляду. У його основі лежить аксіоматичний метод, сутність якого полягає в наступному. Називаються всі основні (неозначувані) поняття або об'єкти. Решта понять повинна бути означена через основні поняття або такі, що були означені раніше за дані. Формулюються аксіоми — твердження, які приймаються без доведення. Всі інші твердження мають бути логічними наслідками з аксіом або раніше доведених тверджень. Одну з найвідоміших сучасних аксіоматичних систем було створено на рубежі XIX–XX ст. видатним німецьким математиком Давидом Гільбертом (1862–1943). Основи геометрії він виклав як суто абстрактну теорію. Але досліджувати інтерпретацію, або модель, яка відповідає цій теорії, буває дуже корисним.

Микола Лобачевський

Отже, геометрії притаманна подвійність. З одного боку, вона вивчає абстрактні ідеальні поняття — точку, пряму, площину і т. д. З іншого боку, якщо ми хочемо отримати наочне уявлення, про що йде мова у тому чи іншому твердженні, або збагнути якийсь геометричний факт, ми звертаємось до оточуючих нас у тривимірному просторі предметів чи самостійно робимо моделі для таких досліджень.

Наприкінці обговоримо, якою має бути система аксіом — аксіоматика.

По-перше, вона має бути *несуперечливою* (не містити явних або прихованих суперечностей).

По-друге, бажано, щоб вона була *незалежною* — тобто щоб жодна з аксіом не випливала логічно з інших. Так, у XIX ст. було остаточно з'ясовано, що аксіому Евкліда про єдиність проведення через точку прямої, паралельної даній, неможливо одержати з інших аксіом. До речі, геометрію, що містить, зокрема, таке твердження, називають евклідовою. Саме її ви й вивчаєте в школі. Але існують інші абстрактні геометрії та їхні моделі. Зокрема, у геометрії Лобачевського (1792–1856) через точку, що не належить даній прямій, проходить безліч прямих, паралельних цій прямій (рис. 16).

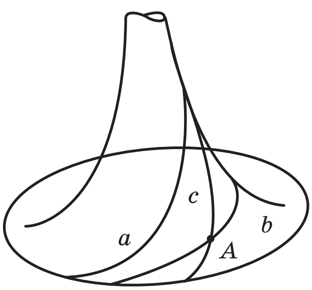


Рис. 16. Псевдосфера

По-третє, треба, щоб аксіоматика була *повною*. Тоді до неї неможливо додати нову аксіому, яка не буде логічним наслідком вже існуючих аксіом.

Насамкінець, по-четверте, бажано, щоб аксіоматика не містила поняття з іншої теорії, тобто була *замкненою*. У нашому підручнику для спрощення сприйняття наведено незамкнену систему аксіом стереометрії, бо в ній використовується алгебраїчне поняття — число — та його властивості.

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

1•. Чи є грань куба площиною? Чи є грань куба частиною площини?

2•. Точка A належить площині α, а точка B не належить площині α. Чи правильно, що точки A і B не лежать в одній площині?

К **3.** Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) умову та власне розв'язання задачі 2. Порівняйте одержаний результат з перекладами інших учнів та з електронним перекладом. Зробіть висновки.

К **4.** Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) терміни «точка», «пряма», «площина», «належить до», «перетинаються». Перекладіть стереометричні аксіоми. Порівняйте одержаний результат з перекладами інших учнів.

5. Точки A, B і C не лежать на одній прямій. Чи збігаються площини α і ABC, якщо:

а) $A\in\alpha$, $B\in\alpha$, $C\notin\alpha$;   б) $A\in\alpha$, $B\in\alpha$, $C\in\alpha$?

6• (задача-жарт). Три бджоли одночасно злетіли з однієї квітки. У якому випадку вони опиняться в одній площині?

7•. Через точки A, B і C проходять дві різні площини. Як розміщені дані точки? Відповідь обґрунтуйте.

8•. Чому мотоцикл із коляскою стоїть на дорозі стійко, а для мотоцикла без коляски потрібна додаткова підпора?

9. Останніми роками класичні електронно-променеві монітори з опуклим екраном повсюдно замінюють плоскими рідкокристалічними моніторами. Користуючись додатковою літературою або мережею Інтернет, з’ясуйте, які монітори безпечніші для здоров’я. Обговоріть з друзями та подругами, яку шкоду для здоров’я людини спричиняє електромагнітне поле, джерелом якого є класичний монітор, і як цьому запобігти. Дізнайтеся в шкільного лікаря чи за допомогою мережі Інтернет, яку шкоду для очей може спричинити довге безперервне користування стаціонарним комп’ютером чи ноутбуком із плоским рідкокристалічним монітором, як цьому запобігти. Організуйте обговорення в класі з цього питання.

10•. Чому замкнені двері (рис. 17) нерухомі, а незамкнені двері можна відчинити?

11. Чи можуть дві різні площини мати лише одну спільну точку; лише дві спільні точки; безліч спільних точок?

12. Прочитайте твердження, записане за допомогою символів: «Якщо $A \in \alpha$, $A \in \beta$, то $\alpha \cap \beta = c$, $A \in c$». Чи правильне це твердження за умови, що площини α і β не збігаються?

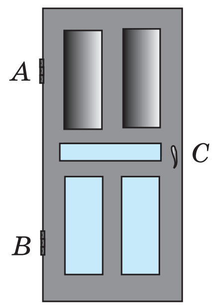


Рис. 17

Моделюємо

13•. Уявіть стіни, стелю й підлогу класної кімнати як частини площин, укажіть:

а) дві прямі, що перетинаються;

б) три прямі, що перетинаються в одній точці й не належать одній площині;

в) дві площини, що не перетинаються;

г) дві площини, що перетинаються;

д) три площини, що попарно перетинаються.

14•. Сконструюйте модель:
а) двох площин, що перетинаються;
б) прямої, яка перетинає площину;
в) трьох площин, що перетинаються по одній прямій.

15. Зобразіть на рисунку взаємне розміщення точок, прямих і площин за даними умовами:
а) $\alpha \cap \beta = c$, $A \in c$;
б) $\alpha \cap \beta = a$, $\gamma \cap \beta = b$, $\alpha \cap \gamma = c$.

16. Зобразіть на рисунку взаємне розміщення точок, прямих і площин за даними умовами:
а) $\alpha \cap (ABC) = BC$; б) $\alpha \cap \beta = c$, $\beta \cap \gamma = c$.

17. У тетраедрі $PABC$ точка D — середина ребра AB (рис. 18). Змоделюйте переріз тетраедра площиною PDC і назвіть прямі перетину площин:
а) PDC і ABC;
б) PDC і APB;
в) PDC і PBC.

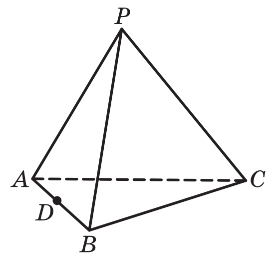


Рис. 18

18. Змоделюйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною B_1AC і назвіть прямі перетину січної площини з площинами A_1AB, DAB і BCC_1. Запишіть відповіді за допомогою символів.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

19•. Точки A і B лежать у площині α, а точка C не лежить у цій площині. Доведіть, що площини α і ABC перетинаються по прямій AB.

20•. Дві площини мають спільні точки A, B і C. Доведіть, що точки A, B і C лежать на одній прямій.

21. У просторі дано чотири точки, причому жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки прямих можна провести через різні пари цих точок?

22. У просторі дано чотири точки, причому жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки площин можна провести через різні трійки цих точок?

Рівень Б

23. Площини ABC і DBC мають спільну точку K. Знайдіть довжину відрізка BC, якщо $BK = 8$ см, $CK = 3$ см.

24. Точки A, B і C — спільні точки двох різних площин. Знайдіть довжину відрізка AC, якщо $AB = BC = 4$ см.

25. Площини α і β перетинаються по прямій c. Пряма a лежить у площині α і перетинає пряму c в точці A. Доведіть, що $A \in \beta$.

26. Паралелограм $ABCD$ і трикутник ABK не лежать в одній площині. Визначте пряму перетину площин:

а) KBC і AKC; б) AKC і ABD; в) AKD і ABC.

Рівень В

27. Три площини попарно перетинаються. Доведіть, що коли дві прямі перетину цих площин перетинаються, то третя пряма проходить через точку їх перетину.

28. Площини α і β перетинаються по прямій c. Площина γ перетинає дані площини по прямих a і b відповідно. Доведіть, що коли прямі a і b перетинаються, то точка їх перетину лежить на прямій c.

29. Якщо одна з чотирьох точок не належить жодній площині, яка проходить через інші три точки, то таку властивість має будь-яка з даних точок. Доведіть.

30. Яка найбільша кількість прямих може утворитися в результаті попарного перетину трьох площин; чотирьох площин; n площин?

Повторення перед вивченням § 2

Теоретичний матеріал

- аксіоми планіметрії; Додаток 1
- нерівність трикутника. 7 клас, § 18

Задачі

31. Прямі a, b і c перетинаються в точці O. Знайдіть $\angle(ab)$, якщо $\angle(ac) = 60°$, $\angle(bc) = 30°$. Скільки розв'язків має задача на площині? Чи можна за даними умовами розв'язати цю задачу в просторі?

32. Дано точки A, B, C і D, причому $AB = 8,4$ см, $BC = 4,6$ см, $AC = 3,8$ см. Чи лежать точки A, B і C на одній прямій? Чи лежать точки A, B, C і D в одній площині? Висловте припущення.

§2 Найпростіші наслідки з аксіом стереометрії

2.1. Належність прямої площині

Безпосередньо з аксіом стереометрії випливає чимало властивостей взаємного розміщення точок, прямих і площин, які будуть встановлені в цьому параграфі. Розглянемо пряму a, усі точки якої належать даній площині α (рис. 19). У такому випадку кажуть, що пряма a належить площині α (або лежить у площині α).

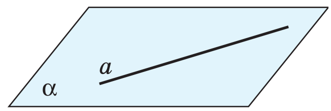


Рис. 19. Пряма a належить площині α

Коротко це записують так: $a \subset \alpha$. Запис $a \not\subset \alpha$ означає, що пряма a не належить площині α. Звертаємо увагу на те, що символи $\in$ і $\notin$ для запису належності прямої площині не використовують (докладніше про це йтиметься в п. 2.3).

Теорема (ознака належності прямої площині)

Якщо дві точки прямої належать площині, то вся пряма належить цій площині.

Доведення

□ Нехай точки A_1 і A_2 прямої a лежать у площині α (рис. 20). Оскільки в площині α справджуються аксіоми планіметрії, то в цій площині через дані точки проходить єдина пряма A_1A_2. Якщо вона не збігається з прямою a, то в просторі існують дві різні прямі, які проходять через точки A_1 і A_2, що суперечить аксіомі проведення прямої в просторі. Отже, прямі A_1A_2 і a збігаються, тобто пряма a належить площині α. Теорему доведено. ■

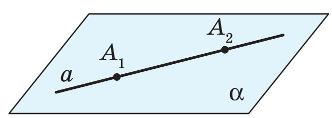


Рис. 20. До доведення ознаки належності прямої площині

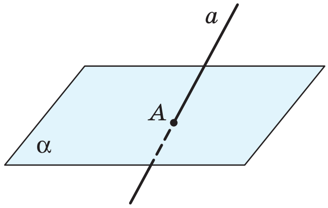
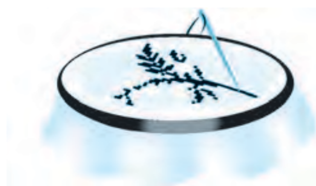


Рис. 21. Пряма a перетинає площину α в точці A

З даної теореми випливає, що пряма, яка не належить площині, має з цією площиною не більше від однієї спільної точки. У випадку, коли пряма і площина мають єдину спільну точку, кажуть, що пряма перетинає площину. На рис. 21 пряма a перетинає площину α в точці A (записують так: $a \cap \alpha = A$).

Щойно доведену теорему на практиці застосовують, наприклад, під час вишивання: для того щоб пряма нитка щільно прилягала до поверхні тканини, натягненої на п'яльці, тканину проколюють у двох місцях (рис. 22).

а



б

Рис. 22. Використання ознаки належності прямої площині під час вишивання

Задача

Вершини трикутника ABC лежать у площині α. Доведіть, що медіана AM цього трикутника лежить у площині α.

Розв'язання

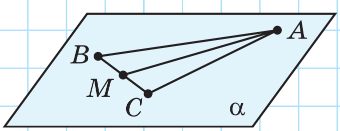


Рис. 23

Оскільки вершини B і C даного трикутника ABC лежать у площині α (рис. 23), то за ознакою належності прямої площині $BC \subset \alpha$. Тоді точка M прямої BC також лежить у площині α. Таким чином, кінці A і M медіани AM лежать у площині α, отже, за ознакою належності прямої площині $AM \subset \alpha$.

2.2. Теореми про проведення площини в просторі

Згідно з аксіомою проведення площини, площина в просторі однозначно задається трьома точками, які не лежать на одній прямій. Розглянемо інші способи проведення площини* в просторі.

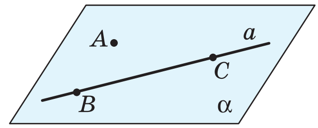


Рис. 24. До доведення теореми про проведення площини через пряму і точку

Теорема (про проведення площини через пряму і точку)

Через пряму і точку, яка не лежить на ній, можна провести площину, і тільки одну.

Доведення

□ Нехай точка A не лежить на прямій a (рис. 24). Позначимо на прямій a точки B і C і за аксіомою проведення площини проведемо площину α через точки A, B і C. Оскільки за побудовою дві точки прямої a належать площині α, то і вся пряма a належить цій площині, тобто площина α шукана.

Доведемо, що така площина єдина. Справді, якщо існує інша площина, яка проходить через точку A і пряму a, то така площина містить точки A, B і C, отже, вона за аксіомою проведення площини збігається з площиною α. Теорему доведено. ■

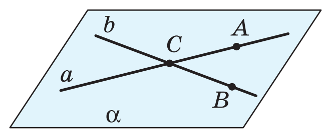


Рис. 25. До доведення теореми про проведення площини через дві прямі, що перетинаються

Теорема (про проведення площини через дві прямі, що перетинаються)

Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і тільки одну.

Доведення

□ Нехай прямі a і b перетинаються в точці C (рис. 25). Позначимо на цих прямих точки A і B, відмінні від C. Оскільки точки A, B і C не

* Зауважимо, що вже під час вивчення планіметрії ми вживали термін «проведення прямої» у тому сенсі, що така пряма однозначно задана (наприклад, проходить через дві дані точки). Далі, у разі потреби, ми будували її зображення за допомогою лінійки. У стереометрії під терміном «проведення площини» так само розуміють, що така площина однозначно задана (наприклад, проходить через три дані точки, що не лежать на одній прямій). Зважаючи на умовність відображення на плоскому рисунку просторових фігур, далі, у разі потреби, будують лише зображення частини даної площини.

лежать на одній прямій (обґрунтуйте це самостійно), то за аксіомою проведення площини існує площина α, яка проходить через ці точки. За ознакою належності прямої площині прямі a і b належать площині α.

Доведемо, що така площина єдина. Припустимо, що через прямі a і b проходить інша площина, відмінна від α. Тоді ця площина, як і площина α, містить точки A, B і C. Отже, вона за аксіомою проведення площини збігається з площиною α. Теорему доведено. ■

Рис. 26. Рятування на тонкій кризі

Практичну цінність доведеної теореми ілюструє такий приклад. Під час рятування потопаючого на тонкій кризі рятувальник має розпластатися по площині криги у вигляді букви X, щоб його вага розподілялася рівномірно і крига на провалилася (рис. 26).

Задача

Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Доведіть, що:

а) жодні три з даних точок не лежать на одній прямій;

б) прямі AB і CD не перетинаються.

Розв'язання

а) Припустимо, що точки A, B і C лежать на одній прямій. Тоді за теоремою про проведення площини через пряму і точку проведемо площину через пряму AB і точку D. Побудована площина міститиме всі чотири дані точки, що суперечить умові задачі. Отже, жодні три з даних точок не лежать на одній прямій.

б) Припустимо, що прямі AB і CD перетинаються. Тоді за теоремою про проведення площини через дві прямі, що перетинаються, проведемо площину через дані прямі.

Побудована площина міститиме всі чотири дані точки, що суперечить умові задачі.

Отже, прямі AB і CD не перетинаються.

2.3. Використання символів у записі геометричних тверджень

У процесі вивчення планіметрії ви вже використовували позначення для окремих геометричних фігур (кута, трикутника), а також відношень між фігурами (паралельності й перпендикулярності прямих, рівності й подібності трикутників тощо). З метою скорочення запису умов і розв'язань стереометричних задач і теорем додамо до вже відомих позначень низку символів, пов'язаних із множинами. Задля уникнення можливих помилок зміст цих символів необхідно обговорити окремо.

Символ належності «$\in$» в записі $x \in X$ означає належність об'єкта (елемента) x множині X, яка складається з деяких об'єктів (елементів): наприклад, пряма є множиною точок, тому належність точки A прямій a позначається так: $A \in a$. У випадку, коли елемент не належить множині, вживають символ $\notin$.

Символ включення «$\subset$» порівняно із символом належності $\in$ має дещо інший зміст: запис $Y \subset X$ означає, що певна множина Y є частиною (підмножиною) іншої множини X. Наприклад, пряма й площина є множинами точок простору: якщо пряма a лежить у площині α, то множина точок прямої a є частиною (підмножиною) множини точок площини α, тому записують $a \subset \alpha$ (а не $a \in \alpha$). У випадку, коли одна множина не є частиною іншої, вживають символ $\not\subset$.

Діаграма на рис. 27, *а* ілюструє описані особливості вживання таких символів.

Символ перерізу (спільної частини) множин «$\bigcap$» теж має свою специфіку: запис $X \bigcap Y$ означає множину спільних елементів множин X і Y (рис. 27, *б*). Наприклад, запис $a \bigcap \alpha$ означає множину спільних точок прямої a і площини α. Звертаємо особливу увагу: цей запис не може замінити фразу «пряма a перетинає площину α», оскільки спільна частина прямої a і площини α може складатися з однієї точки A (тоді записують $a \bigcap \alpha = A$), з усіх точок прямої a (запис $a \bigcap \alpha = a$ означає те саме, що й запис $a \subset \alpha$) або взагалі не містити жодної точки (записують $a \bigcap \alpha = \varnothing$,

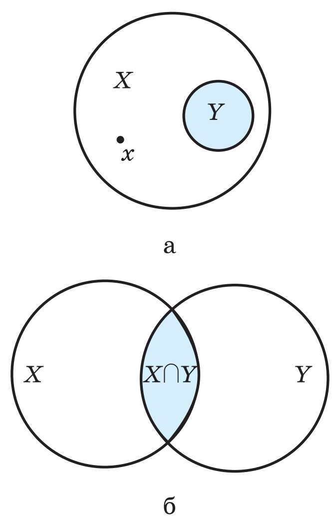


Рис. 27. Особливості вживання символів, пов'язаних із множинами

Про логічне відношення еквівалентності ви можете дізнатися, звернувшись до інтернет-підтримки підручника.

де $\varnothing$ — «порожня множина» — множина, яка не містить жодного елемента).

Для скорочення запису геометричних тверджень використовують також символи слідування й рівносильності, запозичені з математичної логіки.

Символ слідування «$\Rightarrow$» в записі $M \Rightarrow N$ означає, що з твердження M випливає твердження N. Наприклад, ознаку належності прямої площині в символьному вигляді можна записати* так: $(A_1 \in a, A_2 \in a, A_1 \in \alpha, A_2 \in \alpha) \Rightarrow a \subset \alpha$.

Символ рівносильності «$\Leftrightarrow$» в записі $M \Leftrightarrow N$ означає, що з твердження M випливає твердження N, і навпаки, з твердження N випливає твердження M.

Спробуйте самостійно записати в символьному вигляді вивчені аксіоми й теореми стереометрії. Такі вправи є дуже корисними, адже культура математичного запису є складовою культури міркувань, яка, у свою чергу, є невід'ємною частиною загальнолюдської культури. Великий німецький учений Готфрід Вільгельм Лейбніц казав: «Якщо позначення зручні для відкриттів, то вони вражаюче скорочують роботу думки».

2.4. Побудова перерізів многогранників методом слідів

У процесі розв'язування задач про побудову перерізів часто виникає необхідність побудувати пряму перетину січної площини з площиною грані многогранника. Таку пряму називають ***слідом*** січної площини на площині даної грані. Слід легко побудувати, якщо відомі дві точки площини даної грані, які належать січній площині. Але такі точки не завжди задано — для їх знаходження існує спеціальний **метод слідів**.

Розглянемо його на прикладі задачі.

Нехай необхідно побудувати переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через точки M, N і K (рис. 28, *а*). Оскільки точки M і N належать грані AA_1B_1B, а точки N і K — грані BB_1C_1C, то відрізки MN і NK — сторони шуканого перерізу.

---

* Узагалі, якщо теорема $M \Rightarrow N$ справджується і має місце твердження M, то обов'язково має місце твердження N.

Побудуємо тепер точку перетину прямої MN із площиною основи ABC. Для цього визначимо пряму перетину грані AA_1B_1B, у якій лежить пряма MN, з площиною ABC — це пряма AB. Побудуємо точку E — точку перетину прямих MN і AB (рис. 28, *б*), яка і є точкою перетину прямої MN з площиною основи ABC. Аналогічно побудуємо точку F — точку перетину прямої NK з площиною ABC, яка є точкою перетину прямих NK і BC. Пряма EF (рис. 28, *в*) — слід січної площини MNK на площині основи ABC. Як бачимо, ця пряма перетинає ребра AD і CD в точках G і T відповідно. Отже, відрізок GT — сторона шуканого перерізу.

Оскільки точки M і G належать грані AA_1D_1D, а точки T і K — грані CC_1D_1D, то залишається провести відрізки MG і TK та отримати шуканий переріз — п'ятикутник $MNKTG$ (рис. 28, *г*).

Як бачимо, найбільш «тонким» моментом застосування методу слідів є побудова точки перетину прямої, яка належить січній площині, з площиною грані многогранника. Узагальнимо різні випадки таких побудов для піраміди та прямокутного паралелепіпеда.

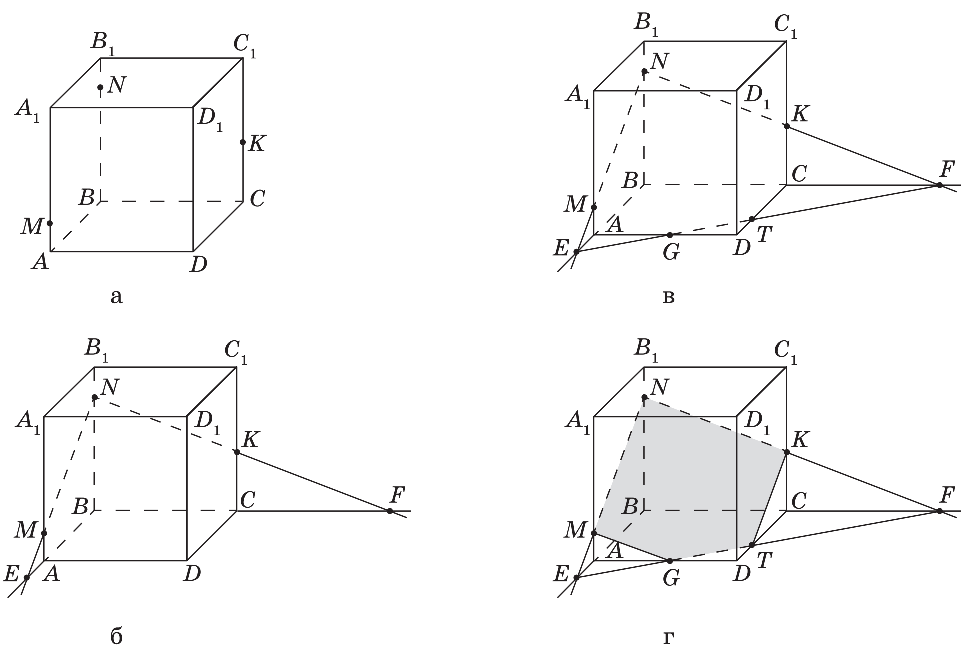
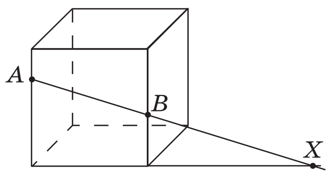
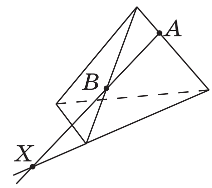
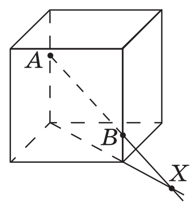
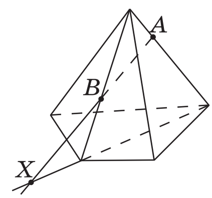
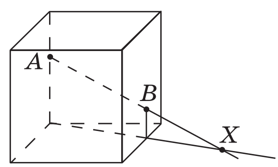
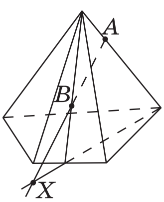
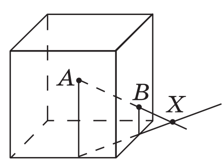
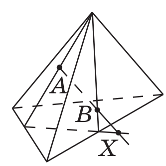
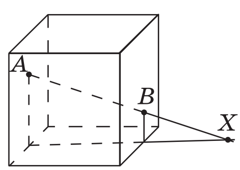
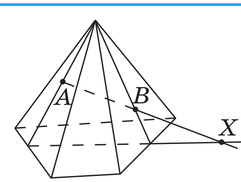


Рис. 28. Побудова перерізу куба методом слідів

Побудова точки X перетину прямої AB з площиною основи многогранника

Розміщення точок A і B	**Побудова в призмі**	**Побудова в піраміді**
На бічних ребрах однієї бічної грані		
На бічних ребрах, що не належать одній грані		
На бічній грані й на ребрі, що не належить даній грані		
На двох сусідніх бічних гранях		
На двох бічних гранях, які не є сусідніми		

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

33•. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 29). Назвіть:

а) площини, в яких лежить пряма B_1C_1;
б) точки, які лежать у площинах DD_1C і DAA_1;
в) точки перетину прямої KM з площиною ABC та прямої DK з площиною $A_1B_1C_1$;
г) прямі перетину площин ABC і ADD_1, B_1BD і $A_1B_1C_1$, B_1BD і CC_1D_1.

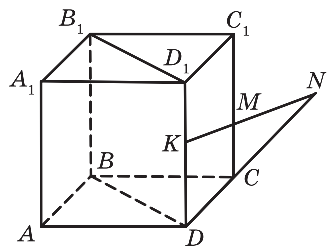


Рис. 29

34. Тесляр перевіряє якість обробки поверхні дошки (бруска), прикладаючи до неї вивірену на прямизну лінійку. На чому ґрунтується така перевірка? Чи можлива зворотна операція — за допомогою добре обробленої поверхні бруска перевірити прямизну лінійки?

35. Столяр перевіряє, чи лежать кінці чотирьох ніжок стільця в одній площині, прикріпивши до цих кінців навхрест дві нитки. На чому ґрунтується така перевірка?

36•. Поясніть принцип конструкції розкладного столу-книжки (рис. 30). Яку теорему стереометрії застосовано?

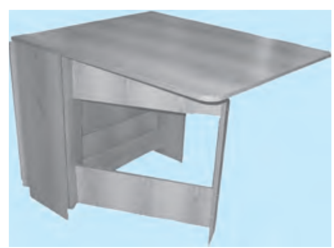


Рис. 30

37. Чи правильно, що коли три з чотирьох точок лежать на одній прямій, то через чотири дані точки можна провести площину? Чи правильне обернене твердження?

38. Скільки площин у просторі можна провести через пряму і точку? Розгляньте всі можливі випадки.

39•. Чи може переріз тетраедра бути трикутником; чотирикутником; п'ятикутником?

40. На рис. 31, *а–в* зображено перерізи куба. Чи є на цих зображеннях помилки? У чому вони полягають?

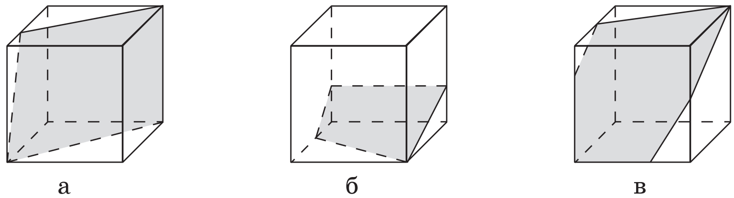


Рис. 31

Моделюємо

41. Одним із найбільш зручних засобів для моделювання частини площини є папір або картон. Ви вже розв'язували завдання на моделювання й будете розв'язувати їх надалі. Але при цьому варто згадати, що для виробництва паперу використовується деревина, а картонно-паперові виробництва шкідливо впливають на екологію. Знайдіть у мережі Інтернет факти щодо шкідливого впливу виробництва паперу та картону на навколишнє середовище. Обговоріть у соціальних мережах, що саме ви можете зробити для зменшення використання паперу. За можливості, разом із однокласниками та однокласницями здайте на переробку макулатуру та посадіть дерево. Надалі економно використовуйте картон в задачах на моделювання.

42•. Виріжте з картону паралелограм. Прикладаючи його до площини столу, дослідіть, чи лежить паралелограм у даній площині, якщо цій площині належать:

а) лише дві з його вершин;
б) сторона й один із кінців протилежної сторони;
в) дві протилежні вершини й точка перетину діагоналей;
г) дві сусідні вершини й точка перетину діагоналей.

43•. Сконструюйте з дроту каркас чотирикутної піраміди. За допомогою двох ниток (див. задачу 35) перевірте, чи лежать вершини основи піраміди в одній площині.

44•. Виготовте з дроту модель куба. За допомогою нитки змоделюйте переріз куба, який має форму трикутника; чотирикутника; п'ятикутника; шестикутника.

45. Інсталюйте на комп'ютер, ноутбук чи смартфон програму Geogebra або інший графічний редактор із підтримкою 3D-моделювання. Засобами встановленої програми змоделюйте дві площини, одна з яких проходить через три дані точки, а друга — через дві прямі, що перетинаються. Пофарбуйте ці площини двома різними кольорами. Визначте лінію перетину площин. Засобами програми поверніть рисунок у найбільш сприятливе для його розуміння положення. Надішліть отриманий результат однокласнику чи однокласниці електронною поштою.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

46•. Точка A належить площині α, а точка B не належить площині α. Чи належить площині α середина відрізка AB? Відповідь обґрунтуйте.

47•. Кінці відрізка AB належать площині β. Доведіть, що середина даного відрізка також належить площині β.

48. Якщо прямі AB і CD не лежать в одній площині, то прямі AC і BD також не лежать в одній площині. Доведіть.

49. Дві прямі перетинаються в точці O. Доведіть, що всі прямі, які перетинають обидві дані прямі й не проходять через точку O, лежать в одній площині.

50. Точка A не належить прямій a. Доведіть, що всі прямі, які проходять через точку A і перетинають пряму a, лежать в одній площині.

51. Доведіть, що через будь-яку пряму можна провести дві різні площини.

52. Кожна з двох різних площин містить прямі AB і BC. Доведіть, що точка C лежить на прямій AB.

53•. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через:

а) ребра A_1B_1 і CD;
б) вершину B_1 і діагональ основи AC;
в) ребро CC_1 і середину ребра A_1B_1;
г) середини ребер AD і A_1D_1 паралельно діагоналі основи AC.

54•. Побудуйте переріз даного куба площиною MNK (рис. 32, *а–в*).

55•. Побудуйте переріз деякої трикутної піраміди $PABC$ площиною, яка проходить через:

а) ребро AB і середину ребра PC;

б) вершину P і висоту основи AD.

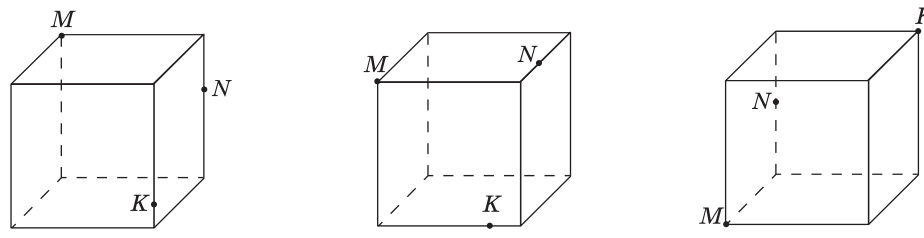


Рис. 32

Рівень Б

56. Вершина D паралелограма $ABCD$ лежить у площині α. Прямі BA і BC перетинають площину α в точках E і F відповідно (рис. 33). Чи правильно, що точки E, D і F не лежать на одній прямій? Відповідь обґрунтуйте.

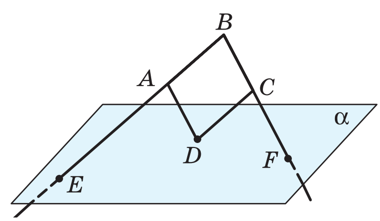
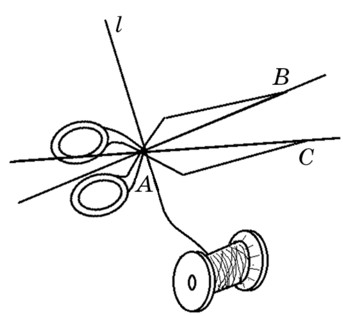


Рис. 33

57. Дві сусідні вершини й точка перетину діагоналей паралелограма лежать у площині α. Доведіть, що решта вершин паралелограма також лежать у площині α.

58. У трикутнику ABC вершини A і B та середина сторони BC лежать у площині α. Доведіть, що всі сторони трикутника лежать у площині α.

59. Через точку перетину прямих AB і AC проведено пряму l, яка не лежить з ними в одній площині. Доведіть, що прямі l і BC не перетинаються.



60. Пряма a лежить у площині α. Пряма b перетинає площину α в точці C, яка не належить прямій a. Доведіть, що прямі a і b не перетинаються.

61. У тетраедрі $PABC$ точки A_1, B_1 і C_1 лежать на ребрах PA, PB і PC відповідно (рис. 34). Побудуйте точку перетину:

а) прямої B_1A_1 з площиною ABC;

б) прямої B_1C_1 з площиною ABC.

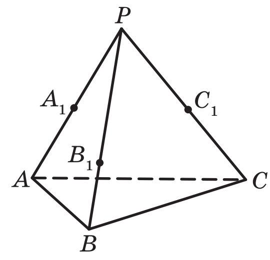


Рис. 34

62. Розв'яжіть задачу 61 засобами графічного редактора Geogebra, DG чи іншого. Порівняйте розв'язання, записане вами у зошиті, і отримане програмними засобами. Як ви вважаєте, яким способом зручніше побудувати відповідні точки? Аргументуйте свою позицію.

63. Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 не лежать в одній площині. Точки M і N — середини відрізків CB і AD_1 відповідно. Побудуйте точку перетину:

а) прямої DM з площиною ABC_1;

б) прямої C_1N з площиною ABC.

64. Зобразіть переріз тетраедра $PABC$ площиною, яка проходить через:

а) пряму BC і середину ребра PA;

б) прямі A_1B_1 і B_1C_1, де A_1, B_1 і C_1 — середини ребер PA, PB і PC відповідно.

65. Зобразіть переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через:

а) пряму BD і точку C_1; б) прямі AC_1 і A_1C.

66. Побудуйте переріз даного куба площиною MNK (рис. 35, *а–г*).

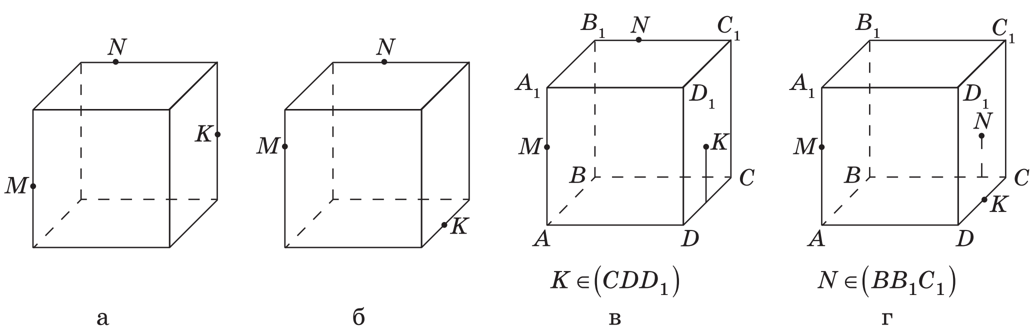


Рис. 35

67. Побудуйте переріз даної чотирикутної піраміди площиною MNK (рис. 36, *а–в*).

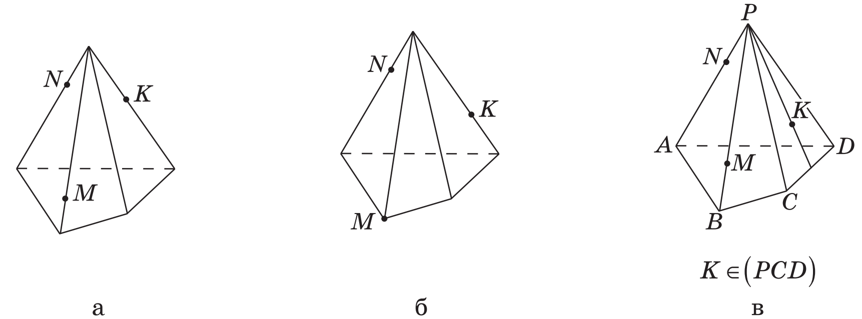


Рис. 36

Рівень B

68. У трикутнику ABC через вершини A і C та центр O описаного кола можна провести принаймні дві різні площини. Знайдіть площу трикутника, якщо $OB = 5$ см, $BC = 8$ см.

69. Дві вершини трикутника належать площині α. Чи належить цій площині третя вершина, якщо у даній площині лежить:

а) центр кола, вписаного в трикутник;

б) центр кола, описаного навколо трикутника?

Проведіть дослідження.

70. Середини сторін трикутника лежать у площині α. Доведіть, що сторони даного трикутника належать площині α.

71. Якщо будь-які дві з n прямих $(n > 2)$ перетинаються і всі точки їх попарних перетинів різні, то всі дані прямі лежать в одній площині. Доведіть.

72. Зобразіть переріз тетраедра $PABC$ площиною, яка проходить через пряму KM і точку N (рис. 37).

73. В налаштуваннях програми Geogebra, DG чи іншого графічного редактора виберіть англійську або будь-яку іншу іноземну мову. Пригадайте переклади відповідних термінів та розв'яжіть задачу 72 засобами встановленої програми.

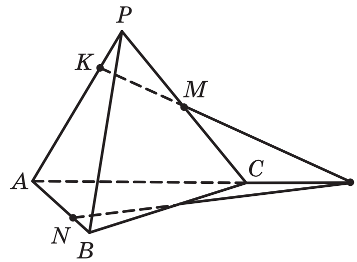
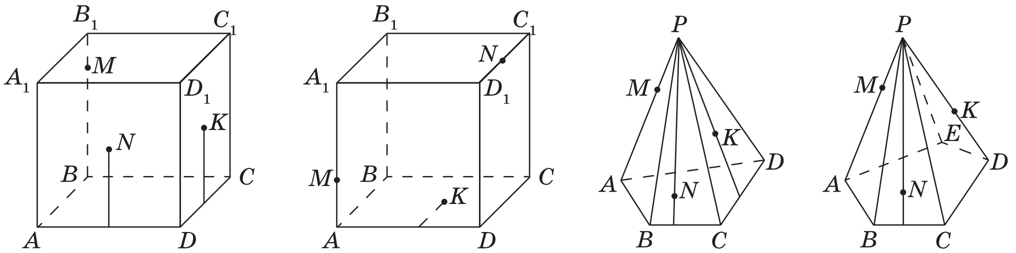


Рис. 37

74. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M і N — середини ребер AA_1 і CC_1 відповідно. Зобразіть переріз куба площиною, яка проходить через прямі B_1M і B_1N.

75. Побудуйте переріз даної фігури площиною MNK (рис. 38, *а–г*).



$N \in (ADD_1)$, $K \in (CDD_1)$ — а

$K \in (ABC)$ — б

$N \in (PBC)$, $K \in (PCD)$ — в

$N \in (PBC)$ — г

Рис. 38

76. Доведіть, що через будь-яку точку простору можна провести безліч прямих, жодні три з яких не лежать в одній площині.

77. Кінці відрізка AB належать двом площинам, які перетинаються по прямій a, що не проходить через точки A і B. Доведіть, що існує площина, яка проходить через пряму a, така, що точки A і B лежать по різні боки від цієї площини.

Повторення перед вивченням § 3

Теоретичний матеріал

- паралельні прямі; 7 клас, § 4
- паралелограм; 8 клас, § 2
- трапеція; середні лінії трикутника і трапеції; 8 клас, § 5, 6
- ознаки подібності трикутників; 8 клас, § 11
- властивості відношень; транзитивність. 9 клас, § 12

Задачі

78. Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає сторони AB і BC в точках A_1 і C_1 відповідно. Знайдіть AC, якщо $A_1C_1 = 6$ см, $BA_1 : A_1A = 3:1$.

79. На площині проведено прямі a, b і c, причому $a \parallel b$, $b \parallel c$. Як розміщені прямі a і c? Чи зміниться відповідь, якщо дані прямі не лежать в одній площині? Висловте припущення.

Тестове завдання для самоперевірки № 1

1. Закінчіть речення так, щоб утворилося правильне твердження. Через дві точки простору можна провести...

А єдину пряму. **В** єдиний промінь.
Б єдину площину. **Г** єдиний відрізок.

2. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Серед даних прямих виберіть пряму, яка не належить площині ACD.

А AC **Б** AD **В** CD **Г** BD

3. Скільки різних площин можна провести через три точки, які належать одній прямій?

А Одну **В** Три **Б** Жодної **Г** Безліч

4. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Серед даних прямих виберіть пряму перетину площин ABD і ACD.

А AB **Б** AD **В** BD **Г** BC

5. Прямі a, b і c попарно перетинаються і не мають спільної для всіх трьох точки. Скільки різних площин можна провести через ці прямі?

А Три **Б** Безліч **В** Одну **Г** Жодної

6. Дано п’ять точок A, B, M, N і K. Відомо, що площина проходить через точки A і B , але не проходить через точки M, N і K. Серед даних точок назвіть точку, яка не може належати прямій AM.

А Точка N **Б** Точка B **В** Точка K **Г** Інша відповідь

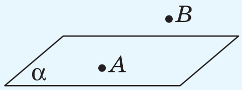
Онлайн-тестування № 1

Підсумки розділу І

АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Аксіома належності точок площині

Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, що не належать їй

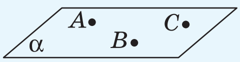


Аксіома проведення прямої в просторі

Через будь-які дві точки простору можна провести пряму, і тільки одну

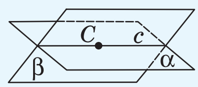
Аксіома проведення площини

Через три точки, що не належать одній прямій, можна провести площину, і тільки одну



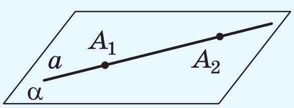
Аксіома перетину площин

Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку



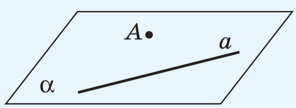
Ознака належності прямої площині

Якщо дві точки прямої належать площині, то вся пряма належить цій площині



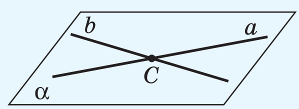
Теорема про проведення площини через пряму і точку

Через пряму і точку, яка не лежить на ній, можна провести площину, і тільки одну



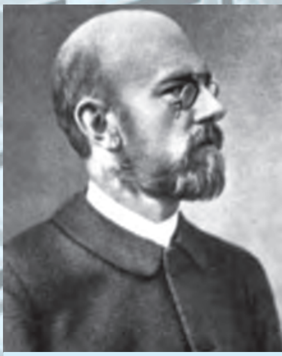
Теорема про проведення площини через дві прямі, що перетинаються

Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і тільки одну

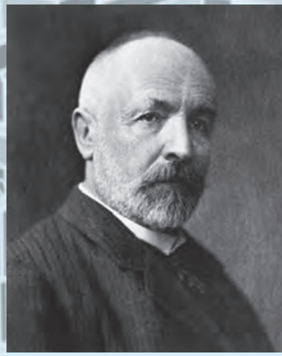


Контрольні запитання до розділу І

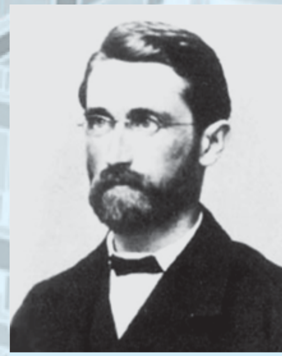
1. Назвіть основні геометричні фігури в просторі.
2. Сформулюйте чотири аксіоми стереометрії.
3. Сформулюйте ознаку належності прямої площині.
4. Сформулюйте теореми про проведення площини в просторі.



Давид Гільберт



Георг Кантор



Ріхард Дедекінд

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Олексій Погорєлов

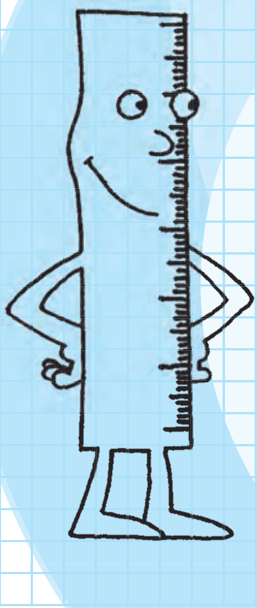
Стереометрія як розділ геометрії зароджувалася й розвивалася разом із планіметрією. Останні три книги «Начал» Евкліда присвячені саме геометрії в просторі. З тих самих часів наукові основи стереометрії майже не змінювалися, але аксіоматика й методика її викладання значно вдосконалювалися.

Відкриття російським геометром М. І. Лобачевським неевклідової геометрії дало відчутний поштовх до осучаснення і систематизації евклідових аксіом. Визначних результатів у цьому досягли німецькі математики: у 1892 р. М. Паш (1843–1930) розробив так звані аксіоми порядку, пов'язані з логічним обґрунтуванням поняття «лежати між»; ще раніше Г. Кантор (1845–1918) і Р. Дедекінд (1831–1916) дослідили групу аксіом неперервності, а класична робота Д. Гільберта (1862–1943) «Основи геометрії» (1899) узагальнила напрацювання багатьох геометрів XVII–XIX ст.

Визначний український геометр О. В. Погорєлов (1919–2002) у своїх «Основах геометрії» (1969) створив власну аксіоматику евклідової геометрії та блискуче розв'язав низку проблем, сформульованих попередниками.

Розділ II

Паралельність прямих і площин у просторі



Щоб найкраще зрозуміти метод проведення переконливих доведень, потрібно лише продемонструвати той, який застосовується в геометрії.

Блез Паскаль,
видатний французький вчений

Ви вже знаєте, що в планіметрії (геометрії на площині) особливу роль відіграють паралельні прямі та відрізки. Вивчаючи їхні властивості, ви не тільки збагатили свій досвід побудови логічних міркувань, а й дізналися чимало корисного. Наприклад, засвоїли теорему про суму кутів трикутника, теорему Фалеса, властивості паралелограма та трапеції тощо. До речі, їх застосовують і в інших розділах геометрії та в практичній діяльності.

У цьому розділі розглядатимуться паралельні об'єкти у просторі. Ви дізнаєтеся, що паралельними бувають не тільки прямі, а й площини. Крім того, що прямі, які не перетинаються, у просторі можуть бути як паралельними (належати одній площині), так і мимобіжними (не належати одній площині). Взагалі, вивчати просторову геометрію порівняно з «плоскою» хоч і складніше, але дуже цікаво.

До того ж зауважимо, що властивості та ознаки паралельних площин у просторі варто не тільки вивчати, але й моделювати — це корисно не лише для опанування геометричної теорії, а й для практичного застосування у майбутній професії: у техніці, архітектурі, будівництві, дизайні тощо.

§3 Прямі в просторі

3.1. Паралельні й мимобіжні прямі

Як відомо з планіметрії, дві прямі на площині можуть або перетинатися, або бути паралельними. У стереометрії можливостей для взаємного розміщення двох прямих більше.

Означення

Дві прямі в просторі називаються такими, що **перетинаються**, якщо вони лежать в одній площині і мають єдину спільну точку.

Випадок, коли дві прямі в просторі перетинаються, розглядався в попередньому параграфі. Виділимо інші випадки взаємного розміщення прямих у просторі. Спочатку розглянемо паралельні прямі.

Означення

Дві прямі в просторі називаються **паралельними**, якщо вони лежать в одній площині і не мають спільних точок.

Паралельність прямих a і b (рис. 39) в просторі позначається так само, як і на площині: $a \parallel b$. Наочне уявлення про паралельні прямі в просторі дають, наприклад, ребра двотаврової балки (рис. 40, *а*).

Звернемо увагу також на те, що площина, про яку йдеться в означенні, містить дві паралельні прямі, але не обов'язково містить третю пряму, паралельну двом даним. Наочне уявлення про це дають паралельні ребра прямозубої шестірні (рис. 40, *б*): будь-які два з них лежать в одній площині, але всі вони разом — ні.

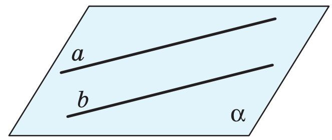


Рис. 39. Паралельні прямі

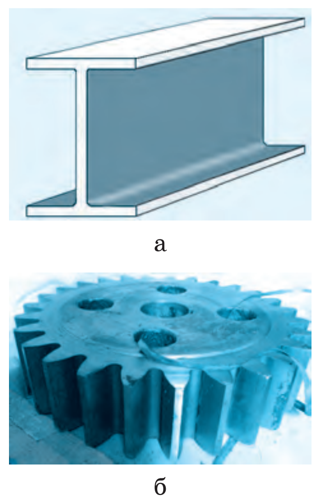


Рис. 40. Приклади паралельності прямих у просторі:
а — двотаврова балка;
б — прямозуба шестірня

Теорема (про проведення площини через дві паралельні прямі)

Через дві паралельні прямі можна провести площину, і тільки одну.

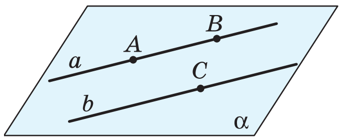


Рис. 41. До доведення теореми про проведення площини через дві паралельні прямі

Доведення

☐ Нехай дано паралельні прямі *a* і *b*. Через них за означенням можна провести площину. Позначимо її α. Доведемо методом від супротивного, що така площина єдина.

Припустимо, що існує площина β, відмінна від α, яка містить дані прямі. Позначимо на прямій *a* точки *A* і *B*, а на прямій *b* — точку *C* (рис. 41). Оскільки $a \parallel b$, точки *A*, *B* і *C* не належать одній прямій. Кожна з площин α і β містить обидві дані прямі, тобто проходить через точки *A*, *B* і *C*. Але це суперечить аксіомі проведення площини, за якою через точки *A*, *B* і *C* можна провести єдину площину. Отже, площина, проведена через *a* і *b*, єдина. Теорему доведено. ■

Таким чином, із вивчених аксіом і теорем випливають такі ***чотири способи проведення площини в просторі***:

- через три точки, що не належать одній прямій;
- через пряму і точку, яка не належить даній прямій;
- через дві прямі, що перетинаються;
- через дві паралельні прямі.

Задача

Доведіть, що всі прямі, які перетинають кожну з двох даних паралельних прямих, лежать в одній площині.

Розв'язання

Нехай дано паралельні прямі *a* і *b*. На підставі щойно доведеної теореми через дані прямі проходить єдина площина α (рис. 42). Нехай *c* — довільна пряма, яка перетинає прямі *a* і *b* в точках *A* і *B* відповід-

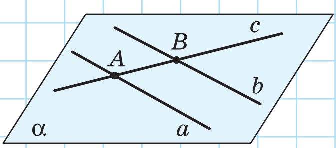
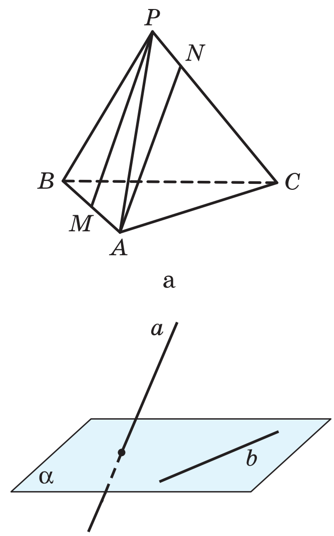


Рис. 42

но. Оскільки пряма c має з площиною α спільні точки A і B, то за теоремою про належність прямої площині $c \subset \alpha$. Отже, всі прямі, які перетинають дві дані паралельні прямі, лежать в одній площині.

Крім паралельних прямих і прямих, що перетинаються, у просторі існують також пари прямих, через які неможливо провести площину. Такими, наприклад, є прямі, що містять ребра PA і BC тетраедра $PABC$ (рис. 43, *а*), або прямі a і b на рис. 43, *б*.



а

б

Рис. 43. До означення мимобіжних прямих

Означення

Дві прямі в просторі називаються **мимобіжними**, якщо вони не лежать в одній площині.

Це означає, що не існує площини, яка містила б обидві мимобіжні прямі.

Очевидно, що мимобіжні прямі не паралельні й не перетинаються, хоча на «плоскому» рисунку вони можуть виглядати і як паралельні (прямі PM і AN на рис. 43, *а*), і як такі, що перетинаються (прямі PA і BC на рис. 43, *а*).

Наочне уявлення про мимобіжні прямі дають дві дороги, одна з яких проходить під естакадою, а друга — по естакаді (рис. 44), або 3D-лабіринт (рис. 45).

Іноді в задачах розглядають також ***паралельні або мимобіжні відрізки (промені)***, тобто відрізки (промені), які лежать на паралельних (або мимобіжних) прямих.

Отже, взаємне розміщення двох прямих у просторі можна описати такою схемою.

Рис. 44. Естакада

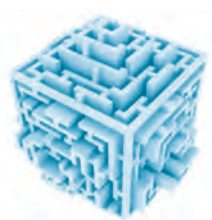
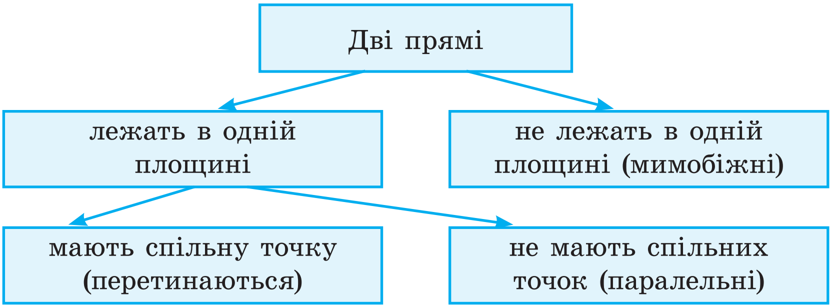


Рис. 45. 3D-лабіринт



3.2. Ознаки паралельних і мимобіжних прямих

У процесі доведення теорем і розв'язування задач на обґрунтування взаємного розміщення прямих у просторі користуватися лише означеннями не завжди буває зручно. Доведемо ознаки, за якими можна встановити, чи є дані прямі паралельними або мимобіжними.

Теорема (ознака паралельності прямих)

Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою:

$$(a \parallel b, b \parallel c) \Rightarrow a \parallel c.$$

Доведення

☐ Нехай дано прямі a, b і c, причому $a \parallel b$, $b \parallel c$. Доведемо, що $a \parallel c$. Випадок, коли прямі a, b, c лежать в одній площині, було розглянуто в курсі планіметрії. Припустимо, що прямі a, b і c не лежать в одній площині. Нехай паралельні прямі a і b лежать в площині α, паралельні прямі b і c — в площині β (рис. 46).

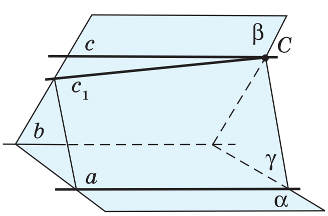


Рис. 46. До доведення ознаки паралельності прямих

Через пряму a і довільну точку C прямої c проведемо площину γ; нехай $\gamma \cap \beta = c_1$, тобто пряма c_1 належить кожній із площин γ і β. Доведемо, що пряма c_1 не може перетинати площину α. Справді, якщо c_1 перетинає α, то точка їх перетину як спільна точка площин α і β має належати прямій b. З другого боку, та сама точка перетину як спільна точка площин γ і α має належати прямій a, а це неможливо, оскільки $a \parallel b$ за умовою. Отже, пряма c_1 не перетинає ані пряму a, ані пряму b. Прямі c_1 і b лежать в одній площині й не перетинаються. Це означає, що $c_1 \parallel b$, а тоді прямі c і c_1 збігаються за аксіомою паралельних прямих, застосованою в площині β. Звідси випливає, що пряма c_1 (тобто пряма c) лежить в одній площині з прямою a і не перетинає її. Отже, за означенням паралельних прямих $a \parallel c$. Теорему доведено. ■

Нагадаємо, що твердження $(a \parallel b, b \parallel c) \Rightarrow a \parallel c$ означає транзитивність відношення паралельності прямих у просторі, тому доведену теорему інакше називають ***теоремою про транзитивність відношення паралельності для прямих.***

$a \parallel b$

Ознака паралельності прямих використовується для вивчення багатьох просторових фігур, зокрема ***просторового чотирикутника*** — чотирикутника, вершини якого не лежать в одній площині.

Задача

Доведіть, що середини сторін просторового чотирикутника є вершинами паралелограма.

Розв'язання

Нехай точки K, L, M і N — середини сторін AB, BC, CD і AD просторового чотирикутника $ABCD$ відповідно (рис. 47). Проведемо діагональ AC. За означенням середньої лінії трикутника відрізки KL і MN — середні лінії трикутників ABC і ADC відповідно. За теоремою про середню лінію трикутника $KL \parallel AC$, $MN \parallel AC$, $KL = MN = \frac{1}{2}AC$. Тоді за ознакою паралельності прямих $KL \parallel MN$ і точки K, L, M і N лежать в одній площині. Отже, в чотирикутнику $KLMN$ дві сторони паралельні й рівні, звідси $KLMN$ — паралелограм за ознакою.

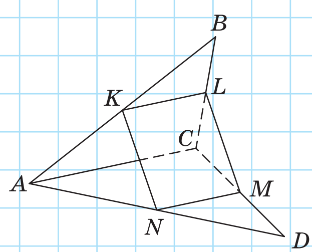
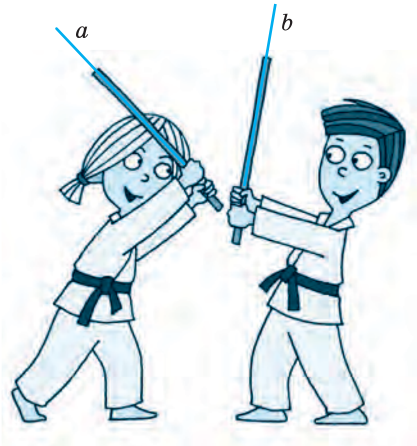


Рис. 47



Прямі a і b мимобіжні

Теорема (ознака мимобіжних прямих)

Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину в точці, що не належить першій прямій, то такі прямі мимобіжні.

Доведення

□ Нехай дано прямі a і b та площину α, $a \subset \alpha$, $b \cap \alpha = B$, $B \notin a$ (рис. 48). Доведемо методом від супротивного, що прямі a і b мимобіжні.

Припустимо, що прямі a і b не є мимобіжними, тоді через дані прямі можна провести деяку площину β. Ця площина міститиме пряму a і точку B. А оскільки через пряму і точку поза нею можна провести єдину площину, то площина β збігається з площиною α. Тоді пряма b має лежати в площині α, що суперечить умові. Отже, наше припущення хибне: прямі a і b не лежать в одній площині, тобто є мимобіжними. Теорему доведено. ■

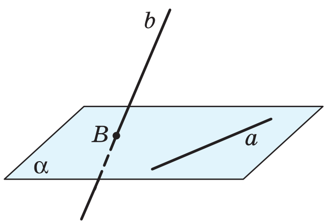


Рис. 48. До доведення ознаки мимобіжних прямих

Із доведеного, зокрема, випливає, що пряма, яка перетинає площину α в точці B, і будь-яка пряма даної площини, яка не проходить через точку B, мимобіжні.

Іноді зручно користуватися іншою ознакою мимобіжних прямих: **якщо точки A, B, C і D не лежать в одній площині, то прямі AB і CD, AC і BD, AD і BC мимобіжні.**

Доведіть це твердження самостійно.

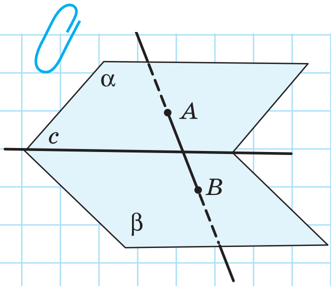


Рис. 49

Задача

Площини α і β перетинаються по прямій c. Точка A лежить у площині α, точка B — у площині β, причому жодна з цих точок не належить прямій c. Доведіть, що прямі c і AB мимобіжні.

Розв'язання

Спочатку покажемо, що пряма AB перетинає площину β в точці B (рис. 49). Справді, якщо

$AB \subset \beta$, то $A \in \beta$, а отже, точка A як спільна точка площин α і β має належати прямій c, що суперечить умові. Тоді оскільки $c \subset \beta$, $AB \cap \beta = B$, $B \notin c$, то за ознакою мимобіжних прямих прямі c і AB мимобіжні.

3.3. Властивості паралельних прямих

Однією з найважливіших аксіом планіметрії є аксіома паралельних прямих (аксіома Евкліда) і пов'язана з нею теорема, яка стверджує, що на площині через будь-яку точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і тільки одну. Аналогічне твердження справджується і в просторі.

Теорема (про існування і єдиність прямої, паралельної даній)

Через точку простору, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і тільки одну.

Доведення

□ Нехай дано пряму a і точку A, $A \notin a$. За теоремою про проведення площини через пряму і точку проведемо через пряму a і точку A площину α (рис. 50). У цій площині за теоремою планіметрії існує єдина пряма b, яка проходить через точку A і паралельна прямій a.

Доведемо, що така пряма є єдиною не тільки на площині, але й у просторі. Припустимо, що існує пряма b_1, відмінна від прямої b, яка проходить через точку A і паралельна прямій a. Тоді площина α_1, яка містить паралельні прямі a і b_1, проходить через точку A і пряму a, а отже, за теоремою про проведення площини через пряму і точку, збігається з площиною α. А оскільки на площині пряма, яка проходить через точку A паралельно прямій a, єдина, то прямі b і b_1 також збігаються, що суперечить припущенню. Теорему доведено. ■

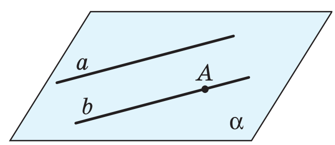


Рис. 50. До доведення теореми про існування і єдиність прямої, паралельної даній

Опорна задача
(про площину, яка містить паралельні прямі, що перетинають дану пряму)

Усі паралельні прямі, що перетинають дану пряму, лежать в одній площині. Доведіть.

Розв'язання

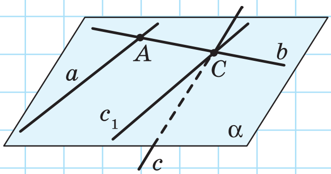


Рис. 51

Нехай прямі a і b перетинаються в точці A (рис. 51). За теоремою про проведення площини через дві прямі, що перетинаються, проведемо єдину площину α через прямі a і b. Доведемо, що будь-яка пряма, яка паралельна прямій a і перетинає пряму b, лежить у площині α.

Припустимо, що існує пряма c, яка паралельна прямій a, перетинається з прямою b в деякій точці C і не лежить у площині α. Тоді проведемо в площині α через точку C пряму , паралельну a. За щойно доведеною теоремою в просторі через точку C можна провести єдину пряму, паралельну a. Отже, прямі c і c_1 збігаються, тобто $c \subset \alpha$.


Рис. 52. Телевізійна антена

На практиці доведене твердження застосовується, наприклад, в конструкції деяких видів телевізійних антен (рис. 52).

3.4. Протилежні й суперечні твердження

У стереометрії, як і у планіметрії, паралельність прямих часто доводять методом від супротивного. У планіметрії відповідне доведення зазвичай розпочиналося так: «Припустимо, що дані прямі не паралельні; тоді вони перетинаються». У стереометрії у зв'язку з існуванням мимобіжних прямих таке міркування не є правильним. Отже, виникає необхідність більш ретельно дослідити відношення між твердженнями за значенням істинності.

Два твердження називають ***суперечними***, якщо вони не можуть одночасно справджуватися і не можуть бути одночасно хибними. Наприклад, суперечними є твердження «прямі a і b паралельні» і «прямі a і b не паралельні»: якщо одне з них справджується, то інше обов'язково хибне, і навпаки.

Суперечні твердження не слід плутати з ***протилежними***. Два твердження є протилежними, якщо вони не можуть бути одночасно істинними, але можуть бути одночасно хибними. Зокрема, для прямих у просторі протилежними є твердження «прямі a і b паралельні» і «прямі a і b перетинаються», адже у випадку, коли прямі a і b мимобіжні, обидва ці твердження хибні.

Використовуючи метод доведення від супротивного, ми маємо висувати припущення, суперечне (а не протилежне) твердженню, яке треба довести. Таким завжди є ***заперечення*** даного твердження, яке зазвичай утворюється за допомогою частки «не» (або через її вилучення, якщо вона вже є в даному твердженні). Отже, доводячи паралельність двох прямих у просторі методом від супротивного, ми припускаємо, що дані прямі не паралельні, а далі маємо розглянути два випадки — коли дані прямі перетинаються або є мимобіжними.

Наведемо приклади суперечних і протилежних тверджень з інших розділів математики і повсякденного життя. Твердження «число x додатне $(x>0)$» і «число x від'ємне $(x<0)$» протилежні, адже у випадку $x=0$ обидва вони хибні. Суперечним твердженню $x>0$ буде твердження $x\leqslant 0$, тобто «число x недодатне». А ось ще один приклад: протилежними є твердження «ця дівчина — білявка» і «ця дівчина — брюнетка». Одночасно білявкою і брюнеткою дівчина бути не може, але якщо вона руденька, то обидва ці твердження хибні. Суперечними в цьому випадку є твердження «ця дівчина — білявка» і «ця дівчина — не білявка».

Запитання і задачі

Обговорюємо теорію

80•. Чи правильно, що:

а) дві прямі, які не є паралельними, мають спільну точку;

б) дві прямі, які не є мимобіжними, лежать в одній площині;

в) дві прямі, які лежать в одній площині, паралельні;

г) дві паралельні прямі лежать в одній площині?

81. Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) терміни «паралельні прямі», «мимобіжні прямі» та формулювання найголовніших фактів § 3.

82. Перекладіть англійською (або іншою іноземною мовою) умову та власне розв'язання завдання 80. Обговоріть одержаний переклад з однокласниками та однокласницями.

83•. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 53). Визначте взаємне розміщення прямих:

а) CD і B_1D; г) A_1D і B_1C;

б) AB і C_1D_1; д) A_1C і AC_1.

в) AC і DD_1;

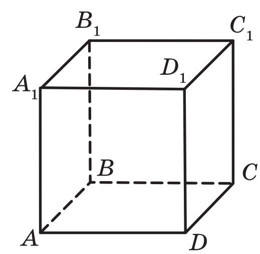


Рис. 53

84. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 53). Назвіть прямі, які містять ребро куба і є:

а) паралельними прямій A_1B_1;

б) такими, що перетинаються з прямою CC_1;

в) мимобіжними з прямою BC.

85. Чи може кожна з двох мимобіжних прямих бути паралельною деякій третій прямій; перетинатися з деякою третьою прямою?

86. Прямі a і b паралельні. Пряма a лежить у площині α. Чи може пряма b перетинати цю площину? Відповідь обґрунтуйте.

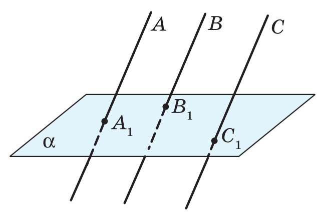


Рис. 54

87. На рис. 54 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. Чи лежать точки A_1, B_1 і C_1 на одній прямій? Чи зміниться відповідь у випадку, коли існує пряма l, яка перетинає всі дані прямі?

88. Наведіть приклад твердження про взаємне розміщення прямих, яке:

а) справджується і на площині, і в просторі;

б) справджується на площині, але не справджується в просторі.

89. Визначте, якими є дані твердження — суперечними чи протилежними.

а) «Точки A, B і C лежать на одній прямій» і «Точки A, B і C не лежать на одній прямій».

б) «Прямі a і b не лежать в одній площині» і «Прямі a і b паралельні».

в) «Прямі a і b лежать в одній площині» і «Прямі a і b мимобіжні».

Моделюємо

90•. Уявіть лінії перетину стін, підлоги й стелі класної кімнати як прямі та вкажіть:

а) три паралельні прямі, які не лежать в одній площині;

б) дві мимобіжні прямі;

в) дві прямі, що перетинаються, і третю пряму, паралельну одній із них і мимобіжну з другою.

91•. Сконструюйте моделі просторових фігур, які містять паралельні й мимобіжні прямі.

92•. Нарисуйте на цупкому папері паралелограм $ABCD$ і трапецію AB_1C_1D $(AD \parallel B_1C_1)$, які лежать по різні боки від прямої AD. Виріжте рисунок і перегніть його по прямій AD так, щоб побудовані фігури не лежали в одній площині. Чи збереглася при перегині паралельність прямих? Яких саме? Назвіть усі прямі, які разом із прямою AD складають пару мимобіжних прямих.

93•. Нарисуйте на цупкому папері паралелограм $ABCD$. Виріжте рисунок і перегніть його так, щоб утворився просторовий чотирикутник $ABCD$. Назвіть усі пари мимобіжних прямих, що утворилися.

К **94.** Засобами програми Geogebra чи іншого графічного редактора з підтримкою 3D-моделювання нарисуйте пару паралельних прямих та пару мимобіжних прямих. Програмними засобами зробіть першу пару прямих жовтого кольору, а другу — блакитного. Поверніть рисунок засобами 3D-моделювання таким чином, щоб обидві пари прямих уявлялись паралельними. Потім поверніть рисунок таким чином, щоб друга пара уявлялась парою прямих, що перетинаються. Насамкінець, поверніть рисунок таким чином, щоб обидві пари прямих на вигляд відповідали умові задачі. Зробіть висновки з проведеного моделювання.

Розв'язуємо задачі

Рівень А

95•. Визначте, яким може бути взаємне розміщення прямих a і c, якщо:

а) прямі a і b перетинаються, а прямі b і c паралельні;

б) прямі a і b паралельні, а прямі b і c мимобіжні.

Зробіть відповідні рисунки.

96. Дано мимобіжні прямі a і b та точку O, яка не належить жодній із них. Доведіть, що через точку O неможливо провести дві прямі, кожна з яких перетинала б обидві прямі a і b.

97•. Прямі AB і CD мимобіжні. Доведіть, що прямі AD і BC також мимобіжні.

98. Пряма a лежить у площині α. Пряма b паралельна прямій a і проходить через точку B площини α. Доведіть, що пряма b також лежить у площині α.

99. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків BC і CD, паралельна прямій, яка проходить через середини відрізків BA і AD.

100. Паралелограми $ABCD$ і A_1B_1CD не лежать в одній площині. Доведіть, що ABB_1A_1 — паралелограм.

Рівень Б

101. Дано прямі a, b, a_1 і b_1, причому $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$. Визначте взаємне розміщення прямих a і b, якщо прямі a_1 і b_1:

а) паралельні;

б) мимобіжні.

102. Прямі m і n мимобіжні. Точки A і B належать прямій m, а точки C і D — прямій n. Чи можуть відрізки AC і BD мати спільну середину? Відповідь обґрунтуйте.

103. Паралелограми $ABCD$ і $ABEF$ не лежать в одній площині. Доведіть рівність трикутників CBE і DAF.

104. Ромб $AMND$ і трапеція $ABCD$ з основою BC не лежать в одній площині.

а) Визначте взаємне розміщення прямих MN і BC.

б) Знайдіть площу ромба, якщо $MN = 5$ см, $BC = 3$ см, а висота ромба дорівнює середній лінії трапеції.

105. Трапеції $ABCD$ і AB_1C_1D мають спільну основу AD і не лежать в одній площині, причому $BC \neq B_1C_1$.

а) Доведіть, що чотирикутник BB_1C_1C — трапеція.

б) Знайдіть основи трьох даних трапецій, якщо їхні середні лінії дорівнюють 7 см, 8 см і 9 см.

106. Площина α проходить через кінець A відрізка AB. Через кінець B і точку C даного відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть:

а) BB_1, якщо $CC_1 = 6$ см, $AC : AB = 3 : 4$;

б) AB, якщо $CC_1 = 4$ см, $BB_1 = 6$ см, $AC = 8$ см;

в) CC_1, якщо $BB_1 = 12$ см, $AC = 16$ см, $CB = 8$ см.

107. Дано площину α і відрізок AB. Через кінці відрізка і його середину C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно.

а) Доведіть, що точки A_1, B_1 і C_1 лежать на одній прямій.

б) Знайдіть CC_1, якщо $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 10$ см.

Розгляньте два випадки — коли відрізок AB перетинає площину α і коли не перетинає.

108. Пряма m не лежить у площині трикутника ABC (рис. 55). Визначте взаємне розміщення прямих DD_1 і FF_1.

109. Точка P не лежить у площині чотирикутника $ABCD$, точка K — середина відрізка PA. Доведіть, що прямі PB і KD мимобіжні.

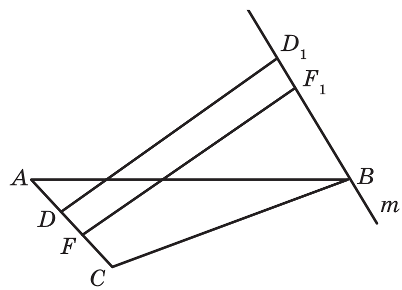


Рис. 55

Рівень В

110. Доведіть, що відрізки, які сполучають середини мимобіжних ребер тетраедра, перетинаються в одній точці й діляться цією точкою навпіл.

111. Точка P не належить площині квадрата $ABCD$. Доведіть, що пряма, яка проходить через точки перетину медіан трикутників PAB і PCD, паралельна прямим BC і AD.

112. Паралелограм $ABCD$ і площина α не мають спільних точок (рис. 56). Через вершини паралелограма проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, C_1 і D_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка DD_1, якщо:

а) $AA_1 = 7$ см, $BB_1 = 6$ см, $CC_1 = 11$ см;

б) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.

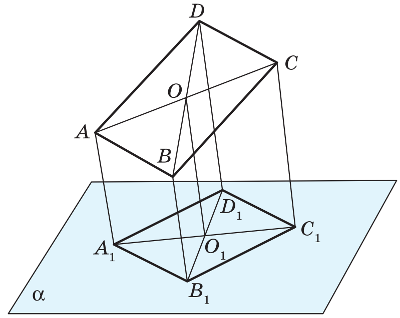


Рис. 56

113. Вершина D паралелограма $ABCD$ лежить у площині α. Через точки A, B і C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка BB_1, якщо:

а) $AA_1 = 3$ см, $CC_1 = 13$ см;

б) $AA_1 = a$, $CC_1 = c$.

Повторення перед вивченням § 4

Теоретичний матеріал

- ознаки подібності трикутників; 8 клас, § 11
- теорема Фалеса. 8 клас, § 6

Задачі

114. Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає сторони AB і BC в точках A_1 і C_1 відповідно. Знайдіть BC_1, якщо $CC_1 = 3$ см, $BA_1 : A_1A = 3:1$.

115. Вершини A і D паралелограма $ABCD$ лежать у площині α, а вершини B і C не лежать у цій площині. Пряма a лежить у площині α. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і AB, a і BC? Чи може пряма BC перетинати площину α? Висловте припущення.

§ 4 Паралельність прямої і площини

4.1. Ознака паралельності прямої і площини

З ознаки належності прямої площині випливає, що пряма, яка не належить даній площині, не може мати з площиною більше однієї спільної точки. У випадку, коли пряма і площина мають одну спільну точку, вони перетинаються. Розглянемо випадок, коли пряма і площина не мають спільних точок.

Означення

Пряма і площина називаються **паралельними**, якщо вони не мають спільних точок.

На рис. 57 пряма a паралельна площині α. Коротко це позначають так: $a \parallel \alpha$.

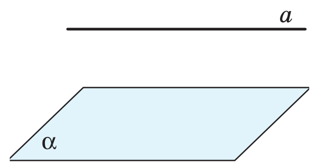
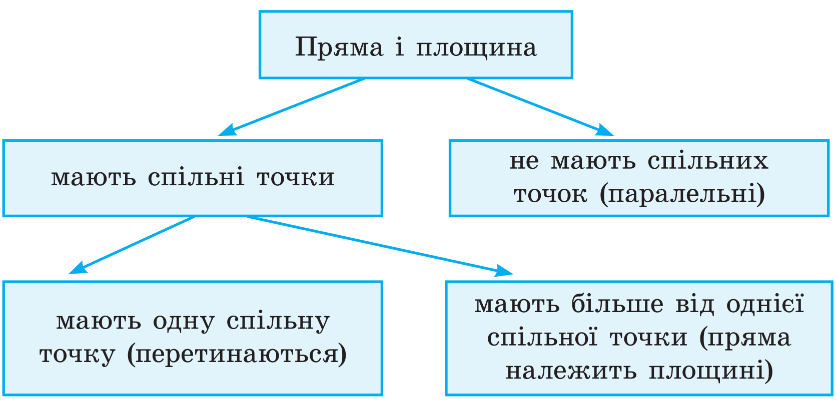


Рис. 57. Паралельність прямої і площини

Розглядають також ***відрізки (промені), паралельні площині***, тобто відрізки (промені), які лежать на прямих, паралельних цій площині.

Взаємне розміщення прямої і площини в просторі можна відобразити за допомогою такої схеми.



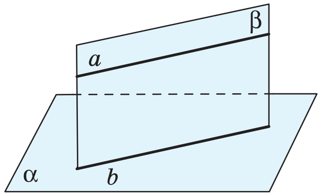


Рис. 58. До доведення ознаки паралельності прямої і площини

У процесі розв'язування задач доводити відсутність спільних точок прямої і площини (тобто встановлювати їх паралельність за означенням) не завжди буває зручно. Тому доведемо відповідну ознаку паралельності.

Теорема (ознака паралельності прямої і площини)

Якщо пряма, яка не належить площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині:

$$(a \not\subset \alpha, b \subset \alpha, a \parallel b) \Rightarrow a \parallel \alpha.$$

Доведення

□ Нехай пряма a не належить площині α і паралельна прямій b, яка лежить у цій площині (рис. 58). Проведемо через паралельні прямі a і b площину β. Площини α і β перетинаються по прямій b. Якби площина α і пряма a мали спільну точку, то вона належала би прямій b. Це неможливо, оскільки $a \parallel b$ за умовою. Отже, пряма a і площина α паралельні. ■

Наочне уявлення про паралельність прямої і площини дають лінії електропередач, прокладені паралельно поверхні Землі (рис. 59, а), гімнастичні споруди (рис. 59, б) тощо.

а

б

Рис. 59. Приклади прямої, паралельної площині

Задача

Доведіть, що через одну з двох мимобіжних прямих можна провести площину, паралельну другій прямій.

Розв'язання

Нехай прямі AB і CD мимобіжні (рис. 60). За теоремою про існування і єдиність прямої, паралельної даній, проведемо через точку C пряму CE, паралель-

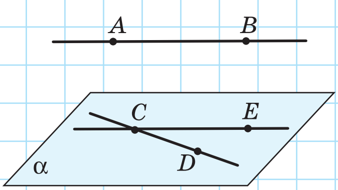


Рис. 60

ну AB. Через прямі CD і CE проведемо площину α (за теоремою про проведення площини через дві прямі, що перетинаються). Оскільки площина α містить пряму, паралельну AB, то за ознакою паралельності прямої і площини площина α паралельна прямій AB.

4.2. Властивості прямої, паралельної площині

Теорема (властивість прямої, паралельної площині)

Якщо пряма паралельна площині, то через будь-яку точку даної площини можна провести пряму, паралельну даній.

Доведення

☐ Нехай пряма a паралельна площині α, точка A належить площині α (рис. 61). Згідно з теоремою про проведення площини через пряму і точку проведемо через пряму a і точку A площину β. Тоді площини α і β мають спільну точку A, отже, перетинаються по прямій b, яка проходить через цю точку. Таким чином, прямі a і b лежать в одній площині β. Крім того, вони не мають спільних точок, оскільки пряма a паралельна площині α, а пряма b лежить у цій площині. Отже, за означенням паралельних прямих $a \parallel b$. ■

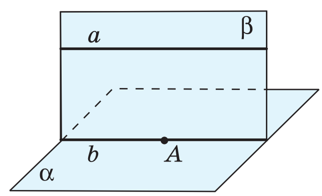


Рис. 61. До доведення властивості прямої, паралельної площині

Щойно доведену властивість можна об'єднати з ознакою паралельності прямої і площини в одне твердження — ***необхідну і достатню умову (критерій) паралельності прямої і площини***:

для того щоб пряма, яка не належить даній площині, була паралельна даній площині, необхідно і достатньо, щоб у даній площині існувала пряма, паралельна даній.

Опорна задача
(про пряму, паралельну двом площинам, що перетинаються)

Якщо пряма паралельна кожній із двох площин, що перетинаються, то вона паралельна прямій їх перетину. Доведіть.

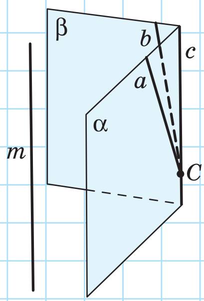


Рис. 62

Розв'язання

Нехай пряма m паралельна кожній із двох площин α і β, які перетинаються по прямій c (рис. 62). Позначимо на прямій c точку C. Згідно з властивістю прямої, паралельної площині, через точку C можна провести прямі a і b в площинах α і β відповідно, причому $a \parallel m$, $b \parallel m$. Але проведені прямі мають спільну точку C, отже, збігаються одна з одною і з прямою c. Таким чином, $m \parallel c$.

Задача

Через точку, яка не належить даній прямій, проведіть площину, паралельну даній прямій.

Розв'язання

Нехай точка B не належить прямій a (рис. 63). За теоремою про проведення площини через пряму і точку проведемо через пряму a і точку B площину β. У цій площині через точку B проведемо пряму b, паралельну даній прямій a. Виберемо поза площиною β довільну точку C і проведемо через точку C і пряму b площину α. Площина α не містить дану пряму a, але містить пряму b, паралельну a. Отже, за ознакою паралельності прямої і площини $a \parallel \alpha$, тобто площина α шукана.

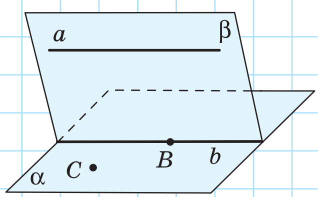


Рис. 63