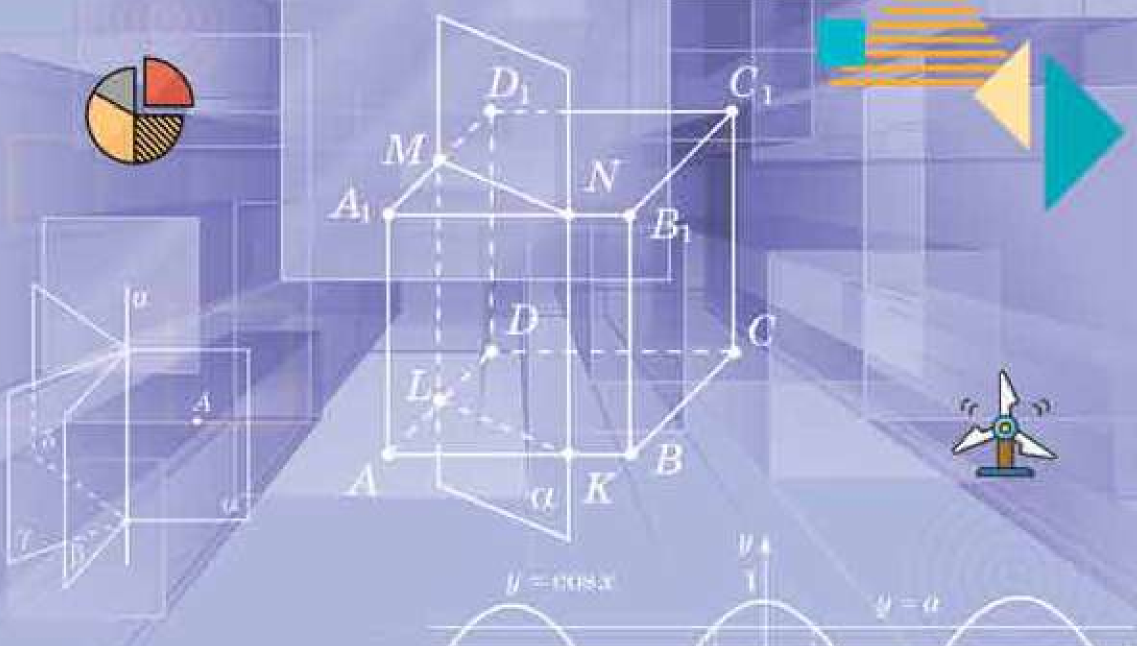
Оріон

М. І. Бурда, Т. В. Колесник,
Ю. І. Мальований, Н. А. Тарасенкова

Математика

Рівень стандарту



10

УДК 512+514]*кл10(075.3)
М 34

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(*наказ Міністерства освіти і науки України від 31.05.2018 № 551*)

Малюнки
О. Дядика

Бурда М. І.
М 34 Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 класу закладів загальної середньої освіти / М. І. Бурда, Т. В. Колесник, Ю. І. Мальований, Н. А. Тарасенкова. — К.: УОВЦ «Оріон», 2018. — 288 с.: іл.

ISBN 978-617-7485-74-1.

УДК 512+514]*кл10(075.3)

ISBN 978-617-7485-74-1

ДОРОГІ УЧНІ ТА УЧЕНИЦІ!

Ви приступаєте до вивчення курсу математики, який складається з двох частин — алгебри і початків аналізу та стереометрії — розділу геометрії.

У першій частині курсу математики ви систематизуєте й поглибите знання про степінь числа, властивості вже відомих функцій, ознайомитеся з новими функціями — степеневими і тригонометричними. Виробите вміння будувати графіки функціональних залежностей, застосовувати вивчені поняття і властивості до розв'язування задач та дослідження найпростіших математичних моделей. Ознайомитеся з елементами могутнього апарату математики — диференціального числення та його практичними застосуваннями.

Друга частина курсу математики присвячена стереометрії — розділу геометрії про властивості фігур у просторі. Ви дізнаєтеся про аксіоми стереометрії та наслідки з них, про паралельність і перпендикулярність прямих і площин, координати й вектори у просторі. Виробите вміння застосовувати вивчені поняття, властивості й ознаки під час розв'язування задач та на практиці. Ви переконаєтеся, що знання й уміння зі стереометрії потрібні в повсякденному житті, а також у професійній діяльності багатьох фахівців — архітекторів, будівельників, конструкторів, токарів, фрезерувальників та ін.

Як успішно вивчати математику за цим підручником? Весь матеріал поділено на розділи, а розділи — на параграфи. Кожний параграф містить теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на текст, виділений **жирним** шрифтом. Це найважливіші означення та властивості. Їх потрібно зрозуміти, запам'ятати і вміти застосовувати під час розв'язування задач. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви понять). У тексті параграфів ви знайдете також зразки розв'язань деяких задач і вправ.

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Пригадайте головне» після кожного параграфа. Наприкінці кожного розділу вміщено контрольні запитання й тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом (′). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечком (°) позначають задачі та вправи середнього рівня складності. Усім треба вміти їх розв'язувати, щоб мати змогу вивчати математику далі. Номери задач і вправ достатнього рівня складності не мають позначки біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочкою (*) позначено задачі високого рівня складності. Якщо не зможете одразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння та наполегливість.

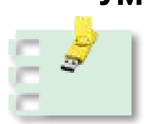
Радість від того, що ви розв'язали складну задачу, буде вам нагородою. Відшукати шляхи до розв'язування деяких з таких задач допоможуть вказівки, вміщені у відповідях. Розв'язавши задачі, що виділено жирним шрифтом, запам'ятайте їх формулювання. Ці математичні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач.

Важливим результатом освіти взагалі, і навчання математики зокрема, є набуття тими, хто навчається, відповідних компетентностей — здатностей на основі здобутих знань і вмінь успішно діяти в навчальних і життєвих ситуаціях, розв'язувати різноманітні проблеми, що постають перед людиною в різних видах діяльності. Уміщені в підручнику задачі та вправи спрямовані на реалізацію цієї мети. Найбільш характерні з таких задач виокремлено в рубрику «Проявіть компетентність».

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше», ви зможете поглибити та розширити свої знання.

У підручнику застосовуються спеціальні позначки (піктограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.

УМОВНІ ПОЗНАЧКИ

 — запам'ятайте

 — поміркуйте

 — зверніть увагу

 — типова задача

 — як записати в зошиті

 — домашнє завдання

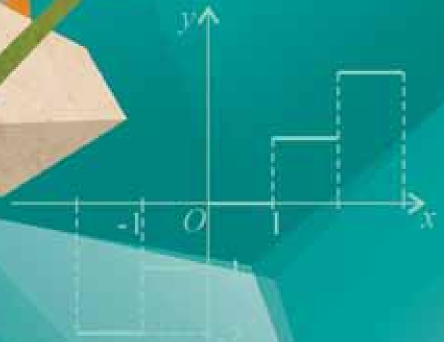
Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового
й задоволення від навчання!

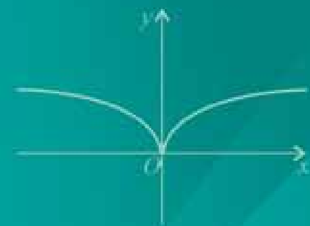
ЗМІСТ

Частина I

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Розділ 1





Функції, їхні властивості та графіки

У розділі ви:

- **повторите**, систематизуєте та узагальните відомості про числові функції; їх основні властивості;
- **дізнаєтесь**, як розуміти степінь числа або виразу з дробовим показником;
- **ознайомитесь** із новим класом функцій — степеневими функціями.

§1 Числові функції та їхні властивості

Поняття функції, окремі види функцій і їх властивості вам вже відомі з попередніх років навчання. Тут ми відновимо деякі важливі відомості, поглибимо знання про функцію.

1. ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ

Різноманітні процеси, що відбуваються в довкіллі, слугують прикладами явищ, у яких зміна одних величин спричиняє зміну інших. Для вивчення того чи іншого явища потрібно встановити взаємозв'язок між величинами, які його описують, і дослідити його властивості. Такий взаємозв'язок у математиці задається за допомогою функцій.

Наведемо приклади.

1. Площа S (см^2) круга радіуса r (см) залежить від довжини радіуса й визначається за формулою

$$S = \pi r^2.$$

За цією формулою для кожного значення $r > 0$ можна знайти відповідне значення S.

Наприклад, якщо $r = 2$, то $S = 4\pi \approx 12,56$; якщо $r = 3,2$, то $S = 10,24\pi \approx 32,1$; якщо $r = 5,1$, то $S = 26,01\pi \approx 81,67$.

2. Потяг Київ — Харків на певному проміжку шляху рухається зі сталою швидкістю 80 км/год.

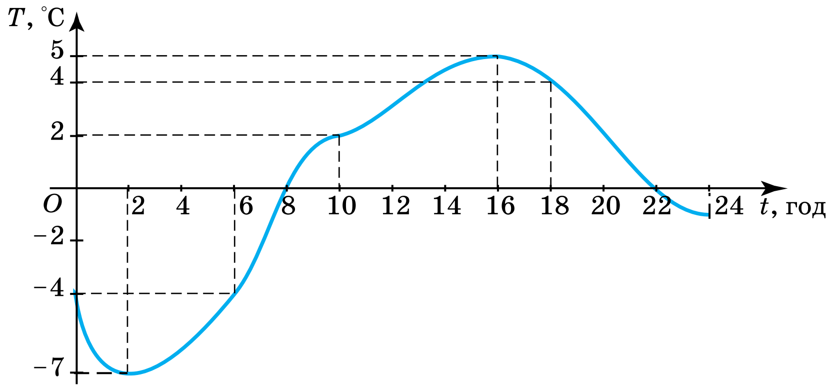
Шлях, пройдений потягом, залежить від часу руху.

Позначимо час руху потяга в годинах через τ, а пройдений шлях у кілометрах — через s. Залежність змінної s від змінної τ в цьому випадку наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

τ (год)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
s (км)	80	120	160	200	240	280	320

3. На малюнку 1 зображено графік зміни температури повітря протягом доби.



Мал. 1

За допомогою цього графіка для кожного моменту часу t (у годинах) від 0 до 24 год можна знайти відповідне значення температури T (у градусах Цельсія).

Наприклад, якщо $t = 6$, то $T = -4$; якщо $t = 10$, то $T = 2$; якщо $t = 18$, то $T = 4$.

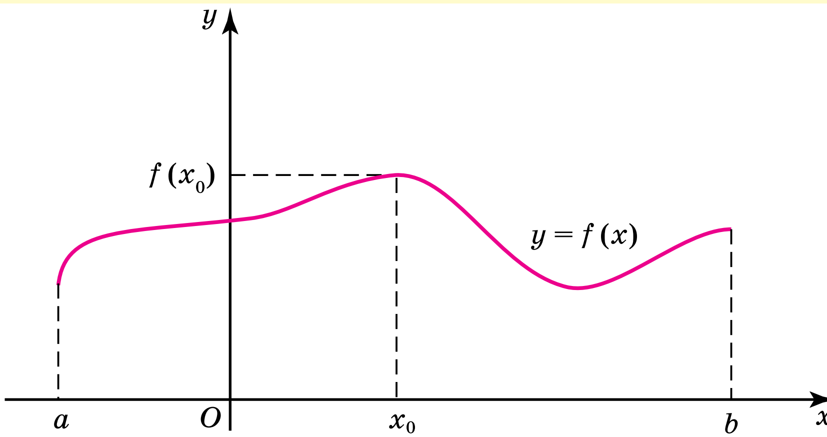
В усіх наведених прикладах йдеться про залежність двох змінних, причому одна з них (r, τ, t) змінюється незалежно, а друга (S, s, T) — набуває значень залежно від значень першої змінної. Першу із цих величин називають *незалежною змінною*, або *аргументом*, а другу — *залежною змінною*. Звернемо увагу на те, що в усіх прикладах кожному значенню незалежної змінної відповідає одне і тільки одне значення залежної змінної. Такі змінні називають функціонально залежними. У розглянутих прикладах незалежні й залежні змінні виражаються дійсними числами.

Нехай D — деяка множина дійсних чисел. Числовою функцією з областю визначення D називають таку залежність, за якої кожному числу x із множини D за певним законом відповідає одне дійсне число y, і записують $y = f(x)$.

Змінну x називають незалежною змінною, або *аргументом*, а y — залежною змінною, або *функцією*. Число $f(x_0)$ називають значенням функції f у точці $x_0 \in D$. Множину всіх значень незалежної змінної x називають *областю визначення функції* f і позначають $D(f)$. Множину значень функції, яких вона набуває за всіх значень x із її області визначення, називають *областю значень функції*, і позначають $E(f)$. Окрім букв x, y, f можна вживати й інші букви.

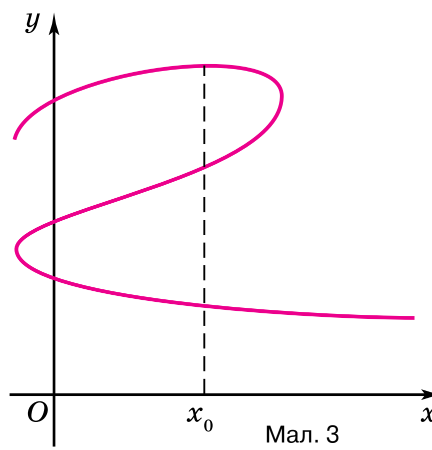
Графіком функції f називають множину точок $(x; y)$ координатної площини xOy, де $y = f(x)$, $x \in D(f)$.

Зверніть увагу:
не будь-яка крива в прямокутній системі координат xOy задає функцію. За означенням функцію може задавати тільки така крива, яку кожна пряма $x = x_0$, $x_0 \in D(f)$, паралельна осі Oy, перетинає лише в одній точці з ординатою $y_0 = f(x_0)$ (мал. 2).



Мал. 2

Крива, зображена на малюнку 3, функцію не задає, бо в цьому випадку значенню x_0 відповідає не одне, як того вимагає означення функції, а три значення змінної y.



Мал. 3

Розглянемо властивості функцій. Проаналізуємо наведені вище приклади.

Областю визначення функції, розглянутої в прикладі 1, є $r > 0$, або $r \in (0;\ +\infty)$, а областю значень цієї функції є $S > 0$, або $S \in (0;\ +\infty)$, тобто й областю визначення, і областю значень функції є множина усіх додатних чисел.

У прикладі 2 областю визначення функції є множина $D(s) = \{1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 3;\ 3{,}5;\ 4\}$, а областю значень — множина $E(s) = \{80;\ 120;\ 160;\ 200;\ 240;\ 280;\ 320\}$.

У прикладі 3 областю визначення функції є значення t, що задовольняють нерівність $0 \le t \le 24$, або $t \in [0;\ 24]$, а областю значень є $-7 \le T \le 5$, або $t \in [-7;\ 5]$. Зазначені множини можна дістати, якщо графік функції спроектувати відповідно на вісь Ot і вісь температур OT (див. мал. 1).

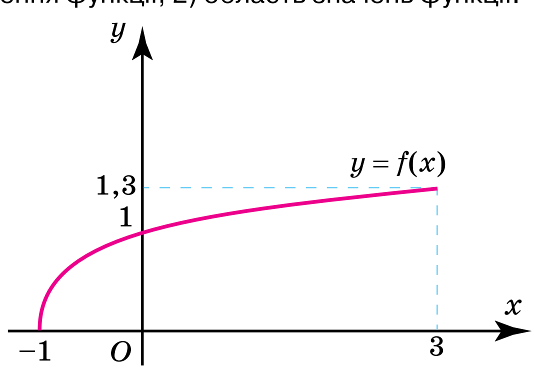
Наведені вище приклади ілюструють основні способи задання функцій: *аналітичний*, або за допомогою формули (приклад 1), *табличний* (приклад 2), *графічний* (приклад 3).

Якщо функцію задано аналітично і не зазначено її області визначення, то під останньою розуміють множину всіх дійсних значень аргументу, за яких цей аналітичний вираз має зміст. Розглянемо приклади.

Задача 1. Дано функцію $f(x)=\sqrt{x+1}$. 1) Знайдіть область визначення функції; 2) визначте область значень функції; 3) обчисліть значення функції в точці, а саме: $f(0)$, $f\left(\frac{5}{4}\right)$, $f(8)$; 4) визначте, чи існують значення функції в точках $x=-2$; $-\frac{3}{2}$.

Розв'язання. 1) З огляду на властивість квадратного кореня дана формула матиме зміст для всіх значень x, для яких $x+1\geq 0$, або $x\geq -1$, тобто областю визначення функції є множина $[-1;\ +\infty)$, $D(f)=[-1;\ +\infty)$.
2) Область значень даної функції становлять значення $y=f(x)\geq 0$, тобто $E(f)=[0;\ +\infty)$, бо значення арифметичного квадратного кореня невід'ємні.
3) Знайдемо значення $f(0)$. Для цього в дану формулу замість x підставимо 0. Тоді одержимо: $f(0)=\sqrt{0+1}=1$.
Аналогічно $f\left(\frac{5}{4}\right)=\sqrt{\frac{5}{4}+1}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$; $f(8)=\sqrt{8+1}=\sqrt{9}=3$.
4) Оскільки значення $x=-2$, $x=-\frac{3}{2}$ не належать області визначення функції, тобто $-2\notin[-1;\ +\infty)$, $-\frac{3}{2}\notin[-1;\ +\infty)$, то функція в цих точках не визначена. Справді, якщо формально підставити значення $x=-2$ і $x=-\frac{3}{2}$ у задану формулу, то одержимо вирази $\sqrt{-1}$ і $\sqrt{-\frac{1}{2}}$, що на множині дійсних чисел не мають змісту.

Задача 2. Функцію $y=f(x)$ задано графічно (мал. 4). Знайдіть: 1) область визначення функції; 2) область значень функції.



Мал. 4

Розв'язання. 1) Абсциси точок графіка даної функції змінюються від −1 до 3, тому $D(f)=[-1;\ 3]$.
2) Ординати точок графіка даної функції змінюються від 0 до 1,3, тому $E(f)=[0;\ 1{,}3]$.

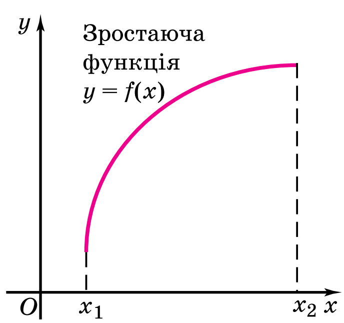
Зверніть увагу: область визначення функції є проекцією її графіка на вісь Ox, а область значень — проекцією графіка на вісь Oy.

2. ЗРОСТАННЯ ТА СПАДАННЯ ФУНКЦІЙ

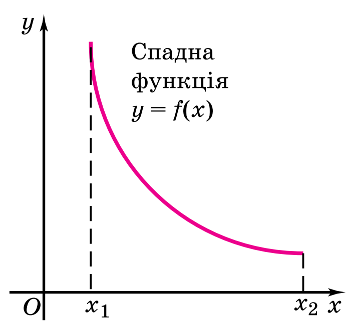
Нехай функція $f(x)$ визначена на множині D.

Функція $f(x)$ називається зростаючою на множині D, якщо для довільних значень x_1 та x_2 цієї множини з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$, тобто більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції (мал. 5).

Функція $f(x)$ називається спадною на множині D, якщо для довільних значень x_1 та x_2 цієї множини з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) < f(x_1)$, тобто більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції (мал. 6).



Мал. 5



Мал. 6

Зростаючі та спадні функції називають *монотонними*.

Схема дослідження функції $y = f(x)$ на монотонність

1. Знайти область визначення функції $D(f)$.
2. Дослідити на знак різницю $f(x_2) - f(x_1)$ для довільних $x_1, x_2 \in D(f)$, якщо $x_2 > x_1$.

Якщо $f(x_2) - f(x_1) > 0$, то функція буде *зростаючою* на множині D; якщо $f(x_2) - f(x_1) < 0$, то *спадною* на цій множині. Якщо жодна із цих умов не виконується, то функція не є монотонною в усій її області визначення. У такому разі намагаються знайти окремі проміжки області визначення функції, на яких вона є монотонною.

Проілюструємо це на прикладах.

Задача 3. Дослідіть на монотонність функцію $f(x) = 3x - 1$.

Розв'язання. Областю визначення заданої функції є множина всіх дійсних чисел, $D(f) = \boldsymbol{R}$.

Нехай $x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}$ — довільні значення аргументу, причому $x_2 > x_1$, тобто $x_2 - x_1 > 0$. Відповідні значення функції: $f(x_1) = 3x_1 - 1$ і $f(x_2) = 3x_2 - 1$.

Розглянемо різницю $f(x_2) - f(x_1) = 3x_2 - 1 - 3x_1 + 1 = 3(x_2 - x_1) > 0$.

Отже, $f(x_2) > f(x_1)$ і задана функція зростає в усій області визначення.

Задача 4. Покажіть, що функція $\varphi(x) = 2x^2 + 5$ на проміжку $(-\infty; 0]$ є спадною, а на проміжку $[0; +\infty)$ — зростаючою.

Розв'язання. Областю визначення функції $\varphi(x) = 2x^2 + 5$ є множина всіх дійсних чисел, $D(\varphi) = R$.

Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з області визначення функції, причому $x_2 > x_1$, тобто $x_2 - x_1 > 0$.

Тоді $\varphi(x_1) = 2x_1^2 + 5$; $\varphi(x_2) = 2x_2^2 + 5$;

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = 2x_2^2 + 5 - 2x_1^2 - 5 = 2x_2^2 - 2x_1^2 = 2(x_2 - x_1)(x_2 + x_1).$$

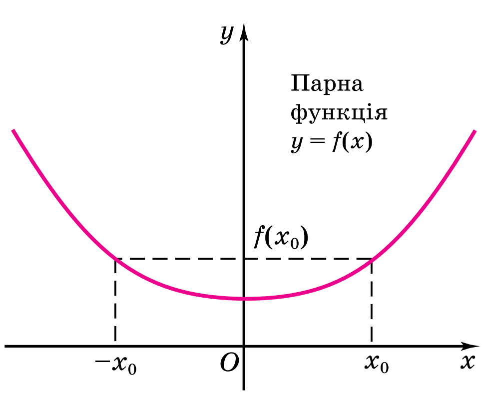
Якщо $x_1, x_2 \in (-\infty; 0]$, то $x_1 + x_2 < 0$, й оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) < 0$, або $\varphi(x_2) < \varphi(x_1)$, тобто на проміжку $(-\infty; 0]$ функція є спадною.

Аналогічно, якщо $x_1, x_2 \in [0; +\infty)$, то $x_1 + x_2 > 0$, й оскільки $x_2 - x_1 > 0$, то $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) > 0$, або $\varphi(x_2) > \varphi(x_1)$, тобто на проміжку $[0; +\infty)$ функція є зростаючою.

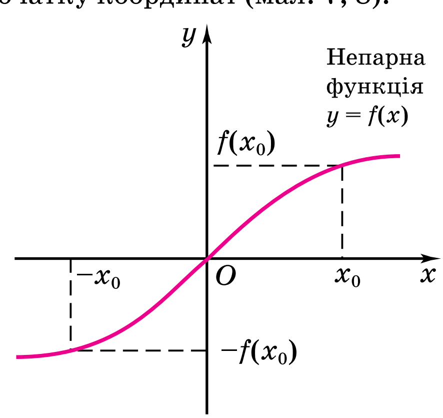
3. ПАРНІ ТА НЕПАРНІ ФУНКЦІЇ

Нехай функція $f(x)$ визначена на множині D, причому якщо $x \in D$, то $-x \in D$.
Функція $f(x)$ називається парною, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in D$.
Функція $f(x)$ називається непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in D$.

Отже, області визначення як парної, так і непарної функцій симетричні відносно початку координат, і для протилежних значень аргументу значення парної функції збігаються, а непарної — є протилежними числами. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy, а графік непарної функції симетричний відносно початку координат (мал. 7, 8).



Мал. 7



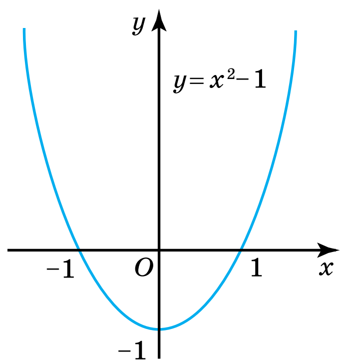
Мал. 8

Схема дослідження функції $y = f(x)$ на парність і непарність

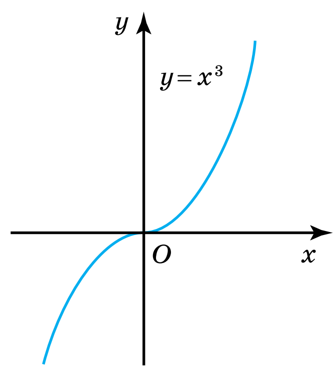
1. Знайти область визначення функції $D(f)$ і переконатися, що вона є симетричною відносно початку координат. Якщо ця умова не виконується, то така функція не може бути ні парною, ні непарною.
2. Знайти значення функції $f(-x)$ і порівняти його з $f(x)$: якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in D(f)$, то функція *парна*; якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in D(f)$, то функція *непарна*. Якщо жодна із цих умов не виконується, то функція не є ні парною, ні непарною.

Задача 5. Дослідіть на парність функцію $f(x) = x^2 - 1$.

Розв'язання. 1. $D(f) = R$. 2. $f(-x) = x^2 - 1 = f(x)$ для всіх x із множини R. Отже, функція є парною. Її графік симетричний відносно осі Oy (мал. 9).



Мал. 9



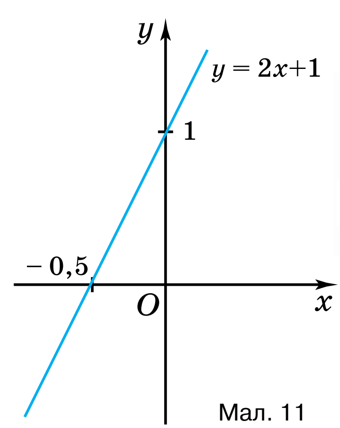
Мал. 10

Задача 6. Дослідіть на парність функцію $\varphi(x) = x^3$.

Розв'язання. 1. $D(\varphi) = \boldsymbol{R}$.
2. $\varphi(-x) = -x^3 = -\varphi(x)$ для всіх x із множини $\boldsymbol{R}$. Отже, функція є непарною. Її графік симетричний відносно початку координат (мал. 10).

Задача 7. Дослідіть на парність функцію $g(x) = 2x + 1$.

Розв'язання. 1. $D(g) = \boldsymbol{R}$.
2. $g(-x) = 2(-x) + 1 = -2x + 1$. Оскільки $g(-x) \neq g(x)$ і $g(-x) \neq -g(x)$, то функція не є ні парною, ні непарною (мал. 11).



Мал. 11

Дізнайтеся більше

Термін «функція» запровадив німецький математик Г. Лейбніц (*1646–1716*), який функцію пов'язував із графіком. Л. Ейлер (*1707–1783*) і Й. Бернуллі (*1667–1748*) вважали функцію аналітичним виразом (формулою). Згодом Л. Ейлер увів загальніший підхід до поняття функції як залежності однієї змінної величини від іншої. Цю точку зору було далі розвинено у працях російського математика М. І. Лобачевського (*1792–1856*), німецького математика П. Діріхле (*1805–1859*) та інших учених.

Г. Лейбніц

Остроградський М.В.

Кравчук М.П.

Важливий внесок у розвиток теорії функцій зробили українські математики Остроградський М. В. (*1801–1862*), Буняковський В. Я. (*1804–1889*), Кравчук М. П. (*1892–1942*), Ремез Є. Я. (*1896–1975*), Дзядик В. К. (*1919–1998*) та ін.

Пригадайте головне

1. Дайте означення функції.
2. Що називають областю визначення та областю значень функції? Наведіть приклади.
3. Які ви знаєте способи задання функції?
4. Що таке графік функції? Чи будь-яка крива на координатній площині є графіком функції?
5. Як для функції, заданої графічно, знайти область її визначення та область значень?
6. Яку функцію називають зростаючою; спадною? Наведіть приклади.
7. Яку функцію називають парною; непарною? Наведіть приклади.

Розв'яжіть задачі

1'. Чи правильно, що:

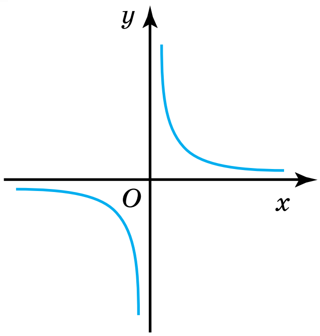
1) функція є довільною відповідністю між двома непустими множинами A і B;

2) є функції, які одночасно є парними і непарними;

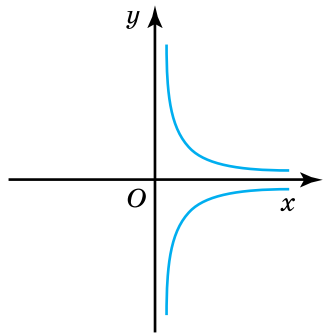
3) не будь-яка крива на координатній площині задає функцію?

2'. Наведіть приклад функції, заданої аналітично.

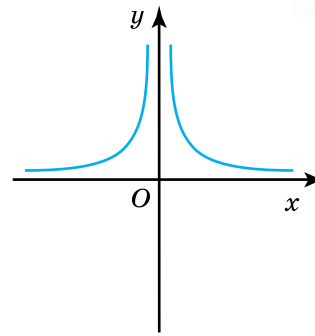
3'. На якому з малюнків 12 – 15 задано функцію? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 12

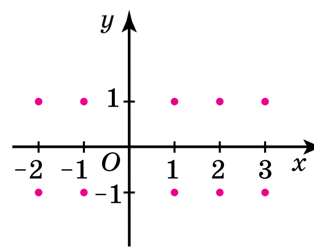


Мал. 13



Мал. 14

4'. Чи правильно, що точка O (0; 0) належить графіку функції:
1) $y = -x^2$; 2) $y = x^2 + 5x + 6$;
3) $y = \sqrt{x-4}$; 4) $y = \dfrac{3}{x}$?



Мал. 15

5'. Заповніть таблицю 2, якщо функцію задано формулою $y = \dfrac{x}{2x-1}$.

Таблиця 2

x	–2	–1	0	1	2	3
y						

6'. Заповніть таблицю 3, якщо функцію задано формулою $y = -3x^2 + 1$.

Таблиця 3

x	–2	–1	0	1	2	3
y						

7'. Знайдіть область визначення функції:
1) $y = 4x + 1$;
2) $y = -x - 2$;
3) $y = x^2 + 4x$;
4) $y = -x^2 + 1$;
5) $y = \sqrt{x+3}$;
6) $y = \dfrac{3}{2(x-1)}$.

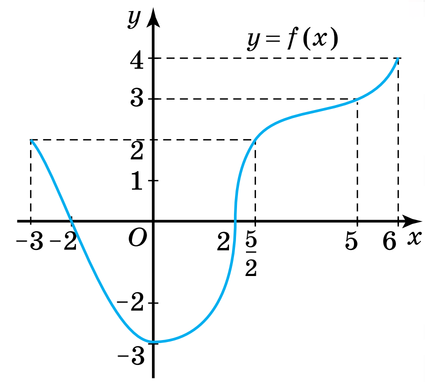
8°. Знайдіть область визначення функції:
1) $y = \sqrt{4x+1}$; 2) $y = -2x + 3$; 3) $y = x^2 - 5$; 4) $y = \dfrac{5}{x}$.

9°. Знайдіть область значень функції:
1) $y = 2{,}2$;
2) $y = -x + 4$;
3) $y = -\sqrt{x}$;
4) $y = 2\sqrt{x}$;
5) $y = x^2 - 5$;
6) $y = x^2 + 3$.

10°. Знайдіть область значень функції:

1) $y=5$; 2) $y=7x$;

3) $y=\sqrt{x}+2$; 4) $y=x^2+1$.



Мал. 16

11°. За графіком функції $y = f(x)$ (мал. 16) знайдіть:

1) область визначення;
2) область значень;
3) $f(0)$, $f(-3)$, $f(5)$, $f\left(\frac{5}{2}\right)$;
4) точки перетину з осями координат;
5) значення x, за яких $f(x) = 4$, $f(x) = 2$, $f(x) = -3$;
6) проміжки монотонності функції.

12°. Побудуйте графік функції:

1) $y=2x-1$; 2) $y=x^2-2$; 3) $y=\sqrt{x}-3$; 4) $y=-\frac{2}{x}$.

Знайдіть: 1) область визначення функції; 2) область значень функції.

13°. Побудуйте графік функції:

1) $y=-x+1$; 2) $y=x^2+2$; 3) $y=\sqrt{x}+1$.

Знайдіть: 1) область визначення функції; 2) область значень функції.

14°. Користуючись означенням, дослідіть функцію на монотонність:

1) $y = 3x + 1$; 3) $y = x^2 - 2$; 5) $y = \frac{1}{x}$.

2) $y = -2x + 3$; 4) $y = -2x^2 - 1$;

15°. Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y=-2x$; 2) $y=5-x^2$; 3) $y=\sqrt{x-1}+1$; 4) $y=-\frac{2}{x}$? Відповідь поясніть.

16°. Дослідіть функцію на парність та непарність:

1) $y = 3x + 1$; 3) $y = x^2 - 2$; 5) $y = \frac{1}{x}$.

2) $y = -2x + 3$; 4) $y = -2x^2 - 1$;

17°. Парною чи непарною є функція:

1) $y = -2x$; 2) $y=5-x^2$; 3) $y=\sqrt{x-1}+1$; 4) $y=-\frac{2}{x}$?

Відповідь поясніть.

18. У коло радіуса r вписано ΔABC, сторона AB якого збігається з діаметром кола. Знайдіть залежність катета $AC = b$ від катета $BC = x$, якщо вершина C трикутника пробігає півколо.

19. Знайдіть залежність довжини b одного катета прямокутного трикутника від довжини a другого катета, якщо гіпотенуза $c = 5$.

20. Одна сторона прямокутника дорівнює x (см), а друга — на 3 см менша. Якими формулами визначаються залежності периметра та площі прямокутника від його сторони?

21. Рухаючись зі швидкістю v км/год протягом 6 год, автомобіль пройшов шлях s км. Задайте формулою залежність s від v. Користуючись цією формулою: а) знайдіть s, якщо $v = 65$ км/год; б) знайдіть v, якщо $s = 363$ км.

22. Знайдіть невідому координату точки, якщо вона належить графіку функції $y = \dfrac{2x+5}{3}$: $A(0; y)$, $B(x; 0)$, $C(-2; y)$, $D(x; 0{,}5)$.

23. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = x + \sqrt{x}$;
2) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$;
3) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{2x-1}$;
4) $y = \sqrt{x} + 2\sqrt{-x}$;
5) $y = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+1}$;
6) $y = x^2 - 6x + 5$.

24. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$;
2) $y = \sqrt{5-2x} + 1$;
3) $y = \dfrac{1}{x^2 - x} + 2x$;
4) $y = \dfrac{3x-1}{x^2 - 3x + 2}$.

25. $$f(x) = \begin{cases} -4, \text{ якщо } x < -1, \\ 2x - 2, \text{ якщо } -1 \le x < 3, \\ 4, \text{ якщо } x \ge 3. \end{cases}$$

Яке із співвідношень є правильним:

1) $f(-2) = -f(2)$; 2) $f(4) > f(1)$; 3) $\dfrac{f(-2)}{f(2)} > 0$?

26. $$f(x) = \begin{cases} x + 9, \text{ якщо } -9 \le x < 0, \\ x, \text{ якщо } 0 \le x \le 9. \end{cases}$$

Яке із співвідношень є правильним:

1) $f(-1) < f(1)$;
2) $f(-2) \ne f(2)$;
3) $f(0) = f(9)$;
4) $f(-9) = f(0)$?

Дослідіть дану функцію на монотонність.

27. Яка із заданих функцій є парною; непарною; ні парною, ні непарною:

1) $y = 5x^2 + 1$;
2) $y = x^5 + 3x^3 - x$;
3) $y = 3x - \dfrac{2}{x}$;
4) $y = 4x^2 + |x|$;
5) $y = \sqrt[3]{x} + x$;
6) $y = \sqrt[3]{x^3 + 5}$?

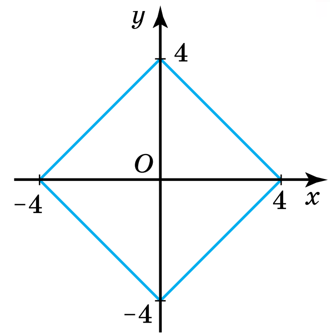
28. Яка із заданих функцій є парною; непарною; ні парною, ні непарною:

1) $y = 2x^4 - x^3 + 1$;

2) $y = \dfrac{|x|}{2x}$;

3) $y = \sqrt{x} + 8x$?

29*. Яку з множин точок наведено на малюнку 17? Поясніть, чому ця множина функцію не задає.



Мал. 17

30*. Нехай $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$. Знайдіть значення x, за яких:

1) $f(x) = 0$; 2) $0 < f(x) < 1$; 3) $|f(x)| \le 2$.

31*. Функцію задано таблицею 4.

Таблиця 4

x	4	6	−10	−12	20
y	−2	−3	5	6	−10

За таблицею значень x і y запишіть залежність y від x у вигляді формули.

32*. Знайдіть область визначення й область значень функції:

1) $y = -x^2 + 6x - 4$; 3) $y = x^2 - 8x + 13$; 5) $y = \dfrac{x}{1+x^2}$;

2) $y = 2 - |x|$; 4) $y = \sqrt{25 - x^2}$; 6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x - |x|}}$.

33*. Функція $f(x)$ визначена на відрізку $[-1;\ 0]$. Яка область визначення функції:

1) $f(2x)$; 2) $f(-x^2)$; 3) $f(|x| + x)$?

Проявіть компетентність

34. З турбази на станцію, віддалену на відстань 60 км, вирушив велосипедист зі швидкістю 12 км/год. Знайдіть формулу залежності змінної s від t, де s — відстань велосипедиста від станції в кілометрах, а t — час його руху в годинах.

35. Наведіть приклад аналітично заданої функції, областю визначення якої є:

1) відрізок $[-1; 1]$;

2) множина всіх дійсних чисел, крім точок $x = \pm 2$.

§ 2 Корінь n-го степеня. Арифметичний корінь n-го степеня та його властивості

1. ПОНЯТТЯ КОРЕНЯ n-ГО СТЕПЕНЯ

Ви вже знаєте, що квадратним коренем із числа a називають таке число, квадрат якого дорівнює a. Сформулюємо означення кореня будь-якого натурального степеня $n > 1$.

Коренем n-го степеня з дійсного числа a називають число, n-ий степінь якого дорівнює a.

Наприклад, коренем четвертого степеня із числа 81 є число 3, бо $3^4 = 81$; коренем третього степеня із числа 8 є число 2, оскільки $2^3 = 8$.

? Чому для n вводять обмеження: $n > 1$? Бо, за властивістю степенів, $a^1 = a$.

Знаходження кореня n-го степеня із числа a називають *добуванням кореня n-го степеня*.

З означення кореня n-го степеня випливає, що добути корінь n-го степеня з дійсного числа a — це все одно, що знайти дійсні розв'язки рівняння:

$$x^n = a,\ n \in N. \qquad (1)$$

Проаналізуємо розв'язки рівняння (1).

1. Якщо $a = 0$, то за будь-якого натурального значення n рівняння (1) має єдиний корінь $x = 0$.

2. Якщо n — парне число й $a < 0$, то рівняння (1) не має коренів, оскільки немає жодного дійсного числа, парний степінь якого дорівнював би від'ємному числу.

Якщо n — парне число й $a > 0$, то рівняння (1) має два дійсні корені, які є протилежними за знаком числами. Наприклад, $x^2 = 9$, $x = \pm 3$.

3. Якщо n — непарне число й $a > 0$, то рівняння (1) має один дійсний додатний корінь. Наприклад, $x^3 = 8$, $x = 2$.

Якщо n — непарне число й $a < 0$, то рівняння (1) має один дійсний від'ємний корінь. Наприклад, $x^3 = -27$, $x = -3$.

Зверніть увагу:

1) корінь n-го степеня із числа 0 дорівнює 0;
2) корінь парного степеня з додатного дійсного числа має два значення, що є однаковими за модулем і протилежними за знаком;
3) кореня парного степеня з від'ємного дійсного числа не існує;
4) корінь непарного степеня з довільного дійсного числа має одне значення, причому додатне, якщо число додатне, і від'ємне, якщо число від'ємне.

2. АРИФМЕТИЧНИЙ КОРІНЬ n-ГО СТЕПЕНЯ З ДІЙСНОГО ЧИСЛА

Розглянуті випадки розв'язування рівняння (1) показують, що це рівняння має невід'ємний дійсний корінь, як у разі парного, так і в разі непарного n, якщо $a \geq 0$. Цей корінь називають *арифметичним* коренем n-го степеня із числа a.

Арифметичним коренем n-го степеня із числа $a \geq 0$ називають невід'ємне число, n-ий степінь якого дорівнює a.

Записуємо: $\sqrt[n]{a}$, і говоримо: арифметичний корінь n-го степеня з a.

У виразі $\sqrt[n]{a}$ число a називають *підкореневим виразом*, а число n — *показником кореня*.

Ви знаєте, що знак $\sqrt{\ }$ називають радикалом. Він замінює термін «арифметичний квадратний корінь». Аналогічно, знак $\sqrt[n]{\ }$ замінює термін «арифметичний корінь n-го степеня». Іноді слово «арифметичний» у цій назві опускають і говорять коротше: «корінь n-го степеня», але розуміють, що йдеться саме про арифметичний корінь n-го степеня.

Отже, за означенням арифметичного кореня n-го степеня із числа a, рівність $\sqrt[n]{a} = b$ означає, що $b^n = a$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Наприклад: $\sqrt[4]{16} = 2$, оскільки $2^4 = 16$; $\sqrt[5]{32} = 2$, оскільки $2^5 = 32$.

Якщо $n = 2$, то пишемо $\sqrt{a}$ (показник 2 не записуємо), і говоримо: «корінь квадратний з a».

Якщо $n = 3$, то пишемо $\sqrt[3]{a}$, і говоримо: «корінь кубічний з a».

Зверніть увагу:
з означення арифметичного кореня n-го степеня випливає:
1) вираз $\sqrt[n]{a}$ має зміст, лише якщо $a \geq 0$;
2) вираз $\sqrt[n]{a}$ може набувати лише невід'ємних значень;
3) рівність $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ — правильна за будь-якого невід'ємного значення a.

Відповідно до введеного поняття арифметичного кореня розв'язки рівняння $x^2 = 36$, що є протилежними за знаком числами, записують так:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{36} = \pm 6.$$

Крім того, для коренів парного степеня:

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0 \end{cases}, k \geq 1 \text{ — натуральне число.}$$

Наприклад, $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$; $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$.

Для коренів непарного степеня:

$$\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}, \ k \in \boldsymbol{N}, \ a \in \boldsymbol{R}.$$

Наприклад, $\sqrt[3]{-1} = -\sqrt[3]{1} = -1$; $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{32} = -2$.

Задача 1. Знайдіть арифметичне значення кореня:

1) $\sqrt[3]{125}$; 2) $\sqrt[6]{64}$; 3) $\sqrt[8]{x^8}$; 4) $\sqrt[4]{(2-\pi)^4}$; 5) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}$; 6) $\sqrt[6]{a^2}$.

Розв'язання. За означенням значення арифметичного кореня невід'ємні, тому:

1) $\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$;

2) $\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2$;

3) $\sqrt[8]{x^8}=|x|$;

4) $\sqrt[4]{(2-\pi)^4}=|2-\pi|=\pi-2$;

5) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}=\left|\sqrt{5}-2\right|=\sqrt{5}-2$;

6) $\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{|a|}=\begin{cases}\sqrt[3]{a}, \text{ якщо } a\ge 0;\\ -\sqrt[3]{a}, \text{ якщо } a<0.\end{cases}$

Задача 2. За яких значень змінних вираз є арифметичним коренем:

1) $\sqrt[5]{x-1}$; 2) $\sqrt{a+1}$?

Розв'язання. За означенням арифметичного кореня підкореневий вираз має бути невід'ємним, тому:

1) $x-1\ge 0$; $x\ge 1$; $x\in[1;\ +\infty)$;

2) $a+1\ge 0$; $a\ge -1$; $a\in[-1;+\infty)$.

3. ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО КОРЕНЯ *n*-ГО СТЕПЕНЯ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

Розглянемо без доведення властивості арифметичних коренів n-го степеня ($n>1$ — натуральне число), які узагальнюють відомі властивості квадратного кореня.

1. Якщо $a\ge 0$, $b\ge 0$, то

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}. \qquad (1)$$

Корінь n-го степеня з добутку невід'ємних чисел дорівнює добутку коренів із цих чисел.

Наприклад, $\sqrt[3]{8\cdot 27}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{27}=2\cdot 3=6$.

Наведена властивість є правильною для будь-якої скінченної кількості невід'ємних чисел.

Наприклад, якщо $a\ge 0$, $b\ge 0$ і $c\ge 0$, то

$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{(ab)c}=\sqrt[n]{ab}\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$, тобто $\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$.

2. Якщо $a\ge 0$, $b>0$, то

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \qquad (2)$$

Корінь n-го степеня з дробу, чисельник якого невід'ємний, а знаменник додатний, дорівнює кореню із чисельника, поділеному на корінь із знаменника.

Наприклад, $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}}=\frac{2}{3}$.

Якщо формули (1) і (2) записати у вигляді

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab},\ a \ge 0 \text{ і } b \ge 0; \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}},\ a \ge 0 \text{ і } b > 0,$$

то одержимо правила множення і ділення арифметичних коренів n-го степеня. Сформулюйте ці правила самостійно.

3. Якщо $n > 1$, $k > 1$ — натуральні числа і $a \ge 0$, то

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}. \qquad (3)$$

Корінь n-го степеня з кореня k-го степеня невід'ємного числа a дорівнює кореню nk-го степеня із цього числа.

Наприклад, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[3\cdot4]{a} = \sqrt[12]{a}$.

4. Якщо $n > 1$, k і m — натуральні числа і $a \ge 0$, то

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}. \qquad (4)$$

Якщо показник кореня й показник степеня підкореневого виразу помножити або поділити на одне й те саме натуральне число, то значення кореня не зміниться.

Наприклад, $\sqrt[8]{3^6} = \sqrt[4]{3^3}$.

Властивість 4 іноді називають *основною властивістю арифметичного кореня.*

5. Якщо $n > 1$, $k > 1$ — натуральні числа і $a \ge 0$, то

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}. \qquad (5)$$

Щоб піднести корінь n-го степеня до степеня k, достатньо піднести до цього степеня підкореневий вираз.

Наприклад, $\left(\sqrt[6]{8}\right)^2 = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[6]{64} = 2$.

6. Якщо $0 \le a < b$, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$. (6)

Властивість 6 надає можливість порівнювати арифметичні корені.

Задача 3. Порівняйте числа: 1) $\sqrt[4]{3}$ *і* $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt[5]{4}$ *і* $\sqrt[3]{3}$.

Розв'язання. Зведемо корені в кожному завданні до одного показника, користуючись основною властивістю арифметичного кореня:
1) $\sqrt{2} = \sqrt[4]{4}$, отже, $\sqrt[4]{3} < \sqrt{2}$; 2) $\sqrt[5]{4} = \sqrt[15]{64}$, $\sqrt[3]{3} = \sqrt[15]{243}$, тобто $\sqrt[5]{4} < \sqrt[3]{3}$.

4. ЗАСТОСУВАННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ КОРЕНЯ n-ГО СТЕПЕНЯ

Під час розв'язування задач часто доводиться виконувати такі перетворення: 1) виносити множник з-під знака кореня; 2) вносити множник під знак кореня; 3) позбуватися ірраціональності в знаменнику дробу. Розглянемо приклади.

Задача 4. Винесіть множник з-під знака кореня: 1) $\sqrt{108}$; 2) $\sqrt[4]{324}$.

Розв'язання. Виконуючи цю дію, підкореневий вираз слід подати у вигляді добутку множників, з яких (одного або кількох) можна добути корінь.

1) $\sqrt{108}=\sqrt{36\cdot 3}=6\sqrt{3}$; 2) $\sqrt[4]{324}=\sqrt[4]{81\cdot 4}=\sqrt[4]{3^4\cdot 2^2}=3\sqrt{2}$.

? Чи завжди можна винести множник з-під знака кореня? Ні. Наприклад, у виразі $\sqrt[3]{10}$ не можна винести множник з-під знака кореня, оскільки число 10 не можна подати як добуток чисел, з яких хоча б одне є кубом деякого числа.

Задача 5. Внесіть множник під знак кореня: 1) $5\sqrt{3}$; 2) $-2\cdot\sqrt[4]{8}$.

Розв'язання. Вносячи множник під знак кореня, треба піднести його до степеня, який дорівнює показнику кореня, і записати як множник під знаком кореня.

1) $5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\cdot 3}=\sqrt{75}$; 2) $-2\cdot\sqrt[4]{8}=-1\cdot 2\cdot\sqrt[4]{8}=-\sqrt[4]{2^4\cdot 8}=-\sqrt[4]{16\cdot 8}=-\sqrt[4]{128}$.

Під знак кореня парного степеня можна вносити тільки невід'ємне число.

Задача 6. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{a^4}{\sqrt[7]{a^5}}$; 3) $\dfrac{m-n}{\sqrt{m-n}}$; 4) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.

Розв'язання. Звільняючись від ірраціональності в знаменнику дробу, необхідно чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те саме число або вираз, відмінний від нуля.

1) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}=\sqrt{3}$; 2) $\dfrac{a^4}{\sqrt[7]{a^5}}=\dfrac{a^4\sqrt[7]{a^2}}{\sqrt[7]{a^5}\sqrt[7]{a^2}}=\dfrac{a^4\sqrt[7]{a^2}}{a}=a^3\sqrt[7]{a^2}$;

3) $\dfrac{m-n}{\sqrt{m-n}}=\dfrac{\left(\sqrt{m-n}\right)^2}{\sqrt{m-n}}=\sqrt{m-n}$;

4) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\dfrac{\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

Дізнайтеся більше

Розглянемо застосування властивостей коренів до обчислення значення виразу $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

Розв'язання. Виконаємо віднімання дробів:

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2-\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}=\frac{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}}{\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4-3}}=2\sqrt{3}.$$

Пригадайте головне

1. Дайте означення кореня n-го степеня з дійсного числа a. Наведіть приклади.
2. Що називають арифметичним коренем n-го степеня із числа $a \geq 0$? Наведіть приклади.
3. Назвіть основні властивості арифметичного кореня n-го степеня. Для яких перетворень коренів їх застосовують?

Розв'яжіть задачі

36'. Чи правильно, що:
1) числа 3 і -3 є коренями другого степеня із числа 9;
2) числа 4 і -4 є коренями другого степеня із числа 8;
3) числа 2 і -2 є коренями третього степеня із числа 8;
4) число 0 є коренем n-го степеня із числа 0?

37'. Чи правильно, що:
1) число -3 є арифметичним коренем другого степеня із числа 9;
2) число 2 є арифметичним коренем третього степеня із числа 8;
3) число -4 є арифметичним коренем другого степеня із числа 16;
4) число $\frac{1}{2}$ є арифметичним коренем третього степеня із числа $-\frac{1}{8}$;
5) число $-\frac{1}{2}$ є арифметичним коренем другого степеня із числа $\frac{1}{4}$;
6) число 0 є арифметичним коренем n-го степеня із числа 0?

38'. Назвіть підкореневий вираз арифметичного кореня n-го степеня та його степінь: 1) $\sqrt[8]{3}$; 2) $\sqrt[5]{0}$; 3) $\sqrt[12]{21}$; 4) $\sqrt{\frac{3}{25}}$; 5) $\sqrt{b+1}$; 6) $\sqrt[3]{ax}$.

39°. Чи правильні такі рівності:

$$\sqrt{4}=2;\quad \sqrt[3]{-27}=-3;\quad \sqrt{16}=-4;\quad \sqrt{-9}=-3;\quad \sqrt{(-2)^4}=(-2)^2\ ?$$

Відповідь обґрунтуйте.

40°. Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{4\cdot 36}$;
2) $\sqrt[3]{-\frac{8}{125}}$;
3) $\left(\sqrt{5}\right)^4$;
4) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$;
5) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$;
6) $\left(3\sqrt{18}-5\sqrt{64}\right)\cdot\sqrt{2}$;

7) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)^2$; 8) $\sqrt{200^2-56^2}$; 9) $\sqrt[3]{16\sqrt{2}}$.

41°. Знайдіть значення арифметичного кореня:

1) $\sqrt[3]{27}$; 2) $\sqrt[5]{32}$; 3) $\sqrt{(-2)^2}$; 4) $\sqrt[4]{(-5)^4}$; 5) $\sqrt{(-3)^2}+\sqrt[3]{8}$; 6) $\sqrt{(\pi-4)^2}$.

42°. Порівняйте числа:

1) $\sqrt{3}$ і 0; 2) 0 і $-\sqrt{6}$; 3) $\sqrt{100}$ і -10; 4) -4 і $\sqrt{2}$; 5) $\sqrt{5}$ і 2; 6) 5 і $\sqrt{24}$.

43°. Яке із чисел більше: 1) $\sqrt[20]{20}$ чи $\sqrt[5]{5}$; 2) $4\sqrt[3]{3}$ чи $2\sqrt[3]{25}$?

44°. Порівняйте числа: 1) 0 і $\sqrt{0,01}$; 2) $\sqrt{15}$ і $-\sqrt{17}$.

45°. Винесіть множник з-під знака кореня:

1) $\sqrt[3]{54}$; 2) $\sqrt[4]{64}$; 3) $\sqrt{200}$; 4) $\sqrt[4]{16a}$; 5) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{125}}$.

46°. Винесіть множник з-під знака кореня: 1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt[3]{32}$; 3) $\sqrt[4]{80}$.

47. Який знак має різниця: 1) $2\sqrt{2}-\sqrt[4]{65}$; 2) $\sqrt[6]{32}-2\sqrt[8]{2}$?

48. Спростіть вираз:

1) $\sqrt[3]{8m^3n^9}$; 3) $\sqrt{4\left(3-\sqrt{10}\right)^2}$; 5) $\sqrt[3]{\sqrt{17}+3}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{17}-3}$.

2) $\dfrac{3}{x}\sqrt{\dfrac{a^5x^2}{18}}$; 4) $\sqrt[3]{27\left(1-\sqrt{3}\right)^3}$;

49. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$; 2) $\dfrac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-1}$; 3) $\dfrac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}\cdot\sqrt[6]{a^5}}{\left(\sqrt{a\sqrt{a}}\right)^{-2}}$.

50*. Чи різні області визначення мають функції:

1) $f(x)=\sqrt[6]{4-x^2}$ та $\varphi(x)=\sqrt[3]{4-x^2}$;

2) $f(x)=\sqrt[4]{x^2+1}$ та $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+1}}$?

51*. Доведіть рівність:

1) $\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}+\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}=14$; 3) $\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{a}}}{1+\sqrt{a}}-\dfrac{\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}}{a-1}=\dfrac{2}{1-a}$;

2) $\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}+\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}=3$; 4) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}}\right)^{-4}=\dfrac{a}{b}$.

52*. Звільніться від ірраціональності в знаменнику:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{5}+2}}$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$; 3) $\dfrac{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}$.

Проявіть компетентність

53. У квартирі дві кімнати мають форму квадрата. Площа однієї з кімнат дорівнює 25 м^2, а другої — 16 м^2. На скільки гривень більше доведеться заплатити за плінтус для стелі більшої кімнати, аніж меншої, якщо ціна 1 шт. плінтуса завдовжки 2 м становить 7,50 грн?

54. Стовбуром дерева з ґрунту до його крони піднімається вода, яку через листя випаровують промені Сонця. Якщо вирубати дерева, то ця вода буде накопичуватися в ґрунті, що призведе до утворення болота. Доросла береза за добу випаровує близько $15\sqrt[3]{125}$ л води, бук — $5\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt{10^2}$ л, а липа — удвічі більше за бук. Розрахуйте, скільки потрібно посадити на ділянці беріз, щоб за день випаровувалося 1500 л води, якщо на цій ділянці вже ростуть 2 буки й 3 липи.

§ 3 Степінь з раціональним показником

1. ПОНЯТТЯ СТЕПЕНЯ З РАЦІОНАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Ви вже знаєте, який зміст має вираз a^n, де $a \neq 0$, якщо показник n — ціле число.

Наприклад,

$$2^4 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2;\ (-3)^2 = (-3)\cdot(-3);\ 5^{-3} = \frac{1}{5^3};\ 7^0 = 1;\ 4{,}3^1 = 4{,}3,$$

тобто степінь a^n існує при довільному цілому n і дійсному $a \neq 0$.

? Який зміст має степінь $a^{\frac{m}{n}}$ з довільним раціональним показником $\frac{m}{n}$?

Степенем числа $a > 0$ з раціональним показником $r = \frac{m}{n}$, де m — ціле, а $n > 1$ — натуральне число, називають число $\sqrt[n]{a^m}$, тобто $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

За означенням степінь $a^r = a^{\frac{m}{n}}$ існує за будь-якого дробового показника $r = \frac{m}{n}$, якщо основа $a > 0$. Якщо n — парне число, то степінь $a^{\frac{m}{n}}$ має зміст, якщо $a^m \geq 0$; якщо n — непарне число, то вираз $a^{\frac{m}{n}}$ має зміст за будь-якої основи $a \neq 0$.

Наприклад, $2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$; $(-5)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(-5)^3} = \sqrt[4]{-125}$ не існує;

$9^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{9^4} = \sqrt[5]{3^8} = 3\sqrt[5]{27}$; $(-243)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(-243)^3} = \sqrt[5]{(-3)^{15}} = (-3)^3 = -27$.

2. ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З РАЦІОНАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Покажемо, що сформульоване означення степеня з раціональним показником зберігає основні властивості степеня із цілим показником.

Властивості степеня з раціональним показником ($a > 0$, $b > 0$, r, s — раціональні числа):

1. $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$. **2.** $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$. **3.** $(a^r)^s = a^{rs}$.

4. $(ab)^r = a^r b^r$. **5.** $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$.

6. $a^r > 1$, якщо $a > 1, r > 0$; $a^r < 1$, якщо $a > 1, r < 0$.

7. $a^r > a^s$, якщо $a > 1, r > s$; $a^r < a^s$, якщо $0 < a < 1, r > s$.

8. $a^r < b^r$, якщо $r > 0, a < b$; $a^r > b^r$, якщо $r < 0, a < b$.

Для доведення цих властивостей використовують означення степеня з раціональним показником і властивості коренів.

Доведемо для прикладу властивість 1.

Нехай $r = \frac{m}{n}$ і $s = \frac{p}{q}$, де $n > 1$, $q > 1$ — натуральні числа, а m і p — цілі числа.

Тоді $a^r \cdot a^s = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{r+s}$.

Із властивості 1 випливає, що для довільного $a > 0$ і довільного раціонального числа r виконується рівність $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$. Справді, $a^{-r} \cdot a^r = a^0 = 1$.

Задача 1. Обчисліть значення виразу $(0{,}75)^{-1} \cdot \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2{,}5^2$.

Розв'язання. Скористаємося властивостями степеня з раціональним показником.

$$(0{,}75)^{-1} \cdot \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2{,}5^2 = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{25}{4} = \frac{25}{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 25 \cdot \frac{3}{16} = 4\frac{11}{16}.$$

Задача 2. Спростіть вираз $\left(a^{-\frac{1}{5}}+a^{\frac{2}{5}}\right)\left(a^{-\frac{2}{5}}+a^{\frac{4}{5}}\right)\left(a^{\frac{2}{5}}-a^{-\frac{1}{5}}\right)\cdot a^{\frac{4}{5}}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку добуток першого і третього множників, а потім помножимо здобутий результат на другий множник за відомою формулою різниці квадратів:

$$\left(a^{-\frac{1}{5}}+a^{\frac{2}{5}}\right)\left(a^{-\frac{2}{5}}+a^{\frac{4}{5}}\right)\left(a^{\frac{2}{5}}-a^{-\frac{1}{5}}\right)\cdot a^{\frac{4}{5}}=\left(a^{\frac{2}{5}}+a^{-\frac{1}{5}}\right)\left(a^{\frac{2}{5}}-a^{-\frac{1}{5}}\right)\left(a^{-\frac{2}{5}}+a^{\frac{4}{5}}\right)\cdot a^{\frac{4}{5}}=$$

$$=\left(a^{\frac{4}{5}}-a^{-\frac{2}{5}}\right)\left(a^{-\frac{2}{5}}+a^{\frac{4}{5}}\right)\cdot a^{\frac{4}{5}}=\left(a^{\frac{4}{5}}-a^{-\frac{2}{5}}\right)\left(a^{\frac{4}{5}}+a^{-\frac{2}{5}}\right)\cdot a^{\frac{4}{5}}=\left(a^{\frac{8}{5}}-a^{-\frac{4}{5}}\right)\cdot a^{\frac{4}{5}}=$$

$$=a^{\frac{12}{5}}-a^{0}=a^{\frac{12}{5}}-1=\sqrt[5]{a^{12}}-1=a^{2}\sqrt[5]{a^{2}}-1.$$

Чи існує поняття степеня з ірраціональним показником? Так, існує. Більше того, степінь з ірраціональним показником має такі самі властивості, як і степінь з раціональним показником.

Проте чинною програмою навчання математики на даному рівні його вивчення не передбачено. Утім, із загальним підходом до його тлумачення ви можете ознайомитись у матеріалі рубрики «Дізнайтеся більше».

Дізнайтеся більше

1. Чи має певний зміст степінь a^{α}, де $a>0$, $a\neq 1$, а α — довільне ірраціональне число (тобто нескінченний неперіодичний десятковий дріб)? Нехай α_1 — будь-яке наближене раціональне значення числа α з недостачею, α_2 — будь-яке наближене раціональне значення числа α з надлишком.

Тоді: а) якщо $a>1$ і $\alpha>0$, то $a^{\alpha_1}<a^{\alpha}<a^{\alpha_2}$.

Наприклад, $2^{1,7}<2^{\sqrt{3}}<2^{1,8}$, бо $a=2>1$, $\alpha=\sqrt{3}$; $1,7<\sqrt{3}<1,8$;

$5^{1,41}<5^{\sqrt{2}}<5^{1,42}$, бо $a=5>1$, $\alpha=\sqrt{2}$; $1,41<\sqrt{2}<1,42$;

б) якщо $0<a<1$ і $\alpha>0$, то $a^{\alpha_2}<a^{\alpha}<a^{\alpha_1}$.

Наприклад, $\left(\frac{1}{7}\right)^{1,5}<\left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{2}}<\left(\frac{1}{7}\right)^{1,4}$ бо $a=\frac{1}{7}<1$, $\alpha=\sqrt{2}$; $1,4<\sqrt{2}<1,5$;

в) якщо $\alpha<0$, то $-\alpha>0$ і $a^{\alpha}=\left(\frac{1}{a}\right)^{-\alpha}$, $a>0$, $a\neq 1$.

Наприклад, $3^{-\sqrt{5}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{3}}=2^{\sqrt{3}}$.

Нерівності а) і б) визначають степінь з ірраціональним показником α через степені з раціональними показниками α_1 і α_2 з будь-якою необхідною точністю.

2. До фундаторів вітчизняної алгебраїчної школи належить видатний математик **Дмитро Олександрович Граве** (*1863–1939*), академік Академії наук України, почесний член АН СРСР. Закінчив Санкт-Петербурзький університет.

Працював професором Харківського, а потім Київського університетів. У 1934 р. став першим директором Інституту математики АН УРСР. Створив у Києві наукову алгебраїчну школу. Основні праці стосуються алгебри, прикладної математики, механіки, кібернетики, астрономії. Його учнями були відомі математики М. Кравчук, М. Чеботарьов, О. Шмідт й ін.

Пригадайте головне

1. Як визначається степінь числа з раціональним показником?
2. Чому в означенні степеня $a^{\frac{m}{n}}$ указано умову $a > 0$?
3. Які властивості має степінь числа з раціональним показником? Проілюструйте їх на прикладах.

Розв'яжіть задачі

55'. Спростіть вираз: 1) $a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{3}}$; 2) $c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{-\frac{3}{2}}$; 3) $\left(a^{0,4}\right)^{-\frac{5}{4}}$.

56'. Спростіть вираз: 1) $\left(x^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{8}}$; 2) $b^{-0,1} : b^{-0,6}$; 3) $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{5}{3}}$.

57'. Обчисліть: 1) $(27 \cdot 64)^{\frac{1}{3}}$; 2) $25^{0,3} \cdot 5^{1,4}$; 3) $\left(\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

58'. Обчисліть: 1) $2 \cdot 27^{-\frac{1}{3}}$; 2) $\sqrt[4]{9} \cdot 3^{-1,5}$; 3) $\left(\frac{1}{125} \cdot \frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

59°. Обчисліть: 1) $\left(\frac{27^3}{3^6}\right)^{\frac{1}{3}}$; 2) $8^{\frac{1}{2}} : \left(8^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{3}{2}}\right)$.

60°. Обчисліть: 1) $\sqrt[3]{100} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{8}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}$; 2) $\sqrt[3]{36} \cdot 2^{\frac{4}{3}} : 3^{\frac{2}{3}}$.

61°. Спростіть вираз: 1) $\left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)^2 - (4xy)^{\frac{1}{2}}$; 2) $\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)^2$.

62°. Спростіть вираз: 1) $\sqrt{b} + \sqrt{c} - \left(b^{\frac{1}{4}} + c^{\frac{1}{4}}\right)^2$; 2) $\left(x^{\frac{1}{4}} + 2\right)\left(x^{\frac{1}{4}} - 2\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + 4\right)$.

63°. Спростіть і знайдіть значення виразу:

1) $\frac{a^{\frac{5}{6}} + a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{6}} - a^{\frac{1}{3}}}$, якщо $a = 1,44$; 2) $\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x - 4} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}} - 2}$, якщо $x = 9$.

64°. Спростіть і знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{m^{\frac{2}{3}}-2,25}{m^{\frac{1}{3}}+1,5}$, якщо $m=8$; 2) $\dfrac{2}{y^{\frac{1}{4}}+3}-\dfrac{2}{y^{\frac{1}{4}}-3}$, якщо $y=100$.

65. Чи правильна рівність:

1) $\dfrac{a-x}{a^{0,5}-x^{0,5}}-\dfrac{a^{1,5}-x^{1,5}}{a-x}=\dfrac{a^{0,5}x^{0,5}}{a^{0,5}+x^{0,5}}$; 2) $((a^3(a^2a^{0,5})^{\frac{1}{5}})^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{7}{12}}$?

66. Знайдіть значення виразу $\dfrac{\sqrt[4]{40}\cdot 2^{\frac{1}{4}}}{5^{-\frac{3}{4}}}$.

67. Розмістіть у порядку зростання числа:

1) $8^{\frac{1}{5}}$, $4^{\frac{1}{3}}$, $2^{\frac{3}{2}}$; 2) $\left(\dfrac{9}{4}\right)^{0,1}$, $\left(\dfrac{9}{4}\right)^{0,2}$, $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}}$.

68. Спростіть вираз: 1) $\dfrac{\left(\sqrt[5]{x^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt[5]{x^4}\right)^3}:\dfrac{\left(\sqrt[4]{x\sqrt{y}}\right)^6}{\left(\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x^2y}}\right)^4}$; 2) $\dfrac{\left(1-\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-2}\right)a^2}{\left(a^{0,5}-b^{0,5}\right)^2+2(ab)^{\frac{1}{2}}}$.

69*. Спростіть вираз: 1) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}+1}\cdot a^{\frac{1}{4}}+1$; 2) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1}:\dfrac{1}{x^{1,5}-1}$.

70*. Обчисліть значення виразу:

1) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(7-4\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{4}}$; 2) $\dfrac{\left(a-2\sqrt{a}+1\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{a}+1}:\dfrac{a^{\frac{1}{4}}+1}{a^{\frac{1}{4}}-1}+1$, якщо $a>1$;

3) $\left(2+\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(2-\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{3}}$; 4) $\dfrac{m-m^{-2}}{m^{\frac{1}{2}}-m^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{2}{m^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{1-m^{-2}}{m^{\frac{1}{2}}+m^{-\frac{1}{2}}}$, якщо $m=4$.

71*. Доведіть рівність: 1) $\dfrac{\left(a+2\sqrt{a-1}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\sqrt{a-1}+1\right)^{-\frac{1}{3}}}+\dfrac{\left(a-2\sqrt{a-1}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\sqrt{a-1}-1\right)^{-\frac{1}{3}}}=2\sqrt{a-1}$;

2) $\left(2+\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$; 3) $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

72*. Чи правильно те, що значення виразу $\left(11+6\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(11-6\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ є натуральним числом?

Проявіть компетентність

73. Маса Сонця становить приблизно $2 \cdot 10^{27}$ т, а маса Нептуна — приблизно $1 \cdot 10^{23}$ т. У скільки разів маса Нептуна менша від маси Сонця?

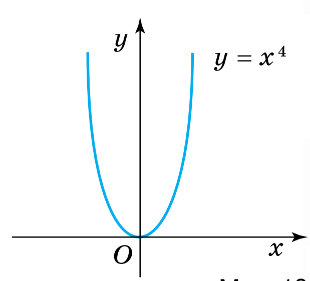
74. Лінійні розміри атома становлять 10^{-8} см. Скільки атомів можна «вкласти» у відрізку завдовжки 1 мм?

§ 4 Степенева функція та її властивості

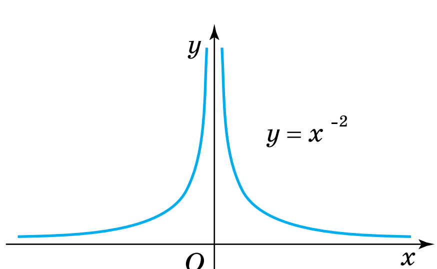
Функцію $f(x) = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$, називають степеневою функцією з дійсним показником α.

При довільному дійсному α степенева функція визначена на інтервалі $(0; +\infty)$. Якщо $\alpha > 0$, то степенева функція визначена і для $x = 0$, бо $0^{\alpha} = 0$.

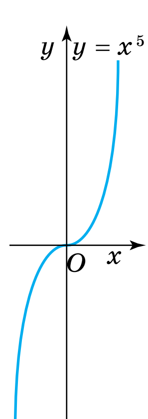
Якщо α — ціле число, $\alpha \in \boldsymbol{Z}$, то степенева функція визначена і для $x < 0$. Для парних α — ця функція парна (мал. 18, 19), а для непарних — непарна (мал. 20, 21).



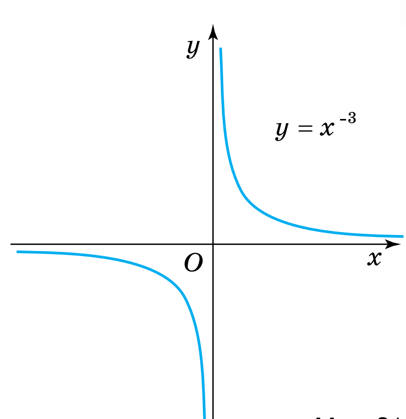
Мал. 18



Мал. 19



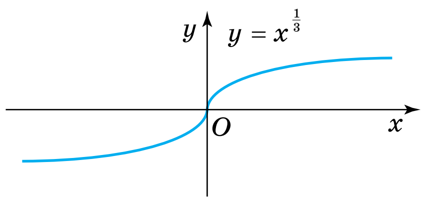
Мал. 20



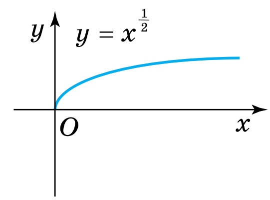
Мал. 21

Якщо α — раціональне число $\left(\alpha = \frac{m}{n}, m \in \boldsymbol{Z}, n \in \boldsymbol{N}\right)$, то степенева функція визначена на множині $\boldsymbol{R}$ за умови, що $m > 0$, а n — непарне число, і на множині $[0; +\infty)$ — за умови, що $m > 0$, а n — парне число (мал. 22, 23).

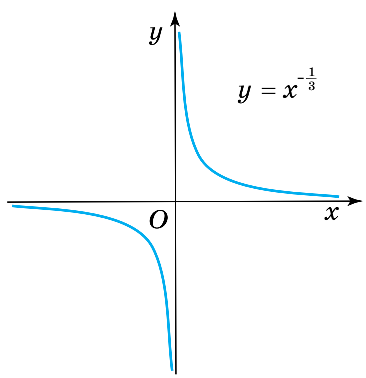
Якщо α — раціональне число $\left(\alpha = \frac{m}{n}, m \in \boldsymbol{Z}, n \in \boldsymbol{N}\right)$, то степенева функція визначена на множині $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ за умови, що $m < 0$, а n — непарне число, і на множині $(0; +\infty)$ — за умови, що $m < 0$, n — парне (мал. 24, 25).



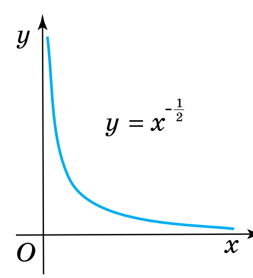
Мал. 22



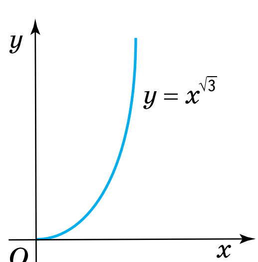
Мал. 23



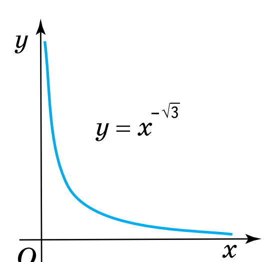
Мал. 24



Мал. 25



Мал. 26



Мал. 27

За раціональних показників степенева функція є парною, якщо m — парне число, а n — непарне, і є непарною, якщо m і n — непарні числа.

Якщо α — ірраціональне число, то степенева функція визначена на множині $[0; +\infty)$ за умови, що $\alpha > 0$, і на множині $(0; +\infty)$ — за умови, що $\alpha < 0$ (мал. 26, 27).

Задача 1. Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt[4]{-x}+(x-2)^{\frac{1}{6}}$.

Розв'язання. Область визначення функції знайдемо за умови існування кожного доданку суми: $\begin{cases}-x\ge 0,\\ x-2\ge 0\end{cases}$; $\begin{cases}x\le 0,\\ x\ge 2\end{cases}$; $x\in\varnothing$,

тобто заданий аналітичний вираз функцію не задає.

Задача 2.

Дослідіть функцію та побудуйте її графік $f(x)=x^{\frac{3}{5}}$.

Розв'язання. Встановимо властивості заданої степеневої функції $f(x)=x^{\frac{3}{5}}$.

Область визначення $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$. Область значень $E(f)=(-\infty;\ +\infty)$.

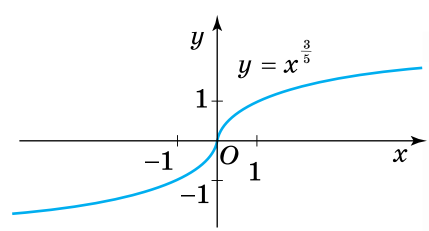
Функція непарна, оскільки

$f(-x)=\sqrt[5]{(-x)^3}=-\sqrt[5]{x^3}=-f(x),\ x\in D(f)$,

отже, її графік симетричний відносно початку координат.

Графік функції перетинає вісь Ox у точці $x=0$ (нуль функції).

Якщо $x\to+\infty$, то $f(x)\to+\infty$; якщо $x\to-\infty$, то $f(x)\to-\infty$ (мал. 28).



Мал. 28

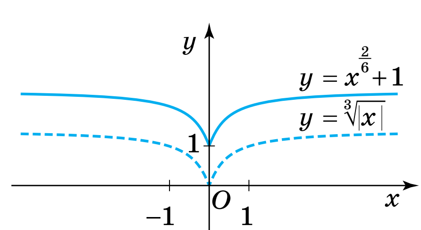
Дізнайтеся більше

1. Розглянемо побудову графіків складніших функцій.

Побудуйте графік функції $f(x)=x^{\frac{2}{6}}+1$.

Розв'язання. За властивістю степеня маємо $y=\sqrt[6]{x^2}+1=\sqrt[3]{|x|}+1$.

Побудуємо спочатку графік функції $y=\sqrt[3]{|x|}$. Функція визначена всюди: $D(f)=(-\infty;\ +\infty)$, і є парною, оскільки $f(-x)=\sqrt[3]{|-x|}=\sqrt[3]{|x|}=f(x),\ x\in D(f)$, причому $y=\sqrt[3]{x}$, якщо $x\ge 0$. Тому побудуємо графік функції $y=\sqrt[3]{x}$ і відобразимо його симетрично відносно осі Oy. Дістанемо графік функції $y=\sqrt[3]{|x|}$. Залишається перенести цей графік уздовж осі Oy на одну одиницю вгору (мал. 29).



Мал. 29

2. Дубинчук Олена Степанівна (*1919–1994*) — одна з визначних педагогів-математиків України. Народилася на Вінничині, у м. Ямполі, закінчила механіко-математичний факультет Київського державного університету ім.Тараса Шевченка. З 1951 р. й до останку Олена Степанівна працювала в Науково-дослідному інституті педагогіки України (нині — Інститут педагогіки Національної академії педагогічних наук України). Автор численних підручників, методик і технологій навчання математики.

Пригадайте головне

1. Яку функцію називають степеневою? Наведіть приклади.
2. Як розміщений графік степеневої функції з парним додатним показником; з непарним додатним показником?
3. За якої умови степенева функція з показником $\frac{m}{n}$ є парною; непарною?

Розв'яжіть задачі

75'. Яка з даних функцій є степеневою:

1) $y = x^5$; 3) $y = \frac{1}{x^3}$; 5) $y = \frac{2x}{x+1}$;

2) $y = 2x^2 + 1$; 4) $y = x^3 - 5$; 6) $y = x^{-\frac{5}{3}}$?

76'. Яка з даних функцій визначена на множині всіх дійсних чисел:

1) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$; 2) $f(x) = x^{-\frac{5}{2}}$; 3) $f(x) = x^{\frac{7}{5}}$; 4) $f(x) = x^{-\frac{7}{4}}$; 5) $f(x) = \frac{1}{x}$?

77'. Чи належить графіку функції задана точка:

1) $y = \sqrt[3]{x}$, $A(8; 2)$, $B(216; 6)$, $C(27; -3)$;

2) $y = \sqrt[4]{x}$, $D(81; 3)$, $E(81; -3)$, $F(-16; -2)$?

78°. Яка з даних степеневих функцій зростає на інтервалі $(0; 1)$:

1) $f(x) = \frac{2}{x}$; 3) $f(x) = -x^4$; 5) $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$;

2) $f(x) = -\frac{2}{x}$; 4) $f(x) = \sqrt{x}$; 6) $f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$?

79°. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = x^3 + 1$; 3) $y = \sqrt{x^2 + 1}$; 5) $y = \sqrt{x+3} + \frac{4}{x}$.

2) $y = \frac{1}{x-1}$; 4) $y = \sqrt[3]{2x+1}$;

80°. Побудуйте графік функції та схарактеризуйте її властивості:

1) $y = x^4$; 3) $y = -x^4 + 2$; 5) $y = \frac{2}{x}$;

2) $y = x^4 + 1$; 4) $y = (x-1)^4$; 6) $y = \frac{1}{x} + 1$.

81°. Порівняйте значення степеневих функцій:

1) $\sqrt[3]{2}$ і $\sqrt[3]{3}$; 3) $\sqrt[5]{0,2}$ і $\sqrt[5]{0,3}$; 5) $(-2,3)^{-3}$ і $\left(-\frac{1}{5}\right)^{-3}$;

2) $\sqrt[4]{3}$ і $\sqrt[4]{5}$; 4) $(3,1)^{-4}$ і $\left(5\frac{1}{3}\right)^{-4}$; 6) $(-0,7)^{-6}$ і $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-6}$.

82°. Знайдіть яке-небудь значення аргументу, за якого значення функції $y = \sqrt[4]{x}$ більше, ніж: 1) 2; 2) 3; 3) 10; 4) 10^5.

83. Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^4 = 1$; 2) $\sqrt[3]{x} = 2$; 3) $\sqrt[3]{x} = -2$; 4) $\sqrt[4]{x} = 2$.

84. Розв'яжіть графічно нерівність:

1) $x^4 < 1$; 2) $\sqrt[4]{x} < 1$; 3) $\sqrt[4]{x} > 1$; 4) $\sqrt[3]{x} < -1$.

85. Побудуйте графік функції та схарактеризуйте її властивості:

1) $y = x^{\frac{3}{4}}$; 3) $y = x^{\frac{4}{5}}$ 7) $y = \sqrt[3]{x} + 1$;

2) $y = x^{-\frac{3}{4}}$; 4) $y = x^{-\frac{5}{7}}$; 6) $y = \sqrt[3]{x+1}$; 8) $y = \sqrt[3]{x} - 2$.

86. Користуючись графіком функції $y = x^{\frac{1}{2}}$, знайдіть наближені значення коренів: 1) $\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}$; 3) $\sqrt{5}$.

87. Поясніть, чому правильною є нерівність: 1) $\sqrt[10]{5} > \sqrt[10]{3}$; 2) $\sqrt[21]{3,3} < \sqrt[21]{3,5}$.

88*. Побудуйте графік функції та схарактеризуйте її властивості:

1) $y = \sqrt{x^6}$; 2) $y = -\sqrt{x^4}$; 3) $y = \left|x^{-1}\right|$; 4) $y = x^{\frac{12}{8}} - 1$.

89*. Чим відрізняються графіки функцій:

1) $y = \sqrt{(x-2)^2}$ і $y = x - 2$; 2) $y = \sqrt[3]{(x+1)^3}$ і $y = x + 1$;

3) $y = \sqrt{(x-3)^2(x+2)^2}$ і $y = (x-3)(x+2)$?

Проявіть компетентність

90. Чи має розв'язки рівняння:

1) $x^{\frac{1}{2}} + (x+2)^{\frac{1}{6}} = -1$; 2) $\sqrt{2-x} = \sqrt[4]{x-3}$?

91. Розв'яжіть графічно рівняння: 1) $x^{\frac{1}{3}} = x$; 2) $x^{\frac{1}{3}} + x^2 = 2$.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яку залежність між змінними x і y називають функціональною? Наведіть приклади функціональних залежностей.
2. Назвіть основні способи задання функцій та проілюструйте на прикладах.
3. Що таке область визначення та область значень функції?
4. Які функції називають монотонними? Сформулюйте відповідні означення.
5. Що таке парна та непарна функції? Яку властивість мають їхні графіки?
6. Які геометричні перетворення графіка функції $y = x^3$ треба виконати, щоб побудувати графік функції $y = (x-1)^3 + 2$?
7. Що таке корінь n-го степеня із числа a?
8. Дайте означення арифметичного кореня n-го степеня із числа $a \geq 0$.
9. Сформулюйте означення степеня з раціональним показником і назвіть його основні властивості.
10. Яку функцію називають степеневою? Наведіть приклади.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 1

Уважно прочитайте кожне завдання і вкажіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

Тест 1

1° $f(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{2-x}}$, $D(f) = $?

А. $(-\infty;\ 2]$. **Б.** $(-\infty;\ 2)$. **В.** $(2;\ +\infty)$. **Г.** $[2;\ +\infty)$.

2° Яка з функцій спадає на інтервалі $(0;\ 1)$?

А. $f(x) = \dfrac{1}{x}$. **Б.** $f(x) = -\dfrac{1}{x}$. **В.** $f(x) = 2x^2$. **Г.** $f(x) = x^3$.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

3° Яка з функцій є парною?

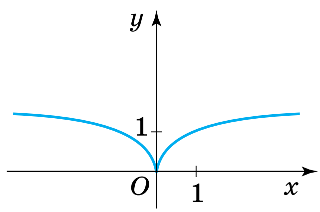
А. $y = 5x^4 - x^2 + 1$. **В.** $y = |x - 1|$.
Б. $y = x^3 - 3x$. **Г.** $y = \sqrt{x} + x$.

4 Графік функції $y = x$ симетрично відобразили відносно осі Oy. Графік якої функції дістали?

А. $y = -x$. **Б.** $y = \frac{1}{x}$. **В.** $y = |x|$. **Г.** $y = 2x$.

5* Графік якої функції подано на малюнку?

А. $y = \sqrt{|x|}$. **Б.** $y = \sqrt{x^2}$. **В.** $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$. **Г.** $y = |x|$.



Тест 2

1° $\sqrt[3]{25 \cdot 1080} = ?$

А. 25. **Б.** 30. **В.** 100. **Г.** −40.

2° Який знак нерівності слід поставити замість * у виразі $\sqrt[4]{\sqrt[3]{2}} * \sqrt[3]{\sqrt[4]{5}}$?

А. $>$. **Б.** $<$. **В.** $\geq$. **Г.** $\leq$.

3 $\left(\sqrt{18} - \sqrt{2}\right)^{\frac{2}{3}} = ?$

А. −2. **Б.** 0. **В.** 2. **Г.** 1.

4 Знайдіть α, якщо графік функції $y = x^{\alpha}$ проходить через точку M (2; 4).

А. 1. **Б.** $\frac{1}{2}$. **В.** 2. **Г.** 0.

5* Чи правильним є твердження: графіки степеневих функцій $y = x^{\frac{6}{4}}$ та $y = x^{\frac{3}{2}}$ збігаються?

А. Так. **Б.** Ні. **В.** Не можна визначити.

Розділ 2

Тригонометричні функції

У розділі ви дізнаєтесь:

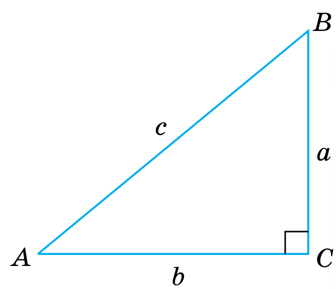
- ✦ що кути бувають будь-якої градусної міри;
- ✦ як знайти синус, косинус, тангенс, котангенс будь-якого кута;
- ✦ що таке тригонометричні функції числового аргументу, які вони мають властивості та які реальні процеси описують;
- ✦ які існують співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу;
- ✦ який вигляд мають графіки тригонометричних функцій, як їх будують;
- ✦ які формули називають формулами додавання, який вони мають вигляд і де застосовуються;
- ✦ які рівняння належать до тригонометричних і як їх розв’язують.

§ 5 Тригонометричні функції довільного кута

1. ПРИГАДУЄМО ОСНОВНЕ ПРО СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС КУТІВ ВІД 0° ДО 180°

З курсу геометрії вам відомо, що в прямокутному ΔABC ($\angle C = 90°$) катет a є прилеглим до кута B і протилежним куту A (мал. 30). Відповідно катет b — прилеглий до кута A і протилежний куту B. Відомо, що відношення протилежного куту катета до гіпотенузи називається *синусом цього кута*, а відношення прилеглого до кута катета до гіпотенузи — *косинусом кута*. Тобто

$$\frac{a}{c} = \sin A,\ \frac{b}{c} = \sin B \text{ і } \frac{a}{c} = \cos B,\ \frac{b}{c} = \cos A.$$

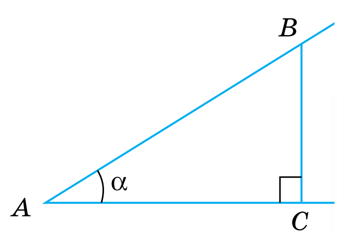


Мал. 30

Відношення протилежного і прилеглого до кута катетів називають *тангенсом кута*, а обернене відношення — *котангенсом кута*. Отже,

$$\frac{a}{b} = \text{tg}A,\ \frac{b}{a} = \text{tg}B,\ \frac{b}{a} = \text{ctg}A \text{ і } \frac{a}{b} = \text{ctg}B.$$

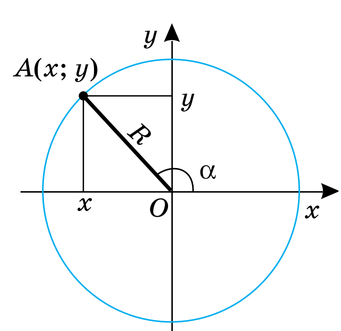
Характерно, що всі зазначені відношення залежать лише від міри відповідного кута й не залежать від довжин сторін трикутника. Це твердження було доведено у 8 класі.



Мал. 31

Із цього випливає, що будь-якому гострому куту відповідає єдине значення його синуса (косинуса, тангенса, котангенса). Отже, синус, косинус, тангенс і котангенс є *функціями гострого кута*.

З огляду на це, щоб знайти, наприклад, значення синуса даного гострого кута α, достатньо побудувати прямокутний трикутник із цим кутом (мал. 31), виміряти довжини сторін BC і AB та обчислити відношення цих довжин. Аналогічно, користуючись означенням, можна за цим самим малюнком знайти косинус, тангенс і котангенс кута α.



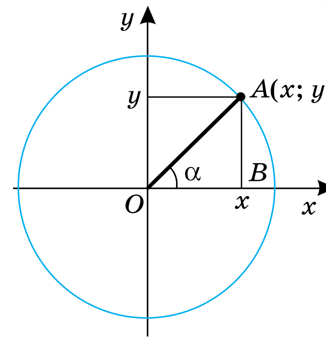
Мал. 32

У подальшому поняття синуса, косинуса, тангенса, котангенса було поширено і на кути α, міри яких лежать у межах від 0° до 180°. Це зроблено на основі таких означень (мал. 32):

$$\sin\alpha = \frac{y}{R},\ \cos\alpha = \frac{x}{R},\ \text{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ \text{ctg}\alpha = \frac{x}{y},$$

де R — радіус кола із центром у початку координат; x і y — відповідно абсциса й ордината точки перетину сторони OA кута α із цим колом.

Неважко помітити, що у випадку $0° < \alpha < 90°$ такі означення за змістом збігаються з означеннями синуса, косинуса, тангенса гострого кута прямокутного трикутника, бо тоді абсциса й ордината точки A дорівнюють довжинам відповідних катетів прямокутного ΔAOB, а радіус кола — його гіпотенузі (мал. 33).



Мал. 33

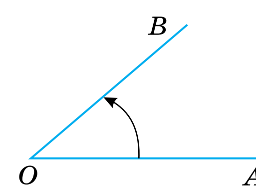
Можна показати, що і для кутів $0° < \alpha < 180°$ значення синуса, косинуса, тангенса не залежать від довжини радіуса кола, а залежать лише від міри кута.

З прийнятих означень випливає, що синус, косинус, тангенс і котангенс гострого кута додатні. Якщо кут тупий, то його синус додатний, а косинус, тангенс і котангенс — від'ємні. Обґрунтуйте ці твердження самостійно.

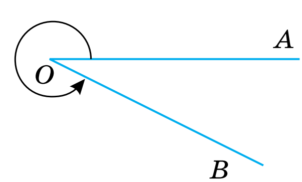
У різних сферах життя, зокрема в техніці, доводиться мати справу з кутами, міра яких не обмежується 180°. Як розуміють такі кути?

2. ДЕЩО НОВЕ ПРО КУТИ

Вам відомо, що кутом називають фігуру, утворену двома променями, які мають спільний початок. У той самий час будь-який кут, наприклад AOB, може бути утворений поворотом променя OA навколо точки O в напрямку, вказаному стрілкою на малюнку 34. Очевидно, що внаслідок повороту променя може утворитися кут, більший за 180° (мал. 35). Якщо продовжити повертати промінь після положення OB, то, зробивши повний оберт (360°), він повернеться в те саме положення. Таке саме положення він займе, зробивши будь-яку кількість k повних обертів ($360°k$). Кожному положенню променя OB відповідатиме певний кут. Градусну міру таких кутів можна обчислити за формулою: $\alpha + 360°k$, де α — градусна міра початкового кута AOB; k — кількість обертів (мал. 36).

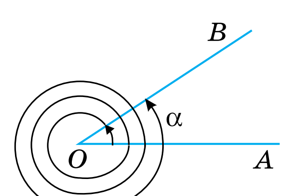


Мал. 34



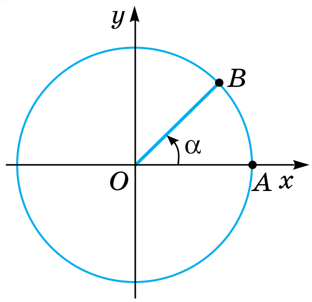
Мал. 35

При зазначеному трактуванні кута промінь OA називатимемо початковим променем, промінь OB — кінцевим, або рухомим, променем, бо він займає різні положення залежно від кута повороту.

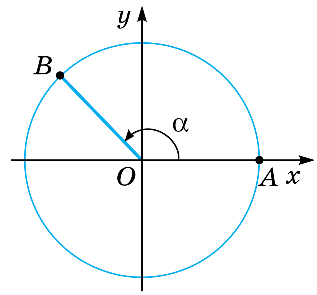


Мал. 36

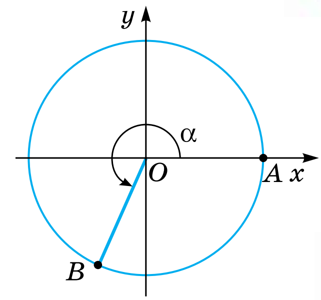
Позначимо на осі Ox праворуч від початку координат точку A і проведемо через неї коло із центром у точці O (мал. 37). Радіус OA називатимемо *почат-*



Мал. 37



Мал. 38



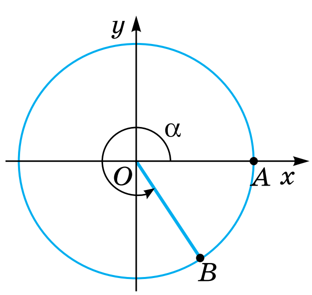
Мал. 39

ковим радіусом. Повернемо початковий радіус OA навколо точки O проти руху годинникової стрілки на кут α. Радіус OA перейде в радіус OB, який називатимемо *рухомим* (*кінцевим*) *радіусом*. Залежно від того, у якій координатній чверті розміщений радіус OB, кут α називають кутом цієї чверті. На малюнках 37–40 зображено кути I, II, III і IV чвертей відповідно.

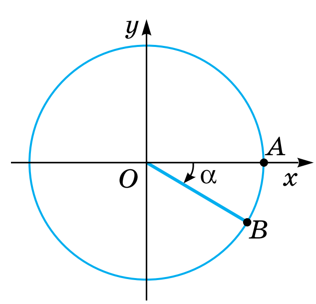
Домовимося кут α вважати додатним, якщо він утворюється поворотом початкового радіуса проти руху годинникової стрілки, і від'ємним, якщо він утворюється поворотом початкового радіуса за рухом годинникової стрілки. На малюнках 37–40 кут α додатний, а на малюнку 41 — від'ємний.

Якщо рухомий радіус займає положення OB або OB', то позначені на малюнку 42 кути дорівнюють відповідно $90°$ і $270°$. Тим самим положенням рухомого радіуса відповідають від'ємні кути $-270°$ і $-90°$ (мал. 43).

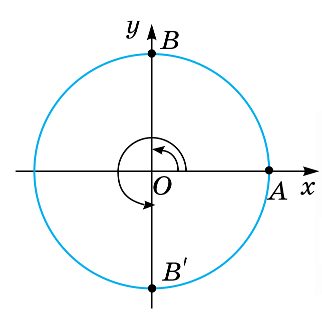
На малюнку 44 зображено кути $180°$ і $-180°$, а на малюнку 45 — кути $360°$ і $-360°$.



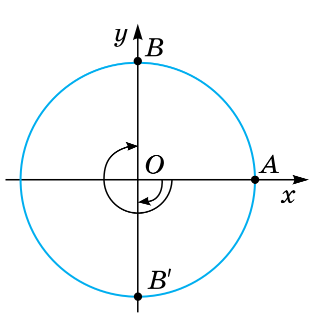
Мал. 40



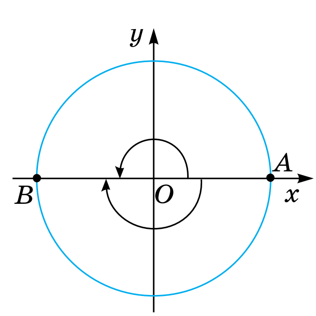
Мал. 41



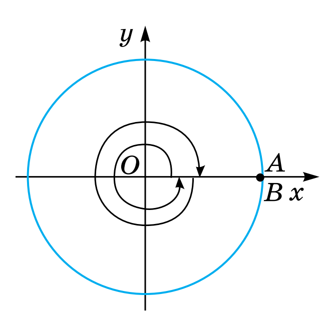
Мал. 42



Мал. 43



Мал. 44



Мал. 45

Положенню рухомого (кінцевого) радіуса, коли він збігається з початковим, відповідає й кут 0°.

Кути 0°, ±90°, ±180°, ±270°, ±360° не належать жодній чверті.

Варто пам'ятати, що множину всіх кутів, які відповідають, наприклад, положенню рухомого радіуса OB на малюнку 51, можна задати формулою: $\alpha = 90° + 360°k$, де k — ціле число ($k = 0; \pm1; \pm2;...$). Якщо k — невід'ємне число, то маємо множину додатних кутів, зокрема, $k = 0$, $\alpha = 90° + 360° \cdot 0 = 90°$; $k = 1$, $\alpha = 90° + 360° \cdot 1 = 450°$; $k = 2$, $\alpha = 90° + 360° \cdot 2 = 810°$ і т. д.

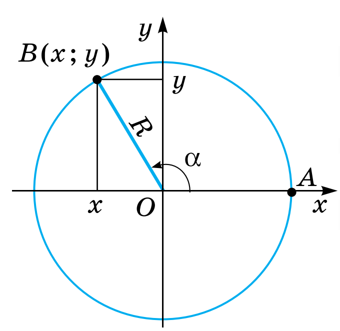
Якщо ж k — від'ємне число, то дістанемо множину від'ємних кутів, що відповідають зазначеному положенню рухомого радіуса OB, зокрема $k = -1$, $\alpha = 90° + 360° \cdot (-1) = -270°$; $k = -2$, $\alpha = 90° + 360°(-2) = 90° - 720° = -630°$ і т. д.

Досі ви мали справу з тригонометричними функціями кутів від 0° до 180°. Оскільки існують кути будь-якої градусної міри, а також додатні та від'ємні, природно ввести означення тригонометричних функцій довільного кута. При цьому слід враховувати, що вони не повинні суперечити тим, які прийнято для кутів від 0° до 180°.

3. ПОНЯТТЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДОВІЛЬНОГО КУТА

Нехай радіус кола із центром у початку координат дорівнює R, а координати точки B — кінця рухомого радіуса, що утворює кут α з додатною піввіссю Ox, дорівнюють x (абсциса) та y (ордината) (мал. 46).

Синусом кута **α називається відношення ординати кінця рухомого радіуса, що утворює цей кут з додатною піввіссю Ox, до довжини цього радіуса:** $\sin\alpha = \dfrac{y}{R}$.



Мал. 46

Косинусом кута **α називається відношення абсциси кінця рухомого радіуса, що утворює цей кут з додатною піввіссю Ox, до довжини цього радіуса:** $\cos\alpha = \dfrac{x}{R}$.

Тангенсом кута **α називається відношення ординати кінця рухомого радіуса, що утворює цей кут з додатною піввіссю Ox, до його абсциси:** $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{y}{x}$.

Котангенсом кута **α називається відношення абсциси кінця рухомого радіуса, що утворює цей кут з додатною піввіссю Ox, до його ординати:** $\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{x}{y}$.

Наведене вище означення тангенса кута можна замінити рівносильним йому:

тангенсом кута **α називається відношення синуса цього кута до його косинуса.**

Справді, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{y}$. Поділивши чисельник і знаменник цього дробу на додатне число R, дістанемо: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{y}{R}}{\frac{x}{R}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Аналогічно: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Дізнайтеся більше

1. Вчення про тригонометричні функції сягає в давнину. Його виникнення пов'язане з астрономічними обчисленнями. З деякими триногометричними відомостями були обізнані древні вавилоняни та єгиптяни. Але основна заслуга в розвитку тригонометрії як обчислювального апарату астрономії належить стародавнім грекам. Вони, зокрема, розглядали і встановили залежність між довжиною хорди і градусною мірою дуги кола, яку стягує ця хорда. Грецький астроном Гіппарх уже в II ст. до н. е. склав таблицю довжин хорд, відповідних градусним мірам дуг, які вони стягують. Подальший внесок у розвиток тригонометрії в IX—XV ст. зробили вчені Ближнього та Середнього Сходу.

Сучасні назви тригонометричним функціям були дані в період XV—XVII ст. європейськими вченими. Так, термін «тангенс» було введено в XV ст. німецьким астрономом і математиком Йоганом Мюллером, відомим більше під псевдонімом Регіомонтан. У XVII ст. англійський астроном і математик Едмонд Гюнтер увів терміни «косинус» і «котангенс». Сучасні позначення синуса і косинуса знаками sin і cos уперше вжиті швейцарським математиком Йоганом Бернуллі в листі до Л. Ейлера в 1739 р.

2. Зінаїда Іванівна СЛЄПКАНЬ (*1931–2008*) — видатна вчена у галузі методики навчання математики в закладах загальної середньої і вищої освіти, перша жінка — доктор наук із цього фаху в Україні. Перші з її досліджень стосувалися культури тригонометричних обчислень. З. І. Слєпкань була однією з розробників стандартів математичної освіти, автором підручників для учнів і студентів, посібників для вчителів.

Пригадайте головне

1. Схарактеризуйте послідовність і сутність розширення поняття синуса, косинуса, тангенса, котангенса кута від гострого кута до довільного.
2. Поясніть твердження: синус, косинус, тангенс, котангенс є функціями кута.
3. Чи можуть значення тригонометричних функцій кута трикутника бути від'ємними?
4. Поясніть утворення кута внаслідок повороту променя. Який кут при цьому вважається додатним, який — від'ємним?
5. Скільки існує кутів, що відповідають певному положенню рухомого радіуса на координатній площині? Як знайти градусну міру кожного із цих кутів, якщо відома градусна міра одного з них?

Розв'яжіть задачі

92'. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть значення синуса й косинуса кожного з його гострих кутів.

93'. Накресліть довільний прямокутний трикутник. Користуючись лише вимірювальною лінійкою, обчисліть синус, косинус, тангенс, котангенс кожного з його гострих кутів з точністю до десятих.

94'. На основі означення тригонометричних функцій кутів від $0°$ до $180°$ знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс кутів: 1) $0°$; 2) $90°$; 3) $180°$.

95'. Користуючись малюнком кола із центром у початку координат, зобразіть кути:
1) $270°$; 2) $-270°$; 3) $135°$; 4) $300°$; 5) $-300°$; 6) $240°$; 7) $450°$.

96'. Укажіть, якій чверті належить кут:
1) $280°$; 2) $-310°$; 3) $160°$; 4) $-40°$; 5) $110°$; 6) $-310°$.

97'. Початковий радіус здійснив поворот на кут $-75°$. Укажіть градусну міру додатного кута, що відповідає його кінцевому положенню.

98'. Радіус OA, обертаючись у додатному напрямку, в положенні OB утворює з віссю Ox кут α (мал. 49). Виразіть через α градусні міри кутів, якщо радіус OA, продовжуючи обертатися, зробить після цього: а) один повний оберт; б) два повних оберти. Скільки існує кутів, кінцева сторона яких збігається з OB? Запишіть загальну формулу, що задає множину всіх таких кутів.

99'. Накресліть коло довільного радіуса із центром у початку координат. Побудуйте кути:

1) $200°$;	3) $410°$;	5) $-120°$;	7) $270°$;
2) $300°$;	4) $500°$;	6) $-250°$;	8) $-540°$.

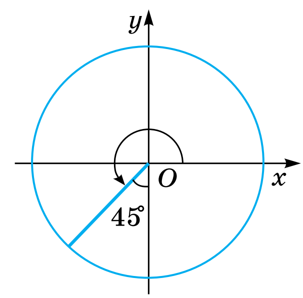
Користуючись вимірювальною лінійкою, знайдіть синус, косинус, тангенс, котангенс кожного з них з точністю до десятих.

100°. Знайдіть суму синусів і суму косинусів гострих кутів прямокутного ΔABC ($\angle C = 90°$), якщо: 1) $a = 12$, $b = 5$; 2) $a = 15$, $c = 25$.

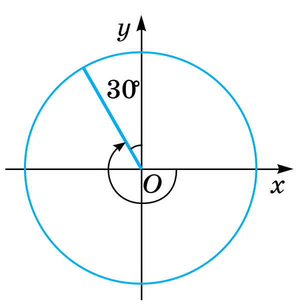
101°. Побудуйте за допомогою транспортира кути 30°; 50°; 45°; 80°. Користуючись відповідним означенням і вимірювальною лінійкою, знайдіть синус, косинус, тангенс кожного із цих кутів з точністю до десятих.

102°. Виконайте завдання, аналогічне до попереднього, для кутів 110°; 135°; 150°; 180°.

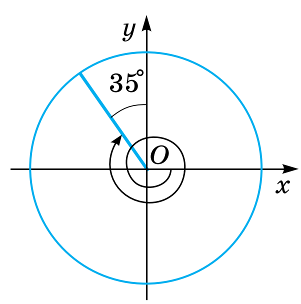
103°. Запишіть градусні міри кутів, зображених на малюнках 47–50.



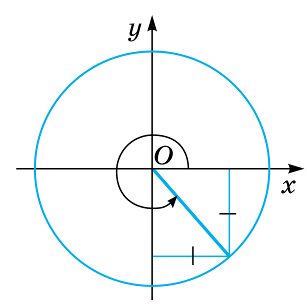
Мал. 47



Мал. 48



Мал. 49



Мал. 50

104°. Які з кутів лежать в одній чверті:

1) 60°; 3) −80°; 5) −190°; 7) −309°; 9) 220°?
2) 175°; 4) 300°; 6) 180°; 8) −95°;

105°. За даною загальною формулою кута x знайдіть градусні міри додатних кутів, які менші від 360°:

1) $x = 15° + 120°k$; 3) $x = -45° + 60°k$;
2) $x = -30° + 180°k$; 4) $x = \pm 120° + 360°k$,

де k — ціле число ($k \in \mathbf{Z}$).

106°. Початковий радіус повернули проти годинникової стрілки на кут 210°. Знайдіть градусну міру від'ємного кута, який відповідає кінцевому положенню цього радіуса.

107°. Знайдіть градусну міру від'ємного кута, синус якого дорівнює $\sin 160°$. Скільки таких кутів можна вказати?

108. Використовуючи означення косинуса довільного кута, з'ясуйте, від чого залежить знак косинуса кута. На підставі зробленого висновку дайте відповідь на запитання: чи може косинус від'ємного кута бути додатним?

109. Обґрунтуйте, що в будь-якому прямокутному трикутнику:
1) сума синусів його гострих кутів більша за одиницю;
2) сума косинусів його гострих кутів більша за одиницю.

110. Знайдіть суму квадратів синусів гострих кутів будь-якого прямокутного трикутника. Зробіть висновок.

111. Знайдіть суму квадратів косинусів гострих кутів будь-якого прямокутного трикутника. Зробіть висновок.

112. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює b, а кут при основі трикутника — α. Знайдіть висоту й основу трикутника.

113. Висота рівнобедреного трикутника дорівнює h, кут при вершині — α. Знайдіть сторони трикутника.

114. Зобразіть положення рухомого радіуса, що утворює з додатною піввіссю Ox кут:
1) $\alpha = 125° + 360°k$;
2) $\beta = -110° + 360°k$;
3) $\gamma = -300° + 360°k$;
4) $\delta = 40° + 360°k$,
де k — ціле число.

115. Рухомий радіус OB утворює з додатною піввіссю Ox кут 120°. Побудуйте точку B', симетричну точці B відносно осі абсцис. Знайдіть:
1) додатний кут, менший від 360°, який утворює радіус OB' з додатною піввіссю Ox;
2) один з від'ємних кутів, які утворює радіус OB' з додатною піввіссю Ox.

116. Доведіть, що: 1) $\sin 70° = \sin 110°$; 2) $\cos 130° = \cos 230°$.

117*. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, кут при вершині — β. Знайдіть висоту та бічну сторону трикутника.

118*. Менша діагональ ромба дорівнює m, а гострий кут — α. Знайдіть сторону й більшу діагональ ромба.

119*. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють a і b ($a > b$), а гострий кут — β. Знайдіть висоту й бічну сторону трапеції.

120*. Побудуйте прямокутний трикутник, якщо синус одного з його кутів дорівнює $\frac{3}{4}$. Скільки розв'язків має ця задача?

121*. Кут α є кутом II чверті. У якій чверті лежить кут $-\alpha$? Доведіть, що кінці рухомих радіусів, які утворюють з початковим радіусом кути α і $-\alpha$, симетричні відносно осі абсцис.

Проявіть компетентність

122. Стрілки годинника показують рівно 12 год. Через який найменший проміжок часу хвилинна стрілка годинника суміститься з годинною стрілкою?

123. Назвіть кут повороту, який мільйони років щодоби збільшується на один повний оберт.

§ 6 Область визначення, множина значень і знаки тригонометричних функцій кута

Розглянемо, яких значень можуть набувати синус, косинус, тангенс, котангенс довільного кута і чи для всіх кутів вони існують.

За означенням, $\sin\alpha = \frac{y}{R}$, $\cos\alpha = \frac{x}{R}$. Дроби $\frac{y}{R}$ та $\frac{x}{R}$ мають зміст завжди, отже, $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ існують для будь-якого кута α.

Оскільки $\text{tg}\,\alpha = \frac{y}{R} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, то ці дроби не мають змісту (а значить, $\text{tg}\,\alpha$ не існує), якщо $\cos\alpha$ або x дорівнюють нулю. Усі точки з абсцисою $x = 0$ лежать на осі ординат, тобто маємо кути, що дорівнюють $\pm 90°$; $\pm 270°$; $\pm 450°$ і т. д. $\text{ctg}\,\alpha$ не має змісту (не існує), якщо не має змісту дріб $\frac{x}{y}$, тобто коли $y = 0$. Усі точки з ординатою $y = 0$ лежать на осі абсцис, тобто маємо кути $0°$; $\pm 180°$; $\pm 360°$,… .

Принагідно з'ясуємо, які знаки мають синус, косинус, тангенс, котангенс у кожній чверті.

Оскільки $\sin\alpha = \frac{y}{R}$, $\cos\alpha = \frac{x}{R}$, а довжина радіуса R є додатним числом, знак синуса збігається зі знаком ординати кінця рухомого радіуса, а знак косинуса — зі знаком його абсциси.

Виходячи з означення тангенса й котангенса кута, робимо висновок, що їх знаки будуть додатними за однакових знаків синуса й косинуса та від'ємними — за різних.

Знаки синуса, косинуса, тангенса й котангенса у чвертях подано в таблиці 6.

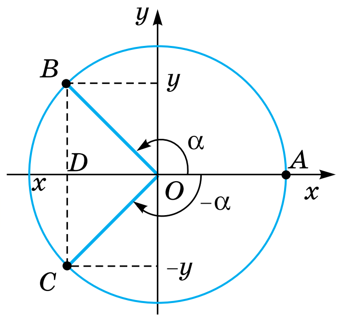
Таблиця 5

Чверть	sin α	cos α	tg α, ctg α
I	+	+	+
II	+	–	–
III	–	–	+
IV	–	+	–

Розглянемо залежність між синусами, косинусами, тангенсами і котангенсами протилежних кутів. На малюнку 51 зображено протилежні кути AOB і AOC. Градусні міри їх однакові, а знаки — різні. Легко встановити, що точки B і C мають однакову абсцису x та протилежні ординати y і $-y$.

Тому $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ і $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Узявши до уваги, що

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ і } \text{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$



Мал. 51

дістанемо:

$$\operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Якщо побудувати кут, протилежний куту AOB, який належить I чверті, то можна аналогічно переконатись у правильності встановлених співвідношень.

Для встановлення множини значень кожної із цих функцій скористаємося відомим твердженням, що значення тригонометричної функції кута не залежить від довжини радіуса R кола. У такому разі довжину радіуса можна обирати довільно. Найзручніше взяти $R = 1$, бо це дає змогу значно спростити обчислення.

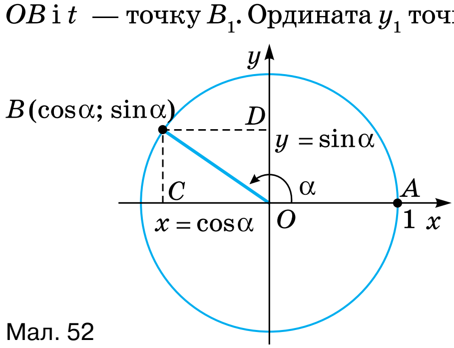
Зверніть увагу:
Коло радіуса, що дорівнює 1, із центром у початку координат називається *одиничним колом*. Координатні осі ділять одиничне коло на чотири рівні частини, які називають чвертями одиничного кола.
Якщо $R = 1$, то розглянуті вище відношення, що визначають синус і косинус кута α, спрощуються й набувають вигляду: $\sin\alpha = y$, $\cos\alpha = x$.

Отже, синус кута α дорівнює ординаті, а косинус — абсцисі кінця рухомого радіуса одиничного кола, що утворює цей кут з додатною піввіссю Ox (мал. 52). Із цього випливає важливий висновок. Оскільки абсциса (ордината) будь-якої точки одиничного кола не може бути більшою за 1 (довжину його радіуса) і меншою від −1, тобто $-1 \le x \le 1$ і $-1 \le y \le 1$, то відповідно

$-1 \le \cos\alpha \le 1$ і $-1 \le \sin\alpha \le 1$ для будь-якого кута α. Тобто значення синуса, як і значення косинуса будь-якого кута, належать числовому відрізку $[-1; 1]$.

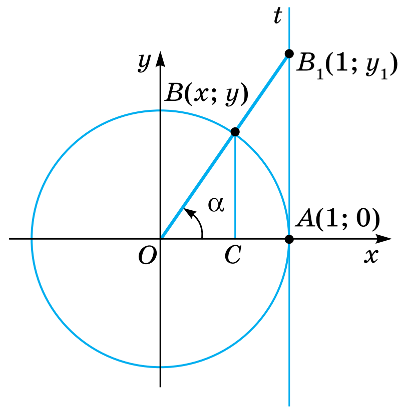
Тому, наприклад, рівності виду $\cos\alpha = 1{,}5$ або $\sin\alpha = -2{,}4$ не мають змісту.

Для унаочнення значення тангенса кута та його зміни проведемо дотичну t через кінець $A(1; 0)$ горизонтального діаметра одиничного кола (мал. 53). Легко довести, що вона паралельна осі ординат. Нехай кут α належить I чверті. Щоб знайти його тангенс, побудуємо точку перетину прямих OB і t — точку B_1. Ордината y_1 точки B_1 дорівнює $\operatorname{tg}\alpha$. Покажемо це.

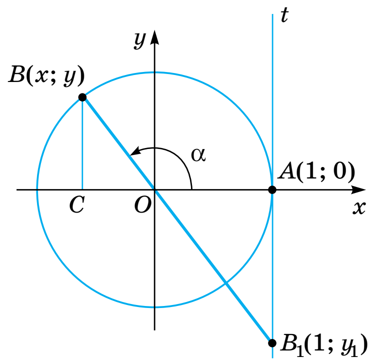


Мал. 52

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{BC}{OC}$. Але з подібності трикутників OBC і OB_1A маємо: $\frac{BC}{OC}=\frac{AB_1}{OA}$. Оскільки $OA = 1$, то $\frac{BC}{OC}=AB_1$. У даному випадку довжина AB_1 дорівнює ординаті y_1 точки B_1. Отже, $\operatorname{tg}\alpha = y_1$.



Мал. 53



Мал. 54

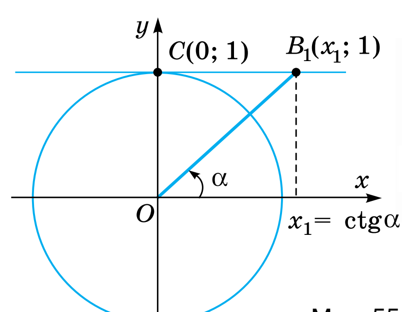
Пряма t називається *лінією тангенсів*. За її допомогою можна знайти тангенс будь-якого кута.

Якщо α — кут II чверті (мал. 54), то відповідну точку B_1 на лінії тангенсів будують аналогічно: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = -\frac{BC}{OC}$, бо $x < 0$. З подібності трикутників BOC і AOB_1 одержимо: $\frac{BC}{OC} = \frac{AB_1}{OA} = AB_1$. Отже, $\operatorname{tg}\alpha = -AB_1$, що дорівнює ординаті y_1 точки B_1.

Таким чином, *тангенс кута чисельно дорівнює ординаті точки перетину лінії тангенсів і прямої, що містить рухомий радіус, який утворює цей кут з додатною піввіссю Ox*.

Зазначимо ще раз, що лінія тангенсів є відповідною дотичною саме до одиничного кола й ні до жодного іншого.

Котангенс кута можна знайти аналогічно, використовуючи *лінію котангенсів* — дотичну до одиничного кола, що проходить через кінець $C(0; 1)$ його вертикального діаметра (мал. 55). Котангенс кута дорівнює абсцисі відповідної точки лінії котангенсів. Доведіть це самостійно.



Мал. 55

За допомогою лінії тангенсів (котангенсів) можна показати, що на відміну від синуса чи косинуса

значення тангенса (котангенса) кута може бути будь-яким дійсним числом.

Обґрунтуємо це. Яким не було б дійсне число a, завжди на лінії тангенсів можна побудувати точку з ординатою a. Сполучивши цю точку з початком координат, дістанемо відрізок, який утворює з віссю Ox деякий кут α. За доведеним вище, $\operatorname{tg}\alpha = a$. Аналогічні міркування можна провести для котангенса.

Дізнайтеся більше

Цікаво, що з латинської мови термін «tangens» перекладається як «дотична», що зумовлено тим фактом, що значення тангенса кута, утвореного рухомим радіусом з додатною піввіссю Ox, дорівнює ординаті відповідної точки дотичної до одиничного кола в точці (1; 0).

Пригадайте головне

1. Як визначити знак синуса (косинуса, тангенса) даного кута?
2. Як, використовуючи одиничне коло, знайти синус (косинус) даного кута?
3. Що називають лінією тангенсів і для чого її використовують?
4. Укажіть найменше та найбільше значення синуса й косинуса кута.
5. Яке положення займає рухомий радіус одиничного кола, утворюючи кути, тангенс яких не має змісту (не існує)?
6. Чи можуть синус і косинус одного і того самого кута одночасно дорівнювати нулю?
7. Як установити знаки тригонометричних функцій даного кута?
8. У яких координатних чвертях синус і тангенс мають однакові знаки?
9. Значення яких тригонометричних функцій змінюються на протилежні при зміні знака кута на протилежний.

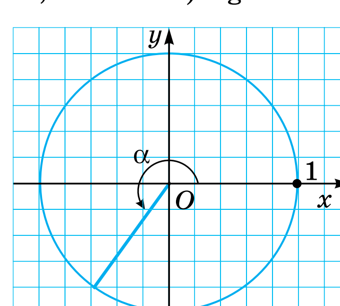
Розв'яжіть задачі

124'. Укажіть знаки виразів:
1) $\sin 290°$; 3) $\mathrm{tg}\, 490°$; 5) $\sin(-300°)$; 7) $\mathrm{tg}(-190°)$.
2) $\cos 370°$; 4) $\cos(-50°)$; 6) $\mathrm{ctg}(-150°)$;

125'. Які вирази не мають змісту:
1) $\sin 0°$; 4) $\mathrm{ctg}\, 0°$; 7) $\mathrm{tg}\, 90°$; 10) $\cos 180°$;
2) $\cos 0°$; 5) $\sin 90°$; 8) $\mathrm{ctg}\, 90°$; 11) $\mathrm{tg}\, 180°$;
3) $\mathrm{tg}\, 0°$; 6) $\cos 90°$; 9) $\sin 180°$; 12) $\mathrm{ctg}\, 180°$?

126'. Запишіть градусну міру трьох кутів:
1) тангенс яких не існує;
2) котангенс яких не існує.

127'. Накресліть одиничне коло та кут α, як зображено на малюнку 56. Користуючись малюнком, знайдіть: $\sin\alpha$; $\cos\alpha$; $\mathrm{tg}\,\alpha$; $\mathrm{ctg}\,\alpha$.



Мал. 56

128'. Накресліть одиничне коло. Побудуйте й позначте один додатний і один від'ємний кути:

1) синус яких дорівнює: а) $\frac{1}{2}$; б) 0; в) $-\frac{2}{3}$; г) -1;

2) косинус яких дорівнює: а) -1; б) $\frac{1}{4}$; в) 0; г) $-\frac{1}{2}$.

129'. Чи можливі рівності:

1) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; 4) $\cos x = 2{,}1$; 7) $\sin x = 0$;

2) $\sin x = -\frac{13}{12}$; 5) $\frac{1}{\sin x} = \frac{25}{18}$; 8) $\cos x = -1$;

3) $\cos x = -0{,}7$; 6) $\frac{1}{\cos x} = -0{,}7$; 9) $\sin x \cos x = 1{,}8$?

Відповіді обґрунтуйте.

130°. Визначте знак добутку:

1) $\sin 100° \cdot \sin 132°$;
2) $\cos 210° \cdot \sin 115°$;
3) $\mathrm{ctg}\, 300° \cdot \sin 220°$;
4) $\cos 135° \cdot \mathrm{tg}\, 135°$;
5) $\sin(-36°) \cdot \cos 36°$;
6) $\cos(-120°) \cdot \sin(-120°)$;
7) $\mathrm{tg}(-320°) \cdot \cos 150°$;
8) $\sin 430° \cdot \mathrm{tg}(-210°)$;
9) $\mathrm{tg}\, 100° \cdot \mathrm{ctg}(-100°)$.

131°. Замініть вираз тотожно рівним йому, змінивши знак кута на протилежний:

1) $\cos(-18°)$;
2) $\sin(-100°)$;
3) $\mathrm{tg}(-30°)$;
4) $\mathrm{ctg}(-230°)$;
5) $\sin(\alpha - 30°)$;
6) $\cos(180° - \alpha)$;
7) $\mathrm{tg}(\alpha - 140°)$;
8) $\cos(\alpha - \beta)$.

132°. У яких чвертях координатної площини мають однакові знаки: 1) синус і косинус кута; 2) синус і тангенс кута; 3) косинус і тангенс кута?

133°. Накресліть одиничне коло, обравши його радіусом відрізок, що становить 3 клітинки зошита. Позначте на цьому колі точку, абсциса якої дорівнює $-\frac{2}{3}$. Скільки таких точок можна знайти? Зобразіть на малюнку й позначте в межах першого оберту додатні та від'ємні кути (тобто кути α, що задовольняють умову $-360° \le \alpha \le 360°$), кінцеві сторони яких проходять через знайдені точки. Значення якої тригонометричної функції цих кутів дано в умові? Запишіть це у вигляді відповідних рівностей.

134°. На одиничному колі знайдіть точку, ордината якої дорівнює $\frac{2}{3}$. Скільки таких точок можна знайти? Зобразіть на малюнку й позначте додатні кути в межах першого оберту, кінцева сторона яких проходить через побудовані точки. Значення якої тригонометричної функції цих кутів дано в умові? Запишіть це у вигляді відповідних рівностей.

135°. Накресліть одиничне коло, обравши його радіусом відрізок, що становить 5 клітинок зошита. Побудуйте й позначте гострий кут α, синус якого дорівнює $\frac{4}{5}$. Зобразіть на малюнку ще один додатний кут $\beta < 360°$, що задовольняє цю умову. Виразіть β через α.

136°. Накресліть одиничне коло й лінію тангенсів. Побудуйте й позначте два від'ємних кути, тангенс яких дорівнює:

1) 3; 2) -2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0.

137. Кутом якої чверті є кут α, якщо:

1) $\sin\alpha > 0$, а $\cos\alpha < 0$;
2) $\sin\alpha < 0$, а $\cos\alpha > 0$;
3) $\mathrm{tg}\alpha < 0$, а $\cos\alpha > 0$;
4) $\sin\alpha < 0$, а $\mathrm{tg}\alpha < 0$?

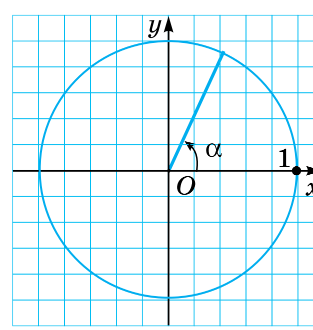
138. Запишіть градусні міри хоча б двох від'ємних кутів, для яких:

1) синус додатний;
2) косинус від'ємний;
3) тангенс додатний;
4) синус від'ємний.

139. Визначте знак виразу:

1) $\sin 120° + \cos 40°$;
2) $\cos 205° + \mathrm{tg} 170°$;
3) $\mathrm{ctg} 315° + \mathrm{tg} 145°$;
4) $\cos 306° + \sin 103°$;
5) $\sin 40° - \sin 200°$;
6) $\cos 114° - \mathrm{tg} 250°$;
7) $\mathrm{ctg} 140° - \sin 110°$;
8) $\sin 220° + \mathrm{tg} 320°$.

140. Накресліть одиничне коло та кут α, як зображено на малюнку 57. Користуючись малюнком, знайдіть $\cos\alpha$. Зобразіть і позначте на малюнку ще один додатний кут β в межах першого оберту, такий, що $\cos\beta = \cos\alpha$. Виразіть кут β через кут α. Позначте два від'ємні кути, що мають такі самі значення косинуса.



Мал. 57

141. Накресліть одиничне коло, обравши його радіусом відрізок, що становить 4 клітинки зошита. Побудуйте й позначте довільний додатний гострий кут α. Знайдіть наближене значення синуса цього кута. Накресліть і позначте на малюнку ще один додатний кут β іншої чверті, який має такий самий синус. Виразіть через α і β формулами всі кути, синус яких такий самий.

142. Користуючись лінією тангенсів, побудуйте кут, тангенс якого дорівнює 2,5. Скільки додатних кутів, що задовольняють цю умову, можна побудувати в межах першого оберту? Зобразіть їх на малюнку. Виразіть більший з них через менший.

143. Користуючись лінією котангенсів, побудуйте кут, котангенс якого дорівнює -1. Скільки ще додатних кутів, що не перевищують $360°$ і задовольняють цю умову, можна побудувати? Зобразіть їх на малюнку. Виразіть один з них через інший.

144. Побудуйте й позначте в межах першого оберту додатний кут α, що задовольняє умову: 1) $\sin\alpha = -0{,}4$, $\operatorname{ctg}\alpha > 0$; 2) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$; 3) $\operatorname{tg}\alpha = -1{,}5$, $\sin\alpha < 0$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$, $\cos\alpha < 0$.

145. Знайдіть найбільше та найменше значення функції:
1) $y = 3 + 4\sin x$; 2) $y = 2 - 5\cos x$; 3) $y = 5 - \sin^2 x$; 4) $y = 2\cos^2 x - 1$.

146*. Дано функції:
1) $y = 3 - 8\sin x$; 3) $y = \cos x - 4$; 5) $y = \operatorname{tg}^2 x + 1$;
2) $y = 7\cos^2 x + 1$; 4) $y = \operatorname{tg} x - 2$; 6) $y = 5 - \operatorname{ctg}^2 x$.
Для яких з них можна вказати:
а) найбільше та найменше значення; б) лише найбільше значення; в) лише найменше значення? Знайдіть і запишіть ці значення.

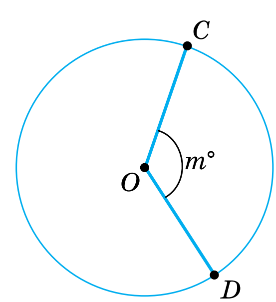
Проявіть компетентність

147. Дано гострий кут α. Побудуйте кут x такий, що $\cos x = \frac{1}{4}\sin\alpha$.

§ 7 Радіанна міра кута

Відомою вам одиницею вимірювання кутів є градус — кут, що дорівнює $\frac{1}{180}$ розгорнутого кута. Отже, градусна міра прямого кута дорівнює 90°, повного — 360°.

Крім градуса, існують інші одиниці вимірювання кутів. У математиці та інших науках широко використовується така одиниця вимірювання кутів, як *радіан*. Перед уведенням цього поняття пригадаємо, що градусна міра дуги кола дорівнює градусній мірі відповідного їй центрального кута. Тобто якщо $\angle COD = m°$, то і градусна міра дуги CD також дорівнює $m°$ (мал. 58).



Мал. 58

Якщо центральний кут є повним, то йому відповідає дуга всього кола з градусною мірою 360°. Отже, центральному куту мірою 1° відповідає дуга, що дорівнює $\frac{1}{360}$ кола. І навпаки, дузі, довжина якої дорівнює $\frac{1}{360}$ довжини кола, відповідає центральний кут мірою 1°. Тому градус як одиницю вимірювання кутів можна було б означити і як центральний кут, що відповідає дузі кола, довжина якої дорівнює $\frac{1}{360}$ довжини кола.

Аналогічно введено одиницю вимірювання кутів — радіан.

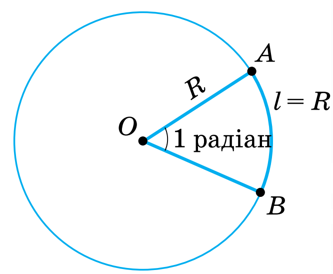
***Радіан* — це центральний кут, що відповідає дузі кола, довжина якої дорівнює довжині радіуса цього кола** (мал. 59).

Радіанна і градусна міри кута пов'язані між собою певною залежністю. Установимо її.

За означенням, радіана міра дуги кола довжиною R дорівнює 1 радіану. Отже, усе коло містить $\frac{2\pi R}{R} = 2\pi$ радіанів (скорочено — рад).

Оскільки все коло містить 360°, то 360° = = 2π рад. Звідси випливає:

$$1^\circ = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180} \text{ (рад)}. \quad 1 \text{ рад} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}.$$



Мал. 59

Отже,

$$m^\circ = \frac{m\pi}{180} \text{ рад}, \quad \alpha \text{ рад} = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi}.$$

Установлені співвідношення дають змогу переходити від градусної міри кута до радіанної і навпаки.

Передусім зазначимо, що 1 рад $= \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3{,}141592\ldots} \approx 57^\circ 18'$.

У багатьох випадках у записі радіанної міри обмежуються буквеним позначенням π, не доводячи результат до числового значення.

Наприклад, пишуть $\alpha = \frac{\pi}{8}$ рад замість $\alpha = \frac{3{,}141592\ldots}{8}$ рад ≈ 0,39 рад.

Розглянемо приклади.

Задача 1. Визначте радіанну міру кута 27°.

Розв'язання. За формулою $m^\circ = \frac{m\pi}{180}$ рад маємо: $27^\circ = \frac{27\pi}{180} = \frac{3}{20}\pi$ (рад).

Задача 2. Визначте градусну міру кута $\frac{5\pi}{18}$ рад.

Розв'язання. Використаємо формулу α рад $= \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi}$. Маємо:

$$\frac{5\pi}{18}\text{ рад} = \frac{\frac{5}{18}\pi\cdot 180^\circ}{\pi} = 50^\circ.$$

Задача 3. Визначте градусну міру кута 2,5 рад.

Розв'язання. Оскільки 1 рад $\approx 57^\circ 18'$, то 2,5 рад $\approx 57^\circ 18' \cdot 2{,}5 =$ $= 57^\circ \cdot 2{,}5 + 18' \cdot 2{,}5 = 132{,}5^\circ + 45' = 132^\circ 30' + 45' = 132^\circ 75' = 133^\circ 15'$.

Використовуючи формулу $m^\circ = \frac{m\pi}{180}$ рад, складемо таблицю 6 радіанних мір деяких найуживаніших кутів.

Таблиця **6**

Градус	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
Радіан	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Дізнайтеся більше

Існують інші одиниці вимірювання кутів, а не лише градус і радіан.

У морській справі, наприклад, для вимірювання кутів користуються румбом. *Румб* — це кут, що становить $\frac{1}{32}$ частину повного кута.

У техніці поширеною одиницею вимірювання кутів є *повний оберт* (кут 360°).

В артилерії за одиницю вимірювання кутів прийнято $\frac{1}{60}$ частину повного оберту, тобто кут $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$. Ця одиниця має назву *велика поділка кутоміра*. Соту частину великої поділки кутоміра називають *малою поділкою кутоміра*. Вона становить $6^\circ : 100 = 3'36''$.

У геометрії іноді за одиницю вимірювання кутів беруть прямий кут, позначаючи цю одиницю буквою d. Наприклад, сума кутів трикутника дорівнює $2d$, а сума кутів чотирикутника — $4d$.

Пригадайте головне

1. Назвіть і схарактеризуйте відомі вам одиниці вимірювання кутів.
2. Дайте означення радіана.
3. Укажіть радіанну міру: повного кута; розгорнутого кута; прямого кута.
4. Використовуючи співвідношення $180^\circ = \pi$ рад, поясніть, як за градусною мірою кута визначити його радіанну міру і, навпаки, як за радіанною мірою визначити градусну міру кута.

Розв'яжіть задачі

148'. Визначте радіанну міру кута:
1) $40°$; 2) $140°$; 3) $36°$; 4) $18°$; 5) $240°$; 6) $300°$; 7) $-225°$.
Результат подайте за допомогою числа π.

149'. Визначте градусну міру кута, наведену в радіанах:
1) $0{,}5\pi$; 3) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $\frac{\pi}{15}$; 7) $-2\frac{3}{4}\pi$; 9) 2;
2) $\frac{\pi}{12}$; 4) $\frac{\pi}{20}$; 6) $-\frac{7\pi}{12}$; 8) $-\frac{9\pi}{5}$; 10) 1,5.

150'. Радіус кола дорівнює 20 см. Знайдіть довжину дуги цього кола, якщо її радіанна міра дорівнює: 1) 3; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 2,4; 4) 0,8.

151'. Знайдіть радіанну міру дуги кола радіуса 12 см, якщо довжина дуги дорівнює: 1) 4 см; 2) 1,2 см; 3) 6 см; 4) 24 см.

152°. Порівняйте кути α і β, якщо:
1) $\alpha = 49°$, $\beta = \frac{5}{18}\pi$ рад; 3) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ рад, $\beta = 135°$;
2) $\alpha = \frac{\pi}{12}$ рад, $\beta = 14°35'$; 4) $\alpha = \frac{8\pi}{9}$ рад, $\beta = 170°$.

153°. Знайдіть радіанну і градусну міри кута, який доповнює кут $\frac{5}{9}\pi$ до розгорнутого.

154°. Знайдіть градусну і радіанну міри кута, який доповнює кут $135°$ до повного.

155°. Два кути трикутника дорівнюють $59°$ і $69°$. Знайдіть радіанну міру третього кута цього трикутника.

156°. Два кути трикутника дорівнюють $\frac{3\pi}{10}$ рад і $\frac{2\pi}{15}$ рад. Знайдіть градусну міру третього кута цього трикутника.

157°. Запишіть за допомогою подвійної нерівності межі градусної та радіанної мір додатних кутів, менших від $360°$, що лежать у:
1) I чверті; 2) II чверті; 3) III чверті; 4) IV чверті.

158°. Укажіть, до яких чвертей належать кути, якщо їх радіанна міра дорівнює:
1) $\frac{3\pi}{4}$; 3) $\frac{7\pi}{4}$; 5) $1{,}7\pi$; 7) $-\frac{3\pi}{4}$;
2) $\frac{2\pi}{5}$; 4) $\frac{7}{9}\pi$; 6) $\frac{13\pi}{12}$; 8) $-\frac{\pi}{8}$.
Визначте знаки синуса, косинуса, тангенса цих кутів.

159°. Обґрунтуйте правильність рівностей:
1) $\sin(\alpha + 2\pi k) = \sin\alpha$;   3) $\mathrm{tg}(\alpha + 2\pi k) = \mathrm{tg}\alpha$;
2) $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$;   4) $\mathrm{ctg}(\alpha + 2\pi k) = \mathrm{ctg}\alpha$,

де α — радіанна міра даного кута, k — ціле число ($k \in \boldsymbol{Z}$).

160. Знайдіть градусну і радіанну міри кутів трикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3 і 4.

161. Знайдіть градусну і радіанну міри кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, якщо вони відносяться, як 2 : 7.

162°. Радіанна міра дуги кола дорівнює 1,4, а її довжина — 7 см. Знайдіть радіус кола.

163. Знайдіть довжину дуги кола радіуса 22,5 см, якщо дуга містить 40°.

164. Дуга кола містить 200°. Знайдіть радіус кола, якщо довжина дуги дорівнює 50 см.

165. Знайдіть лінійну швидкість точки на ободі шліфувального диска, діаметр якого дорівнює 90 см, а кутова швидкість становить 500 рад/с.

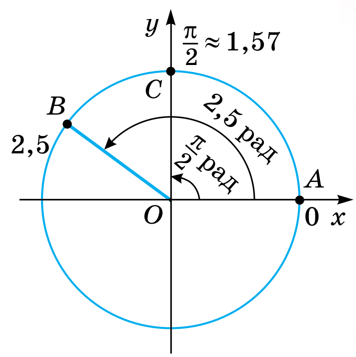
Проявіть компетентність

166. Знайдіть градусну й радіанну міри кута, утвореного годинною та хвилинною стрілками годинника, якщо він показує:
1) 3 год;   2) 6 год;   3) 8 год.

167. Колесо, рівномірно обертаючись, робить 20 обертів за хвилину. Знайдіть його кутову швидкість у радіанах за секунду.

§ 8 Тригонометричні функції числового аргументу

Вимірюючи кути в радіанах, найменування одиниці вимірювання біля числа, що характеризує міру кута, зазвичай не пишуть. Кажуть: «кут дорівнює $\frac{\pi}{4}$» замість «кут дорівнює $\frac{\pi}{4}$ радіана»; «кут дорівнює 100» замість «кут дорівнює 100 радіанів» і т. д. Виходячи із цього, запис $\sin\frac{\pi}{2}$ слід розуміти як синус кута, що дорівнює $\frac{\pi}{2}$ рад, $\mathrm{tg}\, 4{,}2$ — як тангенс кута, що дорівнює 4,2 рад.



Мал. 60

Уведення радіанної міри кута дає змогу зображати будь-яке число точкою одиничного кола. Розглянемо, як це можна зробити.

Домовилися, що точка A — кінець початкового радіуса — зображає число 0 (мал. 60). Для зображення будь-якого іншого дійсного числа a будують рухомий радіус OB, який утворює з початковим радіусом OA кут a рад. Точка B — кінець рухомого радіуса — зображає на одиничному колі число a.

Зокрема, на малюнку 60 точка B зображає число 2,5 ($\angle AOB = 2{,}5$ рад). Очевидно, що цією точкою зображається не лише число 2,5, а й усі числа виду $2{,}5 + 2\pi k$, де k — ціле число. Точка C зображає число $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, бо $\angle AOC = \frac{\pi}{2}$ рад $\approx 1{,}57$ рад. Цією самою точкою зображаються всі числа виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, де k — ціле число.

Водночас, маючи точку на одиничному колі, можна знайти множину чисел, які вона зображає. Одне з таких чисел, очевидно, дорівнює радіанній мірі одного з кутів (наприклад, найменшого додатного), що їх утворює рухомий радіус, проведений до цієї точки, з початковим радіусом. Додавши до знайденого в такий спосіб числа $2\pi k$, де $k \in \boldsymbol{Z}$, одержимо вираз, що задає множину шуканих чисел. Надаючи k певного значення, діставатимемо відповідне число. Очевидно, що будь-яка точка одиничного кола зображає безліч дійсних чисел, що їх можна знайти описаним способом.

Досі ми розглядали тригонометричні функції, аргументом яких був кут, точніше, міра кута. Але в багатьох процесах, які можна описати тригонометричними функціями, змінною є не лише кут, а й час, температура, довжина тощо. У зв'язку із цим домовились абстрагуватися від природи аргументу й розглядати тригонометричні функції просто числа, розуміючи, наприклад, під синусом числа 3,7 синус кута, що дорівнює 3,7 рад; під тангенсом числа −0,8 тангенс кута, що дорівнює −0,8 рад, тощо.

З такого розуміння тригонометричних функцій числового аргументу випливає, що синус і косинус певного числа дорівнюють відповідно ординаті й абсцисі точки, що зображає це число на одиничному колі, а його тангенс і котангенс — ординаті й абсцисі відповідних точок лінії тангенсів і лінії котангенсів.

Із цього випливає, що синус і косинус числового аргументу існують за будь-якого дійсного x.

Беручи до уваги, що $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, доходимо висновку, що функція тангенс не існує, якщо $\cos x = 0$. Це справедливо для всіх чисел, які зображаються на одиничному колі кінцями вертикального діаметра, тобто чисел $\pm\frac{\pi}{2}$; $\pm\frac{3\pi}{2}$; $\pm\frac{5\pi}{2}$;.... Кожне з них можна утворити множенням $\frac{\pi}{2}$ на додатне чи від'ємне непарне число. Справді, $\pm\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot(\pm 1)$; $\pm\frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot(\pm 3)$;

$\pm\frac{5\pi}{2}=\frac{\pi}{2}\cdot(\pm5)$ і т. д. Відомо, що непарні числа записують у вигляді $2k+1$, де k — ціле число. Отже, множину чисел, для яких тангенс не має змісту, можна записати у вигляді $\frac{\pi}{2}(2k+1)$, де k — ціле число. Часто трапляється і такий запис цієї множини: $\frac{\pi}{2}+\pi k$, де k — ціле число. Щоб пересвідчитися, що обидва вирази позначають одну й ту саму числову множину, достатньо, наприклад, розкрити дужки у виразі $\frac{\pi}{2}(2k+1)$.

Оскільки йшлося про множину чисел, косинус яких дорівнює 0, то можна сказати, що розв'язком рівняння $\cos x=0$ є числа виду $x=\frac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in\boldsymbol{Z}$.

Зважаючи, що $\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$, доходимо висновку: числова функція котангенс не існує для тих x, за яких $\sin x=0$. Ці числа зображаються кінцями горизонтального діаметра одиничного кола і дорівнюють 0; $\pm\pi$; $\pm2\pi$; $\pm3\pi$ і т. д., тобто це числа виду πk, де k — ціле число.

Аналогічно розв'язок рівняння $\sin x=0$ такий: $x=\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

Для будь-якого значення x, за якого існує відповідна тригонометрична функція, справджуються рівності:

$$\sin(-x)=-\sin x,\qquad \cos(-x)=\cos x,$$
$$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg}x,\qquad \operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg}x,$$

а також:

$$\sin(x+2\pi k)=\sin x,\ \cos(x+2\pi k)=\cos x,$$
$$\operatorname{tg}(x+2\pi k)=\operatorname{tg}x,\ \operatorname{ctg}(x+2\pi k)=\operatorname{ctg}x,\ \text{де } k\in\boldsymbol{Z}.$$

Дізнайтеся більше

Розширення уявлень про тригонометричні функції, уведення поняття тригонометричних функцій числового аргументу привело до їх обґрунтування на новій, аналітичній основі. Відповідно тригонометричні функції визначаються незалежно від геометрії за допомогою степеневих рядів та інших понять математичного аналізу. Зокрема, для всіх дійсних чисел x: $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$, $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$, де $n!$ (читається «ен факторіал») треба розуміти як добуток n перших натуральних чисел. Тобто

$$n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n;\ 5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 \text{ тощо.}$$

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots,\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2},\quad \operatorname{ctg}x=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{45}-\ldots,\ 0<x<\pi.$$

Основоположником аналітичної теорії тригонометричних функцій вважається видатний німецький математик Леонард Ейлер (1707–1783). Тригонометричні функції знаходять широке застосування у фізиці, техніці, особливо при вивченні коливальних рухів і періодичних процесів.

Пригадайте головне

1. Як зобразити на одиничному колі дане число? Проілюструйте на прикладі.
2. Як знайти найменше додатне число, що зображає дана на одиничному колі точка?
3. Як розуміти запис: sin2; cos(–1,5); sin0; tg(–1); ctg8?
4. Чи є такі числа, синус яких знайти не можна?
5. Які точки одиничного кола зображають числа, тангенс яких не існує?

Розв'яжіть задачі

168'. Накресліть одиничне коло й позначте на ньому числа:

1) $\frac{2\pi}{3}$; 3) $\frac{5\pi}{3}$; 5) $\frac{7\pi}{6}$; 7) $\frac{3\pi}{4}$; 9) 2; 11) –3,6;

2) $-\frac{\pi}{3}$; 4) $-\frac{4\pi}{3}$; 6) $\frac{11\pi}{6}$; 8) $-\frac{\pi}{4}$; 10) –1; 12) 10.

169'. Накресліть одиничне коло й позначте правий кінець його горизонтального діаметра буквою A, а лівий — буквою B. Скільки чисел зображає точка A? Запишіть два з них. Скільки чисел зображає точка B? Запишіть три з них.

170'. Накресліть одиничне коло. Позначте верхній кінець його вертикального діаметра буквою A, а нижній — буквою B.
Скільки чисел зображає точка A? Запишіть одне з них. Скільки чисел зображає точка B? Запишіть одне з них.

171°. Запишіть вираз, що задає множину чисел, які на одиничному колі зображає:
1) правий кінець його горизонтального діаметра;
2) лівий кінець його горизонтального діаметра.

172°. Запишіть вираз, що задає множину чисел, які на одиничному колі зображає:
1) верхній кінець його вертикального діаметра;
2) нижній кінець його вертикального діаметра.

173°. Накресліть одиничне коло і проведіть рухомий радіус, який утворює з додатною піввіссю абсцис кут 140°. Знайдіть найменше додатне число, яке зображає на одиничному колі кінець цього радіуса.

174. Накресліть одиничне коло. Виберіть на ньому в довільному місці точку A. Скільки чисел позначає ця точка? Знайдіть наближене значення одного з них. Запишіть вираз, який задає множину таких чисел у загальному вигляді.

175. Виконайте завдання, аналогічне до попереднього, ще для кількох точок одиничного кола.

176. Запишіть вирази, що задають множину чисел, які зображаються точками перетину одиничного кола з бісектрисою:
1) першого і третього координатних кутів;
2) другого і четвертого координатних кутів.
Знайдіть по два додатні й по два від'ємні числа, що зображаються кожною із зазначених точок.

177. Який знак має вираз:

1) $\sin 1$; 3) $\sin(-3)$; 5) $\cos 2$; 7) $\cos\frac{5\pi}{3}$; 9) $\mathrm{tg}\,3$; 11) $\mathrm{tg}(-4)$;

2) $\sin 2$; 4) $\sin 4$; 6) $\cos(-5)$; 8) $\cos 4{,}3\pi$; 10) $tg\frac{10\pi}{3}$; 12) $\mathrm{tg}(-2)$?

178. Використовуючи одиничне коло, знайдіть наближене значення:

1) $\sin\frac{3\pi}{4}$; 3) $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; 5) $\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{6}$; 7) $\cos(-1{,}5)$; 9) $\sin 10$;

2) $\cos\frac{3\pi}{4}$; 4) $\mathrm{tg}\frac{5\pi}{3}$; 6) $\sin 2{,}5$; 8) $\mathrm{tg}\,3$; 10) $\mathrm{ctg}\,10$.

179. Накресліть одиничне коло й позначте на ньому точки, що зображають числа, синус яких дорівнює -1. Запишіть кілька таких чисел. Укажіть загальну формулу, що задає множину всіх таких чисел.

180. Накресліть одиничне коло й позначте на ньому точки, що зображають числа, косинус яких дорівнює 0. Запишіть кілька таких чисел. Задайте множину таких чисел двома формулами або однією.

181. Чи може тангенс від'ємного числа бути додатним? Якщо так, то зобразіть кілька таких чисел на одиничному колі й знайдіть їх наближені значення.

182*. Визначте знак виразу:

1) $\sin 1{,}5\cdot\cos 2{,}5\cdot\mathrm{tg}\,3$; 3) $\sin(-4{,}2)\cdot\cos(-5{,}6)\cdot\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$;

2) $\sin(-2)\cdot\cos 5\cdot\mathrm{tg}(-4)$; 4) $\cos(-0{,}5)\cdot\mathrm{tg}(-2{,}4)\cdot\sin(-\pi)$.

183*. Чи можлива рівність $\sin\alpha = \sin(-\alpha)$? Якщо так, то запишіть вираз, який у загальному вигляді задає множину відповідних значень α.

184*. Що більше: 1) $\sin 2$ чи $\sin 3$; 3) $\sin 7$ чи $\sin 8$;

2) $\cos 2$ чи $\cos 3$; 4) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ чи $\cos\frac{3\pi}{4}$?

185*. Позначте на одиничному колі число 2. Зобразіть на цьому ж колі додатне число $a<\frac{\pi}{2}$, синус якого дорівнює $\sin 2$. Знайдіть a.

186*. Знайдіть додатне число $x < 2\pi$ таке, що $\sin x = \sin 1$.

§ 9 Формули зведення

Формулами зведення називають формули, що виражають тригонометричні функції кутів (чисел) $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ через тригонометричні функції кута (числа) α, де α — довільний кут (число).

Формули зведення мають велике практичне застосування. За їх допомогою можна подати значення тригонометричних функцій будь-якого кута (числа) через значення відповідних тригонометричних функцій гострого кута або числа з проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Це дає змогу обмежитися складанням таблиць значень тригонометричних функцій тільки для гострих кутів.

У курсі геометрії було встановлено формули зведення для кутів виду $90° - \alpha$ і $180° - \alpha$. Зокрема, $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$. Звідси та на основі означення тангенса й котангенса кута дістаємо такі формули зведення:

$$\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \frac{\sin(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{ctg}\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\alpha.$$

Аналогічно $\mathrm{ctg}(90° - \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}(180° - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$.

Використовуючи радіанну міру кута, зазначені формули можна записати у вигляді:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha; \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha; \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{ctg}\alpha; \quad \mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha; \quad \mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \mathrm{tg}\alpha; \quad \mathrm{ctg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha.$$

Маючи ці формули, можна дістати всі інші формули зведення. Розглянемо це на прикладі кута виду $90° + \alpha$.

Перетворимо вираз $90° + \alpha$ на такий, для якого формулу зведення вже встановлено. Це перетворення можна здійснити принаймні двома способами. Розглянемо кожний з них.

I спосіб

Запишемо суму $90° + \alpha$ у вигляді різниці: $90° + \alpha = 90° - (-\alpha)$. Увівши позначення $-\alpha = \beta$, дістанемо: $90° + \alpha = 90° - \beta$. Застосуємо до кута виду $90° - \beta$ відомі формули зведення. Маємо:

$\sin(90° + \alpha) = \sin(90° - \beta) = \cos\beta$, $\quad \mathrm{tg}(90° + \alpha) = \mathrm{tg}(90° - \beta) = \mathrm{ctg}\beta$,

$\cos(90° + \alpha) = \cos(90° - \beta) = \sin\beta$, $\quad \mathrm{ctg}(90° + \alpha) = \mathrm{ctg}(90° - \beta) = \mathrm{tg}\beta$.

Оскільки $\beta = -\alpha$, то $\cos\beta = \cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin\beta = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\beta = \mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$.

Остаточно маємо:

$\sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$; $\cos(90° + \alpha) = -\sin\alpha$;

$\mathrm{tg}(90° + \alpha) = -\mathrm{ctg}\alpha$; $\mathrm{ctg}(90° + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$.

II спосіб

Оскільки $90° = 180° - 90°$, то $90° + \alpha = 180° - 90° + \alpha = 180° - (90° - \alpha)$. Позначивши $90° - \alpha = \beta$, застосуємо до кута виду $180° - \beta$ відомі формули зведення, а потім знову перейдемо до кута α. Маємо:

$\sin(90° + \alpha) = \sin(180° - \beta) = \sin\beta = \sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$;

$\cos(90° + \alpha) = \cos(180° - \beta) = -\cos\beta = -\cos(90° - \alpha) = -\sin\alpha$;

$$\mathrm{tg}(90° + \alpha) = \frac{\sin(90° + \alpha)}{\cos(90° + \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\mathrm{ctg}\alpha;$$

$\mathrm{ctg}(90° + \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$.

Усі формули зведення подано в таблиці 7.

Таблиця 7

x	$90° - \alpha$ $\frac{\pi}{2} - \alpha$	$90° + \alpha$ $\frac{\pi}{2} + \alpha$	$180° - \alpha$ $\pi - \alpha$	$180° + \alpha$ $\pi + \alpha$	$270° - \alpha$ $\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$270° + \alpha$ $\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$360° - \alpha$ $2\pi - \alpha$	$360° + \alpha$ $2\pi + \alpha$
sin *x*	cos α	cos α	sin α	−sin α	−cos α	−cos α	−sin α	sin α
cos *x*	sin α	−sin α	−cos α	−cos α	−sin α	sin α	cos α	cos α
tg *x*	ctg α	−ctg α	−tg α	tg α	ctg α	−ctg α	−tg α	tg α
ctg *x*	tg α	−tg α	−ctg α	ctg α	tg α	−tg α	−ctg α	ctg α

Треба пам'ятати, що розглянуті формули справедливі для будь-якого кута (числа) α.

З таблиці видно, що **для кутів (чисел) $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ назва функції, яку зводять, зберігається**. Тобто в результаті заміни, наприклад, виразу $\sin(\pi + \alpha)$ або $\mathrm{tg}(2\pi - \alpha)$ на простіший дістанемо відповідно синус або тангенс α. **Для кутів (чисел) $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ назва функції, яку зводять, замінюється на схожу** (кажуть, на кофункцію), тобто синус на косинус, тангенс на котангенс, і навпаки.

Отже, замінюючи, наприклад, вираз $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$ або $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ на простіший, слід записати відповідно синус або тангенс α.

Знак результату в усіх випадках визначається за знаком функції, яку зводять, у відповідній чверті, зважаючи, що α — гострий кут $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

Наприклад, кут $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ за такої умови розташований у III чверті. Синус у цій чверті від'ємний. Тому $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha$. Косинус тут також від'ємний, отже, $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$, а тангенс і котангенс — додатні, $\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{ctg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=\mathrm{tg}\alpha$.

Задача 1. Зведіть до тригонометричної функції додатного кута, меншого від 45°: 1) sin143°; 2) cos167°; 3) tg115°.

Розв'язання.

1) Використовуючи кути, що входять до формул зведення, кут 143° можна подати двома способами: 143° = 90° + 53°, або 173° = 180°–37°. Оскільки, за умовою, треба звести до функції кута, меншого від 45°, то, очевидно, слід скористатися другим записом, тобто 143° = 180° – 37°. Отже, sin143° = sin(180° – 37°). Далі міркуємо так: оскільки міру кута подано через 180°, то в результаті зведення назва функції збережеться, тобто залишиться синус. Кут 180° – 37° є кутом II чверті, тому значення його синуса додатне. Остаточно sin143° = sin(180° – 37°) = sin37°.

2) cos167° = cos(180°–13°) = –cos13°;

3) tg115° = tg(90° + 25°) = –ctg25°;

Задача 2. Функцію даного кута зведіть до тієї самої функції гострого кута: 1) sin230°; 2) cos340°; 3) tg198°; 4) ctg251°.

Розв'язання. Щоб зберегти назву функції, слід скористатися формулами зведення для кутів 180° ± α або 360° ± α. Зробимо це.

1) sin230° = sin(180° + 50°) = –sin50°;
2) cos340° = cos(360° – 20°) = cos20°;
3) tg198° = tg(180° + 18°) = tg18°;
4) ctg251° = ctg(180° + 71°) = ctg71°.

З геометрії вам відомі значення синуса, косинуса, тангенса кутів 30°, 45°, 60°:

$$\sin 30°=\frac{1}{2};\qquad \sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \cos 60°=\frac{1}{2};$$

$$\mathrm{tg}30°=\frac{1}{\sqrt{3}};\qquad \mathrm{tg}45° = 1;\qquad \mathrm{tg}60°=\sqrt{3}.$$

Оскільки $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$, то, знаючи тангенс зазначених кутів, можна знайти значення їх котангенса: $\mathrm{ctg}30°=\sqrt{3}$; $\mathrm{ctg}45°=1$; $\mathrm{ctg}60°=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Використовуючи ці значення, а також формули зведення, можна обчислити тригонометричні функції часто вживаних кутів у межах першого оберту. Це кути, градусні міри яких обчислюють з даних додаванням до них 90°, 180° і 270°. Наприклад,

$$30°+90°=120°\left(\frac{2\pi}{3}\right);\ 45°+90°=135°\left(\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$60°+90°=150°\left(\frac{5\pi}{6}\right);\ 30°+180°=210°\left(\frac{7\pi}{6}\right)\text{ і т. д.}$$

Щоб знайти, наприклад, $\sin 120°$, зведемо виконання цього завдання до знаходження значення тригонометричної функції гострого кута. Маємо:

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Аналогічно обчислюємо $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1.$

Обчислені в такий спосіб значення тригонометричних функцій усіх зазначених кутів наведено в таблиці 8. У правильності наведених значень відповідних тригонометричних функцій пропонуємо вам переконатися самостійно, зокрема і під час розв'язування прикладів і задач.

Таблиця 8

x	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{\pi}{2}$ 90°	$\frac{2\pi}{3}$ 120°	$\frac{3\pi}{4}$ 135°	$\frac{5\pi}{6}$ 150°	π 180°	$\frac{7\pi}{6}$ 210°	$\frac{5\pi}{4}$ 225°	$\frac{4\pi}{3}$ 240°	$\frac{3\pi}{2}$ 270°	$\frac{5\pi}{3}$ 300°	$\frac{7\pi}{4}$ 315°	$\frac{11\pi}{6}$ 330°	2π 360°
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не існує	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	Не існує

Пригадайте головне

1. Що таке формули зведення? Укажіть види кутів (чисел), для яких ці формули встановлено.
2. Для яких кутів (чисел) назва функції, яку зводять, не змінюється, а для яких — змінюється?
3. Як визначити знак перед функцією, до якої зводять дану функцію?
4. Чому для складання таблиць значень тригонометричних функцій достатньо обчислити значення цих функцій лише для додатних кутів до 45°?

Розв'яжіть задачі

187'. Вважаючи α гострим кутом, укажіть чверть, до якої належить кут:
1) $90° - \alpha$; 3) $\pi - \alpha$; 5) $270° - \alpha$; 7) $2\pi - \alpha$;
2) $90° + \alpha$; 4) $180° + \alpha$; 6) $\frac{3\pi}{2} + \alpha$; 8) $360° + \alpha$.

188'. Установіть знак виразу, якщо α — гострий кут:
1) $\sin(90° + \alpha)$; 8) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; 15) $\operatorname{tg}(90° + \alpha)$;
2) $\sin(\pi - \alpha)$; 9) $\cos(180° - \alpha)$; 16) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$;
3) $\sin(180° + \alpha)$; 10) $\cos(\pi + \alpha)$; 17) $\operatorname{tg}(\pi + \alpha)$;
4) $\sin(270° - \alpha)$; 11) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$; 18) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$;
5) $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$; 12) $\cos(270° + \alpha)$; 19) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$;
6) $\sin(360° - \alpha)$; 13) $\cos(2\pi - \alpha)$; 20) $\operatorname{tg}(2\pi - \alpha)$;
7) $\sin(2\pi + \alpha)$; 14) $\cos(360° + \alpha)$; 21) $\operatorname{tg}(2\pi + \alpha)$.

189'. Використовуючи табличні значення тригонометричних функцій кутів $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ і формули зведення, обчисліть:
1) $\sin\frac{5\pi}{6}$; 3) $\cos\frac{2\pi}{3}$; 5) $\sin 225°$; 7) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$;
2) $\sin\frac{7\pi}{4}$; 4) $\cos\frac{7\pi}{6}$; 6) $\cos 240°$; 8) $\operatorname{ctg} 315°$.

190°. Спростіть вираз, скориставшись формулами зведення:
1) $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$; 3) $\sin(\alpha - \pi)$; 5) $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$;
2) $\cos(\alpha - \pi)$; 4) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$; 6) $\sin(\alpha - 2\pi) \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$.

191°. Знайдіть числове значення виразу:
1) $\sin\pi + 2\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{3\pi}{2}$; 3) $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3} + 5\sin\pi - 4\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;
2) $6\sin\frac{\pi}{6} - 5\cos 0 + \sin^2\frac{\pi}{4}$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4} + 2\cos^2\pi + \sin^2\frac{3\pi}{4}$.

192°. Знайдіть числове значення виразу:
1) $5\sin(\pi - \alpha) - 2\cos(\pi + \alpha)$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
2) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, якщо $\alpha = \pi$.

193°. Синуси двох кутів трикутника дорівнюють 1 і $\frac{1}{2}$. Знайдіть значення тригонометричних функцій третього кута.

194. Замініть тригонометричну функцію функцією доповняльного кута:

1) $\cos 0{,}4\pi$; 4) $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}$; 7) $\cos(45° + \alpha)$; 10) $\sin\left(60° - \frac{\alpha}{2}\right)$;

2) $\sin 0{,}36\pi$; 5) $\operatorname{ctg} 55°$; 8) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$; 11) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)$;

3) $\operatorname{tg} 78°$; 6) $\sin\frac{3\pi}{7}$; 9) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; 12) $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

195. Зведіть дану функцію до функції додатного гострого кута:

1) $\operatorname{tg} 317°$; 3) $\sin 191°$; 5) $\sin\frac{10\pi}{7}$; 7) $\cos\frac{7\pi}{4}$; 9) $\sin(-96°)$;

2) $\cos 111°$; 4) $\operatorname{ctg} 137°$; 6) $\operatorname{tg}\frac{16\pi}{9}$; 8) $\operatorname{ctg}(-283°)$; 10) $\operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{5}\right)$.

196. Зведіть тригонометричну функцію до функції додатного кута, меншого від $45°\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

1) $\sin 78°$; 3) $\operatorname{tg} 174°$; 5) $\cos\frac{5\pi}{6}$;

2) $\cos 123°$; 4) $\sin 1{,}2\pi$; 6) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

197. Зведіть тригонометричну функцію до функції додатного гострого кута, зберігши назву функції, що зводиться:

1) $\sin 290°$; 3) $\operatorname{tg} 320°$; 5) $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{10}$; 7) $\cos(-100°)$;

2) $\cos 200°$; 4) $\cos\frac{13\pi}{8}$; 6) $\sin(-213°)$; 8) $\operatorname{tg}\left(-\frac{6\pi}{7}\right)$.

198. Якщо α, β, γ — кути трикутника, то:

1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma$; 3) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$;

2) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\gamma$; 4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

Доведіть це.

199. Знайдіть $\cos x$, якщо $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

200. Обчисліть: 1) $8\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{2\pi}{3}\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}$; 2) $10\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\sin\frac{5\pi}{4}\cos\frac{7\pi}{4}$.

201. Доведіть твердження:

1) синус суми гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 1;
2) косинус суми гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 0.

202. Косинус одного із суміжних кутів дорівнює $-\frac{1}{2}$. Знайдіть синус і тангенс іншого кута.

203. Тангенс кута при основі рівнобедренного трикутника дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Знайдіть значення тригонометричних функцій кута при вершині.

204. Синус тупого кута ромба дорівнює $\frac{1}{2}$. Знайдіть значення тригонометричних функцій гострого кута цього ромба.

205*. Обчисліть суму:

1) $\cos 20° + \cos 40° + \cos 60° + \ldots + \cos 160° + \cos 180°$;
2) $\mathrm{tg}\, 20° + \mathrm{tg}\, 40° + \mathrm{tg}\, 60° + \ldots + \mathrm{tg}\, 160° + \mathrm{tg}\, 180°$;
3) $\sin 0° + \sin 1° + \sin 2° + \ldots + \sin 358° + \sin 359°$;
4) $\mathrm{ctg}\, 15° + \mathrm{ctg}\, 30° + \mathrm{ctg}\, 45° + \ldots + \mathrm{ctg}\, 150° + \mathrm{ctg}\, 165°$.

206*. Доведіть тотожність:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;
2) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;
3) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;
4) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

207*. Синуси двох кутів трикутника дорівнюють $\frac{1}{2}$ і $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Знайдіть значення тригонометричних функцій третього кута. Скільки розв'язків має задача?

§ 10 Основні співвідношення між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу

Тригонометричні функції пов'язані між собою численними співвідношеннями, що виражаються відповідними тотожностями. Перша серія тотожностей описує зв'язок між тригонометричними функціями одного й того самого аргументу.

З курсу геометрії вам відомо, що для будь-якого гострого кута α

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \quad (1)$$

Цю рівність було встановлено за теоремою Піфагора. Використовуючи дану теорему, можна довести, що рівність (1) виконується для будь-якого кута, а отже, і числового аргументу.

За означенням тангенса і котангенса:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \quad (2)$$

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \quad (3)$$

Помноживши почленно рівності (2) і (3), дістанемо:

$$\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha = 1. \quad (4)$$

Поділивши почленно рівність (1) на $\cos^2\alpha$, одержимо:

$$\mathrm{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \text{ або } 1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad (5)$$

і поділивши почленно (1) на $\sin^2\alpha$, маємо:

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \quad (6)$$

Рівності (1)–(6) є тотожностями, оскільки вони правильні для всіх тих значень аргументу, за яких ліва і права частини мають зміст.

Рівність (1) правильна для будь-яких значень α. Рівність (2) правильна для всіх значень α, за яких $\cos\alpha \neq 0$. Рівність (3) правильна для всіх значень α, за яких $\sin\alpha \neq 0$. Рівність (4) правильна для всіх значень α, за яких обидва вирази $\mathrm{tg}\alpha$ і $\mathrm{ctg}\alpha$ мають зміст. Рівність (5) правильна, якщо $\cos\alpha \neq 0$, а рівність (6) — якщо $\sin\alpha \neq 0$.

Розглянуті рівності називають основними тригонометричними тотожностями.

Розглянемо застосування цих тотожностей.

Задача 1. Знайдіть $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$ і $\mathrm{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = 0{,}8$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Розв'язання. Знайдемо $\cos\alpha$. З формули $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ дістанемо: $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$. Відомо, що існують два протилежних числа, квадрат яких дорівнює даному додатному числу. Яке з них узяти в нашому випадку? Оскільки α є кутом II чверті, то його косинус від'ємний.

Маємо: $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - 0{,}64} = -\sqrt{0{,}36} = -0{,}6.$

Знаючи синус і косинус, знаходимо тангенс і котангенс:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{-0{,}6} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}.$$

Для знаходження котангенса застосуємо формулу $\mathrm{tg}\alpha\mathrm{ctg}\alpha = 1$, звідси $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$. Отже, $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{-\frac{4}{3}} = -\frac{3}{4}$. Отже, $\cos\alpha = -0{,}6$, $\mathrm{tg}\alpha = -1\frac{1}{3}$, $\mathrm{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$.

Задача 2. Знайдіть значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\text{ctg}\alpha$, якщо $\text{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ і $\pi < \alpha < \frac{3}{4}\pi$.

Розв'язання. Кут α належить до III чверті, тому синус і косинус цього кута від'ємні, а котангенс — додатний.

За формулою $1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ знаходимо $\cos\alpha$. Маємо:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16};\ \cos^2\alpha = 1 : \frac{25}{16} = \frac{16}{25},\ \text{а}\ \cos\alpha = -\sqrt{\frac{16}{25}},\ \text{тобто}\ \cos\alpha = -\frac{4}{5}.$$

За формулою $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$, враховуючи, що кут α належить до III чверті, де синус від'ємний, знаходимо:

$$\sin\alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}},\ \text{тобто}\ \sin\alpha = -\frac{3}{5}.$$

Нарешті, $\text{ctg}\alpha = \frac{1}{\text{tg}\alpha}$, отже, $\text{ctg}\alpha = 1 : \frac{3}{4}$; $\text{ctg}\alpha = \frac{4}{3}$.

Задача 3. Спростіть вираз $\frac{\text{tg}\alpha - \text{ctg}\alpha}{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}$.

Розв'язання. Замінимо в чисельнику тангенс і котангенс відповідними відношеннями й виконаємо віднімання утворених дробів, а вираз у знаменнику розкладемо на множники як різницю квадратів $\sin^2\alpha$ і $\cos^2\alpha$. Маємо:

$$\frac{\text{tg}\alpha - \text{ctg}\alpha}{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)} = \frac{\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}}{1\cdot\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Задача 4. Доведіть тотожність $\frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Розв'язання. Для доведення тотожної рівності двох виразів один з них або обидва тотожно перетворюють, намагаючись звести їх до однакового вигляду. Часто використовують ще й такий спосіб: утворюють різницю лівої та правої частин даної рівності й спрощують її. Якщо в результаті дістали нуль, то це свідчить про тотожну рівність даних виразів. Скористаємось останнім способом. Маємо:

$$\frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} - \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - (1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)}{(1 - \cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - \left(1 - \cos^2\alpha\right)}{(1 - \cos\alpha)\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\alpha}{(1 - \cos\alpha)\sin\alpha} = 0.$$

Отже, $\frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$. Тотожність доведено.

Пригадайте головне

1. Яка формула дає можливість за даним значенням синуса (косинуса) кута знайти значення його конуса (синуса)?
2. Як знайти тангенс числа, якщо відомо значення його котангенса?
3. Якими формулами слід скористатися, щоб за даним значенням тангенса кута знайти його синус?

Розв'яжіть задачі

208'. Знайдіть косинус гострого кута α, якщо:

1) $\sin\alpha = \frac{3}{4}$; 2) $\sin\alpha = \frac{1}{6}$; 3) $\sin\alpha = \frac{2}{5}$.

209'. Знайдіть синус гострого кута β, якщо:

1) $\cos\beta = \frac{4}{5}$; 2) $\cos\beta = \frac{1}{6}$; 3) $\cos\beta = \frac{2}{3}$.

210'. Знайдіть $\mathrm{tg}\alpha$ і $\mathrm{ctg}\alpha$, якщо:

1) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; 2) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; 3) $\sin\alpha = \frac{1}{8}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{63}}{8}$.

211'. Знайдіть $\mathrm{ctg}\alpha$, якщо:

1) $\mathrm{tg}\alpha = 4$; 2) $\mathrm{tg}\alpha = -8$; 3) $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{7}{18}$; 4) $\mathrm{tg}\,\alpha = 3\frac{1}{2}$.

212'. Знайдіть $\mathrm{tg}\alpha$, якщо:

1) $\mathrm{ctg}\alpha = 7$; 2) $\mathrm{ctg}\alpha = -12$; 3) $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{17}{24}$; 4) $\mathrm{ctg}\alpha = 4{,}1$.

213'. Чи може тангенс кута дорівнювати 6, а його котангенс дорівнювати 7?

214'. Спростіть вираз:

1) $1 - \sin^2 x$; 4) $\cos^2 x - 1$; 7) $\cos\alpha\,\mathrm{tg}\alpha + \sin\alpha$; 10) $\frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$;

2) $1 - \cos^2 x$; 5) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1$; 8) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 11) $(1 + \mathrm{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha$;

3) $\sin^2 x - 1$; 6) $\cos\alpha\,\mathrm{tg}\alpha$; 9) $\frac{\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; 12) $\mathrm{ctg}^2\alpha + \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha$.

215'. Доведіть тотожність:

1) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha$.

216°. Дано: $\sin\alpha = \frac{15}{17}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Знайдіть $\cos\alpha$ і $\mathrm{tg}\alpha$.

217°. Дано: $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\mathrm{ctg}\alpha$.

218°. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 3, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Знайдіть $\cos\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$.

219°. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha = -1$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Знайдіть $\operatorname{tg}\alpha$ і $\sin\alpha$.

220°. Спростіть вираз:

1) $\frac{\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha - 1}$;
2) $\frac{\sin 2\alpha \sin\alpha}{\cos 2\alpha \cos\alpha}$;
3) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha$;
4) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$;
5) $\frac{1 - \sin^2\alpha}{1 - \cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$;
6) $\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{ctg}x} + \operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x$;
7) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;
8) $(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\beta)^2 - (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{ctg}\beta)^2$;
9) $(1 + \operatorname{tg}\alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg}\alpha)^2$;
10) $\frac{\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha}$;
11) $\frac{1 - \sin\alpha}{\cos^2\alpha}$;
12) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$.

221°. Чи існує таке значення x, для якого:

1) $\sin x = \frac{2}{5}$, а $\cos x = \frac{4}{5}$;
2) $\cos x = -\frac{5}{13}$, а $\sin x = \frac{12}{13}$;
3) $\sin x = \frac{\sqrt{7}}{4}$, а $\cos x = -\frac{3}{4}$;
4) $\sin x = \frac{7}{8}$, а $\cos x = \frac{8}{7}$?

222. Обчисліть значення решти тригонометричних функцій аргументу α за даним значенням однієї з них:

1) $\sin\alpha = -\frac{2}{3}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
2) $\sin\alpha = \frac{1}{6}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
3) $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;
4) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
5) $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{7}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
6) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}1$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;
7) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
8) $\operatorname{ctg}\alpha = 2$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

223. Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha$; 2) $\cos^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha}$; 3) $\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha}$;
4) $\frac{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}$; 5) $\operatorname{tg}x + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$; 6) $\operatorname{ctg}x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$;
7) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha$; 8) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha + \cos^4\alpha$;
9) $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)$; 10) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + 1 - \sin^2\alpha$.

224. Покажіть, що значення виразу $(a\sin\beta + b\cos\beta)^2 + (b\sin\beta - a\cos\beta)^2$ не залежить від значення β.

225. Доведіть тотожність:

1) $\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = \sin^4\alpha - \cos^4\alpha$;

2) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \cos^2\beta - \cos^2\alpha$;

3) $\dfrac{\sin x}{1-\cos x} = \dfrac{1+\cos x}{\sin x}$;

4) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$;

5) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta} = \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta$;

6) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} \cdot \dfrac{\mathrm{ctg}^2\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha} = 1$;

7) $\dfrac{\sin^2\alpha - \mathrm{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \mathrm{ctg}^2\alpha} = \mathrm{tg}^6\alpha$;

8) $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha + 1}{\mathrm{tg}\alpha - 1}$;

9) $\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \dfrac{\mathrm{tg}\alpha + 1}{\mathrm{tg}\alpha - 1}$;

10) $\dfrac{1+\mathrm{tg}^4\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha$.

226. Якщо α і β — гострі кути прямокутного трикутника, то $\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\beta = 1$. Доведіть це.

227*. Спростіть вираз:

1) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$;

2) $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

228*. Обчисліть значення виразу, спочатку спростивши його:

1) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha}$, якщо $\cos\alpha = -0{,}4$;

2) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha\sin^2\alpha}{\sin\alpha}$, якщо $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

229*. Знаючи, що $\sin\alpha = -\dfrac{1}{m^2}$ і $\cos\alpha > 0$, знайдіть значення $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{ctg}\alpha$.

230*. Знаючи, що $\mathrm{ctg}\alpha = \dfrac{a^2}{b^2}$ і $\sin\alpha < 0$, знайдіть значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$.

231*. Дано: $\sin\alpha + \cos\alpha = p$. Знайдіть: $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$.

232*. Обчисліть: $\mathrm{tg}1° \cdot \mathrm{tg}2° \cdot \mathrm{tg}3° \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}87° \cdot \mathrm{tg}88° \cdot \mathrm{tg}89°$.

Проявіть компетентність

233. Дано:

1) $\mathrm{ctg}(60° - 2\alpha) + \mathrm{ctg}(30° + 2\alpha) = p$.
Знайдіть $\mathrm{ctg}^2(60° - 2\alpha) + \mathrm{ctg}^2(30° + 2\alpha)$;

2) $\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{10} - \alpha\right) + \mathrm{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{5}\right) = m$.

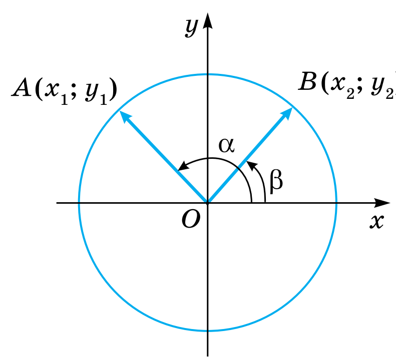
Знайдіть $\mathrm{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{10} - \alpha\right) + \mathrm{tg}^2\left(\alpha + \dfrac{\pi}{5}\right)$.

§ 11 Формули додавання для косинуса

Формулами додавання називають формули, за допомогою яких можна, маючи значення тригонометричних функцій аргументів α і β, обчислити значення тригонометричних функцій суми $\alpha + \beta$ і різниці $\alpha - \beta$ цих аргументів.

Для косинуса формули додавання мають такий вигляд:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta; \quad (1)$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta. \quad (2)$$



Мал. 61

Розглянемо принцип доведення формули (2).

Побудуємо одиничне коло та кути α і β (мал. 61). З малюнка видно, що $\angle AOB = \alpha - \beta$. Обчислимо скалярний добуток векторів $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$. Вектор $\overline{OA}$ має координати $x_1 = \cos\alpha$ і $y_1 = \sin\alpha$. Координатами вектора $\overline{OB}$ є числа $x_2 = \cos\beta$, $y_2 = \sin\beta$. З одного боку, за означенням скалярного добутку: $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

З іншого боку, скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх довжин на косинус кута між ними, тобто $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \left|\overline{OA}\right| \cdot \left|\overline{OB}\right| \cdot \cos(\alpha - \beta)$.

Оскільки $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 1$ як добуток довжин радіусів одиничного кола, маємо: $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \cos(\alpha - \beta)$.

Порівнюючи перший і другий результати для обчислення скалярного добутку $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$, маємо: $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

Аналогічно можна обґрунтувати розглянуту формулу для всіх інших випадків розміщення кутів α і β у чвертях одиничного кола.

Для доведення формули для косинуса суми двох аргументів запишемо суму $\alpha + \beta$ як різницю $\alpha - (-\beta)$ і скористаємося формулою (2). Маємо:

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta)$.

Ураховуючи, що $\cos(-\beta) = \cos\beta$, а $\sin(-\beta) = -\sin\beta$, дістанемо:

$\cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$,

що і треба було довести.

Проілюструємо застосування встановлених формул на прикладах.

Задача 1. Обчисліть без таблиць і калькулятора cos15°.

Розв'язання. Запишемо 15° як різницю 45° – 30° і за формулою косинуса різниці (2) маємо:

$$\cos15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)=\cos45^\circ\cos30^\circ-\sin45^\circ\sin30^\circ=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}+\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac12=\frac{\sqrt6+\sqrt2}{4}.$$

Задача 2. Обчисліть cos40° cos20° – sin20°sin40°.

Розв'язання. Аналіз виразу свідчить, що він є правою частиною формули косинуса суми кутів 40° і 20°. Отже,

$$\cos40^\circ\cos20^\circ-\sin20^\circ\sin40^\circ=\cos(40^\circ+20^\circ)=\cos60^\circ=\frac12.$$

Пригадайте головне

1. Виразіть косинус суми аргументів m і n через відповідні тригонометричні функції кожного із цих аргументів.
2. Виразіть косинус різниці аргументів m і n через відповідні тригонометричні функції кожного із цих аргументів.
3. Що лежить в основі виведення формули косинуса різниці двох аргументів?
4. Як, маючи формулу косинуса різниці двох аргументів, вивести формулу косинуса їх суми?

Розв'яжіть задачі

234'. Перевірте формули косинуса суми й різниці $\cos(\alpha\pm\beta)$, якщо:
1) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$; 2) $\alpha = 150^\circ$, $\beta = 120^\circ$.

235'. Установіть формули зведення, скориставшись формулами додавання для косинуса:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$; 3) $\cos(\pi-\alpha)$; 5) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$;

2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; 4) $\cos(\pi+\alpha)$; 6) $\cos(2\pi-\alpha)$.

236'. Доведіть тотожність: 1) $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$;
2) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\sin\alpha\sin\beta$.

237°. Доведіть тотожність: 1) $\cos(120^\circ+\alpha)+\cos(120^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$;
2) $\cos(120^\circ+\alpha)-\cos(120^\circ-\alpha)=-\sqrt3\sin\alpha$.

238°. Спростіть вираз:

1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$; 3) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\beta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\beta\right)$;

2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; 4) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$.

239°. Знайдіть значення виразу $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, якщо $\cos\alpha=\frac{1}{3}$.

240°. Спростіть вираз:
1) $\cos 5x\cos 2x+\sin 5x\sin 2x$;
2) $\cos 3\alpha\cos\alpha-\sin 3\alpha\sin\alpha$;
3) $\cos(x+2)\cos x+\sin(x+2)\sin x$;
4) $\cos 2\cos 5+\sin 2\sin 5$.

241°. Обчисліть:
1) $\cos 40°\cos 20°-\sin 20°\sin 40°$;
2) $\cos 70°\cos 40°+\sin 70°\sin 40°$;
3) $\cos 55°\cos 95°-\sin 55°\sin 95°$;
4) $\cos 37°\cos 83°-\sin 37°\sin 83°$.

242. Обчисліть:
1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$, якщо $\cos\alpha=\frac{5}{13}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;
2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, якщо $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;
3) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$, якщо $\sin\alpha=-0{,}8$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;
4) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$,
якщо $\cos\alpha=-0{,}5$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\cos\beta=0{,}8$, $\frac{3\pi}{2}<\beta<2\pi$.

243. Спростіть вираз:
1) $\cos 10°+\cos 11°\cos 21°+\cos 69°\cos 79°$;
2) $\sin 20°+\sin 13°\sin 57°-\sin 33°\sin 77°$.

244. Доведіть тотожність:
1) $\cos 2\cos 3-\sin 2\sin 3=\sin 2\sin 7+\cos 7\cos 2$;
2) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\cos x+\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\sin x=\cos x$;
3) $\cos(60°+\alpha)\cos\alpha+\sin(60°+\alpha)\sin\alpha=\frac{1}{2}$;
4) $\cos\alpha+\cos(120°+\alpha)+\cos(120°-\alpha)=0$.

245*. Дано: $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$; $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha=-2{,}4$, $\operatorname{tg}\beta=1\frac{7}{8}$. Обчисліть $\cos(\alpha-\beta)$.

246*. Синуси двох гострих кутів трикутника дорівнюють 0,28 і 0,8. Знайдіть косинус третього кута цього трикутника.

247*. Доведіть тотожність:
1) $\cos mx=2\cos x\cos(m-1)x-\cos(m-2)x$;
2) $\cos mx=2\sin x\sin(m-1)x+\cos(m-2)x$.

Проявіть компетентність

248. Обчисліть, не користуючись таблицями й калькулятором: 1) $\cos 75°$; 2) $\cos 105°$; 3) $\cos 295°$.

249. Кути α і β — гострі. Що більше: $\cos(\alpha-\beta)$ чи $\cos\alpha+\sin\beta$? Відповідь поясніть.

§ 12 Формули додавання для синуса

Щоб дістати формулу для синуса суми двох аргументів, використаємо одну з уже встановлених формул для косинуса. Це неважко зробити, виразивши синус через косинус за допомогою формули зведення $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Позначивши $x = \alpha + \beta$, маємо: $\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$.

Останній вираз перетворимо за формулою (2), вважаючи $\frac{\pi}{2} - \alpha$ одним аргументом, а β — другим. Маємо:

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Отже,

$$\mathbf{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta.} \qquad (3)$$

Для виведення формули синуса різниці аргументів α і β запишемо цю різницю у вигляді суми: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ і скористаємося формулою (3).

Маємо:

$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) =$
$= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$.

Останній вираз дістали з попереднього, оскільки

$$\cos(-\beta) = \cos\beta,\ \sin(-\beta) = -\sin\beta.$$

Отже,

$$\mathbf{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta.} \qquad (4)$$

Дізнайтеся більше

Послідовно застосовуючи формули додавання для двох аргументів, можна дістати формули додавання тригонометричних функцій для трьох і більше аргументів.

Наприклад,

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin((\alpha + \beta) + \gamma) = \sin(\alpha + \beta)\cos\gamma + \cos(\alpha + \beta)\sin\gamma =$$
$$= (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha \sin\beta)\cos\gamma + (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha \sin\beta)\sin\gamma =$$
$$= \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma + \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma + \cos\alpha \cos\beta \sin\gamma - \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

Аналогічно можна довести, що

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma - \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma - \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma - \cos\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$

Пригадайте головне

1. Як виразити синус суми аргументів x і y через відповідні тригонометричні функції кожного із цих аргументів?
2. Дайте відповідь на аналогічне запитання щодо синуса різниці аргументів π і r.
3. Для встановлення формули синуса суми двох аргументів використовують відому вже формулу косинуса різниці двох аргументів. На основі якого співвідношення це можна зробити?
4. Яку властивість функції синус використовують для виведення формули синуса різниці двох аргументів?

Розв'яжіть задачі

250'. Використовуючи формули додавання для синуса, доведіть формулу зведення: 1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$; 3) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$;
2) $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$; 4) $\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha$.

251'. Обчисліть значення виразу:
1) $\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$.

252'. Спростіть вираз: 1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$; 3) $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$;
2) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$; 4) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$.

253°. Спростіть вираз: 1) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$;
2) $\sin(60^\circ+\alpha)-\sin(60^\circ-\alpha)$; 4) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

254°. Доведіть тотожність: 1) $\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$;
2) $\sin\beta\cos\alpha=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2}$.

255°. Спростіть вираз: 1) $\sin5\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos5\alpha$; 3) $\sin4\cos6 + \sin6\cos4$;
2) $\sin3x\cos2x + \sin2x\cos3x$; 4) $\cos7\sin2 - \sin7\cos2$.

256°. Обчисліть:
1) $\cos68^\circ\cos23^\circ + \sin68^\circ\sin23^\circ$; 4) $\sin72^\circ\sin18^\circ - \cos72^\circ\cos18^\circ$;
2) $\sin84^\circ\cos24^\circ - \sin24^\circ\cos84^\circ$; 5) $\sin\frac{5\pi}{7}\cos\frac{9\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\sin\frac{9\pi}{7}$;
3) $\sin32^\circ\cos62^\circ - \sin62^\circ\cos32^\circ$; 6) $\sin\frac{4\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}-\cos\frac{4\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}$.

257. Доведіть тотожність: 1) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;
2) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta$.

258. Спростіть вираз: 1) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$; 2) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$;

3) $\sin(\alpha + 120°) - \sin(60° - \alpha)$; 4) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}$.

259. Обчисліть: 1) $\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{6}\right)$, якщо $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$, якщо $\cos\alpha=-0,8$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

3) $\sin(\alpha-\beta)$, якщо $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$, $0<\alpha<\pi$; $\sin\beta=-\dfrac{12}{13}$, $\pi<\beta<\dfrac{3\pi}{2}$;

4) $\cos(\alpha+\beta)$, якщо $\sin\alpha=0,6$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; $\cos\beta=-0,8$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

260. Доведіть тотожність:

1) $\sin2\alpha + \cos2\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{ctg}\alpha$;

2) $\sin2\alpha - \cos2\alpha\,\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\alpha$;

3) $\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}2\alpha=\dfrac{1}{\sin 2\alpha}$;

4) $1+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}2\alpha=\dfrac{1}{\cos 2\alpha}$.

261*. Обчисліть: 1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{12}$; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\dfrac{5\pi}{12}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

262*. Знайдіть: 1) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$, якщо $\mathrm{ctg}\alpha=\dfrac{7}{24}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

2) $\sin(70° + \alpha)$, якщо $\sin(40° + \alpha) = a$, $0° < \alpha < 45°$.

263*. Косинуси двох кутів трикутника дорівнюють 0,6 і 0,8. Знайдіть синус третього кута.

264*. Доведіть тотожність: 1) $\sin(30°+x)\cos x-\cos(30°+x)\sin x=\dfrac{1}{2}$;

2) $\sin(45°-x)\cos x+\cos x(45°-x)\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

3) $\sin mx=2\cos x\sin(m-1)x-\sin(m-2)x$;

4) $\sin mx=2\sin x\cos(m-1)x+\sin(m-2)x$.

Проявіть компетентність

265. Обчисліть, не користуючись таблицями й калькулятором:
1) $\sin75°$; 2) $\sin15°$; 3) $\sin105°$; 4) $\sin255°$.

266. Якщо α, β, γ — кути трикутника, то $\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \sin\gamma$. Доведіть це.

§ 13 Формули додавання для тангенса і котангенса

Виведемо формули для tg(α + β) і tg(α − β), скориставшись відповідними формулами для синуса й косинуса та співвідношенням $\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cos x \neq 0$. $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$.

Поділимо почленно чисельник і знаменник на cosα cosβ≠0. Дістанемо:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}.$$

Отже,

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}. \qquad (5)$$

Зрозуміло, що ця формула справедлива, якщо одночасно існують tg(α + β), tgα і tgβ, тобто якщо cos(α + β)≠0, cosα≠0, cosβ≠0.

Відповідно,

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}. \qquad (6)$$

Формули додавання для котангенса встановлюють, скориставшись співвідношенням $\mathrm{ctg}x = \frac{1}{\mathrm{tg}x}$. А саме: $\mathrm{ctg}(\alpha+\beta) = \frac{1}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)} = \frac{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}$.

Замінивши в одержаному виразі tgα і tgβ відповідно на $\frac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$ і $\frac{1}{\mathrm{ctg}\,\beta}$ та виконавши необхідні перетворення, дістанемо формулу, яка виражає ctg(α + β) через ctgα і ctgβ. Надаємо вам можливість зробити це самостійно.

Дізнайтеся більше

Для виведення формули тангенса суми трьох аргументів використовують той самий прийом, що й у випадку тангенса двох аргументів: почленне ділення чисельника і знаменника на cosαcosβcosγ ≠ 0.

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos(\alpha+\beta+\gamma)} =$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma}=$$

$$=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta+\mathrm{tg}\,\gamma-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\gamma-\mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma}.$$

Пригадайте головне

Які формули використовують для виведення формул додавання для тангенса і який прийом застосовують, щоб здобути остаточний результат?

Розв'яжіть задачі

267'. Дано: $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2}{5}$, $\mathrm{tg}\,\beta=\frac{1}{2}$.

Обчисліть: 1) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$; 2) $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$.

268'. Знайдіть значення виразу:

1) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha=2$;

2) $\mathrm{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha=-3\sqrt{3}$;

3) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, якщо $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{2}{3}$;

4) $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha=2$, $\mathrm{ctg}\,\beta=3$.

269'. Обчисліть:

1) $\frac{\mathrm{tg}\,25^\circ+\mathrm{tg}\,20^\circ}{1-\mathrm{tg}\,25^\circ\,\mathrm{tg}\,20^\circ}$;

2) $\frac{\mathrm{tg}\,47^\circ+\mathrm{tg}\,13^\circ}{1-\mathrm{tg}\,47^\circ\,\mathrm{tg}\,13^\circ}$;

3) $\frac{\mathrm{tg}\,63^\circ-\mathrm{tg}\,33^\circ}{1+\mathrm{tg}\,63^\circ\,\mathrm{tg}\,33^\circ}$;

4) $\frac{\mathrm{tg}\,101^\circ-\mathrm{tg}\,56^\circ}{1+\mathrm{tg}\,101^\circ\,\mathrm{tg}\,56^\circ}$.

270°. Обчисліть:

1) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)$; 2) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)$; 3) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$; 4) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$.

271°. Доведіть тотожність: 1) $\frac{1+\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\,\alpha}=\mathrm{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-1}{\mathrm{tg}\,\alpha+1}=\mathrm{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

272°. Обчисліть:

1) $\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{15}+\mathrm{tg}\frac{4\pi}{15}}{1+\mathrm{tg}\frac{\pi}{15}\,\mathrm{tg}\frac{4\pi}{15}}$;

2) $\frac{1-\mathrm{tg}\frac{\pi}{16}\,\mathrm{tg}\frac{3\pi}{16}}{\mathrm{tg}\frac{\pi}{16}+\mathrm{tg}\frac{3\pi}{16}}$.

273. Обчисліть:

1) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$, якщо $\mathrm{ctg}\,\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}$;

2) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$, якщо $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

3) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)$ і $\mathrm{tg}(\alpha-\beta)$,

якщо $\sin\alpha=0{,}6$, $\cos\beta=\frac{15}{17}$, α і β — гострі додатні кути.

274. Знайдіть: 1) $\mathrm{tg}\,\alpha$, якщо $\mathrm{tg}(45°-\alpha)=2$; 2) $\mathrm{ctg}\,\alpha$, якщо $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=3$.

275. Спростіть вираз:

1) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;

2) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\frac{1+\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}\,\alpha}$;

3*) $\frac{\mathrm{tg}^2 35°-\mathrm{tg}^2 10°}{1-\mathrm{tg}^2 35°\,\mathrm{tg}^2 10°}$;

4) $\frac{1-\mathrm{tg}\,70°\,\mathrm{tg}\,65°}{\mathrm{tg}\,70°+\mathrm{tg}\,65°}$.

276*. Тангенси двох кутів трикутника дорівнюють 2 і 3. Знайдіть тангенс третього кута цього трикутника.

277*. Дано: $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2}{5}$, $\mathrm{tg}\,\beta=\frac{3}{7}$; α і β — гострі кути. Доведіть, що $\alpha+\beta=45°$.

278*. Тангенси двох гострих кутів дорівнюють $\frac{4}{3}$ і $\frac{1}{7}$. Доведіть, що різниця цих кутів дорівнює 45°.

279*. Якщо α і β — такі гострі кути, що $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{4}{3}$, а $\mathrm{tg}\,\beta=7$, то $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$. Доведіть це.

280*. Тангенси трьох гострих кутів відповідно дорівнюють $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ і $\frac{1}{8}$. Доведіть, що перший кут дорівнює сумі двох інших кутів.

Проявіть компетентність

281. Обчисліть без таблиць і калькулятора:

1) $\mathrm{tg}\frac{17\pi}{12}$; 2) $\mathrm{tg}\,165°$.

§ 14 Тригонометричні функції подвійного аргументу

Якщо у формулах додавання вважати $\alpha = \beta$, то дістанемо формули, що виражають тригонометричні функції подвійного аргументу 2α через функції аргументу α: $\sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Отже,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha. \qquad (1)$$

Аналогічно,

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (3)$$

Замінимо у формулі (2) $\cos^2\alpha$ на $1 - \sin^2\alpha$ або $\sin^2\alpha$ на $1 - \cos^2\alpha$ й дістанемо ще дві формули косинуса подвійного аргументу:

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ або $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$.

Залежно від конкретних умов використовується одна із цих формул. Розглянемо приклади застосування встановлених формул.

Задача 1. Обчисліть $2\sin 15°\cos 15°$.

Розв'язання. За формулою (1), прочитаною справа наліво, маємо:

$$2\sin 15°\cos 15° = \sin(2 \cdot 15°) = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

Задача 2. Обчисліть $\sin 75°\cos 75°$.

Розв'язання. Для застосування формули (1) помножимо й поділимо даний вираз на 2. Маємо:

$$\sin 75°\cos 75° = \frac{2\sin 75°\cos 75°}{2} = \frac{\sin 150°}{2} = \frac{\sin(180° - 30°)}{2} = \frac{\sin 30°}{2} = \frac{1}{4}.$$

Задача 3. Спростіть вираз $\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha$.

Розв'язання. Розкладемо даний вираз на множники як різницю квадратів виразів $\cos^2 2\alpha$ і $\sin^2 2\alpha$. Маємо:

$\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha = (\cos^2 2\alpha)^2 - (\sin^2 2\alpha)^2 = (\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha)(\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha)$.

Різниця в перших дужках за формулою (2) дорівнює $\cos(2 \cdot 2\alpha) = \cos 4\alpha$, а вираз у других дужках на основі відомої тотожності дорівнює 1.

Отже, $\cos^4 2\alpha - \sin^4 2\alpha = \cos 4\alpha$.

Дізнайтеся більше

Крім розглянутих співвідношень між тригонометричними функціями одного і двох аргументів, існують й інші співвідношення, що виражаються відповідними формулами. Наведемо дві групи таких формул.

1. Формули перетворення суми й різниці однойменних тригонометричних функцій на добуток:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

2. Формули, що виражають тригонометричні функції через тангенс половинного аргументу:

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\quad \operatorname{tg}x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\quad \operatorname{ctg}x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Пригадайте головне

1. На основі яких формул установлюють формули тригонометричних функцій подвійного аргументу?
2. Відтворіть формули синуса, косинуса і тангенса подвійного аргументу.
3. Яку із зазначених у § 15 формул можна подати у трьох варіантах?

Розв'яжіть задачі

282'. Дано: $\sin\alpha = 0{,}6$, $\cos\alpha = -0{,}8$. Знайдіть значення виразу:
1) $\sin 2\alpha$; 2) $\cos 2\alpha$; 3) $\operatorname{tg} 2\alpha$.

283'. Обчисліть:
1) $1 - 2\sin^2 15°$;
2) $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$;
3) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$;
4) $2\sin 22°30'\cos 22°30'$.

284'. Спростіть вираз:

1) $2\cos^2 1{,}5x - 1$; 3) $2\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}$; 5) $\frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$;

2) $2\sin^2\alpha - 1$; 4) $\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha}$; 6) $\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

285'. Доведіть тотожність: 1) $2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha = 1$;
2) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$;
3) $2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha = 1$.

286°. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin 2\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 3) $\cos 2\alpha$, якщо $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{4}$;

2) $\cos 2\alpha$, якщо $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$; 4) $\mathrm{tg}\,2\alpha$, якщо $\mathrm{ctg}\,\alpha = 3$.

287°. Обчисліть: 1) $2\sin 75°\cos 75°$; 3) $\cos^2\frac{5\pi}{12} - \sin^2\frac{5\pi}{12}$;

2) $2\cos^2\frac{5\pi}{6} - 1$; 4) $\frac{1 - 2\sin^2 22°30'}{2\cos^2 15° - 1}$.

288°. Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin 2\alpha}{1 - \sin^2\alpha}$; 3) $\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$; 5) $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1 + \sin 2\alpha}$.

2) $\frac{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}$; 4) $\frac{2\cos^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sin 2\alpha}$;

289°. Доведіть тотожність: 1) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$; 2) $1 - \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

290°. Доведіть тотожність:

1) $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$; 3) $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$; 5) $\frac{(1 - \cos 2\alpha)\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sin 2\alpha$;

2) $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$; 4) $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$; 6) $\frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$.

291. Знайдіть $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$, якщо $\mathrm{tg}\,\alpha = -2{,}4$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

292. Обчисліть:

1) $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12}$; 2) $\sin 15°\cos 15°$; 3) $1 - 2\cos^2\frac{5\pi}{12}$; 4) $\mathrm{ctg}\,15° + \mathrm{tg}\,15°$.

293. Спростіть вираз:

1) $4\sin x\cos x\cos 2x$; 3) $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$; 5) $\cos^2\alpha - 4\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}$;

2) $\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$; 4) $4\cos^2\alpha\sin^2\alpha$; 6) $\frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$;

7) $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$; 8) $\cos^4\dfrac{x}{2}-\sin^4\dfrac{x}{2}$; 9) $2\sin^2\dfrac{x}{4}-1$.

294. Доведіть тотожність:

1) $\sin 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha$; 2) $\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin 2\alpha$;

3) $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{12}+\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}=4$; 4) $\operatorname{tg}55^\circ - \operatorname{tg}35^\circ = 2\operatorname{tg}20^\circ$.

295. Доведіть тотожність: 1) $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$; 3) $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$;

2) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha$; 4) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}=1$.

296*. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin 2x$, якщо $\sin x-\cos x=\dfrac{1}{5}$; 2) $\sin 2\alpha$, якщо $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$.

297*. Що більше: $\sin 2\alpha$ чи $2\sin\alpha$, якщо $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$?

298*. Спростіть вираз:

1) $\sin^3\alpha\cos\alpha-\cos^3\alpha\sin\alpha$; 3) $\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{4}\sin\dfrac{\alpha}{4}}{2\sin^2\dfrac{\alpha}{4}-1}$; 5) $\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}\alpha}-\dfrac{1}{1-\operatorname{ctg}\alpha}$.

2) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$; 4) $\dfrac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}\alpha}$;

299*. Доведіть тотожність: 1) $\sin 10^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ=\dfrac{1}{8}$.

Вказівка. Помножте й поділіть ліву частину тотожності на $2\cos 10^\circ$.

2) $\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5}$;

3) $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$; 4) $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{5\pi}{7}=\dfrac{1}{8}$.

300*. Доведіть тотожність:

1) $\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$; 3) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

2) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$; 4) $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha$.

301*. Дано: $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Знайдіть: 1) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$; 2) $\cos\dfrac{\alpha}{2}$; 3) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Проявіть компетентність

302. 1) У рівнобедреному трикутнику синус кута при основі дорівнює $\frac{5}{13}$. Знайдіть синус і косинус кута при вершині.

2) Знайдіть $\sin\alpha$, якщо $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=0,3$.

§ 15 Основні властивості тригонометричних функцій

Систематизуємо основні властивості тригонометричних функцій, що їх установлено в попередніх параграфах, а також з'ясуємо деякі нові їх властивості. Найкраще властивості функції ілюструє її графік. За графіком функції можна знайти, за яких значень аргументу значення функції додатні, від'ємні, дорівнюють нулю; на яких проміжках вона зростає чи спадає тощо. Однак для з'ясування властивостей функції не завжди можна скористатися графіком, бо часом його не так просто побудувати. Більше того, для побудови графіка незайвими бувають деякі відомості про функцію, що їх встановлюють різними способами. Розглянемо ті властивості тригонометричних функцій, які полегшать побудову їх графіків, а потім за графіками встановимо деякі інші властивості цих функцій.

Область визначення та область значень. Раніше ми встановили, що синус і косинус існують за будь-яких значень числового аргументу. Отже, областю визначення і синуса, і косинуса є множина всіх дійсних чисел: $D(\sin) = \boldsymbol{R}$, $D(\cos) = \boldsymbol{R}$. Для функції $y = \operatorname{tg}x$ $D(\operatorname{tg})$ — множина дійсних чисел, крім чисел виду $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. Областю визначення котангенса є множина дійсних чисел, крім чисел виду πk, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Як уже зазначалося, виходячи з означень синуса і косинуса числа, усі їх значення належать числовому відрізку $[-1; 1]$. Причому для будь-якого числа a із цього відрізка можна знайти безліч чисел, синус або косинус яких дорівнює числу a. Отже, множиною (областю) значень функцій синус і косинус є числовий відрізок $[-1; 1]$: $E(\sin) = [-1;\ 1]$, $E(\cos) = [-1; 1]$.

Зверніть увагу:
з цього випливає, що графіки функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$ розміщуються в смузі, обмеженій прямими $y = 1$ та $y = -1$.

На відміну від синуса і косинуса, значення функцій тангенса і котангенса можуть бути будь-якими дійсними числами. Отже, областю значень цих функцій є множина всіх дійсних чисел: $E(\mathrm{tg}) = \boldsymbol{R}$, $E(\mathrm{ctg}) = \boldsymbol{R}$.

Задача 1. Знайдіть найбільше й найменше значення виразу $1 + \sin x \cos x$.

Розв'язання. Перетворимо вираз $\sin x \cos x$, одночасно помноживши й поділивши його на 2. Маємо:

$$\sin x \cos x = \frac{2\sin x \cos x}{2} = \frac{\sin 2x}{2} = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Оскільки множиною значень синуса є відрізок $[-1; 1]$, тобто $-1 \le \sin 2x \le 1$, то $\frac{1}{2}\sin 2x$ лежить у межах $-\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{1}{2}$. Додавши 1 до всіх частин цієї подвійної нерівності, дістанемо верхню та нижню межі значень шуканого виразу:

$$1-\frac{1}{2} \le 1+\frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{1}{2}+1 \text{ або } \frac{1}{2} \le 1+\frac{1}{2}\sin 2x \le \frac{3}{2}.$$

Отже, найбільше значення виразу $1+\sin x \cos x = 1+\frac{1}{2}\sin 2x$ дорівнює $\frac{3}{2}$, а найменше значення становить $\frac{1}{2}$.

Парність і непарність. На основі співвідношень між значеннями відповідних тригонометричних функцій протилежних чисел, а саме: $\sin(-x) == -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\,x$, $\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\,x$, та враховуючи, що області визначення всіх цих функцій симетричні відносно точки O, доходимо висновку:

функція косинус — парна,
функції синус, тангенс і котангенс — непарні.

Із цього випливає, що графік функції $y = \cos x$, як і будь-якої парної функції, симетричний відносно осі ординат, а графіки функцій синус, тангенс і котангенс симетричні відносно початку координат.

Задача 2. Доведіть, що функція $y = 1 - 2\sin^2 x$ є парною.

Доведення.

І спосіб. Оскільки $1 - 2\sin^2 x = \cos 2x$, то маємо функцію $y = \cos 2x$, а функція косинус — парна.

ІІ спосіб. Уведемо позначення $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$. Оскільки областю визначення цієї функції є множина всіх дійсних чисел, то для доведення, що дана функція є парною, треба показати: $f(-x) = f(x)$ для всіх x із області визначення. Знайдемо $f(-x)$. Маємо: $f(-x) = 1 - 2\sin^2(-x) = 1 - 2(\sin(-x))^2$. Оскільки $\sin(-x) = -\sin x$, бо синус — непарна функція, то після перетворення одержаний вираз набуде вигляду:

$1 - 2(\sin(-x))^2 = 1 - 2(-\sin x)^2 = 1 - 2\sin^2 x$.

Тобто $f(-x) = f(x)$, отже, функція $y = 1 - 2\sin^2 x$ — парна.

До такого способу доведення вдаються в тому разі, якщо вираз, що задає функцію, не можна звести до такого вигляду, коли парність чи непарність функції є очевидною.

Періодичність. Багато процесів і явищ, природних і зумовлених діяльністю людини, мають повторювальний характер. Наприклад, одна й та сама фаза Місяця настає через кожні 27,3 доби, маятник годинника повертається в одне й те саме положення через рівні проміжки часу. Такі явища і процеси називають періодичними, а функції, що їх описують, — періодичними функціями. Взагалі,

функція f називається *періодичною*, якщо існує таке додатне число T, що для будь-якого x із області визначення функції числа $x - T$ і $x + T$ також належать цій області визначення, і виконується рівність $f(x) = f(x + T) = f(x - T)$.

Число T в даному випадку називають *періодом* функції.

З означення випливає: якщо T — період функції, то її періодами є числа $2T$, $3T$,..., nT,..., а також $-T$, $-2T$, $-3T$,..., $-nT$,..., де $n \in N$. Отже, періодична функція має безліч періодів. Серед них виділяють найменший додатний період, який зазвичай називають *основним*.

Усі тригонометричні функції є періодичними. Один з періодів кожної з них дорівнює 2π, що випливає з означення цих функцій. Можна довести, що:

2π — найменший додатний період функцій синус і косинус.

А функції тангенс і котангенс мають менший від 2π додатний період, він дорівнює π. Тобто

$$\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}\pi,\ \mathrm{ctg}(x + \pi) = \mathrm{ctg}\pi.$$

У цьому легко переконатися за допомогою осі тангенсів (котангенсів). Справді, всі числа, що відрізняються між собою на π, зображаються на одиничному колі діаметрально протилежними точками. Тому кожній парі таких чисел відповідає на осі тангенсів (котангенсів) одна точка. Із цього випливає, що значення їх тангенсів (котангенсів) рівні між собою.

π — найменший додатний період тангенса і котангенса.

Це твердження, а саме, що π є найменшим дадатним періодом, ми приймемо без доведення.

Якщо 2π — період синуса і косинуса, то числа виду $2\pi k$, де k — ціле, відмінне від 0, також є періодами цих функцій. Аналогічно для функцій $y = \mathrm{tg}x$ та $y = \mathrm{ctg}x$ періодами є числа виду πk, $k \in Z$, $k \neq 0$.

Зверніть увагу:
властивість періодичності тригонометричних функцій використовують, крім іншого, для обчислення значень тригонометричних функцій чисел, які набагато перевищують значення періоду. Для цього від даного числа віднімають максимально можливу кількість періодів і шукають значення відповідної функції отриманої різниці.

Задача 3. Обчисліть $\sin 1470°$.

Розв'язання. Період синуса дорівнює 360°. Щоб знайти, скільки періодів треба відняти від 1470°, поділимо 1470 на 360.

Маємо: $1470 = 360 \cdot 4 + 30$.

Отже, $\sin 1470° = \sin(360° \cdot 4 + 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$.

Задача 4. Обчисліть $\mathrm{tg}\frac{13\pi}{4}$.

Розв'язання. $\frac{13\pi}{4} = 3\frac{1}{4}\pi = 3\pi + \frac{\pi}{4}$. Оскільки найменший додатний період тангенса дорівнює π, то $\mathrm{tg}\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$.

Корисно пам'ятати й таку властивість періодичних функцій:

якщо функція $y = f(x)$ періодична і має період T, то періодичними є також функції $y = f(x + b)$ з тим самим періодом T, а також $y = f(kx)$ з періодом $\frac{T}{|k|}$ (b і k — довільні числа, $k \neq 0$).

Це твердження ми приймаємо без доведення.

З нього випливає, що найменший додатний період, наприклад, функції $y = \cos 3x$, дорівнює $\frac{2\pi}{3}$, а функції $y = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ — відповідно $\frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$. Найменші додатні періоди функцій $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ і $y = \mathrm{ctg}(x + 1{,}5)$ відповідно дорівнюють 2π і π.

Виходячи із сутності періодичної функції, встановити всі її властивості й здійснити побудову графіка достатньо на проміжку, довжина якого дорівнює найменшому додатному періоду цієї функції. На всіх інших числових проміжках, які дістають з даного додаванням або відніманням відповідної кількості періодів, ці властивості й побудована частина графіка повторюватимуться.

Дізнайтеся більше

До періодичних належать не лише тригонометричні функції. Ще одним прикладом періодичної функції є функція $y = \{x\}$. Вираз $\{x\}$ означає дробову частину числа x — різницю між x і найбільшим цілим числом, яке не перевищує x.

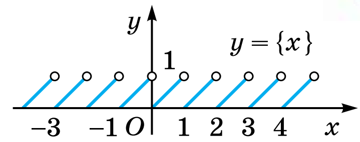
Наприклад,

$\{2{,}5\} = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$; $\{6{,}95\} = 6{,}95 - 6 = 0{,}95$;

$\{-3{,}8\} = -3{,}8 - (-4) = 0{,}2$; $\{8\} = 8 - 8 = 0$.

Найменший додатний період цієї функції дорівнює 1. Її графік зображено на малюнку 62.

Періодичною є лінійна функція $f(x) = kx + b$, якщо $k = 0$. Тоді формула, що її задає, набуває вигляду $f(x) = 0 \cdot x + b$, тобто $f(x) = b$. Очевидно, що періодом цієї функції є будь-яке відмінне від нуля дійсне число. Найменшого додатного її періоду вказати не можна.



Мал. 62

Пригадайте головне

1. Яких значень можуть набувати функції синус і косинус?
2. Яких значень можуть набувати функції тангенс і котангенс?
3. Чи завжди можна знайти синус і косинус числа?
4. Чи завжди можна знайти тангенс (котангенс) числа? Назвіть по три числа, для яких цього зробити не можна, окремо для тангенса і для котангенса. Як записати в загальному вигляді числа, для яких не існує: тангенс; котангенс?
5. Які з тригонометричних функцій є: парними; непарними? Запишіть відповідні рівності, що виражають ці властивості тригонометричних функцій.
6. Яку властивість має графік функції: парної; непарної?
7. Опишіть поняття «періодична функція».
8. Скільки періодів має кожна періодична функція? Назвіть найменший додатний період кожної тригонометричної функції.
9. Як відображається властивість періодичності функції на її графіку?

Розв'яжіть задачі

303'. Враховуючи, що областю значень синуса і косинуса є числовий відрізок $[-1; 1]$, тобто $-1 \le \sin x \le 1$ і $-1 \le \cos x \le 1$, знайдіть найбільше і найменше значення виразу, записавши відповіді у вигляді подвійної нерівності:

1) $2\sin x$;
2) $\sin x + 1$;
3) $3\cos x$;
4) $\cos x - 2$;
5) $\frac{1}{3}\cos x$;
6) $\cos^2 x$;
7) $\sin^2 x$.

304'. Які з рівностей не можуть бути правильними за жодного значення x:

1) $2\sin x = 0$;
2) $4\sin x = 5$;
3) $\cos 3x = 2$;
4) $\sin 2x = -1$;
5) $1 + \sin x = 1,5$;
6) $2 - \cos x = 0,5$?

305'. Відомо, що $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$. Зважаючи, що періодом синуса є число 2π, укажіть ще два числа, синус яких дорівнює $\frac{1}{2}$.

306'. Дано: $\mathrm{tg}3 = a$. Запишіть ще два числа, тангенс яких дорівнює a. Скільки таких чисел існує?

307'. Використовуючи властивість періодичності тригонометричних функцій, знайдіть значення виразу:
1) $\sin 405°$; 2) $\cos 390°$; 3) $\mathrm{tg}750°$;
4) $\sin(-900°)$; 5) $\mathrm{tg}585°$; 6) $\cos 420°$.

308°. Знайдіть множину значень виразу й запишіть її у вигляді подвійної нерівності:
1) $2\sin x\cos x$; 2) $\cos^2 x - \sin^2 x$; 3) $3 - 2\sin x\cos x$; 4) $\cos x\,\mathrm{tg}x$.

309°. Які рівності не можуть бути правильними за жодного значення x:
1) $3\sin x - 2 = 5$;
2) $\sin^2 x + 1{,}5 = 2$;
3) $\cos^2 x + 2 = 1{,}5$;
4) $2\cos x + 3 = 4$;
5) $\cos^2 x + 4 = 5{,}5$;
6) $\sin x\,\mathrm{ctg}x = -1{,}2$?

310°. Запишіть вираз, що тотожно дорівнює даному, змінивши знак аргументу на протилежний:
1) $\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)$; 2) $\mathrm{ctg}(-2)$; 3) $\sin(-1{,}2)$; 4) $\sin^2(-1{,}2)$; 5) $\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{10}\right)$;
6) $\sin\left(\frac{\pi}{7}-\alpha\right)$; 7) $\cos(x-1)$; 8) $\mathrm{tg}(2-x)$; 9) $\mathrm{ctg}^2(2-\beta)$; 10) $\sin^2\left(-\frac{\pi}{8}-\alpha\right)$;

311°. Спростіть вираз:
1) $\sin(x-\alpha) - \sin(\alpha - x)$;
2) $\cos(x-3) + \cos(3-x)$;
3) $\mathrm{tg}(\alpha - 5) + \mathrm{tg}(5-\alpha)$;
4) $\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi}{10}-x\right)+\mathrm{ctg}^2\left(x-\frac{\pi}{10}\right)$.

312°. Знайдіть значення виразу:
1) $\sin\frac{33\pi}{4}$; 2) $\cos\frac{19\pi}{3}$; 3) $\mathrm{tg}\frac{29\pi}{6}$; 4) $\mathrm{ctg}\frac{13\pi}{4}$.

313°. Знайдіть найменший додатний період функції:
1) $y = \cos 2x$; 2) $y=\sin\frac{x}{4}$; 3) $y = \mathrm{tg}(3x-2)$; 4) $y = 2\sin(2-5x)$.

314. Знайдіть найбільше та найменше значення виразу:
1) $\sin x\cos x$;
2) $\cos^4 x - \sin^4 x$;
3) $2\cos\alpha\cos 2\alpha\sin\alpha$;
4) $\cos^2\alpha - 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

315. Доведіть, що функція $y = \sin x\cos x$ є непарною.

316. Установіть, парною чи непарною є функція:

1) $y = \cos x \operatorname{tg} x$; 4) $f(x) = x^2\cos x$; 7) $f(x) = \sin 2x \operatorname{tg} x$;
2) $y = \sin^2 x$; 5) $f(x) = x\sin x^2$; 8) $f(x) = x\sin x$;
3) $y = \sin x \operatorname{tg} x$; 6) $y = \sin x + \operatorname{tg} x$; 9) $f(x) = 1 + \cos x$;
10) $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

317. Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\cos(\alpha-2\pi)\operatorname{tg}(\alpha+\pi)\sin(\alpha-4\pi)}{3\sin(6\pi+\alpha)\operatorname{tg}(\alpha-3\pi)}$;

2) $\dfrac{\cos(\alpha+2\pi)\operatorname{tg}(\alpha-\pi)+\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(\alpha+4\pi)\cos(\alpha-2\pi)+\sin(2\pi+\alpha)\sin(\alpha-4\pi)}$.

318. Обчисліть значення виразу:

1) $\cos\dfrac{19\pi}{3}+\sin\dfrac{25\pi}{6}$; 4) $\sin^2\dfrac{17\pi}{6}+\operatorname{tg}^2\dfrac{17\pi}{6}$;

2) $\operatorname{tg}\dfrac{15\pi}{4}-\cos 7\pi$; 5) $\cos^2\dfrac{9\pi}{4}+\sin\left(-\dfrac{9\pi}{2}\right)$;

3) $2\sin\dfrac{13\pi}{4}-4\cos\dfrac{13\pi}{3}$; 6) $\sin\dfrac{11\pi}{6}\cos\dfrac{11\pi}{6}\operatorname{tg}\dfrac{25\pi}{4}$.

319. Знайдіть найменший додатний період функції:

1) $y = \sin 2x$; 3) $y = \operatorname{tg} 5x$; 5) $y=\cos\dfrac{x}{4}$;

2) $y = \cos 4x$; 4) $y=\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$; 6) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{x-2}{2}$.

320. Знайдіть найбільше й найменше значення функції та її період:

1) $y = \sin x \cos 2x - \cos x \sin 2x$;
2) $y = \sin 2x \cos 5x + \cos 2x \sin 5x$;
3) $f(x) = 3 + \cos x \cos 3x + \sin x \sin 3x$;
4) $f(x) = 5-\cos 2x \cos 7x + \sin 2x \sin 7x$;
5) $y=\cos^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{2}$; 7) $y = 4\cos^2 x-2$;
6) $y = \sin 2x \cos 2x$; 8) $y = 2\operatorname{tg} 3x \cos 3x$.

321*. Установіть, яка з функцій є: а) парною; б) непарною; в) ні парною, ні непарною:

1) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; 3) $y=\dfrac{1-\cos x}{1+\sin^2 x}$; 5) $y = x^2 + \cos x$;

2) $y = \operatorname{tg} x + \cos x$; 4) $y = 1 + \sin x$; 6) $y=\dfrac{x\sin x}{1+\cos x}$.

322*. Перевірте правильність рівності $\sin\pi = \sin(\pi + \pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Чи можна із цього зробити висновок, що π є періодом функції синус? Відповідь обґрунтуйте.

323*. Визначте найменший додатний період функції:

1) $y = \sin^4 x - \cos^4 x$; 3) $y = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$;
2) $y = \sin x\cos x$; 4) $y = \cos^2 x$.

324*. Знайдіть найбільше значення виразу $2\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha$.

Проявіть компетентність

325. Задайте формулами функцію синуса та функцію тангенса з однаковим найменшим додатним періодом.

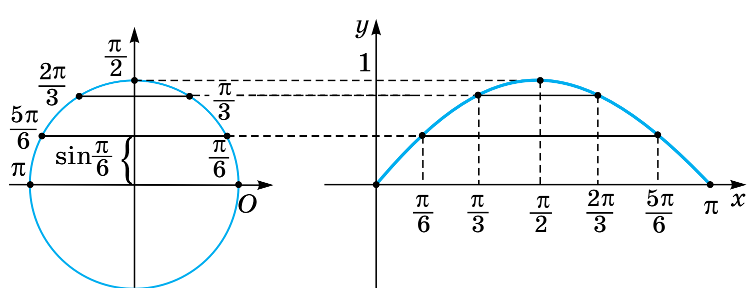
§ 16 Графіки функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$

Графік функції $y = \sin x$. Для побудови даного графіка знайдемо кілька «опорних» точок, через які він проходить, а потім проведемо через них плавну лінію. Побудувати такі точки можна принаймні двома способами:

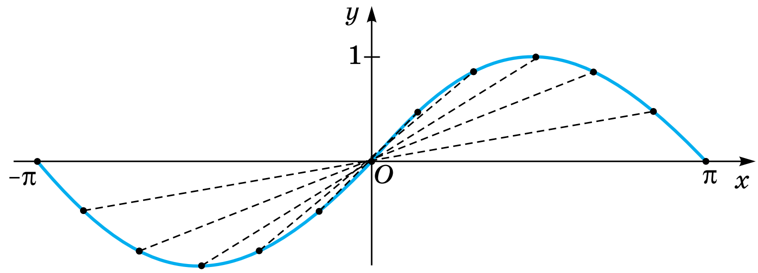
1) традиційним, склавши таблицю значень аргументу x і відповідних значень функції, знайдених за допомогою спеціальних таблиць або калькулятора, та за встановленими координатами $(x; y)$ побудувати точки;

2) геометричним, знайшовши значення функції та точки графіка за допомогою малюнка. Скористаємося другим способом.

Розглянемо I і II чверті одиничного кола. Точками його дуги зображаються всі дійсні числа від 0 до π (мал. 63). Поділимо цю дугу, наприклад, на 6 рівних частин і позначимо числа, які відповідають точкам поділу. Зазначимо, що довжина перпендикуляра, проведеного з точки поділу дуги кола до горизонтального діаметра, дорівнює ординаті цієї точки, тобто синусу відповідного числа.



Мал. 63

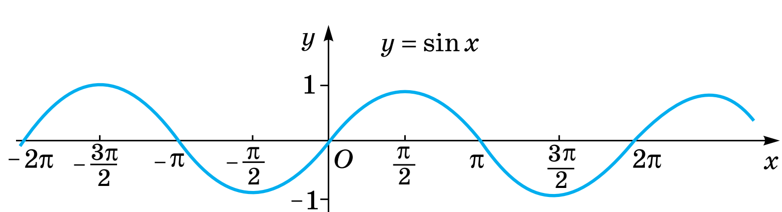


Мал. 64

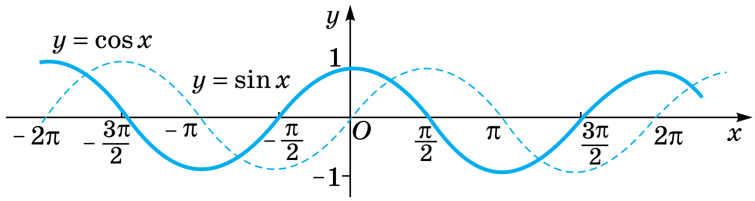
Відкладемо від початку координат на осі абсцис відрізок довжиною $\pi \approx 3{,}14$, взявши за одиницю довжини радіус одиничного кола. Поділимо його також на 6 рівних частин і запишемо біля кожної точки поділу відповідне число. Якщо $x = 0$, то $y = \sin 0 = 0$. Отже, перша точка графіка функції $y = \sin x$ на відрізку $[0; \pi]$ має координати $(0; 0)$ — тобто це початок координат. Для побудови точки графіка з абсцисою $\frac{\pi}{6}$ треба на перпендикулярі, проведеному до осі абсцис через точку $\frac{\pi}{6}$, відкласти значення $\sin\frac{\pi}{6}$. Воно дорівнює ординаті відповідної точки одиничного кола. Якщо через цю точку провести пряму, паралельну осі абсцис, до перетину із зазначеним перпендикуляром, то дістанемо шукану точку. Аналогічно будують інші точки графіка. Сполучивши їх суцільною плавною лінією, дістанемо ескіз графіка функції $y = \sin x$ на відрізку $[0; \pi]$. Слово «ескіз» підкреслює відносну точність графіка, зумовлену кількістю побудованих точок. Що більше точок побудовано, то точніше ескіз відображає справжню форму графіка.

Оскільки синус — непарна функція, то її графік симетричний відносно початку координат, тобто крива, що симетрична побудованій відносно початку координат, буде ескізом графіка функції $y = \sin x$ на відрізку $[-\pi; 0]$ (мал. 64).

Маючи графік синуса на відрізку $[-\pi; \pi]$ довжиною в період цієї функції й беручи до уваги, що найменший додатний період функції синус дорівнює 2π, можемо вказати спосіб побудови інших точок графіка. Для цього треба здійснити паралельне перенесення побудованої на проміжку $[-\pi; \pi]$ його частини на 2π, 4π, 6π і т. д. одиниць праворуч і ліворуч уздовж осі абсцис. Утворена крива (мал. 65) називається *синусоїдою*.



Мал. 65



Мал. 66

Графік функції $y = \cos x$. Графік косинуса достатньо просто побудувати, скориставшись формулою зведення: $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. А графік функції $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, враховуючи відомі правила перетворення графіків функцій, дістають паралельним перенесенням графіка функції $y = \sin x$ уздовж осі Ox на $\frac{\pi}{2}$ одиниць ліворуч (мал. 66).

Графік функції $y = \cos x$ називають *косинусоїдою*.

За графіками синуса й косинуса можна встановити ще деякі властивості цих функцій.

З'ясуємо, наприклад, на яких проміжках синус зростає, а на яких — спадає. Для цього скористаємося таким візуальним орієнтиром: на проміжку зростання графік функції під час руху вздовж нього зліва направо (що відповідає зростанню x) піднімається вгору (що відповідає зростанню y), а графік спадної функції прямує вниз.

Аналізуючи за цією ознакою графік функції $y = \sin x$ (див. мал. 68), бачимо, що одним із проміжків зростання синуса є відрізок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. З властивості періодичності синуса випливає, що він зростає на всіх проміжках виду $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$. Відповідно проміжками спадання синуса є проміжки виду $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

Задача. Що більше: sin2 чи sin3?

Розв'язання. Числа 2 і 3 належать проміжку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, оскільки $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$, $\frac{3\pi}{2} \approx 4{,}71$. На цьому проміжку функція синус спадає. Це означає, що більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Оскільки $3 > 2$, то $\sin 3 < \sin 2$.

Деякі інші властивості синуса і косинуса ви встановите самостійно, користуючись графіками цих функцій під час виконання відповідних вправ.

Дізнайтеся більше

Тригонометричні функції використовують для опису коливальних процесів. Одним з найбільш поширених процесів такого виду є гармонічні коливання, які описуються формулою $y = A\sin(\omega t + \varphi)$. Інакше кажучи, математичною моделлю таких коливань є зазначена формула, яку називають рівнянням або законом гармонічного коливання. За цим законом відбувається, наприклад, коливання математичного маятника, тягарця, підвішеного на пружині, коливання електрорушійної сили індукції та індукційного струму в генераторі тощо.

У зазначеному рівнянні величини, що входять до нього, відповідно до сутності процесу, який воно описує, мають певний фізичний зміст. Зокрема, якщо йдеться про коливання струму, який виробляється генератором, то A, що має назву амплітуди коливання, — це максимальне значення, якого може набувати сила струму індукції за даного значення ω — кутової швидкості обертання ротора генератора; t — час, у кожний момент якого можна знайти відповідне значення сили струму.

Якщо ротор обертається зі швидкість ω рад/с, то повний оберт він зробить за $\frac{2\pi}{\omega}$ с, а за одну секунду — $\frac{\omega}{2\pi}$ обертів. Цю величину називають частотою коливання. У нашій країні зазвичай прийнято використовувати струм частотою 50 коливань за секунду. Це значення прийнято за одиницю вимірювання частоти, яка має назву *герц*.

Пригадайте головне

1. Як побудувати графік функції $y = \sin x$?
2. Як побудувати графік функції $y = \cos x$?
3. Як називається крива, що є графіком функції синус (косинус)?
4. Які властивості тригонометричних функцій використовують під час побудови графіків: синуса; косинуса?

Розв'яжіть задачі

326'. Користуючись графіком функції $y = \cos x$, установіть і запишіть по два проміжки зростання й спадання функції $y = \cos x$.

327'. Користуючись графіком функції $y = \sin x$, знайдіть і запишіть усі проміжки, що належать проміжку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, на яких ця функція:

1) зростає; 2) спадає; 3) набуває додатних значень; 4) набуває від'ємних значень.

Укажіть і запишіть нулі функції $y = \sin x$ на зазначеному проміжку (значення аргумента, за якого значення функції дорівнює нулю).

328'. Користуючись графіком функції $y = \cos x$, знайдіть і запишіть усі проміжки, що належать проміжку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$, на яких ця функція:

1) зростає; 2) спадає; 3) набуває додатних значень; 4) набуває від'ємних значень.

Укажіть і запишіть нулі функції $y = \cos x$ на зазначеному проміжку.

329°. Запишіть у загальному вигляді множину проміжків зростання і проміжків спадання функції косинус.

330°. Порівняйте числа:

1) $\sin\frac{1}{2}$ і $\sin\frac{1}{3}$; 3) $\cos\frac{1}{2}$ і $\cos\frac{1}{3}$; 5) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ і $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

2) $\sin 3$ і $\sin 4$; 4) $\cos\frac{2\pi}{3}$ і $\cos\pi$; 6) $\cos 1$ і $\cos 2$.

331°. За графіком функції $y = \sin x$ знайдіть три наближених значення x, за яких $\sin x = \frac{1}{2}$. Скільки існує таких значень x, що задовольняють дане рівняння?

332°. Користуючись графіком функції $y = \sin x$, запишіть два числових проміжки, на яких синус набуває додатних значень.

Скільки таких проміжків існує? Запишіть множину цих проміжків у загальному вигляді.

333°. Користуючись графіком функції $y = \sin x$, знайдіть на проміжку $[-2\pi; 2\pi]$ значення аргументу, за якого:

1) синус набуває найбільшого значення;

2) синус набуває найменшого значення.

334°. Виконайте завдання, аналогічне до попереднього, для косинуса.

335. Користуючись графіком функції $y = \sin x$, розв'яжіть нерівність $\sin x < 0$, якщо $x \in [0; 2\pi]$.

Використовуючи здобутий результат, запишіть множину розв'язків нерівності $\sin x < 0$ у загальному вигляді.

336. За графіком функції $y = \cos x$ знайдіть і запишіть два проміжки, на яких косинус набуває додатних значень. Проаналізуйте, як, маючи один з них, дістати другий. Скільки таких проміжків існує? Запишіть їх множину в загальному вигляді.

337. Скільки існує числових проміжків, на яких косинус від'ємний? Укажіть один з них. Запишіть множину таких проміжків у загальному вигляді. Яку нерівність ви розв'язали?

338. Користуючись графіками функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$, запишіть у загальному вигляді нулі кожної із цих функцій.

339. Використовуючи графік функції $y = \sin x$, побудуйте в тій самій системі координат графік функцій: 1) $y = 2\sin x$; 2) $y = \frac{1}{2}\sin x$.

340. Використовуючи графік функції $y = \cos x$, побудуйте в тій самій системі координат графік функцій: 1) $y = \cos 2x$; 2) $y = \cos\frac{x}{2}$.

341. Використовуючи графік функції $y = \sin x$, побудуйте в тій самій системі координат графік функції $y = -\sin x$.

342. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$. Знайдіть графічно кілька значень x, для яких $\sin x = \cos x$. Скільки таких значень можна вказати?

343. Накресліть і виріжте із цупкого паперу або картону шаблон графіка функції: а) $y = \sin x$; б) $y = \sin 2x$; в) $y = \sin\frac{x}{2}$. Користуючись ним, побудуйте графік функції:

1) $y = \cos 2x$;
2) $y = \cos\frac{x}{2}$;
3) $y = \sin x - 1$;
4) $y = \sin(x - 1)$;
5) $y = \cos(x + 2)$;
6) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$;
7) $y = \cos 2x$;
8) $y = 2\sin 2x$;
9) $y = \cos\frac{x}{2}$;
10) $y = 1{,}5\cos\frac{x}{2}$.

344*. Укажіть послідовність і сутність перетворень, які слід здійснити щодо графіка функції $y = \sin x$, щоб дістати графік функції:

1) $y = 2{,}5\sin(x - 2)$;
2) $y = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Визначте основний період та найбільше й найменше значення кожної із цих функцій.

345*. Чим відрізняються графіки функцій $y = \sqrt{\sin^2 x}$ і $y = \left(\sqrt{\sin x}\right)^2$?

Проявіть компетентність

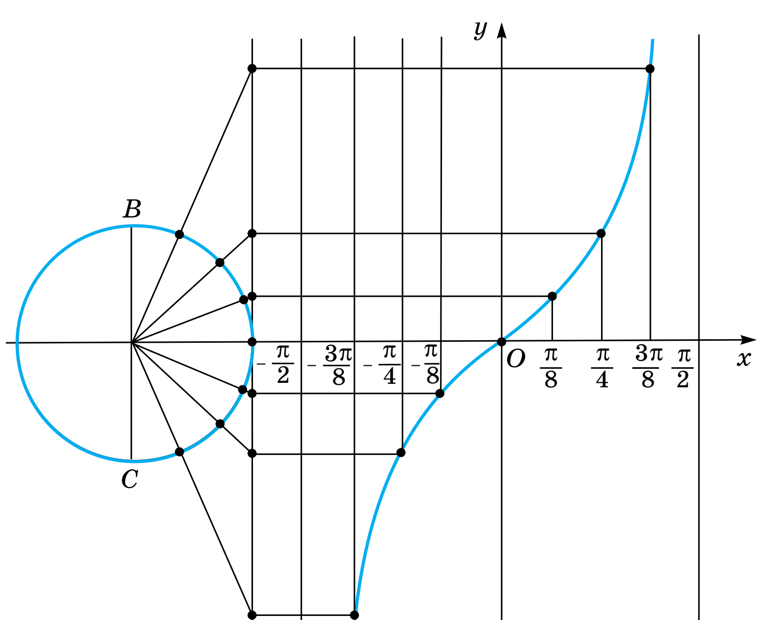
346. За графіком функції $y = \sin x$ установіть числовий проміжок, що належить проміжку $(0; 2\pi)$, на якому $\sin x > \frac{1}{2}$. Ураховуючи періодичність функції синус, запишіть множину проміжків, на яких $\sin x > \frac{1}{2}$.

347. За графіком функції $y = \cos x$ установіть проміжок, що належить проміжку $(-\pi; \pi)$, на якому $\cos x > -\frac{1}{2}$. Запишіть у загальному вигляді множину розв'язів нерівності $\cos x > -\frac{1}{2}$.

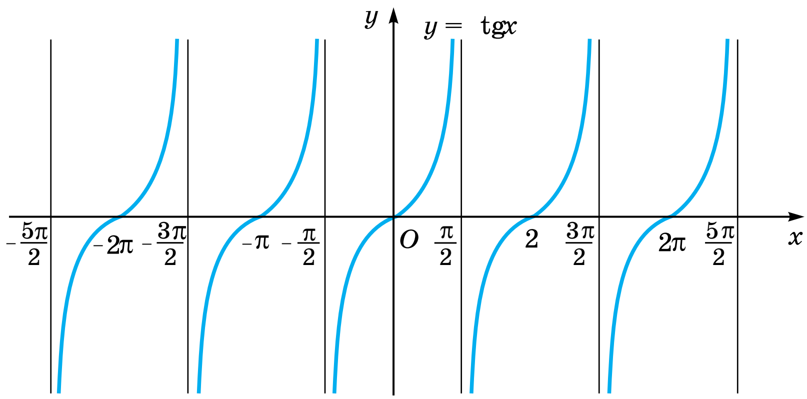
§ 17 Графіки функцій $y = \mathrm{tg}\,x$ та $y = \mathrm{ctg}\,x$

Побудову графіка функції $y = \mathrm{tg}\,x$ на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ геометричним способом показано на малюнку 67. Тут цей інтервал поділено на 8 рівних частин і значення тангенса в кожній з точок поділу знайдено за допомогою лінії тангенсів. Зверніть увагу, що тут, як і під час побудови графіків функцій синус і косинус, за одиницю довжини обрано радіус одиничного кола. Тому, наприклад, відстань від початку координат до точки $\frac{\pi}{2}$ на осі абсцис дорівнює $\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$ довжини зазначеного радіуса.

За тотожністю $\mathrm{tg}(x + \pi) = \mathrm{tg}\,x$ графік тангенса на інтервалі $\left(\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right)$ можна дістати паралельним перенесенням побудованої частини графіка $y = \mathrm{tg}\,x$ уздовж осі Ox праворуч на π одиниць. Аналогічно міркуючи, можна побудувати графік функції $y = \mathrm{tg}\,x$ на всій області визначення (мал. 68).



Мал. 67



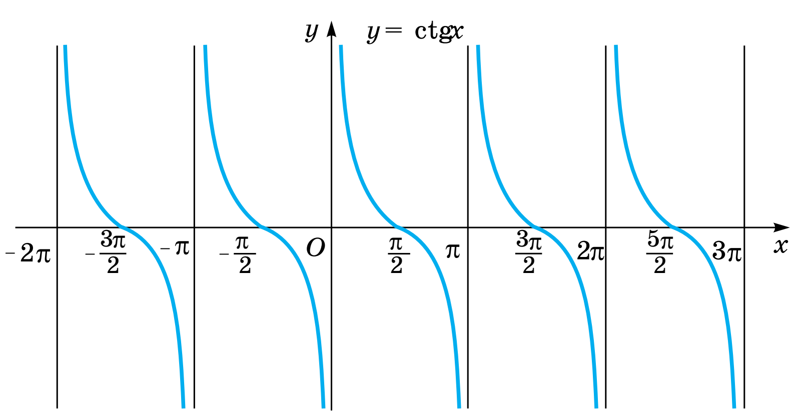
Мал. 68

Побудову графіка функції $y = \mathrm{ctg}\,x$ можна здійснити кількома способами. Один з них полягає у вираженні котангенса через тангенс за допомогою формули зведення:

$$\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\mathrm{ctg}\,x \quad \text{або} \quad \mathrm{ctg}\,x=-\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$$

Отже, графік функції $y = \mathrm{ctg}\,x$ збігається з графіком функції $y=-\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Побудувати останній, маючи графік функції $y = \mathrm{tg}\,x$, можна в такій послідовності: $y=\mathrm{tg}\,x \to y=\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \to y=-\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. Тобто спочатку графік функції $y = \mathrm{tg}\,x$ слід паралельно перенести вздовж осі Ox на $\frac{\pi}{2}$ одиниць вліво, а потім здійснити перетворення симетрії цього графіка відносно осі абсцис.

У результаті дістанемо графік функції котангенс, зображений на малюнку 69.



Мал. 69

Пригадайте головне

1. Як побудувати графік функції $y = \text{tg}x$ на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ геометричним способом?
2. Яка властивість функції тангенс і яке перетворення графіків функцій використовується для побудови графіка функції $y = \text{tg}x$ на інтервалах $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$, ..., а також $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right)$, ...?
3. Які перетворення графіка функції $y = \text{tg}x$ слід здійснити, щоб одержати графік функції $y = \text{ctg}x$? З якої рівності вони випливають?

Розв'яжіть задачі

348'. Побудуйте графік функції $y = \text{ctg}x$ на проміжку $(0; \pi)$, скориставшись даними таблиці 9.

Таблиця 9

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
$y = \text{ctg}x$	Не існує	2,4	1	0,4	0	−0,4	−1	−2,4	Не існує

349'. Ви побудували графік функції $y = \text{ctg}x$ лише на проміжку $(0; \pi)$. Зважаючи, що найменший додатний період котангенса дорівнює π, то за властивістю періодичних функцій на всіх інших проміжках, довжиною π одиниць, що лежать ліворуч і праворуч від проміжка $(0; \pi)$, графік функції $y = \text{ctg}x$ матиме такий самий вигляд. Ураховуючи це, побудуйте ще кілька кривих графіка функції $y = \text{ctg}x$ праворуч і ліворуч від побудованої.

350'. Користуючись побудованим графіком функції $y = \text{ctg}x$, знайдіть і запишіть по три проміжки, на яких ця функція: 1) набуває додатних значень; 2) набуває від'ємних значень.
Укажіть два числа (α і β), для яких котангенс дорівнює нулю. Скільки таких чисел можна вказати?

351°. Побудуйте графік функції $y = \text{ctg}x$ на проміжку $(0; \pi)$, знаходячи значення котангенса у відповідних точках цього проміжку за допомогою лінії котангенсів.
Побудову виконуйте в такій послідовності:
1) накресліть одиничне коло і проведіть лінію котангенсів. Позначте на цьому колі числа 0 і π;

2) поділіть верхнє півколо одиничного кола на 8 рівних частин і позначте числа, які зображені утвореними точками поділу;
3) накресліть прямокутну систему координат, узявши за одиничний відрізок радіус одиничного кола, і позначте на осі абсцис число π;
4) поділіть відрізок $(0; \pi)$ на 8 рівних частин і позначте числа, які відповідають утвореним точкам поділу;
5) проведіть через кожну із цих точок перпендикуляри до осі Ox і на кожному з них побудуйте точку, ордината якої дорівнює котангенсу відповідного числа. Для цього виміряйте відповідний відрізок на лінії котангенсів і відкладіть його вгору або вниз (залежно від знака котангенса) на побудованому перпендикулярі;
6) сполучіть побудовані точки плавною лінією і продовжте її вгору і вниз.

Порівняйте побудовану криву з відповідною частиною графіка функції $y = \mathrm{ctg}\,x$, зображеного на малюнку 69.

352°. Користуючись графіком функції $y = \mathrm{tg}\,x$, установіть проміжки, на яких вона монотонна, і вкажіть характер монотонності (зростає, спадає). Запишіть кілька таких проміжків.

353°. Якою (зростаючою, спадною) є функція $y = \mathrm{ctg}\,x$ на інтервалі $(0; \pi)$? А на інших проміжках? Зробіть загальний висновок.

354°. Користуючись установленими властивостями функцій $y = \mathrm{tg}\,x$ та $y = \mathrm{ctg}\,x$, порівняйте числа:

1) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{10}$ і $\mathrm{tg}\frac{\pi}{12}$; 3) $\mathrm{tg}\,0$ і $\mathrm{tg}\,1$; 5) $\mathrm{ctg}\,2$ і $\mathrm{ctg}\,2{,}5$;

2) $\mathrm{tg}(-3)$ і $\mathrm{tg}(-2{,}1)$; 4) $\mathrm{ctg}\frac{3\pi}{10}$ і $\mathrm{ctg}\frac{\pi}{5}$; 6) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ і $\mathrm{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

355. Користуючись графіком функції $y = \mathrm{tg}\,x$, знайдіть кілька значень x, для яких $\mathrm{tg}\,x = 0$. Скільки таких значень існує? Задайте множину цих значень формулою.

356. У межах інтервалу $(-2\pi; 2\pi)$ вкажіть за графіком функції $y = \mathrm{tg}\,x$ проміжки, на яких ця функція: 1) набуває додатних значень; 2) набуває від'ємних значень.

357. Виконайте завдання, аналогічне до попереднього, для функції котангенс.

358*. Розв'яжіть графічно нерівність:
1) $\mathrm{tg}\,x > 0$; 2) $\mathrm{tg}\,x < 0$; 3) $\mathrm{ctg}\,x > 0$; 4) $\mathrm{ctg}\,x < 0$.

359*. Побудуйте графік функції:
1) $y = \mathrm{tg}\,2x$; 2) $y = \mathrm{tg}\,2x - 4$.

360*. Укажіть послідовність перетворень, які необхідно здійснити щодо графіка функції $y = \mathrm{tg}\,1{,}5x$, щоб дістати графік функції $y = \mathrm{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Проявіть компетентність

361. Проілюструйте графічно тотожність $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{ctg} x$.

§ 18 Рівняння $\sin x = a$

Рівняння $\sin x = a$ належить до тригонометричних рівнянь.

Тригонометричними називають рівняння, які містять змінну лише під знаком тригонометричної функції.

Наприклад, $\cos x = 2\operatorname{tg}x$, $2\cos^2 x = 3\sin x + 2$, $\sin x \operatorname{tg}x = \frac{3}{2}$ — тригонометричні рівняння.

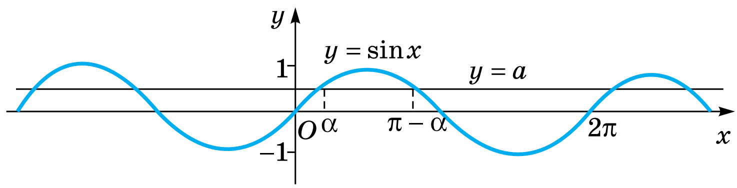
Розв'язати тригонометричне рівняння — означає знайти множину всіх значень змінної, що задовольняють його. Ці значення змінної називають *розв'язками*, або коренями, рівняння.

Зверніть увагу:
якщо число x_0 є розв'язком тригонометричного рівняння, то з огляду на періодичність тригонометричних функцій розв'язком цього рівняння є будь-яке інше число, яке визначають, додаючи до даного або віднімаючи від нього певну кількість основних періодів.

Наприклад, число $\frac{\pi}{6}$ є розв'язком рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$, бо $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Оскільки основний період функції синус дорівнює 2π, то розв'язком даного рівняння будуть також усі числа виду $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, де n — ціле число ($n \in \mathbf{Z}$).

Якщо одним із розв'язків рівняння $\operatorname{tg}x = a$ є число m, то всі числа виду $m + \pi n$, де $n \in \mathbf{Z}$, є також розв'язками цього рівняння, бо основний період функції тангенс дорівнює π. Отже, тригонометричне рівняння або не має розв'язків, або має їх безліч.

Розв'язування будь-якого тригонометричного рівняння намагаються звести до розв'язування рівнянь виду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg}x = a$, $\operatorname{ctg}x = a$, що називаються *найпростішими тригонометричними рівняннями*. Розглянемо, як розв'язати кожне з них.



Мал. 70

Почнемо з рівняння $\sin x = a$. Відомо, що область значень синуса — відрізок $[-1;\ 1]$. Тому якщо $|a| > 1$, то рівняння $\sin x = a$ не має розв'язків.

Нехай $|a| < 1$. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = a$ та $y = \sin x$ (мал. 70). З малюнка видно, що пряма $y = a$ перетинає синусоїду безліч разів. Це означає, якщо $|a| < 1$, то рівняння $\sin x = a$ має безліч коренів. Оскільки синус має найменший додатний період 2π, то достатньо спочатку знайти всі розв'язки в межах одного періоду. За графіком на малюнку 73 видно, якщо $|a| < 1$, то на відрізку $[0;\ 2\pi]$ є два числа x_1 і x_2, синус яких дорівнює a. Якщо одне з них α, то друге $\pi - \alpha$. Усі інші розв'язки рівняння $\sin x = a$ ($|a| < 1$) можна дістати з двох знайдених додаванням періоду.

Отже, розв'язки цього рівняння визначаємо за формулами:

$x = \alpha + 2\pi k$ і $x = \pi - \alpha + 2\pi k = -\alpha + \pi(2k + 1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Ці дві серії розв'язків можна записати однією формулою:

$x = (-1)^k \alpha + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Справді, якщо k — парне число ($k = 2n$, $n \in \boldsymbol{Z}$), то маємо:

$x = (-1)^{2n} \alpha + 2\pi n = \alpha + 2\pi n$, тобто першу підмножину розв'язків; якщо k — непарне число ($k = 2n + 1$, $n \in \boldsymbol{Z}$), то

$x = (-1)^{2n+1} \alpha + (2n + 1)\pi = -\alpha + 2\pi n + \pi = \pi - \alpha + 2\pi n$,

тобто маємо другу підмножину розв'язків.

Розв'яжемо, наприклад, рівняння $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Один з його розв'язків дорівнює $\dfrac{\pi}{4}$. Отже, загальна формула, що задає всі розв'язки даного рівняння, така: $x = (1)^k \dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in \boldsymbol{Z}$.

Конкретні значення x дістають, підставляючи в цю формулу замість k його значення з множини цілих чисел.

Наприклад,

якщо $k = 0$, $x = (-1)^0 \cdot \dfrac{\pi}{4} + \pi \cdot 0 = \dfrac{\pi}{4}$;

якщо $k = 1$, $x = (-1)^1 \cdot \dfrac{\pi}{4} + \pi = -\dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{3\pi}{4}$;

якщо $k = 2$, $x = (-1)^2 \cdot \dfrac{\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{9\pi}{4}$;

якщо $k = -1$, $x = (-1)^{-1} \cdot \dfrac{\pi}{4} - \pi = -\dfrac{\pi}{4} - \pi = -\dfrac{5\pi}{4}$ і т. д.

Зазначимо, що встановлена загальна формула виражає множину розв'язків рівняння $\sin x = a$ через один з них — число α. Тобто замість α можна взяти будь-яке число, що задовольняє рівняння $\sin x = a$.

Наприклад, множину розв'язків рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ можна записати не лише у вигляді формули $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$, а й формули $x = (-1)^k \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$, оскільки $\frac{3\pi}{4}$ — це також корінь даного рівняння. Кожна з наведених формул визначає одну й ту саму множину розв'язків. У цьому легко переконатися, знаходячи конкретні значення x у кожному з випадків.

Щоб досягти однозначності в записі розв'язків найпростіших тригонометричних рівнянь, домовилися вибирати значення одного з коренів α з того проміжку, на якому відповідна тригонометрична функція набуває всіх своїх значень, до того ж — кожного з них лише один раз, тобто з проміжку зростання або спадання функції.

Для функції $y = \sin x$ таким проміжком обрано відрізок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тут вона зростає та набуває по одному разу всіх своїх значень від -1 до 1.

Розв'язок рівняння $\sin x = a$, взятий із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, називають *головним* і позначають $\arcsin a$ (читається «арксинус a»). Інакше кажучи,

$\arcsin a$ — це число (кут) із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює a.

Наприклад, $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, бо $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$, бо $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ і $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Узагалі, слід пам'ятати, що

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a,\ a > 0.$$

Отже, загальна формула розв'язків рівняння $\sin x = a$ має вигляд:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Розглянемо приклади розв'язування окремих рівнянь.

Задача 1. Розв'яжіть рівняння $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Загальна формула розв'язків

$x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$. Отже, $x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 2. Розв'яжіть рівняння $\sin x = 0$.

Розв'язання. $x = (-1)^k \arcsin 0 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\arcsin 0 = 0$.

Отже, $x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 3. Розв'яжіть рівняння $\sin x = \frac{3}{4}$.

Розв'язання. $x = (-1)^k \arcsin\frac{3}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. У такому вигляді розв'язки подібних рівнянь, як правило, залишають. Для обчислення конкретних значень x значення $\arcsin\frac{3}{4}$ знаходять за відповідними таблицями або за допомогою калькулятора.

Задача 4. Розв'яжіть рівняння $\sin x = 1$.

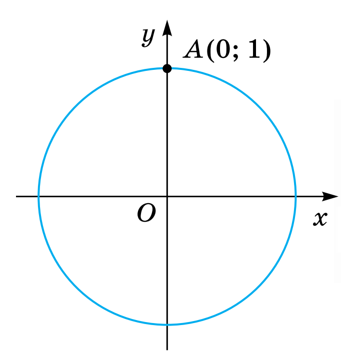
Розв'язання. Розв'яжемо це рівняння двома способами.

І спосіб. За загальною формулою коренів:

$x = (-1)^k \arcsin 1 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$,

отже, $x = (-1)^k \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

ІІ спосіб. З малюнка 71 видно, що всі числа (кути), синус яких дорівнює 1, зображаються на одиничному колі єдиною точкою A. Одне з таких чисел $\frac{\pi}{2}$, а їх множину задає формула $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Отже, розв'язками рівняння $\sin x = 1$ є числа виду $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.



Мал. 71

Чи суперечить це результату, який одержали, розв'язуючи дане рівняння першим способом? Зовсім ні. Покажемо це.

Розглянемо першу формулу. Якщо k — парне число ($k = 2n$), то вона набуває вигляду:

$$x = (-1)^{2n} \frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Якщо k — непарне число ($k = 2n + 1$), то маємо:

$$x = (-1)^{2n+1}\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n + \pi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Тобто маємо одну й ту саму множину, що збігається з множиною коренів, яку одержали, розв'язуючи рівняння другим способом.

Задача 5. Розв'яжіть рівняння $\sin^2 x - \sin x = 0$.

Розв'язання. Розкладемо ліву частину даного рівняння на множники, винісши за дужки $\sin x$. Маємо: $\sin x(\sin x - 1) = 0$. Прирівняємо кожний із множників до нуля. Одержимо два рівняння: $\sin x = 0$ і $\sin x - 1 = 0$, які легко розв'язати. Зробіть це самостійно.

Задача 6. Розв'яжіть рівняння $\sin 4x = \frac{1}{2}$.

Розв'язання. Застосуємо загальну формулу розв'язків рівняння $\sin x = a$, беручи до уваги, що в даному випадку під знаком мінуса стоїть $4x$. Маємо:

$4x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, тобто $4x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. Звідси

$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Пригадайте головне

1. Які рівняння належать до тригонометричних?
2. Скільки розв'язків може мати тригонометричне рівняння?
3. За яких умов рівняння $\sin x = a$ не має розв'язків? Наведіть приклади.
4. Скільки є чисел (кутів), синус яких дорівнює $\frac{2}{3}$? Яке з них позначається так: $\arcsin\frac{2}{3}$?
5. Як ви розумієте запис $\arcsin b$?
6. За якою формулою знаходять числа, синус яких дорівнює $m (-1 \le m \le 1)$?

Розв'яжіть задачі

362'. Поясніть записи й обчисліть:

1) $\arcsin 0$;
2) $\arcsin\frac{1}{2}$;
3) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$;
4) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;
5) $\arcsin 1$;
6) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;
7) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

363'. Запишіть загальну формулу розв'язків рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Використовуючи її та один з результатів розв'язання завдань попереднього номера, знайдіть три конкретні розв'язки цього рівняння, надавши параметру k значень 1; 2; 3.

364'. Запишіть загальну формулу розв'язків рівняння $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Використовуючи її, знайдіть чотири конкретні розв'язки цього рівняння.

365'. Знайдіть по чотири розв'язки кожного рівняння:

1) $\sin x = \frac{1}{2}$; 2) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sin x = -1$.

366°. Розв'яжіть рівняння $\sin x = -1$ двома способами: використовуючи відповідну загальну формулу розв'язків і за допомогою одиничного кола. Який з одержаних записів простіший? Запам'ятайте його та використовуйте в подальшому.

367°. Який з виразів не має змісту:

1) $\arcsin 0{,}8$; 3) $\arcsin\left(-\frac{7}{9}\right)$; 5) $\arcsin\frac{\pi}{2}$;

2) $\arcsin 2$; 4) $\arcsin(-1{,}2)$; 6) $\arcsin\frac{\pi}{4}$?

368°. Чому не можна писати $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3}$, адже $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$?

369°. Позначте на одиничному колі число та відповідний кут:

1) $\arcsin\frac{1}{4}$; 3) $\arcsin\frac{3}{5}$; 5) $\arcsin 2$;

2) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 4) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$; 6) $\arcsin\frac{\pi}{8}$.

370°. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\sin x - 1 = 0$; 2) $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) $\sin^2 x = 0$; 4) $3 - 5\sin x = 8$.

Знайдіть по два додатних розв'язки кожного із цих рівнянь і позначте їх точками на одиничному колі.

371. Спростіть вираз:

1) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{4}\right)$; 3) $\sin(\arcsin(-0{,}65))$; 5) $\sin\left(\arcsin\frac{13}{5}\right)$;

2) $\sin(\arcsin 0{,}6)$; 4) $\sin\left(\arcsin\frac{\pi}{6}\right)$; 6) $\sin\left(\arcsin\frac{\pi}{2}\right)$.

372. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin x = \frac{1}{3}$; 2) $2\sin x + 1 = 0$; 3) $\sqrt{2}\sin x = -1$;

4) $3\sin x = 2$; 5) $\sin^2 x = 1$; 6) $2\sin^2 x - 1 = 0$;

7) $4\sin^2 x = 3$; 8) $2\sin x - \sqrt{5} = 0$; 9) $\sin 2x = -1$;

10) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; 11) $2\sin 4x = -\sqrt{3}$; 12) $\sin(2x - 3) = 0$.

373*. Обчисліть:

1) $\cos(\arcsin 0,8)$; 2) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$;

3) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{8}\right)$; 4) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$.

374*. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin\frac{x}{4\pi} = 0$; 2) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{3x}{5}\right) = -1$;

3) $4 - 4\sin\left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{24}\right) = 0$; 4) $\sin(\sin x) = 0$.

375*. Скільки коренів рівняння $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ належать проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$?

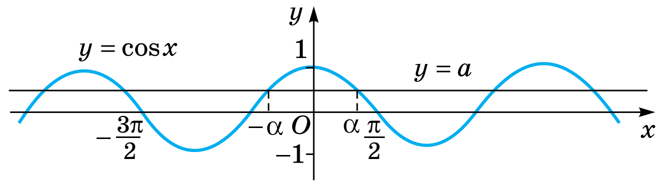
376*. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sin^2 x + \sin x = 0$; 2) $1 - \sin x = \cos^2 x$;

3) $\cos 2x - \sin x = 1$; 4) $1 - \cos 2x = 0$.

§ 19 Рівняння $\cos x = a$

Функція косинус, як і синус, є обмеженою: всі її значення лежать у межах числового відрізка $[-1; 1]$. Тому якщо $|a| > 1$, то рівняння $\cos x = a$ розв'язків не має. Розглянемо, як розв'язати це рівняння, якщо $|a| < 1$. Пряма $y = a$ перетинає графік $y = \cos x$ безліч разів (мал. 72). У межах числового проміжку, що дорівнює найменшому додатному періоду коси-



Мал. 72

нуса 2π, наприклад $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, лежать два розв'язки цього рівняння α і $-\alpha$ (косинус — парна функція). Отже, серії розв'язків мають вигляд: $x = \alpha + 2\pi n$ та $x = -\alpha + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Їх можна подати однією формулою:

$$x = \pm\alpha + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ця формула виражає множину розв'язків рівняння $\cos x = a$ через один з них, тобто α. Значенням α можна довільно взяти будь-яке число, косинус якого дорівнює a. У результаті одержимо безліч формул, що задають одну й ту саму множину розв'язків даного рівняння.

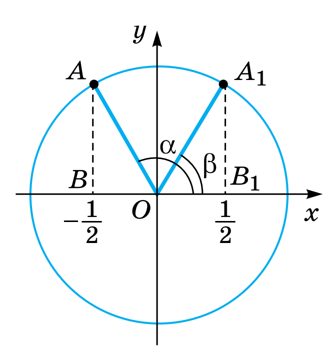
Щоб досягти однозначності, домовилися значення α брати з проміжку $[0; \pi]$, на якому функція $y = \cos x$, спадаючи від 1 до -1, набуває всіх своїх значень по одному разу. Таке значення позначають $\arccos a$ (читають: «арккосинус a»).

$\arccos a$ — це число (кут) із проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює a.

Наприклад, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, бо $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ і $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$; $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, бо $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ і $\frac{\pi}{2} \in [0; \pi]$.

Знайдемо $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$. Часто припускаються помилки, міркуючи так: якщо $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, то $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$. Але це неправильно, бо, по-перше, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, а не $-\frac{1}{2}$; по-друге, $-\frac{\pi}{3}$ не належить проміжку $[0; \pi]$.

Щоб знайти співвідношення між $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ та $\arccos\frac{1}{2}$, вдамося до одиничного кола. Зобразимо на ньому в межах $[0; \pi]$ кут α, косинус якого дорівнює $-\frac{1}{2}$, тобто $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ (мал. 73), а також кут β, косинус якого дорівнює $\frac{1}{2}$, тобто $\arccos\frac{1}{2}$. Оскільки $\Delta AOB = \Delta A_1OB_1$



Мал. 73

(за катетом $OB = OB_1 = \frac{1}{2}$ і гіпотенузою $AO = A_1O = 1$), то $\angle AOB = \angle A_1OB_1 = \beta$. Тоді

$\alpha = \pi - \angle AOB = \pi - \beta$. Отже, $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2}$. Узагалі,

$$\mathbf{\arccos(-a) = \pi - \arccos a,\ a > 0.}$$

Загальна формула розв'язків рівняння $\cos x = a$ має вигляд:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Задача 1. Розв'яжіть рівняння $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Загальна формула розв'язків $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$. Отже, $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Задача 2. Розв'яжіть рівняння $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. $x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

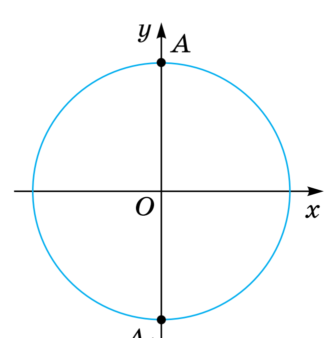
Отже, $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Задача 3. Розв'яжіть рівняння $\cos x = 0$.

Розв'язання. $x = \pm\arccos 0 + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}; x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Розв'язок цього рівняння можна записати і в іншому вигляді. Розглянемо одиничне коло (мал. 74). Усі числа, косинус яких дорівнює 0, зображаються двома точками A і A_1, що є кінцями вертикального діаметра цього кола. Одне із чисел, позначене точкою A, дорівнює $\frac{\pi}{2}$. Усі інші числа можна одержати з формули $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.



Мал. 74

Можна обґрунтувати, що формули $x=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$ і $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$ задають одну й ту саму множину чисел.

Пригадайте головне

1. Скільки розв'язків може мати рівняння $\cos x = a$?
2. У яких випадках рівняння $\cos x = a$ не має розв'язків?
3. Як записати в загальному вигляді множину розв'язків рівняння $\cos x = a$?
4. Що означає запис: $\arccos a$?
5. Яка залежність між $\arccos(-a)$ і $\arccos a$ $(0 \le a \le 1)$?

Розв'яжіть задачі

377'. Яке рівняння не має розв'язків:

1) $\cos x=-\frac{7}{8}$; 2) $\cos x=\frac{9}{8}$; 3) $\cos x = 0,98$; 4) $\cos x = -1,25$?

378'. Накресліть одиничне коло та позначте на ньому точки, що відповідають числам:

1) $\arccos\frac{1}{2}$; 2) $\arccos\frac{2}{3}$; 3) $\arccos 1$; 4) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 5) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.

379'. Який з виразів не має змісту:

1) $\arccos\frac{4}{9}$; 2) $\arccos(-6,4)$; 3) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$;

4) $\arccos\frac{\pi}{2}$; 5) $\arccos\frac{\pi}{4}$; 6) $\arccos 1$?

380'. Знайдіть:

1) $\arccos\frac{1}{2}$; 2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; 3) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$;

4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 5) $\arccos 1$; 6) $\arccos(-1)$.

381'. Запишіть загальну формулу розв'язків рівняння $\cos x=\frac{1}{2}$. Користуючись нею, знайдіть чотири розв'язки цього рівняння.

382'. Знайдіть по три розв'язки кожного рівняння:

1) $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\cos x=1$; 3) $\cos x=-1$;

4) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\cos x=-\frac{1}{2}$; 6) $\cos x=0$.

383°. Знайдіть і виправте помилку, якщо вона є, у записі:

1) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$; 2) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$;

3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}$; 4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{7\pi}{6}$.

384°. Позначте на одиничному колі число та відповідний кут:

1) $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$; 2) $\arccos\frac{1}{2}$; 3) $\arccos(-0{,}8)$;

4) $\arccos 1$; 5) $\arccos 0$; 6) $\arccos(-2)$.

385°. Обчисліть:

1) $\arccos(-1)+2\arccos\frac{1}{2}$; 2) $\arccos 1-\pi$; 3) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$;

4) $\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 5) $\arcsin 1+\arccos(-1)$;

6) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$.

386°. Знайдіть два додатні та два від'ємні розв'язки кожного рівнянь і зобразіть їх відповідними точками на одиничному колі:

1) $\cos x=-\frac{1}{2}$; 2) $2\cos x=-\sqrt{2}$; 3) $2\cos x+1=0$; 4) $5\cos x=0$.

387. Скільки розв'язків має рівняння $\cos x=-\frac{3}{4}$? Зобразіть ці розв'язки точками одиничного кола. Укажіть на малюнку точку, що зображає число $\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$, і відповідний кут.

388. Обчисліть: 1) $\arccos 1+2\arcsin\frac{1}{2}$;

2) $3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-\arcsin\frac{1}{2}$; 3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

4) $\arccos 1+\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-6\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

389. Знайдіть значення виразу:

1) $\sin\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$; 2) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$;

3) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$; 4) $\sin\left(\arccos\frac{12}{13}\right)$.

390. Один з розв'язків рівняння $\cos x = m$ дорівнює b. Запишіть множину розв'язків цього рівняння.

391. Розв’яжіть рівняння та зобразіть точками на одиничному колі всі розв’язки кожного з них:

1) $\sqrt{2}\cos x+1=0$; 2) $4-6\cos x=0$; 3) $\cos^2 x=1$;
4) $4\cos^2 x-3=0$; 5) $3\cos x+1=0$; 6) $1-0{,}5\cos x=0$.

392*. Розв’яжіть рівняння, розклавши його ліву частину на множники:

1) $2\cos^2 x+\cos x=0$; 2) $3\sin x\cos x+\cos x=0$;
3) $4\cos^2 x-1=0$; 4) $\sin 2x+\sin x=0$.

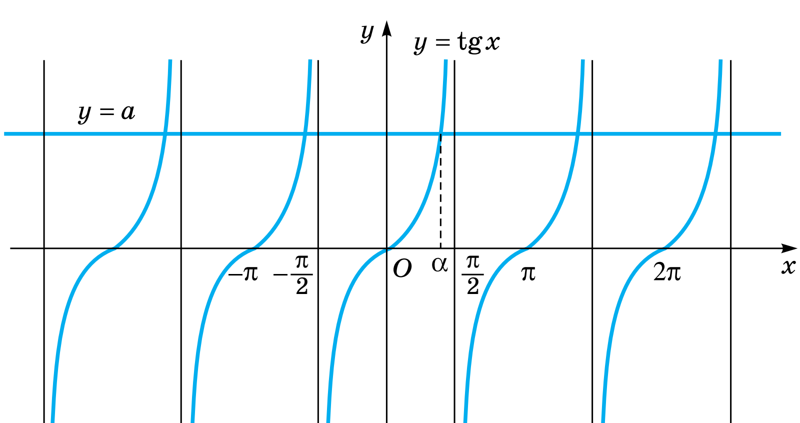
393*. Розв’яжіть рівняння:

1) $2\cos 2x=1$; 2) $\sin^4 x-\cos^4 x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\mathrm{tg}x-\mathrm{ctg}x=0$;
4) $\cos x-\cos 2x=1$; 5) $\sin 4x-\cos 2x=0$; 6) $\sqrt{\cos^2 x}=1$.

§ 20 Рівняння $\mathrm{tg}x=a$ та $\mathrm{ctg}x=a$

Рівняння $\mathrm{tg}x = a$. Область значень тангенса — уся числова пряма. Тому рівняння $\mathrm{tg}x = a$ має розв’язки для будь-якого дійсного a. У межах найменшого додатного періоду (дорівнює π) тангенс набуває конкретного значення a тільки один раз (пряма $y = a$ перетинає криву графіка $y = \mathrm{tg}x$ у межах періоду р лише один раз) (мал. 75). Тому якщо відомий один розв’язок α рівняння $\mathrm{tg}x = a$, то всі розв’язки задає формула:

$$x = \alpha + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$



Мал. 75

Для однозначності домовилися брати α в цій формулі з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ і позначати, відповідно, arctg$a$ (читається: «арктангенс a»). Тобто

arctg$a$ — це число (кут) із проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює a.

Наприклад, $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$, бо $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ і $\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$; $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$, бо $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$ і $\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Загалом, як і для синуса, $\mathbf{arctg(-}a\mathbf{) = -arctg}a$, $a > \mathbf{0}$.

Отже, загальна формула розв'язків рівняння tg$x$ = a має вигляд:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Задача 1. Розв'яжіть рівняння tg$x$ = 1.

Розв'язання. $x=\operatorname{arctg}1+\pi n, n\in \mathbf{Z}$, $\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$. Отже, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$.

Задача 2. Розв'яжіть рівняння tg$x$ = 2,5.

Розв'язання. $x = \operatorname{arctg}2{,}5 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Задача 3. Розв'яжіть рівняння tg$x$ = –1.

Розв'язання. $x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, $\operatorname{arctg}(-1)=-\operatorname{arctg}1=-\frac{\pi}{4}$.

$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}$.

Рівняння ctg$x$ = a. Міркуючи аналогічно до попереднього, знайдемо формулу коренів цього рівняння: $x = \alpha + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, де α — один з розв'язків рівняння ctg$x$ = a (мал. 76).

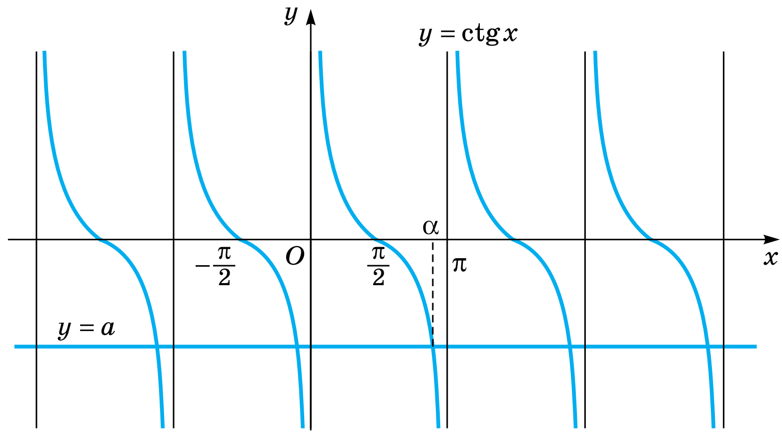
У цьому випадку значення α домовилися брати з проміжку $(0;\ \pi)$ і позначати arcctg$a$ (читається: «арккотангенс a»). Отже,

arcctg$a$ — це число (кут) із проміжку (0; π), котангенс якого дорівнює a.

Наприклад, $\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$, бо $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$ і $\frac{\pi}{6}\in(0;\pi)$.

Як і для косинуса, $\mathbf{arcctg(-}a\mathbf{) = \pi - arcctg}a$, $a > \mathbf{0}$.

Зокрема, $\operatorname{arcctg}(\sqrt{3})=\pi-\operatorname{arcctg}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$.



Мал. 76

Отже, загальна формула розв'язків рівняння $\mathrm{ctg}\,x = a$ **має вигляд:** $x = \mathrm{arcctg}\,a + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 4. Розв'яжіть рівняння $\mathrm{ctg}\,x = 0$.

Розв'язання. $x = \mathrm{arcctg}\,0 + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$, $\mathrm{arcctg}\,0 = \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Задача 5. Розв'яжіть рівняння $\mathrm{ctg}\,x = -1$.

Розв'язання. $x = \mathrm{arcctg}(-1) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

$\mathrm{arcctg}(-1) = \pi - \mathrm{arcctg}\,1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$; $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Дізнайтеся більше

Може виникнути запитання: а як розв'язати, наприклад, рівняння $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}\,x - 2 = 0$? Зазначимо, що якогось єдиного, універсального способу розв'язання тригонометричних рівнянь немає. Але загальний підхід полягає в тому, що рівняння намагаються перетворити так, щоб його розв'язування звести до розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь за відомими формулами.

У нашому випадку помічаємо, що дане рівняння є квадратним рівнянням відносно $\mathrm{tg}\,x$. Уведемо позначення $\mathrm{tg}\,x = y$. Тоді рівняння набуває вигляду $y^2 + y - 2 = 0$. Розв'яжемо його. Маємо: $y_1 = 1$; $y_2 = -2$.

Повернемося до введеного позначення. Маємо: $\mathrm{tg}\,x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$;

$\mathrm{tg}\,x = -2$, $x = \mathrm{arctg}(-2) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

Отже, розв'язком даного рівняння є об'єднання двох множин значень x, які задано записаними формулами.

Розглянемо ще одне рівняння: $2\sin^2 x + 5\cos x - 5 = 0$.

Воно містить різні тригонометричні функції. У цьому разі намагаються виразити їх через одну функцію. У даному випадку з тотожності

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ виразимо $\sin^2 x$ через $\cos^2 x$ і підставимо здобутий вираз у рівняння. Маємо:

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$; $2(1 - \cos^2 x) + 5\cos x - 5 = 0$;

$2 - 2\cos^2 x + 5\cos x - 5 = 0$; $2\cos^2 x - 5\cos x + 3 = 0$.

Розв'язавши це рівняння як квадратне відносно $\cos x$, одержимо два корені: $\cos x = \frac{3}{2}$ і $\cos x = 1$.

Перше рівняння не має розв'язку, бо $|\cos x \le 1|$. Розв'язок другого рівняння, а саме $x = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ є шуканим.

А ось рівняння $\sin 2x + \cos x = 0$ містить не лише різні тригонометричні функції, а й різні аргументи x і $2x$. Щоб звести вираз у лівій частині рівняння до аргументу x, скористаємось формулою синуса подвійного аргументу: $\sin 2x = 2\sin x\cos x$. Маємо: $2\sin x\cos x = 0$. Розклавши ліву частину утвореного рівняння на множники, матимемо рівняння $\cos x(2\sin x + 1) = 0$, яке легко розв'язати, прирівнявши кожен із множників до нуля, тобто $\cos x = 0$ або $2\sin x + 1 = 0$. Подальший хід розв'язування утруднень не викликає.

Пригадайте головне

1. Чи завжди мають розв'язки рівняння: $\mathrm{tg}x = a$; $\mathrm{ctg}x = a$?
2. Як записати в загальному вигляді множину розв'язків рівняння: $\mathrm{tg}x = a$; $\mathrm{ctg}x = a$?
3. Що означає запис: $\mathrm{arctg}a$?
4. Що означає запис: $\mathrm{arcctg}a$?

Розв'яжіть задачі

394'. Як ви розумієте запис: $\mathrm{arctg}(-2)$? Накресліть одиничне коло та позначте на ньому точку, що зображає число $\mathrm{arctg}(-2)$, і відповідний кут, скориставшись для цього віссю тангенсів.

395'. Поясніть, що таке $\mathrm{arcctg}3$. Зобразіть $\mathrm{arcctg}3$ на одиничному колі.

396'. Зобразіть на одиничному колі точками розв'язки рівняння:
1) $\mathrm{tg}x = 1{,}5$; 2) $\mathrm{ctg}x = -2$; 3) $\mathrm{tg}x = -2{,}5$; 4) $\mathrm{ctg}x = 1$.
Позначте кут: $\mathrm{arctg}1{,}5$; $\mathrm{arcctg}(-2)$; $\mathrm{arctg}(-2{,}5)$; $\mathrm{arcctg}1$.

397'. Запишіть загальні формули розв'язків рівнянь:
1) $\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$; 3) $\mathrm{tg}x = -1$;
2) $\mathrm{tg}x = -\sqrt{3}$; 4) $\mathrm{tg}x = 1$;

398°. Запишіть загальні формули розв'язків рівнянь:
1) $\mathrm{ctg}x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\mathrm{ctg}x = 1$;
2) $\mathrm{ctg}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) $\mathrm{ctg}x = -1$.

Користуючись цими формулами, знайдіть по два додатних і від'ємних розв'язки кожного з них.

399. Розв'яжіть рівняння:

1) $2\text{tg}x + 2 = 0$; 2) $3\text{tg}x - 6 = 1$; 3) $4 + 5\text{tg}x = 2$;

4) $6\text{ctg}x + 3 = 1$; 5) $\frac{1}{2}\text{ctg}x + 0{,}5 = 0$; 6) $0{,}3\text{ctg}x + 1 = 0{,}6$.

400*. Обчисліть:

1) $\text{tg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$; 2) $\text{tg}\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)$;

3) $\text{ctg}\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$; 4) $\cos(\text{arctg}2)$.

401*. Розв'яжіть рівняння:

1) $3\text{tg}^2x + \text{tg}x = 0$; 2) $\text{tg}x + \text{ctg}x = 0$;

3) $\sin x - \sin x\,\text{tg}x = 0$; 4) $\text{tg}^3x + \text{tg}^2x - 3\text{tg}x - 3 = 0$.

Проявіть компетентність

402. Доведіть тотожність $\text{arctg}\, m + \text{arcctg}\, m = \frac{\pi}{2}$.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть математичний зміст запису: $\sin 2$, $\cos\frac{7\pi}{5}$, $\text{tg}(-3{,}2)$, $\text{ctg}1$.
2. Що таке формули зведення? Як установити кожну з них?
3. Запишіть основні тригонометричні тотожності.
4. Які формули належать до формул додавання? Запишіть їх.
5. Доведіть формули додавання для косинуса, синуса, тангенса.
6. Які формули легко дістати з формул додавання (інакше — які формули є наслідками з формул додавання)?
7. Охарактеризуйте основні властивості тригонометричних функцій і наведіть приклади їх використання.
8. Які рівняння належать до найпростіших тригонометричних рівнянь? Запишіть у загальному вигляді множини розв'язків кожного з них.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 2

Уважно прочитайте кожне завдання і вкажіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 25 – 30 хв.

Тест 1

1° Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 40°. Знайдіть радіанні міри кутів цього трикутника.

А. $\frac{\pi}{9}, \frac{15\pi}{18}, 1.$ **Б.** $\frac{5\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \pi.$ **В.** $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{18}, \frac{2\pi}{9}.$ **Г.** $\frac{5\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}, \frac{\pi}{2}.$

2° Запишіть вираз, що задає множину чисел, зображених на одиничному колі кінцем рухомого радіуса, який утворює з додатною піввіссю Ox кут 160°.

А. $\frac{8\pi}{9}+\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$ **Б.** $\frac{\pi}{9}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$

В. $160° + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$ **Г.** $\frac{8\pi}{9}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}.$

3° Визначте знак добутку: 1) $\sin\frac{5\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{10}\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$; 2) $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\cos\frac{15\pi}{8}tg\frac{9\pi}{7}$.

А. 1) + ; 2) + . **Б.** 1) –; 2) –. **В.** 1) + ; 2) –. **Г.** 1) –; 2) + .

4 Рухомий радіус утворює з додатною піввіссю Ox кут 234°. Укажіть у межах першого оберту додатні кути α і β, для яких $\sin\alpha = \sin 234°$, $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg} 234°$.

А. $\alpha = 306°, \beta = 54°.$ **Б.** $\alpha = 54°, \beta = 306°.$
В. $\alpha = 126°, \beta = 36°.$ **Г.** $\alpha = 126°, \beta = 54°.$

5* Знайдіть значення виразу $\dfrac{2\sin\frac{9\pi}{5}-3\cos\frac{7\pi}{10}}{\sin\frac{4\pi}{5}+4\sin\frac{6\pi}{5}}$.

А. $\frac{5}{3}.$ **Б.** $\frac{1}{5}.$ **В.** $-\frac{5}{3}.$ **Г.** $-\frac{1}{3}.$

Тест 2

1° Знайдіть $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\sin\alpha=\frac{5}{13}$ і $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$

А. $-\frac{12}{5}.$ **Б.** $-\frac{5}{12}.$ **В.** $\frac{5}{12}.$ **Г.** $-\frac{60}{169}.$

2° Спростіть вираз: 1) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 1$; 2) $\frac{2\sin 40°\cos 40°}{\cos 10°}$.

А. 1) $\sin^2\alpha$; 2) $\operatorname{tg}10°$. **Б.** 1) 1; 2) 1.
В. 1) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha$; 2) $\operatorname{ctg}80°$. **Г.** 1) 1;2) –1.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

3° Знайдіть найбільше та найменше значення виразу
$3 + \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.
А. 3 і 2. **Б.** 4 і 3. **В.** 5 і 1. **Г.** 4 і 2.

4 Спростіть вираз: 1) $\dfrac{\cos 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha + \sin 4\alpha}$; 2) $\dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos 2\alpha}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - \sin^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

А. 1) $-\operatorname{tg}^2 2\alpha$; 2) $-\sin 2\alpha$. **Б.** 1) -1; 2) $\sin 2\alpha$.
В. 1) $-\operatorname{tg}^2 2\alpha$; 2) $2\cos\alpha$. **Г.** 1) -1; 2) $2\cos^2\alpha$.

5* Чи є рівність $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ тотожністю? **А.** Так. **Б.** Ні.

Тест 3

1° За графіком функції $y = \cos x$ вкажіть нулі цієї функції на відрізку $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

А. $-\pi$, 0, $\dfrac{3\pi}{2}$. **Б.** $-\dfrac{3\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2}$, 1.

В. $-\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}$. **Г.** $-\dfrac{3\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{3\pi}{2}$.

2° На яких з даних проміжків функція $y = \operatorname{tg} x$ набуває лише невід'ємних значень:

1) $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right)$; 2) $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$; 3) $\left[-\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right)$; 4) $[-\pi; 0]$?

А. 1); 2). **Б.** 1); 3). **В.** 2); 3). **Г.** 1); 4).

3° Яке рівняння не має розв'язків:
1) $2\sin x - 3 = 0$; 2) $\sin^2 x = 1$; 3) $4 - \cos x = 2$;
4) $3\cos^2 x + 1 = 0$; 5) $5\operatorname{tg} x - 20 = 0$; 6) $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{8}$?

А. 1); 2); 6). **Б.** 2); 4); 6).
В. 1); 3); 4). **В.** 2); 3); 5).

4 Знайдіть розв'язки рівняння $\sqrt{2}\sin x = -1$ на проміжку $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

А. $-\dfrac{\pi}{4}$; $-\dfrac{3\pi}{4}$; $\dfrac{5\pi}{4}$. **Б.** $\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{3\pi}{4}$; $\dfrac{5\pi}{4}$.

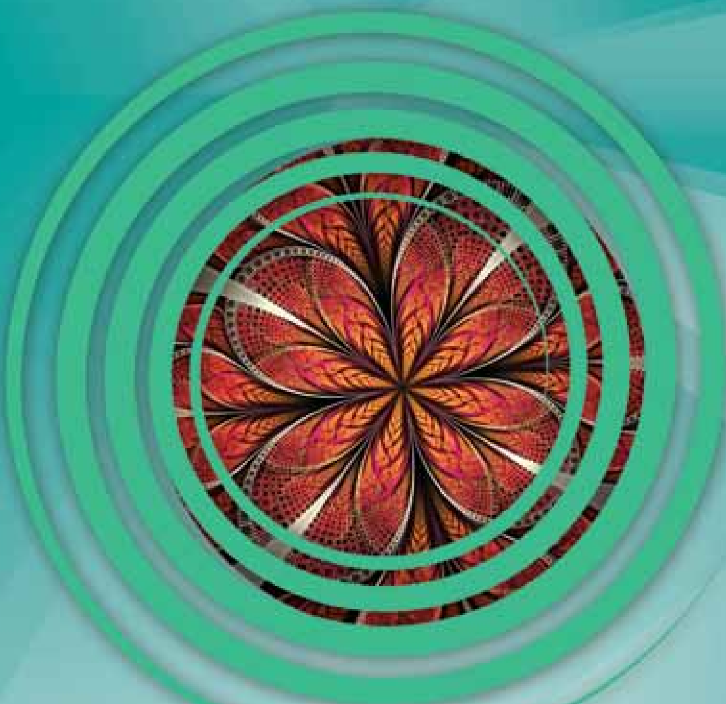
В. $-\dfrac{\pi}{4}$; $-\dfrac{3\pi}{4}$; $-\dfrac{5\pi}{4}$. **Г.** $-\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$; $-\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{2}$.

5* Знайдіть найбільше та найменше значення функції $y = \sin x \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

А. $\dfrac{1}{2}$ і $-\dfrac{1}{2}$. **Б.** 1 і -1. **В.** $\dfrac{1}{4}$ і $-\dfrac{1}{4}$. **Г.** 2 і -2.

Розділ 3

Похідна та її застосування



У розділі ви дізнаєтесь про основні поняття диференціального числення, а саме:

- що таке похідна функції та як її знаходять;
- які задачі можна розв'язувати за допомогою похідної.

§ 21 Задачі, що приводять до поняття похідної

1. ПОНЯТТЯ ПРО ГРАНИЦЮ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ

Поняття похідної є одним з фундаментальних понять математики. Розділ математики, у якому вивчається поняття похідної та її застосування до розв'язування прикладних задач, називають диференціальним численням.

Поняття похідної ґрунтується на понятті границі. Пояснимо зміст останнього на прикладі. Розглянемо функцію $f(x) = x^2$ і знайдемо її значення в точці $x = 2$. Маємо: $f(2) = 2^2 = 4$. Тепер обчислимо значення цієї функції в кількох точках ліворуч і праворуч від точки 2. Ліворуч: $x_1 = 1{,}8$, $f(x_1) = 1{,}8^2 = 3{,}24$; $x_2 = 1{,}9$, $f(x_2) = 1{,}9^2 = 3{,}61$; $x_3 = 1{,}99$, $f(x_3) = 1{,}99^2 = 3{,}9601$. Праворуч: $x_1' = 2{,}2$, $f(x_1') = 2{,}2^2 = 4{,}84$; $x_2' = 2{,}1$, $f(x_2') = 2{,}1^2 = 4{,}41$; $x_3' = 2{,}01$, $f(x_3') = 2{,}01^2 = 4{,}041$.

Бачимо, що ближче значення аргументу x (не важливо, ліворуч чи праворуч) наближаються до значення $x = 2$ (кажуть, що x прямує до двох), то ближчими до числа 4 стають відповідні значення функції $f(x) = x^2$ (кажуть, що x^2 прямує до чотирьох). Цей факт можна записати так: $x^2 \to 4$, якщо $x \to 2$, або символічно $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$.

Кажуть, що в даному разі число 4 є границею функції $f(x) = x^2$ у точці $x = 2$.

У загальному вигляді запис $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ означає, що число A є границею функції $f(x)$ у точці x_0. Цей запис читають так: границя функції $f(x)$, якщо x прямує до x_0, дорівнює A.

Границя функції в точці характеризує поведінку функції в деякому околі цієї точки й може дорівнювати значенню функції в даній точці (як у розглянутому вище прикладі), а може відрізнятися від нього.

Якщо границя функції в точці дорівнює значенню функції в цій точці, то функцію називають *неперервною в даній точці*. Отже, функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

Функція $f(x)$ називається *неперервною на інтервалі* $(a; b)$, якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Графіком неперервної функції є неперервна (суцільна) крива.

Прикладами неперервних на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ функцій є відомі вам функції $y = x^2, y = \sin x, y = \cos x$. Графіками цих функцій є неперервні криві: парабола, синусоїда та косинусоїда відповідно.

Рівність (1) водночас дає правило обчислення границь неперервних функцій: для обчислення границі функції $f(x)$, неперервної в точці x_0, коли $x \to x_0$, досить обчислити значення функції в цій точці, тобто знайти $f(x_0)$.

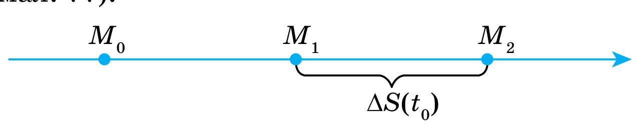
Ви вже мали змогу не один раз пересвідчитися в тому, що математичні поняття пов'язані з реальною дійсністю. Саме це дозволяє використовувати математику при розв'язуванні різноманітних прикладних задач природознавства та техніки.

Поняття похідної виникло в XVII ст. у зв'язку з необхідністю розв'язання ряду математичних і фізичних задач. Основними з них були визначення швидкості прямолінійного нерівномірного руху та побудова дотичної до довільної плоскої кривої. Першу із цих задач розв'язав І. Ньютон, а другу остаточно розв'язав Г. Лейбніц.

До розгляду цих задач, які стали класичними в диференціальному численні, ми зараз і приступаємо.

2. ЗАДАЧА ПРО МИТТЄВУ ШВИДКІСТЬ

Нехай точка рухається по прямій за законом $s = s(t)$, де s — довжина шляху, розглядувана від деякої початкової точки M_0, t — час, за який пройдено шлях s. Нехай M_1 — положення точки в момент t_0, а M_2 — у момент часу $t_0 + \Delta t$, і $\Delta s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ — довжина шляху, пройденого за час Δt (мал. 77).



Мал. 77

Відношення

$$\frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \qquad (2)$$

у механіці називають *середньою швидкістю* руху точки на відрізку шляху M_1M_2. Рух зі сталою середньою швидкістю називають *рівномірним*. Якщо середня швидкість є різною в різні проміжки часу, то рух називають *нерівномірним*. Очевидно, що за рівномірного руху точка за рівні проміжки часу проходить однакові відрізки шляху. За нерівномірного руху точка за рівні проміжки часу проходить різні відрізки шляху. Тому, щоб охарактеризувати нерівномірний рух, треба ввести поняття швидкості в певний момент часу, яку називають *миттєвою* швидкістю. Поняття миттєвої швидкості є важливим при вивченні різних процесів. Наприклад, важливо знати, якою була швидкість потягу в момент проїзду його повз світлофор; від швидкості входу спортсмена у воду під час стрибку залежить глибина його занурення; від швидкості запуску супутника залежить його вихід на задану орбіту тощо. При знаходженні миттєвої швидкості використовують середню швидкість руху за малий проміжок часу Δt.

Границю відношення (2), якщо $\Delta t \to 0$, називають величиною швидкості руху в точці M_1 або величиною миттєвої швидкості руху в момент часу t_0.

Якщо величину миттєвої швидкості в момент t_0 позначити через $v(t_0)$, то

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}. \quad (3)$$

Оскільки прискорення $a(t_0)$ — це швидкість зміни швидкості $v(t)$ у момент часу t_0, то

$$a(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}. \quad (4)$$

Якщо прискорення $a(t) = C$, C — стала, в довільний момент часу t, то рух є рівномірно прискореним при $C > 0$, рівномірно сповільненим при $C < 0$ і рівномірним, якщо $C = 0$.

Задача 1. Закон прямолінійного руху точки визначається функцією $s(t) = 2t^2 - 1$ (м), t — час (с). Знайдіть швидкість руху в момент часу $t_0 = 3$ (с).

Розв'язання. Скористуємося формулою (3).

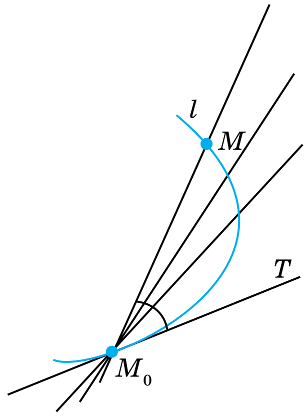
Спочатку знайдемо приріст шляху в точці $t_0 = 3$:

$$\Delta s(3) = s(3 + \Delta t) - s(3) = 2(3 + \Delta t)^2 - 1 - 17 = 12\Delta t + 2\Delta t^2.$$

Далі $\dfrac{\Delta s(3)}{\Delta t} = 12 + 2\Delta t$, і тоді $v(3) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s(3)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} (12 + 2\Delta t) = 12$ (м/с).

3. ЗАДАЧА ПРО ДОТИЧНУ ДО КРИВОЇ

Вам уже відоме поняття дотичної до кола, як прямої, що має з колом одну спільну точку. Однак у такому вигляді означення дотичної не можна поширити на незамкнені криві. Справді, побудуйте параболу, рівняння якої $y = x^2$. Осі координат мають із цією кривою по одній спільній точці, але вісь ординат (пряма $x = 0$) не є дотичною до цієї кривої. Ще один приклад. Пригадайте графік функції $y = \sin x$. Прямі $y = \pm 1$ мають з ним безліч спільних точок (а не одну!) і є дотичними до синусоїди в кожній із цих точок.



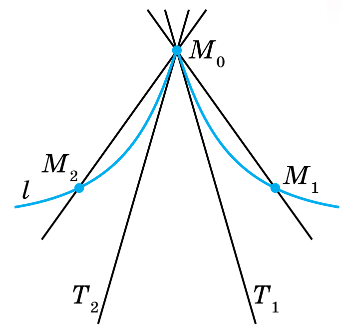
Мал. 78

Виникає запитання: яким же має бути означення дотичної до кривої, яке було прийнятним як для замкнених, так і для незамкнених кривих?

Спробуємо ввести таке означення.

Розглянемо довільну криву l (мал. 78).

Візьмемо на ній дві точки M_0 та M, проведемо через них пряму M_0M. Цю пряму називають *січною*. Точка M може бути розміщена ліворуч від точки M_0. Уявіть, що точка M рухається вздовж кривої l і зліва, і справа до точки M_0. Якщо при цьому січна M_0M, приймаючи різні положення, прямуватиме до деякого граничного положення M_0T, за умови, що величина кута MM_0T прямує до нуля, то пряму M_0T називають *дотичною* до кривої l у точці M_0. Цілком очевидно, що до кривої в одній точці може існувати тільки одна дотична.



Мал. 79

Чи існує дотична в точці M_0 до кривої, зображеної на малюнку 79?

У цьому разі січні M_0M_1 та M_0M_2 мають різні граничні положення M_0T_1 та M_0T_2, і тому дотична до цієї кривої в точці M_0 не існує.

З'ясуємо зміст поняття дотичної до кривої.

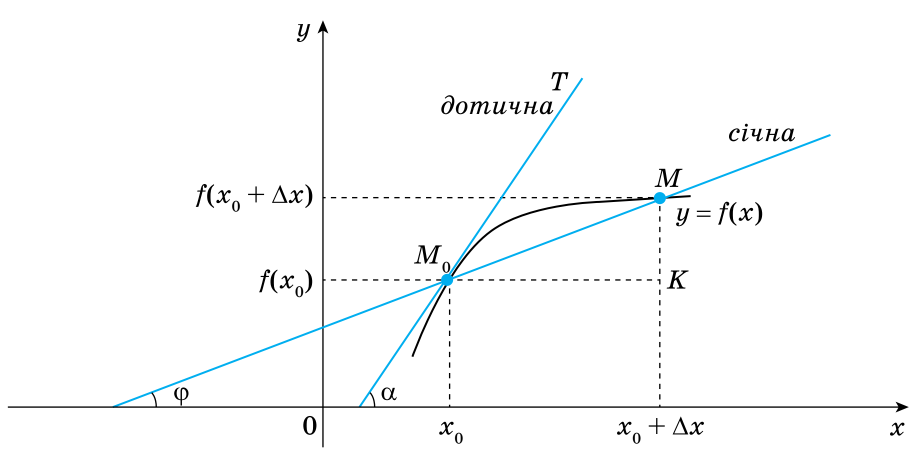
Розглянемо графік функції $y = f(x)$. Припустимо, що в точці $M_0(x_0; f(x_0))$ цієї кривої існує дотична, не паралельна осі Oy, яка утворює з додатним напрямом осі Ox кут α. Нехай $M\left(x_0 + \Delta x;\ f\left(x_0 + \Delta x\right)\right)$ — ще одна точка цієї кривої, і січна M_0M утворює з додатним напрямом осі Ox кут φ (мал. 80).

Цілком зрозуміло, що для знаходження дотичної до кривої досить знайти її кутовий коефіцієнт $k = \mathrm{tg}\alpha$.

З $\Delta\ M_0MK$ знаходимо, що

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{MK}{M_0K} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо Δx спрямувати до нуля, то $x_0 + \Delta x \to x_0$ і точка M наближатиметься до точки M_0, при цьому $\varphi \to \alpha$, $\mathrm{tg}\varphi \to \mathrm{tg}\alpha$, і січна M_0M займе своє граничне положення — положення дотичної M_0T до кривої $y = f(x)$ у точці M_0.



Мал. 80

Отже, кутовий коефіцієнт $k = \text{tg}\alpha$ дотичної M_0T до графіка функції $y = f(x)$ у точці M_0 можна знайти за формулою

$$k = \text{tg}\alpha = \lim_{\varphi \to \alpha} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (5)$$

Якщо $k > 0$, тобто $\text{tg}\alpha > 0$, то кут α гострий; якщо $k < 0$, тобто $\text{tg}\alpha < 0$, то кут α — тупий; якщо $k = 0$, тобто $\text{tg}\alpha = 0$, то $\alpha = 0$, і дотична до кривої $y = f(x)$ у відповідній точці паралельна осі Ox.

Зверніть увагу:
в тому разі, коли дотична до кривої $y = f(x)$ паралельна осі Oy, тобто $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, то $k = \text{tg}\alpha = +\infty$. Це означає, що границя у формулі (5) в цьому випадку нескінченна.

Задача 2. Доведіть, що дотичною до параболи $y = x^2$ у точці $O(0;\ 0)$ є вісь абсцис.

Розв'язання. Знайдемо кутовий коефіцієнт дотичної до даної кривої у точці $O(0;\ 0)$.

Маємо $\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = (0 + \Delta x)^2 - 0^2 = \Delta x^2$.

Тому $\dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x^2}{\Delta x} = \Delta x$ і $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$, тобто дотичною до параболи $y = x^2$ у точці $O(0;\ 0)$ є вісь абсцис.

Дізнайтеся більше

Задача.
Нехай точка рухається рівномірно прискорено з прискоренням a та початковою швидкістю v_0. Знайдіть значення швидкості її руху в момент часу t_0.

Розв'язання.
Відомо, що залежність шляху від часу при рівномірно прискореному русі визначається за формулою $s = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$.

Знайдемо приріст шляху в точці t_0:

$$\Delta s(t_0) = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = v_0(t_0 + \Delta t) + \frac{a(t_0 + \Delta t)^2}{2} - \left(v_0 t_0 + \frac{a t_0^{\,2}}{2}\right) =$$

$$= v_0 \Delta t + a t_0 \Delta t + \frac{a \Delta t^2}{2}.$$

Далі $\dfrac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} = v_0 + a t_0 + \dfrac{a \Delta t}{2}$ і, нарешті, $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} (v_0 + a t_0 + \dfrac{a \Delta t}{2}) = v_0 + a t_0$,

тобто дістали відому у фізиці формулу $v(t_0) = v_0 + a t_0$.

Пригадайте головне

1. Наведіть приклади задач, які приводять до поняття похідної.
2. Якщо закон руху визначається функцією $s = s(t)$, то що означає величина $\Delta s(t_0)$?
3. Що називають середньою швидкістю прямолінійного руху точки?
4. Як можна знайти миттєву швидкість руху точки в момент часу t_0?
5. Як визначається прискорення руху точки в момент часу t_0?
6. Що розуміють під дотичною до кривої?
7. Що таке кутовий коефіцієнт дотичної і як його знайти?
8. Для яких функцій дотична до графіка збігається із самим графіком? Наведіть приклади.
9. Чи може одна і та сама пряма бути дотичною до графіка функції в кількох точках? Наведіть приклади.

Розв'яжіть задачі

403'. За даним законом прямолінійного руху $s = s(t)$ (м), t — час (с), знайдіть середню швидкість v_c (м/с) на проміжку часу $[t_0; t_0 + \Delta t]$ та миттєву швидкість $v(t)$ (м/с) в довільний момент часу t:
1) $s(t) = 9t + 1, t_0 = 3, \Delta t > 0$; 2) $s(t) = t^2 - 1, t_0 = 1, \Delta t = 2$;

3) $s(t) = t^2 + 3t + 2, t_0 = \frac{1}{2}, \Delta t = 1$.

404'. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v = 3t^2 - 1$ (м/с), t — час (с). Знайдіть середнє прискорення a_c (м/с²) на проміжку часу $[2; 2 + \Delta t]$ та прискорення в момент часу $t_0 = 2$, якщо:
1) $\Delta t = 2$; 2) $\Delta t = 0{,}1$; 3) $\Delta t = 0{,}01$.

405'. Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до параболи $y = 4x^2$ у точці з абсцисою:
1) $x_0 = 1$; 2) $x_0 = -2$; 3) $x_0 = 3$.

406°. Закон прямолінійного руху визначається функцією $s(t) = 2t + 1$ (м), t — час (с). Чи є цей рух рівномірним? Намалюйте графік цього руху.

407°. Знайдіть кут між дотичною до графіка функції $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ у точці з абсцисою x_0 та додатним напрямом осі Ox:

1) $x_0 = -\frac{3}{4}$; 2) $x_0 = -\frac{1}{2}$; 3) $x_0 = -1$.

408. Тіло обертається навколо осі за законом $\varphi(t) = 3t^2 - 12t + 2$ (рад), t — час (с). Знайдіть кутову швидкість $\omega(t)$ обертання в довільний момент часу t і при $t = 4$ (с).

409. Знайдіть точки кривої $y = f(x)$, у яких дотична паралельна заданій прямій:

1) $y = x^2 - 2x, y = 3$;

2) $y = x^2 - 6x + 4, y = 2x$.

410*. Якщо закон прямолінійного руху визначається квадратичною функцією $s(t) = at^2 + bt + c$ (м), t — час (с), то такий рух є рівномірним. Доведіть.

411*. Знайдіть точки, у яких дотичні до кривих $y = x^3 - x - 1$ та $y = 3x^2 - 4x + 1$ паралельні.

Проявіть компетентність

412. Закон прямолінійного руху матеріальної точки в залежності часу t (с) визначається функцією $S(t) = 3t^2 - 6t$ (м). У який момент часу тіло зупиниться?

413. На кривій $y = x^2 + 2x$ знайдіть точку, в якій дотична паралельна осі Ox.

414. Пряма $y = -7x + 3$ паралельна дотичній до параболи $y = 2x^2 + x$. Знайдіть координати точки дотику.

§ 22 Похідна функції, її механічний та геометричний зміст

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$, а точки x_0 та $x_0 + \Delta x$ належать цьому інтервалу, x_0, $(x_0 + \Delta x) \in (a;b)$. Величину $\Delta x \neq 0$ називають *приростом аргументу*, а різницю $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — *приростом функції* в точці x_0.

Зазначимо, що приріст аргументу Δx може бути додатним або від'ємним, а приріст функції $\Delta f(x_0)$ може бути додатним, від'ємним або ж дорівнювати нулю.

Задача 1. Знайдіть приріст функції $f(x)=3x^2+2$ в точці x_0, якщо:

1) $x_0=2$, $\Delta x=0{,}1$; 2) $x_0=1$, $\Delta x=-0{,}01$.

Розв'язання. Маємо

$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=3(x_0+\Delta x)^2+2-3x_0^2-2=3\Delta x(2x_0+\Delta x)$.

Зверніть увагу, що $\Delta f(x_0)$ є функцією від Δx.

І тоді

1) $\Delta f(2)=0{,}3(4+0{,}1)=1{,}23$; 2) $\Delta f(1)=-0{,}03(2-0{,}01)=-0{,}0597$.

За аналогією зі середньою швидкістю руху матеріальної точки відношення

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

природно назвати *середньою швидкістю зміни функції* $f(x)$ у точці x_0, а границю цього відношення, якщо $\Delta x\to 0$, — *швидкістю зміни функції* $f(x)$ у точці x_0.

Якщо існує границя відношення приросту функції $f(x)$ у точці x_0 до приросту аргументу Δx, за умови, що $\Delta x\to 0$, то цю границю називають похідною функції в точці x_0 і позначають $f'(x_0)$, тобто:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Таким чином, $f'(x_0)$ — це швидкість зміни функції $f(x)$ у точці x_0.

Ми вже розглянули задачу про миттєву швидкість прямолінійного руху матеріальної точки та задачу про дотичну до графіка функції, які приводять до поняття похідної. Ці задачі дозволяють сформулювати механічний та геометричний зміст похідної (див. формули (3), (4), (5), §21).

Механічний зміст похідної: величина миттєвої швидкості руху в момент часу t_0 дорівнює значенню похідної від шляху $s=s(t)$ у точці t_0: $v(t_0)=s'(t_0)$;

величина прискорення руху в момент часу t_0 дорівнює значенню похідної від швидкості $v=v(t)$ у точці t_0: $a(t_0)=v'(t_0)$.

Геометричний зміст похідної: похідна $f'(x_0)$ функції $f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0, тобто $k=f'(x_0)$.

Знайдемо рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці $M_0(x_0;y_0), y_0=f(x_0)$ (див. мал. 80).

Рівняння дотичної шукатимемо у вигляді $y=kx+b$, де k і b — невідомі сталі.

Оскільки кутовий коефіцієнт дотичної $k=f'(x_0)$, то матимемо рівняння $y=f'(x_0)x+b$. Залишається знайти b. Точка $M_0(x_0;y_0)$ належить дотичній, тому $y_0=f'(x_0)x_0+b$, звідки $b=y_0-f'(x_0)x_0$.

Таким чином, шуканим рівнянням дотичної є

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0). \qquad (2)$$

Функція $f(x)$, яка має похідну в точці x_0, називається *диференційовною* в цій точці.
Функція $f(x)$ називається *диференційовною на інтервалі* $(a; b)$, якщо вона має похідну в кожній точці цього інтервалу.

Якщо функція $f(x)$ має похідну в кожній точці x інтервалу $(a;b)$, то матимемо

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(для довільної точки x приріст функції та похідну можна позначати Δy та y' відповідно).

Операцію знаходження похідної називають *диференціюванням* функції.

Схема знаходження похідної $f'(x)$ за означенням.
1. Задати приріст аргументу $\Delta x \neq 0$ і знайти значення функції $f(x+\Delta x)$.
2. Знайти приріст функції $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.
3. Скласти відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
4. Знайти границю $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Зауважимо, що цю схему можна застосувати і для знаходження похідної $f'(x_0)$, тільки замість x слід писати x_0.

Задача 2. Знайдіть похідну функції $f(x) = ax^2 + bx + c$, де a, b і c — сталі.

Розв'язання. За схемою знаходження похідної для довільного значення x та $\Delta x \neq 0$ дістаємо:

1. $f(x+\Delta x) = a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c = ax^2 + bx + c + 2ax\Delta x + a\Delta x^2 + b\Delta x$.
2. $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 2ax\Delta x + a\Delta x^2 + b\Delta x$.
3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + a\Delta x + b$.
4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2ax + a\Delta x + b) = 2ax + b$, тобто

$$(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b. \qquad (3)$$

За цією формулою можна знайти похідну будь-якої квадратичної функції. Зафіксуємо деякі частинні випадки:

а) якщо $a = 0$, $c = 0$, $b = 1$, то $x' = 1$, тобто похідна функції x дорівнює 1;
б) якщо $a = 1$, $c = 0$, $b = 0$, то $(x^2)' = 2x$, тобто похідна функції x^2 дорівнює $2x$;
в) якщо $a = 0$, $b = 0$, то $c' = 0$, тобто похідна сталої функції дорівнює нулю. Такого результату і слід було чекати, адже якщо функція стала, то швидкість її зміни дорівнює нулю.

До такого ж висновку можна дійти, якщо врахувати, що графіком сталої функції є пряма, паралельна осі Ox, тобто дотична в кожній точці графіка збігається із самим графіком функції, і тому кутовий коефіцієнт дотичної в довільній точці графіка дорівнює нулю: $k = f'(x) = c' = 0$.

Задача 3. Знайдіть швидкість зміни функції $f(x) = x^2 + 2x - 1$ у точці x_0, якщо:
1) $x_0 = 3{,}1$; 2) $x_0 = -5$.

Розв'язання. У цьому разі спочатку доцільно визначити швидкість зміни заданої функції в довільній точці x, тобто знайти $f'(x)$, а потім знайти значення цієї похідної у вказаних точках.
Для знаходження похідної $f'(x)$ використаємо формулу (3), поклавши в ній $a = 1, b = 2, c = -1$, тобто $f'(x) = (x^2 + 2x - 1)' = 2x + 2$ для довільного значення x.
Тоді
1) $f'(3{,}1) = 2 \cdot 3{,}1 + 2 = 8{,}2$; 2) $f'(-5) = 2 \cdot (-5) + 2 = -8$.

Задача 4. Закон прямолінійного руху матеріальної точки залежно від часу t (с) визначається функцією $s(t) = 4t^2 + 1$ (м). Знайдіть швидкість v (м/с) та прискорення a (м/с^2) в момент часу $t = t_0$ (с), якщо:
1) $t_0 = 5$; 2) $t_0 = 10$.

Розв'язання. Відповідно до механічного змісту похідної $v(t_0) = s'(t_0)$ і $a(t_0) = v'(t_0)$. Похідні заданої функції $s(t)$ та $v(t)$ знайдемо за формулою (3): $s'(t) = 8t$, тоді $v(t) = 8t$, $a(t) = v'(t) = 8$ для довільного значення $t > 0$.
Оскільки прискорення руху є сталим і додатним, то розглядуваний рух є рівномірно прискореним.
І тоді 1) $v(5) = 8 \cdot 5 = 40$ (м/с), $a(5) = 8$ (м/с^2);
2) $v(10) = 8 \cdot 10 = 80$ (м/с), $a(10) = 8$ (м/с^2).

Задача 5. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = 2x^2 - x + 5$ у точці з абсцисою $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Скористаємося рівнянням (2): $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.
Ординату y_0 точки дотику знайдемо з рівняння кривої $y = 2x^2 - x + 5$, підставивши сюди замість x задане значення $x_0 = -\frac{1}{2}$: $y_0 = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 5 = 6$.
Визначимо кутовий коефіцієнт дотичної , врахувавши, що похідна заданої функції відповідно до формули (3) є $f'(x) = 4x - 1$ (у цьому разі $a = 2,\ b = -1,\ c = 5$). Отже, $k = f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -3$. Таким чином, шуканим рівнянням дотичної є

$y - 6 = -3\left(x + \frac{1}{2}\right)$, або $6x + 2y - 9 = 0$.

Дізнайтеся більше

Крім розглянутих у §21 задач про миттєву швидкість і дотичну до кривої, можна навести ще чимало прикладних задач, у яких необхідно обчислити швидкість зміни деякої функції, тобто задач, які приводять до поняття похідної.

Наведемо деякі з них:

1) Сила змінного струму $I(t)$ в момент часу t є похідною кількості електрики $q(t)$:

$$I(t) = q'(t).$$

2) Теплоємність тіла $C(\tau)$ за температури τ є похідною кількості тепла $Q(\tau)$, що отримує тіло:

$$C(\tau) = Q'(\tau).$$

3) Лінійна густина $\rho(x)$ неоднорідного стержня в довільній точці x є похідною маси $m(x)$ стержня:

$$\rho(x) = m'(x).$$

4) Швидкість $v(t)$ зростання популяції в момент часу t є похідною її чисельності $p(t)$:

$$v(t) = p'(t).$$

5) Швидкість $v(t)$ хімічної реакції в момент часу t є похідною кількості речовини $m(t)$:

$$v(t) = m'(t).$$

6) Продуктивність праці $P(t)$ виробника в момент часу t є похідною обсягу $W(t)$ виробленої продукції:

$$P(t) = W'(t)$$

(економічний зміст похідної).

Задача. Кількість одиниць виробленої майстром продукції протягом робочого часу визначається функцією $W(t) = 2t^2 - t$, $t \in [8;16]$, t — час (год).
Знайдіть продуктивність праці майстра в момент часу $t_0 = 10$ (год).

Розв'язання. Скористаємося задачею 6: $P(10) = W'(10)$. Якщо врахувати, що $W'(t) = 4t - 1$ (див. формулу (3)), то $P(10) = 4 \cdot 10 - 1 = 39$ (од.).

Пригадайте головне

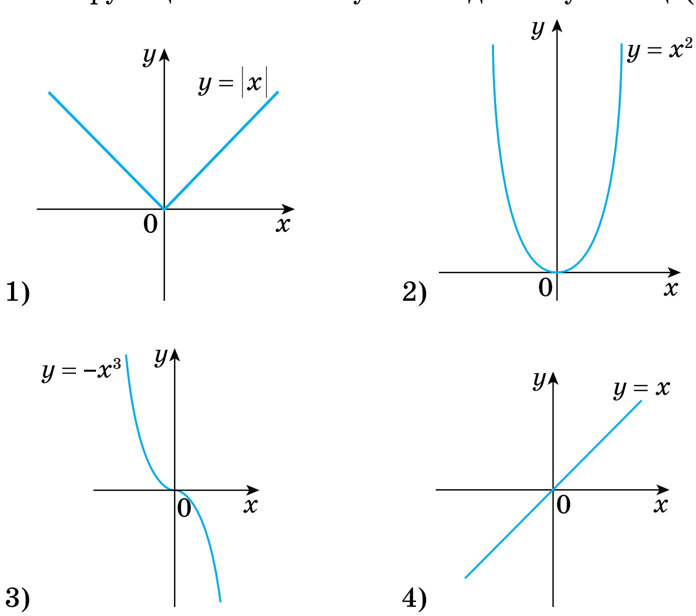
1. Що називають приростом аргументу та приростом функції $f(x)$ у точці x_0?
2. Сформулюйте означення похідної функції $f(x)$ у точці x_0.
3. Що таке швидкість зміни функції в точці x_0?
4. Який механічний зміст похідної?
5. Який геометричний зміст похідної?
6. Який вигляд має рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0?

7. Як називають операцію знаходження похідної функції $f(x)$?
8. За якою схемою знаходять похідну $f'(x)$?
9. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$, якщо вона: паралельна осі Ox; паралельна осі Oy?

Розв'яжіть задачі

415'. Похідна якої функції дорівнює 0; −1; $2x$?

416'. Яка з функцій на малюнку 81 має дотичну в точці (0; 0)?



Мал. 81

417'. Знайдіть приріст функції $f(x) = 3x^2 + 1$ у точці x_0:

1) $x_0 = 1, \Delta x = 0,1$; 2) $x_0 = -1, \Delta x = 0,5$.

418'. Користуючись означенням, знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = ax + b$, a, b — сталі;
2) $f(x) = 5x^2 + 1$;
3) $f(x) = \frac{x^2}{2} - 1$;
4) $f(x) = 4x^3$.

419'. Користуючись означенням, обчисліть значення похідної функції $f(x) = 3x^2 + 1$ у точці: 1) 1; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) 3; 4) x_0.

420°. Знайдіть нулі похідної функції:

1) $y = 2x^2 - 1$;
2) $y = x^2 - 6x + 19$;
3) $y = 104 + 2x - x^2$;
4) $y = (x+1)(x-2)$.

421°. Закон прямолінійного руху точки визначається функцією $s(t) = 4 + 12t - 0{,}25t^2$ (м), t — час (с). Знайдіть швидкість руху точки в момент часу $t = 8$ (с). У який момент часу t точка зупиниться?

422°. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0:

1) $y = 2x^2, x_0 = 1; 0$;

2) $y = x^2 - 2x, x_0 = 3$;

3) $y = x - 3x^2, x_0 = 2$;

4) $y = 2x^2 + 1, x_0 = 1$.

423. У якій точці графіка функції $f(x) = x^2 - x$ дотична нахилена до осі абсцис під кутом α:

1) $\alpha = 45°$;
2) $\alpha = 135°$;
3) $\alpha = 60°$?

424. Пряма $y = -3x + 1$ паралельна дотичній до параболи $y = x^2 - x$. Знайдіть координати точки дотику.

425*. Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через точку (2; −1) і дотикається до кривої $y = x^2 - 4$.

426*. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 1 + t + t^2$ (м), t — час (с). Знайдіть діючу силу та кінетичну енергію руху через 2 с після початку руху, якщо маса тіла становить 2 кг.

427*. Точка здійснює прямолінійний рух із прискоренням 4 см/с^2. Знайдіть закон руху, якщо при $t = 1$ (с) точка перебувала на відстані 2 см від початку руху, а в момент $t = 3$ (с) вона мала швидкість 5 см/с.

Проявіть компетентність

428. У якій із точок: $x = 0{,}5$ чи $x = 2$ — функція $y = x^2$ змінюється швидше?

429. Чи є пряма $y = x - 4$ дотичною до кривої $y = x^2 - 3x$?

430. У якій точці кривої $y = -x^2 + 2x - 3$ дотична нахилена до осі Ox під кутами 0° та 45°?

431. Задано закони прямолінійного руху двох матеріальних точок $S_1(t) = 4t^2 - 3$ (м) та $S_2(t) = t^3$ (м), t — час (с). Знайдіть проміжок часу, в якому швидкість першої точки більша за швидкість другої точки.

§ 23 Основні правила диференціювання функцій

При знаходженні похідних функцій використовують теореми, які ми розглянемо без доведення.

Теорема 1 **(похідна суми та різниці функцій)**

Похідна суми та різниці двох диференційовних у точці x функцій $u(x)$ та $v(x)$ існує і дорівнює сумі та різниці їх похідних у цій точці, тобто

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x). \qquad (1)$$

Ця теорема має місце для будь-якої скінченної кількості диференційовних функцій.

Теорема 2 **(похідна добутку функцій)**

Похідна добутку двох диференційовних у точці x функцій $u(x)$ і $v(x)$ існує та обчислюється за формулою

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \qquad (2)$$

Ця теорема правильна для будь-якої скінченної кількості диференційовних функцій.

Наслідок. **Якщо функція** $u(x)$ **диференційовна в точці x, а C — стала, то похідна їх добутку існує і**

$$(Cu(x))' = Cu'(x),$$

тобто **сталий множник можна виносити за знак похідної.**

Справедливість цього твердження випливає з теореми 2, якщо $v(x) = C$, C — стала, оскільки

$$(Cu(x))' = C'u(x) + Cu'(x) = Cu'(x),$$

бо $C' = 0$.

Теорема 3 **(похідна частки функцій)**

Похідна частки двох диференційовних у точці x функцій $u(x)$ і $v(x)$, якщо $v(x) \neq 0$, існує та обчислюється за формулою

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \qquad (3)$$

Зверніть увагу:
частинні випадки формули (3), корисно мати на увазі під час практичного диференціювання функцій.

1. Якщо $u(x) = C$, C — стала, то за формулою (3) знайдемо:

$$\left(\frac{C}{v(x)}\right)' = -C\frac{v'(x)}{v^2(x)}. \qquad (4)$$

2. Якщо $v(x) = C \neq 0, C$ — стала, то формулою (3) користуватися немає потреби, бо відповідно до наслідку до теореми 2:

$$\left(\frac{u(x)}{C}\right)' = \frac{1}{C}u'(x). \qquad (5)$$

При диференціюванні функцій корисною стане таблиця 10.

Таблиця 10

Таблиця похідних

№	Функція	Похідна
1	$y = C$, C — стала	$y' = 0$
2	$y = x^p, p \in \mathbf{Z}$	$y' = px^{p-1}$
3	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
5	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
6	$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
7	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Задача 1. Знайдіть похідну функції: 1) $y = x^4$; 2) $y = 5x^2$; 3) $y = 6x^3 - x + 1$.

Розв'язання.

1) Відповідно до таблиці похідних (п. 2) $y' = (x^4)' = 4x^3$.

2) $y' = (5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x$.

Знаходячи похідну, спочатку сталий множник 5 винесли за знак похідної, а потім знайшли похідну x^2 за таблицею похідних.

3) Застосуємо спочатку правило диференціювання суми та різниці функцій, а потім знайдемо похідну кожного доданка відомим способом:
$y' = (6x^3 - x + 1)' = (6x^3)' - x' + 1' = 18x^2 - 1 + 0 = 18x^2 - 1$.

Задача 2. Знайдіть похідну функції:

1) $y = 2x(x^2 + 1)$;

2) $y = \dfrac{x-4}{5x-2}$.

Розв'язання.

1) Сталий множник винесемо за знак похідної і за теоремою про похідну добутку функцій дістанемо:

$$y' = 2(x'(x^2 + 1) + x(x^2 + 1)') = 2(x^2 + 1 + 2x^2) = 2(3x^2 + 1).$$

2) Скористаємося теоремою про похідну частки функцій:

$$y' = \frac{(x-4)'(5x-2) - (x-4)(5x-2)'}{(5x-2)^2} = \frac{5x - 2 - 5(x-4)}{(5x-2)^2} = \frac{18}{(5x-2)^2};$$

Дізнайтеся більше

Значний внесок у розвиток теорії функцій зробив відомий український математик, доктор фізико-математичних наук, професор, член-кореспондент АН УРСР, заслужений діяч науки Української РСР, Соросівський професор **Владислав Кирилович Дзядик** (1919–1998). Він народився в смт. Сахновщина Харківської обл. З 1960 р. працював в Інституті математики НАН України, де у 1963 р. створив відділ теорії функцій. Плідну наукову роботу Владислав Кирилович поєднував з викладацькою діяльністю. У 1962–1968 рр. він — завідувач кафедри математичного аналізу, а з 1967 р. — професор Київського університету імені Тараса Шевченка.

Пригадайте головне

1. Які арифметичні операції можна виконувати над диференційовними функціями?
2. Сформулюйте теореми про похідну суми, різниці, добутку та частки двох функцій. Назвіть відповідні формули диференціювання.
3. Який вигляд має формула для похідної суми та добутку трьох функцій?
4. Запишіть таблицю похідних елементарних функцій.

Розв'яжіть задачі

432'. Що треба поставити замість знака *, щоб рівність була правильною:

1) $\left(x^3\right)' = 3*$; 3) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{*}{x^2}$; 5) $(*)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

2) $\left(*x^5\right)' = 10x^4$; 4) $(*)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 6) $(*)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$?

433'. Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^5 \cdot x^{-2}$; 3) $y = 2^5$; 5) $y = \dfrac{x^3 \cdot x^{-2}}{x}$;

2) $y = \dfrac{x^7}{x^3}$; 4) $y = x^2 \cdot x^6 \cdot x^{-4}$; 6) $y = x \cdot x^{-2} - \dfrac{2x^3}{x}$.

434°. Використовуючи правила диференціювання та таблицю похідних, знайдіть похідну функції:

1) $y = -4x^3 + 5$; 5) $y = (x^2 - x)(x^3 + x)$; 9) $y = 2\sin x$;

2) $y = x^5 - 3x^2 + x$; 6) $y = \dfrac{x^3 + x^2 + 16}{x}$; 10) $y = \dfrac{1}{3}\cos x$;

3) $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$; 7) $y = \dfrac{1+2x}{3-5x}$; 11) $y = 3\sin x + 5\cos x$;

4) $y = x^2(x^3 - 1)$; 8) $y = \dfrac{3x^2 + x + 1}{2x + 1}$; 12) $y = \mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x$.

435°. Знайдіть значення похідної функції $f(x)$ у вказаних точках:

1) $f(x) = x^2 - 3x,\ x = -3;\ \dfrac{1}{2};\ 2;$ 3) $f(x) = x - 4\sqrt{x},\ x = 1;\ 4;\ 0{,}01;$

2) $f(x) = (x-1)(x+2),\ x = 0;\ -1;\ 2;$ 4) $f(x) = \dfrac{3-x}{2+x},\ x = 0;\ -3$.

436°. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = 3t + 2t^2 + t^3$ (м), t — час (с). Знайдіть швидкість і прискорення в момент часу $t = 3$ (с).

437°. Два тіла рухаються прямолінійно. Одне за законом $s(t) = t^3 + t^2 - 2$ (м), t — час (с), друге — за законом $s(t) = t^2 + 1$ (м), t — час (с). Знайдіть час, коли швидкості цих тіл будуть рівні.

438°. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = x^2 + x + 1, x_0 = 1$; 3) $f(x) = \dfrac{1}{x}, x_0 = 3$; 5) $f(x) = \sin x, x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

2) $f(x) = x - 3x^2, x_0 = 2$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, x_0 = -2$; 6) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 1$.

439°. Для функції $f(x)$ обчисліть значення виразу:

1) $f(x)=\dfrac{2x^3-x-3}{3}$, $f'(-1)+f'(1)$;

2) $f(x)=\dfrac{1+2x}{1+3x}$, $f'(0)+f'(1)$;

3) $f(x)=\dfrac{x^2}{1+6x}$, $f'(0)+f'(1)$;

4) $f(x)=x\sin x$, $2f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-f'(\pi)$.

440°. Знайдіть точки кривих, у яких дотичні до них паралельні осі абсцис: 1) $y=2x^3-24x-2$; 2) $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+6x-7$.

441°. За яких значень x:
1) $f'(x)>0$, якщо $f(x)=x^2-8x$;
2) $f'(x)<0$, якщо $f(x)=x^3-3x$;
3) $f'(x)=0$, якщо $f(x)=3\cos x$?

442. Тіло масою 3 кг рухається за законом $s(t)=t^3-3t^2-t$ (м), t — час (с). Знайдіть, яка сила діятиме на тіло через 2 (с) після початку руху.

443. Розв'яжіть нерівність: 1) $f'(x)\le\varphi'(x)$, якщо $f(x)=2$, $\varphi(x)=x-x^2$;

2) $f'(x)>\varphi'(x)$, якщо $f(x)=x^3+x-5, \varphi(x)=3x^2+x+5$.

444. Знайдіть точки, у яких дотичні до кривої $y=f(x)$ паралельні заданій прямій:
1) $y=x^2-6x+4, y=2x$;

2) $y=x^3-6x^2+3x, y=3x+1$;

3) $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2, y=6x$;

4) $y=x^3-3x^2$, $y=0$.

445. Основа паралелограма a змінюється за законом $a(t)=2+3t$ (см), а висота h — за законом $h(t)=3t-1$ (см), t — час (с). Знайдіть швидкість зміни його площі в момент часу $t=2$ (с).

446. Покажіть, що якщо S — площа круга, а r — його радіус, то похідна $S'(r)$ дорівнює довжині кола.

447. У якій з точок: $x_1=1$ чи $x_2=2$ — функція $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3+x^2$ зростає швидше?

448. Знайдіть швидкість гармонічного коливного руху, якщо $s(t)=2\sin t$, t — час (с). За якого значення t ця швидкість буде найменшою?

449*. Чи правильно те, що похідною парної функції є непарна функція, а непарної — парна? Наведіть приклади.

450*. Переконайтеся, що дотична, проведена в довільній точці гіперболи $y=\dfrac{4}{x}$, при перетині з осями координат утворює трикутник сталої площі.

Проявіть компетентність

451. Переконайтеся, що будь-яка дотична до кривої $y = x^5 + 10x - 3$ утворює з віссю Ox гострий кут.

452. Знайдіть функцію $f(x)$, якщо відома її похідна:

1) $f'(x) = 3x^2 - 1$; 2) $f'(x) = -\sin x + 2x$; 3) $f'(x) = \cos x + x^2$.

453. Сторони a і b прямокутника змінюються за законами: $a = 2t + 1$ (см), $b = 3t + 2$ (см), t — час (с). З якою швидкістю змінюються його площа та периметр у момент часу $t = 3$ (с)?

454. Покажіть, що похідна площі квадрата зі змінною стороною x дорівнює його півпериметру.

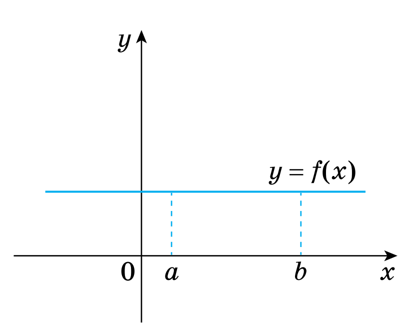
§ 24 Ознаки сталості, зростання і спадання функції

1. ОЗНАКА СТАЛОСТІ ФУНКЦІЇ

Ми вже ознайомилися з деякими застосуваннями похідної до розв'язування прикладних задач. Важливим призначенням похідної є дослідження властивостей функцій, зокрема, встановлення інтервалів сталості та монотонності функцій. Раніше для цього ми користувалися відповідними означеннями.

Виявляється, що знак похідної функції на певному інтервалі визначає, чи є функція сталою, зростаючою або спадною на цьому інтервалі.

Подивіться на малюнок 82. Дотична в довільній точці графіка функції збігається із самим графіком і утворює з додатним напрямом осі Ox кут $\alpha = 0°$, тобто похідна функції в кожній точці інтервалу $(a; b)$ дорівнює нулю, і функція є сталою на цьому інтервалі.



Мал. 82

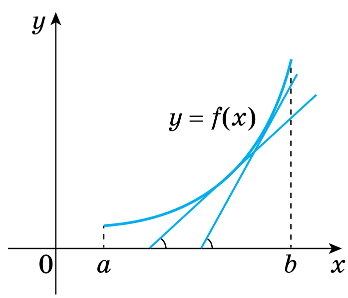
Звідси робимо висновок:

Якщо $f'(x) = 0$ на інтервалі $(a; b)$, то функція $f(x)$ є сталою на цьому інтервалі.

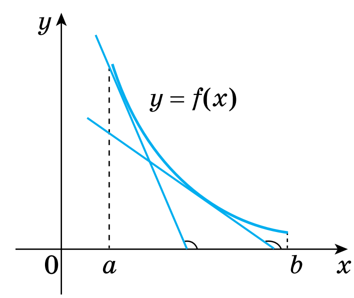
Це твердження називають *ознакою сталості* функції $f(x)$ на інтервалі $(a; b)$.

2. ОЗНАКИ МОНОТОННОСТІ ФУНКЦІЙ

Звернемось до малюнків 83 і 84. На малюнку 83 дотична в кожній точці кривої $y = f(x)$ утворює з додатним напрямом осі Ox гострий кут, отже, $f'(x) > 0$ на інтервалі $(a; b)$ і функція $f(x)$ зростає на інтервалі $(a; b)$.



Мал. 83



Мал. 84

На малюнку 84 дотична в кожній точці кривої $y = f(x)$ утворює з додатним напрямом осі Ox тупий кут, тобто $f'(x) < 0$ на інтервалі $(a; b)$ і функція $f(x)$ спадає на інтервалі $(a; b)$.

Отже, знак похідної функції на інтервалі визначає характер її монотонності на цьому інтервалі, а саме:

1) Якщо $f'(x) > 0$ на інтервалі $(a; b)$, то функція $f(x)$ монотонно зростає на цьому інтервалі;
2) Якщо $f'(x) < 0$ на інтервалі $(a; b)$, то функція $f(x)$ монотонно спадає на цьому інтервалі.

Ці твердження називають *ознаками монотонності* функції $f(x)$ на інтервалі $(a; b)$.

Задача 1. Знайдіть інтервали монотонності функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x$.

Розв'язання. Функція визначена на множині всіх дійсних чисел, $D(f) = \mathbf{R}$. Знайдемо похідну та з'ясуємо, для яких значень x ця похідна додатна, а для яких — від'ємна. Маємо $f'(x) = x^2 - 9$. Якщо $f'(x) > 0$, тобто $x^2 - 9 > 0$, то $|x| > 3$, або $x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$. Отже, на інтервалах $(-\infty; -3)$ і $(3; +\infty)$ функція зростає.
Аналогічно, якщо $f'(x) < 0$, тобто $x^2 - 9 < 0$, то $x \in (-3; 3)$ і функція спадна на інтервалі $(-3; 3)$.
Складемо таблицю 11.

Таблиця 11

Інтервал	$(-\infty;-3)$	$(-3;3)$	$(3;+\infty)$
Знак $f'(x)$	+	–	+
Монотонність функції f	$\nearrow$ зростає	$\searrow$ спадає	$\nearrow$ зростає

Задача 2. Доведіть, що функція $f(x)=x^5+2x^3+x$ усюди зростає, а функція $\varphi(x)=1-x^3$ — усюди спадна.

Розв'язання. Областю визначення функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ є множина всіх дійсних чисел.

Знайдемо похідну функції $f(x)$:

$f'(x)=5x^4+6x^2+1$.

Очевидно, що $f'(x)>0$ для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$, тобто функція $f(x)$ зростає на множині всіх дійсних чисел.

Аналогічно, $\varphi'(x)=-3x^2<0$ для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$, тому функція $\varphi(x)$ спадна на множині всіх дійсних чисел.

Дізнайтеся більше

Задача. Доведіть нерівність $\cos x>1-\dfrac{x^2}{2}$, $x>0$. (2)

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}$, $x>0$. Оскільки $\sin x<x$, якщо $x>0$ (у цьому можна переконатись геометрично), то $f'(x)=x-\sin x>0$, $x>0$, тобто функція $f(x)$ є зростаючою, якщо $x>0$. Функція $f(x)$ неперервна в точці $x=0$ і $f(0)=0$, тому $f(x)>0$, якщо $x>0$. Нерівність (2) доведено.

Пригадайте головне

1. Сформулюйте ознаку сталості функції $f(x)$ на інтервалі $(a;\,b)$. Який геометричний зміст вона має?
2. Що можна сказати про монотонність функції $f(x)$ на інтервалі $(a;\,b)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної до її графіка в усіх точках інтервалу додатний; від'ємний? Наведіть геометричні ілюстрації.
3. Сформулюйте ознаки монотонності функції $f(x)$ на інтервалі $(a;\,b)$.
4. Чи правильне твердження:
   1) якщо диференційовна функція $f(x)$ зростає на інтервалі $(a;\,b)$, то $f'(x)>0$, $x\in(a;\,b)$;
   2) якщо диференційовна функція $f(x)$ спадає на інтервалі $(a;\,b)$, то $f'(x)<0$, $x\in(a;\,b)$?

Розв'яжіть задачі

455'. Чи є функція зростаючою або спадною на вказаному інтервалі:

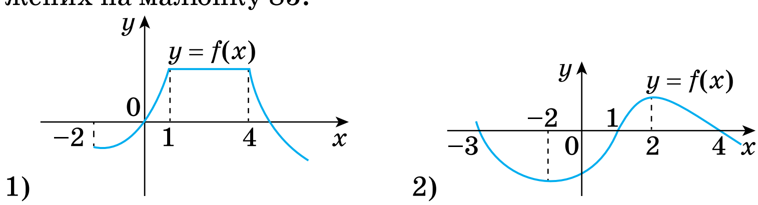
1) $y = 2x + 1, (-\infty; +\infty)$;

2) $y = x^2, (-\infty; 0)$;

3) $y = x^3, (-\infty; +\infty)$;

4) $y = \frac{1}{x}, (0; +\infty)$?

456'. Укажіть інтервали сталості, зростання і спадання функцій, зображених на малюнку 85.



Мал. 85

457'. Знайдіть інтервали монотонності функції:

1) $y = -x^2 + 4x + 1$; 2) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$; 3) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}$.

458°. Задано функцію $f(x)$. З'ясуйте, зростає чи спадає функція на заданих інтервалах:
1) $f(x) = x^2 - 2x$, $(0;1)$; $(3;4)$; 2) $f(x) = -x^2 + x - 1$, $(-1; 0)$; $(1; 3)$.

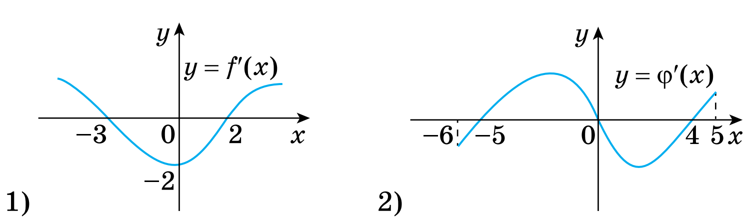
459. Чи правильно те, що функція $f(x) = x - 2x^4$ зростає на інтервалі $(-\infty; 0{,}5)$ і спадає на інтервалі $(0{,}5; +\infty)$?

460. Покажіть, що функція $f(x) = -\frac{1}{x^3}$ зростає в усій її області визначення.

461. Чи є монотонною функцією похідна функції $f(x) = x^2 + \sin x$?

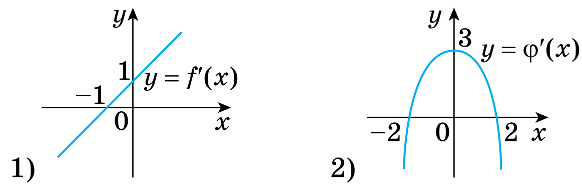
462. Покажіть, що функції $f(x) = \operatorname{tg} x$ та $f(x) = \operatorname{ctg} x$ монотонні в усій їх області визначення.

463*. Що можна сказати про монотонність функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$, якщо задано графіки їх похідних (мал. 86)?



Мал. 86

464*. Знайдіть функцію, якщо задано графік її похідної, і дослідіть її на монотонність (мал. 87).



Мал. 87

Проявіть компетентність

465. Переконайтеся, що функція $f(x) = \sin x - 2x + \frac{1}{3}$ спадна на інтервалі $(-\infty; +\infty)$.

466. З'ясуйте, зростає чи спадає функція $f(x) = -x^2 + x - 1$ у точках: 1) $x_1 = 0$; 2) $x_2 = 1$.

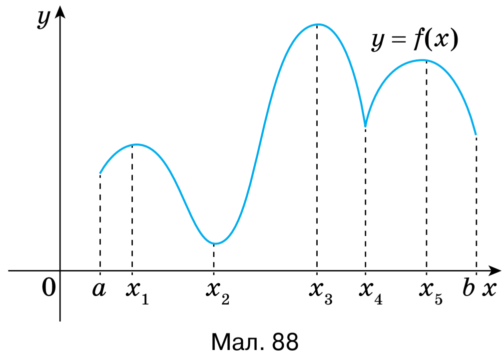
467. Чи правильна нерівність:

1) $\sin x < x,\ x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\cos x + x \sin x > 1, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

§ 25 Екстремуми функції

1. ПОНЯТТЯ ЕКСТРЕМУМІВ ФУНКЦІЙ

Розглянемо графік функції $y = f(x)$ (мал. 88).



Мал. 88

Значення функції $f(x_1)$ є найбільшим у деякому околі точки x_1, проте не є найбільшим на відрізку $[a;b]$, бо, наприклад, $f(x_1) < f(x_3)$. Те саме можна сказати і про значення функції $f(x_5)$.

Аналогічно, $f(x_4)$ є найменшим значенням функції в деякому околі точки x_4, але не є найменшим значенням функції на відрізку $[a;b]$, бо існують значення, менші від $f(x_4)$, наприклад, $f(x_2)$.

Отже, існують значення функції, які є найбільшими або найменшими лише в досить малому околі точки з області її визначення. Такі значення називають відповідно максимумом і мінімумом цієї функції.

Якщо існує окіл точки x_0, що для всіх точок $x \neq x_0$ із цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$, то точку x_0 називають точкою максимуму **функції.**

Якщо існує окіл точки x_0, що для всіх точок $x \neq x_0$ із цього околу виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$, то точку x_0 називають точкою мінімуму **функції.**

Точки максимуму та мінімуму функції називають *точками екстремуму* функції, а значення функції в них — *екстремумами функції*.

З означення випливає, що точками екстремуму можуть бути тільки внутрішні точки області визначення функції. Крім того, екстремум — це локальна (місцева) властивість функції, яка характеризує поведінку функції в досить малому околі точки. Через це їх іноді називають — локальним максимумом і мінімумом функції.

Для функції $f(x)$, графік якої зображено на малюнку 88, точками максимуму є точки x_1, x_3, x_5, а точками мінімуму — точки x_2, x_4.

Зверніть увагу:
що деякі мінімуми функції можуть бути більші за деякі її максимуми.

Так, на малюнку 88 $f_{\min}(x_4) > f_{\max}(x_1)$.

2. НЕОБХІДНА І ДОСТАТНЯ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ ФУНКЦІЇ

Як же знайти точки екстремуму функції?

Припустимо, що функція $f(x)$ має в деякій точці екстремум і диференційовна в цій точці.

На малюнку 88 точками, в яких функція має екстремум та диференційовна в кожній з них, є x_1, x_2, x_3, $x_5 \in [a;b]$. Дотична до кривої в цих точках паралельна осі Ox, а це означає, що похідна в кожній з цих точок дорівнює нулю. Правильність цього факту підтверджує теорема.

Теорема 1 **(Ферма).**

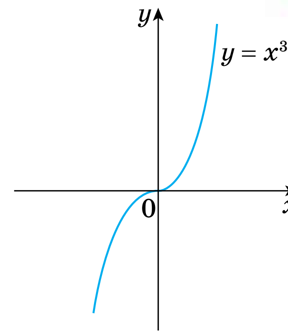
Якщо x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Теорему приймемо без доведення.

Точки x, у яких $f'(x) = 0$, називають *стаціонарними точками* функції $f(x)$.

Теорема 1 є лише *необхідною*, але не є достатньою умовою екстремуму функції.

Наприклад, функція $y = x^3$ має тільки одну стаціонарну точку $x = 0$, оскільки $y' = 3x^2$ та $y' = 0$, якщо $x = 0$. Однак ця точка не є її точкою екстремуму (мал. 89).



Мал. 89

Зауважимо також, що екстремум функції може існувати і в точках, де функція неперервна, але не має похідної. На малюнку 88 такою є точка x_4.

Стаціонарні точки функції і точки, у яких функція неперервна, але не має похідної, називають її *критичними точками*.

Отже, точки екстремуму функції слід шукати серед її критичних точок. Якщо критичних точок немає, то функція не має екстремумів. Однак питання про те, чи є задана критична точка точкою екстремуму функції, вимагає додаткового дослідження за допомогою достатніх умов екстремуму функції.

На малюнку 88 прослідкуйте за знаком похідної $f'(x)$ у досить малому околі точок максимуму (точки x_1, x_3, x_5) і мінімуму (точки x_2, x_4) функції. Ліворуч від точки максимуму $f'(x) > 0$, а праворуч — $f'(x) < 0$. Ліворуч від точки мінімуму $f'(x) < 0$, а праворуч — $f'(x) > 0$. Має місце теорема:

Теорема 2 (достатня умова екстремуму функції).

Нехай x_0 — критична точка функції $f(x)$, яка є неперервною в цій точці, та існує інтервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, в якому функція має похідну, крім, можливо самої точки x_0.
Якщо $f'(x) > 0$ на інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ і $f'(x) < 0$ на інтервалі $(x_0;\ x_0 + \delta)$, то точка x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$; якщо $f'(x) < 0$ на інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ і $f'(x) > 0$ на інтервалі $(x_0;\ x_0 + \delta)$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.

Іншими словами: *якщо при переході точки x через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак, то x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$, причому точкою максимуму, якщо знак змінюється з плюса на мінус і точкою мінімуму, якщо знак змінюється з мінуса на плюс.*

Теорему приймемо без доведення.

На підставі сформульованих теорем складемо схему.

Схема дослідження функції $f(x)$ *на екстремум на інтервалі* $(a;\ b)$ (*скінченному чи нескінченному*).

1. Знайти критичні точки функції $f(x)$, тобто точки, у яких $f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує і які належать інтервалу $(a; b)$.

Якщо таких точок немає, то функція $f(x)$ екстремумів не має.
2. Перевірити, чи змінює знак похідна $f'(x)$ при переході через кожну критичну точку x_0. Якщо $f'(x)$ змінює знак з + на −, то x_0 — точка максимуму функції; якщо $f'(x)$ змінює знак з − на + , то x_0 — точка мінімуму функції; якщо $f'(x)$ не змінює знака, то точка x_0 не є точкою екстремуму функції.
3. Обчислити значення функції $f(x)$ у точках екстремуму.

Зауваження. Нехай функція $f(x)$ неперервна на інтервалі $(a;b)$ (скінченному чи нескінченному) і має на ньому скінченну кількість критичних точок x_1, $x_2, \ldots, x_k$, причому $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$. Тоді на кожному з інтервалів $(a;x_1)$, $(x_1;x_2), \ldots, (x_k;b)$ похідна функції $f'(x)$ зберігатиме знак. Тому знак похідної на кожному інтервалі можна визначити, обчисливши значення її в довільній точці інтервалу. Цим самим одночасно з точками екстремуму визначають й інтервали монотонності функції.

Задача 1. Знайдіть екстремуми функції $f(x) = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$.

Розв'язання. Функція визначена та диференційовна на множині всіх дійсних чисел. 1. Знайдемо стаціонарні точки функції:
$f'(x) = 3x^3 - 3x^2 - 18x = 3x(x+2)(x-3)$, отже, $f'(x) = 0$, якщо $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 3$, тобто функція має три стаціонарні точки.
2. Визначимо, яка із знайдених стаціонарних точок є точкою екстремуму функції. Область визначення функції інтервал $(-\infty;+\infty)$ розіб'ємо стаціонарними точками на інтервали: $(-\infty;-2)$, $(-2;0)$, $(0;3)$, $(3;+\infty)$, на кожному з яких похідна $f'(x)$ зберігає знак. Для визначення знаку похідної досить знайти її значення в довільній точці кожного інтервалу.
Оскільки $f'(-3) = -54 < 0$, то $f'(x) < 0$, $x \in (-\infty;-2)$; $f'(-1) = 12 > 0$, то $f'(x) > 0$, $x \in (-2;0)$; $f'(1) = -18 < 0$, то $f'(x) < 0$, $x \in (0;3)$; $f'(4) = 12 \cdot 6 = 72 > 0$, то $f'(x) > 0$, $x \in (3;+\infty)$.
Таким чином, при переході через точки $x_1 = -2$ та $x_3 = 3$ похідна змінює знак з – на + , а при переході через точку $x_2 = 0$ похідна змінює знак з + на –, тобто точки $x_1 = -2$ та $x_3 = 3$ — точки мінімуму, а $x_2 = 0$ — точка максимуму функції.
3. Обчислимо значення функції в точках екстремуму:

$$f_{\min}(-2) = -9, f_{\min}(3) = -40\frac{1}{4}, \; f_{\max}(0) = 7.$$

Задача 2. Доведіть, що добуток двох додатних чисел, сума яких є сталою, буде найбільшим, якщо ці числа рівні.
Розв'язання. Нехай $x + y = a$, де $a > 0$ — стала, $x, y > 0$.

Тоді добуток чисел x та y визначається функцією:
$f(x) = xy = x(a-x) = -x^2 + ax, 0 < x < a$.

Знайдемо стаціонарні точки цієї функції:

$f'(x) = -2x + a$, $f'(x) = 0$, якщо $x = \frac{a}{2}$.

Покажемо, що ця точка є точкою максимуму функції $f(x)$. Розглянемо два інтервали: $\left(0;\frac{a}{2}\right)$ і $\left(\frac{a}{2};a\right)$, на кожному з яких похідна $f'(x)$ зберігає знак.

Оскільки $f'\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a}{2}>0$, то $f'(x)>0,\ \ x\in\left(0;\frac{a}{2}\right)$; $f'\left(\frac{3}{4}a\right)=-\frac{a}{2}<0$, тому $f'(x)<0,\ \ x\in\left(\frac{a}{2};a\right)$.

Отже, похідна $f'(x)$ при переході через точку $x=\frac{a}{2}$ змінює знак з + на –, тому ця точка є точкою максимуму функції $f(x)$, тобто шуканими числами є $x=\frac{a}{2}$ та $y=\frac{a}{2}$ і $f_{\max}\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{a^2}{4}$.

Дізнайтеся більше

Розглянемо застосування екстремумів функції до доведення нерівності.

Задача. Доведіть нерівність:

$$x+\frac{1}{x}\geq 2, x>0\,. \qquad (1)$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x)=x+\frac{1}{x},\ \ x>0$.

Знайдемо екстремуми цієї функції: $f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$. За умовою $x>0$, отже, $f'(x)=0$, якщо $x=1>0$. Ця точка є точкою мінімуму функції, оскільки похідна $f'(x)$ при переході через цю точку змінює знак з мінуса на плюс (переконайтеся в цьому самостійно). Таким чином, задана функція $f(x)$ має на інтервалі $(0;+\infty)$ найменше значення $f(1)=2$, тобто має місце нерівність (1).

Пригадайте головне

1. Дайте означення точок екстремуму та екстремумів функції.
2. Сформулюйте теорему Ферма. Який її геометричний зміст?
3. Що таке стаціонарна та критична точки функції?
4. Якщо функція має п'ять критичних точок, то скільки екстремумів вона може мати?
5. Сформулюйте достатню умову екстремуму функції. Який її геометричний зміст?
6. Скільки точок екстремуму може мати квадратична функція? Наведіть приклади.

7. За якою схемою досліджується функція на екстремум?

8. Яке з даних тверджень є правильним:

а) якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$, то вона — її стаціонарна точка;

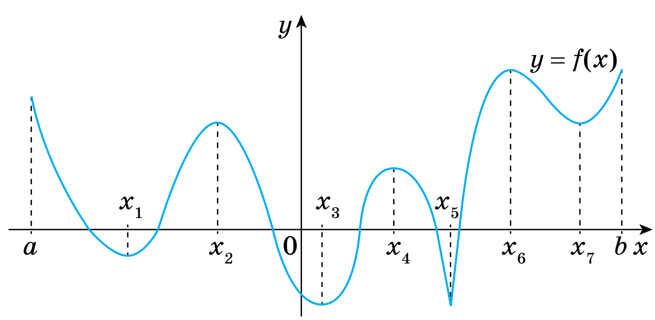
б) якщо точка x_0 є стаціонарною точкою функції $f(x)$, то вона — її точка екстремуму;

в) якщо функція $f(x)$ не має критичних точок, то вона не має і точок екстремуму;

г) якщо функція $f(x)$ має критичні точки, то вона має і точки екстремуму?

Розв'яжіть задачі

468'. Назвіть точки екстремуму функції, зображеної на малюнку 90.



Мал. 90

469'. Скільки екстремумів може мати функція:

1) $f(x) = x^2 - 1$; 2) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x$?

470'. Чи має функція стаціонарні точки:

1) $f(x) = x^2 + 1$; 3) $f(x) = x^3 - 1$; 5) $f(x) = 2x - x^2$?

2) $f(x) = 2x + 1$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

471'. Знайдіть точки екстремуму функції:

1) $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$; 4) $f(x) = x^2 - \dfrac{x^4}{2}$;

2) $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} - 3x + 5$; 5) $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$.

3) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x + 4$;

472°. Задано закон руху тіла. У який момент часу t (с) тіло зупиниться:

1) $s = 6t^2 - \dfrac{t^3}{3} - 2$ (м); 2) $s = 3(3 - t)(t + 1) + 20$ (м); 3) $s = \dfrac{t^2 - 3t + 2}{t^2}$ (м)?

473°. Покажіть, що функція не має екстремумів:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 2$; 2) $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$.

474°. Чи має лінійна функція $y = kx + b$, де k, b — сталі, екстремуми?

475°. Функція $f(x) = x^2(x + 3)$ має мінімум у точці $x = 0$. У якій точці ця функція має максимум?

476. У якій точці квадратний тричлен $f(x) = x^2 - 10x + 26$ має мінімум, що дорівнює 1?

477*. Чи правильно, що сума двох додатних чисел, добуток яких сталий, має мінімум, якщо доданки рівні?

478*. Сума катетів прямокутного трикутника дорівнює 15 см. Як вибрати їх довжину, щоб площа трикутника була найбільшою?

Проявіть компетентність

479. Перевірте, що функція не має екстремумів:

1) $f(x) = \frac{x^3}{3} + 8x - 1$;   2) $f(x) = \sin x - 2x$.

480. Переконайтесь у тому, що функція $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x}$ має в точці $x = \frac{1}{2}$ мінімум.

481. Покажіть, що функції $f(x) = -x^3 + 3x + 5$ та $\varphi(x) = x^2 + 2x$ мають мінімум в одній і тій самій точці.

§ 26 Застосування похідної до розв'язування прикладних задач

1. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТА ПОБУДОВА ГРАФІКІВ

Застосування похідної дає досить ефективні й загальні методи дослідження функцій, необхідні для побудови їх графіків. Тепер, користуючись засобами диференціального числення, ми зможемо провести більш глибоке та ґрунтовне вивчення властивостей функції й обґрунтувати характерні її якісні особливості. Ми знаємо, що функції є математичними моделями реальних процесів і явищ, тому не викликає сумніву важливість вивчення властивостей функцій, а з ними — і властивостей відповідних процесів і явищ, які вони описують.

Загальне дослідження функції та побудову її графіка зручно виконувати за такою схемою.

Схема дослідження функції та побудова її графіка
1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність, непарність і періодичність.
3. Дослідити функцію на неперервність. Знайти точки розриву функції та з'ясувати поведінку функції в околі цих точок.
4. Знайти екстремуми функції та інтервали монотонності.
5. Знайти точки перетину графіка функції з координатними осями.
6. З'ясувати поведінку функції в межових точках її області визначення.
7. Побудувати графік функції.

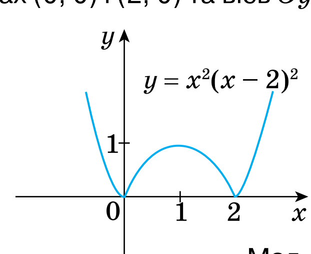
Задача 1. Дослідіть функцію $f(x)=x^2(x-2)^2$ та побудуйте її графік.

Розв'язання. Дослідження функції проведемо за поданою вище схемою:
1. Функція визначена на множині всіх дійсних чисел, $D(f)=(-\infty;+\infty)$, причому $f(x)\geq 0,\ x\in D(f)$, тобто графік функції розміщений над віссю Ox.
2. Функція не є ні парною, ні непарною, через те що $f(-x)=x^2(-x-2)^2$, а це значення не дорівнює ні $f(x)$, ні $-f(x)$, якщо $x\in D(f)$.
Функція неперіодична.
3. Функція неперервна в її області визначення.
4. Знайдемо екстремуми функції. Маємо $f(x) = x^2(x^2 - 4x + 4)$,
$f'(x)=2x(x-2)^2+2x^2(x-2)=4x(x^2-3x+2)=4x(x-1)(x-2)$.
Отже, $f'(x)=0$, якщо $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=2$.
Складемо таблицю 12.

Таблиця 12

x	$(-\infty;0)$	0	(0; 1)	1	(1; 2)	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘ спадна	0 min	↗ зростаюча	1 max	↘ спадна	0 min	↗ зростаюча

5. Знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат: якщо $y=0$, то $x_1=0,\ x_2=2$; якщо $x=0$, то $y=0$.
Отже, графік функції перетинає вісь Ox у точках (0; 0) і (2; 0) та вісь Oy — у точці (0; 0).
6. З'ясуємо поведінку графіка функції на межі її області визначення:
якщо $x\to-\infty$, то $f(x)=x^2(x-2)^2\to+\infty$;
якщо $x\to+\infty$, то $f(x)\to+\infty$.
7. Графік функції подано на малюнку 91.



Мал. 91

Задача 2. Дослідіть функцію $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ та побудуйте її графік.

Розв'язання. Проведемо дослідження функції.

1. Функція визначена для всіх значень $x\neq 0$, тобто $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2. Функція є парною, оскільки
$f(-x)=(-x)^2+\dfrac{1}{(-x^2)}=f(x),\ x\in D(f)$, тому графік функції симетричний відносно осі Oy і подальше дослідження достатньо провести на множині $A=(0;+\infty)$. Функція неперіодична.

3. Функція неперервна на множині A.
Точка $x=0$ є точкою розриву функції, причому $f(x)\to+\infty$, якщо $x\to 0$ праворуч.

4. Знайдемо екстремуми функції на множині A. Маємо
$f'(x)=2x-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2(x^4-1)}{x^3}=\dfrac{2(x+1)(x-1)(x^2+1)}{x^3}$. Отже, $f'(x)=0$ лише в точці $x=1$, яка належить множині A.
Складемо таблицю 13.

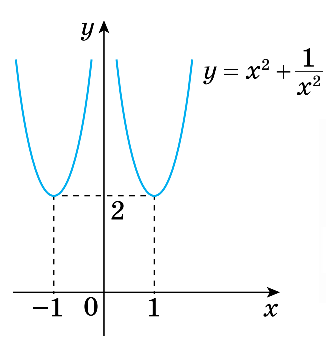
Таблиця 13

x	$(0;\ 1)$	1	$(1;\ +\infty)$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	↘ спадна	2 min	↗ зростаюча

5. Оскільки $f(x)>0$, якщо $x\in A$, і функція не визначена в точці $x=0$, то точок перетину з осями координат немає.

6. З'ясуємо поведінку графіка функції на межі множини A: якщо $x\to 0$ праворуч, то $f(x)\to+\infty$; якщо $x\to+\infty$, то $f(x)\to+\infty$.

7. Будуємо графік функції на множині $A=(0;+\infty)$, потім відобразимо його симетрично відносно осі Oy (мал. 92).



Мал. 92

2. НАЙБІЛЬШЕ І НАЙМЕНШЕ ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ

У багатьох галузях людської діяльності часто доводиться шукати оптимальний розв'язок поставленої задачі. Як досягти найбільшої продуктивності праці, найменших витрат, максимального прибутку, мінімальної втрати часу — такі питання постійно постають перед суспільством, у якому ми живемо. Ми розглянемо найпростіші з цих задач, які можна розв'язати за допомогою апарату диференціального числення.

Значення функції $f(c), c \in [a;b]$, називають *найбільшим* на відрізку $[a;b]$, якщо $f(c) > f(x)$ для всіх $x \neq c$ з відрізка $[a;b]$.
Значення функції $f(c), c \in [a;b]$, називають *найменшим* на відрізку $[a;b]$, якщо $f(c) < f(x)$ для всіх $x \neq c$ з відрізка $[a;b]$.

Функція $f(x)$, графік якої подано на малюнку 88, набуває найбільшого значення на відрізку $[a;b]$ у точці x_3 і найменшого значення в точці x_2.

Їх позначають відповідно $\max\limits_{x\in[a;\,b]} f(x) = f(x_3)$ і $\min\limits_{x\in[a;\,b]} f(x) = f(x_2)$. У даному разі функція $f(x)$ досягає найбільшого та найменшого значення всередині відрізка $[a;b]$, і це є відповідно найбільший з її максимумів та найменший з її мінімумів на відрізку $[a;b]$. Однак може трапитись, що найбільше або найменше значення функції (або обидва одразу) — її значення на кінцях відрізка $[a;b]$.

Зазначимо також, що функція може не мати найбільшого або найменшого значення на певному проміжку. Пригадайте, наприклад, графіки функцій $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty;+\infty)$ та $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$. Перша з них не має найбільшого значення на інтервалі $(-\infty;+\infty)$, а для другої не існує найменше значення на інтервалі $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Виникає запитання: як знайти найбільше та найменше значення функції, якщо воно існує на певному проміжку?

Нехай функція $f(x)$ має найбільше та найменше значення на відрізку $[a;b]$. Міркуватимемо так. Найбільше та найменше значення функція може набувати або на кінцях відрізка $[a;b]$, або в точках інтервалу $(a;b)$. Якщо найбільше значення функція набуває в точці, яка належить інтервалу $(a;b)$, то ця точка має бути точкою максимуму функції. Отже, її треба шукати серед коренів рівняння $f'(x) = 0$ і точок, у яких похідна $f'(x)$ не існує. Аналогічні міркування застосовні для випадку, коли функція набуває найменшого значення в точці, яка належить інтервалу $(a;b)$.

Отже, дістаємо таку схему.

Схема знаходження найбільшого і найменшого значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;\,b]$

1. Знайти критичні точки функції на інтервалі $(a;b)$, тобто точки, у яких $f'(x) = 0$ та в яких $f'(x)$ не існує.
2. Обчислити значення функції в критичних точках.
3. Обчислити значення функції на кінцях відрізка $f(a)$ і $f(b)$.
4. Серед знайдених значень функції вибрати найменше і найбільше.

Задача. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 - 3x + 3$ на відрізку [–3; 5].

Розв'язання. Скористаємося наведеною схемою. Знайдемо критичні точки функції $f(x)$ на інтервалі (–3; 5):

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, якщо $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Складемо таблицю 14.

Таблиця 14

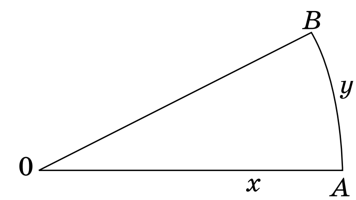
x	-1	1	-3	5
$f(x)$	5	1	-15	113

Отже, $\max\limits_{x\in[-3;5]} f(x) = f(5) = 113$; $\min\limits_{x\in[-3;5]} f(x) = f(-3) = -15$.

3. ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ

Задача 1. Визначте, як треба обгородити ділянку землі у вигляді кругового сектора дротом завдовжки 20 м, щоб площа ділянки була найбільшою.

Розв'язання. Нехай $OA = OB = x$ — радіус круга, а $\overset{\smile}{AB} = y$ — довжина дуги сектора цього круга (мал. 93).



Мал. 93

Тоді за умовою задачі $20 = 2x + y$, звідки $y = 2(10 - x)$.

Площа кругового сектора обчислюється за формулою $S = \frac{1}{2}xy$, тобто $S(x) = x(10 - x)$, $x \in (0;\ 10)$.

Знайдемо найбільше значення функції $S(x)$:

$S'(x) = 10 - 2x$, $S'(x) = 0$, якщо $x = 5 \in (0;10)$.

Оскільки при переході через точку $x = 5$ похідна $S'(x)$ змінює знак з + на –, а саме, $S'(x) > 0$, якщо $x \in (0;5)$ та $S'(x) < 0$, якщо $x \in (5;10)$, то функція $S(x)$ має найбільше значення, якщо $x = 5$ і $S_{\max}(5) = 25$ (м^2). Отже, площа ділянки буде найбільшою, якщо радіус сектора $x = 5$ м, а довжина дуги $y = 10$ м.

Задача 2. Необхідно виготовити деталь у формі прямокутника з периметром $2p$, яка має найбільшу площу.

Розв'язання. Позначимо сторони прямокутника через x і y. Тоді за умовою $2(x + y) = 2p$, або $x + y = p$, звідки $y = p - x$.

Площа прямокутника $S = xy$, тобто маємо функцію $S(x) = x(p - x)$, $x \in (0; p)$.

Знайдемо найбільше значення функції $S(x)$:

$S'(x) = p - 2x$, тоді $S'(x) = 0$, якщо $x = \frac{p}{2} \in (0; p)$.

Оскільки похідна $S'(x)$ при переході через точку $x = \frac{p}{2}$ змінює знак з + на –, то ця точка є шуканою точкою максимуму функції $S(x)$. При цьому друга сторона прямокутника $y = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$.

Отже, шуканим прямокутником з найбільшою площею є квадрат зі стороною $\frac{p}{2}$, і його найбільша площа $S\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4}$.

Дізнайтеся більше

Значний внесок у розвиток теорії функцій зробив український математик **Георгій Миколайович Положій** (*1914–1968*) — відомий математик, член-кореспондент АН УРСР, професор, доктор фізико-математичних наук, із 1958 р. — завідувач кафедри обчислювальної математики Київського державного університету імені Тараса Шевченка. Розроблена ним теорія p-аналітичних і (p, q) — аналітичних функцій є важливою і нині для розвитку не лише математики як науки, а й авіабудівництва, будівництва гідротехнічних споруд та ін. На честь ученого досліджені ним функції називають його ім'ям — «p-аналітичні функції Положія».

Пригадайте головне

1. Які ви знаєте застосування похідної?
2. За якою схемою проводять дослідження функції?
3. Що називають найбільшим і найменшим значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$?
4. Чи може функція $f(x)$ набувати найбільшого або найменшого значення на кінцях відрізка $[a; b]$?
5. Наведіть приклад функції, у якої найбільше і найменше значення на відрізку $[a; b]$ збігаються.
6. За якою схемою знаходять найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$?

Розв'яжіть задачі

482'. Проведіть дослідження функції та побудуйте графік:
1) $f(x) = x^3 - 3x$; 2) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$; 3) $f(x) = (x-1)(x+2)$.

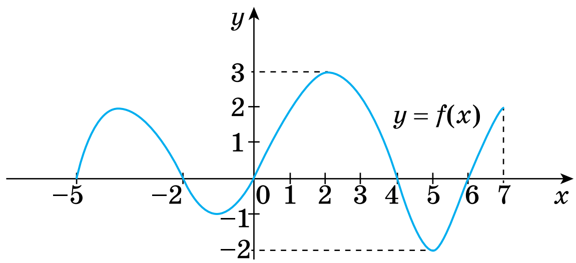
483'. Знайдіть найбільше і найменше значення функції, зображеної на малюнку 94.

484'. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на зазначеному відрізку:

1) $f(x) = (x-1)^2 + 5, [0; 4]$; 4) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5, [-2; 2]$;

2) $f(x) = 6x - x^2, [-2; 1]$; 5) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1, \left[-\frac{1}{2}; 1\right]$;

3) $f(x) = x^3 + 9x - 3, [-1; 0]$; 6) $f(x) = x + 2\sqrt{x}, [0; 4]$.



Мал. 94

485°. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 5t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$ (м), t — час (с). У який момент часу швидкість руху точки буде найбільшою і яка її величина?

486°. Є кусок дроту завдовжки 40 м. Треба обгородити ним прямокутну ділянку землі, одна сторона якої прилягає до стіни будинку. Знайдіть розміри ділянки, за яких її площа буде найбільшою.

487. Запишіть число 36 у вигляді добутку двох додатних чисел, сума яких є найменшою.

488. Подайте число 50 у вигляді суми двох додатних чисел, щоб сума їх квадратів була найменшою.

489*. Проведіть дослідження функції та побудуйте її графік:

1) $f(x) = \frac{6(x-1)}{x^2+3}$;
3) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$;
2) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$;
4) $f(x) = x^2 - \frac{8}{x}$.

Проявіть компетентність

490. Для якого числа різниця між ним і його квадратом є найменшою?

491. Площа прямокутної земельної ділянки становить $S = 25$ м². Якими мають бути розміри цієї ділянки, щоб її периметр був найменшим?

492*. Вікно має форму прямокутника, завершеного півкругом. Знайдіть розміри вікна найбільшої площі, якщо задано його периметр P.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які задачі приводять до поняття похідної?
2. Дайте означення похідної. Сформулюйте її механічний та геометричний зміст.
3. Наведіть схему знаходження похідної.
4. За якими формулами знаходять похідну суми, різниці, добутку та частки функцій?
5. Якщо графік функції має в точці вертикальну дотичну, то що можна сказати про похідну функції в цій точці?
6. Чи може пряма, що має одну спільну точку з графіком функції, не бути її дотичною?
7. Чи може пряма, що має більш ніж одну спільну точку з графіком функції, бути його дотичною?
8. Сформулюйте ознаку сталості функції на інтервалі $(a; b)$. Який вигляд має графік сталої функції?
9. Сформулюйте ознаки зростання і спадання функції на інтервалі $(a; b)$.
10. Дайте означення точок екстремуму та екстремумів функції.
11. Яка необхідна умова екстремуму функції? Який геометричний зміст цієї умови? Якщо $f'(x_0)=0$, то чи є точка x_0 — точкою екстремуму функції? Наведіть приклади.
12. Що таке стаціонарні й критичні точки функції? Чи кожна критична або стаціонарна точка є точкою екстремуму функції?
13. Сформулюйте достатню умову екстремуму функції. Який її геометричний зміст?
14. Яка схема дослідження функції на екстремум?
15. Які ви знаєте застосування похідної?
16. За якою схемою проводять дослідження функції та побудову її графіка?
17. Що розуміють під найбільшим і найменшим значенням функції на відрізку?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 3

Уважно прочитайте кожне завдання і вкажіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 25 – 30 хв.

Тест 1

1° $y=\dfrac{2x+1}{x}, y'=?$

А. 2. **Б.** $-\dfrac{1}{x^2}$. **В.** $2x$. **Г.** $\dfrac{1}{x^2}$.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

2° Точка рухається прямолінійно за законом

А. $s(t) = 3t^2 + 1$. **Б.** $s(t) = 2t - 5$. **В.** $s(t) = \frac{2}{t} + 3$. **Г.** $s(t) = t^3 - 1$.

Який із цих рухів є рівномірним?

3° Яка з функцій диференційовна на множині всіх дійсних чисел?

А. $y = \sin x$. **Б.** $y = \frac{1}{x}$. **В.** $y = \frac{x}{x+1}$. **Г.** $y = \sqrt{x}$.

4 Для якої з функцій пряма $y = 3x - 2$ є дотичною до її графіка в точці $A(1;\ 1)$:

А. $y = \frac{1}{x}$; **Б.** $y = x^3$; **В.** $y = 2x^2 + 1$; **Г.** $y = \sqrt{x}$?

5* Знайдіть криву, яка проходить через точку A (1; 3) якщо задано кутовий коефіцієнт дотичної $k = 2x + 3$ в точці з абсцисою x.

А. $y = x^2$. Б. $y = x^2 + 3x$. В. $y = x^2 + 3x - 1$. Г. $y = x^2 + 3$

Тест 2

1′ Яка з функцій є спадною в її області визначення?

А. $y = -\frac{1}{x}$. **Б.** $y = 2x + 1$. **В.** $y = -\sqrt{x}$. **Г.** $y = \sin x$.

2° Знайдіть точки максимуму функції $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$.

А. 2. **Б.** 1. **В.** −6. **Г.** 0.

3° Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ на відрізку [−2; 2].

А. 13; 4. **Б.** 1; −2. **В.** 10; 0. **Г.** 5; 17.

4 Сума якого додатного числа та оберненого до нього є найменшою?

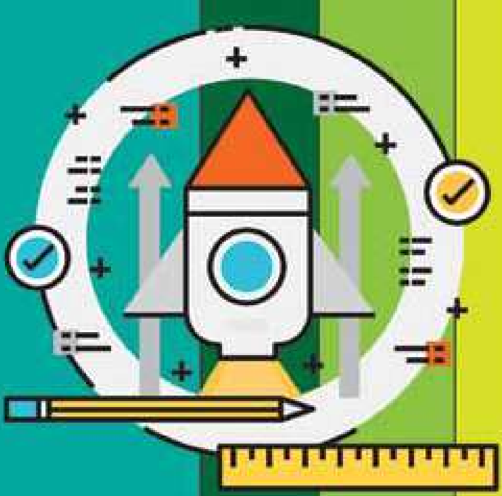
А. 2. **Б.** 3. **В.** $\frac{1}{2}$. **Г.** 1.

5* Знайдіть розміри прямокутника з периметром 16 см, який має найбільшу площу.

А. 4 см; 4 см. **Б.** 6 см; 2 см. **В.** 3 см; 5 см. **Г.** 1 см; 7 см.

Частина II

ГЕОМЕТРІЯ



Розділ 4

Паралельність прямих і площин у просторі

У розділі ви дізнаєтесь:

- ✦ що вивчають у стереометрії;
- ✦ про аксіоми стереометрії та наслідки з них;
- ✦ про взаємне розміщення у просторі двох прямих, прямої та площини;
- ✦ про паралельні площини та їх ознаку й властивості;
- ✦ як знайти відстань від точки до прямої та між двома паралельними прямими, кут між прямими, що перетинаються;
- ✦ про паралельне проектування та зображення просторових фігур на площині;
- ✦ як застосовувати вивчені властивості на практиці та під час розв’язування задач

§ 27 Що вивчають у стереометрії

1. ПРОСТОРОВІ ФІГУРИ

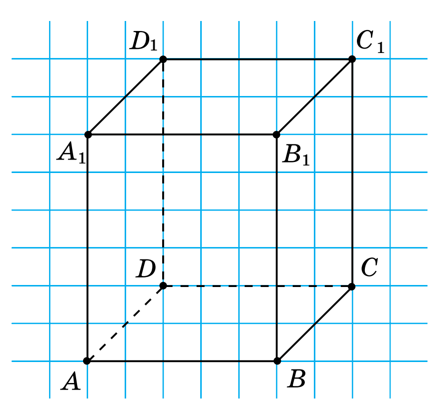
Ви знаєте, що шкільний курс геометрії складається з двох частин — *планіметрії* та *стереометрії*. У планіметрії вивчають геометричні фігури, всі точки яких лежать в одній площині, наприклад трикутник, квадрат, коло. У стереометрії вивчають властивості *просторових фігур*. У таких фігур не всі точки лежать в одній площині. Прикладами просторових фігур є многогранники. Вам уже відомі *прямокутний паралелепіпед*, *куб*, *піраміда*.

Поверхня многогранника складається з плоских многокутників, які називають його *гранями*. Звідси і походить назва «многогранник». Вершини і сторони цих многокутників називаються відповідно *вершинами* і *ребрами* многогранника.

Які особливості мають прямокутний паралелепіпед, куб і піраміда?

2. ПРЯМОКУТНИЙ ПАРАЛЕЛЕПІПЕД І КУБ

Прямокутний паралелепіпед — многогранник, поверхня якого складається із 6 граней, кожна з яких є прямокутником. У нього 8 вершин і 12 ребер. На малюнку 95 ви бачите прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, побудований за клітинками. Дві його грані $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ розміщені горизонтально. Їх називатимемо *основами* даного паралелепіпеда. Решта граней розміщені вертикально. Їх називатимемо *бічними гранями* даного паралелепіпеда. *Ребрами основ* даного паралелепіпеда називатимемо сторони прямокутників $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, а *бічними ребрами* — решту його ребер.



Мал. 95

У побудові зображення прямокутного паралелепіпеда за клітинками використовуємо такі його властивості:

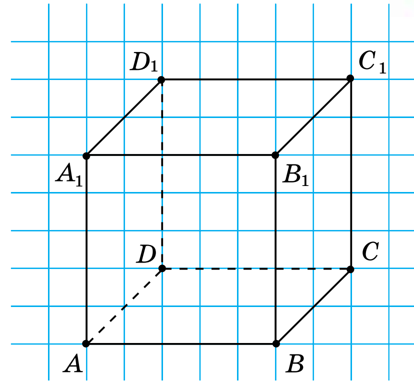
1) протилежні грані — попарно рівні прямокутники;

2) протилежні ребра кожної грані попарно паралельні й рівні;

3) бічні ребра рівні між собою й перпендикулярні до основ.

Зверніть увагу:
зображуючи многогранник, видимі лінії робимо суцільними, а невидимі — штриховими.

Куб — многогранник, поверхня якого складається із 6 граней; кожна з них є квадратом. Куб є різновидом прямокутного паралелепіпеда, тому має всі його властивості. Особливі властивості куба пов’язані з тим, що всі його грані — це рівні між собою квадрати, а всі ребра — рівні між собою відрізки. На малюнку 96 ви бачите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, побудований за клітинками.



Мал. 96

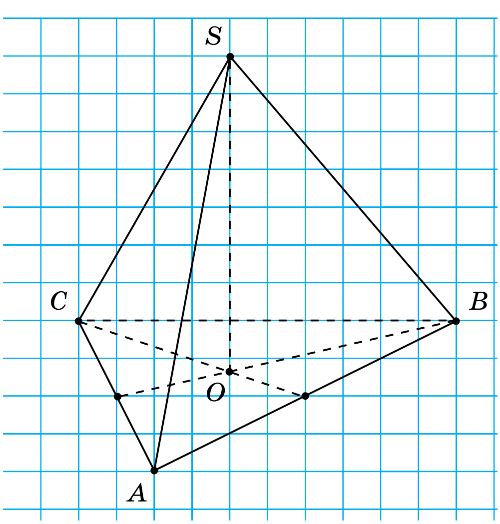
3. ПІРАМІДА

Піраміда — многогранник, поверхня якого складається з многокутника, він називається *основою* піраміди, і трикутників зі спільною вершиною, вони називаються *бічними гранями* піраміди. Спільна вершина бічних граней називається *вершиною піраміди*.

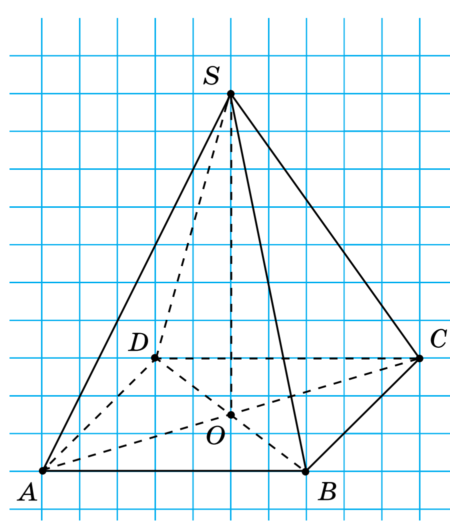
Залежно від того, який многокутник є основою, піраміду називають трикутною, чотирикутною чи n-кутною. *Висотою піраміди* називають перпендикуляр, проведений з вершини піраміди до її основи.

Піраміда називається *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається із центром цього многокутника. У правильній піраміді бічні ребра рівні.

На малюнку 97 ви бачите побудовану за клітинками правильну трикутну піраміду $SABC$ з вершиною S й основою ABC, а на малюнку 98 — правильну чотирикутну піраміду $SABCD$ з вершиною S й основою $ABCD$.



Мал. 97



Мал. 98

У побудові правильної піраміди за клітинками використовуємо такі її властивості:

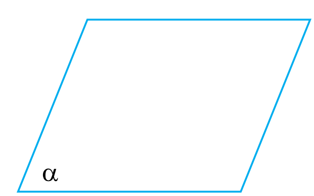
1) основа піраміди — це правильний многокутник;
2) центром основи піраміди є:
   точка перетину медіан основи, якщо піраміда трикутна;
   точка перетину діагоналей основи, якщо піраміда чотирикутна;
   точка перетину серединних перпендикулярів до сторін основи, якщо піраміда n-кутна, де $n > 4$;
3) основа висоти піраміди збігається із центром її основи.

Зверніть увагу:
прямокутний паралелепіпед, куб і піраміду будемо використовувати для ілюстрування властивостей взаємного розміщення точок, прямих і площин.

4. ОСНОВНІ ФІГУРИ У ПРОСТОРІ

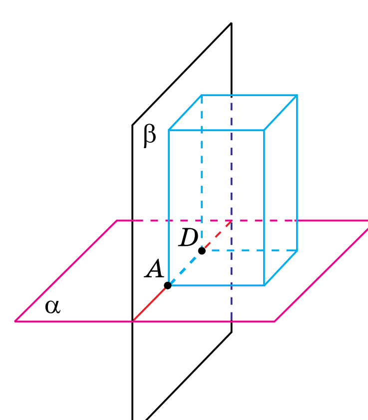
Основними фігурами у просторі є *точка*, *пряма* і *площина*, а основними відношеннями, як і на площині, — відношення «належати» й «лежати між». Площину зображають здебільшого у вигляді паралелограма (мал. 99).

Як і в планіметрії, точки позначають великими латинськими буквами A, B, C,... , прямі — малими латинськими буквами a, b, c,... . Площини позначають малими грецькими буквами α (альфа), β (бета), γ (гама)... .



Мал. 99

Подивіться на малюнок 100. Ви бачите, що кожна грань многогранника лежить у певній площині. Різні його грані лежать у різних площинах. Будь-які дві *сусідні грані* мають спільний відрізок — ребро. Воно лежить на прямій перетину двох площин, що містять ці грані. У кожній вершині многогранника сходяться принаймні три попарно сусідні його грані. У прямокутному паралелепіпеді й кубі в кожній вершині сходяться рівно по три грані. Кожна їх вершина є точкою перетину трьох площин, що містять ці грані. Вершина піраміди може бути точкою перетину більш ніж трьох площин, що містять грані піраміди (див. мал. 97, 98). У вершинах основи піраміди сходяться по три грані — дві сусідні бічні грані й основа.



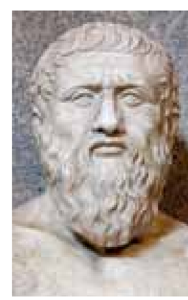
Мал. 100

Дізнайтеся більше

1. Предмети, що нас оточують, мають різні властивості: матеріал, з якого їх зроблено, масу, розміри, форму. У геометрії беруть до уваги лише форму предметів, їх розміри та взаємне розміщення. Решту властивостей досліджують у фізиці, хімії та інших науках. Узагалі, у природі не існує геометричних фігур — вони створюються уявою людини. На папері ж одержуємо *зображення* геометричної фігури.

Залежно від геометричного завдання, що розв'язують, один і той самий предмет розглядають як точку або лінію, поверхню або тіло. Наприклад, для водія, який перевозить труби на будівництво газопроводу, вони є тілами (займають певне місце в кузові автомобіля). Для робітника, який виконує ізоляцію, ці самі труби виступають у ролі поверхонь (для нього має значення не товщина стінок труб, а площа поверхні). Проектувальник, прокладаючи трасу, розглядає газопровід як лінію (для нього має значення протяжність труб).

2. Термін «стереометрія» походить від грецьких слів στερεοξ — просторовий і μετρεο — вимірювати. Його автором вважають давньогрецького вченого Платона (*427–347* рр. до н. е.) — засновника філософської школи в Афінах, яка називалася Академією. Головною заслугою Платона в історії математики вважають те, що він вперше висунув і всіляко обстоював ідею про необхідність знання математики кожною освіченою людиною. На дверях його Академії був напис: «Нехай не входить сюди той, хто не знає геометрії».



3. Термін «паралелепіпед» походить від грецьких слів παραλλοξ — паралельний і επιπεδον — площина. Термін «куб» (грец. χσβοξ) також античного походження. Таку назву мала гральна кістка з вирізаними на ній вічками. Її виготовляли з баранячого суглоба, який міг падати на чотири грані, а після обточування — на шість граней. Назву «піраміда» вважають чи не єдиним терміном, який дійшов до нас від стародавніх єгиптян. Вона означає «пам'ятник», тобто обеліск, установлений славетній людині — фараонові.

Пригадайте головне

1. Що вивчають у стереометрії?
2. Які фігури вважають просторовими? Наведіть приклад.
3. Поясніть, що таке прямокутний паралелепіпед. Які його властивості?
4. Що таке куб та які його властивості?
5. Який многогранник називається пірамідою?
6. Що є основою піраміди; її гранями; ребрами; вершинами?
7. Чому піраміду називають трикутною; чотирикутною; *n*-кутною?
8. Що таке висота піраміди?
9. Яку піраміду вважають правильною та які її властивості?
10. Назвіть основні геометричні фігури у просторі. Як їх позначають?

Розв'яжіть задачі

498'. Який з многогранників на малюнках 101 – 103 є прямокутним паралелепіпедом? Скільки в нього вершин, ребер, граней? Який многокутник є його основою? Які многокутники є його бічними гранями?

499'. Який з многогранників на малюнках 101 – 103 є кубом? Скільки в нього вершин, ребер, граней? Який многокутник є його основою? Які многокутники є його бічними гранями?

500'. Який з многогранників на малюнках 101 – 103 є пірамідою? Скільки в неї вершин, ребер, граней? Який многокутник є його основою? Які многокутники є її бічними гранями?

501'. Який многокутник є основою правильної піраміди? Яка властивість її бічних ребер? Де розміщується основа її висоти?

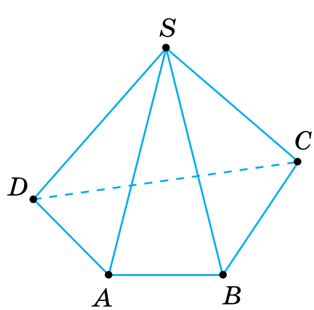
502'. Які з наведених фігур є основними в стереометрії:

1) точка;	5) кут;	9) куб;
2) відрізок;	6) трикутник;	10) куля;
3) промінь;	7) коло;	11) площина;
4) пряма;	8) ромб;	12) призма?

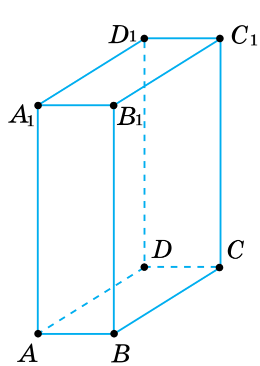
503°. Накресліть за клітинками прямокутний паралелепіпед $KLMNK_1L_1M_1N_1$. Назвіть:
1) протилежні грані; 2) протилежні ребра граней; 3) бічні ребра.
Які їх властивості?

504°. Накресліть за клітинками куб $KLMNK_1L_1M_1N_1$. Назвіть:
1) протилежні грані;
2) протилежні ребра граней;
3) бічні ребра. Які їх властивості?

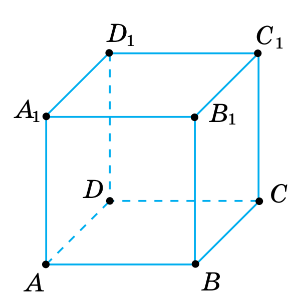
505°. Накресліть за клітинками піраміду $SKLMN$. Назвіть:
1) протилежні грані;
2) протилежні ребра граней;
3) бічні ребра.
Які їх властивості?



Мал. 101



Мал. 102



Мал. 103

506°. Чи можна вважати правильною піраміду, в якої основа:
1) рівнобедрений трикутник, а бічні ребра однакової довжини;
2) правильний трикутник;
3) правильний трикутник, а бічні ребра різної довжини;
4) рівносторонній трикутник, а бічні ребра дорівнюють стороні основи?
Відповідь поясніть.

507°. За малюнками 101 – 103 поясніть для даного многогранника:
1) у якій площині лежить певна його грань;
2) у яких площинах лежать сусідні грані;
3) по якій прямій перетинаються сусідні грані;
4) які грані мають спільне ребро: а) AB; б) CD; в) BD;
5) які грані сходяться у вершині: а) A; б) B; в) C.

508. Яку найменшу кількість граней, ребер, вершин може мати піраміда?

509. Дано n-кутну піраміду. Виведіть формулу для обчислення кількості її: 1) вершин; 2) ребер; 3) граней.

510. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ задано точку: 1) P на ребрі AA_1; 2) Q на ребрі AD. Площини яких граней перетинає пряма, що лежить у площині грані куба і проходить через дану точку та одну з вершин куба? Скільки таких прямих можна провести?

511. У піраміді $SABCD$ задано точку: 1) M на ребрі SA; 2) N на ребрі BC. Площини яких граней піраміди перетинає пряма, що лежить у площині грані піраміди і проходить через дану точку та одну з вершин піраміди? Скільки таких прямих можна провести?

512*. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назвіть площини, кожна з яких проходить принаймні через три вершини куба.

513*. На трьох бічних ребрах прямокутного паралелепіпеда розміщено по дві точки. Скільки можна провести площин, кожна з яких проходитиме принаймні через три з даних точок?

514*. На трьох бічних ребрах чотирикутної піраміди розміщено по три точки. Скільки можна провести площин, кожна з яких проходитиме принаймні через три з даних точок?

Проявіть компетентність

515. З дерев'яного кубика треба виточити правильну піраміду: 1) чотирикутну; 2) трикутну. Поясніть, як це можна зробити.

516. Як скласти із шести олівців однакової довжини чотири рівносторонні трикутники зі стороною, що дорівнює довжині олівця?

517. Вам потрібно знайти відстань між найбільш віддаленими вершинами предмета, що має форму прямокутного паралелепіпеда, наприклад, цеглини. Запропонуйте спосіб вимірювання лінійкою цієї відстані, не виконуючи ніяких обчислень.

§ 28 Аксіоми стереометрії

1. АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Ви вже знаєте, що властивості основних геометричних фігур, які приймають без доведення, називаються *аксіомами*.

Вивчені в планіметрії аксіоми виконуються в кожній площині простору.

Введення у просторі нової геометричної фігури — площини — потребує розширення системи аксіом планіметрії. Нові аксіоми коротко називатимемо *аксіомами стереометрії*. Вони характеризують взаємне розміщення точок, прямих і площин. Сформулюємо їх.

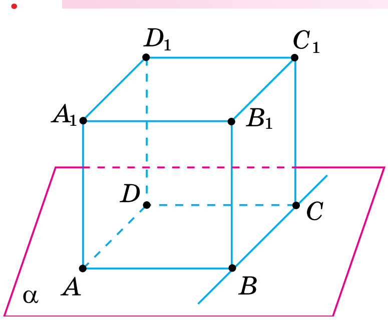
Аксіоми (стереометрія).

1. Існують точки, що лежать у даній площині, і точки, що не лежать у ній.

2. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.

3. Якщо дві точки прямої лежать у площині, то й кожна точка цієї прямої лежить у даній площині.

4. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.



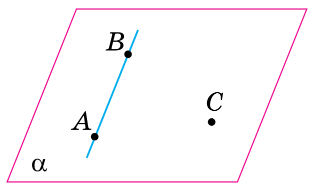
Мал. 104

Подивіться на малюнок 104. Ви бачите, що: 1) вершина A куба лежить у площині α, а вершина A_1 не належить їй; 2) через три вершини куба A, B і C проходить єдина площина α (тому площину α можна називати інакше — площина ABC); 3) кожна точка прямої BC лежить у площині α; 4) площина ABC перетинається з площиною B_1BC по прямій BC, оскільки має з нею спільну точку B.

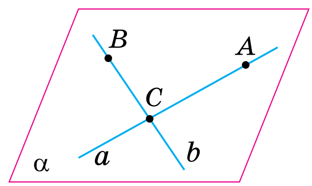
2. НАСЛІДКИ З АКСІОМ СТЕРЕОМЕТРІЇ

НАСЛІДОК 1. **Через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну.**

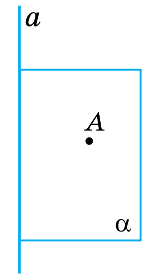
Справді, будь-які дві точки даної прямої разом з даною точкою (мал. 105) утворюють три точки, що не лежать на одній прямій. За аксіомою 2, через них проходить єдина площина. За аксіомою 3, дана пряма лежить у цій площині.



Мал. 105



Мал. 106



Мал. 107

На малюнку 104 ви бачите, що площина α проходить через пряму BC, яка містить ребро куба, і точку A — його вершину.

НАСЛІДОК 2. **Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину і до того ж тільки одну.**

Справді, якщо на кожній з даних прямих взяти по одній точці, відмінній від точки перетину даних прямих, і точку перетину (мал. 106), то утворяться три точки, що не лежать на одній прямій. За аксіомою 2, через них проходить єдина площина. За аксіомою 3, кожна з даних прямих лежить у цій площині.

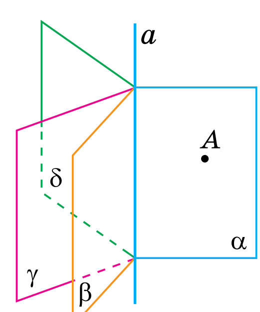
На малюнку 104 ви бачите, що площина α проходить через прямі AB і BC, які містять відповідні ребра куба і перетинаються в його вершині B.

Зверніть увагу:
площину можна задати:
1) трьома точками, які не лежать на одній прямій;
2) прямою і точкою, яка не лежить на ній;
3) двома прямими, що перетинаються.

Задача. Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин. Доведіть.

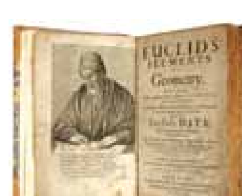
Розв'язання. Через пряму a і точку A, що не лежить на ній, можна провести єдину площину, нехай α (мал. 107). Але, за аксіомою 1, у просторі існує безліч точок, що не лежать у площині α. Через кожну із цих точок і дану пряму можна провести площину, відмінну від площини α. Тому таких площин існує безліч.

На малюнку 108 ви бачите, що через пряму a проходять площини α, β, γ і δ.



Мал. 108

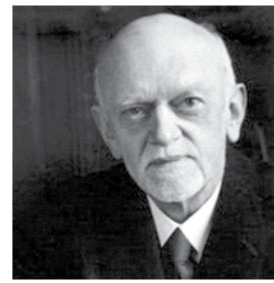
Дізнайтеся більше



1. Головна праця давньогрецького вченого Евкліда «Начала» побачила світ близько 300 р. до н. е. У ній підсумовано й систематизовано всі досягнення грецької математики. «Начала» містять 13 книжок.

Історичне значення «Начал» Евкліда полягає в тому, що в них уперше зроблено спробу застосувати *аксіоматичний метод* у побудові геометрії. Нині цей метод є основним для створення й обґрунтування математичних теорій.

2. Давид Гільберт (*1862–1943*) — німецький математик. Був визнаним світовим лідером математиків, який значно вплинув на сучасну алгебру й геометрію. Гільберт розробив систему аксіом евклідової геометрії, яка є повнішою, ніж система аксіом Евкліда. Нині «Основи геометрії» Давида Гільберта перекладено багатьма мовами світу.



Пригадайте головне

1. Що таке аксіома?
2. Сформулюйте аксіоми стереометрії.
3. Які наслідки випливають з аксіом стереометрії?
4. Як можна задати площину?

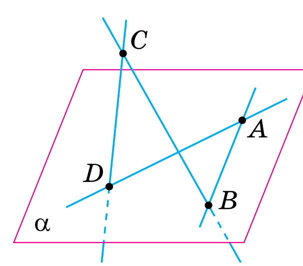
Розв'яжіть задачі

518'. Наведіть приклади аксіоми.

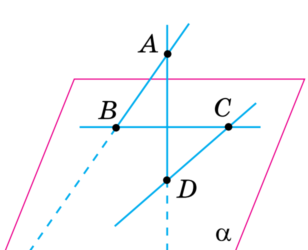
519'. Дано площину α і прямі AB, BC, AD і CD (мал. 109–110).
1) Які з точок A, B, C і D лежать у площині α?
2) Яку іншу назву можна дати площині α?
3) Які з прямих лежать у площині α?

520'. За даними на малюнках 111, 112 з'ясуйте:
1) які спільні точки мають площини α і β;
2) по якій прямій перетинаються площини α і β.

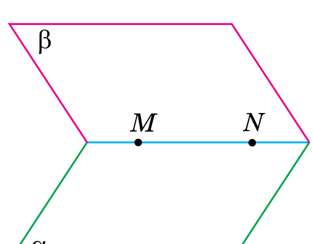
521°. Чи справджуються у просторі наведені аксіоми планіметрії:
1) через будь-які дві точки можна провести єдину пряму;



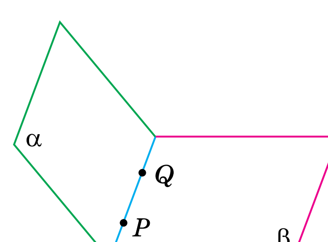
Мал. 109



Мал. 110



Мал. 111



Мал. 112

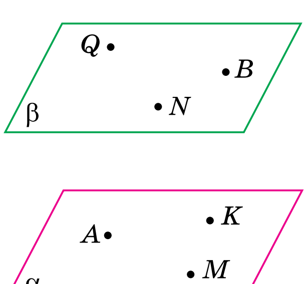
2) з будь-яких трьох точок прямої лише одна з них лежить між двома іншими;
3) через будь-яку точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній;
4) на будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок заданої довжини і до того ж тільки один;
5) кожен відрізок має певну довжину, більшу за нуль;
6) довжина відрізка дорівнює сумі довжин його частин;
7) від будь-якого променя по один бік від нього можна відкласти кут заданої градусної міри і до того ж тільки один;
8) кожен кут має градусну міру, більшу за нуль і меншу від 180°;
9) градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°;
10) градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається променем, що проходить між його сторонами? Відповідь поясніть.

522°. За даними на малюнках 113, 114 визначте точки:
1) які лежать у площині α;
2) які не лежать у площині β;
3) через які не проходить площина α;
4) через які проходить площина β.

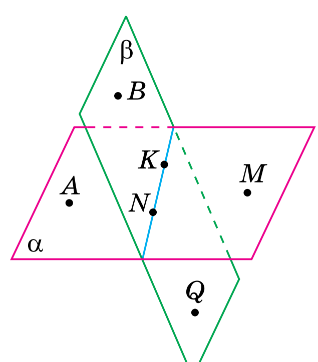
523°. У площині α позначте точки A, B, C і D, а поза нею — точки M і N. Чи можна дати площині α таку назву:
1) AN; 3) $BCDM$; 5) BAC; 7) DAB ;
2) ADB ; 4) ACD; 6) CNB; 8) MDC ?

524°. Проведіть площину α. Позначте:
1) точки B і C, які лежать у площині α, і точку A, що не лежить у цій площині;
2) точки A і C, які лежать у площині α, і точку B, що не лежить у цій площині. Проведіть прямі AC, AB, BC. Які з цих прямих лежать у площині α?

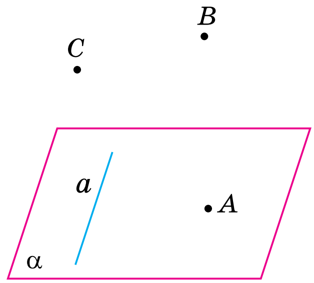
525°. Чи можуть пряма і площина мати тільки дві спільні точки? Чому?



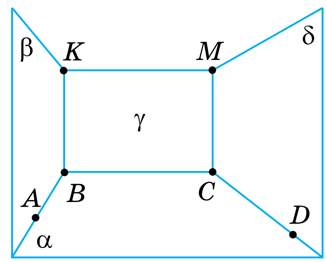
Мал. 113



Мал. 114



Мал. 115



Мал. 116

526°. Пряма a і точка A лежать у площині α (мал. 115). Точки B і C не лежать у даній площині. Чи визначають площину, відмінну від площини α:

1) пряма a і точка B;
2) пряма a і точка C;
3) прямі AB і AC;
4) прямі AB і BC?

Відповідь поясніть.

527°. За даними на малюнку 116 заповніть таблицю 15 за зразком, наведеним у другому її стовпці.

Таблиця 15

Площини	α і β	α і γ	α і δ	β і γ	γ і δ
Спільні точки	A і B				
Спільна пряма	AB				

528°. Проведіть площини α і β, що перетинаються. Позначте точки, які лежать: 1) тільки в площині α; 2) тільки в площині β; 3) у площинах α і β. Зробіть відповідний запис.

529. **Чи завжди можна провести площину через три довільні точки простору? А через чотири?** Відповідь поясніть.

530. Якщо три точки кола лежать у площині α, то й усі точки кола лежать у даній площині. Доведіть.

531. **Чи лежать в одній площині всі прямі, що перетинають сторони даного кута?** Відповідь поясніть.

532. Дано два відрізки, що перетинаються: 1) AC і BD ; 2) AB і CD. Чи лежать в одній площині прямі BA, DC, DB і CA? Відповідь поясніть.

533. Площини α і β перетинаються по прямій a. Пряма b лежить у площині α. Ці прямі перетинаються в точці B. Чи лежить точка B на прямій a? Відповідь поясніть.

534*. Доведіть, що існують точки поза даною прямою на площині, у якій лежить дана пряма.

535*. Дано чотири точки, що не лежать в одній площині. Скільки площин можна провести через: 1) усі дані точки; 2) трійки даних точок; 3) пари даних точок? Відповідь обґрунтуйте.

536*. Три площини попарно перетинаються по прямих a, b і c. Доведіть: якщо ці площини мають спільну точку A, то прямі a, b і c перетинаються в точці A.

Проявіть компетентність

Мал. 117

537. Чому штативи багатьох приладів (фотоапарата, теодоліта тощо) виготовляють у формі триноги (мал. 117)?

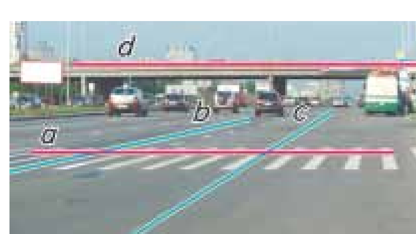
538. Щоб перевірити, чи є дана поверхня плоскою, до неї прикладають лінійку її «ребром» в різних напрямках. Ребро лінійки має повністю лежати на даній поверхні. На чому ґрунтується така перевірка?

539. Перевіряючи, чи лежать кінці чотирьох ніжок стільця в одній площині, тесля користується двома нитками. Як він це робить?

540. Вважаючи двері кімнати моделлю площини, а петлі, замок чи засув точками, поясніть, чому незамкнені двері відчиняються, а замкнені — нерухомі.

§ 29 Взаємне розміщення двох прямих у просторі

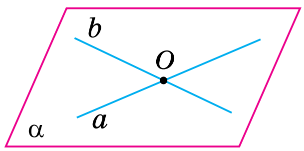
Ви знаєте, що в кожній площині дві прямі або мають одну спільну точку, тобто перетинаються, або не мають спільних точок, тобто паралельні.



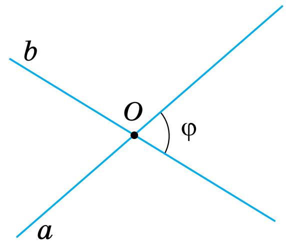
Мал. 118

? Яке взаємне розміщення двох прямих у просторі?

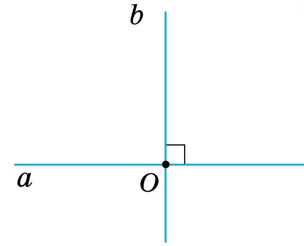
Подивіться на малюнок 118. Ви бачите, що пішохідний перехід (пряма a)



Мал. 119



Мал. 120



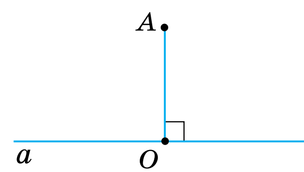
Мал. 121

перетинає дві паралельні смуги руху транспорту (прямі b і c), які проходять під естакадою (пряма d).

Цей приклад ілюструє три випадки взаємного розміщення двох прямих у просторі:

- дві прямі *перетинаються* (прямі a і b);
- дві прямі *паралельні* (прямі b і c);
- дві прямі *мимобіжні* (прямі b і d).

Розглянемо властивості прямих у кожному з випадків.



Мал. 122

1. ПРЯМІ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ

За наслідком 1 з аксіом стереометрії, прямі a і b, що перетинаються, лежать в одній площині (мал. 119). Тому в просторі, як і на площині, **прямі, що перетинаються, мають одну спільну точку — точку їх перетину.**

Кутом між прямими a і b вважається гострий кут, якщо прямі утворюють гострі й тупі кути (мал. 120). Якщо φ — кут між прямими a і b, то говорять, що дані прямі *перетинаються під кутом* φ.

Якщо прямі a і b утворюють прямі кути (мал. 121), то кут між прямими дорівнює 90°. Такі прямі називаються *перпендикулярними*.

Перпендикулярність двох прямих у просторі позначають так, як у планіметрії: $a \perp b$.

Промені або відрізки, що лежать на перпендикулярних прямих, також вважають перпендикулярними. *Перпендикуляром* до даної прямої у просторі називається відрізок прямої, перпендикулярної до даної прямої, який має одним із своїх кінців точку їх перетину. На малюнку 122 відрізок AO є перпендикуляром, проведеним з точки A до прямої a, точка O — *основа перпендикуляра*. Перпендикуляр AO є найкоротшим з усіх відрізків, що сполучають точку A з точками прямої a.

Відстанню від точки до прямої **називається довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної прямої.**

На малюнку 122 відстань від точки A до прямої a дорівнює довжині перпендикуляра AO.

2. ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

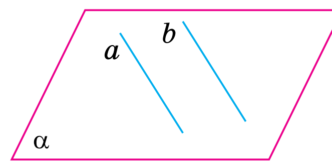
З курсу планіметрії ви знаєте, що на площині паралельними називаються дві прямі, які не перетинаються. Спробуйте дати відповідне означення для простору та порівняйте його з наведеним у підручнику.

Дві прямі у просторі, що лежать в одній площині й не перетинаються, називаються *паралельними*.

За означенням, паралельні прямі не мають спільних точок (мал. 123).

Паралельність двох прямих у просторі позначають, як у планіметрії: $a \parallel b$.

Ви знаєте, що в площині через точку, яка не лежить на прямій, можна провести єдину пряму, паралельну даній прямій. Це твердження було прийнято як аксіому в планіметрії. Однак у просторі це твердження потребує доведення.



Мал. 123

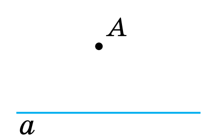
Теорема (основна властивість паралельних прямих у просторі)

Через точку, яка не лежить на прямій, у просторі можна провести пряму, паралельну даній прямій, і до того ж тільки одну.

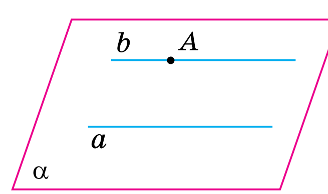
Дано: пряма a, точка A, що не лежить на прямій a (мал. 124).

Довести: існує пряма $b \parallel a$ ($A \in b$) і до того ж тільки одна.

Доведення. За наслідком 1 з аксіом стереометрії, через пряму a і точку A можна провести площину α і до того ж тільки одну. У площині α, за аксіомою паралельних прямих, через точку A можна провести пряму $b \parallel a$, і до того ж тільки одну (мал. 125). Отже, у просторі через точку A можна провести тільки одну пряму $b \parallel a$.



Мал. 124



Мал. 125

З означення паралельних прямих і доведеної теореми випливає, що **через дві паралельні прямі можна провести площину і до того ж тільки одну.**

? Як установити паралельність двох прямих у просторі?

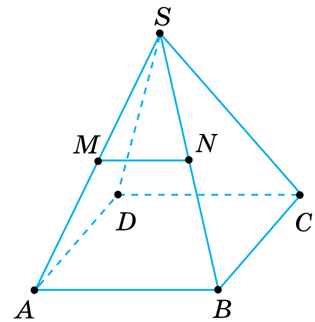
Відповідь дає така теорема, яку приймемо без доведення.

Теорема (ознака паралельності прямих)

Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.

Задача 1. MN — середня лінія бічної грані SAB правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ (мал. 126). Доведіть, що $MN \parallel CD$.

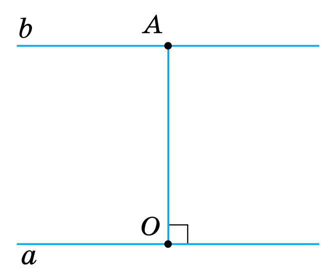
Розв'язання. Бічними гранями даної піраміди є трикутники. Тому в ΔSAB, за властивістю середньої лінії трикутника, $MN \parallel AB$. Основа даної піраміди — квадрат $ABCD$, тому $AB \parallel CD$. Отже, за ознакою паралельності прямих, $MN \parallel CD$.



Мал. 126

Зверніть увагу:
щоб установити паралельність двох прямих, покажіть, що:
- або існує пряма, якій паралельна кожна з даних прямих,
- або відрізки даних прямих є протилежними сторонами паралелограма (чи основами трапеції, чи основою й середньою лінією трикутника тощо).

Відстанню між паралельними прямими **називається довжина перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї прямої до другої прямої.**

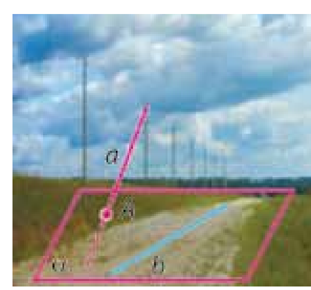


Мал. 127

На малюнку 127 відстань між паралельними прямими a і b дорівнює довжині перпендикуляра AO.

3. МИМОБІЖНІ ПРЯМІ

Подивіться на малюнок 128. Ви бачите, що обірвана лінія електропередачі (пряма a) упирається в землю в точці A. Вона не має спільних точок з дорогою (прямою b). Іншими словами, пряма a перетинає площину в точці A, а пряма b лежить у ній, але не проходить через точку A. Прямі a і b не мають спільних точок, але вони не є паралельними. Отже, через них не можна провести площину. Саме це відрізняє мимобіжні прямі від паралельних прямих.

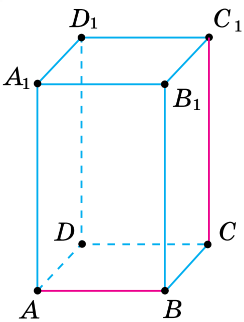


Мал. 128.
Обірвані електропроводи — небезпечні!

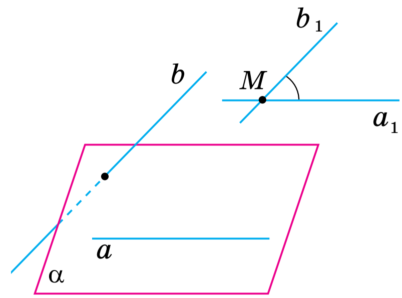
Дві прямі у просторі, що не лежать в одній площині, називаються *мимобіжними*.

На малюнку 129 ви бачите прямокутний паралелепіпед. Прямі, що містять ребра AB і CC_1, — мимобіжні.

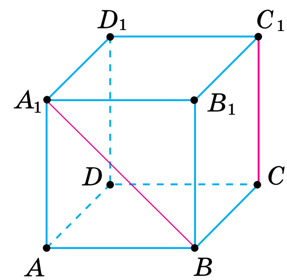
Кутом між мимобіжними прямими **називається кут між прямими, що перетинаються і паралельні даним мимобіжним прямим.**



Мал. 129



Мал. 130



Мал. 131

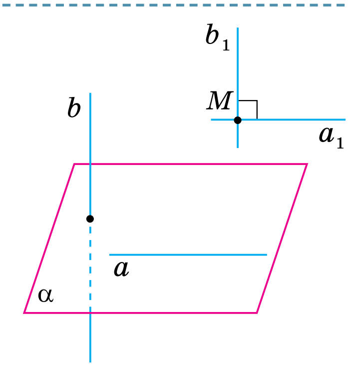
Кут між прямими a і b (мал. 130) не залежить від вибору прямих, що перетинаються.

Задача 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 131). Знайдіть кут між мимобіжними прямими BA_1 і CC_1.

Розв'язання. $CC_1 \parallel BB_1$, оскільки грань куба — квадрат. Тоді кут між мимобіжними прямими BA_1 і CC_1 дорівнює куту між прямими BA_1 і BB_1, тобто 45°.

Зверніть увагу:
щоб знайти кут між мимобіжними прямими, можна на одній з них взяти довільну точку і через неї провести пряму, паралельну другій прямій.

Якщо кут між мимобіжними прямими дорівнює 90°, то дані прямі вважають перпендикулярними (мал. 132).



Мал. 132

Зверніть увагу:
у просторі перпендикулярні прямі можуть або перетинатися, або бути мимобіжними.

Взаємне розміщення двох прямих у просторі подано в таблиці 16.

Таблиця 16

<table>
<tr><th>Фігури</th><th colspan="3">Взаємне розміщення</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Дві прямі a і b</td><td rowspan="2">Лежать в одній площині</td><td>Мають одну спільну точку</td><td>Перетинаються</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Не мають спільних точок</td><td>Паралельні</td></tr>
<tr><td>Не лежать в одній площині</td><td>Мимобіжні</td></tr>
</table>

Дізнайтеся більше

Термін «класифікація» походить від латинських слів χλασσισ — розряд і φαχιο — роблю. *Класифікація* — це розподіл деяких предметів на класи відповідно до найсуттєвішої їх ознаки. У свою чергу, кожний клас предметів поділяється на підкласи. Суттєва ознака, що дає підстави класифікувати предмети, називається *основою класифікації*. Вам добре відомі класифікації в різних галузях людського знання. Наприклад, у зоології — живих істот, які населяють нашу планету, в історії — суспільно-економічних формацій, у фізиці — елементарних частинок тощо.

Наукова класифікація відіграє важливу роль у науці. Вона полегшує процес дослідження, уможливлює виявлення прихованих закономірностей. Показовим є приклад розробки класифікації хімічних елементів. Видатний учений **Д. І. Менделєєв** (*1834–1907*) відкрив у 1869 р. один з найфундаментальніших законів природи — періодичний закон хімічних елементів. Це дало змогу вченому не лише систематизувати й уточнити дані про відомі на той час хімічні елементи, а й передбачити існування ще трьох елементів.

Пригадайте головне

1. Які можливі випадки розміщення двох прямих у просторі?
2. Як у просторі визначають кут між прямими, що перетинаються?
3. Сформулюйте означення відстані від точки до прямої.
4. Які прямі у просторі називаються паралельними? Як їх позначають?
5. Що таке відстань між паралельними прямими?
6. Дайте означення мимобіжних прямих.
7. Що таке кут між мимобіжними прямими?
8. Поясніть, які прямі у просторі вважаються перпендикулярними.

Розв'яжіть задачі

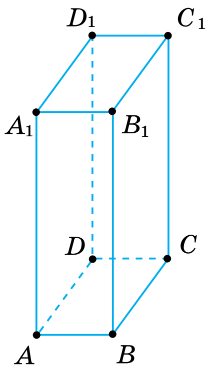
541'. Наведіть приклади взаємного розміщення двох прямих на навколишніх предметах.

542'. На малюнках 133, 134 зображено прямокутний паралелепіпед. Назвіть прямі, які мають одну спільну точку з даною прямою:
1) AB; 2) BC; 3) AC.
У якій точці ці прямі перетинають дану пряму?

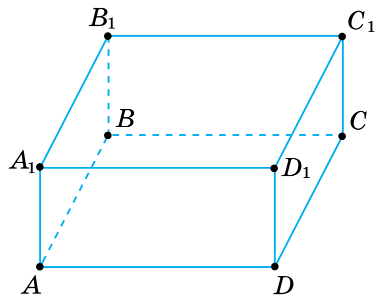
543'. Назвіть будь-які дві пари взаємно перпендикулярних прямих на малюнках 133, 134.

544'. Чи зображено перпендикулярні прямі на малюнках 135, 136?

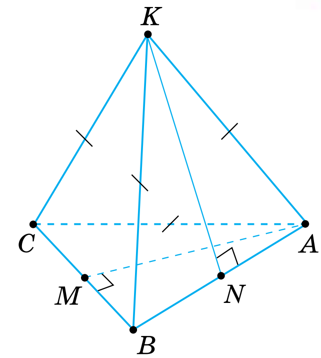
545'. Назвіть пряму й перпендикуляр до неї на малюнках 133 – 136.



Мал. 133



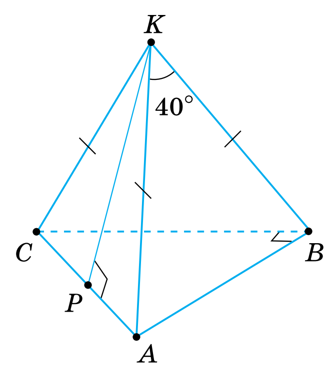
Мал. 134



Мал. 135

546'. Довжина якого відрізка дорівнює відстані від точки A до прямої BC (мал. 133 – 136)?

547'. На малюнках назвіть:
1) паралельні прямі (мал. 133, 134);
2) мимобіжні прямі (мал. 133 – 136).



Мал. 136

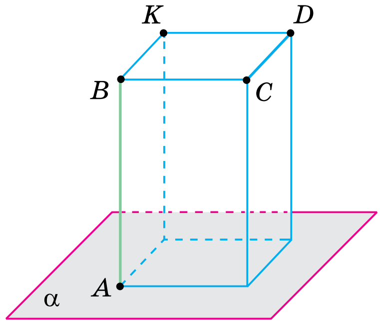
548°. Накресліть куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Запишіть:
1) прямі, що перетинаються й лежать у площині нижньої основи куба;
2) прямі, що перетинаються під прямим кутом і лежать у площині верхньої основи куба;
3) перпендикулярні прямі, що проходять через точку A_1; точку C;
4) пряму й перпендикуляр, який проведено до цієї прямої з точки B; з точки D_1.

549°. Яка градусна міра кута між прямими:
1) CA і AK (мал. 135);
2) CA і AM, якщо ΔABC — правильний (мал. 135);
3) KA і AB (мал. 136);
4) KC і KP, якщо $\Delta AKB = \Delta AKC$ (мал. 136)?

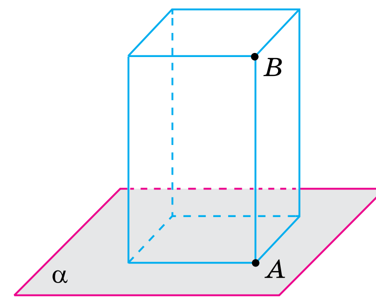
550°. Вершина верхньої основи прямокутного паралелепіпеда та ребро його нижньої основи лежать в одній бічній грані. Якою може бути відстань від даної вершини до даного ребра паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють:
1) 3 см, 4 см, 5 см; 2) 5 см, 2 см, 2 см; 3) 8 см, 8 см, 8 см?
Побудуйте відповідне зображення.

551°. Знайдіть відстані між паралельними ребрами прямокутного паралелепіпеда, якщо його виміри дорівнюють:
1) 4 см, 6 см, 9 см; 2) 5 см, 5 см, 5 см; 3) 5 см, 12 см, 12 см.

552°. Як можуть взаємно розміщатися ребра основи й бічні ребра:
1) паралелепіпеда; 2) трикутної піраміди; 3) чотирикутної піраміди?



Мал. 137



Мал. 138

553°. У прямокутному паралелепіпеді (мал. 137) ребра AB і CD лежать на мимобіжних прямих, а ребра CD і BK — на паралельних прямих. На малюнку 138 цей паралелепіпед певним чином повернуто. Скопіюйте ці малюнки й позначте на них ребра CD і BK. Яке взаємне розміщення прямих, на яких лежать ребра AB і CD? А ребра CD і BK?

554°. Назвіть пари ребер многогранника, які лежать на мимобіжних прямих, якщо цей многогранник:
1) куб; 2) прямокутний паралелепіпед.

555°. Назвіть пари ребер піраміди, які лежать на мимобіжних прямих, якщо піраміда: 1) трикутна; 2) чотирикутна.

556°. AB і CD — мимобіжні прямі. Чи є паралельними прямі:
1) AC і BD; 2) AD і BC?

557°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Назвіть пари його ребер, що лежать на перпендикулярних прямих, які:
1) перетинаються; 2) є мимобіжними.

558. Точки A і B лежать у площині α, а точка C не належить їй. Знайдіть відстань від точки C до прямої AB, якщо:
1) $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см;
2) $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 9$ см.

559. Пряма a і точка A лежать у площині α. Скільки прямих можна провести через точку A, кожна з яких:
1) перетинає пряму a; 2) паралельна прямій a; 3) мимобіжна з прямою a?
Розгляньте випадки, якщо точка A лежить на прямій a і якщо не належить їй.

560. **Пряма a лежить у площині α, пряма b перетинає її, але не перетинає пряму a. Чи можна провести площину через прямі a і b?**

561. Скільки пар ребер прямокутного паралелепіпеда лежать на мимобіжних прямих, якщо призма: 1) трикутна; 2) чотирикутна?

562. Скільки пар ребер піраміди лежать на мимобіжних прямих, якщо піраміда: 1) трикутна; 2) чотирикутна?

563. **$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між прямими:**
1) DA_1 і BC_1; 2) BA_1 і BC_1; 3) AD і CC_1.

564*. Доведіть: якщо дві прямі не мають спільних точок, то вони або лежать в одній площині, або не лежать в одній площині.

565*. Знайдіть відстань між паралельними ребрами правильної шестикутної піраміди, ребро основи якої дорівнює бічному ребру, що має довжину 5 см.

566*. Скільки пар мимобіжних прямих визначають пари з:
1) чотирьох точок; 2) п'яти точок; 3) n точок?

567*. Знайдіть кут між мимобіжними ребрами правильної трикутної призми, бічне ребро якої вдвічі довше за ребро основи.

Проявіть компетентність

568. Як за допомогою двох ниток установити, чи стоятиме стіл із чотирма ніжками на рівній підлозі стійко?

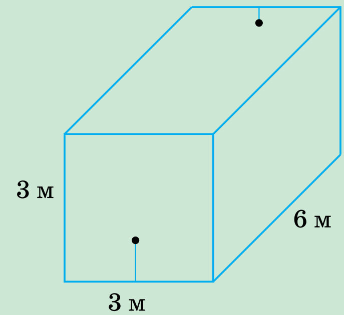
569. На подвір'ї (площина α) розміщено колодязь (точка A), прокладено доріжку (пряма a) і встановлено стовп із ліхтарем (пряма b). У площині α проведіть пряму, яка:
1) перетинає прямі a і b;
2) перетинає пряму b і паралельна прямій a;
3) перетинає прямі a і b та проходить через точку A.
Сформулюйте відповідні практичні задачі.

570. Майстриня прикрашає сорочку вишиваними смужками, розміщуючи їх на лівій і правій полах сорочки паралельно лінії ґудзиків. Чому в готовому виробі смужки виглядають паралельними?

571. Як визначити кут між мимобіжними прямими в класній кімнаті?

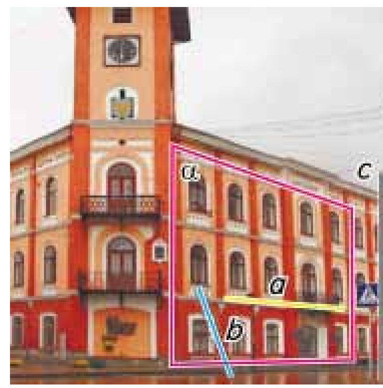
572. Щоб естетично розмістити на стіні картину прямокутної форми, один з її горизонтальних країв вирівнюють відносно стику цієї стіни і стелі. На чому ґрунтується такий спосіб?

573. Необхідно з'єднати проводкою вимикач і світильник у кімнаті, що має довжину 6 м, ширину 3 м і висоту 3 м. Вимикач розміщено посередині торцевої стіни на висоті 1 м від підлоги, а світильник — посередині протилежної стіни на відстані 1 м від стелі (мал. 139). Як треба провести проводку, щоб її довжина була найкоротшою?



Мал. 139

§ 30 Взаємне розміщення прямої та площини



Мал. 140

Подивіться на малюнок 140. Ви бачите, що на стіні будинку (площина α) проходить труба газопостачання (пряма a), до вікна другого поверху приставлено драбину (пряма b), а поруч із будинком — дорожній знак (пряма c). Цей приклад ілюструє три випадки взаємного розміщення прямої та площини:

- пряма *лежить у* площині (пряма a), вона має з площиною безліч спільних точок;
- пряма *перетинає* площину (пряма b), вона має з площиною одну спільну точку;
- пряма *не перетинає* площину (пряма c), вона не має з площиною спільних точок.

Пряма й площина, які не перетинаються, називаються *паралельними*.

Записуємо: $a \parallel \alpha$, і говоримо: «пряма a паралельна площині α».

Як установити, що пряма паралельна площині? Відповідь дає така теорема.

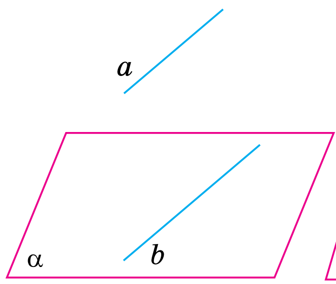
Теорема **(ознака паралельності прямої та площини).**

Якщо пряма, що не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині.

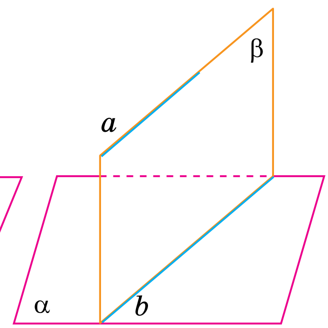
Дано: площина α; пряма a, що не лежить у площині α; пряма b, що лежить у площині α; $a \parallel b$ (мал. 141).

Довести: $a \parallel \alpha$.

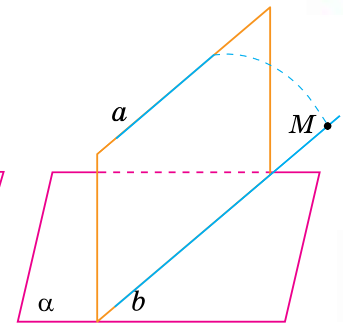
Доведення. Проведемо площину α через паралельні прямі a і b (мал. 142). Площини α і β перетинаються по прямій b. Припустимо, що пряма a не паралельна площині α, а перетинає площину α деякій точці M (мал. 143). Ця точка лежить у даній площині α і площині β, яка проходить через паралельні прямі a і b. Тоді точка M лежить на прямій b перетину



Мал. 141



Мал. 142



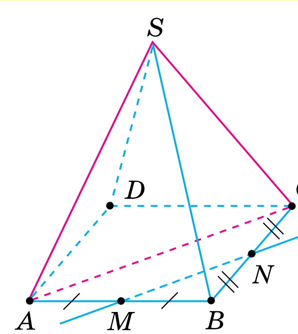
Мал. 143

площин α і β. Отже, прямі a і b перетинаються. А це суперечить умові теореми, бо за умовою $a \parallel b$. Робимо висновок: наше припущення неправильне, а правильним є те, що пряма a не перетинає площину α, тобто $a \parallel \alpha$.

Зверніть увагу:
спосіб доведення від супротивного полягає в тому, що:
1) робимо припущення, протилежне тому, що треба довести;
2) міркуваннями доходимо висновку, що суперечить або умові твердження, яке доводиться, або одній з аксіом, або доведеній раніше теоремі, або припущенню;
3) робимо висновок — наше припущення неправильне, тому правильним є те, що треба було довести.

Задача. У піраміді $SABCD$ через ребра SA і SC проведено площину (мал. 144). Чи паралельна цій площині пряма MN, що проходить через середини ребер AB і BC?

Розв'язання. Відрізок MN — середня лінія ΔABC, який не лежить у площині SAC. Оскільки $MN \parallel AC$, а AC лежить у площині SAC, то пряма MN паралельна площині SAC.



Мал. 144

Зверніть увагу:
щоб установити паралельність прямої та площини, покажіть, що:
- або в площині існує пряма, якій паралельна дана пряма,
- або відрізки даної прямої та прямої, що лежить у даній площині, є протилежними сторонами паралелограма (чи основами трапеції, чи основою та середньою лінією трикутника тощо), який не лежить у даній площині.

Взаємне розміщення прямої та площини подано в таблиці 17.

Таблиця 17

Фігури	Взаємне розміщення	
Пряма a і площина α	Мають безліч спільних точок	Пряма лежить у площині
	Мають одну спільну точку	Пряма перетинає площину
	Не мають спільних точок	Пряма паралельна площині

Дізнайтеся більше

1. Метод доведення від супротивного ґрунтується на законі виключеного третього: із двох суперечливих тверджень «*T*» і «не *T*» одне обов'язково істинне, а друге — хибне; третього бути не може. Цей закон сформулював давньогрецький учений Арістотель (384 — 322 рр. до н. е.) у своїй праці «Метафізика».

2. У «Началах» Евкліда (III ст. до н. е.) метод доведення від супротивного застосовується для доведення багатьох теорем, зокрема тих, що встановлюють існування та єдиність певної геометричної фігури. Прикладом такої теореми є основна властивість паралельних прямих у просторі:

Через точку, яка не лежить на прямій, у просторі

можна провести пряму, паралельну даній прямій, і тільки одну

(*існування*) (*єдиність*)

У «Началах» теореми існування та єдиності відіграють ключову роль. Річ у тім, що давньогрецькі математики не припускали існування фігури незалежно від побудови. За Евклідом, геометрична фігура існує лише з моменту її побудови. Тому доведення існування часто містять правила побудови відповідних фігур чи їх комбінацій. Для доведення єдиності застосовується метод від супротивного.

Пригадайте головне

1. Назвіть випадки взаємного розміщення прямої та площини.
2. Дайте означення паралельних прямої та площини. Як їх позначають?
3. Сформулюйте ознаку паралельності прямої та площини.
4. Поясніть, у чому полягає спосіб доведення від супротивного.
5. Як можна встановити паралельність прямої та площини?

Розв'яжіть задачі

574'. Наведіть приклади взаємного розміщення прямої та площини на предметах у класній кімнаті.

575'. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 145). Яке взаємне розміщення:
1) прямої A_1C_1 і площини ABC;
2) прямої BC_1 і площини $D_1A_1B_1$;
3) прямої AD_1 і площини BCC_1?

576'. На малюнках 146, 147 назвіть:
1) прямі, що лежать у площині ABC;
2) прямі, що перетинають площину ABC;
3) прямі, паралельні площині ABC.
Зробіть відповідні записи.

577°. Чому пряма не може перетинати площину більш ніж в одній точці? Відповідь обґрунтуйте.

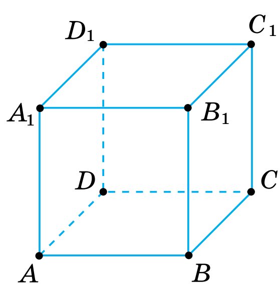
578°. Пряма a паралельна площині α. Чи існують у даній площині прямі, непаралельні прямій a? Проведіть одну з них.

579°. **Чи правильно, що пряма, паралельна площині, є паралельною будь-якій прямій, що лежить у даній площині?**

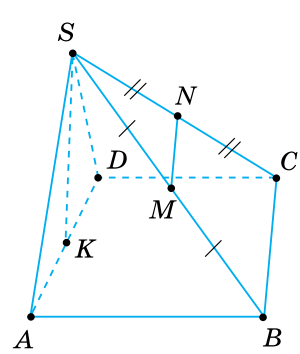
580°. Чи може пряма a перетинати площину α, якщо паралельні їй прямі лежать у цій площині?

581°. **Чи правильно: якщо одна з двох паралельних прямих паралельна деякій площині, то й друга пряма паралельна цій площині?**

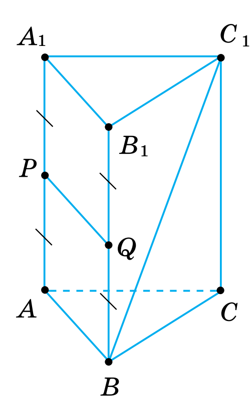
582°. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведіть пряму KP, яка лежить у площині:
1) грані BCC_1B_1, проходить через середину ребра BB_1 і паралельна площині $A_1B_1C_1$;
2) грані $ABCD$, проходить через середину ребра CD і паралельна площині AA_1D_1;



Мал. 145



Мал. 146



Мал. 147

3) грані ABB_1A_1, проходить через середину ребра A_1B_1 і паралельна площині AA_1D_1.

583°. Основа піраміди $SABCD$ — паралелограм. У бічній грані піраміди проведено пряму EF, де точки E і F — середини бічних ребер. Яка довжина відрізка EF, якщо сторони основи піраміди дорівнюють: 1) 4 см і 6 см; 2) 3 см і 7 см; 3) 2 см і 5 см?

584°. Трикутник ABC не лежить в одній площині з іншим трикутником, але має з ним спільну сторону: 1) AB; 2) BC; 3) AC. Доведіть, що одна із середніх ліній трикутника ABC паралельна площині іншого трикутника.

585°. Площина α паралельна стороні AB трикутника ABC і перетинає сторони AC і BC в точках K і N, $BN = NC$. Доведіть, що $KN \parallel AB$, і знайдіть довжину сторони AB, якщо: 1) $KN = 9$ см, $AC = 24$ см, $KC = 12$ см; 2) $KN = 8$ см, $AC = 18$ см, $KC = 9$ см; 3) $KN = 11$ см, $AC = 16$ см, $KC = 8$ см.

586. **Дві прямі паралельні одній площині. Чи паралельні вони між собою?**

587. Паралельні прямі a і b не лежать у площині α. Якщо $a \parallel \alpha$, то і $b \parallel \alpha$. Доведіть.

588. Пряма a паралельна площині α. Чи правильно, що будь-яка пряма, яка проходить через деяку точку площини α паралельно прямій a, лежить у площині α?

589. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено площину через ребра AA_1 і CC_1. Чи паралельна вона прямій, що проходить через середини ребер: 1) AB і BC; 2) A_1D_1 і CD? Відповідь обґрунтуйте.

590. Основа піраміди з вершиною S — правильний шестикутник $ABCDEF$. Чи можна в грані SAB провести відрізок, паралельний площині: 1) ABC; 2) SBC; 3) SDE; 4) SAF?

591. Чи може площина, яка проходить через середини двох сторін трикутника, перетинати третю його сторону?

592. Дано: 1) квадрат; 2) правильний шестикутник. Площину α проведено паралельно одній зі сторін даного многокутника. Дослідіть, як може розміщатися площина α відносно інших сторін даного многокутника.

593*. Чи можна побудувати площину, яка проходить через дану пряму паралельно:
1) другій даній прямій; 2) двом іншим даним прямим?

594*. Площина α перетинає дві сторони трикутника й ділить їх у відношенні $m : n$. Як розміщена дана площина відносно третьої сторони трикутника, якщо: 1) $m = 1$, $n = 2$; 2) $m = 2$, $n = 3$?
Скільки випадків треба розглянути?

595*. Дано довільну піраміду. Доведіть, що прямі, які проходять через середини двох бічних ребер піраміди, паралельні її основі.

Проявіть компетентність

596. Яке взаємне розміщення моста через річку (прямої a), напрямку її течії (прямої b) і площини водної поверхні (площини α)?

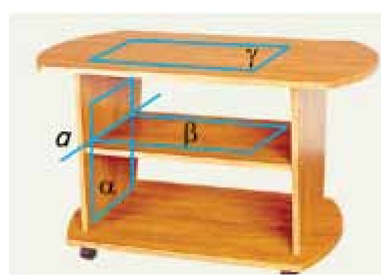
597. Розмічаючи верхній край панелі на стіні, його вирівнюють відносно плінтуса. Чи паралельні край панелі й площина підлоги? Відповідь поясніть.

§ 31 Взаємне розміщення двох площин

Подивіться на малюнок 148. Ви бачите журнальний столик, до бічного стояка якого (площина α) кріпиться поличка (площина β) і стільниця (площина γ). Цей приклад ілюструє можливі випадки взаємного розміщення двох площин:

- дві площини *перетинаються* (площини α і β);
- дві площини *паралельні* (площини β і γ).

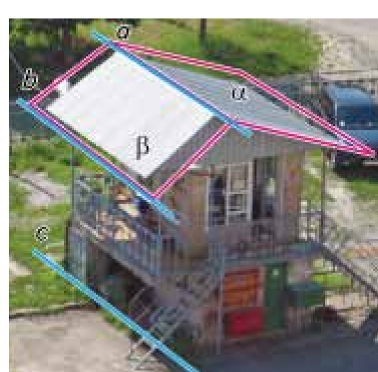
Розглянемо властивості площин у кожному з випадків.



Мал. 148

1. ПЛОЩИНИ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ

Ви знаєте, за аксіомою 4 стереометрії, якщо дві площини мають спільну точку, то вони *перетинаються* по прямій, яка проходить через цю точку. Наприклад, на малюнках 148 і 149 площини α і β перетинаються по прямій a. Кожна точка прямої a належить обом площинам.

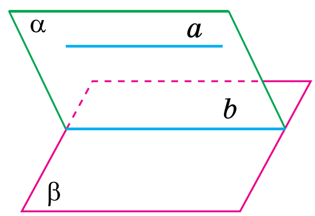


Мал. 149

Подивіться на малюнок 149. Ви бачите, що два схили даху будинку (площини α і β) з'єднуються гребенем даху (пряма a). Край одного зі схилів (пряма b, що лежить у площині β) паралельний другому схилу (площині α), а отже, гребінь даху (пряма a) паралельний краю даху (прямій b). Вимощення однієї зі стін будинку (пряма c) паралельне обом схилам даху (площинам α і β), а отже, воно паралельне і гребеню даху (прямій a). Цей приклад ілюструє властивості площин, що перетинаються.

Властивості площин, що перетинаються

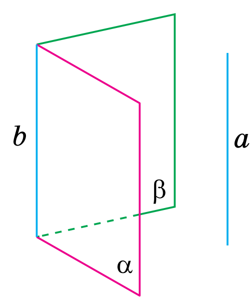
1. Якщо одна з двох площин, що перетинаються, проходить через пряму, паралельну другій площині, то пряма їх перетину паралельна даній прямій (мал. 150).



Мал. 150

Якщо
a лежить в α,
$a \parallel \beta$,
b — перетин α і β,
то $b \parallel a$.

2. Якщо пряма паралельна кожній з двох площин, що перетинаються, то вона паралельна прямій їх перетину (мал. 151).



Мал. 151

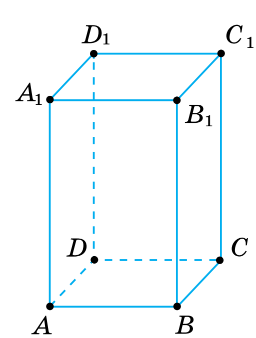
Якщо
$a \parallel \alpha$ і $a \parallel \beta$,
b — перетин α і β,
то $a \parallel b$.

Зверніть увагу:
наведені властивості площин, що перетинаються, можна вважати ознаками паралельності двох прямих у просторі.

Задача 1. Доведіть, що в прямокутному паралелепіпеді протилежні бічні ребра паралельні.

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — даний прямокутний паралелепіпед (мал. 152). Доведемо, що $AA_1 \parallel CC_1$ і $BB_1 \parallel DD_1$.

У прямокутному паралелепіпеді всі грані є прямокутниками. Тому його бічні ребра, що лежать в одній грані, паралельні одне одному. Звідси $AA_1 \parallel BB_1$ і $AA_1 \parallel DD_1$. Оскільки ребро BB_1 лежить у грані BB_1C_1C, то ребро AA_1 паралельне цій грані. Оскільки ребро DD_1 лежить у грані DD_1C_1C, то ребро AA_1 паралельне цій грані. Дістали, що ребро AA_1 паралельне двом площинам, які перетинаються по прямій CC_1. Отже, $AA_1 \parallel CC_1$. Аналогічними міркуваннями доводимо, що $BB_1 \parallel DD_1$.

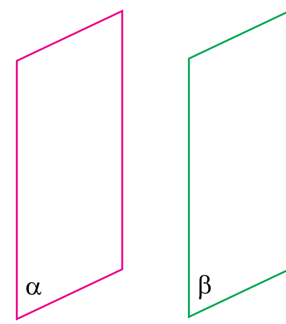


Мал. 152

2. ПАРАЛЕЛЬНІ ПЛОЩИНИ

Дві площини, які не перетинаються, називаються *паралельними*.

Записуємо (мал. 153): $\alpha \parallel \beta$ і говоримо: «площина α паралельна площині β».



Мал. 153

Як установити, що дві площини паралельні?

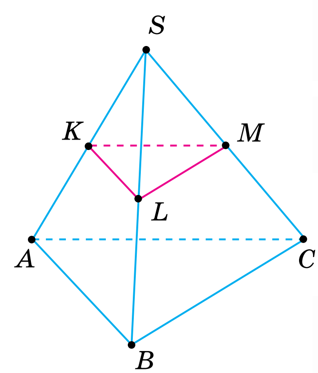
Відповідь дає така теорема, яку приймемо без доведення.

Теорема **(ознака паралельності площин)**

Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.

Задача 2. Через середини бічних ребер піраміди $SABC$ проведено площину KLM (мал. 154). Доведіть, що ця площина паралельна площині основи піраміди.

Розв'язання. Відрізки KL і LM — середні лінії трикутників SAB і SBC. Звідси $KL \parallel AB$ і $LM \parallel BC$. За ознакою паралельності площин, площина KLM паралельна площині ABC.

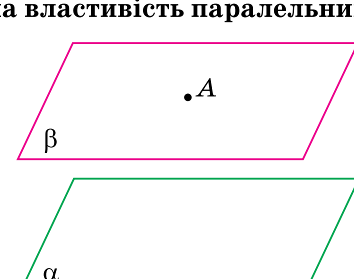


Мал. 154

Сформулюємо *основну властивість паралельних площин* (мал. 155).

Основна властивість паралельних площин

Через точку, яка не лежить у площині, можна провести площину, паралельну даній площині, й тільки одну.



Мал. 155

Якщо
т. A не лежить в α,
то β можна провести через
т. A так, що $\beta \parallel \alpha$,
β — єдина.

Взаємне розміщення двох площин наведено в таблиці 18.

Таблиця 18

Фігури	Взаємне розміщення	
Дві площини α і β	Мають спільну точку	Перетинаються
	Не мають спільних точок	Паралельні

Дізнайтеся більше

Математики в міркуваннях часто застосовують *аналогію*. У перекладі з грецької мови «аналогія» означає подібність, схожість предметів або явищ за певними властивостями, ознаками, відношеннями, причому ці предмети загалом різні. Багато питань стереометрії вивчають за аналогією з питаннями планіметрії.

Аналогом точки на площині є пряма у просторі, а прямої на площині — площина у просторі.

У таблиці 19 наведено деякі властивості взаємного розміщення точок і прямих на площині та властивості прямих і площин у просторі, що їх сформульовано за аналогією.

Таблиця 19

На площині	У просторі
Якщо дві прямі мають спільну точку, то вони перетинаються в цій точці	Якщо дві площини мають спільну пряму, то вони перетинаються по цій прямій
Через будь-яку точку на площині можна провести безліч прямих	Через будь-яку пряму в просторі можна провести безліч площин
Через точку, яка не лежить на прямій, можна провести пряму, паралельну даній прямій, і тільки одну	Через пряму, яка не перетинає площину, можна провести площину, паралельну даній площині, й тільки одну
Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою	Дві площини, паралельні третій площині, паралельні між собою

За аналогією іноді можна одержати хибне твердження. Наприклад, якщо в третьому з наведених тверджень для простору замість вимоги «не перетинає площину» вказати вимогу «не лежить у площині», то одержимо хибне твердження. Справді, пряма, що не лежить у площині, може перетинати цю площину, а через таку пряму провести площину, паралельну даній площині, неможливо. Тому твердження, одержане за аналогією, потребує доведення.

Пригадайте головне

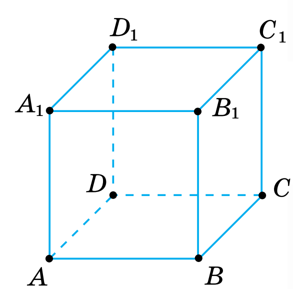
1. Яке взаємне розміщення двох площин?
2. Які властивості мають площини, що перетинаються?
3. Назвіть властивості площин, що перетинаються.
4. Дайте означення паралельних площин. Як їх позначають?
5. Сформулюйте ознаку паралельності площин.
6. Як формулюється основна властивість паралельних площин?

Розв'яжіть задачі

598'. Наведіть приклади взаємного розміщення двох площин на предметах довкілля.

599'. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 156). По якій прямій перетинаються площини:
1) ABB_1 і ABC; 2) A_1D_1D і ABB_1; 3) BCC_1 і CDD_1?
Яким прямим паралельна лінія їх перетину?

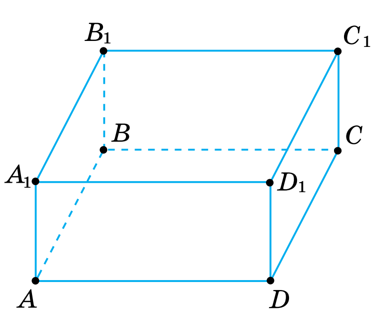
600'. Які площини паралельні на малюнках 157–159? Назвіть пару прямих, що перетинаються й лежать в одній з даних площин, та відповідну пару прямих у другій площині. ($ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед.)



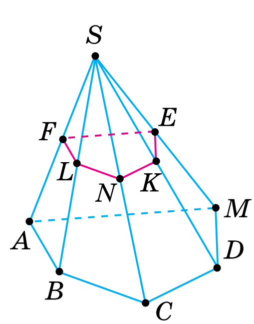
Мал. 156

601'. Наведіть приклади з довкілля, що ілюструють ознаку паралельності площин.

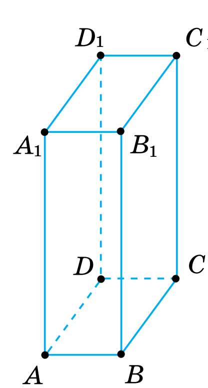
602°. Проведіть площини α і β, що перетинаються. У площині α проведіть пряму a. Яке взаємне розміщення прямої a і площини β? Скільки випадків треба розглянути?



Мал. 157



Мал. 158



Мал. 159

603°. Чи можуть перетинатися дві площини, які паралельні тій самій прямій?

604°. $ABCD$ — паралелограм. Площина α перетинає площину паралелограма по прямій:
1) AB; 2) BC; 3) CD.
Яким сторонам паралелограма паралельна пряма перетину двох даних площин? Відповідь поясніть.

605°. Накресліть піраміду з вершиною S, в основі якої лежить:
1) трикутник ABC;
2) прямокутник $ABCD$;
3) шестикутник $ABCDEF$.
У площині бічної грані SAB проведіть пряму, паралельну площині основи піраміди. Назвіть паралельні прямі на малюнку.

606°. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведіть площину, паралельну грані:
1) $ABCD$; 2) AA_1B_1B ; 3) CDD_1C_1.

607°. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
Доведіть паралельність площин:
1) ABC і $A_1B_1C_1$; 2) ABB_1 і DCC_1; 3) B_1C_1C і D_1DA.

608°. Чи є правильним твердження:
1) якщо пряма, що лежить в одній з даних площин, паралельна прямій, яка лежить у другій площині, то дані площини паралельні;
2) якщо дві прямі, що лежать в одній площині, паралельні двом прямим, які лежать у другій площині, то дані площини паралельні?

609°. Чи можуть бути паралельними дві площини, які проходять через непаралельні прямі?

610°. Дві сторони паралелограма паралельні даній площині α. Чи можна стверджувати, що площина паралелограма паралельна площині α?

611°. **Скільки площин, паралельних даній площині, можна провести через:**
1) точку, що не лежить у даній площині;
2) пряму, що паралельна даній площині?

612. Площини α і β перетинаються. Доведіть, що будь-яка площина γ перетинає хоча б одну з площин α і β.

613. Площина β перетинає деяку пряму, паралельну площині α. Доведіть, що площини α і β перетинаються.

614. Площини α і β паралельні. Точка A лежить у площині α. Доведіть, що будь-яка пряма, яка проходить через точку A паралельно площині β, лежить у площині α.

615. **Якщо площина α паралельна площині β, а площина β паралельна площині γ, то площина α паралельна площині γ.** Доведіть.

616. Площини α і β паралельні площині γ. Чи можуть площини α і β перетинатися?

617. Площина γ перетинає площини α і β по паралельних прямих. Чи паралельні площини α і β?

618. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть паралельність площин:
1) ACB_1 і A_1C_1D; 2) B_1D_1C і BDA_1.

619. Як провести паралельні площини через дві дані мимобіжні прямі?

620. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Середини відрізків AB, BC, AC, AD, CD і BD позначено відповідно K, L, M, N, E і F. Чи паралельні площини: 1) BCD і KMN; 2) ABD і LME; 3) ACD і KLF? Відповідь обґрунтуйте.

621*. Дано дві площини, які перетинаються. Чи можна провести площину, що перетинає дві дані площини по паралельних прямих? Скільки таких площин можна провести через дану:
1) точку; 2) пряму, яка паралельна даним площинам; 3) пряму, що паралельна одній з даних площин; 4) пряму, яка перетинає дані площини; 5) пряму, що лежить в одній з даних площин?

622*. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ побудуйте прямі перетину площин:
1) AB_1D_1 і A_1BD; 2) A_1BC і B_1BD; 3) A_1D_1C і AB_1D.

623*. Спільна вершина двох трикутників не лежить у даній площині, а протилежні цій вершині сторони трикутників лежать у даній площині. Побудуйте лінію перетину площин даних трикутників. Скільки випадків треба розглянути?

Проявіть компетентність

624. Які випадки взаємного розміщення двох площин можна проілюструвати за допомогою зошита?

625. Яке взаємне розміщення книжок на полиці, якщо вони щільно прилягають одна до одної? А якщо взяти кілька книжок з полиці?

626. Чи можна перевірити паралельність підлоги і стелі кімнати за допомогою:
1) двох прямих у цих площинах;
2) трьох прямих у цих площинах;
3) чотирьох прямих у цих площинах?
Якщо так, то як саме? Запропонуйте власний спосіб перевірки.

627. Як напрямлені сили, що діють на важелі?

628. Щоб з'ясувати, чи не деформувалися дерев'яні двері під час експлуатації, їх зачиняють й обирають на їх периметрі кілька контрольних точок. Якщо в цих точках полотно дверей не однаково розміщується відносно дверної коробки (в одному місці заглиблюється, а в іншому виступає), то двері — деформовані. Скільки контрольних точок достатньо обрати? На чому ґрунтується такий спосіб перевірки?

§ 32 Властивості паралельних площин

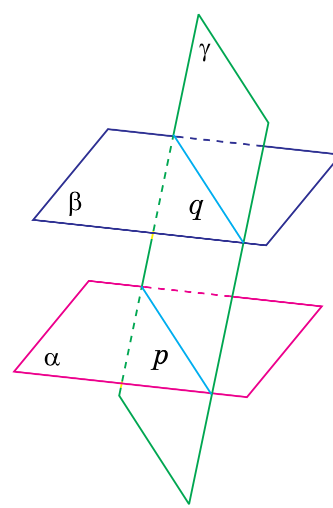
1. ПАРАЛЕЛЬНІ ПЛОЩИНИ І СІЧНА ПЛОЩИНА

Важливі властивості паралельних площин пов'язані з площиною, що їх перетинає. Цю площину називатимемо *січною площиною*. Наприклад, на малюнку 160 ви бачите паралельні площини α і β та січну площину γ. Прямі p і q — прямі перетину паралельних площин січною площиною.

Теорема **(про паралельні площини і січну площину)**

Якщо дві паралельні площини перетнути третьою, то прямі перетину будуть паралельними.

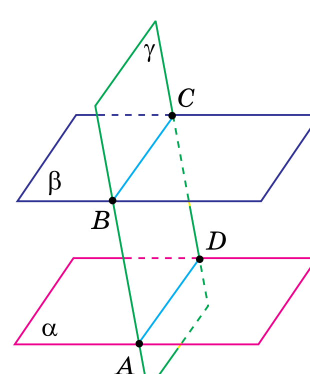
Дано: $\alpha \parallel \beta$, γ — січна площина;
AD — пряма перетину площин α і γ;
BC — пряма перетину площин β і γ (мал. 161).
Довести: $AD \parallel BC$.
Доведення. За умовою прямі AD і BC лежать у січній площині γ. Вони не можуть перетинатися, бо інакше перетиналися б паралельні площини α і β, а це суперечить умові. Отже, $AD \parallel BC$.



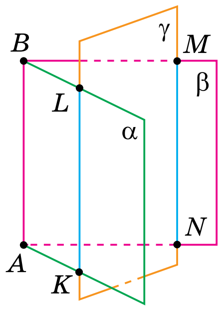
Мал. 160

Чи є правильним твердження, обернене до теореми про паралельні площини і січну площину? Ні. З того, що прямі перетину двох даних площин третьою паралельні, не випливає, що дані площини паралельні (мал. 162).

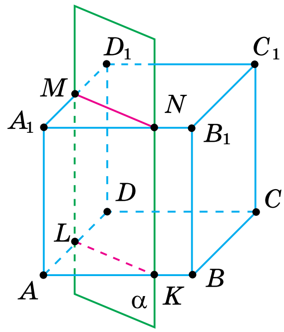
Задача 1. Доведіть, що січна площина перетинає протилежні грані куба по паралельних прямих.



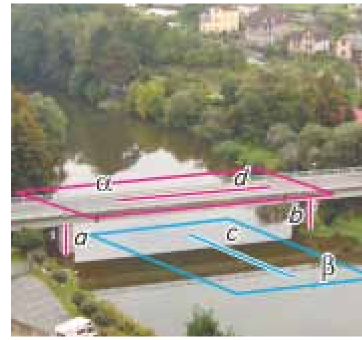
Мал. 161



Мал. 162



Мал. 163



Мал. 164

Розв'язання. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — даний куб, січна площина α перетинає його грані ABC і $A_1B_1C_1$ по прямих KL і MN (мал. 163). Доведемо, що $KL \parallel MN$.

Оскільки гранями куба є квадрати, то $AB \parallel A_1B_1$ і $BC \parallel B_1C_1$. Тоді, за ознакою паралельності площин, площини граней ABC і $A_1B_1C_1$ паралельні. За теоремою про паралельні площини і січну площину, прямі KL і MN перетину площин основ куба січною площиною паралельні.

Зверніть увагу:

- **у прямокутному паралелепіпеді протилежні грані попарно паралельні;**
- **січна площина перетинає паралельні грані многогранника по паралельних прямих.**

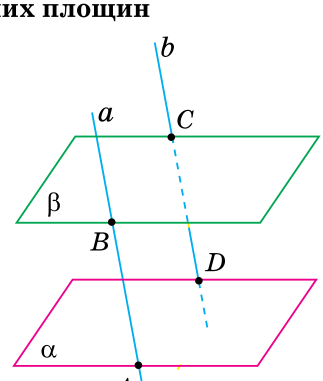
2. ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПЛОЩИН

Подивіться на малюнок 164. Поверхня моста (площина α) паралельна поверхні річки (площині β). Частини його опор, що виступають над водою (відрізки паралельних прямих a і b), є рівними. Пряма c (напрям течії річки) і пряма d (лінія руху на мосту) є мимобіжними. Через кожну з них проходить єдина площина, що паралельна другій прямій. Ці приклади ілюструють такі властивості паралельних площин.

Властивості паралельних площин

1. Паралельні площини відтинають від паралельних прямих рівні відрізки (мал. 165).

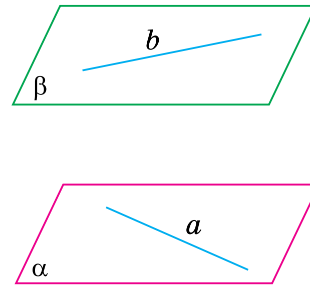
Якщо
$\alpha \parallel \beta$ і $a \parallel b$, то $AB = CD$.



Мал. 165

2. Через кожну з двох мимобіжних прямих проходить єдина площина, паралельна другій мимобіжній прямій, причому ці дві площини паралельні (мал. 166).

Якщо a і b — мимобіжні, то:
1) α проходить через a так, що $\alpha \parallel b$, α — єдина;
2) β проходить через b так, що $\beta \parallel a$, β — єдина;
3) $\alpha \parallel \beta$.



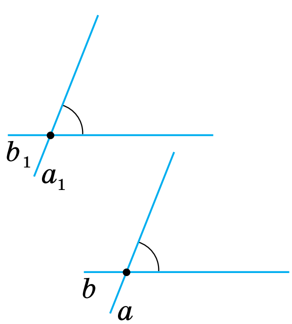
Мал. 166

Сформулюємо *властивості прямих, що перетинаються*, які випливають із властивостей паралельних площин.

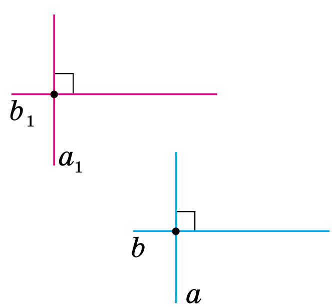
1. Якщо дві прямі, що перетинаються, відповідно паралельні двом іншим прямим, що перетинаються, то кут між першими прямими дорівнює куту між другими (мал. 167).

2. Дві прямі, паралельні перпендикулярним прямим, перпендикулярні одна до одної (мал. 168).

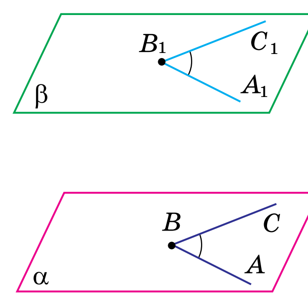
3. Два кути з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами — рівні (мал. 169).



Мал. 167



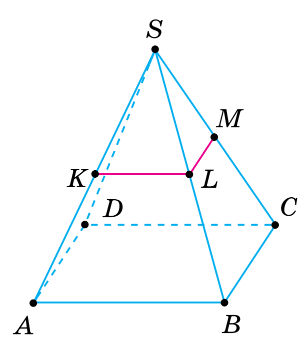
Мал. 168



Мал. 169

Задача 2. У бічних гранях SAB і SBC правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ проведено середні лінії KL і LM (мал. 170). Яка градусна міра кута KLM?

Розв'язання. Оскільки KL і LM — середні лінії трикутників SAB і SBC, то $KL \parallel AB$ і $LM \parallel BC$. Кути KLM і ABC мають однаково напрямлені сторони. Тому, за властивістю кутів з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами $\angle KLM = \angle ABC$. За умовою, дана піраміда — правильна, тому $\angle ABC = 90°$. Отже, $\angle KLM = \angle ABC = 90°$.



Мал. 170

Дізнайтеся більше

Микола Миколайович Боголюбов (*1909–1992*) — видатний вітчизняний математик і механік, фізик-теоретик, засновник наукових шкіл з нелінійної механіки і теоретичної фізики, академік АН УРСР і АН СРСР. Народився в м. Нижній Новгород Російської імперії. У 1921 р. сім'я переїхала до Києва. У 15-річному віці Боголюбов написав першу наукову працю, а в 20 років одержав ступінь доктора математичних наук.

Плідну наукову діяльність М. М. Боголюбов поєднував з викладанням у Київському та Московському університетах. У 1966 р. став першим директором створеного ним Інституту теоретичної фізики АН УРСР у Києві.

Пригадайте головне

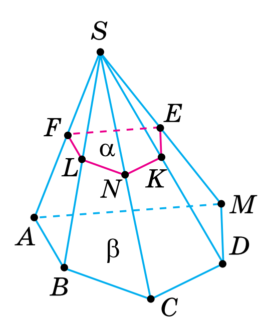
1. Поясніть, що таке січна площина для двох даних площин.
2. Сформулюйте теорему про паралельні площини та січну площину.
3. Назвіть властивості паралельних площин.
4. Як формулюються властивості прямих, що перетинаються?

Розв'яжіть задачі

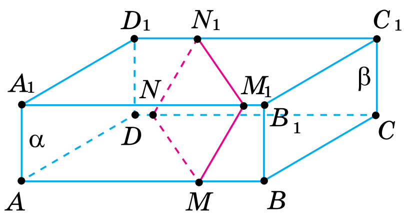
629'. Наведіть приклади паралельних площин і січної площини на предметах у класній кімнаті.

630'. Наведіть приклади з довкілля, що ілюструють властивість:
1) перпендикулярних прямих;
2) кутів з відповідно паралельними й однаково напрямленими сторонами.

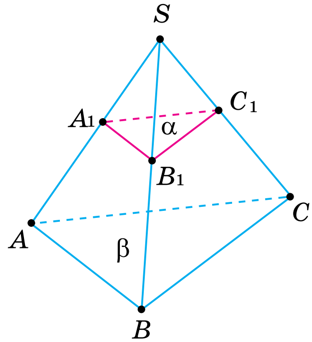
631'. На малюнках 171 – 173 назвіть січну площину та прямі її перетину з паралельними площинами α і β. Яке взаємне розміщення прямих перетину? Скільки січних площин для даних паралельних площин зображено на малюнках?



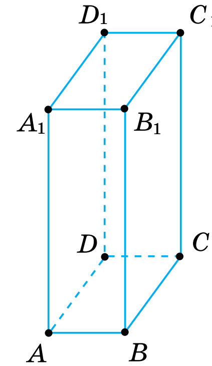
Мал. 171



Мал. 172

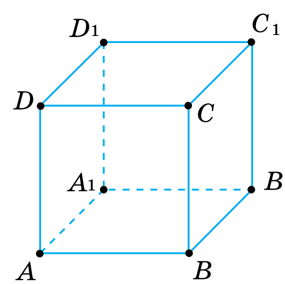


Мал. 173



Мал. 174

632'. За малюнками 174, 175 з’ясуйте, чи виконується рівність: $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Відповідь поясніть.



Мал. 175

633°. Накресліть прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Проведіть січну площину, яка перетинає такі паралельні площини: 1) ABC і $A_1B_1C_1$; 2) ADD_1 і BCC_1; 3) ABB_1 і C_1CD. Чи перетинає побудована січна площина іншу пару паралельних площин? Назвіть прямі перетину січної площини з паралельними площинами. Яке їх взаємне розміщення? Зробіть відповідний запис.

634°. Паралельні площини α і β відтинають на сторонах BA і BC кута ABC відрізки: $BM = MM_1$ і $BN = NN_1$.
Заповніть таблицю 20.

Таблиця 20

BM	5			10		13
BM_1		7	12		3	
BN	12		5			21
BN_1		7		18	5	
MN	13		9	17		20
M_1N_1		10			4	

635°. Накресліть: 1) прямокутний паралелепіпед $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$; 2) куб $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$. На ребрі AB позначте точку K і через неї проведіть січну площину паралельно грані AA_1D_1D. Який чотирикутник утворився в перерізі? Відповідь поясніть.

636°. Накресліть трикутну піраміду, в основі якої лежить рівнобедрений трикутник з кутом: 1) при вершині $110°$; 2) при основі $50°$; 3) при вершині $30°$. Через середини бічних ребер піраміди проведіть січну площину. Який многокутник утворився в перерізі? Які в нього кути? Відповідь поясніть.

637°. Накресліть чотирикутну піраміду, в основі якої лежить ромб із кутом: 1) $100°$; 2) $40°$; 3) $60°$. Через середини бічних ребер піраміди проведіть січну площину. Який многокутник утворився в перерізі? Які в нього кути? Відповідь поясніть.

638. Дві сторони паралелограма паралельні площині α. Чи можна стверджувати, що площина паралелограма паралельна площині α?

639. **Дві сторони трикутника паралельні площині α. Доведіть, що й третя сторона трикутника паралельна площині α.**

640. У кубі з ребром a проведіть площину через: 1) середини двох суміжних сторін верхньої основи й центр нижньої; 2) середини двох суміжних сторін бічної грані та центр протилежної бічної грані. Знайдіть периметр і площу перерізу.

641. **Паралельні площини відтинають від двох паралельних прямих рівні відрізки. Доведіть.**

642. Чи можуть паралельні площини відтинати рівні відрізки від непаралельних прямих? Відповідь обґрунтуйте.

643. Паралельні площини α і β перетинають сторону AB кута BAC в точках M і M_1, а сторону AC — відповідно в точках N і N_1. Знайдіть довжину відрізка MN, якщо:
1) $AM = 12$ см, $AM_1 = 18$ см, $M_1N_1 = 54$ см;
2) $AM = 24$ см, $AM_1 = 18$ см, $M_1N_1 = 54$ см.

644. Відрізки AA_1, BB_1 і CC_1, які не лежать в одній площині, мають спільну середину. Доведіть, що площини ABC і $A_1B_1C_1$ паралельні. Чому дорівнюють кути $\Delta A_1B_1C_1$, якщо:
1) $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$ $\angle C = 90°$; 2) $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$ $\angle C = 70°$?

645. Точка D не лежить у площині трикутника ABC, точки M, N і P — середини відрізків DA, DB, DC. Доведіть, що площини ABC і MNP паралельні. Чому дорівнюють кути ΔABC, якщо:
1) $\angle M = 120°$, $\angle N = 25°$ $\angle P = 35°$; 2) $\angle M = 40°$, $\angle N = 40°$ $\angle P = 80°$?

646*. **Доведіть, що три прямі, які перетинають кілька паралельних площин, визначають на кожній з них вершини трикутників, що є:**
1) рівними, якщо дані прямі паралельні;
2) подібними, якщо дані прямі перетинаються в одній точці.

647*. Два рівних рівносторонніх трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ розміщені у просторі так, що сторони їх відповідних кутів паралельні й однаково напрямлені. BE і CD — висоти ΔABC, C_1D_1 — висота $\Delta A_1B_1C_1$. Знайдіть кути між прямими: 1) AC і B_1C_1; 2) AC і A_1B_1; 3) CD і A_1B_1; 4) AC і C_1D_1; 5) BE і B_1C_1; 6) BE і C_1D_1.

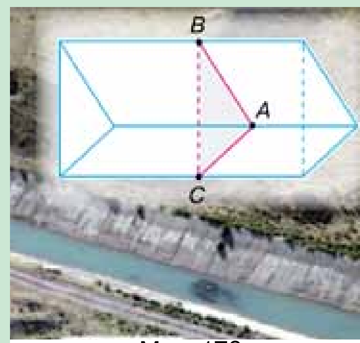
Проявіть компетентність

648. Чому можна одночасно висунути всі шухляди тумбочки?

649. Поясніть, як розмітити на стінках шафи місця для кріплення поличок.

650. Як перевірити за допомогою косинця, чи правильно навісили двері? На якій властивості ґрунтується така перевірка?

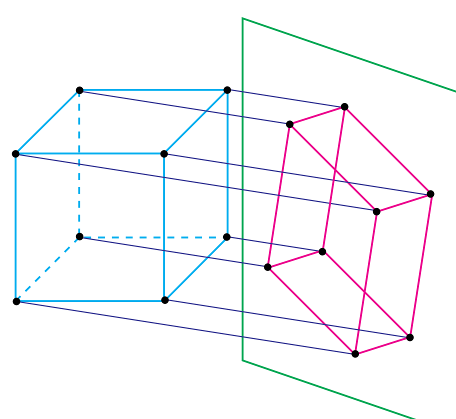
651. Канал із трикутним перерізом завглибшки 2,8 м перегороджено щитом, який має форму рівностороннього трикутника. Щоб визначити гідростатичний тиск на перегородку, треба знати її площу. Обчисліть площу трикутного щита *ABC*, якщо його розміщено вертикально (мал. 176).

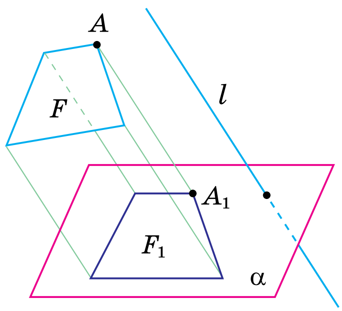


Мал. 176

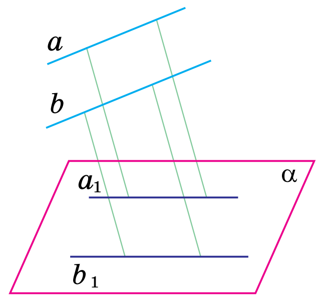
§ 33 Паралельне проектування

Ви вже знаєте, що для вивчення просторових фігур користуються макетами цих фігур або їх зображеннями на площині. На малюнку 177 ви бачите каркасний макет куба, який розміщено перед екраном (стіною, аркушем паперу), що його освітлює сонце. Макет куба дає на екрані тінь, яка є зображенням куба на площині. Якщо сонячні промені вважати паралельними прямими, то можна сказати, що зображення куба одержали за допомогою *паралельного проектування*.

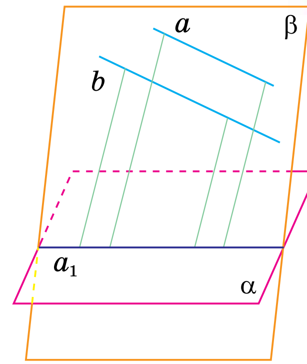

Мал. 177



Мал. 178



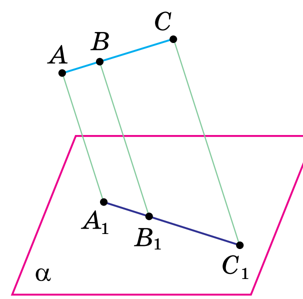
Мал. 179



Мал. 180

Подивіться на малюнок 178. Пряма l перетинає площину α. Через точку A фігури F проведено пряму, яка паралельна прямій l і перетинає площину α в точці A_1. Ця точка є *зображенням* точки A в площині α. Побудувавши в такий спосіб зображення кожної точки фігури F, одержали фігуру F_1 — зображення фігури F у площині α.

Фігура, що її проектували, називається *оригіналом*. Одержане зображення фігури називається *паралельною проекцією* цієї фігури. Пряма l задає *напрям проектування*. Прямі, паралельні прямій l, називають *проектувальними прямими*, а площину α — *площиною проекцій*.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{1}{2}$$

Мал. 181

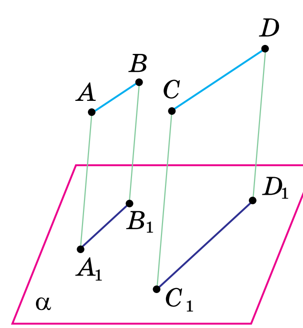
Зверніть увагу:
у паралельному проектуванні прямі й відрізки, що проектуються, вважають непаралельними напряму проектування, якщо це окремо не зазначено.

Наведемо *основні властивості паралельного проектування*.

1. Паралельною проекцією точки є точка.

2. Паралельною проекцією прямої є пряма.

3. Проекції паралельних прямих паралельні між собою (мал. 179) **або збігаються, якщо дані прямі лежать у площині, паралельній напряму проектування** (мал. 180).



$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{1}{2}$$

Мал. 182

4. Якщо відрізки лежать на одній прямій (мал. 181) **або на паралельних прямих** (мал. 182), **то відношення їх проекцій дорівнює відношенню самих відрізків.**

? Якою фігурою є паралельна проекція паралелограма, якщо він лежить у площині, паралельній напряму проектування? Відрізок. Відповідь поясніть самостійно.

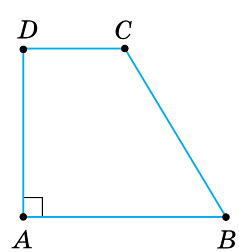
З наведених властивостей випливає, що під час паралельного проектування деякі властивості фігур зберігаються, а деякі — ні (табл. 21).

Таблиця 21

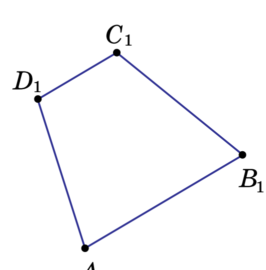
Властивості фігур під час паралельного проектування	
зберігаються	**не зберігаються**
1) **Належність фігури до свого класу фігур** (точку зображають точкою, пряму — прямою, відрізок — відрізком, трикутник — трикутником тощо); 2) **належність точок прямій;** 3) **порядок розміщення точок на прямій** (внутрішню точку відрізка зображають внутрішньою точкою його проекції); 4) **паралельність прямих;** 5) **рівність (пропорційність) відрізків, що лежать на паралельних прямих або на одній прямій**	1) **Довжина відрізка** (зокрема відрізок завдовжки 5 см на зображенні може мати іншу довжину); 2) **міра кута** (зокрема прямий кут зображають довільним кутом); 3) **перпендикулярність прямих** (перпендикулярні прямі зображають прямими, що перетинаються під гострим кутом); 4) **рівність (пропорційність) кутів** (зокрема бісектрису кута зображають променем, який не обов'язково ділить навпіл зображення кута); 5) **рівність (пропорційність) відрізків, які лежать на прямих, що перетинаються**

Задача 1. Побудуйте паралельну проекцію прямокутної трапеції $ABCD$, у якій $AD \perp AB$, $AB : DC = 2 : 1$.

Розв'язання. Спочатку побудуємо оригінал даної трапеції (мал. 183). Спираючись на нього, з'ясуємо властивості шуканої проекції. Трапеція є чотирикутником, тому її проекція також є чотирикутником. Позначимо його $A_1B_1C_1D_1$. У даній трапеції: основи AB і DC паралельні, тому їх проекції A_1B_1 і D_1C_1 також паралельні; бічні сторони AD і BC непаралельні, тому їх проекції A_1D_1 і B_1C_1 також не паралельні. Отже, чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ — трапеція. За умовою, $AB : DC = 2 : 1$, тому $A_1B_1 : D_1C_1 = 2 : 1$, бо зберігається відношення відрізків, що лежать на паралельних прямих. За умовою $AD \perp AB$. Оскільки перпендикулярність прямих не зберігається під час паралельного проектування, то в проекції $\angle D_1A_1B_1$ не обов'язково прямий. Отже, дана прямокутна трапеція зображається трапецією, але не обов'язково прямокутною (мал. 184). Трапеція $A_1B_1C_1D_1$ — шукана.



Мал. 183

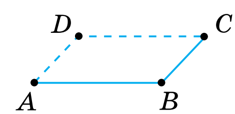


Мал. 184

Зверніть увагу:
щоб побудувати паралельну проекцію плоскої фігури, спочатку побудуйте її оригінал. Потім, спираючись на оригінал, виділіть властивості фігури:

- **які зберігаються під час паралельного проектування (на них треба спиратися, будуючи проекцію);**
- **які не зберігаються під час паралельного проектування (їх не можна використовувати, будуючи проекцію).**

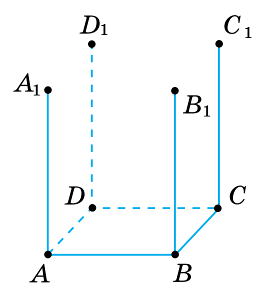
Як побудувати паралельну проекцію многогранника? Для цього треба з'ясувати, як зображатимуться всі його грані, потім послідовно виконати побудову проекції кожної з них. Розглянемо приклади.



Мал. 185

Задача 2. Побудуйте зображення прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

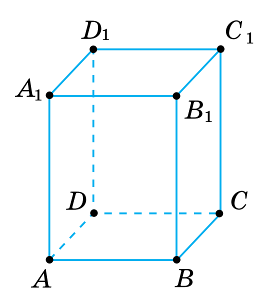
Розв'язання. Побудову прямокутного паралелепіпеда виконуємо в три етапи:
1) будуємо зображення однієї з основ;
2) проводимо бічні ребра;
3) будуємо зображення другої основи.



Мал. 186

1. Основа прямокутного паралелепіпеда — прямокутник. Оскільки протилежні сторони прямокутника попарно паралельні й рівні, то проекцією основи є паралелограм (мал. 185).

2. Бічними гранями прямокутного паралелепіпеда є прямокутники, отже, їх проекціями є паралелограми. Тому проекції бічних ребер є рівними паралельними відрізками. Проводимо їх паралельно вертикальному краю аркуша (мал. 186).



Мал. 187

3. Будуючи зображення другої основи даного паралелепіпеда, враховуємо те, що його основи — рівні прямокутники, які лежать у паралельних площинах. Отже, їх проекції є рівними паралелограмами з відповідно паралельними сторонами (мал. 187).

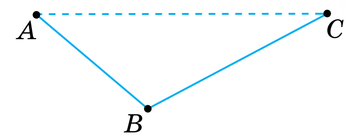
Прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — шуканий.

Зверніть увагу:
зображуючи многогранник, видимі лінії робимо суцільними, а невидимі — штриховими.

Задача 3. Побудуйте зображення правильної трикутної піраміди $SABC$.

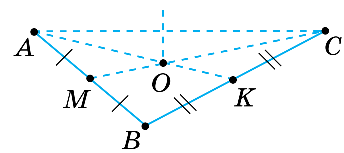
Розв'язання. Побудову піраміди виконуємо в три етапи: 1) будуємо зображення основи; 2) з'ясовуємо, де має розміщатися вершина піраміди; 3) проводимо бічні ребра.

1. Основа даної піраміди — правильний трикутник. Його проекцією є довільний трикутник ABC (мал. 188), оскільки рівність сторін правильного трикутника та рівність його кутів не зберігаються під час проектування.



Мал. 188

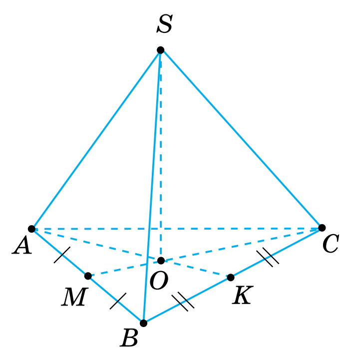
2. Вершина правильної піраміди лежить на прямій, що містить висоту піраміди. Основа висоти даної піраміди збігається з точкою O перетину медіан її основи. Через точку O перетину медіан основи піраміди проводимо пряму паралельно вертикальному краю аркуша. На цій прямій позначаємо довільну точку S — вершину піраміди (мал. 189).



Мал. 189

3. Бічними гранями правильної піраміди є рівні рівнобедрені трикутники. Проте на зображенні рівність бічних сторін цих трикутників не зберігається. Тому проекції бічних ребер піраміди — це відрізки довільної довжини, що сполучають вершину піраміди з вершинами її основи (мал. 190).

Піраміда $SABC$ — шукана.



Мал. 190

Зверніть увагу:

- **розміщення висоти піраміди залежить від властивостей піраміди;**
- **якщо піраміда правильна, то основа її висоти збігається із центром многокутника основи;**
- **висоту піраміди проводять (чи уявляють проведеною) паралельно вертикальному краю аркуша;**
- **розміщення вершини піраміди визначають після побудови її висоти.**

Дізнайтеся більше

Значний внесок у розвиток теорії зображень просторових фігур на площині зробив відомий геометр **Микола Федорович Четверухін** (*1891–1974*). Він обґрунтував можливість побудови наочного зображення просторових фігур простішими способами, ніж це робиться в аксонометрії. Завдяки досягненням ученого елементи теорії зображень стали доступними для вивчення в шкільному курсі геометрії.

Пригадайте головне

1. Що таке паралельне проектування; площина проекцій; проектувальні прямі?
2. Назвіть властивості паралельного проектування.
3. Які властивості фігур зберігаються під час паралельного проектування?
4. Назвіть властивості фігур, які не зберігаються під час паралельного проектування.
5. Якою фігурою може бути паралельна проекція трикутника; паралелограма; прямокутника; трапеції?
6. Поясніть, як побудувати зображення прямокутного паралелепіпеда; піраміди.

Розв'яжіть задачі

652'. На малюнках 191 – 193 зображено фігуру-оригінал та її паралельну проекцію в площині α. Назвіть: 1) фігуру, яку проектували; 2) проектувальні прямі; 3) паралельну проекцію даної фігури.

653'. Чи може чотирикутник бути проекцією трикутника?

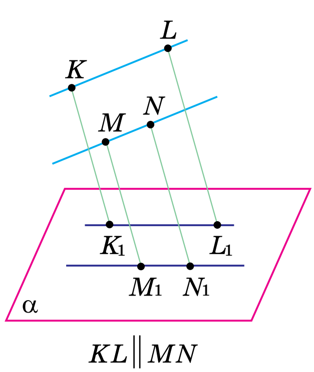
654'. Чи може трикутник бути проекцією чотирикутника?

655'. На промені AO відкладіть відрізки: 1) $AB = 2$ см і $BC = 3$ см; 2) $AB = 2$ см і $BC = 1$ см; 2) $AB = 3$ см і $BC = 1{,}5$ см. Чому дорівнює відношення їх проекцій?

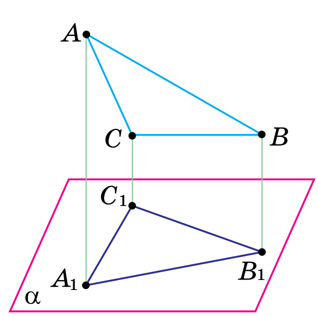
656'. Відрізки AB і CD лежать на паралельних прямих. Як відносяться їх проекції, якщо: 1) $AB : CD = 3 : 4$; 2) $AB : CD = 7 : 1$; 3) $AB : CD = 4 : 9$?

657°. Чи може паралельною проекцією паралелограма бути:
1) квадрат; 2) ромб; 3) трапеція?

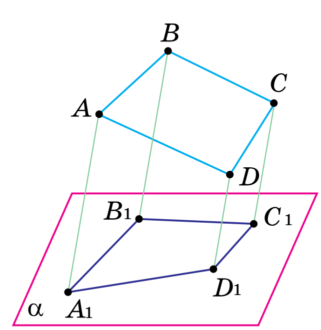
658°. Чи може паралельною проекцією квадрата бути:
1) квадрат; 2) ромб; 3) трапеція?



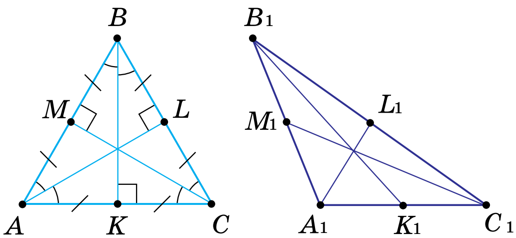
Мал. 191



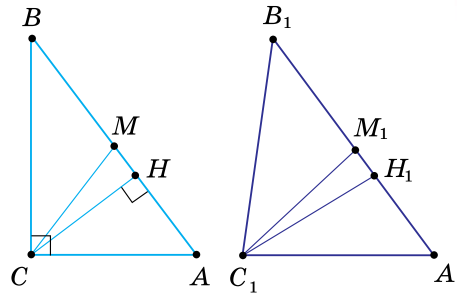
Мал. 192



Мал. 193



Мал. 194



Мал. 195

659°. На малюнках 194, 195 зображено ΔABC та його паралельну проекцію $\Delta A_1B_1C_1$. Назвіть властивості ΔABC, які під час проектування: 1) збереглися; 2) не збереглися.

660°. Побудуйте проекцію рівнобедреного трикутника ABC, у якому проведено: 1) медіану до бічної сторони; 2) висоту до основи; 3) бісектрису кута при вершині.

661°. Побудуйте проекцію рівнобедреного прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C, у якому проведено: 1) медіани; 2) середні лінії; 3) висоту до гіпотенузи.

662°. Побудуйте проекцію прямокутного трикутника ABC, у якому проведено серединні перпендикуляри до катетів, якщо прямим є кут: 1) A; 2) B; 3) C.

663°. Побудуйте проекцію прямокутника $ABCD$, у якому сполучено відрізками:
1) середину більшої сторони з вершинами протилежної сторони;
2) середини протилежних сторін; 3) середини суміжних сторін.

664°. Чи можна в результаті паралельного проектування трапеції одержати: 1) трикутник; 2) ромб; 3) трапецію? Відповідь поясніть.

665°. Побудуйте проекцію рівнобічної трапеції $ABCD$, у якій проведено середню лінію, паралельну стороні: 1) AB; 2) BC; 3) CD.

666°. Побудуйте зображення: 1) куба; 2) прямокутного паралелепіпеда.

667°. Побудуйте зображення правильної піраміди:
1) трикутної; 2) чотирикутної.

668. Під час паралельного проектування деякої фігури дістали відрізок. Якою могла бути фігура-оригінал?

669. **Доведіть, що проекцією середини відрізка є середина його проекції.**

670. Побудуйте проекцію відрізка AB, що його точка K ділить у відношенні: 1) $1:3$; 2) $3:5$; 3) $3:1{,}5$; 4) $2:0{,}5$.

671. Побудуйте проекцію прямокутного ΔABC, у якому проведено висоту CH до гіпотенузи, а катети дорівнюють: 1) $AC = 5$ см, $BC = 12$ см; 2) $AC = 24$ см, $BC = 1$ см.

672. Побудуйте проекцію рівнобедреного трикутника з основою a і бічною стороною b, у якому позначено центр вписаного кола й центр описаного кола, якщо: 1) $a = 6$, $b = 8$; 2) $a = 10$, $b = 13$.

673. Побудуйте проекцію прямокутника $ABCD$, у якому проведено перпендикуляр з його вершини до діагоналі, якщо:
1) $AB = 6$ см, $BC = 8$ см; 2) $AB = 5$ см, $BC = 10$ см.

674. Побудуйте проекцію ромба з гострим кутом $60°$, у якому проведено висоту з вершини: 1) гострого кута; 2) тупого кута.

675. Побудуйте проекцію чотирикутника, кути якого дорівнюють: 1) $30°$, $30°$, $150°$, $150°$; 2) $60°$, $60°$, $120°$, $120°$. Скільки випадків треба розглянути?

676. Побудуйте проекцію рівнобічної трапеції, в якій проведено висоту з вершини тупого кута, а основи дорівнюють: 1) 12 см і 24 см; 2) 8 см і 14 см.

677. Побудуйте зображення прямокутного паралелепіпеда зі сторонами основи: 1) $AC = 5$ см, $BC = 12$ см; 2) $AC = 24$ см, $BC = 1$ см. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, яка проходить через його вершину C_1 і пряму CH, проведену в площині основи перпендикулярно до її діагоналі.

678. Побудуйте зображення піраміди, основа якої — рівнобедрений трикутник з основою a і бічною стороною b, якщо: 1) $a = 6$, $b = 8$; 2) $a = 10$, $b = 13$. Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через вершину піраміди, вершину її основи та центр кола, вписаного в основу.

679. Побудуйте зображення піраміди, основа якої — рівнобічна трапеція з основами: 1) $AB = 12$ см, $CD = 24$ см; 2) $AC = 8$ см, $BD = 14$ см. Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через вершину піраміди й висоту основи, проведеної з вершини її тупого кута.

680*. Побудуйте проекцію прямокутного трикутника з катетами a і b та гіпотенузою c, у якому позначено центр вписаного кола й центр описаного кола, якщо: 1) $a : b : c = 3 : 4 : 5$; 2) $a : b : c = 8 : 15 : 17$.

681*. Побудуйте проекцію тупокутного трикутника з кутом: 1) $120°$; 2) $150°$. У яку точку проектується центр вписаного кола; центр описаного кола?

682*. Квадрат $ABCD$ добудовано до рівнобічної трапеції так, що сторона CD квадрата стала однією з основ трапеції, а сторона BC — висотою трапеції. Побудуйте проекцію утвореної трапеції.

Проявіть компетентність

683. Яким многокутником може бути тінь споруди на площині подвір'я, якщо споруда має форму:
1) прямокутного паралелепіпеда;
2) куба;
3) правильної чотирикутної піраміди?

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які прямі називаються паралельними; мимобіжними?
2. Сформулюйте властивості паралельних прямих у просторі та ознаки їх паралельності.
3. Як знайти відстань від точки до прямої; між двома паралельними прямими?
4. Яким є взаємне розміщення прямої та площини? У чому полягає ознака їх паралельності?
5. Назвіть можливі випадки взаємного розміщення двох площин.
6. Які властивості площин, що перетинаються?
7. Сформулюйте властивості паралельних площин та ознаку їх паралельності.
8. Що таке паралельне проектування? Які його властивості?
9. Поясніть, як побудувати паралельну проекцію трикутника; паралелограма; трапеції.
10. Як побудувати зображення прямокутного паралелепіпеда; піраміди?

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

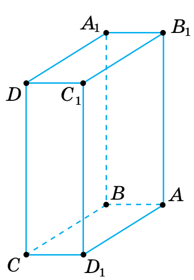
ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 4

Уважно прочитайте задачі та знайдіть
серед запропонованих відповідей правильну.
Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

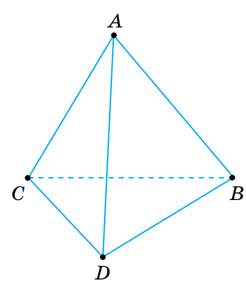
Тест 1

1° Дано зображення многогранників. На якому з малюнків прямі AB і CD не є мимобіжними?

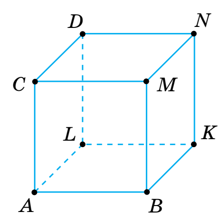
А.



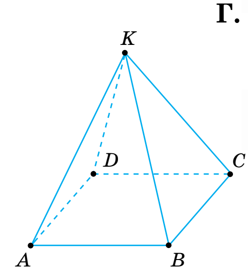
Б.



В.



Г.



2° Пряма a не лежить у площині квадрата $ABCD$ і паралельна його стороні AB. Якому з відрізків паралельна дана пряма?

А. CD. **Б.** AD. **В.** AC. **Г.** BD.

3° У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром 2 см знайдіть відстань між ребрами AA_1 і CC_1.

А. 2 см. **Б.** $2\sqrt{2}$ см. **В.** $2\sqrt{3}$ см. **Г.** 4 см.

4 Пряма MN паралельна площині α, а пряма M_1N_1 лежить у цій площині. $MM_1 \parallel NN_1$. Яка довжина відрізка M_1N_1, якщо $MN = 10$ см?

А. 5 см. **Б.** 10 см. **В.** 15 см. **Г.** 20 см.

5* Основа піраміди $SABC$ лежить у площині α. На її бічних ребрах SA і SB позначено точки K і N так, що $AS = 2AK$, $BN = NS$. Яке взаємне розміщення прямої KN і площини α?

А. Пряма KN лежить у площині α.
Б. Пряма KN паралельна площині α.
В. Пряма KN перетинає площину α.
Г. Не можна визначити.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

Тест 2

1° Яка фігура утворюється в перетині грані многогранника із січною площиною?

А. Пряма. **Б.** Відрізок. **В.** Промінь. **Г.** Кут.

2° Точка C є серединою відрізка AB, а точка D — серединою відрізка AC. У якому порядку розміщені точки A, B, C і D на паралельній проекції відрізка AB?

А. A, B, C, D. **Б.** A, C, B, D. **В.** A, D, C, B. **Г.** A, C, D, B.

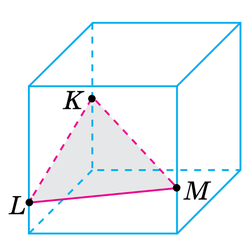
3° Паралельною проекцією ΔABC є різносторонній $\Delta A_1B_1C_1$. Що є проекцією медіани ΔABC, проведеної з вершини C?

А. Медіана до сторони A_1C_1.
Б. Висота до сторони A_1B_1.
В. Бісектриса $\angle C_1$.
Г. Медіана до сторони A_1B_1.

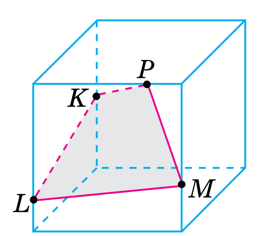
4 Відстані між точками A і C та B і C відповідно дорівнюють 5 см і 10 см, $AB \perp AC$. Через точки A, B і C проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках A_1, B_1 і C_1. Знайдіть відстань між точками A_1 і B_1, якщо $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$.

А. 5 см. **Б.** $5\sqrt{2}$ см. **В.** $5\sqrt{3}$ см. **Г.** 10 см.

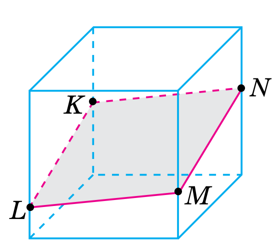
5* Грані куба перетинає січна площина KLM. Яка з побудов — правильна?



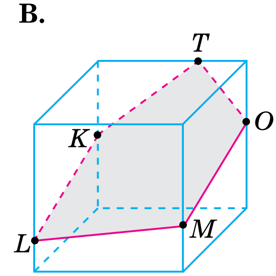
А.



В.



Б.



Г.

Розділ 5

Перпендикулярність прямих і площин у просторі

У розділі ви дізнаєтесь:

- про прямі, перпендикулярні до площин, перпендикулярні площини, їх властивості та ознаки;
- як розпізнавати й обґрунтовувати розміщення прямих та площин;
- про залежність між паралельністю й перпендикулярністю;
- про відстані й кути у просторі та їх обчислення;
- як застосовувати вивчені властивості й ознаки на практиці та під час розв'язування задач

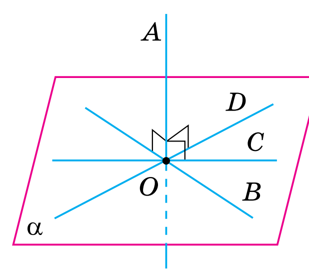
§ 34 Перпендикулярність прямої та площини

Ви знаєте, що коли пряма не лежить у площині й не паралельна їй, то вона перетинає площину. Якщо пряма перетинає площину, то вона може бути перпендикулярною до цієї площини.

Подивіться на малюнок 196. Якщо через основу вертикального стовпа провести прямі на поверхні землі, то кут між стовпом і кожною із цих прямих дорівнюватиме 90°. Тобто стовп перпендикулярний до будь-якої прямої, що проходить через його основу.

Мал. 196

На малюнку 197 пряма AO перетинає площину α в точці O, а прямі OB, OC, OD,... лежать у цій площині й проходять через точку перетину. Пряма AO перпендикулярна до кожної із цих прямих. Говорять, що пряма AO перпендикулярна до площини α.



Мал. 197

Записуємо: $AO \perp \alpha$, або $\alpha \perp AO$.

Спробуйте дати означення прямої, перпендикулярної до площини, та порівняйте його з наведеним у підручнику.

Пряма називається *перпендикулярною до площини*, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у площині та проходить через точку перетину.

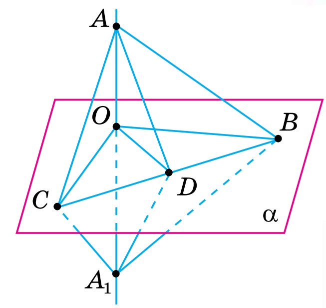
Теорема **(ознака перпендикулярності прямої та площини)**

Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна до площини.

Дано: пряма AA_1 перетинає площину α в точці O (мал. 198); прямі OB і OC лежать у площині α; $AA_1 \perp OB$; $AA_1 \perp OC$.

Довести: $AA_1 \perp \alpha$.

Доведення. Доведемо, що пряма AA_1 перпендикулярна до будь-якої прямої OD, що лежить у площині α і проходить через точку перетину O. Відкладемо на прямій AA_1 в різні боки від точки O рівні відрізки OA і OA_1. Проведемо довільну пряму, яка перетинає прямі OB, OD і OC в точках B, D і C. Ці точки сполучимо з точками A і A_1 відрізками. Розглянемо три пари трикутників.

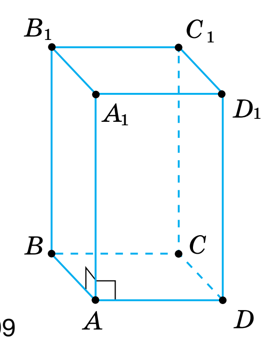


Мал. 198

1. ΔABA_1 і ΔACA_1 — рівнобедрені, оскільки відрізки OC і OB є висотами за умовою й медіанами за побудовою ($OA = OA_1$). Звідси $AB = A_1B$ і $AC = A_1C$.
2. $\Delta ABC = \Delta A_1BC$ за трьома сторонами. У них $AB = A_1B$ і $AC = A_1C$ за доведеним, BC — спільна сторона. З рівності трикутників випливає: $\angle ABD = \angle A_1BD$.
3. $\Delta ABD = \Delta A_1BD$ за двома сторонами (BD — спільна сторона, $AB = A_1B$) і кутом між ними ($\angle ABD = \angle A_1BD$). З рівності трикутників матимемо: $AD = A_1D$.

Отже, ΔAA_1D — рівнобедрений, тому його медіана OD є і висотою, тобто $AA_1 \perp OD$. За означенням, пряма AA_1 перпендикулярна до площини α.

Чому ребро AA_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 199) перпендикулярне до площини основи? Оскільки ребро AA_1 перпендикулярне до прямих AB і AD, то, за ознакою перпендикулярності прямої та площини, воно перпендикулярне до площини основи $ABCD$.



Мал. 199

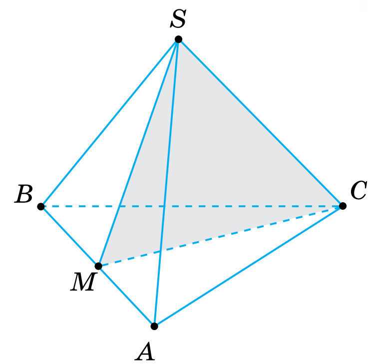
Зверніть увагу!

1. Щоб довести, що дана пряма перпендикулярна до площини:
- виділіть на малюнку дві прямі, які лежать у площині й проходять через точку перетину;
- доведіть, що дана пряма перпендикулярна до кожної з цих прямих.

2. Якщо пряма перпендикулярна до площини, то вона перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині та проходить через точку перетину.

Задача. $SABC$ — правильна трикутна піраміда, точка M — середина ребра AB (мал. 200). Доведіть, що пряма AB перпендикулярна до площини SMC.

Розв'язання. Оскільки піраміда $SABC$ — правильна, то її основою є правильний трикутник, а бічні грані — рівнобедрені трикутники. Тоді медіани CM і SM трикутників ABC та ABS є їх висотами. Отже, пряма AB перетинає площину SMC і перпендикулярна до двох прямих CM і SM цієї площини, що проходять через точку M перетину прямої AB з площиною SMC. За ознакою перпендикулярності прямої і площини, пряма AB перпендикулярна до площини ΔSMC.



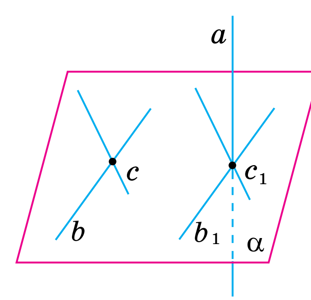
Мал. 200

Ознака перпендикулярності прямої та площини застосовується на практиці. Щоб перевірити, чи перпендикулярна лінія перетину стін кімнати до площини підлоги, перевіряють, чи є прямими кути між цією лінією та двома прямими, які лежать у площині підлоги і перетинають цю лінію.

Дізнайтеся більше

У вас може виникнути запитання: *Чи обов'язково, щоб дві прямі, про які йдеться в ознаці перпендикулярності прямої та площини, проходили через точку перетину даної прямої та площини*? Не обов'язково.

На малюнку 201 пряма a перпендикулярна до прямих b і c, які лежать у площині α і перетинаються, але не проходять через точку перетину прямої та площини. Прямі a і b, a і c — мимобіжні. Проведемо через точку перетину прямої a з площиною α прямі $b_1 \parallel b$ і $c_1 \parallel c$. Тоді, за означенням кута між мимобіжними прямими, пряма a буде перпендикулярною до прямих b_1 і c_1, а отже, і до площини α. Тому ознаку перпендикулярності прямої та площини можна узагальнити й сформулювати так:



Мал. 201

якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох прямих цієї площини, що перетинаються, то вона перпендикулярна до площини.

Справедливе й таке твердження:

пряма, перпендикулярна до площини, перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині (хоча б і такої, що не проходить через точку перетину).

Пригадайте головне

1. Дайте означення прямої, перпендикулярної до площини.
2. Сформулюйте ознаку перпендикулярності прямої та площини.
3. Як довести, що дана пряма перпендикулярна до площини?

Розв'яжіть задачі

683'. Пряма a перпендикулярна до прямих b і c площини α (мал. 202). Чи випливає із цього, що $a \perp \alpha$?

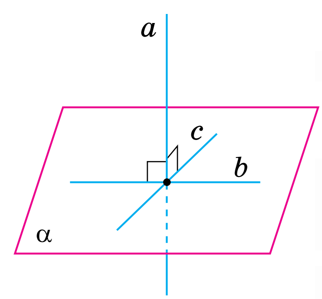
684'. Пряма перпендикулярна до двох сторін трикутника (мал. 203). Чи можна стверджувати, що ця пряма перпендикулярна до площини трикутника?

685'. На малюнку 204 $a \perp \alpha$. Чи перпендикулярна пряма a до прямої b, яка лежить у площині α?

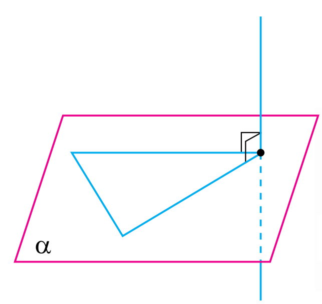
686°. Пряма a перетинає площину α й перпендикулярна до прямої b, яка лежить у цій площині (див. мал. 204). Чи може пряма a не бути перпендикулярною до площини α? Поясніть відповідь.

687°. Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено пряму AM, перпендикулярну до прямих AB і AC (мал. 205). Доведіть, що $AM \perp AD$.

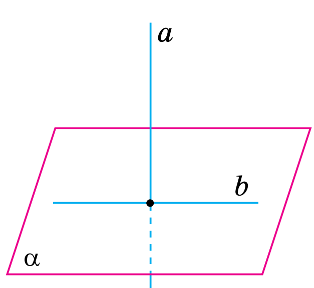
688°. Через точку N, що лежить поза площиною шестикутника $ABCDEF$, проведено пряму AN, перпендикулярну до прямих AB і AF (мал. 206). Доведіть, що:
1) $AN \perp AC$; 2) $AN \perp AD$; 3) $AN \perp AE$.



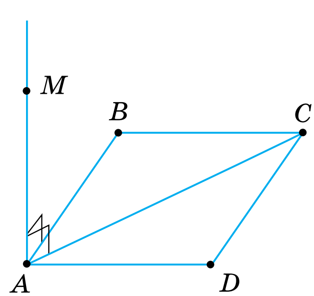
Мал. 202



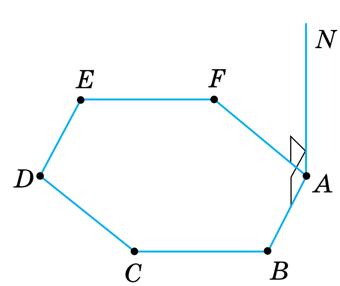
Мал. 203



Мал. 204



Мал. 205



Мал. 206

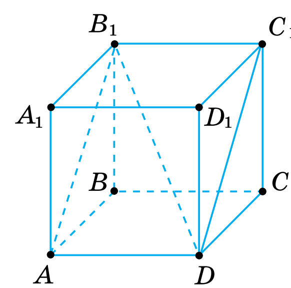
689°. Пряма BM перпендикулярна до площини трикутника ABC. На стороні AC взято довільну точку K. Якого виду трикутник KBM? Поясніть відповідь.

690°. Через вершину A трикутника ABC проведено пряму AK, перпендикулярну до прямих AB і AC. Доведіть, що пряма AK перпендикулярна до висоти, медіани та бісектриси трикутника ABC, проведених з вершини A.

691°. **Як розміщена відносно площини круга пряма, перпендикулярна до двох його діаметрів? Поясніть відповідь.**

692°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Доведіть, що:
1) пряма DD_1 перпендикулярна до площини грані $ABCD$;
2) пряма AD перпендикулярна до площини грані DD_1C_1C.

693°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 207). Доведіть, що:
1) ΔAB_1D — прямокутний;
2) чотирикутник AB_1C_1D — прямокутник.

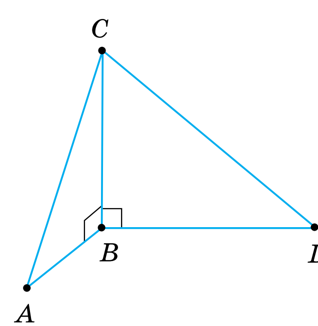


Мал. 207

694. Пряма CM перпендикулярна до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Доведіть, що:
1) пряма BC перпендикулярна до площини прямих AC і CM;
2) пряма AC перпендикулярна до площини прямих BC і CM.

695. **Пряма CD перпендикулярна до сторони BC прямокутного ΔABC ($\angle C = 90°$). Назвіть пряму та площину, що перпендикулярні між собою.**

696. Прямокутні трикутники ABC і DBC з прямим кутом B лежать у різних площинах і мають спільний катет BC (мал. 208). Які пряма та площина перпендикулярні між собою? Поясніть відповідь.



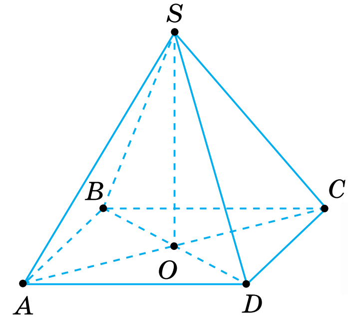
Мал. 208

697. Пряма CM перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$ із стороною a, $CM = b$. Знайдіть відстань від точки M до вершин квадрата, якщо:
1) $a = 2$ см, $b = 1$ см; 2) $a = 3$ см, $b = 4$ см.

698. Через вершину C прямого кута трикутника ABC проведено пряму CD, перпендикулярну до його площини. $AC = a$, $BC = b$, $CD = c$. Знайдіть відстань від точки D до середини M гіпотенузи трикутника, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $c = 12$ см; 2) $a = 12$ см, $b = 16$ см, $c = 24$ см.

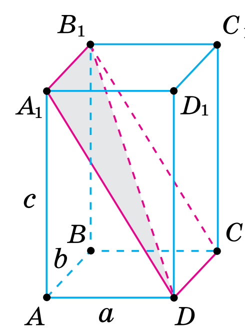
699. Пряма AD перпендикулярна до площини прямокутного трикутника ABC із прямим кутом C. $AC = a$, $BC = b$, $AD = c$. Знайдіть відстань від точки D до вершин B і C, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 12$ см;
2) $a = 12$ см, $b = 16$ см, $c = 15$ см.

700. Через точку O перетину діагоналей ромба $ABCD$ проведено пряму OM, перпендикулярну до його площини. Доведіть, що:
1) пряма BD перпендикулярна до площини AMC;
2) пряма AC перпендикулярна до площини BMD.



Мал. 209

701. Точка S лежить поза площиною паралелограма $ABCD$ (мал. 209). Відомо, що $SA = SC$, $SB = SD$ і O — точка перетину діагоналей паралелограма. Доведіть, що пряма SO перпендикулярна до площини паралелограма.



Мал. 210

702. На малюнку 210 a, b, c — виміри прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть площі трикутника A_1B_1D та чотирикутника A_1B_1CD, якщо:
1) $a = 12$ см, $b = 8$ см, $c = 16$ см;
2) $a = 5$ см, $b = 10$ см, $c = 12$ см.

703. Пряма OM перпендикулярна до площини кола із центром O, а точка A лежить на колі.
Знайдіть AM, якщо:
1) $OA = 6$ см, $\angle OMA = 30°$;
2) $OM = 4$ см, площа круга дорівнює 25π см^2.

704. Доведіть, що через точку, яка лежить поза площиною α, не можуть проходити дві прямі, перпендикулярні до площини α.

705*. Через вершину C прямого кута ΔABC проведено пряму CD, перпендикулярну до його площини. $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$. Знайдіть медіану CM трикутника ABC.

706*. Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено пряму AM, перпендикулярну до його площини. Відстані від точки M до решти вершин прямокутника дорівнюють a, b, c ($a < c$, $b < c$). Знайдіть відрізок AM і сторони прямокутника.

707*. У трикутнику ABC кут C прямий, а кут A дорівнює $30°$. Через точку C проведено пряму CM, перпендикулярну до площини трикутника. $AC = 18$ см, $CM = 12$ см. Знайдіть відстань від точки M до прямої AB.

Проявіть компетентність

708. Вважаючи підлогу й двері кімнати за моделі площин, а одвірок — за модель прямої, проілюструйте на цих моделях означення прямої, перпендикулярної до площини.

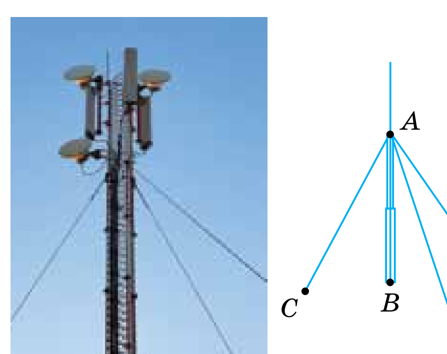
709. Як за допомогою виска можна перевірити вертикальність стовпа?

710. Перпендикулярність осі свердла до площини столу, на якому кріпиться деталь (мал. 211), слюсар перевірив за допомогою кутника. Як він це зробив?

Мал. 211

§ 35 Перпендикуляр і похила до площини

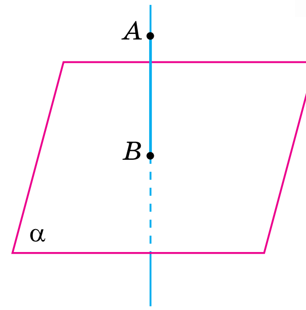
Подивіться на малюнок 212. Вертикально встановлена щогла, закріплена трьома стяжками, дає уявлення про перпендикуляр і похилу до площини. Так, відрізок AB на щоглі можна вважати перпендикуляром, проведеним з точки A до поверхні землі, а одну зі стяжок AC — похилою, проведеною з точки A до поверхні землі.



Мал. 212

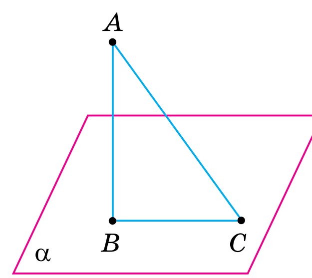
Нехай дано площину α і точку A, яка не лежить у ній. Проведемо через точку A пряму, перпендикулярну до площини, яка перетинає площину в точці B (мал. 213). Говорять, що відрізок AB є *перпендикуляром*, проведеним з точки A до площини α, а кінець B цього відрізка, який лежить у площині, — *основою перпендикуляра*.

***Перпендикуляром*, проведеним з даної точки до даної площини, називається відрізок, що сполучає дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній до площини.**



Мал. 213

Нехай AB — перпендикуляр до площини α, а C — відмінна від точки B точка цієї площини (мал. 214). Тоді відрізок AC називають *похилою*, проведеною з точки A до площини α, а точку C — *основою похилої*. Відрізок BC, який сполучає основи перпендикуляра та похилої, називають *проекцією похилої AC* на площину α.



Мал. 214

? Чи існує залежність між довжинами перпендикуляра й похилої, похилої та її проекції? Відповідь дає така теорема.

Теорема (властивості перпендикуляра й похилої)

Якщо з точки, взятої поза площиною, проведено до площини перпендикуляр і похилі, то:

1) перпендикуляр коротший за будь-яку похилу;

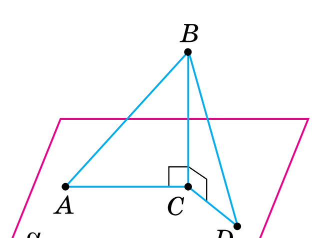
2) проекції рівних похилих є рівними й, навпаки, похилі, що мають рівні проекції, є рівними;

3) з двох похилих більша та, проекція якої більша.

Доведіть теорему самостійно, використавши властивості прямокутного трикутника.

Твердження теореми наведено в таблиці 22.

Таблиця 22

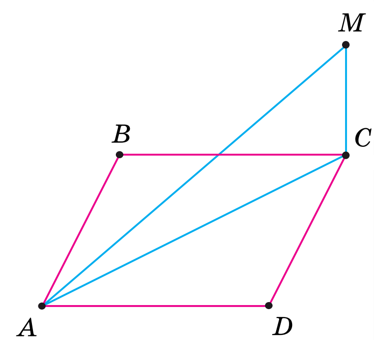
	$BC < AB$, $BC < BD$
	Якщо $\dfrac{AB = BD}{AC = CD}$, то $\dfrac{AC = CD}{AB = BD}$
	Якщо $AC > CD$, то $AB > BD$

Теорема про властивості перпендикуляра й похилої застосовується на практиці. Наприклад, якщо встановлюють пляжну парасолю на ґрунті, то стяжки беруть рівної довжини. Нижні кінці їх закріплюють на однакових відстанях від основи ніжки парасолі (рівномірно по колу). Це сприяє стійкості парасолі.

Задача. З вершини C квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр CM до його площини. Знайдіть відстань від точки M до вершини A, якщо CM дорівнює 6 см, а сторона квадрата — $4\sqrt{2}$ см.

Розв'язання. Проведемо діагональ AC квадрата $ABCD$ (мал. 215). ΔACM — прямокутний, оскільки $CM \perp AC$ за означенням прямої, перпендикулярної до площини. За даною стороною квадрата знаходимо його діагональ:
$AC = AD\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 8$ (см). З трикутника ACM, за теоремою Піфагора, матимемо:

$$AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ (см).}$$

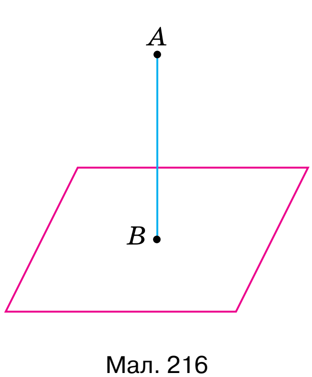


Мал. 215

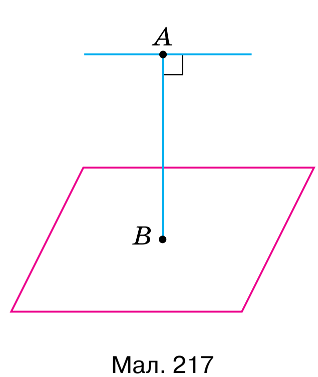
Зверніть увагу:
розв'язування задач про похилу та її проекцію на площину зводиться до розв'язування прямокутного трикутника, сторонами якого є похила, її проекція на площину й перпендикуляр до площини. Якщо такого трикутника немає на малюнку, то, щоб його утворити, проведіть допоміжні відрізки.

Подивіться на малюнки 216–217. На них зображено відстані від точки до площини (мал. 216), від прямої до паралельної їй площини (мал. 217) і між паралельними площинами (мал. 218).

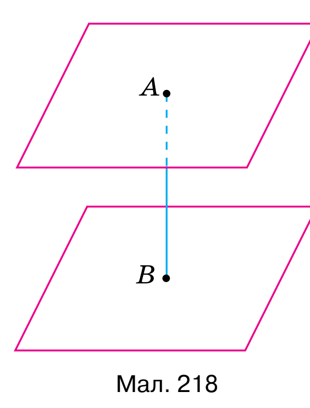
Відстанню від точки до площини називають довжину перпендикуляра, проведеного із цієї точки до площини. *Відстанню від прямої до пара-*



Мал. 216



Мал. 217



Мал. 218

лельної їй площини називають довжину перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки цієї прямої до площини. За *відстань між паралельними площинами* приймають довжину перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї площини до іншої.

Дізнайтеся більше

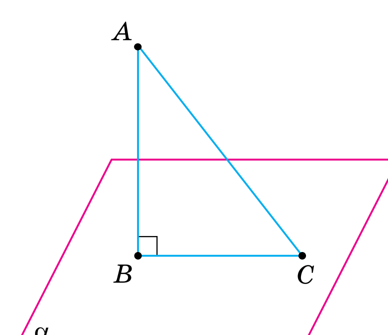
Значний внесок у розвиток шкільної геометрії зробив відомий український педагог-математик, доктор педагогічних наук, професор **Іван Федорович Тесленко** (*1908–1994*), який народився в с. Домоткань на Дніпропетровщині. Дотепер не втратили цінності його підручники та навчальні посібники, серед яких «Геометрія» (підручник для 9–10 класів), «Геометрія» (посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних інститутів).

Пригадайте головне

1. Що таке перпендикуляр, проведений з даної точки до площини; основа перпендикуляра?
2. Що таке похила, проведена з даної точки до площини? Що таке проекція похилої?
3. Сформулюйте властивості перпендикуляра й похилої.
4. Що називається відстанню від точки до площини; від прямої до паралельної їй площини; між паралельними площинами?

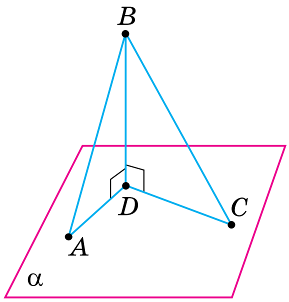
Розв'яжіть задачі

711'. Назвіть на малюнку 219:
1) перпендикуляр;
2) основу перпендикуляра;
3) похилу;
4) проекцію похилої.

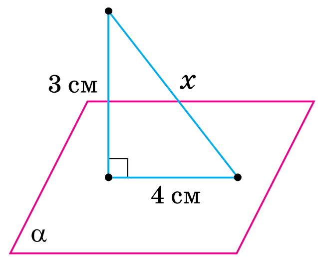


Мал. 219

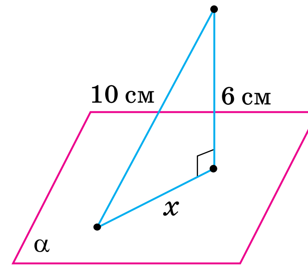
712'. На малюнку 220 AD і DC — проекції похилих AB і BC.
1) $AD < DC$. Яке із співвідношень правильне:
а) $AB = BC$; б) $AB > BC$; в) $AB < BC$?
2) $AB = BC$. Порівняйте довжини проекцій цих похилих.



Мал. 220

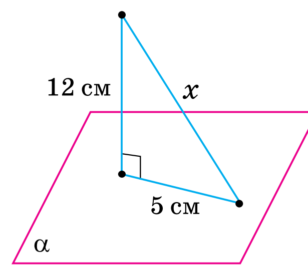


Мал. 221



Мал. 222

713'. За даними, наведеними на малюнках 221 – 223, знайдіть невідомий відрізок x.



Мал. 223

714°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 224). Довжина якого відрізка дорівнює відстані:

1) від вершини A до площини грані DD_1C_1C;

2) від прямої A_1D_1 до площини грані $ABCD$;

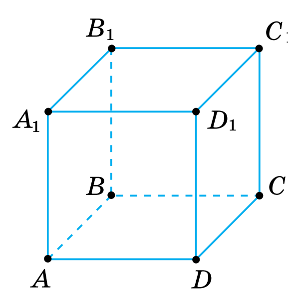
3) між площинами граней AA_1D_1D і BB_1C_1C?

715°. Проведіть з точки O до площини α перпендикуляр OM і похилу OK. Знайдіть довжину:

1) похилої OK, якщо $OM = 12$ см, $MK = 16$ см;

2) перпендикуляра OM, якщо $MK = 12$ см, $OK = 15$ см;

3) проекції MK похилої, якщо $OM = 9$ см, $OK = 15$ см.



Мал. 224

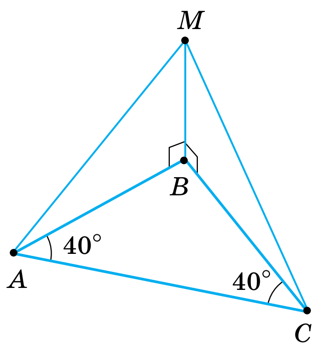
716°. AB — перпендикуляр, AC — похила, BC — проекція похилої. Заповніть таблицю 23.

Таблиця 23

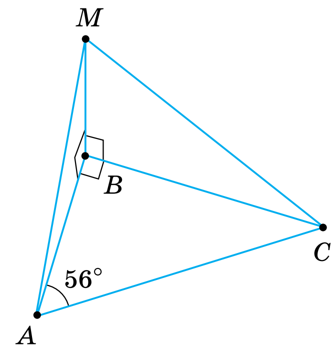
AB	24 см	15 см	
BC	7 см		$24a$
AC		25 см	$26a$

717°. **З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Довжина похилої дорівнює a, кут між похилою і перпендикуляром — α. Знайдіть довжини перпендикуляра й проекції похилої, якщо:**
1) $a = 10$ см, $\alpha = 60°$; 2) $a = 12$ см, $\alpha = 45°$; 3) $a = 8$ см, $\alpha = 30°$.

718°. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Довжина перпендикуляра дорівнює a, кут між похилою і перпендикуляром дорівнює α. Знайдіть довжину похилої та її проекцію на площину, якщо:
1) $a = 6$ см, $\alpha = 60°$; 2) $a = 5$ см, $\alpha = 45°$; 3) $a = 14$ см, $\alpha = 30°$.



Мал. 225



Мал. 226

719°. Скільки рівних похилих можна провести з даної точки до площини? Якою фігурою є геометричне місце основ цих похилих?

720°. OM — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, де O — точка перетину його діагоналей. Доведіть, що точка M рівновіддалена від вершин квадрата.

721°. AK — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Порівняйте довжини похилих KC і KB. Поясніть відповідь.

722°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром a. Знайдіть відстань:
1) від прямої AA_1 до площини BB_1D_1D;
2) від прямої AD до площини A_1B_1CD.

723. Порівняйте похилі MA і MC за даними, наведеними:
1) на малюнку 225; 2) на малюнку 226.

724. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Знайдіть кут між перпендикуляром і похилою, якщо довжина:
1) перпендикуляра дорівнює довжині проекції похилої;
2) проекції похилої дорівнює половині довжини похилої;
3) перпендикуляра дорівнює половині довжини похилої.

725. **AB — перпендикуляр, AC — похила, BC — проекція похилої, α – кут між перпендикуляром і похилою.** Заповніть таблицю 24.

Таблиця 24

AB			5 см	6 см	7 см	14 см
BC		4 см				14 см
AC	6 см	8 см		12 см		
α	30°		45°		60°	

726. З точки M до площини проведено рівні похилі MA, MB, MC, MD. Чи може чотирикутник $ABCD$ бути: 1) квадратом; 2) паралелограмом; 3) прямокутником? Поясніть відповідь.

727. **Доведіть: якщо існує точка, рівновіддалена від вершин паралелограма, то цей паралелограм — прямокутник.**

728. Якщо точка рівновіддалена від вершин ромба, то цей ромб — квадрат. Доведіть.

729. Точка A розміщена на відстані a від вершин рівностороннього трикутника зі стороною a. Знайдіть відстань від точки A до площини трикутника, якщо:
1) $a = \sqrt{6}$ см; 2) $a = 3$ см.

730. З точки M поза площиною α проведено до неї три рівні похилі MA, MB, MC та перпендикуляр MO. Доведіть, що основа перпендикуляра O є центром кола, описаного навколо ΔABC .

Зверніть увагу:
якщо дано кілька рівних похилих, проведених із точки до площини, то їх кінці лежать на колі, центром якого є основа перпендикуляра, проведеного на площину зі спільної точки похилих.

731. Точка D розміщена на відстані a від вершин прямокутного трикутника. Гіпотенуза трикутника дорівнює b. Знайдіть відстань від точки D до площини трикутника, якщо:
1) $a = 10$ см, $b = 12$ см; 2) $a = 20$ см, $b = 24$ см.

732. З точки до площини проведено перпендикуляр довжиною 6 см і похилу довжиною 9 см. Знайдіть проекцію перпендикуляра на похилу.

733*. З точки A до площини α проведено дві похилі, які дорівнюють 10 см і 17 см, а їх проекції відносяться, як 2 : 5. Знайдіть:
1) проекції похилих; 2) відстань від точки A до площини α.

Зверніть увагу:
якщо в задачі йдеться про дві похилі, що їх проведено з однієї точки до площини, то розгляньте два прямокутних трикутники, спільним катетом яких є перпендикуляр, проведений з даної точки до площини.

734*. З точки до площини проведено дві похилі. Знайдіть довжини похилих, якщо:
1) різниця їх довжин дорівнює 6 см, а проекції похилих становлять 15 см і 27 см;
2) похилі відносяться, як 5 : 8, а проекції похилих дорівнюють 7 см і 32 см.

735*. З точки до площини проведено дві рівні похилі. Знайдіть кут між кожною похилою та її проекцією, якщо кут між похилими дорівнює 60°, а кут між їх проекціями — прямий.

Проявіть компетентність

736. Щогла закріплена трьома однаковими тросами так, що їх нижні кінці віддалено від щогли на 20 м, а верхні закріплено на висоті 32 м. Які довжини тросів?

737. У підвалі, що має форму півциліндра (мал. 227), треба поставити два стояки, основи яких мають бути однаково віддалені по підлозі від найближчої стіни й розміщатися на відстані 2 м один від одного. Визначте висоту стояків, якщо ширина підвалу становить 4,6 м.

738. Потрібно протягнути два електричних дроти від стовпа до будинку (мал. 228). На стовпі вони кріпляться на висоті 9 м, а на стіні будинку — на висоті 4 м. Скільки потрібно дроту, якщо відстань від стовпа до будинку становить 20 м, а на кріплення і провисання слід додати 6 % знайденої довжини?

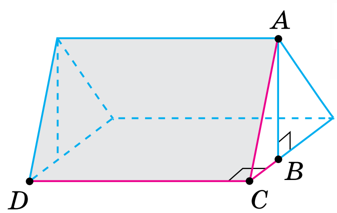
Мал. 227

Мал. 228

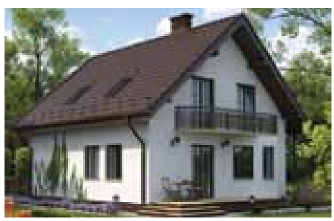
§ 36 Теорема про три перпендикуляри

Подивіться на малюнок 229. У двосхилому даху будівлі краї покрівлі позначено DC і AC, а крокви — AB і BC.

Розглядатимемо відрізок BC як проекцію похилої AC на площину BCD, а DC — як пряму, що проходить через основу C похилої AC. Цей приклад ілюструє теорему про три перпендикуляри: якщо пряма DC перпендикулярна до проекції BC похилої AC, то вона перпендикулярна і до похилої AC.

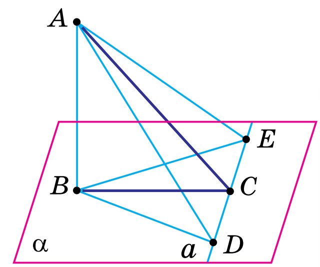


Мал. 229



Теорема **(про три перпендикуляри)**

Якщо пряма, проведена у площині через основу похилої, перпендикулярна до її проекції, то вона перпендикулярна і до самої похилої.



Мал. 230

Дано: $AB \perp \alpha$ (мал. 230);
AC — похила;
BC — проекція похилої;
$C \in a$, $a \perp BC$.

Довести: $a \perp AC$.

Доведення. Відкладемо на прямій a довільні, але рівні відрізки $CD = CE$ і сполучимо відрізками точки A і B з точками D і E. Тоді матимемо: $BD = BE$ як похилі до прямої DE з рівними проекціями CD і CE; $AD = AE$ як похилі до площини α, що мають рівні проекції BD і BE. Унаслідок цього трикутник ADE є рівнобедреним, тому його медіана AC перпендикулярна до основи DE.

? Чому теорему називають теоремою про три перпендикуляри? У ній йдеться про зв'язок між такими трьома перпендикулярами: $AB \perp \alpha$, $a \perp BC$, $a \perp AC$.

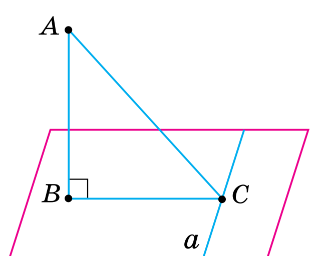
Справджується й обернена теорема.

Теорема **(обернена до теореми про три перпендикуляри)**

Якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна й до проекції похилої.

Формулювання теореми про три перпендикуляри та теореми, оберненої до неї, наведено в таблиці 25.

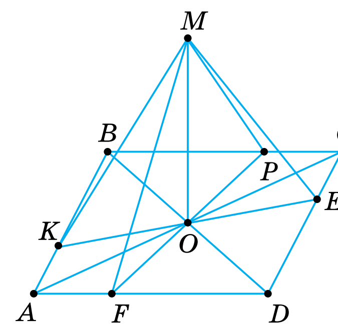
Таблиця 25

	Якщо $\dfrac{a \perp BC}{a \perp AC}$, то $\dfrac{a \perp AC}{a \perp BC}$.

Задача. Відстань від точки M до кожної зі сторін ромба дорівнює 10 см, а до площини ромба — 8 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб.

Розв'язання.

Нехай $ABCD$ — ромб (мал. 231), $MK = MP = ME = MF = 10$ см, $MO = 8$ см. З умови випливає, що $MK \perp AB$, $MP \perp BC$, $ME \perp CD$, $MF \perp AD$. Тоді за теоремою, оберненою до теореми про три перпендикуляри, $OK \perp AB$, $OP \perp BC$, $OE \perp CD$, $OF \perp AD$. Оскільки відстані від точки M до сторін ромба рівні, то відрізки OK, OP, OE, OF також рівні як проекції рівних похилих. Звідси точка O — основа перпендикуляра MO — є центром кола, вписаного в ромб. Із прямокутного трикутника MOK знайдемо радіус цього кола:

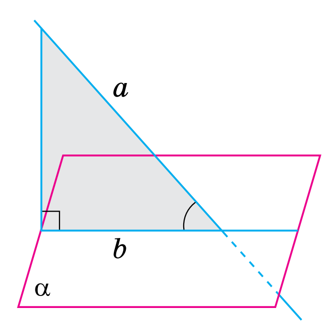


Мал. 231

$$R = OK = \sqrt{MK^2 - MO^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ (см).}$$

Зверніть увагу:
застосовуючи теорему про три перпендикуляри, пам'ятайте: якщо точка A однаково віддалена від усіх сторін многокутника, то основа перпендикуляра, проведеного із цієї точки до площини многокутника, також однаково віддалена від його сторін, тобто є центром вписаного в многокутник кола.

Нехай дано площину α і пряму a, яка її перетинає і не перпендикулярною до площини α (мал. 232). Основи перпендикулярів, проведених з точок прямої a до площини α, лежать на прямій b. Ця пряма називається *проекцією прямої a* на площину α.

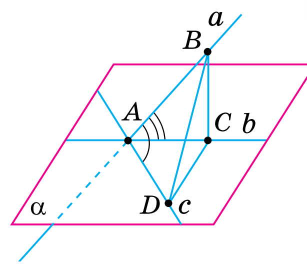


Мал. 232

***Кутом між прямою і площиною* називається кут між цією прямою та її проекцією на площину.**

Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між нею і площиною вважається таким, що дорівнює 90°, а між паралельними прямою і площиною — 0°.

Дізнайтеся більше



Мал. 233

Кут між прямою і площиною — це найменший з усіх кутів, що пряма утворює з прямими, проведеними на площині.

Нехай a — дана пряма, b — її проекція на площину, c — довільна пряма у площині α (мал. 233). З довільної точки B прямої a проведемо перпендикуляр BC до прямої b. Відкладемо на прямій c відрізок $AD = AC$ і сполучимо точки D і C. У трикутниках ABC і ABD сторона AB — спільна, $AC = AD$, але $BD > BC$ (за теоремою, оберненою до теореми про три перпендикуляри). Тоді й протилежний кут $\angle DAB$ у трикутнику ABD більший за відповідний кут CAB у ΔABC.

Пригадайте головне

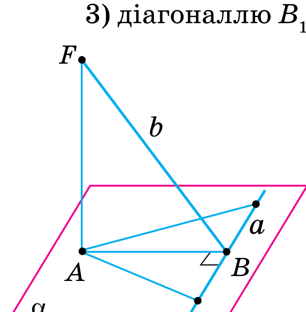
1. Сформулюйте теорему про три перпендикуляри.
2. Що таке проекція прямої на площину?
3. Дайте означення кута між прямою та площиною.
4. Яка градусна міра кута між прямою та площиною, якщо пряма перпендикулярна до площини; пряма паралельна площині?

Розв'яжіть задачі

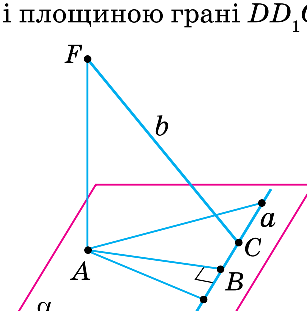
739'. На малюнках 234 – 236 $AF \perp \alpha$. Визначте взаємне розміщення прямих a і b на кожному з малюнків.

740'. На малюнках 237–239 пряма a' — проекція прямої a на площину β. На якому з малюнків кут α є кутом між прямою a і площиною β?

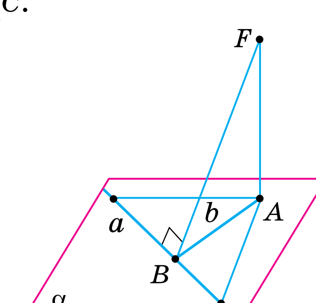
741'. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб (мал. 240). Назвіть кут між:
1) діагоналлю DC_1 грані DD_1C_1C і площиною основи $ABCD$;
2) діагоналлю B_1D куба і площиною основи $ABCD$;
3) діагоналлю B_1D і площиною грані DD_1C_1C.



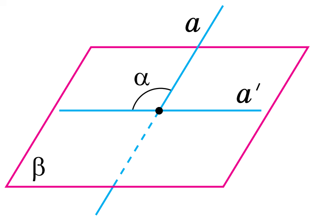
Мал. 234



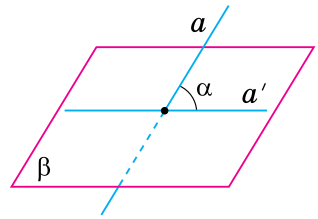
Мал. 235



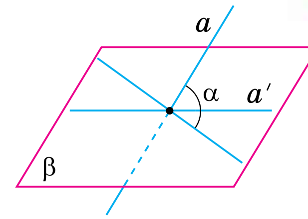
Мал. 236



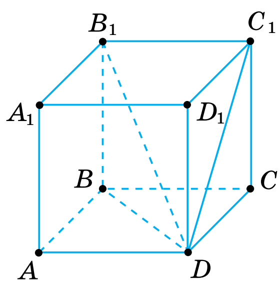
Мал. 237



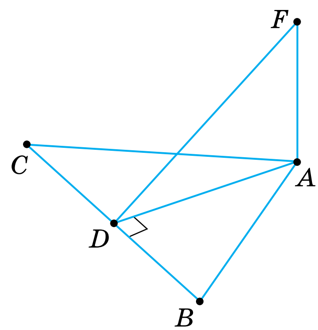
Мал. 238



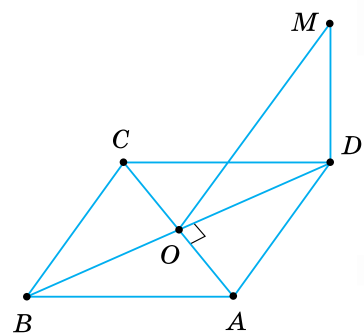
Мал. 239



Мал. 240



Мал. 241

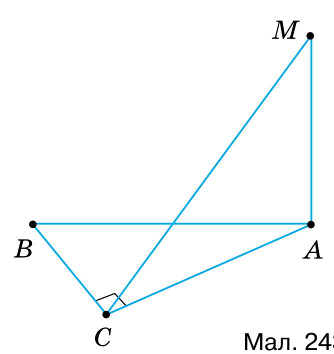


Мал. 242

742°. На малюнку 241 AF — перпендикуляр до площини ΔABC, AD — висота ΔABC. Доведіть, що $DF \perp BC$.

743°. На малюнку 242 DM — перпендикуляр до площини квадрата. Доведіть, що $OM \perp AC$.

744°. OM — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, у якому O — точка перетину діагоналей, $AB = a$, $OM = b$. Знайдіть відстань від точки M до сторони CD, якщо: 1) $a = 12$ см, $b = 8$ см; 2) $a = 16$ см, $b = 15$ см.

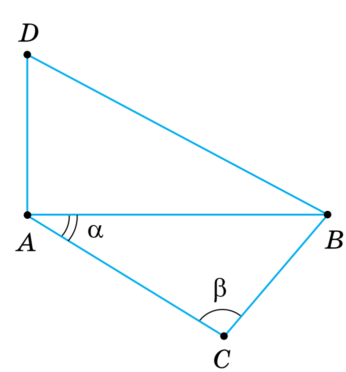


Мал. 243

745°. На малюнку 243 AM — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Доведіть, що трикутник BMC — прямокутний.

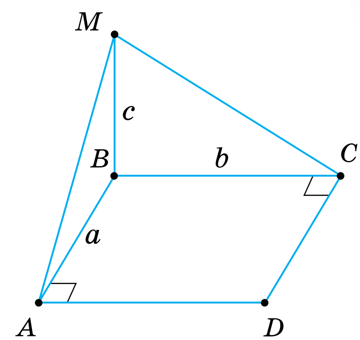
746°. **Із середини O гіпотенузи AB прямокутного трикутника ABC до його площини проведено перпендикуляр OM. Проведіть перпендикуляри з точки M до катетів AC і BC.** Поясніть побудову.

747°. У трикутнику ABC кут CAB дорівнює α, кут ACB — β (мал. 244). AD — перпендикуляр до площини трикутника ABC. Доведіть, що $DB \perp BC$, якщо:
1) $\alpha = 40°$, $\beta = 50°$; 2) $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.



Мал. 244

748°. З вершини B прямокутника $ABCD$ проведено перпендикуляр BM до його площини (мал. 245). $AB = a$, $BC = b$, $BM = c$. Знайдіть відстані від точки M до сторін CD і AD, якщо:
1) $a = 5$ см, $b = 16$ см, $c = 12$ см;
2) $a = 7$ см, $b = 10$ см, $c = 24$ см.

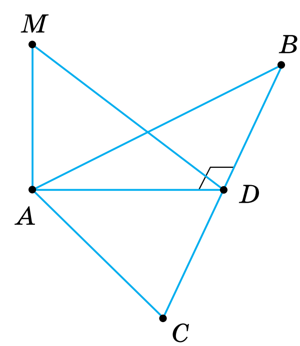


Мал. 245

749°. AM — перпендикуляр до площини рівнобедреного трикутника ABC ($AB = AC$). Доведіть, що похилі MB і MC утворюють рівні кути із площиною даного трикутника.

750°. Точка віддалена від площини на відстань h. Знайдіть довжини похилих, проведених із цієї точки під такими кутами до площини:
1) $30°$; 2) $45°$; 3) $60°$.

751°. Похила дорівнює a. Чому дорівнює проекція цієї похилої на площину, якщо похила утворює з площиною кут:
1) $30°$; 2) $45°$; 3) $60°$?



Мал. 246

752. На малюнку 246 AM — перпендикуляр до площини трикутника ABC. Доведіть:
1) якщо $AB = AC$, $CD = BD$, то $MD \perp BC$;
2) якщо $BD = CD$, $MD \perp BC$, то $AB = AC$.

753. CM — перпендикуляр до площини рівнобедреного трикутника ABC ($AC = BC$). $CM = a$, $AB = b$, $AC = c$. Знайдіть відстань від точки M до прямої AB, якщо:
1) $a = 1$ см, $b = 2$ см, $c = 3$ см; 2) $a = 5$ см, $b = 2$ см, $c = 5$ см.

754. З вершини прямого кута C рівнобедреного трикутника ABC проведено перпендикуляр CD до його площини. $AC = a$, $CD = b$. Знайдіть відстань від точки D до гіпотенузи AB, якщо: 1) $a = 6\sqrt{2}$ см, $b = 8$ см; 2) $a = 12\sqrt{2}$ см, $b = 5$ см.

755. Доведіть: якщо існує точка, рівновіддалена від усіх сторін паралелограма, то цей паралелограм — ромб.

756. Точка F рівновіддалена від усіх сторін многокутника. Доведіть, що основа перпендикуляра FO, проведеного до площини многокутника, є центром кола, вписаного в многокутник.

757. Відстань від точки M до кожної зі сторін ромба дорівнює a, до площини ромба — b. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб, якщо:
1) $a = 25$ см, $b = 7$ см; 2) $a = 16$ см, $b = 12$ см.

758. Діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см. Точка M, яка лежить поза площиною ромба, віддалена від його сторін на 8 см. Знайдіть відстань від точки M до площини ромба.

759. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 144 см. Точка M віддалена від кожної сторони цього трикутника на 19 см. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника.

760. AM — перпендикуляр до площини прямокутника $ABCD$. Знайдіть AM, якщо $MB = 15$ см, $MC = 24$ см і $MD = 20$ см.

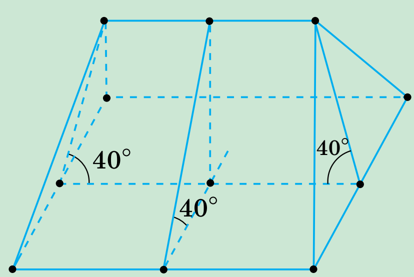
761. Виміри прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ становлять 1 см, 2 см і 8 см. Знайдіть площу трикутника A_1BD.

762*. З точки, віддаленої від площини на відстань a, проведено дві похилі під кутом 30° до площини. Знайдіть відстань між основами похилих, якщо кут між їх проекціями дорівнює 120°.

763*. З точки, віддаленої від площини на a, проведено дві похилі, які утворюють із площиною кути 45° і 30°, а між собою — прямий кут. Знайдіть відстань між основами похилих, якщо:
1) $a = 4$ см; 2) $a = 6$ см.

Проявіть компетентність

764. Чотирисхилий дах будинку розмірами 12,5 м і 7,2 м має нахил 40° (мал. 247).
1) Знайдіть площу кожного схилу даху.
2) Яка площа поверхні даху?
3) Скільки квадратних метрів дахового заліза треба на покриття, якщо витрати на згин й обрізки становлять 6 %?



Мал. 247

§ 37 Залежність між паралельністю й перпендикулярністю прямих і площин

Мал. 248

Подивіться на малюнок 248. На книжковій шафі позначено паралельні прямі a і b та площину α. Якщо площина α перпендикулярна до однієї з паралельних прямих, наприклад до a, то вона перпендикулярна й до прямої b. Зв'язок між паралельними прямими та перпендикулярною до них площиною виражається такою теоремою.

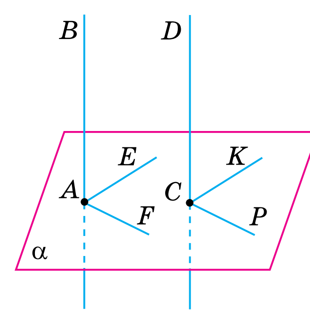
Теорема **(про паралельні прямі та перпендикулярну площину)**

Якщо площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої.

Дано: $AB \parallel CD$, $\alpha \perp AB$ (мал. 249).

Довести: $\alpha \perp CD$.

Доведення. Проведемо в площині α через точку A довільні прямі AE і AF, а через точку C — прямі CK і CP, відповідно паралельні прямим AE і AF. Тоді $\angle BAE = \angle DCK$ і $\angle BAF = \angle DCP$ як кути з паралельними й однаково напрямленими сторонами. Оскільки $AB \perp \alpha$, то $\angle BAE$ і $\angle BAF$ — прямі. Тоді $\angle DCK$ і $\angle DCP$ також є прямими. Отже, $\alpha \perp CD$.

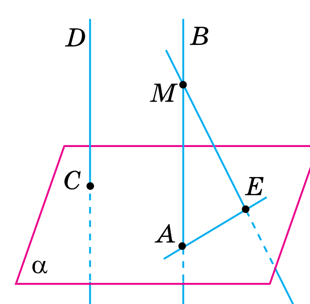


Мал. 249

Відомо, що площина перпендикулярна до однієї з основ трапеції. Як розміщена ця площина відносно другої основи? Перпендикулярно до основи. Це випливає з теореми про паралельні прямі та перпендикулярну площину, оскільки основи трапеції паралельні.

Задача. Доведіть, що дві прямі, перпендикулярні до однієї площини, паралельні.

Розв'язання. Нехай прямі AB і CD перпендикулярні до площини α (мал. 250). Припустимо, що прямі AB і CD непаралельні.



Мал. 250

Візьмемо на прямій AB будь-яку точку M, що не лежить у площині α. Проведемо через точку M пряму ME, паралельну прямій CD. Оскільки $CD \perp \alpha$, а $ME \parallel CD$, то, за теоремою про паралельні прямі та перпендикулярну площину, $ME \perp \alpha$. A і E — точки перетину прямих AM і ME з площиною α. Тоді пряма AE перпендикулярна до прямих AB і ME, які перетинаються. А це неможливо. Тому прямі CD і AB паралельні.

Зверніть увагу!
1. Щоб установити перпендикулярність прямої та площини, перевірте, чи буде ця площина перпендикулярною до прямої, яка паралельна даній прямій.
2. Щоб обґрунтувати паралельність двох прямих, спробуйте знайти площину, перпендикулярну до кожної з даних прямих.

На малюнку 267 край книжкової шафи ілюструє пряму a, а дві полиці — площини α і β. Якщо пряма a перпендикулярна до площини α, то вона перпендикулярна й до площини β. Зв'язок між паралельними площинами та перпендикулярною до них прямою виражаємо теоремою, яку приймемо без доведення.

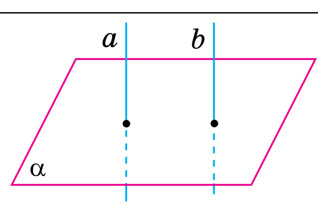
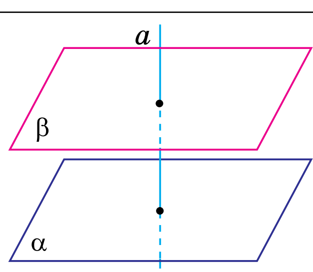
Теорема (про паралельні площини та перпендикулярну пряму)

Якщо пряма перпендикулярна до однієї з паралельних площин, то вона перпендикулярна й до другої.

Зверніть увагу:
щоб установити перпендикулярність прямої та площини, обґрунтуйте твердження, що ця пряма перпендикулярна до площини, паралельної даній.

Формулювання теорем і задачі наведено в таблиці 26.

Таблиця 26

	Якщо $a \parallel b$, $a \perp \alpha$, то $b \perp \alpha$
	Якщо $\alpha \parallel \beta$, $a \perp \beta$, то $a \perp \alpha$
	Якщо $\alpha \perp a$, $\beta \perp a$, то $\alpha \parallel \beta$

Дізнайтеся більше

Вагомий внесок у геометрію зробив **Павло Самуїлович Урисон** (*1898–1924*) — відомий математик, який народився в м. Одесі. Життя вченого трагічно обірвалося, коли йому було всього 26 років, але він встиг зробити визначні відкриття з топології (розділ геометрії).

Пригадайте головне

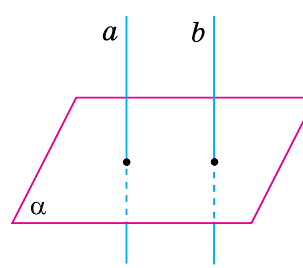
1. Який зв'язок між паралельними прямими та перпендикулярною до них площиною?
2. Як установити перпендикулярність прямої та площини; паралельність двох прямих?
3. Сформулюйте теорему про паралельні площини та перпендикулярну пряму.

Розв'яжіть задачі

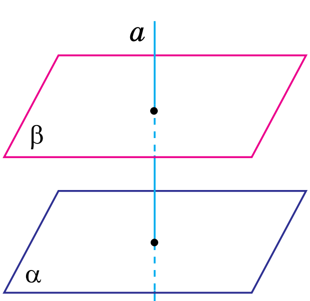
765'. Прямі a і b паралельні (мал. 251). Пряма a перпендикулярна до площини α. Чи можна стверджувати, що пряма b перпендикулярна до площини α?

766'. Прямі a і b перпендикулярні до площини α (мал. 251). Яке взаємне розміщення прямих a і b?

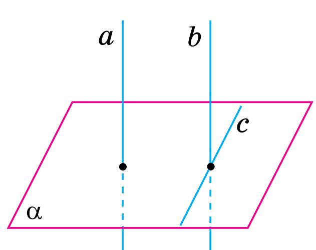
767'. Площини α і β паралельні (мал. 252). Пряма a перпендикулярна до площини β. Чи можна стверджувати, що пряма a перпендикулярна до площини α?



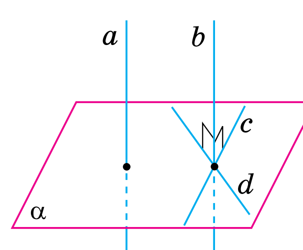
Мал. 251



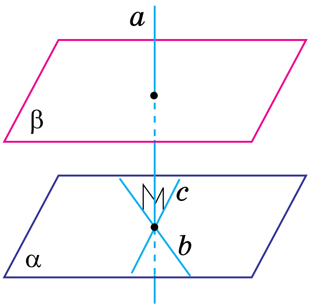
Мал. 252



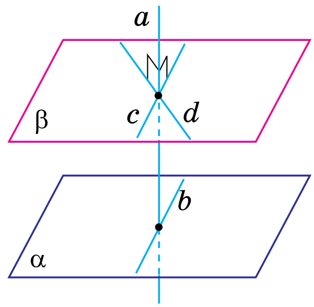
Мал. 253



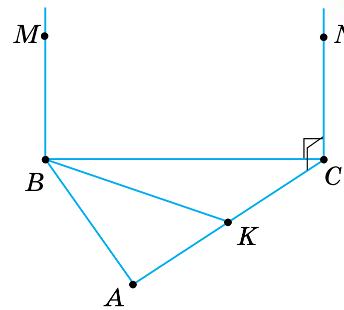
Мал. 254



Мал. 255



Мал. 256



Мал. 257

768°. Дано: $a \parallel b$, $a \perp \alpha$ (мал. 253). Поясніть, чому $b \perp c$.

769°. Дано: $a \parallel b$, $b \perp c$ і $b \perp d$ (мал. 254). Доведіть, що $a \perp \alpha$.

770°. Дано: $\alpha \parallel \beta$, $a \perp b$ і $a \perp c$ (мал. 255). Доведіть, що $a \perp \beta$.

771°. Дано: $\alpha \parallel \beta$, $a \perp c$ і $a \perp d$ (мал. 256). Доведіть, що $a \perp b$.

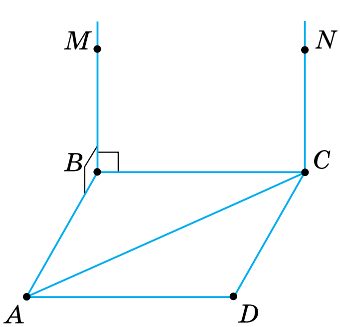
772°. **Чи можуть бути перпендикулярними до площини дві сторони:**
1) трикутника;
2) трапеції;
3) правильного шестикутника?
Відповідь поясніть.

773°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Чи перпендикулярна до площини основи $ABCD$ пряма, що проходить через:
1) середини ребер DC і D_1C_1;
2) центри граней $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$;
3) вершину B_1 і середину ребра AB?
Відповідь поясніть.

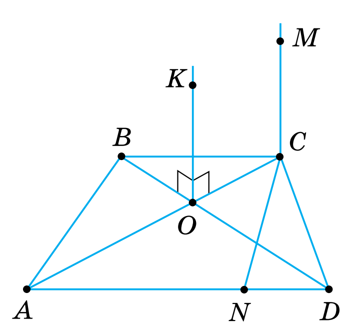
774. Дано: $CN \perp BC$, $CN \perp AC$, $CN \parallel BM$ (мал. 257).
Доведіть, що: 1) $BM \perp BK$; 2) $BM \perp AB$.

775. Дано: $CN \parallel BM$, $BM \perp BC$, $BM \perp AB$ (мал. 258).
Доведіть, що: 1) $CN \perp AC$; 2) $CN \perp CD$.

776. Дано: $OK \perp AC$, $OK \perp BD$, $OK \parallel CM$ (мал. 259).
Доведіть, що: 1) $CM \perp BC$; 2) $CM \perp CN$.



Мал. 258



Мал. 259

777. Через вершину A ромба і точку O перетину його діагоналей проведено паралельні прямі AM і ON, причому $AM \perp AB$ і $AM \perp AD$. Доведіть, що: 1) $ON \perp BD$; 2) $ON \perp AC$.

778. Відрізок AB паралельний площині α. З точки A до площини α проведено перпендикуляр AD. Через точку B проведено пряму, паралельну AD, яка перетинає площину α в точці C. Якого виду чотирикутник $ABCD$? Відповідь поясніть.

779. З точок A і B проведено до площини α перпендикуляри AD і BC. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ є прямокутником, якщо:
1) $AD = BC$; 2) прямі AB і DC паралельні.

780. Діагональ AC ромба $ABCD$ перпендикулярна до площини α. Яке взаємне розміщення діагоналі BD ромба і площини α? Відповідь поясніть.

781. **Через вершини A і C трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) проведено прямі AM і CN, перпендикулярні до її площини. Доведіть, що площини DAM і BCN паралельні.**

782. Через вершини A і C ромба $ABCD$ проведено прямі AM і CN, перпендикулярні до його площини. Доведіть паралельність площин:
1) MAB і NCD; 2) MAD і NCB.

783*. Площина α і пряма b, яка не лежить у площині α, перпендикулярні до прямої a. Доведіть, що $b \parallel \alpha$.

784*. Доведіть, що відстань від середини відрізка до площини, яка не перетинає його, дорівнює півсумі відстаней від кінців відрізка до цієї площини.

785*. Доведіть, що відстань між паралельними площинами не залежить від вибору точки на одній з них.

Проявіть компетентність

786. Як перевірити паралельність стелі й підлоги кімнати (мал. 260)? Скільки кутів треба виміряти для цього?

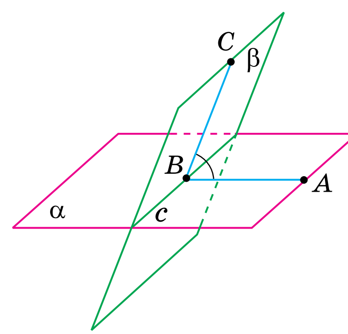
787. Запропонуйте спосіб перевірки паралельності площин, використавши означення відстані між паралельними площинами.

Мал. 260

§ 38 Перпендикулярні площини

1. КУТ МІЖ ПЛОЩИНАМИ

Нехай α і β — площини, які перетинаються по прямій c (мал. 261). Проведемо в цих площинах через довільну точку B прямої c прямі AB і BC, перпендикулярні до c. Тоді кут між площинами α і β дорівнюватиме куту між прямими AB і BC.



Мал. 261

Записуємо: $\angle(\alpha\beta) = \angle ABC$.

Чи залежить градусна міра кута $\angle ABC$ від вибору точки на прямій c? Не залежить, бо одержимо два кути з паралельними й однаково напрямленими сторонами. А такі кути рівні.

***Кутом між площинами*, які перетинаються, називається кут між прямими, проведеними в цих площинах зі спільної точки перпендикулярно до лінії їх перетину.**

Кут між паралельними площинами вважають таким, що дорівнює $0°$.

Дві площини називаються *перпендикулярними*, якщо кут між ними дорівнює $90°$.

Записуємо: $\alpha \perp \beta$.

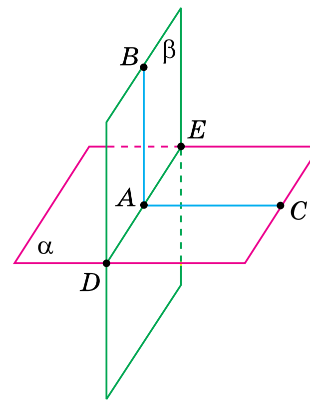
2. ОЗНАКА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТІ ПЛОЩИН

Теорема (ознака перпендикулярності площин)

Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.

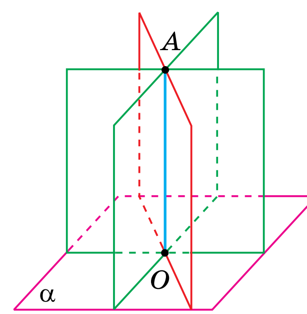
Дано: площини α і β (мал. 262);
A лежить в α; $AB \perp \alpha$; β — проходить через AB.
Довести: $\beta \perp \alpha$.

Доведення. Площини α і β мають спільну точку A, тому вони перетинаються по прямій DE, яка проходить через цю точку. У площині α проведемо пряму AC, перпендикулярну до прямої DE. Оскільки $AB \perp \alpha$, а прямі AC і DE лежать у площині α, то $AB \perp AC$ і $AB \perp DE$. Крім того, $AC \perp DE$.
Отже, $\angle(\alpha\beta) = \angle CAB = 90°$, тобто $\beta \perp \alpha$.



Мал. 262

Скільки площин, перпендикулярних до даної площини α, можна провести через точку A, яка не лежить у даній площині? Безліч. Проведемо пряму $AO \perp \alpha$ (мал. 263). За ознакою перпендикулярності площин, будь-яка площина, що проходить через пряму AO, перпендикулярна до площини α.



Мал. 263

На практиці, коли будують стіни, огорожі та інші споруди, то стовпи (палі) встановлюють вертикально (мал. 264) і цим забезпечують вертикальність стін чи огорож.

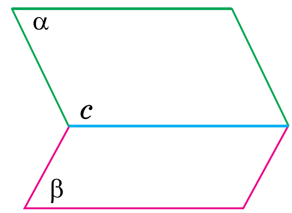

Мал. 264

Задача. Якщо дві площини перпендикулярні, то будь-яка пряма, що лежить в одній з них і перпендикулярна до прямої їх перетину, перпендикулярна до другої площини.

Розв'язання. Нехай α і β – перпендикулярні площини (див. мал. 262), пряма AB лежить у площині β і перпендикулярна до прямої DE перетину площин. Доведемо, що $AB \perp \alpha$. Проведемо в площині α пряму AC, перпендикулярну до DE – прямої перетину площин α і β. Тоді кожна з прямих AC і AB перпендикулярна до DE. Тому кут між прямими AC і AB дорівнює куту між площинами α і β. Оскільки, за умовою, $\alpha \perp \beta$, то $\angle CAB = 90°$ і $AB \perp AC$. Отже, пряма AB перпендикулярна до прямих DE і AC, які перетинаються. За ознакою перпендикулярності прямої та площини, $AB \perp \alpha$.

Зверніть увагу:
щоб обґрунтувати перпендикулярність двох площин, знайдіть в одній із цих площин пряму, перпендикулярну до другої площини або до лінії їх перетину.

Подивіться на малюнок 265. Пряма c ділить кожну з площин α і β на дві півплощини. Фігуру, утворену двома півплощинами, обмеженими спільною прямою, називають *двогранним кутом*. На малюнку 265 зображено двогранний кут з ребром c.



Мал. 265

3. ПРАКТИЧНЕ ЗНАЧЕННЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ

Розділи стереометрії, у яких вивчають **паралельність і перпендикулярність прямих і площин, мають велике практичне значення.** Їх можна назвати «будівельною геометрією». Справді, у будівлях (мал. 266) міжповерхові перекриття паралельні між собою та перпендикулярні до споруджених стін, а стіни перпендикулярні або паралельні між собою.

Мал. 266

Ми, можна сказати, оточені перпендикулярами й паралелями (мал. 266–268): ніжки стола перпендикулярні до підлоги й паралельні між собою, краї шафи перпендикулярні до стін або паралельні їм тощо. Те саме можна сказати про стовпи, лінії електропередачі, залізничні колії тощо.

Мал. 267

Під час обертання навколо перпендикуляра площина суміщається сама із собою. Тому вісь колеса перпендикулярна до площини колеса. Правильно навішені двері відчиняються вільно й не зачіпають підлоги.

Вертикальність установленої плоскої поверхні (стіни, паркана тощо) перевіряють за допомогою виска — мотузки з тягарцем (мал. 269). Висок завжди напрямлений вертикально, тому й стіна стоїть вертикально, якщо в будь-якому місці висок, розміщуючись уздовж стіни, не відхиляється.

Мал. 268

Мал. 269

Паралельність і перпендикулярність застосовуються у фізиці. Тиск рідини або газу на стінку посудини напрямлений перпендикулярно до стінки; тиск вантажу на опору напрямлений перпендикулярно до неї;

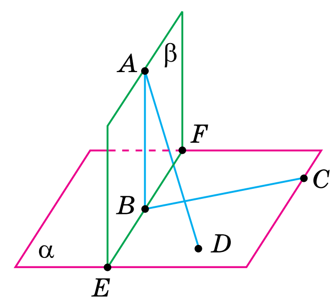
сили, що діють на важелі, напрямлені паралельно; перпендикуляр до поверхні фігурує в законах відбиття й заломлення світла.

Дізнайтеся більше

У розв'язуванні задач використовується й таке твердження.

Якщо дві площини α і β перпендикулярні й до площини α проведено перпендикулярну пряму, що має спільну точку з площиною β, то ця пряма лежить у площині β.

Нехай $AD \perp \alpha$. Припустимо, що пряма AD не лежить у площині β (мал. 270). Проведемо в площині β пряму $AB \perp EF$, де EF — пряма перетину площин α і β. Тоді $AB \perp \alpha$. Матимемо дві прямі AB і AD, які перпендикулярні до площини α й перетинаються. Але це суперечить задачі § 38. Отже, пряма AD лежить у площині β.



Мал. 270

Пригадайте головне

1. Дайте означення кута між площинами.
2. Яка градусна міра кута між паралельними площинами?
3. Які площини називають перпендикулярними?
4. Сформулюйте ознаку перпендикулярності площин.

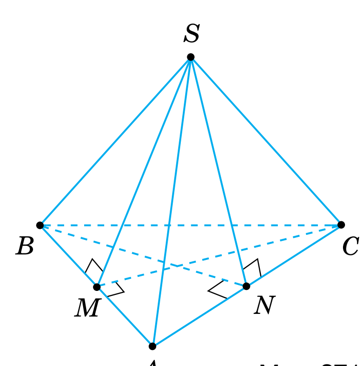
Розв'яжіть задачі

788'. На малюнку 271 $SABC$ — піраміда. Назвіть кут між площинами граней: 1) SAB і ABC; 2) SAC і ABC.

789'. Пряма a лежить у площині α і $a \perp \beta$ (мал. 272). Чи випливає з цього, що $\alpha \perp \beta$?

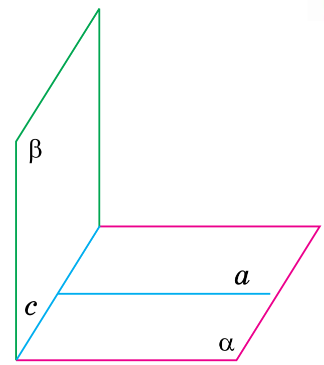
790'. На малюнку 272 $\alpha \perp \beta$. Пряма a лежить у площині α і $a \perp c$. Чи можна стверджувати, що $a \perp \beta$?

791°. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між площинами:
1) основи $ABCD$ і перерізу A_1B_1CD;
2) грані CC_1D_1D і перерізу AA_1C_1C;
3) перерізів AA_1C_1C і BB_1D_1D.



Мал. 271

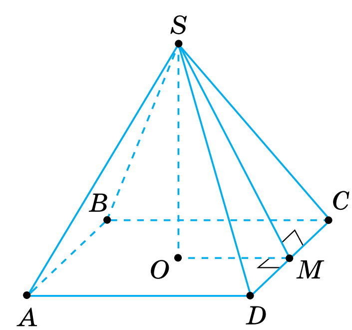
792°. На малюнку 273 $SABCD$ — чотирикутна піраміда, SO — висота піраміди, φ — кут між площинами граней $ABCD$ і SCD, $SM = a$. Знайдіть SO, якщо:
1) $a = 2$ см, $\varphi = 30°$;
2) $a = 4$ см, $\varphi = 45°$; 3) $a = 6$ см, $\varphi = 60°$.



Мал. 272

793°. Скільки можна провести через дану точку площин, перпендикулярних до даної площини?

794°. Пряма, що лежить в одній із двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до прямої їх перетину. Як розміщена ця пряма відносно другої площини? Поясніть відповідь.

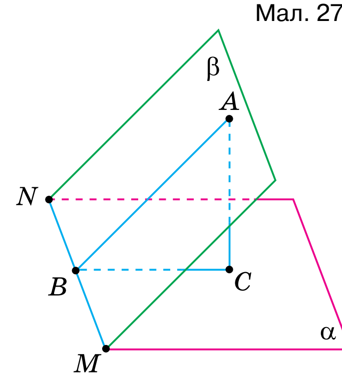


Мал. 273

795°. **CD — перпендикуляр до площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Доведіть, що площини ΔBCD і ΔACD — перпендикулярні.**

796°. На малюнку 274 $AB \perp MN$, $AC \perp \alpha$. Доведіть, що кут $\angle ABC$ — це кут між площинами α і β.

797°. У трикутній піраміді $SABC$ всі ребра рівні, точка M — середина ребра SC. Доведіть, що кут $\angle AMB$ — це кут між площинами граней SAC і SBC.



Мал. 274

798. Площини α і β перетинаються під кутом φ. Точка A площини β віддалена від площини α на відстань a. Знайдіть відстань від точки A до прямої перетину площин, якщо:
1) $a = 10$ см, $\varphi = 30°$;
2) $a = 6$ см, $\varphi = 60°$; 3) $a = 4$ см, $\varphi = 45°$.

799. **Площини α і β перетинаються під кутом φ. Відстань від точки A площини β до прямої перетину площин дорівнює a. Знайдіть відстань від точки A до площини α, якщо:**
1) $a = 24$ см, $\varphi = 30°$; 2) $a = 8$ см, $\varphi = 45°$; 3) $a = 14$ см, $\varphi = 60°$.

800. Знайдіть кут між площинами, якщо точка, яка лежить на одній з них, віддалена від прямої перетину площин на відстань, що удвічі більша за відстань від другої площини.

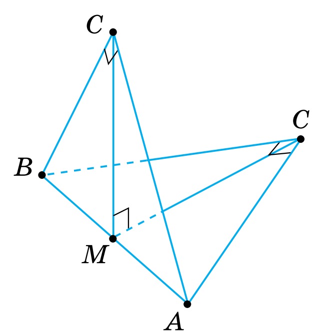
801. Через основу AC рівнобедреного трикутника ABC проведено площину α на відстані a від вершини B, $AC = b$, $AB = BC = c$. Знайдіть кут між площиною α і площиною трикутника, якщо:
1) $a = 4$ см, $b = 12$ см, $c = 10$ см; 2) $a = 8$ см, $b = 24$ см, $c = 20$ см.

802. Через катет AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) проведено площину α під кутом φ до площини трикутника, $AB = c$, $AC = b$. Знайдіть відстань від вершини B до площини α, якщо:
1) $c = 20$ см, $b = 16$ см, $\varphi = 30°$; 2) $c = 10$ см, $b = 8$ см, $\varphi = 45°$;
3) $c = 13$ см, $b = 5$ см, $\varphi = 60°$.

803. Пряма CM перпендикулярна до площини прямокутника $ABCD$. Доведіть перпендикулярність площин:
1) BCM і DCM; 2) ADM і DCM.

804. Точка M рівновіддалена від вершин квадрата $ABCD$. Доведіть перпендикулярність площин:
1) AMC і ABC; 2) AMC і BMD.

805. Площини двох прямокутних рівнобедрених трикутників зі спільною гіпотенузою $AB = a$ перпендикулярні (мал. 275). Знайдіть відстань між вершинами прямих кутів, якщо:
1) $a = 10$ см;
2) $a = 18$ см;
3) $a = 22$ см.

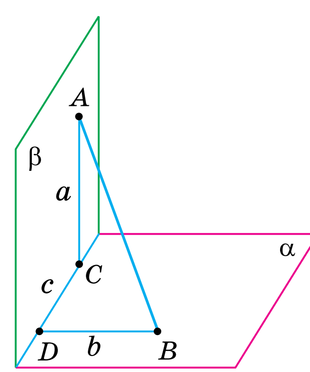


Мал. 275

806. Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у перпендикулярних площинах, $AB = a$. Знайдіть:
1) відстань між точками D і D_1;
2) відстань між точками C і D_1;
3) кут між діагоналями AC і AC_1.

807. Точка розміщена на відстані a від двох перпендикулярних площин. Знайдіть відстань від цієї точки до прямої перетину площин, якщо:
1) $a = 4\sqrt{2}$ см; 2) $a = 5$ см.

808. З точок A і B, які лежать у двох перпендикулярних площинах, проведено перпендикуляри AC і BD до прямої перетину площин (мал. 276). $AC = a$, $BD = b$, $CD = c$. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 12$ см;
2) $a = 24$ см, $b = 8$ см, $c = 6$ см.



Мал. 276

809*. Висота правильної піраміди дорівнює половині сторони основи. Знайдіть кут між площинами основи й бічної грані, якщо основа піраміди: 1) трикутник; 2) квадрат; 3) шестикутник.

810*. Точка A розміщена на відстанях a і b від двох площин, що перетинаються. Знайдіть відстань від точки A до прямої перетину площин, якщо кут між площинами дорівнює: 1) 90°; 2) 60°; 3) 30°.

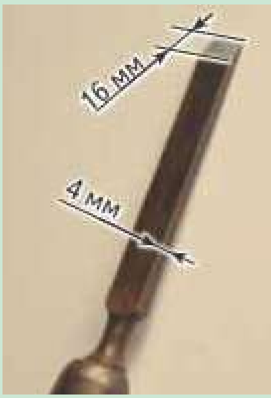
811*. Кінці відрізка завдовжки a лежать на двох перпендикулярних площинах. Відрізок утворює з однією площиною кут 45°, а з другою – кут 30°. Знайдіть частину прямої перетину площин, що розміщається між основами перпендикулярів, проведених до неї з кінців даного відрізка.

Проявіть компетентність

812. Знайдіть кут загострення стамески за розмірами, наведеними на малюнку 277.

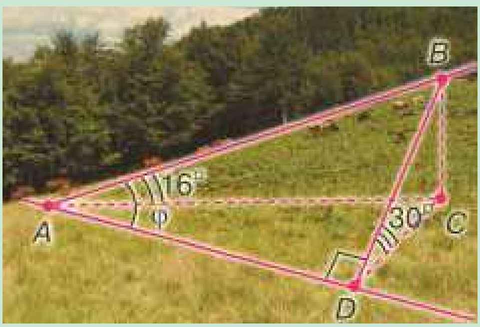
813. Вертикальність установленої плоскої поверхні (стіни, паркана тощо) можна перевірити за допомогою виска — мотузки з тягарцем. Поясніть, як це зробити (мал. 278). На чому ґрунтується така перевірка?

814. Кут між площинами іноді називають кутом найбільшого нахилу або підйому. Кут найбільшого підйому гори дорівнює 30° (мал. 279). Під яким кутом φ до підошви гори треба прокласти прямолінійну дорогу AB, щоб кут її нахилу до площини горизонту дорівнював 16°?



Мал. 277

Мал. 278



Мал. 279

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Дайте означення прямої, перпендикулярної до площини.
2. Сформулюйте ознаку перпендикулярності прямої та площини.
3. Що таке перпендикуляр, проведений з даної точки до площини?
4. Що таке похила, проведена з даної точки до площини? Що таке проекція похилої?
5. Сформулюйте властивості перпендикуляра й похилої.
6. Сформулюйте теорему про три перпендикуляри.
7. Дайте означення кута між прямою та площиною.
8. Сформулюйте теорему про паралельні прямі та перпендикулярну площину.
9. Сформулюйте теорему про паралельні площини та перпендикулярну пряму.
10. Дайте означення кута між площинами. Які площини називаються перпендикулярними?
11. Сформулюйте ознаку перпендикулярності площин.
12. Що таке двогранний кут і як його вимірюють?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 5

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

Тест 1

1° Пряма CD перпендикулярна до сторони AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Назвіть пряму і площину, які перпендикулярні між собою.

А. Пряма CD і площина ABC.
Б. Пряма BC і площина ACD.
В. Пряма AB і площина BCD.
Г. Пряма AC і площина BCD.

2° З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу, які дорівнюють 6 см і 10 см. Знайдіть проекцію похилої.

А. 12 см. **Б.** 81 см. **В.** 8 см. **Г.** 3 см.

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

3° Точка віддалена від площини на 9 см. Знайдіть довжину похилої, проведеної з цієї точки під кутом 30° до площини.

А. 4 см. **Б.** 18 см. **В.** 12 см. **Г.** 24 см.

4 Пряма CM перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$ зі стороною 2 см, $CM = 1$ см. Знайдіть відстань від точки M до вершини A даного квадрата.

А. 3 см. **Б.** 9 см. **В.** $2\sqrt{2}$ см. **Г.** 5 см.

5* OM — перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, де O – точка перетину діагоналей. Знайдіть відстань від точки M до сторони квадрата, якщо $AB = 6$ см, $OM = 4$ см.

А. 10 см. **Б.** 5 см. **В.** 2 см. **Г.** $\sqrt{5}$ см.

Тест 2

1° Відрізок AB паралельний площині α. З точок A і B до площини α проведено перпендикуляри AD і BC. Якого виду чотирикутник $ABCD$?

А. Довільний чотирикутник. **В.** Ромб.
Б. Трапеція. **Г.** Прямокутник.

2° $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Знайдіть кут між площинами основи $ABCD$ й перерізу A_1B_1CD.

А. 60°. **Б.** 90°. **В.** 45°. **Г.** 30°.

3° Кінець A відрізка AB завдовжки 15 см лежить у площині α, а кінець B віддалений від площини на 9 см. Знайдіть проекцію відрізка AB.

А. 24 см. **Б.** 13 см. **В.** 6 см. **Г.** 12 см.

4 Сторона AC рівностороннього трикутника завдовжки 10 см лежить у площині α, а вершина B віддалена від площини на 8 см. Знайдіть проекції сторін AB і BC на площину α.

А. 6 см і 10 см. **В.** 6 см і 6 см.
Б. 4 см і 4 см. **Г.** 8 см і 12 см.

5* Квадрати $ABCD$ і ABC_1D_1 лежать у перпендикулярних площинах. Знайдіть відстань між точками D і D_1, якщо $AB = 9$ см.

А. $9\sqrt{2}$ см. **Б.** 9 см. **В.** 8 см. **Г.** $8\sqrt{2}$ см.

Розділ 6

Координати і вектори

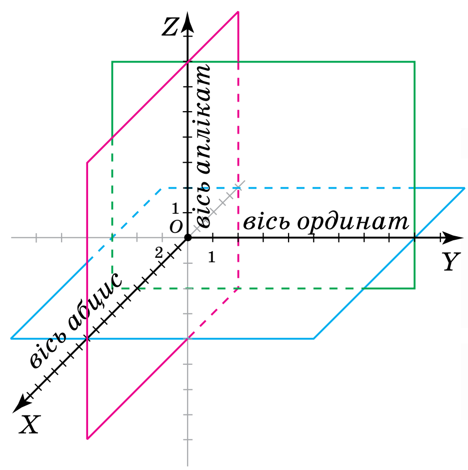
У розділі ви дізнаєтесь:

- ✦ що таке прямокутна декартова система координат у просторі та як у ній визначають координати точки;
- ✦ як знайти координати середини відрізка за координатами його кінців;
- ✦ як знайти довжину відрізка за координатами його кінців;
- ✦ які координати мають точки, симетричні відносно початку координат; координатних площин;
- ✦ що таке вектор; колінеарні, компланарні, рівні вектори;
- ✦ які дії можна виконувати з векторами та які їх властивості;
- ✦ як застосувати вивчений матеріал до розв’язування геометричних задач та задач практичного змісту

§ 39 Прямокутні координати в просторі

1. ПРЯМОКУТНА ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ У ПРОСТОРІ

Ви вже знаєте, як вводять систему координат на площині. У просторі *прямокутну декартову систему координат* можна задати аналогічно (мал. 280).



Мал. 280

Проведемо три взаємно перпендикулярні координатні прямі, які перетинаються в точці O. Точку O називають *початком координат*, а проведені прямі OX, OY, OZ — *осями координат*. Будемо вважати координатну вісь OX *віссю абсцис*, вісь OY — *віссю ординат*, а вісь OZ — *віссю аплікат*.

Кожна вісь розбивається точкою O на дві півосі. Одну з них, позначену стрілкою, називатимемо додатною, а другу — від'ємною.

Простір із введеною в ньому системою координат називають *координатним простором*.

Координатні осі, взяті попарно, визначають три координатні площини — XOY, XOZ, YOZ.

? Як взаємно розміщуються координатні площини? Площини XOY, XOZ, YOZ попарно перпендикулярні.

Координатні площини розбивають простір на 8 *координатних октантів* (табл. 27).

Таблиця 27

Знак чисел на півосі	Координатні октанти							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
OX	+	–	–	+	+	–	–	+
OY	+	+	–	–	+	+	–	–
OZ	+	+	+	+	–	–	–	–

Зверніть увагу:
для наочності зображень фігур у просторовій декартовій системі координат $OXYZ$ її будують у такий спосіб (див. мал. 280): 1) осі OY і OZ розміщують відповідно горизонтально й вертикально, а вісь OX — під однаковими кутами до кожної з них; 2) додатний напрям на осях указують так, щоб перехід OX — OY — OZ здійснювався проти годинникової стрілки; 3) одиничні відрізки на осях OY і OZ задають однакової довжини, а на осі OX — удвічі коротший.

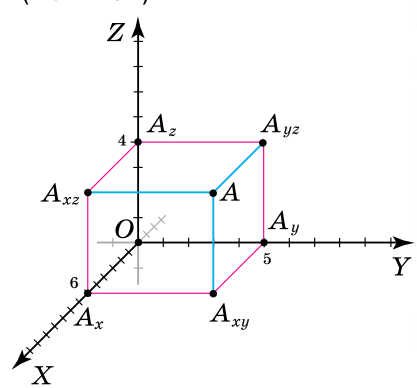
2. КООРДИНАТИ ТОЧКИ

Кожній точці у просторі можна поставити у відповідність трійку чисел, узятих у певному порядку, і навпаки, кожній трійці чисел відповідає єдина точка координатного простору. Таку упорядковану трійку чисел називають *координатами точки в даній системі координат.*

Задача 1. Знайдіть координати точки A (мал. 281).

Розв'язання.

1. Проведемо з точки A до координатних площин перпендикуляри AA_{xy}, AA_{xz} і AA_{yz} (проводимо відрізки, паралельні осям). Довжини цих перпендикулярів, узяті з відповідними знаками, будуть координатами точки A.



Мал. 281

2. Щоб знайти довжини відрізків AA_{xy}, AA_{xz} і AA_{yz}, проведемо з їх основ перпендикуляри до осей координат (проводимо відрізки, паралельні осям). Одержимо точки A_x, A_y, A_z. При цьому $OA_x = AA_{yz}$, $OA_y = AA_{xz}$, $OA_z = AA_{xz}$.

3. Визначимо координати точки A. Для цього знайдемо відстані від початку координат O до точок A_x, A_y, A_z. Одержуємо: $OA_x = 6$, $OA_y = 5$, $OA_z = 4$. Отже, точка A має координати: $A(6; 5; 4)$.

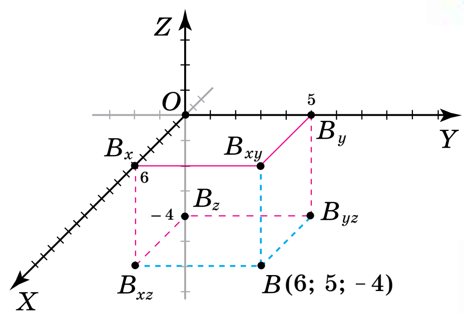
Які особливості координат точки, що лежить у координатній площині або на осі координат? Відповідні координати цієї точки дорівнюють нулю. Наприклад, точка $C(5; -7; 0)$ лежить у площині XOY, точка $D(0; 0; 3)$ — на осі OZ.

Зверніть увагу:
для визначення координат точки в даній прямокутній системі координат у просторі достатньо побудувати прямокутний паралелепіпед з вершинами: у даній точці, у її проекціях на координатні площини, у проекціях цих проекцій на осі координат і в початку координат.

Задача 2. У прямокутній декартовій системі координат побудуйте точку A (6; 5; –4).

Розв'язання. 1. На осях OX, OY і OZ позначимо числа 6, 5 і –4, що відповідають координатам даної точки B. Одержали точки B_x, B_y, B_z (мал. 282).

2. На відрізках OB_x = 6, OB_y = 5, OB_z = |–4| = 4 як на ребрах побудуємо прямокутний паралелепіпед $OB_xB_{xy}B_yB_zB_{xz}BB_{yz}$. Його вершина B — шукана точка.



Мал. 282

3. ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА ТОЧКАМИ

У просторі відстань між двома точками, заданими координатами в прямокутній декартовій системі координат, знаходять за формулою, яка аналогічна встановленій у планіметрії.

Формула відстані між точками A і B

Якщо A $(x_1; y_1; z_1)$ і B $(x_2; y_2; z_2)$, то

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Задача 3. Знайдіть відстань між точками M (2; 8; –3) і N (–1; 4; –3).

Розв'язання. $MN=\sqrt{(-1-2)^2+(4-8)^2+(-3-(-3))^2}=$

$=\sqrt{9+16+0}=\sqrt{25}=5.$

Зверніть увагу:
у просторі, як і на площині, відстань між двома точками дорівнює кореню квадратному із суми квадратів різниць їх відповідних координат.

4. КООРДИНАТИ СЕРЕДИНИ ВІДРІЗКА

У просторі координати середини відрізка, заданого координатами кінців у прямокутній декартовій системі координат, знаходять за формулою, яка аналогічна встановленій у планіметрії.

Формули координат середини відрізка AB

Якщо A $(x_1; y_1; z_1)$, B $(x_2; y_2; z_2)$ і M $(x; y; z)$ — середина відрізка AB, то

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Задача 4. Знайдіть координати середини відрізка з кінцями в точках C (3; 4; –5) і D (5; –4; 3).

Розв'язання. Нехай M (x; y; z) — середина відрізка CD, тоді:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3+5}{2} = 4,$$

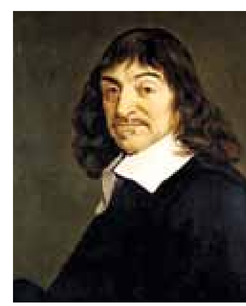
$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{4+(-4)}{2} = 0,$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{-5+3}{2} = -1.$$

Отже, середина відрізка CD має координати M (4; 0; –1).

Зверніть увагу:
кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців.

Дізнайтеся більше



1. Прямокутна декартова система координат названа на честь французького математика і філософа **Рене Декарта** (*1596–1650*). Вона широко застосовується не тільки в математиці, а й фізиці, астрономії, економіці, практиці. Наприклад, у такій системі координат зручно зображати траєкторію руху тіла в просторі.

2. У перекладі з латини *abscissa* означає «відрізок», *ordinata* — та, що визначає, ставить у відповідність, *applicata* — та, що прикладається (апліката дає додаткові відомості до двох відомих координат у площині XOY — абсциси та ординати).

Терміни «абсциса», «ордината», «координата» в сучасному їх тлумаченні ввів **Готфрід Вільгельм Лейбніц** (*1646–1716*). Довгий час словом «координата» одночасно позначали й абсцису, й ординату точки: *co* — разом, *ordinare* (лат.) – визначати, ставити у відповідність.

3. Білоусова Віра Петрівна (*1906–1986*) — геометр, кандидат фізико-математичних наук, професор. Навчалась, а потім працювала в Київському університеті імені Тараса Шевченка. Підручник «Аналітична геометрія» В. П. Білоусової, І. Г. Ільїна, О. П. Сергунової та В. П. Котлової перевидавався декілька разів і тривалий час залишався базовим навчальним посібником для студентів-математиків університетів.

Пригадайте головне

1. Поясніть, як побудувати прямокутну декартову систему координат у просторі.
2. Що таке координатні площини; координатні октанти?
3. Поясніть, як визначити координати точки в прямокутній декартовій системі координат у просторі.
4. Поясніть, як побудувати точку за її координатами.
5. Запишіть формулу відстані між двома точками із заданими координатами.
6. Запишіть формулу координат середини відрізка.

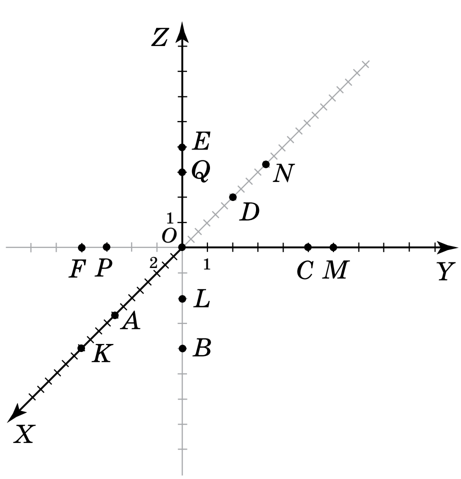
Розв'яжіть задачі

815'. За даними на малюнку 283 визначте координати точок: 1) A, B, C, D, E, F; 2) K, L, M, N, O, P.

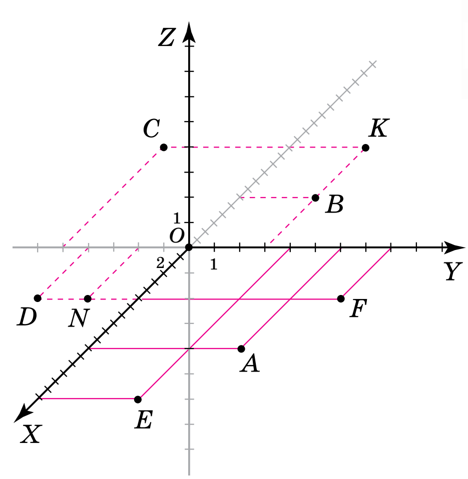
816'. На якій координатній осі лежить точка: 1) A (0; 1; 0); 2) B (−2; 0; 0); 3) C (0; 0; −5); 4) K (0; 0; 1); 5) L (0; −4; 0); 6) M (3; 0; 0)? Побудуйте її.

817'. Задані точки лежать у координатній площині XOY (мал. 284). Скопіюйте малюнок та проставте назви проекцій даних точок на координатні прямі. Запишіть координати заданих точок.

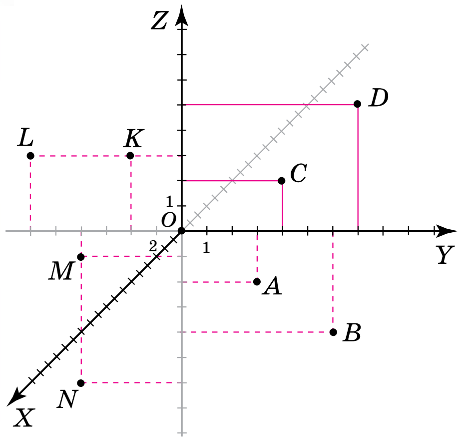
818'. У якій координатній площині лежить точка: 1) A (4; 1; 0); 2) B (−2; 0; 3); 3) C (0; −1; −5); 4) K (6; 0; 1); 5) L (0; −4; −3); 6) M (3; 2; 0)? Запишіть координати проекцій даної точки на координатні прямі. Побудуйте задану точку.



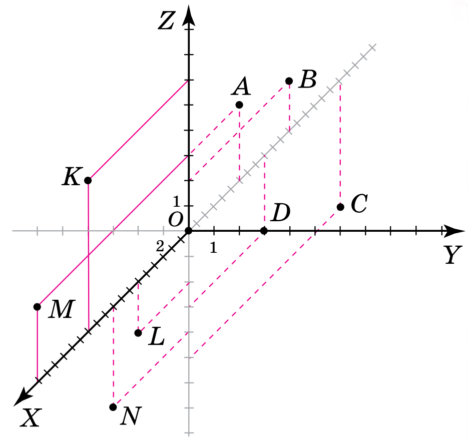
Мал. 283



Мал. 284



Мал. 285



Мал. 286

819'. Задані точки лежать у координатній площині: 1) YOZ (мал. 285); 2) XOZ (мал. 286). Скопіюйте малюнок та проставте назви проекцій даних точок на координатні прямі. Запишіть координати заданих точок.

820°. Задайте прямокутну декартову систему координат у просторі та побудуйте у ній точки: 1) A (1; 1; 1), B (1; −1; 1), C (−1; −1; 1), D (−1; 1; 1); 2) A (−1; −1; −1), B (−1; 1; −1), C (1; 1; −1), D (1; −1; −1).

821°. Які знаки мають координати точок у певному координатному октанті? Заповніть таблицю 28.

Таблиця 28

Октант	I	II	IV	VI	VIII
Знак абсциси					
Знак ординати					
Знак аплікати					
Координати точки M	M $(x; y; z)$	M $(-x; y; z)$	M $(x; -y; z)$	M $(-x; y; -z)$	M $(x; -y; -z)$

822°. Запишіть координати точки A, якщо:
1) A_x (2; 0; 0), A_y (0; −1; 0), A_z (0; 0; −3);
2) A_x (−3; 0; 0), A_y (0; 2; 0), A_z (0; 0; 4);
3) A_x (−5; 0; 0), A_y (0; 2; 0), A_z (0; 0; −1).

823°. Запишіть координати точки B, якщо:
1) B_{xy} (2; 1; 0), B_{yz} (0; 1; −3), B_{xz} (2; 0; −3);
2) B_{xy} (−4; 1; 0), B_{yz} (0; 1; 2), B_{xz} (−4; 0; 2);
3) B_{xy} (−5; −3; 0), B_{yz} (0; −3; −3), B_{xz} (−5; 0; −3).
Координати скількох проекцій на координатні площини достатньо знати, щоб визначити координати даної точки?

824°. Знаючи координати точки, знайдіть відстань від цієї точки до вказаної координатної площини. Заповніть таблицю 29.

Таблиця 29

Координати точки	(5; –1; 2)	(–5; –1; –2)	(5; 1; 2)	(–5; 1; –2)
Відстань до *XOY*				
Відстань до *XOZ*				
Відстань до *YOZ*				

825°. Визначте відстань між точками:
1) A (0; 0; 0), B (3; 4; 5);
2) A (0; 0; 0), B (1; –2; 2);
3) A (–5; –7;1), B (3; –1; 1).

826°. Знайдіть відстань від точки A до початку координат, якщо:
1) A (2; 4; $\sqrt{5}$); 2) A (1; 4; –1); 3) A (3; $\sqrt{2}$; 5).

827°. Точка M — середина відрізка AB. Знайдіть координати точки M. Заповніть таблицю 30.

Таблиця 30

Точка *A*	(5; 1; 2)	(5; –1; 2)	(–5; –1; 2)	(5; 1; –2)	(–5; 1; –2)
Точка *B*	(3; 5; 4)	(–3; 5; 4)	(–3; 5; –4)	(3; –5; 4)	(–3; –5; –4)
Точка *M*					

828°. Знайдіть координати середин сторін трикутника ABC, якщо:
1) A (0; 0; 0), B (0; 0; 4), C (3; 0; 0);
2) A (1; 1; 1), B (0; 0; 1), C (2; 2; 1);
3) A (5; 4; –1), B (–7; 4; –6), C (–12; 4; 6).

829. Знайдіть координати всіх вершин куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром 2. Система координат введена наступним чином:
1) початок координат міститься у вершині A, вісь OX — це пряма AB, вісь OY — пряма AD, вісь OZ — пряма AA_1;
2) початок координат міститься у вершині B, вісь OX — це пряма BA, вісь OY — пряма BC, вісь OZ — пряма BB_1;
3) початок координат міститься у вершині A_1, вісь OX — це пряма A_1A, вісь OY — пряма A_1B_1, вісь OZ — пряма A_1D_1.

830. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть координати всіх вершин паралелепіпеда, якщо відомі координати деяких його вершин:
1) A (0; 0; 0), B (1; 0; 0), D (0; 3; 0), A_1 (0; 0; 5);
2) A (0; 0; 0), B (5; 0; 0), D (0; 6; 0), A_1 (0; 0; 6);
3) A (1; 0; 0), B (4; 0; 0), D (1; 3; 0), A_1 (1; 0; 5).

831. Яка з точок A (–2; –1; 3), B (0; 1; 3), C (0; –3; 3) ближче розміщена до осі: 1) OZ; 2) OX; 3) OY?

832. Яка з точок A (–2; –1; 3), B (0; 1; 6), C (0; –3; 1) ближче розміщена до площини: 1) XOZ; 2) YOZ; 3) XOY?

833. **Знайдіть периметр трикутника ABC, вершини якого мають координати:**

1) A (0; 0; 0), B (3; 1; $\sqrt{6}$), C (3; 4; 0);

2) A (−2; −1; 3), B (0; 1; 3), C (0; −3; 3).

834. Знайдіть суму довжин ребер піраміди $ABCD$, знаючи координати її вершин:

1) A (0; 0; 0), B (0; 0; 4), C (3; 0; 0), D (0; 3; 0);

2) A (1; 1; 1), B (0; 0; 1), C (2; 2; 1), D (0; 0; 5).

835. Доведіть, що $AB = 4CD$, якщо:

1) A (7; 6; 0), B (−1; 2; $2\sqrt{5}$), C (0; 2; 3), D (0; −1; −1);

2) A ($\sqrt{2}$; 1; −1), B ($3\sqrt{2}$; 3; 1), C (2; 0; 0), D (0; 0; 0).

836. Відстань між точками A і B дорівнює d. Знайдіть x, якщо:

1) A (2; 3; 1), B (x; 3; 1), $d = 2$;

2) A (−1; x; 2), B (3; $2x$; 5), $d = 10$;

3) A (2; 1; x), B (5; −3; $6x$), $d = 3\sqrt{5}$.

837. **Знайдіть площу квадрата $ABCD$, знаючи координати двох сусідніх його вершин:**

1) A (3; 2; 1), B (8; 7; 1);

2) A (10; 3; 3), B (−2; 0; −1);

3) A (6; 4; 0); B (−3; 1; $\sqrt{10}$).

838. **Знайдіть площу грані куба, знаючи координати двох сусідніх його вершин:**

1) A (1; 1; 1), B (2; 2; 2);

2) A (3; 1; −1), B (1; 2; −1);

3) A (2; 4; $\sqrt{5}$); B (0; 0; 0).

839. Доведіть, що трикутник ABC — рівнобедрений, якщо:

1) A (3; 5; −4), B (−1; 1; 2), C (4; −3; 0);

2) A (2; 1; 7), B (3; 5; 6), C (−1; −1; 4);

3) A (1; 1; 2), B (0; 0; 0), C (1; 2; 1).

840*. **Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — квадрат, якщо A (7; 2; 4), B (4; −4; 2), C (6; −7; 8); D (9; −1; 10).**

841*. Доведіть, що трикутник ABC є прямокутним, якщо:

1) A (0; 0; 0), B (1; 2; 0), C (3; 1; 0);

2) A (−2; 0; −1), B (0; 0; 1), C (0; 0; −3).

842*. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює a. Введемо систему координат так, що початок координат міститься у центрі O грані $ABCD$ куба, вісь OX — це пряма OB, вісь OY — пряма OC, вісь OZ — пряма OO_1, де O_1 — центр грані $A_1B_1C_1D_1$. Знайдіть координати всіх вершин куба.

843*. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якому $AB = 1$, $AC = 2$, $AA_1 = 4$. Узявши за початок координат вершину A, за вісь абсцис — пряму AB, вісь ординат — пряму AD, вісь аплікат — пряму AA_1, знайдіть координати всіх вершин паралелепіпеда.

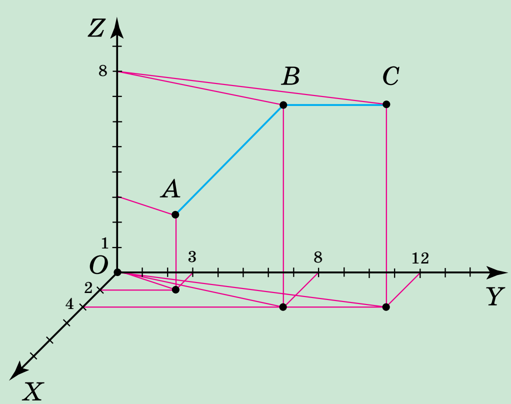
Проявіть компетентність

844. Кристалічна решітка кристала кухонної солі є кубом, у центрі якого розташований іон натрію (Na+) з координатами $(0{,}5a;\ 0{,}5a;\ 0{,}5a)$. Один з найближчих до нього йон хлору (Cl^-) має координати ядра $(a;\ 0{,}5a;\ 0{,}5a)$. Знайдіть відстань між йонами натрію і хлору, якщо довжина решітки дорівнює $a = 5{,}63 \times 10^{-10}$ м.

845. Під час ремонту даху майстер перемістився з точки A в точку C за схемою, зображеною на малюнку 287. Знайдіть довжину пройденого шляху та відстань по прямій від точки A до точки C.

846. У торговому центрі, щоб потрапити до взуттєвого відділу, треба пройти від входу десять кроків прямо, шість кроків ліворуч, піднятися ліфтом на третій поверх, пройти чотири кроки праворуч. У прямокутній декартовій системі координат побудуйте траєкторію руху від входу до взуттєвого відділу.

847. У прямокутній декартовій системі координат побудуйте траєкторію вашого руху від вхідних дверей школи до класу, де проходитиме перший урок.

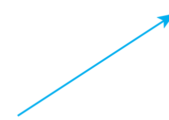


Мал. 287

§ 40 Вектори у просторі

1. ЗАДАННЯ ВЕКТОРА У ПРОСТОРІ

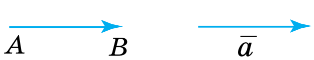
У стереометрії, як і в планіметрії, вектором вважатимемо напрямлений відрізок (мал. 288). Його початок і кінець задають *довжину* і *напрям* вектора. Від точки прикладання абстрагуються.



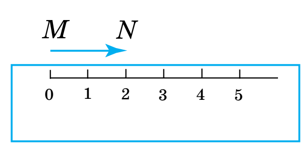
Мал. 288

Зверніть увагу:
щоб задати вектор, достатньо вказати його початок і кінець.

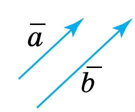
У просторі, як і на площині, вектор позначають за допомогою риски або стрілки: $\overline{AB}$ або $\overrightarrow{AB}$, $\overline{a}$ або $\vec{a}$ (мал. 289). Аналогічним є означення довжини вектора та його позначення: $\left|\overline{MN}\right| = 2$ см (мал. 290). Так само визначають нуль-вектор $\overline{0}$ та одиничний вектор $\overline{e}$ (за означенням, $\left|\overline{e}\right| = 1$).



Мал. 289



Мал. 290



Мал. 291

2. КОЛІНЕАРНІСТЬ І КОМПЛАНАРНІСТЬ ВЕКТОРІВ

У просторі, як і на площині, два вектори є *колінеарними*, якщо вони паралельні одній прямій (мал. 291). Позначають так само, як і на площині: $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Інші поняття та позначення також є аналогічними (мал. 292):

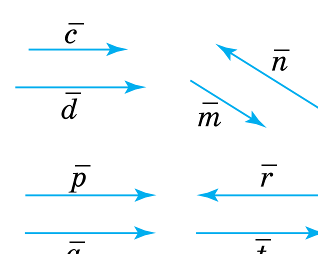
— співнапрямлені вектори: $\overline{c} \uparrow\uparrow \overline{d}$;

— протилежно напрямлені вектори: $\overline{m} \uparrow\downarrow \overline{n}$;

— рівні вектори $\overline{p} = \overline{q}$ (за означенням, вони мають рівні довжини і співнапрямлені);

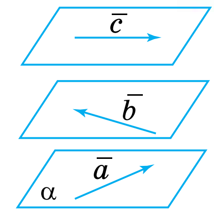
— протилежні вектори $\overline{r} = -\overline{t}$.

Новим для простору є поняття *компланарних векторів*.



Мал. 292

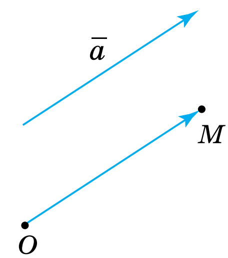
Вектори називаються *компланарними*, якщо вони паралельні одній площині.



Мал. 293

На малюнку 293 ви бачите компланарні вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$. Вони паралельні площині α.

3. ДІЇ З ВЕКТОРАМИ У ПРОСТОРІ

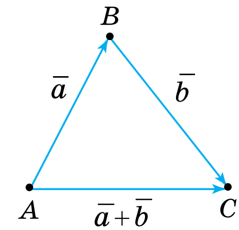


Мал. 294

У просторі, як і на площині, для будь-якого вектора $\overline{a}$ і деякої точки O існує лише одна точка M, що $\overline{OM} = \overline{a}$ (мал. 294). Побудову точки M називають *відкладанням вектора $\overline{a}$ від точки* O.

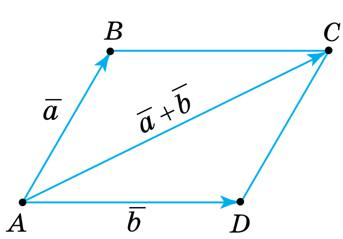
Будь-які вектори у просторі можна відкласти від спільної точки. Тому, як і на площині, у просторі два вектори додають за відомими вам *правилами — трикутника* (мал. 295) або *паралелограма* (мал. 296). Різницю двох векторів у просторі знаходять так само, як і на площині (мал. 297). Узагалі, для будь-яких трьох точок простору A, B і C справджуються рівності:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}, \quad \overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}.$$

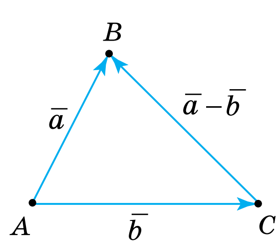


Мал. 295

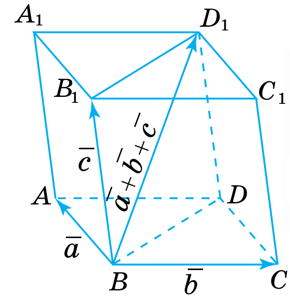
Для додавання трьох некомпланарних векторів застосовують *правило паралелепіпеда* (мал. 298).



Мал. 296



Мал. 297



Мал. 298

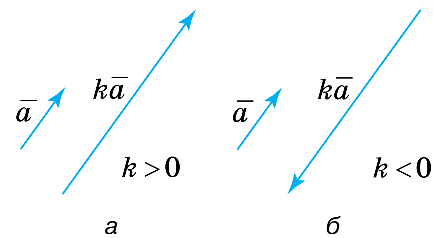
Зверніть увагу:
щоб додати три некомпланарні вектори у просторі:
1)віднесіть їх до спільного початку;
2)побудуйте паралелепіпед на даних векторах;
3)побудуйте діагональ паралелепіпеда, що виходить зі спільного початку даних векторів;
4)задайте напрям вектора-суми — від спільного початку даних векторів до другого кінця побудованої діагоналі паралелепіпеда.

Добуток $\overline{d}$ вектора $\overline{a}$ на число $k \neq 0$ визначають у просторі так само, як і на площині. За означенням:

1) $|\overline{d}| = |k| \cdot |\overline{a}|$;

2) $\overline{d} \uparrow\uparrow \overline{a}$, коли $k > 0$ (мал. 299, *а*);

3) $\overline{d} \uparrow\downarrow \overline{a}$, коли $k < 0$ (мал. 299, *б*).



Мал. 299

Добуток нуль-вектора на число і вектора на число нуль є нуль-вектором:

$$k \cdot \overline{0} = 0 \cdot \overline{a} = \overline{0}.$$

Властивості додавання векторів і множення вектора на число наведено в таблиці 31.

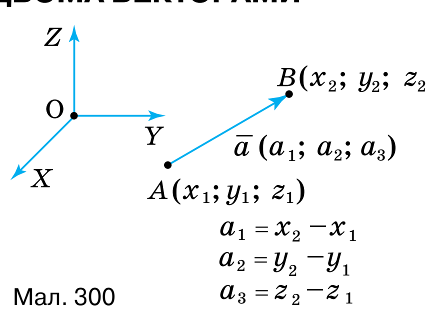
Таблиця 31

Властивості	
додавання векторів	**множення вектора на число**
$\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$	$1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$
Переставний закон	
$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$	$k \cdot \overline{a} = \overline{a} \cdot k$
Сполучний закон	
$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$	$k \cdot (m \cdot \overline{a}) = (k \cdot m) \cdot \overline{a}$
Перший розподільний закон $k \cdot \overline{a} + m \cdot \overline{a} = (k + m) \cdot \overline{a}$	
Другий розподільний закон $k \cdot \overline{a} + k \cdot \overline{b} = k \cdot (\overline{a} + \overline{b})$	
$\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$	$-1 \cdot \overline{a} = -\overline{a}$
	$k \cdot \overline{0} = 0 \cdot \overline{a} = \overline{0}$

4. ДОВЖИНА ВЕКТОРА. КУТ МІЖ ДВОМА ВЕКТОРАМИ

Ви вже знаєте, що довжина вектора $\overline{AB}$ — це довжина відрізка AB. Нехай у прямокутній декартовій системі координат (мал. 300) точки A і B мають координати: $A\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $B\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Скористаємося формулою довжини відрізка:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$



Мал. 300

Тоді: $\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Одержану формулу називають *формулою довжини вектора за координатами його кінців*.

Числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$ вважають *координатами вектора* $\overline{a} = \overline{AB}$. Тоді для вектора $\overline{a}(a_1; a_2; a_3)$ одержимо *формулу довжини вектора за його координатами*: $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Задача 1. Знайдіть довжину вектора $\overline{a}\ (3;\ 0;\ 4)$.

Розв'язання. $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 0 + 16} = \sqrt{25} = 5.$.

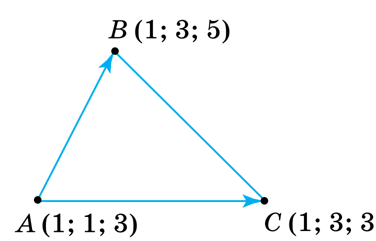
Кут між векторами $\overline{a}\ (a_1; a_2; a_3)$ і $\overline{b}\ (b_1; b_2; b_3)$ можна знайти за формулою:

$$\cos\left(\widehat{\overline{a};\ \overline{b}}\right) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Приймемо цю формулу без доведення.

Задача 2. Знайдіть кут A трикутника ABC, якщо $A\ (1;\ 1;\ 3)$, $B\ (1;\ 3;\ 3)$, $C\ (1;\ 3;\ 5)$.

Розв'язання. Шуканий кут BAC трикутника ABC дорівнює куту між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$ (мал. 301), тому спочатку знайдемо координати цих векторів: $\overline{AB}\ (0;\ 2;\ 0)$ і $\overline{AC}\ (0;\ 2;\ 2)$. Тепер знайдемо косинус кута BAC:



Мал. 301

$$\cos\left(\widehat{\overline{AB};\overline{AC}}\right) = \frac{0\cdot 0 + 2\cdot 2 + 0\cdot 2}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2}\cdot\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{4}{2\cdot\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отже, косинус кута BAC дорівнює $\frac{\sqrt{2}}{2}$, тому $\angle BAC = 45°$.

Дізнайтеся більше

Мал. 302

1. Ви знаєте, що вектори знайшли широке застосування у фізиці, механіці тощо. Наприклад, на малюнку 302 рух кинутого м'яча описується такими векторами, як переміщення м'яча, швидкості, сили тяжіння, кутової швидкості обертання м'яча навколо осі.

2. Термін «колінеарний» походить від латинського сполучення: *co* (*cum*) — разом, спільно, *lineo* — лінія, а термін «компланарний» — від латинського сполучення: *co* (*cum*) — разом, спільно, *planum* — площина.

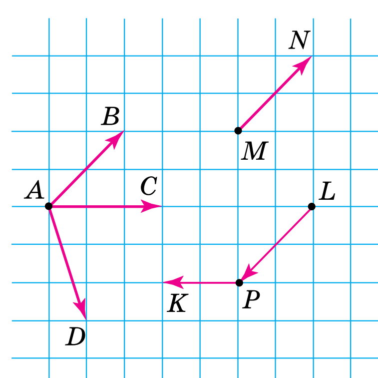
3. У 1918 р. побачила світ книжка «Простір, час, матерія» видатного німецького математика **Германа Вейля** (*1885–1955*). Учений запропонував покласти в основу геометрії лише два поняття — «точка» і «вектор» і чотири операції над ними. Побудована автором теорія широко застосовується в сучасній фізиці, кристалографії, хімії, економіці та інших науках. За роботи з геометрії та спеціального розділу алгебри — теорії груп Г. Вейль отримав Міжнародну премію імені Лобачевського.

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке вектор. Як його позначають?
2. Що таке довжина або модуль вектора?
3. Який вектор називають нуль-вектором; одиничним вектором?
4. Які вектори називають колінеарними; співнапрямленими? протилежно напрямленими; рівними? протилежними? Як їх позначають?
5. Що таке компланарні вектори?
6. Як знайти суму двох векторів у просторі? А різницю?
7. Поясніть, як знайти суму трьох некомпланарних векторів за правилом паралелепіпеда.
8. Як визначають добуток вектора на число?
9. Які властивості має додавання векторів; множення вектора на число?
10. Як знайти довжину вектора? Кут між векторами?

Розв'яжіть задачі

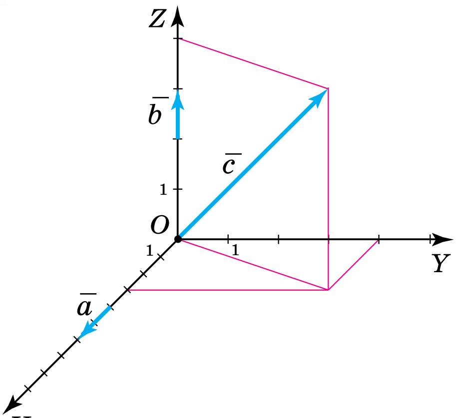
848'. На малюнку 303 назвіть:
1) усі зображені вектори; 2) вектори з початком у точці A; 3) колінеарні вектори; 4) співнапрямлені вектори; 5) протилежно напрямлені вектори; 6) компланарні вектори.



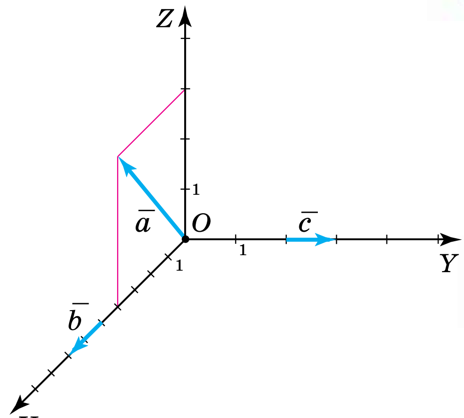
Мал. 303

849°. Вектор задано двома точками:
1) A і B; 2) B і A; 3) H і H. Побудуйте вказаний вектор. Зробіть відповідний запис.

850°. Вектор задано двома точками:
1) C і D; 2) D і C. Побудуйте вказаний вектор. Зробіть відповідний запис.



Мал. 304



Мал. 305

851°. Чому дорівнює модуль вектора (мал. 304):
1) $\overline{a}$; 2) $\overline{b}$; 3) $\overline{c}$? Чи є серед даних векторів одиничні вектори?

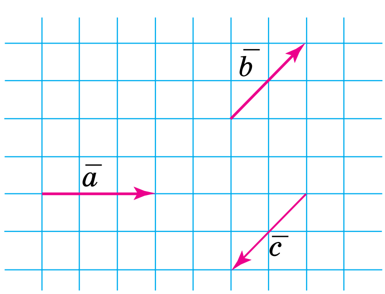
852°. Чому дорівнює модуль вектора (мал. 305):
1) $\overline{a}$; 2) $\overline{b}$; 3) $\overline{c}$? Чи є серед даних векторів одиничні вектори?

853°. За даними на малюнку 306 побудуйте вказані вектори:
1) $\overline{a}+\overline{b}$; 2) $\overline{a}-\overline{b}$; 3) $\overline{b}+\overline{a}$; 4) $\overline{b}-\overline{a}$; 5) $\overline{a}+\overline{c}$; 6) $\overline{a}-\overline{c}$.

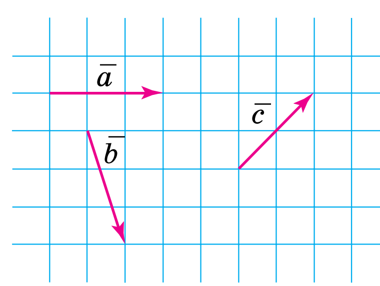
854°. За даними на малюнку 307 побудуйте вказані вектори:
1) $\overline{c}+\overline{a}$; 2) $\overline{c}-\overline{a}$; 3) $\overline{b}+\overline{c}$; 4) $\overline{b}-\overline{c}$.

855°. На малюнку 308 дано вектор $\overline{a}$. Побудуйте вектор:
1) $4\overline{a}$; 2) $-4\overline{a}$; 3) $2\overline{a}$; 4) $-2\overline{a}$.

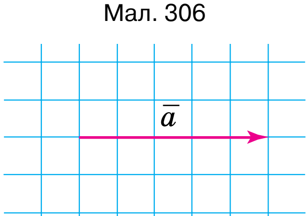
856°. На малюнку 309 дано вектор $\overline{a}$. Побудуйте вектор:
1) $0{,}5\overline{a}$; 2) $-0{,}5\overline{a}$.



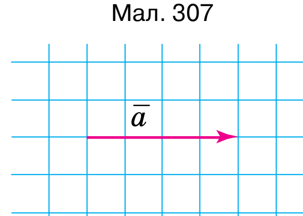
Мал. 306



Мал. 307



Мал. 308



Мал. 309

857°. Який з векторів має більшу довжину: 1) $-10\bar{a}$ чи $10\bar{a}$; 2) $-\bar{a}$ чи $-2\bar{a}$; 3) $0,5\bar{a}$ чи $5\bar{a}$; 4) $6\bar{a}$ чи $-6\bar{a}$? Відповідь поясніть.

858°. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте вектори:
1) $\overline{AA_1}+\overline{AD}+\overline{AB}$; 2) $\overline{BA}+\overline{DB}+\overline{BC}$.

859°. Побудуйте паралелепіпед. Чи можна позначити два вектори з кінцями у вершинах паралелепіпеда так, щоб вони були: 1) колінеарними; 2) співнапрямленими; 3) протилежно напрямленими; 4) рівними; 5) протилежними? Наведіть приклади.

860°. Побудуйте паралелепіпед. На його ребрах задайте три некомпланарні вектори та знайдіть їх суму, якщо: 1) три вектори мають спільний початок; 2) два вектори мають спільний початок; 3) вектори не мають спільного початку.

861°. Знайдіть координати вектора $\overline{AB}$. Заповніть таблицю 32.

Таблиця 32

A	(0; 0; 0)	(2; −7; 0)	(0; 2; 0)	(1; 4; −5)
B	(1; 2; −5)	(−2; 3; −1)	(−10; 3; −12)	(11; −4; 9)
$\overline{AB}$				

862°. Заповніть таблицю 33.

Таблиця 33

A	(0; 0; 0)	(10; 2; −5)		(3; 5; 8)
B			(10; 2; −5)	
$\overline{AB}$	(1; 21; 5)	(−2; 3; −1)	(−2; 3; −1)	(8; −1; 0)

863°. Знайдіть координати точки A, якщо:
1) $\overline{AB}\,(9; 2; 0)$, $B\,(0; 0; 0)$; 2) $\overline{BA}\,(-1; 3; 7)$, $B(0; 0; 0)$;
3) $\overline{AB}\,(12; -5; 8)$, $B\,(2; -3; -2)$; 4) $\overline{BA}\,(-1; 0; 3)$, $B(5; 2; -10)$.

864°. Знайдіть довжину вектора $\overline{AB}$, якщо:
1) $A\,(3; 2; 1)$, $B\,(8; 7; 1)$; 2) $A\,(10; 3; 3)$, $B\,(-2; 0; -1)$.

865°. Знайдіть довжину вектора $\overline{AB}$, якщо $A\,(6; 4; 0)$; $B\,(-3; 1; \sqrt{10})$.

866°. Знайдіть довжину вектора $\bar{a}$:

1) $\bar{a}\,(-5; 0; 0)$; 2) $\bar{a}\,(6; 8; 0)$; 3) $\bar{a}\,(3; 3; -3)$.

867°. Яка довжина вектора $\bar{a}\,(3; 4; -12)$?

868°. Знайдіть кут між векторами:
1) $\bar{a}\,(2; 0; 1)$, $\bar{b}\,(0; -1; 0)$; 2) $\bar{a}\,(2; 2\sqrt{3}; 6)$, $\bar{b}\,(1; \sqrt{3}; 3)$.

869°. Знайдіть кут між векторами $\bar{a}\,(6; -8; 0)$ і $\bar{b}\,(0; 0; 9)$.

870. Точка A лежить між точками B і C. Точка M лежить між точками B і C. Серед векторів $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AM}$, $\overline{BA}$, $\overline{BM}$, $\overline{CM}$, $\overline{MA}$ назвіть: 1) співнапрямлені вектори; 2) протилежно напрямлені вектори.

871. Побудуйте вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо їх довжини відповідно дорівнюють 5 см і 10 см та відомо, що ці вектори: 1) протилежно напрямлені; 2) співнапрямлені.

872. Побудуйте колінеарні вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо їх довжини дорівнюють по 5 см. Скільки розв'язків має задача?

873. Побудуйте компланарні вектори $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AM}$, якщо їх довжини дорівнюють по 2 см. Скільки розв'язків має задача?

874. Побудуйте компланарні вектори $\overline{CB}$, $\overline{CD}$, $\overline{CP}$, якщо їх довжини дорівнюють по 3 см. Скільки розв'язків має задача?

875. Дано точки B (3; 1; 3) і C (−2; 8; −8). Знайдіть координати точки A, якщо: 1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$.

876. Знайдіть координати вектора, протилежного до $\overline{AB}$, якщо:
1) A (10; 2; 0), B (1; 1; 1); 2) A (4; 5; −7), B (0; 4; 6).

877. **Знайдіть кут A трикутника ABC, якщо:**
1) A (1; 1; 3), B (5; 3; 3), C (1; 7; 3); 2) A (2; 1; 3), B (7; 4; 5), C (4; 2; 1).

878. Знайдіть кут M трикутника MPT, якщо M (2; 1; 3), P (7; 4; 5), T (4; 2; 1).

879*. Дано куб. Скільки пар рівних векторів можна побудувати з кінцями в його вершинах?

880*. Дано прямокутний паралелепіпед. Скільки пар рівних векторів можна побудувати з кінцями у його вершинах?

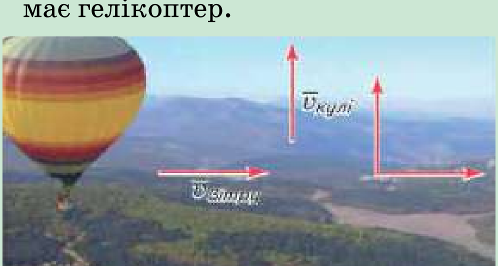
881*. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що довжина вектора $\overline{AA_1}+\overline{D_1C}+\overline{A_1D_1}+\overline{DA}+\overline{CD}$ не залежить від довжини ребра куба.

Проявіть компетентність

882. Туристи пройшли від базового табору в напрямі на північ 10 км і повернули на схід. Пройшовши за цим напрямом 1 км, вони піднялися на гору висотою 2 км. Покажіть напрями їх руху на плані в масштабі 1 км в 1 см.

883. За малюнком 310 побудуйте напрям руху повітряної кулі.

884. За малюнком 311 побудуйте напрям руху вантажу, який піднімає гелікоптер.



Мал. 310

Мал. 311

§ 41 Симетрія у просторі

У курсі планіметрії ви ознайомилися з двома видами симетрії на площині — відносно точки і прямої. У просторі розглядають три види симетрії — відносно точки, прямої і площини. Ми будемо вивчати симетрію відносно точки і площини.

1. СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ТОЧКИ

Подивіться на малюнки 312—314. Ви бачите пропелер літака (мал. 312), квітку (мал. 313), сніжинку (мал. 314). Ці предмети мають *центр симетрії* — точку O, тому їх називають *центральносиметричними*.

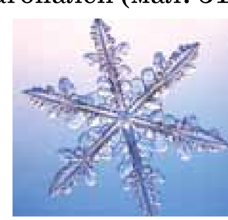
Дві точки X і X_1 простору називаються *симетричними відносно точки M*, якщо M є серединою відрізка XX_1 (мал. 315).

На малюнку 316 ви бачите, як будували на площині точку X_1, симетричну точці X відносно точки M. Оскільки через пряму MX у просторі завжди можна провести площину, то **означення й властивості точок, симетричних відносно точки M, є однаковими для площини і простору.**

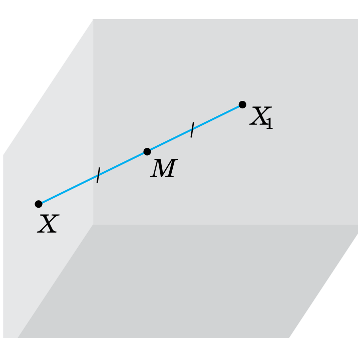
У куба центром симетрії є точка перетину його діагоналей (мал. 317).

Мал. 312

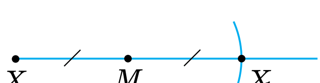
Мал. 313



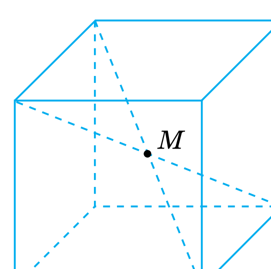
Мал. 314



Мал. 315



Мал. 316



Мал. 317

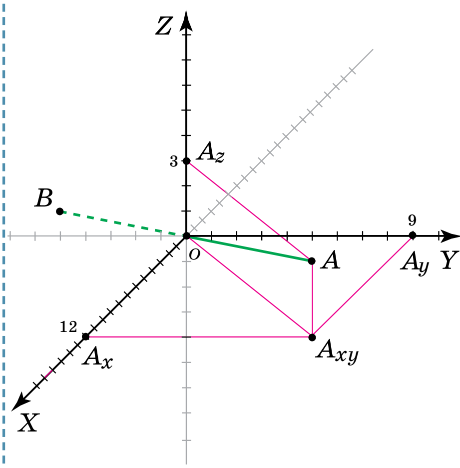
Чи може центр грані куба бути центром його симетрії? Ні, оскільки всі точки куба лежать по один бік від площини будь-якої його грані.

Задача 1. Які координати має точка B, симетрична точці A (12; 9; 3) відносно початку координат?

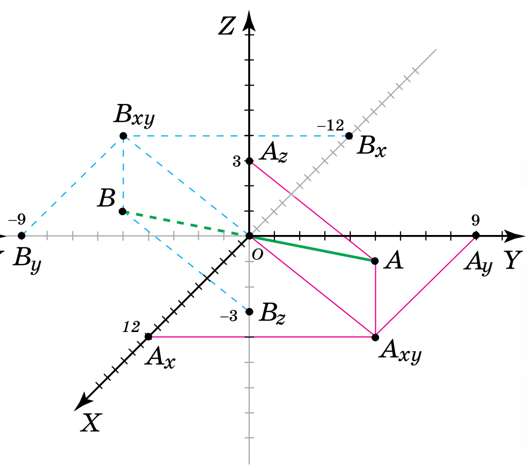
Розв'язання.

1. Побудуємо точку A (12; 9; 3) за її координатами, проведемо пряму AO та відкладемо на ній відрізок $OB = AO$ (мал. 318).
2. Точка A (12; 9; 3) розміщується в першому координатному октанті, тому точка B розміщується в сьомому координатному октанті. Це означає, що кожна координата точки B має від'ємний знак (мал. 319).

Отже, точка B має координати: B (–12; –9; –3).



Мал. 318



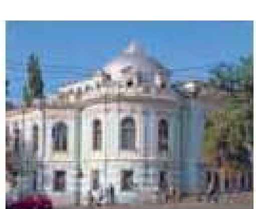
Мал. 319

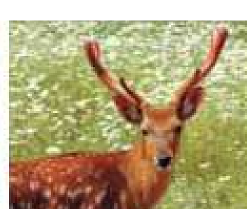
Зверніть увагу:
у точок, симетричних відносно початку координат, відповідні координати є протилежними числами.

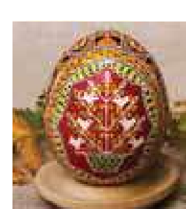
2. СИМЕТРІЯ ВІДНОСНО ПЛОЩИНИ

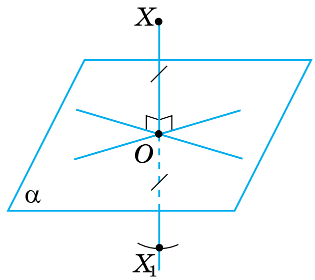
Подивіться на малюнки 320–323. Ви бачите приклади симетрії, які можна зустріти в техніці (мал. 320), архітектурі (мал. 321), природі (мал. 322), побуті (мал. 323). Кожний із цих об'єктів має одну чи кілька *площин симетрії*. Тобто їх точки є симетричними відносно відповідної площини.


Мал. 320

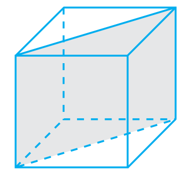

Мал. 321


Мал. 322


Мал. 323



Мал. 324



Мал. 325

Дві точки X і X_1 простору називаються *симетричними відносно площини* α, якщо ця площина перпендикулярна до відрізка XX_1 і проходить через його середину.

На малюнку 324 ви бачите точку X_1, симетричну точці X відносно площини α.

Зверніть увагу:
якщо точка X лежить у площині α, то симетричною їй точкою є сама точка X.

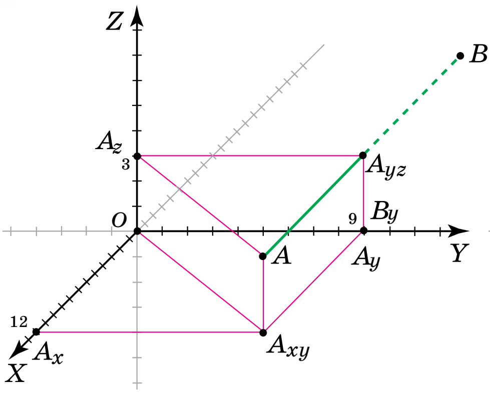
Куб має не лише центр симетрії, а й кілька площин симетрії. Однією з них є, наприклад, площина діагонального перерізу куба (мал. 325).

Чи може грань куба бути площиною його симетрії? Ні, оскільки всі точки куба лежать по один бік від площини будь-якої його грані.

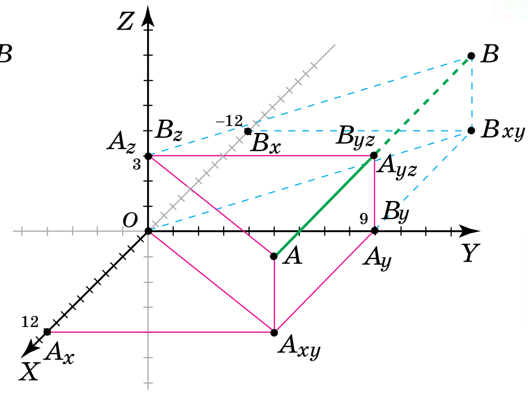
Задача 2. Які координати має точка B, симетрична точці A (12; 9; 3) відносно площини YOZ?

Розв'язання.
1. Побудуємо точку A за її координатами.
Проведемо пряму AA_{yz}, перпендикулярно до площини YOZ. Відкладемо на ній відрізок $A_{yz}B = AA_{yz}$ (мал. 326).
2. Точка A (12; 9; 3) розміщується в першому координатному октанті, тому точка B розміщується в другому координатному октанті. Це означає, що абсциса точки B має від'ємний знак, а її ордината й апліката — додатний (мал. 327).
Отже, точка B має координати: B (–12; 9; 3).

Зверніть увагу:
— якщо точка X лежить у площині α, то симетричною їй точкою є сама точка X;
— точки, симетричні відносно певної координатної площини, мають відповідно рівні координати за осями, що визначають цю площину, а треті їх координати є протилежними числами.



Мал. 326



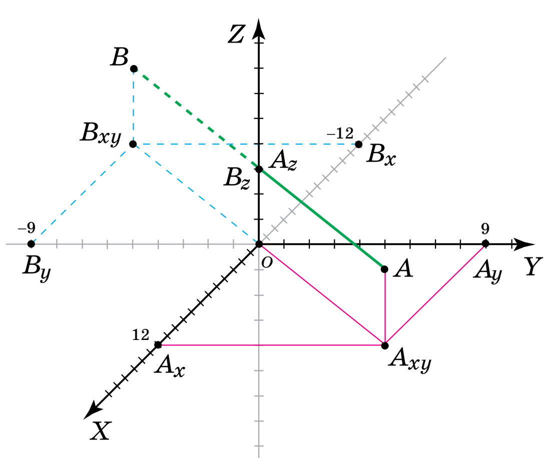
Мал. 327

Дізнайтеся більше

1. Дві точки A і B простору називаються *симетричними відносно прямої*, наприклад OZ, якщо ця пряма перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину. На малюнку 328 ви бачите, як будували точку B, симетричну точці A відносно прямої OZ.

2. Об'єкти, що мають вісь симетрії, часто трапляються в техніці (мал. 329), архітектурі (мал. 330), природі (мал. 331), побуті (мал. 332).

3. Симетрію вивчають і в інших галузях науки. Наприклад, у біології є навіть окремий науковий напрям «біосиметрика», у якому вивчають явище симетрії в живій природі. Цей напрям остаточно виокремився в 1961 р., а його початки було закладено ще в школі Піфагора (V ст. до н.е.), де симетрію розглядали як невід'ємну складову теорії про гармонію.



Мал. 328

Мал. 329

Мал. 331

Мал. 330

Мал. 332

Пригадайте головне

1. Які дві точки називаються симетричними відносно даної точки?
2. Як знайти координати точки, симетричної даній відносно початку координат? Наведіть приклад.
3. Наведіть приклад фігури, що має центр симетрії.
4. Які дві точки називаються симетричними відносно даної площини?
5. Як знайти координати точки, симетричної даній відносно координатної площини: XOY; XOZ; YOZ? Наведіть приклад.
6. Наведіть приклад фігури, симетричної даній відносно деякої площини.

Розв'яжіть задачі

885'. Які з точок, зображених на малюнку 333, симетричні відносно точки O? Поясніть відповідь.

886'. Які з точок, зображених на малюнку 334, симетричні відносно площини α? Поясніть відповідь.

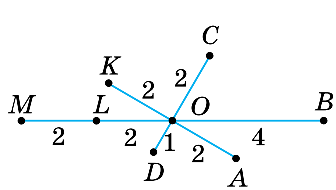
887°. У прямокутній декартовій системі координат побудуйте довільну точку A. Побудуйте точку B, симетричну точці A відносно точки: 1) O; 2) A; 3) M — середини відрізка AO.

888°. Побудуйте пряму в просторі, симетричну прямій AB відносно точки: 1) O; 2) A; 3) M — середини відрізка AB.

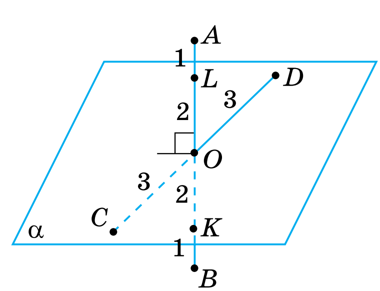
889°. Визначте координати точки, яка симетрична відносно початку координат точці з координатами:
1) (1; 0; 0); 2) (0; 1; 0); 3) (0; 0; 1); 4) (1; 1; 0); 5) (1; 0; 1); 6) (0; 1; 1); 7) (−1; 1; 0); 8) (1; 0; −1); 9) (0; −1; −1); 10) (1; 5; 2); 11) (4; −2; 2); 12) (−1; −2; 3).

890°. Визначте координати точки, яка симетрична відносно початку координат точці з координатами:
1) (2; 0; 0); 2) (0; 2; 0); 3) (0; 0; 2); 4) (1; 2; 0); 5) (−1; 0; 2); 6) (2; −1; −1).

891°. Побудуйте точку, симетричну деякій точці A відносно площини:
1) OXZ; 2) OYZ; 3) OXY.



Мал. 333



Мал. 334

892°. Побудуйте точку, симетричну деякій точці B відносно площини: 1) OXZ; 2) OYZ; 3) OXY.

893°. Визначте координати точки, яка симетрична відносно координатної площини XOY точці з координатами:
1) (1; 0; 0); 2) (0; 1; 0); 3) (0; 0; 1); 4) (1; 1; 0); 5) (1; 0; 1); 6) (0; 1; 1); 7) (−1; 1; 0); 8) (1; 0; −1); 9) (0; −1; −1); 10) (1; 5; 2); 11) (4; −2; 2); 12) (−1; −2; 3).

894°. Визначте координати точки, яка симетрична відносно координатної площини XOY точці з координатами:
1) (2; 0; 0); 2) (0; 2; 0); 3) (0; 0; 2); 4) (1; 2; 0); 5) (−1; 0; 2); 6) (2; −1; −1).

895°. Визначте координати точки, яка симетрична відносно координатної площини XOZ точці з координатами:
1) (1; 0; 0); 2) (0; 1; 0); 3) (0; 0; 1); 4) (1; 1; 0); 5) (1; 0; 1); 6) (0; 1; 1); 7) (−1; 1; 0); 8) (1; 0; −1); 9) (0; −1; −1); 10) (1; 5; 2); 11) (4; −2; 2); 12) (−1; −2; 3).

896°. Визначте координати точки, яка симетрична відносно координатної площини XOZ точці з координатами:
1) (2; 0; 0); 2) (0; 2; 0); 3) (0; 0; 2); 4) (1; 2; 0); 5) (−1; 0; 2); 6) (2; −1; −1).

897°. Визначте координати точки, яка симетрична відносно координатної площини YOZ точці з координатами:
1) (1; 0; 0); 2) (0; 1; 0); 3) (0; 0; 1); 4) (1; 1; 0); 5) (1; 0; 1); 6) (0; 1; 1); 7) (−1; 1; 0); 8) (1; 0; −1); 9) (0; −1; −1); 10) (1; 5; 2); 11) (4; −2; 2); 12) (−1; −2; 3).

898°. Визначте координати точки, яка симетрична відносно координатної площини YOZ точці з координатами:
1) (2; 0; 0); 2) (0; 2; 0); 3) (0; 0; 2); 4) (1; 2; 0); 5) (−1; 0; 2); 6) (2; −1; −1).

899°. **Визначте координати точки, яка симетрична точці B (−1; 4; 2) відносно площини: 1) XOZ; 2) YOZ; 3) XOY.**

900°. З'ясуйте, відносно якої координатної площини симетричні точки:
1) (2; 1; 3) і (2; −1; 3); 2) (−4; 2; −3) і (4; 2; 3);
3) (−1; 3; 5) і (1; −3; 5); 4) (−5; −2; 4) і (−5; −2; −4).

901°. З'ясуйте, відносно якої координатної площини симетричні точки:
1) (2; 0; 0) і (−2; 0; 0); 2) (1; 0; 2) і (1; 0; −2).

902. Побудуйте відрізок A_1B_1, симетричний відрізку AB відносно початку координат, якщо: 1) A (3; 6; 5), B (6; 6; 12); 2) A (4; 0; 2), B (0; 0; 1). Запишіть координати точок A_1 і B_1.

903. Знайдіть координати кінців відрізка A_1B_1, симетричного відрізку AB відносно початку координат, якщо: 1) A (2; 1; 0), B (0; 4; 1); 2) A (−1; −1; 1), B (2; 2; 2).

904. Відрізок A_1B_1 симетричний відрізку AB відносно середини відрізка MP. Відомо, що A (4; 0; 2), B (0; 7; 2), M (1; 2; 3), P(3; 2; 1). Запишіть координати точок A_1 і B_1.

905. Побудуйте фігуру, симетричну кубу відносно: 1) точки перетину діагоналей куба; 2) вершини куба; 3) площини, що містить одну з граней.

906*. **Доведіть, що при симетрії відносно точки пряма, яка не проходить через цю точку, переходить у паралельну їй пряму.**

907*. **Доведіть, що при симетрії відносно точки пряма, яка проходить через цю точку, переходить сама в себе.**

908*. Дано правильну трикутну піраміду. Побудуйте симетричну їй відносно: 1) однієї з вершин; 2) площини, що містить основу.

909*. Точку A (1; 2; −1) симетрично відобразили відносно площини XOY, потім відносно осі OZ, а потім відносно початку координат. Запишіть координати одержаної точки.

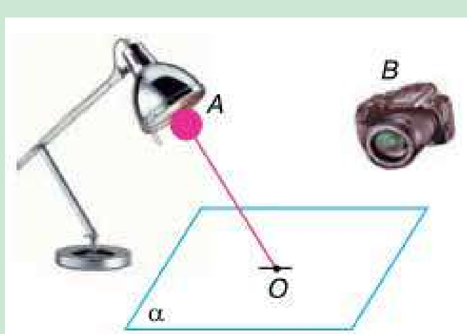
910*. Доведіть, що куб має дев'ять площин симетрії.

Проявіть компетентність

911. Наведіть приклади предметів довкілля, що мають:
1) центр симетрії;
2) площину симетрії.

912. У точці A розміщено джерело світла, а в точці B — фотоапарат (мал. 335). Чи потрапить в об'єктив фотоапарата світловий промінь, що виходить з точки A й відбивається від точки O плоского дзеркала α?

913. Опишіть математичною мовою ситуацію:
1) на плиті з чотирма конфорками ви переставили чайник із ближньої лівої конфорки на дальню праву конфорку;
2) ви бачите своє відображення в дзеркалі;
3) ви поставили чоботи один біля одного;
4) ви склали шкарпетки одна до одної;
5) ви приклали долоні одна до одної.



Мал. 335

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, як побудувати прямокутну декартову систему координат у просторі; як визначити координати точки в системі координат.
2. Запишіть формулу відстані між двома точками із заданими координатами.
3. Запишіть формули координат середини відрізка.
4. Поясніть, що таке вектор, модуль і напрям вектора, як зображають вектор.
5. Які вектори називаються колінеарними; співнапрямленими; протилежно напрямленими; рівними; протилежними; компланарними?
6. Як знайти суму двох векторів за правилом трикутника? А різницю?
7. Як знайти суму двох векторів за правилом паралелограма? А різницю?
8. Як знайти суму трьох некомпланарних векторів за правилом паралелепіпеда?
9. Які властивості додавання векторів і множення вектора на число?
10. Як знайти довжину вектора; кут між двома векторами?
11. Які особливості координат двох точок, симетричних відносно початку координат; координатних площин?

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ ДО РОЗДІЛУ 6

Уважно прочитайте задачі й знайдіть
серед запропонованих відповідей правильну.
Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

1° Які координати проекції точки A (3; 2; 1) на вісь OX?

А. (3; 2; 0). **Б.** (3; 0; 0). **В.** (0; 2; 0). **Г.** (0; 2; 1).

2° Визначте відстань між точками A (0; 0; 0) і B (1; 1; 1).

А. 9. **Б.** 3. **В.** $\sqrt{3}$. **Г.** 1.

3° Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо A (4; 6; 5), B (–2; 2; 5).

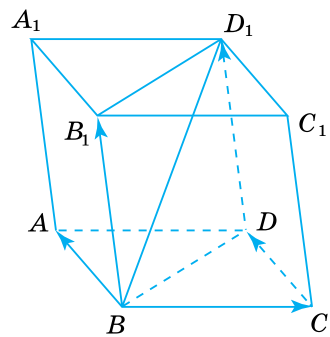
А. (2; 8; 5). **Б.** (2; 4; 10). **В.** (1; 4; 5). **Г.** (3; 2; 5).

4 Які координати точки B, симетричної точці A (3; 2; 1) відносно координатної площини XOY?

А. (1; 2; 3). **Б.** (–1; –2; –3). **В.** (–3; –2; –1). **Г.** (3; 2; –1).

5* Який вектор є сумою векторів $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ і $\overline{DD_1}$?

А. $\overline{AB}$. **Б.** $\overline{BB_1}$. **В.** $\overline{BD}$. **Г.** $\overline{BD_1}$.



ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ
Частина I. Алгебра і початки аналізу
Розділ 1
§ 1

7. 1) $(-\infty; +\infty)$ 3) $(-\infty; +\infty)$; 5) $[-3; +\infty)$. **8.** 1) $\left[-\frac{1}{4};\ +\infty\right)$; 3) $(-\infty; +\infty)$. **9.** 1) 2,2; 3) $(-\infty; 0]$; 5) $[-5; +\infty)$. **10.** 1) 5; 3) $[2; +\infty)$. **14.** 1) зростає на $\boldsymbol{R}$; 3) спадає на $(-\infty; 0]$ і зростає на $[0; +\infty)$; 5) спадає на $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. **15.** 1) спадна на $\boldsymbol{R}$; 3) зростаюча на $[1; +\infty)$. **16.** 1) ні парна, ні непарна; 3) парна; 5) непарна. **17.** 1) непарна; 3) ні парна, ні непарна. **18.** $b = \sqrt{4r^2 - x^2}$. **19.** $b = \sqrt{25 - a^2}$. **20.** $P(x) = 4x - 6$; $S(x) = x\ (x - 3)$. **21.** $S = 6v$; а) 390 км; б) 60,5 км/год. **22.** $A\left(0; \frac{5}{3}\right)$; $B\left(-\frac{5}{2}; 0\right)$; $C\left(-2; \frac{1}{3}\right)$; $D\left(-\frac{7}{4}; 0,5\right)$. **23.** 1) $[0; +\infty)$; 3) $(3; +\infty)$; 5) $[2; +\infty)$. **24.** $(-\infty; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$. **27.** 1) парна; 3) непарна; 5) непарна. **28.** 1), 3) ні парна, ні непарна. **29.** $|x| + |y| = 4$. **30.** 1) $x = -1$; 3) $\left(-\infty;\ \frac{5}{3}\right] \cup [7;\ +\infty)$. **31.** $y = -\frac{x}{2}$. **32.** 1) $D(y) = R$, $E(y) = (-\infty;\ 5]$; 3) $D(y) = R$, $E(y) = [-3;\ +\infty)$; 5) $D(y) = E(y) = R$. **33.** 1) $\left[-\frac{1}{2};\ 0\right]$; 2) $[-1; 1]$; 3) $[-1; 0]$. **34.** $S = 60 - 12t$.

§ 2

40. 1) 12; 3) 25; 5) 4; 7) $8 - 4\sqrt{3}$; 9) $2\sqrt{2}$. **41.** 1) 3; 3) 2; 5) 5. **45.** 1) $3\sqrt[3]{2}$; 3) $10\sqrt{2}$; 5) $\frac{\sqrt[3]{2}}{5}$. **46.** 1) $2\sqrt{2}$; 3) $2\sqrt[4]{5}$. **47.** 1), 2) від'ємний. **48.** 1) $2mn^3$; 3) $2(\sqrt{10} - 3)$; 5) 2. **49.** 1) $\frac{x+y}{x-y}$; 2) $2 + \sqrt{3}$; 3) $a^3, a > 0$. **52.** 1) $\sqrt{\sqrt{5} - 2}$; 2) $\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$; 3) $4 + \sqrt[3]{75} + \sqrt[3]{45}$.

§ 3

55. 1) a^2; 2) $\frac{1}{c}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{a}}$. **56.** 1) $x^{\frac{1}{4}}$; 2) $b^{\frac{1}{2}}$; 3) x^2. **57.** 1) 12; 2) 25; 3) $\frac{2}{3}$. **58.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 20. **59.** 1) 3; 2) $\frac{2}{27}$. **60.** 1) 20; 2) 4. **61.** 1) $x + y$; 2) $4\sqrt[3]{ab}$. **62.** 1) $-2\sqrt[4]{bc}$; 2) $x - 16$. **63.** 1) 11; 2) $\frac{1}{5}$. **64.** 1) 0,2; 2) -12. **66.** 10. **67.** 1) $8^{\frac{1}{5}} < 4^{\frac{1}{3}} < 2^{\frac{3}{2}}$; 2) $\left(\frac{9}{4}\right)^{0,1} < \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{6}} < \left(\frac{9}{4}\right)^{0,2}$. **68.** 1) $\frac{1}{\sqrt[12]{x^2 y}}$; 2) $a - b$. **69.** 1) $\sqrt{a}$; 2) $x - 1$. **70.** 1) 1; 2) 2; 3) 1; 4) 2. **73.** $2 \cdot 10^4$. **74.** 10^7.

§ 4.

78. 2), 4), 5). **79.** 1) $\boldsymbol{R}$; 3) $\boldsymbol{R}$; 5) $[-3; 0) \cup (0; +\infty)$. **81.** 1) $\sqrt[3]{3} > \sqrt[3]{2}$; 3) $\sqrt[5]{0,2} < \sqrt[5]{0,3}$; 5) $(-2,3)^{-3} > (-\frac{1}{5})^{-3}$.

Розділ 2

§ 5

94. 2) $\sin 90° = 1$; $\cos 90° = 0$; $\mathrm{tg}\, 90°$ не існує; $\mathrm{ctg}\, 90° = 0$. **97.** 285°. **106.** 150°. **110.** 1. **111.** 1. **112.** $b\sin\alpha$; $2b\cos\alpha$. **113.** $\dfrac{h}{\cos\dfrac{\alpha}{2}}$; $2h\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. **117.** $\dfrac{a}{2}\mathrm{ctg}\dfrac{\beta}{2}$; $\dfrac{a}{2\sin\dfrac{\beta}{2}}$.

118. $\dfrac{m}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, $m\ \mathrm{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. **119.** $\dfrac{a-b}{2}\mathrm{tg}\,\beta$, $\dfrac{a-b}{2\cos\beta}$.

§ 6

125. 4) , 7) , 12) .**130.** 1) > 0; 2) < 0; 3) > 0; 4) > 0; 6) > 0; 8) > 0. **137.** 1) II; 2)IV; 4) IV. **139.** 2) < 0; 4) > 0; 6) < 0; 8) < 0. **145.** 1) 7 і –1; 3) 5 і 4; 4) 1 і –1.

§ 7

148. 1) $\dfrac{2\pi}{9}$; 3) $\dfrac{\pi}{5}$; 6) $\dfrac{5\pi}{3}$; 7) $-\dfrac{5\pi}{4}$. **149.** 2) 15°; 7) –495°; 9) ≈ 114°36′. **152.** 1) $\alpha < \beta$; 2) $\alpha > \beta$; 3) $\alpha = \beta$. **153.** 1) $\dfrac{4}{9}\pi$ рад, 80°. **155.** $\dfrac{13\pi}{45}$. **156.** 102°. **160.** 40°, 60°, 80°; $\dfrac{2\pi}{9}$ рад, $\dfrac{\pi}{3}$ рад, $\dfrac{4\pi}{9}$ рад. **150.** 1) 60 см; 2) 10 см. **151.** 2) 0,1 рад; 3) 0,5 рад. **162.** 5 см. **163.** $5\pi \approx 15{,}7$ (см). **164.** $\dfrac{45}{\pi}$ см. **165.** 225 м/с. **167.** $\dfrac{2\pi}{3}$ рад/с.

§ 8

171. 1) $2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $(2k+1)\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}$. **172.** 1) $\dfrac{\pi}{2}(4k+1),\ k \in \boldsymbol{Z}$, або $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **176.** 1) $\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; або $\dfrac{\pi}{4}(4k+1),\ k \in \boldsymbol{Z}$. **180.** $a_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$ і $a_2 = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$; або $a = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$, або $a = \dfrac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \boldsymbol{Z}$. **184.** 2) $\cos 2 > \cos 3$; 3) $\sin 7 < \sin 8$. **186.** $\pi - 1$.

§ 9

189. 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\dfrac{1}{2}$; 8) –1. **190.** 1) $-\cos\alpha$; 3) $-\sin\alpha$; 5) $-\sin^2\alpha$. **191.** 2) –1,5; 3) –1; 4) 3,5. **192.** 1) $3{,}5\sqrt{2}$; 2) $\dfrac{1}{2}$. **193.** $\sin\gamma = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\gamma = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{tg}\,\gamma = \sqrt{3}$. **194.** 1) $\sin 0{,}1\pi$; 3) $\mathrm{ctg}\,12°$; 4) $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{10}$; 7) $\sin(45° - \alpha)$; 9) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$; 10) $\cos\left(30° + \dfrac{\alpha}{2}\right)$; 11) $-\sin 2\alpha$. **195.** 1) $-\mathrm{tg}\,43°$. *Вказівка*: завдання можна виконати двома способами. Наприклад, $\mathrm{tg}\,317° = \mathrm{tg}\,(360° - 43°) = -\mathrm{tg}\,43°$, або $\mathrm{tg}\,317° = \mathrm{tg}\,(270° + 47°) = -\mathrm{ctg}\,47°$. 2) $-\sin 21°$; 5) $-\sin\dfrac{3\pi}{7}$; 10) $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{5}$. **196.** 2) $-\sin 33°$; 4) $-\sin\dfrac{\pi}{5}$; 6) $\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{6}$. **197.** 1) $-\sin 70°$; 2) $-\cos 20°$; 4) $\cos\dfrac{3\pi}{8}$;

8) tg $\frac{\pi}{7}$. **199.** $\frac{1}{2}$. **200.** 1) 2; 2) 5. **202.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sqrt{3}$. **203.** $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$. **204.** $\sin x = \frac{1}{2}$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **205.** 1) −1; 3) 0.

§ 10

208. 2) $\frac{\sqrt{35}}{6}$; 3) $\frac{\sqrt{21}}{5}$. **209.** 3) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **210.** 3) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{63}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{63}$. **211.** 1) $\frac{1}{4}$; 4) $\frac{2}{7}$. **213.** Ні. **214.** 3) $-\cos^2 x$; 5) 2; 7) $2\sin\alpha$; 8) $\operatorname{ctg}^2\alpha$; 12) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$. **216.** $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1\frac{7}{8}$. **217.** $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$. **218.** $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$. **219.** $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **220.** 2) $\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha$; 3) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 5) $\frac{1}{\sin^2\alpha}$; 6) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; 7) 2; 8) 4; 9) $\frac{2}{\cos^2\alpha}$; 10) $1-\cos\alpha$. **221.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. **222.** 1) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; 3) $\sin\alpha = -\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = 3\frac{3}{7}$; 6) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{101}}$, $\cos\alpha = \frac{10}{\sqrt{101}}$; 7) $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. **223.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $-\sin^2\alpha$; 4) $\operatorname{ctg}^6\alpha$; 5) $\frac{1}{\cos x}$; 6) $\frac{1}{\sin x}$; 7) 1; 8) 1; 9) $\operatorname{ctg}\alpha$; 10) 1. **227.** 1) 1. **228.** 1) 0,84; 2) $-\frac{2}{3}$. **229.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{m^4-1}}{m^2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{m^4-1}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{m^4-1}$. **230.** $\sin\alpha = -\frac{b^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$, $\cos\alpha = -\frac{a^2}{\sqrt{a^4+b^4}}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b^2}{a^2}$. **231.** $\frac{p^2-1}{2}$. *Вказівка*: піднесіть обидві частини даної рівності до квадрата. **232.** 1. **233.** 1) p^2-2; 2) m^2-2.

§ 11

238. 1) $\cos x$; 2) $\sqrt{2}\sin\alpha$. **239.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **240.** 3) cos2; 4) cos3. **241.** 1) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$. **242.** 1) $\frac{12\sqrt{3}+5}{26}$; 4) $-\frac{3\sqrt{3}}{5}$. **243.** 1) 2cos10°; 2) 0. **245.** $\frac{140}{221}$. **246.** −0,352. **248.** 1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

§ 12

251. 1) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **252.** 1) $2\sin\alpha\cos\beta$; 3) $-2\sin\alpha\sin\beta$. **253.** 1) $\cos\alpha$; 3) $\sin\alpha$. **255.** 1) $\sin4\alpha$; 3) sin10; 4) −sin5. **256.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) 0; 6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **258.** 1) $\operatorname{tg}\alpha$; 2) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$; 4) $\operatorname{tg}\alpha$. **259.** 1) $\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$; 2) $-\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$. **261.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

262. 1) $\frac{17\sqrt{2}}{50}$; 2) $\frac{a\sqrt{3}+\sqrt{1-a^2}}{2}$. *Вказівка*: запишіть $70° + \alpha$ як $30° + (40° + \alpha)$.

263. 0,96. **265.** 1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; 4) $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

§ 13

268. 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{\sqrt{3}}{5}$. **269.** 1) 1; 2) $\sqrt{3}$; 4) 1. **270.** 2) $-2-\sqrt{3}$; 3) не існує. **272.** 1) $\sqrt{3}$; 2) 1. **273.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{5}$; 2) $\frac{4-3\sqrt{3}}{3+4\sqrt{3}}$; 3) $2\frac{5}{36}$ і $\frac{13}{84}$. **274.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) 2. **275.** 1) 1; 2) 0; 3) tg 25°; 4) −1. **276.** 1. **277.** *Вказівка* : для цього достатньо показати, що $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg} 45° = 1$. **281.** 1) $2+\sqrt{3}$; 2) $2-\sqrt{3}$.

§ 14

282. 1) −0,96; 2) 0,28. **283.** 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **284.** 1) $\cos 3x$; 3) $\sin\frac{\alpha}{2}$; 4) $\operatorname{tg}2\alpha$; 6) $\operatorname{ctg}2\alpha$. **286.** 1) $\frac{24}{25}$; 3) $\frac{3}{8}$. **287.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **288.** 1) $2\operatorname{tg}\alpha$; 2) 1; 4) 1. **291.** $-\frac{120}{169}$ і $-\frac{119}{169}$. **292.** 1) $-\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{4}$. *Вказівка*: помножте і поділіть $\sin 15° \cos 15°$ на 2. **293.** 1) $\sin 4x$; 2) $\cos\alpha - \sin\alpha$; 3) $\frac{1}{4}\sin 2\alpha$; 4) $\sin^2 2\alpha$; 6) $\cos 2\alpha$; 7) $\sin 2\alpha$. **296.** 1) $\frac{24}{25}$. *Вказівка*: піднесіть обидві частини рівності $\sin x - \cos x = \frac{1}{5}$ до квадрата. 2) $-\frac{8}{9}$. **298.** 2) $\frac{2}{\sin\alpha}$; 3) $-\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **301.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; 2) $\frac{\sqrt{14}}{4}$; 3) $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

§ 15

303. 1) $-2 \le 2\sin x \le 2$; 4) $-3 \le \cos x - 2 \le 2\sin x$; 7) $0 \le \sin^2 x \le 1$. **307.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 4) 0; 5) 1; 6) $\frac{1}{2}$. **308.** $-1 \le 2\sin x\cos x \le 1$; 3) $1 \le 3 - 2\sin x\cos x \le 5$; 4) $-1 \le \cos x \operatorname{tg} x \le 1$. **309.** 3) , 5) , 6) . **311.** 1) $2\sin(x-\alpha)$; 2) $2\cos(x-3)$; 4) $2\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{10}-x\right)$. **312.** 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **313.** 1) π; 2) 8π; 3) $\frac{\pi}{3}$. **314.** 1) $\frac{1}{2}$ і $-\frac{1}{2}$; 2) 1 і −1; 4) 1 і −1. **317.** 1) $-\frac{\cos\alpha}{3}$; 2) $\sin\alpha - \cos\alpha$. **318.** 1) 1; 2) 0; 3) $-2-\sqrt{2}$; 4) $\frac{7}{12}$; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **320.** 1) 1, −1 і 2π; 2) 1, −1 і $\frac{2\pi}{7}$; 4) 6, 4 і $\frac{2\pi}{9}$; 5) 1, −1 і 2π; 6) $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$; 7) 2, −2 і π. **323.** 1) π; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) π. **324.** 2.

§ 16

329. $[(2n-1)\pi;\ 2\pi n]$, $n \in \boldsymbol{Z}$ і $[2\pi n;\ (2n+1)\pi]$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **330.** 1) $\sin\frac{1}{2} > \sin\frac{1}{3}$; 2) $\cos\frac{1}{2} < \cos\frac{1}{3}$; 4) $\cos\frac{2\pi}{3} > \cos\pi$; 5) $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) > \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. **335.** $x \in (\pi;\ 2\pi)$; $x \in (\pi(2n-1);\ 2\pi n)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **337.** $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **338.** $\sin x : \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $\cos x : \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **346.** $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 17

354. 1) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{10} > \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$; 2) $\operatorname{tg}(-3) > \operatorname{tg}(-2{,}1)$; 5) $\operatorname{ctg} 2 > \operatorname{ctg} 2{,}5$; 6) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) < \operatorname{ctg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$. **355.** $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **356.** 1) $\left(-2\pi; -\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$, 2) $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$. **358.** 1) $x \in \left(\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $x \in \left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \pi n\right)$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 18

362. 1) 0; 2) $\frac{\pi}{6}$; 5) $\frac{\pi}{2}$; 7) $-\frac{\pi}{4}$. **366.** $(-1)^n\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **367.** 2); 4); 5). **371.** 1) $\frac{3}{4}$; 3) $-0{,}65$; 4) $\frac{\pi}{6}$; 5) не існує. **372.** 2) $(-1)^n\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $(-1)^n \arcsin\frac{2}{3}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $\pm\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$ і $(-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 8) немає розв'язків; 9) $(-1)^n\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 10) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 12) $1{,}5+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **373.** 2) $\frac{12}{13}$; 4) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **374.** 1) $4\pi^2 n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{10\pi}{9}-\frac{10\pi}{3}n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$. **376.** 1) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$ і $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$ і $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$ і $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$.

§ 19

377. 2) ; 4). **379.** 2) ; 4). **380.** 2) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) 0. **385.** 1) $\frac{5\pi}{3}$; 2) $-\pi$; 3) $-\frac{\pi}{3}$; 4) $-\pi$; 6) $\frac{\pi}{2}$. **388.** 1) $\frac{\pi}{3}$; 2) $\frac{11\pi}{6}$; 3) $\frac{7\pi}{6}$; 4) $-\frac{17\pi}{4}$. **389.** 1) $\frac{3}{5}$; 2) $\frac{12}{13}$. **390.** $\pm b+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **391.** 1) $\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\pm\arccos\frac{2}{3}+2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$;

6) немає розв'язку. **392.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z};\ \pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **393.** 2) $\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z};\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in \boldsymbol{Z};\ (-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in \boldsymbol{Z}$.

§ 20

397. 1) $x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **399.** 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{7}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$. **400.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $-\frac{3}{4}$; 3) $-\frac{5}{12}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **401.** 1) $\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z};\ -\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$; 2) немає розв'язку; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in \boldsymbol{Z};\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}$.

Розділ 3

§ 21

403. 1) $v_c=v(t)=9$ (м/с); 2) $v_c=4$ (м/с); $v(t)=2t$ (м/с); 3) $v_c=5$ (м/с); $v(t)=2t+3$ (м/с). **404.** 1) 18 (м/с^2); 2) 12,3 (м/с^2); 3) 12,03 (м/с^2); $a(2)=$ $=12$ (м/с^2). **405.** 1) 8; 2) –16; 3) 24. **406.** Так. **407.** 1) 0°; 2) 45°; 3) 135°. **408.** $6t-12$ (рад/с); 12 (рад/с). **409.** 1) (1;–1); 2) (4;–4). **410.** *Вказівка*: скористайтеся формулою для знаходження прискорення руху. **411.** $x=1$. **412.** $t=1$ (с). **413.** (–1; –1). **414.** (–2; 6).

§ 22

417. 1) 0,63; 2) –2,25. **418.** 1) a; 2) $10x$; 3) x; 4) $12x^2$. **419.** 1) 6; 2) –3; 3) 18; 4) $6x_0$. **420.** 1) 0; 2) 3; 3) 1; 4) $\frac{1}{2}$. **421.** 8 (м/с); 24 (с). **422.** 1) $y=4x-2;\ y=0$; 2) $y=4x-9$; 3) $y=-11x+12$; 4) $y=4x-1$. **423.** 1) (1; 0); 2) (0; 0); 3) $\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **424.** (–1; 2). **425.** $y-2x+5=0$; $y-6x+13=0$. **426.** $4\cdot 10^4$ (дин); $2{,}5\cdot 10^4$ (ерг). **427.** $s(t)=2t^2-7t+7$ (см). **428.** $x=2$. **429.** Так. **430.** (1; –2); $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{9}{4}\right)$. **431.** $t\in\left(0;\ \frac{8}{3}\right)$.

§ 23

434. 1) $-12x^2$; 2) $5x^4-6x+1$; 3) $2x+\frac{1}{x^2}$; 4) $x(5x^3-2)$; 5) $x(5x^3-4x^2+3x-2)$; 6) $2x+1-\frac{16}{x^2}$; 7) $\frac{11}{(3-5x)^2}$; 8) $\frac{6x^2+6x-1}{(2x+1)^2}$; 9) $2\cos x$; 10) $-\frac{1}{3}\sin x$; 11) $3\cos x-5\sin x$; 12) $\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}$. **435.** 1) –9; –2; 1; 2) 1; –1; 5; 3) –1; 0; –19; 4) $-\frac{5}{4}$; –5. **436.** 42 (м/с); 22 (м/с^2). **437.** $t=0$. **438.** 1) $y=3x$; 2) $y=-11x+12$;

3) $y=-\frac{1}{9}x+\frac{2}{3}$; 4) $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}$; 5) $y=1$; 6) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. **439.** 1) $\frac{10}{3}$; 2) $-\frac{17}{16}$; 3) $\frac{8}{49}$; 4) $2+\pi$. **440.** 1) (–2;30); (2;–34); 2) (2;$-\frac{7}{3}$); (3;$-\frac{5}{2}$). **441.** 1) (4; +∞); 2) (–1; 1); 3) πk, $k \in \mathbf{Z}$. **442.** 18(н). **443.** 1) $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right]$; 2) $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **444.** 1) (4;–4); 2) (0;0); (4;–20); 3) (6;–18); (–1;$-\frac{13}{6}$); 4) (1;2). **445.** 39 (см/с). **448.** $v = 2\cos t$; $t=\frac{\pi}{2}$. **449.** *Вказівка*: скористайтеся означенням похідної для парної та непарної функцій. **452.** 1) $f(x) = x^3 - x$; 2) $f(x) = \cos x + x^2$; 3) $f(x) = \sin x + \frac{x^3}{3}$. **453.** 43 см^2/с; 10 см/с.

§ 24

457. 1) зростає на інтервалі $(-\infty; 2)$; спадає на інтервалі $(2; +\infty)$; 2) зростає на інтервалах $(-\infty;-1)$ та $(2;+\infty)$; спадає на інтервалі (–1;2); 3) зростає на інтервалі $(1;+\infty)$; спадає на інтервалі $(-\infty;1)$. **458.** 1) спадає на інтервалі (0; 1); зростає на інтервалі (3; 4); 2) зростає на інтервалі (–1; 0); спадає на інтервалі (1; 3); **463.** *Вказівка*: скористайтесь ознаками монотонності функції на інтервалі. **466.** 1) зростає; 2) спадає.

§ 25

471. 1) мінімум у точці (1;5); 2) максимум у точці (–3;9,5); 3) максимум у точці (–5; $37\frac{1}{3}$); мінімум у точці (1;$\frac{1}{3}$); 4) максимум у точках (1;0,5) та (–1;0,5); мінімум у точці (0;0); 5) максимум у точці (–3;–6); мінімум у точці (3;6). **472.** 1) 12 (с); 2) 1 (с); 3) $\frac{4}{3}$ (с). **475.** $x=-2$. **476.** $x=5$. **478.** 7,5 см; 7,5 см.

§ 26

484. 1) $\max\limits_{x\in[0;4]} f(x)=14$, $\min\limits_{x\in[0;4]} f(x)=5$; 2) $\max\limits_{x\in[-2;1]} f(x)=5$, $\min\limits_{x\in[-2;1]} f(x)=-16$; 3) $\max\limits_{x\in[-1;0]} f(x)=-3$, $\min\limits_{x\in[-1;0]} f(x)=-13$; 4) $\max\limits_{x\in[-2;2]} f(x)=13$, $\min\limits_{x\in[-2;2]} f(x)=4$; 5) $\max\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]} f(x)=4$, $\min\limits_{x\in\left[-\frac{1}{2};1\right]} f(x)=-1$; 6) $\max\limits_{x\in[0;4]} f(x)=8$, $\min\limits_{x\in[0;4]} f(x)=0$. **485.** 1 (с); 7 (м/с). **486.** 10; 20. **487.** 36 = 6 · 6. **488.** 25; 25. **490.** $\frac{1}{2}$. **491.** Квадрат із стороною 5 м. **492.** $R=\frac{P}{\pi+4}$; $h=\frac{P}{\pi+4}$ (R — радіус півкруга, h — висота прямокутника).

Частина II. Геометрія

Розділ 4

§ 27

501. Правильний многокутник. Бічні ребра рівні. Основа висоти – центр многокутника. **502.** Точка, пряма, площина. **503.** 1) Наприклад, $KLMN$ і $K_1L_1M_1N_1$; 2) наприклад, MN і M_1N_1. **504.** 1) Наприклад, $KLMN$ і $K_1L_1M_1N_1$;

2) наприклад, KL і K_1L_1. **505.** 1) Наприклад, SKL і SMN; 2) наприклад, KL і MN. **506.** 1) Ні; 2) так. **508.** 4 грані, 4 вершини, 6 ребер. **509.** 1) $n + 1$. **510.** 1) Наприклад, пряма PB перетинає площини граней $ABCD$, BCC_1B_1 і ADD_1A_1. **511.** 1) Наприклад, пряма MB перетинає площини граней $ABCD$, SBC і SAD. **513.** 11.

§ 28

521. 1) Так; 2) так; 4) так. **523.** 1) Ні; 2) так. **524.** 2) AC. **525.** Ні. *Вказівка*: скористайтеся третьою аксіомою стереометрії. **526.** 1) Так; 2) так; 3) так; 4) так. **529.** Через три точки завжди можна провести площину, через чотири — не завжди. **531.** Так. **532.** 1) Так. **533.** Так. **535.** 1) Жодної; 2) чотири; 3) безліч. **540.** *Вказівка*: для обґрунтування скористайтеся фактом: прямі, що перетинаються, лежать в одній площині.

§ 29

549. 1) 60°; 2) 60°; 3) 70°; 4) 20°. **550.** 1) 3 см, або 4 см, або 5 см; 2) 5 см або 2 см; 3) 8 см. **551.** 1) 4 см, 6 см, 9 см, $2\sqrt{13}$ см, $3\sqrt{13}$ см, $\sqrt{97}$ см; 2) 5 см, $5\sqrt{2}$ см; 3) 5 см, 12 см, 13 см, $12\sqrt{2}$ см. **552.** 1) Перетинаються або мимобіжні; 2) перетинаються або мимобіжні; 3) перетинаються або мимобіжні. **556.** 1) Ні; 2) ні. **557.** 1) Наприклад, AA_1 і AD, AA_1 і AB; 2) наприклад, AA_1 і BC, AA_1 і CD. **558.** 1) $\frac{168}{13}$ см; 2) $4\sqrt{2}$ см. *Вказівка*: розгляньте два випадки. **559.** Якщо $A \notin a$, то: 1) безліч; 2) одну; 3) безліч. Якщо $A \in a$, то: 1) безліч; 2) жодної; 3) жодної. **561.** 1) 12 пар; 2) 24 пари. **562.** 1) 3 пари; 2) 8 пар. **563.** 1) 90°; 2) 60°; 3) 90°. **566.** 1) 3 пари; 2) 15 пар; 3) $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}$.

§ 30

575. 1) Паралельні; 2) перетинаються; 3) паралельні. **578.** Так. **579.** Ні. **580.** Ні. **581.** Так. **583.** 1) 2 см або 3 см; 2) 1,5 см або 3,5 см; 3) 1 см або 2,5 см. **584.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю середньої лінії трикутника та ознакою паралельності прямої і площини. **585.** 1) 18 см; 2) 16 см; 3) 22 см. **586.** Не завжди. **588.** Так. **589.** 1) Так; 2) так. **590.** 1) Так; 2) так; 3) так; 4) так. **591.** Ні. **593.** 1) Так; 2) не завжди. **594.** 1) Паралельні або сторона трикутника перетинає площину.

§ 31

598. 1) AB; 2) AA_1; 3) CC_1. **602.** Перетинаються або паралельні. **603.** Так. **608.** 1) Не завжди; 2) не завжди. **609.** Так, якщо прямі мимобіжні. **610.** Не можна. **611.** 1) Одну; 2) одну. **616.** Ні. **617.** Не завжди. **618.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою паралельності площин. **620.** 1) Так; 2) так; 3) так. **621.** Так. 1) Одну; 2) безліч; 4) одну. **623.** *Вказівка*: розгляньте два випадки.

§ 32

632. 2) Так (мал. 174), так (мал. 175). **634.** 1) $BM_1 = 10$, $BN_1 = 24$, $M_1N_1 = 26$; 3) $BM = 6$, $BN_1 = 10$, $M_1N_1 = 18$; 5) $BM = 1{,}5$, $BN = 2{,}5$, $MN = 2$. **635.** 1) Прямокутник; 2) квадрат. **636.** Рівнобедрений трикутник. 1) 35°, 35°, 110°; 2) 50°, 50°, 80°; 3) 75°, 75°, 30°. **637.** Ромб. 1) 100°, 80°, 100°, 80°; 2) 40°, 140°, 40°, 140°; 1) 60°, 120°, 60°, 120°. **638.** Не завжди. **640.** 1) $P = a\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{5}\right)$, $S = \frac{9a^2}{8}$. **642.** Так. **643.** 1) 36 см; 2) 72 см. **644.** 1) 30°, 60°, 90°; 2) 50°, 60°, 70°.

645. 1) 120°, 25°, 35°; 2) 40°, 40°, 80°. **647.** 1) 60°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 30°; 5) 30°; 6) 60°.

§ 33

653. Ні. **655.** 1) 2 : 3; 2) 2 : 1; 3) 2 : 1. **656.** 1) 3 : 4; 2) 7 : 1; 3) 4 : 9. **657.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **658.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **664.**) Ні; 2) ні; 3) так. **668.** Відрізок або многокутник. **671.** 1) Проекцією прямокутного трикутника ABC буде довільний трикутник $A_1B_1C_1$, у якого висота C_1H_1 ділить гіпотенузу A_1B_1 у відношенні 25 : 144, починаючи від вершини A_1. **673.** 1) Проекцією прямокутника $ABCD$, у якого перпендикуляр BH проведений до діагоналі BD, буде паралелограм $A_1B_1C_1D_1$, у якого відрізок B_1H_1, проведений до діагоналі B_1D_1, ділить її у відношенні 9 : 16, починаючи від вершини B_1. **676.** 1) Проекцією рівнобічної трапеції $ABCD$, у якої висота BH проведена до більшої основи AD, буде трапеція $A_1B_1C_1D_1$, у якої основи відносяться, як 1 : 2, а відрізок B_1H_1, проведений до більшої основи A_1D_1, ділить її у відношенні 1 : 3, починаючи від вершини A_1.

Розділ 5

§ 34

683. Так. **684.** Так. **685.** Так. **686.** Так. **687.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою перпендикулярності прямої і площини. **689.** Прямокутний. **690.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою перпендикулярності прямої і площини. **691.** Перпендикулярна. **692.** *Вказівка*: врахуйте, що грані куба — квадрати. **693.** 1) *Вказівка*: врахуйте, що $AD \perp AB$ і $AD \perp AA_1$; 2) *вказівка*: обґрунтуйте, що в чотирикутнику AB_1C_1D усі кути прямі. **695.** Пряма BC і площина ACD. **696.** Пряма BC і площина ABD. **697.** 1) $\sqrt{5}$ см, $\sqrt{5}$ см, 3 см; 2) 5 см, 5 см, $\sqrt{34}$ см. **698.** 1) 13 см; 2) 26 см. **699.** 1) 13 см, $3\sqrt{17}$ см; 2) 25 см, $3\sqrt{41}$ см. **701.** *Вказівка*: обґрунтуйте, що SO — медіана. **702.** 1) 80 см², 160 см²; 2) 65 см², 130 см². **703.** 1) 12 см; 2) $\sqrt{41}$ см. **704.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-2c^2}$. **706.** $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, $\sqrt{c^2-a^2}$, $\sqrt{c^2-b^2}$. **707.** 15 см.

§ 35

711. 1) AB; 2) B; 3) AC; 4) BC. **712.** 1) 5 см; 2) 8 см; 3) 13 см. **713.** 1) $AB < BC$; 2) $AD = DC$; 3) 12 см. **714.** 1) AD; 2) AA_1 3) DC. **715.** 1) 20 см; 2) 9 см; 3) 12см. **716.** 1) 25 см; 2) 20 см; 3) 10a см. **717.** 1) 5 см, $5\sqrt{3}$ см; 2) $6\sqrt{2}$ см, $6\sqrt{2}$ см; 3) $4\sqrt{3}$ см, 4 см. **718.** 1) 12 см, $6\sqrt{3}$ см; 2) $5\sqrt{2}$ см, 5 см; 3) $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ см, $\frac{28\sqrt{3}}{3}$ см. **719.** 1) Безліч; 2) коло. **720.** *Вказівка*: скористайтеся тим, що рівні похилі мають рівні проекції. **721.** $KB > KC$. **722.** 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **723.** 1) $MA = MC$; 2) $MC > MA$. **724.** 1) 45°; 2) 30°; 3) 60°. **725.** 1) 3 см, $3\sqrt{3}$ см; 2) $4\sqrt{3}$ см, 30°; 3) 5 см, $5\sqrt{2}$ см; 4) $6\sqrt{3}$ см, 60°; 5) $7\sqrt{3}$ см, 14 см; 6) $14\sqrt{2}$ см, 45°. **726.** 1) Так; 2) ні; 3) так. **729.** 1) 2 см; 2) $\sqrt{6}$ см. **730.** *Вказівка*: спочатку доведіть, що точка O рівновіддалена від основ даних похилих.

731. 1) 8 см; 2) 16 см. **732.** 4 см. **733.** 1) 6 см, 15 см; 2) 8 см. **734.** 1) 39 см, 45 см; 2) 25 см, 40 см. **735.** 45°. **736.** 37,7 м. **737.** ≈ 2,1 м.

§ 36

741. 1) $\angle CDC_1$; 2) $\angle BDB_1$; 3) $\angle B_1DC_1$. **742.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою про три перпендикуляри. **743.** *Вказівка*: врахуйте, що діагоналі квадрата перпендикулярні, та скористайтеся теоремою про три перпендикуляри. **744.** 1) 10 см; 2) 17 см. **747.** *Вказівка*: покажіть, що $\angle B$ – прямий, та скористайтеся теоремою про три перпендикуляри. **748.** 1) 13 см, 20 см; 2) 25 см, 26 см. **749.** *Вказівка*: спочатку обґрунтуйте, що трикутники ABM і ACM рівні. **750.** 1) $2h$; 2) $h\sqrt{2}$; 3) $\frac{2h}{\sqrt{3}}$. **751.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{a}{2}$. **753.** 1) 3 см; 2) 7 см. **754.** 1) 13 см; 2) 26 см. **755.** *Вказівка*: обґрунтуйте, що основа перпендикуляра, проведеного з даної точки до площини паралелограма, є центром вписаного кола. **756.** *Вказівка*: обґрунтуйте, що основа перпендикуляра O рівновіддалена від сторін многокутника. **757.** 1) 24 см; 2) $4\sqrt{7}$ см. **758.** 6,4 см. **759.** 13 см. **760.** 7 см. **761.** 9 см^2. **762.** $3a$. **763.** 1) $4\sqrt{6}$ см; 2) $6\sqrt{6}$ см.

§ 37

765. Так. **766.** Паралельні. **767.** Так. **8.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **773.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **778.** Прямокутник. **779.** 1) *Вказівка*: спочатку доведіть, що $ABCD$ – паралелограм, у якого кут ADC (або BCD) прямий; 2) *вказівка*: спочатку обґрунтуйте, що кути ADC і BCD прямі. **780.** Діагональ паралельна площині або лежить у ній. **781.** *Вказівка*: обґрунтуйте паралельність AM і CN та скористайтеся теоремою про паралельні площини і перпендикулярну пряму. **782.** *Вказівка*: обґрунтуйте паралельність AM і CN та скористайтеся теоремою про паралельні площини і перпендикулярну пряму. **783.** *Вказівка*: через прямі a і b проведіть площину β та доведіть, що пряма перетину площин α і β паралельна прямій b. **784.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю середньої лінії трапеції.

§ 38

788. 1) $\angle SMC$; 2) $\angle SNB$. **789.** Так. **3.** Так. **791.** 1) 45°; 2) 45°; 3) 90°. **792.** 1) 1 см; 2) $2\sqrt{2}$ см; 3) $3\sqrt{3}$ см. **793.** Безліч. **794.** Перпендикулярна до площини. **795.** *Вказівка*: покажіть, що BC є перпендикуляром до площини трикутника, та скористайтеся ознакою перпендикулярності площин. **796.** *Вказівка*: спочатку обґрунтуйте, що BC і MN перпендикулярні. **11.** 1) 20 см; 2) $4\sqrt{3}$ см; 3) $4\sqrt{2}$ см. **799.** 1) 12 см; 2) $4\sqrt{2}$ см; 3) $7\sqrt{3}$ см. **800.** 30°. **801.** 1) 30°; 2) 30°. **802.** 1) 6 см; 2) $3\sqrt{2}$ см; 3) $6\sqrt{3}$ см. **804.** *Вказівка*: обґрунтуйте, що основа перпендикуляра MO є точкою перетину діагоналей квадрата, та скористайтеся ознакою перпендикулярності площин. **805.** 1) $5\sqrt{2}$ см; 2) $9\sqrt{2}$ см; 3) $11\sqrt{2}$ см. **806.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) $a\sqrt{3}$; 3) 60°. **807.** 1) 8 см; 2) $5\sqrt{2}$ см. **808.** 1) 13 см; 2) 26 см. **809.** 1) 60°; 2) 45°; 3) 30°. **810.** 1) $\sqrt{a^2+b^2}$; 2) $\frac{2\sqrt{a^2+ab+b^2}}{3}$; 3) $2\sqrt{a^2+ab\sqrt{3}+b^2}$. **811.** $\frac{a}{2}$. **812.** 14°29′. **814.** ≈ 33°.

Розділ 6

§ 39

816. 1) OY; 2) OX; 3) OZ; 4) OZ. **818.** 1) XOY; 2) XOZ; 3) YOZ; 4) XOZ. **822.** 1) $A(2;\ -1;\ -3)$; 2) $A\ (-3;\ 2;\ 4)$. **823.** 1) $B\ (2;\ 1;\ -3)$; 2) $B\ (-4;\ 1;\ 2)$. **825.** 1) $5\sqrt{2}$; 2) 3. **826.** 1) 5; 3) 6. **829.** 1) $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(2;\ 0;\ 0)$, $C(2;\ 2;\ 0)$, $D(0;\ 2;\ 0)$, $A_1(0;\ 0;\ 2)$, $B_1(2;\ 0;\ 2)$, $C_1(2;\ 2;\ 2)$, $D_1(0;\ 2;\ 2)$; 2) $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(0;\ 2;\ 0)$, $D(2;\ 2;\ 0)$, $A_1(2;\ 0;\ 2)$, $B_1(0;\ 0;\ 2)$, $C_1(0;\ 2;\ 2)$, $D_1(2;\ 2;\ 2)$. **830.** 1) $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 0;\ 0)$, $C(1;\ 3;\ 0)$, $D(0;\ 3;\ 0)$, $A_1(0;\ 0;\ 5)$, $B_1(1;\ 0;\ 5)$, $C_1(1;\ 3;\ 5)$, $D_1(0;\ 3;\ 5)$. **831.** 1) B. **832.** 2) B і C; 3) C. **833.** 1) $9 + \sqrt{15}$. **834.** 1) $20 + 3\sqrt{2}$. **836.** 1) $x = 0$, $x = 4$; 2) $x = \pm 5\sqrt{3}$. **838.** 1) 50 см². **839.** 1) 3 см². **842.** $A(0;\ -\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\ 0)$, $B(\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\ 0;\ 0)$, $C(0;\ \dfrac{a\sqrt{2}}{2};\ 0)$, $D(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\ 0;\ 0)$, $A_1(0;\ -\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\ a)$, $B_1(\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\ 0;\ a)$, $C_1(0;\ \dfrac{a\sqrt{2}}{2};\ a)$, $D_1(-\dfrac{a\sqrt{2}}{2};\ 2;\ a)$.

§ 40

852. 1) 5; 2) 2; 3) 1. **857.** 1) Вектори мають рівні довжини. **860.** 1) *Вказівка*: скористайтеся правилом паралелограма. **863.** 2) $A(\ -1;\ 3;\ 7)$. **864.** 1) $5\sqrt{2}$. **865.** 10. **867.** 13. **869.** 90°. **872.** Два розв’язки. **875.** 1) $A(8; -6; 14)$. **876.** 1) $\overrightarrow{BA}\ (9; 1; -1)$; 2) $\overrightarrow{BA}\ (4;\ 1;\ -13)$. **877.** 1) $\arccos \dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **878.** $\arccos \dfrac{3\sqrt{38}}{38}$. **881.** *Вказівка*: покажіть, що задана сума векторів дорівнює нуль–вектору.

§ 41

887. 2) *Вказівка*: урахуйте, що при симетрії відносно точки центр симетрії переходить сам у себе. **888.** 3) *Вказівка*: урахуйте, що при симетрії відносно точки, що лежить на даній прямій, ця пряма переходить сама в себе. **889.** 1) $(-1;\ 0;\ 0)$; 2) $(0;\ -1;\ 0)$; 3) $(0;\ 0;\ -1)$; 4) $(-1;\ -1;\ 0)$. **890.** 1) $(-2;\ 0;\ 0)$; 2) $(0; -2; 0)$; 3) $(0; 0; -2)$; 4) $(-1; -2; 0)$; 5) $(1; 0; -2)$; 6) $(-2; 1; 1)$. **893.** 1) $(1; 0; 0)$; 2) $(0;\ 1;\ 0)$; 3) $(0;\ 0;\ -1)$; 4) $(1;\ 1;\ 0)$. **894.** 1) $(2;\ 0;\ 0)$; 2) $(0;\ 2;\ 0)$; 3) $(0;\ 0;\ -2)$; 4) $(1; 2; 0)$; 5) $(-1; 0; -2)$; 6) $(2; -1; 1)$. **896.** 1) $(2; 0; 0)$; 2) $(0; -2; 0)$; 3) $(0; 0; -2)$; 4) $(1; -2; 0)$; 5) $(-1; 0; -2)$; 6) $(2; 1; -1)$. **898.** 1) $(-2; 0; 0)$; 2) $(0; -2; 0)$; 3) $(0; 0; 2)$; 4) $(1;\ -2;\ 0)$; 5) $(1;\ 0;\ 2)$; 6) $(-2;\ -1;\ -1)$. **899.** 1) $(-1;\ -4;\ 2)$; 2) $(1;\ 4;\ 2)$; 3) $(-1;\ 4;\ -2)$. **901.** 1) YOZ; 2) XOY. **903.** 1) $A_1(\ -2;\ -1;\ 0)$, $B_1(\ 0;\ -4;\ -1)$. **904.** 1) $A_1(0; 4; 2)$, $B_1(4; -3; 2)$. **909.** $(1; 2; -1)$.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК