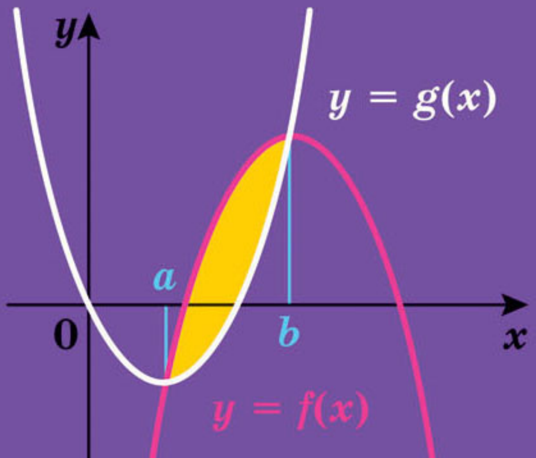
11

АЛГЕБРА

І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ПОЧАТОК ВИВЧЕННЯ НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ З 8 КЛАСУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ



ГІМНАЗІЯ

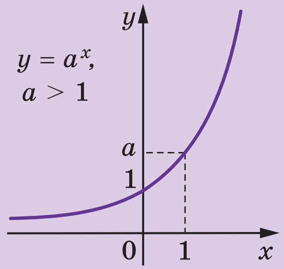
Форзац 1

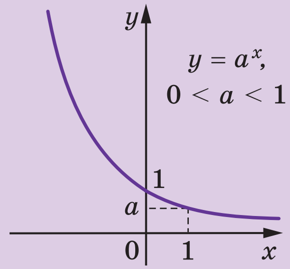
«Моя любов — Україна і математика». Ці слова Михайла Пилиповича Кравчука (1892–1942) викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника науковцеві.

Ми сподіваємося, що це патріотичне висловлювання видатного українського математика стане для вас надійним дороговказом на шляху до професіоналізму.

Форзац 2

Графік показникової функції





Властивості логарифмів

$$a^{\log_a b} = b,$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1,$$

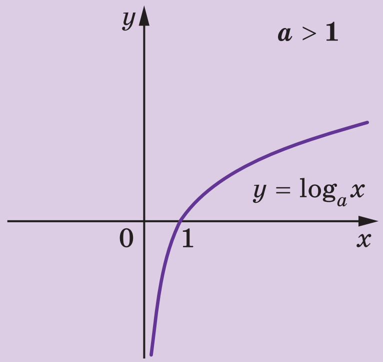
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y,$$

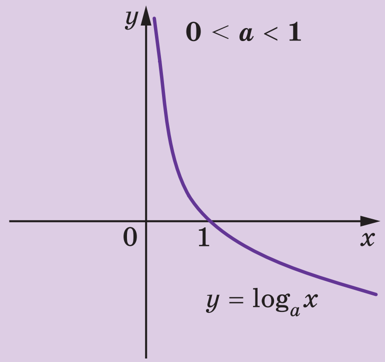
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x, \quad \log_{a^\beta} x = \frac{1}{\beta} \log_a x,$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Графік логарифмічної функції





АЛГЕБРА
І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

ПОЧАТОК ВИВЧЕННЯ
НА ПОГЛИБЛЕНОМУ РІВНІ З 8 КЛАСУ

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2019

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 12.04.2019 № 472)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Авторський коллектив:
Аркадій МЕРЗЛЯК,
Дмитро НОМІРОВСЬКИЙ,
Віталій ПОЛОНСЬКИЙ,
Михайло ЯКІР

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл. : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. — Х. : Гімназія, 2019. — 304 с. : іл.
ISBN 978-966-474-326-3.

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 517.1]

ISBN 978-966-474-326-3

ВІД АВТОРІВ

Любі одинадцятикласники та одинадцятикласниці!

У цьому навчальному році ви закінчуєте школу. Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, обравши нелегкий шлях навчання в математичному класі, і сподіваємося, що отримані знання стануть для вас надійним підґрунтям в опануванні майбутньою професією.

У цьому навчальному році ви продовжите вивчати математику за поглибленою програмою. Це не просто. Потрібно бути наполегливим і завзятим, уважним та акуратним, при цьому найголовніше — не залишатися байдужим до математики, а любити цю красиву науку. Сподіваємося, що ви з інтересом будете засвоювати нові знання, і цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте. Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Текст підручника поділено на п'ять параграфів, кожний з яких складається з пунктів. Вивчаючи теоретичний матеріал пункту, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

У цій книзі ви ознайомитеся з низкою важливих теорем. Деякі з них подано з доведеннями. У тих випадках, коли доведення виходять за межі розглядуваного курсу, наведено тільки формулювання теорем.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано завдання для самостійного розв'язування. Серед завдань є як прості й середні за складністю, так і важкі, особливо ті, що позначено зірочкою (*).

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, є непростим. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Крім навчального матеріалу, у підручнику ви зможете знайти оповідання з історії математики.

Бажаємо успіхів!

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° — завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ — завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ — завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} — задачі для математичних гуртків і факультативів;

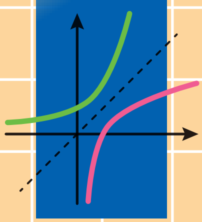
 ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв'язування інших задач;

◀ закінчення доведення теореми, розв'язання задачі;

 рубрика «Коли зроблено уроки»;

1.5. зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи;

1.6. синім кольором позначено номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно.



§ 1. Показникова та логарифмічна функції

1. **Степінь з довільним дійсним показником. Показникова функція**
2. **Показникові рівняння**
3. **Показникові нерівності**
4. **Логарифм і його властивості**
5. **Логарифмічна функція та її властивості**
6. **Логарифмічні рівняння**
7. **Логарифмічні нерівності**
8. **Похідні показникової та логарифмічної функцій**

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з поняттям степеня з довільним дійсним показником.
- Ви дізнаєтесь, які функції називають показниковою та логарифмічною, вивчите властивості цих функцій, навчитеся розв'язувати показникові та логарифмічні рівняння і нерівності.

1. Степінь з довільним дійсним показником. Показникова функція

У 10 класі ви ознайомилися з поняттям степеня додатного числа з раціональним показником. Тепер ми з'ясуємо, що являє собою степінь додатного числа з дійсним показником.

Строге означення степеня з дійсним показником та доведення його властивостей виходить за межі навчальної програми. Текст цього пункту містить лише загальні пояснення того, як можна провести необхідні обґрунтування.

Почнемо з розгляду окремого випадку. З'ясуємо, що розуміють під степенем числа 2 з показником π.

Ірраціональне число π можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу:

$$\pi = 3{,}1415\ldots\ .$$

Розглянемо послідовність (α_n) раціональних чисел

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \ldots\ . \qquad (1)$$

Зрозуміло, що ця послідовність збігається до числа π.

Відповідно до послідовності (1) побудуємо послідовність (2^{α_n}) степенів з раціональними показниками:

$$2^3,\ 2^{3,1},\ 2^{3,14},\ 2^{3,141},\ 2^{3,1415},\ \ldots\ . \qquad (2)$$

Доведемо збіжність цієї послідовності. Розглянемо відношення степенів з раціональними показниками: $\frac{2^{\alpha_{n+1}}}{2^{\alpha_n}} = 2^{\alpha_{n+1}-\alpha_n}$. Оскільки $\alpha_{n+1} - \alpha_n$ — додатне раціональне число, то його можна подати у вигляді дробу $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \frac{p}{q}$, де $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$. Маємо: $\frac{2^{\alpha_{n+1}}}{2^{\alpha_n}} = 2^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{2^p} > 1$. Оскільки $2^{\alpha_n} > 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то послідовність (2^{α_n}) є зростаючою. Водночас $2^3 \leqslant 2^{\alpha_n} \leqslant 2^4$, тому послідовність (2^{α_n}) є обмеженою. За теоремою Вейєрштрасса послідовність (2^{α_n}) є збіжною. Границю цієї послідовності називають степенем числа 2 з показником π і позначають 2^π.

Аналогічно можна діяти в загальному випадку, означаючи зміст виразу b^α, де $b > 0$, α — довільне дійсне число. Для числа α будують збіжну до нього послідовність раціональних чисел (α_n). Далі розглядають послідовність (b^{α_n}) степенів з раціональними показниками (нагадаємо, що степінь додатного числа з раціональним показником є визначеним). Можна довести, що ця послідовність збігається до додатного числа c, яке не залежить від вибору збіжної до α послідовності раціональних чисел (α_n). Число c називають степенем додатного числа b з дійсним показником α і позначають b^α.

Якщо основа b дорівнює одиниці, то $1^\alpha = 1$ для всіх дійсних α. Справді, якщо послідовність раціональних чисел (α_n) збігається до числа α, то $1^\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} 1^{\alpha_n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$.

Якщо основа b дорівнює нулю, то степінь 0^α означають тільки для $\alpha > 0$ і вважають, що $0^\alpha = 0$. Наприклад, $0^{\sqrt{2}} = 0$, $0^\pi = 0$, а вираз $0^{-\sqrt{3}}$ не має змісту.

При $b < 0$ вираз b^α, де α — ірраціональне число, не має змісту.

Степінь з дійсним показником має ті самі властивості, що й степінь з раціональним показником.

Зокрема, для $x > 0$, $y > 0$ і будь-яких дійсних α і β справедливі такі рівності:

1) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$;
2) $x^\alpha : x^\beta = x^{\alpha-\beta}$;
3) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;
4) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$;
5) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^\alpha = \dfrac{x^\alpha}{y^\alpha}$.

Доведемо, наприклад, властивість 1.

Нехай α і β — дійсні числа, причому $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n$, де (α_n) і (β_n) — послідовності раціональних чисел. Маємо:

$$\alpha + \beta = \lim_{n\to\infty}\alpha_n + \lim_{n\to\infty}\beta_n = \lim_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n).$$

Для додатного числа x розглянемо три послідовності: (x^{α_n}), (x^{β_n}) і $(x^{\alpha_n}\cdot x^{\beta_n})$.

Маємо: $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\alpha_n} = x^\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\beta_n} = x^\beta$.

Оскільки для раціональних показників α_n і β_n властивість 1 має місце (ми дізналися про це, вивчаючи властивості степеня з раціональним показником), то $x^{\alpha_n}\cdot x^{\beta_n} = x^{\alpha_n+\beta_n}$.

Тому можна записати:

$$x^\alpha \cdot x^\beta = \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n}\cdot\lim_{n\to\infty} x^{\beta_n} = \lim_{n\to\infty}(x^{\alpha_n}\cdot x^{\beta_n}) = \lim_{n\to\infty} x^{\alpha_n+\beta_n} = x^{\alpha+\beta}.$$

Таким чином, властивість 1 доведено.

ПРИКЛАД 1 Спростіть вираз $\frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}+a^{\sqrt{7}}}=$$

$$=\frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}+1\right)a^{\sqrt{7}}}{\left(a^{3\sqrt{7}}+1\right)a^{\sqrt{7}}}=\frac{a^{3\sqrt{7}}+1}{a^{3\sqrt{7}}+1}=1. \blacktriangleleft$$

Виберемо деяке додатне число a, відмінне від 1. Кожному дійсному числу x можна поставити у відповідність число a^x. Тим самим задамо функцію $f(x)=a^x$, де $a>0$, $a\neq 1$, з областю визначення $\mathbb{R}$. Цю функцію називають **показниковою функцією**.

З'ясуємо деякі властивості показникової функції.

При $a>0$ і будь-якому x виконується нерівність $a^x>0$.

Доведемо цю властивість для $a>1$ (випадок $0<a<1$ можна розглянути аналогічно). Розглянемо збіжну до числа x послідовність раціональних чисел (x_n). Оскільки послідовність (x_n) є збіжною, то вона є обмеженою. Тому існує таке раціональне число r, що $x_n \geqslant r$ для всіх $n\in\mathbb{N}$. Використовуючи властивості степеня з раціональним показником, маємо, що $a^{x_n}\geqslant a^r>0$ для всіх $n\in\mathbb{N}$. Тоді $a^x=\lim\limits_{n\to\infty}a^{x_n}\geqslant a^r>0$.

Таким чином, область значень показникової функції складається тільки з додатних чисел.

Можна показати, що для даного числа a, де $a>0$ і $a\neq 1$, і для будь-якого додатного числа b існує таке число x, що виконується рівність $a^x=b$.

- Сказане означає, що *областю значень показникової функції є множина* $(0;+\infty)$.
- *Показникова функція не має нулів, і проміжок* $(-\infty;+\infty)$ *є її проміжком знакосталості.*
- Покажемо, що *при* $a>1$ *показникова функція є зростаючою.* Для цього скористаємося лемою.

Лема. ***Якщо*** $a>1$ ***і*** $x>0$, ***то*** $a^x>1$; ***якщо*** $0<a<1$ ***і*** $x>0$, ***то*** $0<a^x<1$.

Доведення проведемо для випадку, коли $a>1$ і $x>0$ (другу частину леми доведіть самостійно).

Оскільки $x > 0$, то існує таке раціональне число r, що $x > r > 0$. Розглянемо збіжну до числа x послідовність раціональних чисел (x_n). З умови $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x > r$ випливає, що, починаючи з деякого номера n_0, виконується нерівність $x_n > r$. Оскільки $a > 1$ і числа x_n і r є раціональними, то $a^{x_n} > a^r > 1$ для всіх $n \geqslant n_0$. Тоді маємо, що $a^x = \lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n} \geqslant a^r > 1$. ◄

Наприклад, $2^{\frac{1}{\pi}} > 1$, $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < 1$.

Розглянемо довільні числа x_1 і x_2 такі, що $x_2 > x_1$, і функцію $f(x) = a^x$, де $a > 1$.

Запишемо різницю $f(x_2) - f(x_1) = a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1)$.

Оскільки $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Тоді за лемою маємо: $a^{x_2 - x_1} > 1$. Оскільки $a^{x_1} > 0$, то $a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1) > 0$.

Звідси $f(x_2) > f(x_1)$.

Отже, ми показали, що з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $f(x_2) > f(x_1)$. Це означає, що функція f є зростаючою.

- Аналогічно можна показати, що *при* $0 < a < 1$ *показникова функція є спадною*.

- Оскільки показникова функція є або зростаючою (при $a > 1$), або спадною (при $0 < a < 1$), то вона *не має точок екстремуму*.

- *Показникова функція є неперервною*.

Покажемо, як можна довести неперервність показникової функції $f(x) = a^x$ у будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}$. Розглянемо випадок $a > 1$ (випадок, коли $0 < a < 1$, можна розглянути аналогічно).

Нехай (x_n) — довільна збіжна до x_0 послідовність аргументів показникової функції. Виберемо дві послідовності раціональних чисел (y_n) і (z_n) збіжних до x_0 і таких, що $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$. Оскільки $a > 1$, то можна записати: $a^{y_n} \leqslant a^{x_n} \leqslant a^{z_n}$. З означення числа a^{x_0} випливає, що $\lim\limits_{n \to \infty} a^{y_n} = \lim\limits_{n \to \infty} a^{z_n} = a^{x_0}$. Використовуючи теорему про двох конвоїрів, можна зробити висновок, що $\lim\limits_{n \to \infty} a^{x_n} = a^{x_0}$. Звідси випливає неперервність функції $f(x) = a^x$ у точці x_0.

- *Показникова функція є диференційовною*. Детальніше про похідну показникової функції ви дізнаєтеся в п. 8.

На рисунках 1.1 і 1.2 схематично зображено графік показникової функції для випадків $a > 1$ і $0 < a < 1$ відповідно.

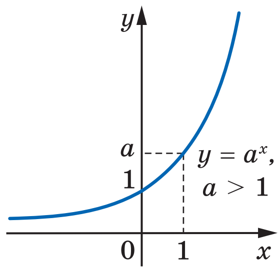


Рис. 1.1

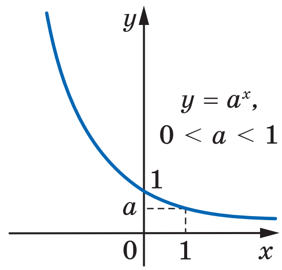


Рис. 1.2

Зокрема, на рисунках 1.3 і 1.4 зображено графіки функцій $y = 2^x$ і $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

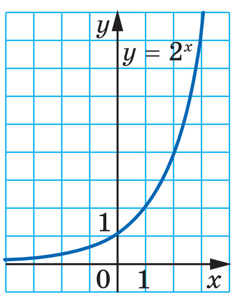


Рис. 1.3

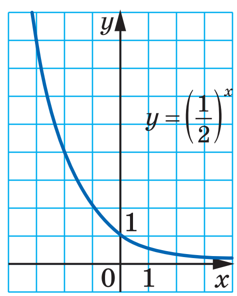


Рис. 1.4

Для показникової функції неважко довести такі твердження: якщо $a > 1$, то $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$; якщо $0 < a < 1$, то $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$. Тому при $a > 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$. Аналогічно при $0 < a < 1$ графік показникової функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$.

У 10 класі ви дізналися, що функції можна означати, описуючи їхні характеристичні властивості. Наприклад, усі показникові функції $f(x) = a^x$ мають таку властивість:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y, \text{ де } x,\ y \in \mathbb{R},$$

тобто властивість

$$f(x+y) = f(x)f(y), \text{ де } x,\ y \in \mathbb{R}.$$

Нагадаємо, що останню рівність називають функціональним рівнянням Коші. Можна довести (див. задачі 1.53, 1.54), що серед неперервних функцій, відмінних від нульової константи, записане рівняння задовольняють лише функції виду $f(x) = a^x$. Тому рівняння Коші можна використовувати для означення показникової функції.

Показникова функція є математичною моделлю багатьох процесів, які відбуваються в природі або пов'язані з діяльністю людини.

Наприклад, біологам відомо, що маса колонії бактерій у певних умовах за рівні проміжки часу збільшується в одну й ту саму кількість разів.

Нехай маса колонії бактерій у момент часу $t = x$ дорівнює $f(x)$. Тоді за проміжок від $t = x$ до $t = x + y$ маса колонії бактерій збільшиться в таку саму кількість разів, як за проміжок часу від $t = 0$ до $t = y$, тобто

$$\frac{f(x+y)}{f(x)} = \frac{f(y)}{f(0)}.$$

Якщо в момент часу $t = 0$ маса колонії бактерій дорівнювала 1, то останню рівність можна переписати так:

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

Природно вважати, що функція, яка описує залежність маси колонії бактерій від часу, є неперервною.

Тому маса колонії бактерій у момент часу t дорівнює $f(t) = a^t$.

Із курсу фізики відомо, що під час радіоактивного розпаду маса радіоактивної речовини за рівні проміжки часу зменшується в одну й ту саму кількість разів.

Якщо покласти гроші на рахунок у банку під певний відсоток, то кожного року кількість грошей на рахунку буде збільшуватися в одну й ту саму кількість разів.

Отже, показникова функція описує і ці процеси.

У таблиці наведено властивості функції $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	$\mathbb{R}$
Область значень	$(0; +\infty)$
Нулі функції	–
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на $\mathbb{R}$

Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперервність	Неперервна
Диференційовність	Диференційовна
Асимптоти	Якщо $a > 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$; якщо $0 < a < 1$, то графік функції має горизонтальну асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$

ПРИКЛАД 2 Знайдіть найменше і найбільше значення функції $f(x) = 3^x$ на відрізку $[-4; 3]$.

Розв'язання. Оскільки функція f зростає на відрізку $[-4; 3]$, то найменшого значення вона набуває при $x = -4$, а найбільшого — при $x = 3$. Отже,

$$\min_{[-4;3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81},$$

$$\max_{[-4;3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Відповідь: $\frac{1}{81}$, 27. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{2}-1\right)^{|x|} = \sin^2 x + 1$.

Розв'язання. Оскільки $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$, а $|x| \geqslant 0$, то

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{|x|} \leqslant \left(\sqrt{2}-1\right)^0 = 1.$$

Водночас $\sin^2 x + 1 \geqslant 1$. Таким чином, дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \left(\sqrt{2}-1\right)^{|x|} = 1, \\ \sin^2 x + 1 = 1. \end{cases}$$

Звідси $x = 0$.

Відповідь: 0. ◄

ВПРАВИ

1.1.° Обчисліть значення виразу:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$;
3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$;
2) $\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;
4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

1.2.° Знайдіть значення виразу:

1) $5^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}}$; 2) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$; 3) $\left(\left(\sqrt[5]{10}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$.

1.3.° Порівняйте із числом 1 степінь:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$;
3) $0{,}6^{2\sqrt{5}}$;
5) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\pi}$;
2) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\pi}$;
4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$;
6) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{6}}$.

1.4.° Які з даних чисел більші за 1, а які менші від 1?

1) $1{,}8^{\sqrt{1{,}8}}$; 2) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{10}}$; 3) $7^{-\sqrt{2}}$; 4) $0{,}3^{-\pi}$.

1.5.° Ґрунтуючись на якій властивості показникової функції, можна стверджувати, що:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3{,}2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2{,}9}$;
2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1{,}8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1{,}6}$?

1.6.° Порівняйте:

1) $5^{3{,}4}$ і $5^{3{,}26}$;
3) 1 і $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$;
5) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}$ і $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}$;
2) $0{,}3^{0{,}4}$ і $0{,}3^{0{,}3}$;
4) $0{,}17^{-3}$ і 1;
6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2{,}7}$ і $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2{,}8}$.

1.7.° Порівняйте із числом 1 значення виразу:

1) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $\left(\frac{6}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 4) $\left(\frac{7}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 5) $0{,}62^{-0{,}4}$; 6) $3{,}14^{-0{,}4}$.

1.8.° Порівняйте із числом 1 додатне число a, якщо:

1) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$; 2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$; 3) $a^{-0{,}3} > a^{1{,}4}$; 4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1{,}2}$.

1.9.° Порівняйте числа m і n, якщо:

1) $0{,}8^m < 0{,}8^n$;
2) $3{,}2^m > 3{,}2^n$;
3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$;
4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$.

1.10.° Спростіть вираз:

1) $\left(a^{\sqrt{5}}+2\right)\left(a^{\sqrt{5}}-2\right)-\left(a^{\sqrt{5}}+3\right)^2$;
2) $\dfrac{a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{3\sqrt{7}}}$;
3) $\dfrac{a^{2\sqrt{3}}-b^{2\sqrt{2}}}{\left(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}\right)^2}+1$;
4) $\dfrac{a^{\sqrt[3]{24}}-1}{a^{\sqrt[3]{3}}-1}-\dfrac{a^{\sqrt[3]{81}}+1}{a^{\sqrt[3]{3}}+1}$.

1.11.° Спростіть вираз:

1) $\dfrac{\left(a^{2\sqrt{6}}-1\right)\left(a^{\sqrt{6}}+a^{2\sqrt{6}}+a^{3\sqrt{6}}\right)}{a^{4\sqrt{6}}-a^{\sqrt{6}}}$;
2) $\left((a^{\pi}+b^{\pi})^2-(a^{\pi}-b^{\pi})^2\right)^{\frac{1}{\pi}}$.

1.12.° Чи є правильним твердження:

1) найбільше значення функції $y = 0{,}2^x$ на проміжку $[-1;\ 2]$ дорівнює 5;
2) областю визначення функції $y = 4 - 7^x$ є множина дійсних чисел;
3) областю значень функції $y = 6^x + 5$ є проміжок $[5;\ +\infty)$;
4) найменше значення функції $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ на проміжку $[-2;\ 2]$ дорівнює 16?

1.13.° Знайдіть область значень функції:

1) $y = -9^x$;
2) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x+1$;
3) $y = 7^x - 4$;
4) $y = 6^{|x|}$.

1.14.° Знайдіть найбільше значення функції $y=\left(\frac{1}{6}\right)^x$ на проміжку $[-2;\ 3]$.

1.15.° На якому проміжку найбільше значення функції $y = 2^x$ дорівнює 16, а найменше — $\frac{1}{4}$?

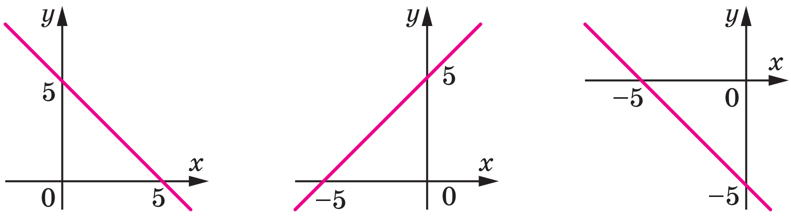
1.16.° На якому проміжку найбільше значення функції $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ дорівнює 27, а найменше — $\frac{1}{9}$?

1.17.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2^x > -1$; 2) $2^{\sqrt{x}} > -2$.

1.18.° Розв'яжіть нерівність $2^{\frac{1}{x}} > 0$.

1.19.• Графік якої з функцій, зображених на рисунку 1.5, перетинає графік функції $y = 5^x$ більше ніж в одній точці?



а *б* *в*

Рис. 1.5

1.20.• Порівняйте $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-5,2}$ і $\left(7-4\sqrt{3}\right)^{5,6}$.

1.21.• Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $2^x = x$; 2) $2^x = x^2$; 3) $2^x = \sin x$; 4) $2^{-x} = 2 - x^2$.

1.22.• Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$.

1.23.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left| 2^x - 1 \right|$; 4) $y = 2^{|x+1|} - 2$; 7) $y = \frac{2^{|x|} - 1}{\left|2^x - 1\right|}$.

2) $y = \left| 2^{x+1} - 2 \right|$; 5) $y = \left| \frac{1}{2^x} - 1 \right|$;

3) $y = 2^{|x|} + 1$; 6) $y = \left| 2^{-|x|} - 1 \right|$;

1.24.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left| 3^x - 2 \right|$; 3) $y = 3^{|x+1|} - 1$; 5) $y = \left| 1 - 3^{|x|} \right|$;

2) $y = 3^{|x|} - 1$; 4) $y = \left| 3^x - 1 \right|$; 6) $y = y = \frac{\left|1 - 3^{-x}\right|}{3^{|x|} - 1}$.

1.25.• Побудуйте графік функції $y = \sqrt{2^{\cos x} - 2}$.

1.26.• Побудуйте графік функції $y = \sqrt{2^{\sin x} - 2}$.

1.27.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$; 2) $y=3^{|\sin x|}-2$.

1.28.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:

1) $y=6^{\cos x}$; 2) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{|\cos x|}+5$.

1.29.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{\operatorname{tg} x}>0$; 2) $2^{\arcsin x}>-\frac{\pi}{4}$; 3) $2^{\arccos x}>\arccos x-\pi$.

1.30.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x}>\sin x-1$; 2) $2^{x}>\arcsin x-\frac{\pi}{2}$; 3) $2^{\operatorname{ctg} x}>\cos x-1$.

1.31.° Знайдіть область значень функції $f(x)=2^{(\sin x+\cos x)^2}$.

1.32.° Знайдіть область значень функції $f(x)=3^{|\sin x\cos x|}$.

1.33.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{\cos x}=x^2+2$; 2) $2^{\sqrt{x}}=\cos x$.

1.34.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}=x^2+1$; 2) $2^{|x|}=\cos x$.

1.35.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x^2}\geqslant\sin x$; 2) $2^{-x^2}\geqslant|\sin x|+1$; 3) $2^{\sqrt{x}}\geqslant 1-x^2$.

1.36.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{x^2}>\cos x$; 2) $2^{-x^2}\geqslant x^2+1$.

1.37.° Дослідіть на парність функцію:

1) $y=\frac{2^x-1}{2^x+1}$; 2) $y=\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x$.

1.38.° Дослідіть на парність функцію:

1) $y=\frac{2^x-3^x}{2^x+3^x}$; 2) $y=\left(\sqrt{2}+1\right)^x-\left(\sqrt{2}-1\right)^x$.

1.39.° Дослідіть на неперервність функцію:

1) $y=2^{\frac{1}{x}}$; 2) $y=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

1.40.° Дослідіть на неперервність функцію:

1) $y=5^{-\frac{1}{(x-1)^2}}$; 2) $y=\left(\frac{\pi}{8}\right)^{\operatorname{ctg} x}$.

1.41.•• Знайдіть область значень функції $y = \dfrac{2^x - 1}{2^x - 4}$.

1.42.•• Знайдіть область значень функції $y = \dfrac{3^x}{3^x - 9}$.

1.43.•• Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x) = 5^x + \dfrac{25}{5^x}$. При якому значенні параметра a функція $y = f(x+a)$ буде парною?

1.44.•• Дано функцію $y = f(x)$, де $f(x) = 3^x - \dfrac{27}{3^x}$. При якому значенні параметра a функція $y = f(x+a)$ буде непарною?

1.45.•• При яких значеннях параметра a найбільше значення функції $f(x) = -\left(\dfrac{1}{9}\right)^x + \dfrac{7}{2} \cdot 3^{-x} - 3a^2$ на відрізку $[-1; 0]$ є від'ємним числом?

1.46.•• При яких значеннях параметра a функція

$$f(x) = 4^{-x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \cdot \frac{5a}{2} + \frac{a^2 + 12}{6}$$

набуває в усіх точках відрізка $[-1; 1]$ значень, більших за 2?

1.47.•• Розв'яжіть у додатних числах систему $\begin{cases} x^y = z, \\ y^z = x, \\ z^x = y. \end{cases}$

1.48.•• Розв'яжіть у додатних числах систему $\begin{cases} x^{\frac{1}{y}} = z, \\ y^{\frac{1}{z}} = x, \\ z^{\frac{1}{x}} = y. \end{cases}$

1.49.•• Доведіть, що похідна показникової функції $f(x) = a^x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$ задовольняє рівність $f'(x) = a^x \cdot f'(0)$.

1.50.* Чи існують такі ірраціональні числа a і b, що a^b — раціональне число?

1.51.* Про функцію f відомо, що $f(1) = 3$ і для всіх x, $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x+y) = f(x)f(y)$. Знайдіть:

1) $f(0)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(20)$; 5) $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

1.52.* Про неперервну функцію f відомо, що $f(1) = 3$ і для всіх x, $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x+y) = f(x)f(y)$. Доведіть, що $f(x) = 3^x$.

2. Показникові рівняння

Розглянемо рівняння $2^x = 8$,

$$3^x \cdot 3^{x-1} = 4,$$

$$0{,}3^{x-4} = 0{,}3^{x^2}.$$

У цих рівняннях змінна міститься тільки в показнику степеня. Наведені рівняння є прикладами **показникових рівнянь.**

Теорема 2.1. ***При $a > 0$ і $a \neq 1$ рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 = x_2$.***

Доведення. Очевидно, що коли $x_1 = x_2$, то $a^{x_1} = a^{x_2}$.

Доведемо, що з рівності $a^{x_1} = a^{x_2}$ випливає рівність $x_1 = x_2$. Припустимо, що $x_1 \neq x_2$, тобто $x_1 < x_2$ або $x_1 > x_2$. Нехай, наприклад, $x_1 < x_2$.

Розглянемо показникову функцію $y = a^x$. Вона є або зростаючою, або спадною. Тоді з нерівності $x_1 < x_2$ випливає, що $a^{x_1} < a^{x_2}$ (при $a > 1$) або $a^{x_1} > a^{x_2}$ (при $0 < a < 1$). Проте за умовою виконується рівність $a^{x_1} = a^{x_2}$. Отримали суперечність.

Аналогічно розглядають випадок, коли $x_1 > x_2$. ◄

Наслідок. ***Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння***

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \qquad (1)$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x). \qquad (2)$$

Доведення. Нехай x_1 — корінь рівняння (1), тобто $a^{f(x_1)} = a^{g(x_1)}$. Тоді за теоремою 2.1 отримуємо, що $f(x_1) = g(x_1)$. Отже, x_1 — корінь рівняння (2).

Нехай x_2 — корінь рівняння (2), тобто $f(x_2) = g(x_2)$. Звідси $a^{f(x_2)} = a^{g(x_2)}$.

Ми показали, що кожний корінь рівняння (1) є коренем рівняння (2) і навпаки, кожний корінь рівняння (2) є коренем рівняння (1). Таким чином, рівняння (1) і (2) рівносильні. ◄

Розглянемо приклади розв'язування показникових рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння $(0{,}125)^x = 128$.

Розв'язання. Подамо кожну із частин рівняння у вигляді степеня з основою 2. Маємо: $0{,}125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$ і $128 = 2^7$.

Запишемо:

$$(2^{-3})^x = 2^7;\ 2^{-3x} = 2^7.$$

Це рівняння рівносильне рівнянню $-3x = 7$. Звідси $x = -\frac{7}{3}$.

Відповідь: $-\frac{7}{3}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $2 \cdot 3^{x+2} - 3^{x+1} = 5^{x+1} + 4 \cdot 5^x$.

Розв'язання. Маємо: $3^x(2 \cdot 3^2 - 3) = 5^x(5 + 4)$; $3^x \cdot 15 = 5^x \cdot 9$;

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{9}{15};\ \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{3}{5};\ x = 1.$$

Відповідь: 1. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.

Розв'язання. Оскільки $25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2$, то дане рівняння зручно розв'язувати методом заміни змінної.

Нехай $5^x = t$. Тоді задане рівняння можна переписати так:

$$t^2 + 4t - 5 = 0.$$

Звідси $t = 1$ або $t = -5$.

Якщо $t = 1$, то $5^x = 1$. Звідси $5^x = 5^0$; $x = 0$.

Якщо $t = -5$, то $5^x = -5$. Оскільки $5^x > 0$ при будь-якому x, то рівняння $5^x = -5$ не має коренів.

Відповідь: 0.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$.

Розв'язання. Маємо:

$$3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 3^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0. \qquad (3)$$

Якщо зробити заміну $2^x = u$, $3^x = v$, то рівняння (3) набуде такого вигляду: $3u^2 - 5uv + 2v^2 = 0$.

Оскільки $v = 3^x \neq 0$, то, поділивши обидві частини цього рівняння на v^2, отримаємо:

$$3\left(\frac{u}{v}\right)^2 - 5\left(\frac{u}{v}\right) + 2 = 0.$$

Далі за допомогою заміни $\frac{u}{v} = t$ отримуємо квадратне рівняння $3t^2 - 5t + 2 = 0$. Звідси $t_1 = \frac{2}{3}$, $t_2 = 1$. Оскільки $t = \frac{u}{v} = \frac{2^x}{3^x}$, то початкове рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1.\end{array}\right. \quad \text{Звідси} \quad \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 0.\end{array}\right.$$

Відповідь: 0; 1. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $2^x + 5^x = 7^x$.

Розв'язання. Очевидно, що $x = 1$ — корінь даного рівняння. Покажемо, що цей корінь — єдиний.

Поділивши обидві частини початкового рівняння на 7^x, отримаємо:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1.$$

Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$. Оскільки функції $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ і $y = \left(\frac{5}{7}\right)^x$ є спадними, то функція f також спадна, а отже, кожного свого значення вона набуває тільки один раз. Тому рівняння $f(x) = 1$ має єдиний корінь.

Відповідь: 1. ◄

ПРИКЛАД 6 При яких значеннях параметра a рівняння $4^x - (a + 3)\, 2^x + 4a - 4 = 0$ має єдиний корінь?

Розв'язання. Нехай $2^x = t$. Маємо: $t^2 - (a + 3)\, t + 4a - 4 = 0$. Звідси $t_1 = 4$, $t_2 = a - 1$. Отже, початкове рівняння рівносильне сукупності

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 4, \\ 2^x = a - 1.\end{array}\right.$$

Перше рівняння сукупності має єдиний корінь $x = 2$. Друге рівняння сукупності при кожному значенні параметра a має один корінь або взагалі не має коренів.

Для виконання умови задачі друге рівняння сукупності повинно або не мати коренів, або мати єдиний корінь, який дорівнює 2.

Рівняння $2^x = a - 1$ не має коренів при $a - 1 \leqslant 0$, тобто при $a \leqslant 1$.

Число 2 є коренем другого рівняння сукупності, якщо $2^2 = a - 1$. Звідси $a = 5$.

Відповідь: $a \leqslant 1$ або $a = 5$. ◄

ВПРАВИ

2.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}6^{2x-3} = 1$;
2) $8^x = 16$;
3) $0{,}16^x = \frac{5}{2}$;
4) $\sqrt{5^x} = 25$;
5) $0{,}25^{x^2-4} = 2^{x^2+1}$;
6) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$;
7) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot (10^{x-1})^5$;
8) $36^x = \left(\frac{1}{216}\right)^{2-x}$;
9) $5^{x^2-2x} = 6^{x^2-2x}$;
10) $3^{x-1} = 6^x \cdot 2^{-x} \cdot 3^{x+1}$.

2.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $0{,}4^{x^2-x-6} = 1$;
2) $\sqrt{2^x} = 8^{-\frac{2}{3}}$;
3) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4{,}5^{x-2}$;
4) $100^x = 0{,}01\sqrt{10}$;
5) $\left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{8}\right)^x = \frac{125}{64}$;
6) $2^{x-1} \cdot 3^{x-1} = \frac{1}{36} \cdot 6^{2x+5}$;
7) $32^{\frac{3}{5}x-2} = 4^{6-\frac{3}{2}x}$;
8) $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$;
9) $16^{5-3x} = 0{,}125^{5x-6}$.

2.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{x+2} + 3^x = 30$;
2) $4^{x+1} + 4^{x-2} = 260$;
3) $2^{x+4} - 2^x = 120$;
4) $7^{x+1} + 4 \cdot 7^x = 77$;
5) $5^x + 7 \cdot 5^{x-2} = 160$;
6) $6^{x+1} - 4 \cdot 6^{x-1} = 192$.

2.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1} + 5^x = 150$;
2) $2^x + 2^{x-3} = 18$;
3) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$;
4) $4^x - 3 \cdot 4^{x-2} = 52$.

2.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$;
2) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$;
3) $25^x - 5^x - 20 = 0$;
4) $100 \cdot 0{,}3^{2x} + 91 \cdot 0{,}3^x - 9 = 0$.

2.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $6^{2x} - 3 \cdot 6^x - 18 = 0$;
2) $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$.

2.7.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{9} \cdot \sqrt{3^{3x-1}} = 81^{-\frac{3}{4}}$;
2) $4^x \cdot 3^{x+1} = 0{,}25 \cdot 12^{3x-1}$;
3) $4 \cdot 2^{\cos x} = \sqrt{8}$;
4) $0{,}25 \cdot 2^{x^2} = \sqrt[3]{0{,}25 \cdot 4^{2x}}$;

5) $5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$;
6) $\sqrt[3]{9^{2x+1}} = \dfrac{3}{\sqrt[5]{3}}$.

2.8.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{\sqrt{32}}{16^{x^2}} = 8^{3x}$;
2) $9 \cdot 3^{\sin x} = \sqrt{27}$;
3) $2^{x-1} = 12^{2x} \cdot 3^{-2x} \cdot 2^{x+1}$;
4) $\sqrt[5]{7^{x+1}} = \dfrac{49}{\sqrt{7}}$.

2.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 56$;
2) $6 \cdot 5^x - 5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-1} = 10$;
3) $2 \cdot 7^x + 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x-1} = 354$;
4) $4^{x-2} - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{2x} = 228$;
5) $4 \cdot 9^{1,5x-1} - 27^{x-1} = 33$;
6) $0,5^{5-2x} + 3 \cdot 0,25^{3-x} = 5$;
7) $2^{2x+1} + 4^x - \left(\dfrac{1}{16}\right)^{1-0,5x} = 47$;
8) $4 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{x-1} - 6 \cdot 3^{x-2} = 15 \cdot 9^{x^2-1}$.

2.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31$;
2) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 17$;
3) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} = 9$;
4) $2 \cdot 3^{2x+1} + 3^{2x-1} - 5 \cdot 3^{2x} = 36$;
5) $6^{x-2} - \left(\dfrac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-1}{2}} = 246$;
6) $5 \cdot 2^{x-1} - 6 \cdot 2^{x-2} - 7 \cdot 2^{x-3} = 8^{x^2-1}$.

2.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$;
2) $4^{x+1} + 4^{1-x} = 10$;
3) $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3$;
4) $9^x - 6 \cdot 3^{x-1} = 3$;
5) $3^{x+1} + 3^{2-x} = 28$;
6) $\dfrac{9}{2^x - 1} - \dfrac{21}{2^x + 1} = 2$.

2.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$;
2) $2^{3-2x} - 3 \cdot 2^{1-x} + 1 = 0$;
3) $5^x - 0,2^{x-1} = 4$;
4) $4^{x+0,5} + 7 \cdot 2^x = 4$;
5) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2$;
6) $\dfrac{5}{3^x - 6} + \dfrac{5}{3^x + 6} = 2$.

2.13.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$;

2) $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} = 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1}$;

3) $7^x - 5^{x+2} = 2\cdot 7^{x-1} - 118\cdot 5^{x-1}$.

2.14.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $6^x + 6^{x-1} - 6^{x-2} = 7^x - 8\cdot 7^{x-2}$;

2) $5^x - 2\cdot 5^{x-1} = 3^{x+1} - 2\cdot 3^{x-2}$;

3) $2^{\sqrt{x}+1} - 3^{\sqrt{x}} = 3^{\sqrt{x}-1} - 2^{\sqrt{x}}$.

2.15.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $27^{\frac{2}{x}} - 2\cdot 3^{\frac{x+3}{x}} - 27 = 0$;

2) $\sqrt[3]{49^x} - 50\sqrt[3]{7^{x-3}} + 1 = 0$;

3) $2^{\sqrt{x+1}} = 3\cdot 2^{2-\sqrt{x+1}} + 1$;

4) $3^{\sqrt{x-5}} + 3^{2-\sqrt{x-5}} = 6$;

5) $5\cdot 2^{\cos^2 x} - 2^{\sin^2 x} = 3$;

6) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$;

7) $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0$.

2.16.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{2x+3}{x}} - 32 = 0$;

2) $5^{\sqrt{x-2}} - 5^{1-\sqrt{x-2}} - 4 = 0$;

3) $2^{\cos 2x} - 3\cdot 2^{\cos^2 x} + 4 = 0$.

2.17.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $3\cdot 2^{2x} - 5\cdot 6^x + 2\cdot 3^{2x} = 0$;

2) $2^{2x+1} - 7\cdot 10^x + 25^{x+0,5} = 0$;

3) $7\cdot 49^x + 3\cdot 28^x + 4\cdot 16^x$;

4) $9^x + 4^x = 2\cdot 6^x$.

2.18.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $4\cdot 9^x - 7\cdot 12^x + 3\cdot 16^x = 0$;

2) $5\cdot 2^x + 2\cdot 5^x = 7\cdot 10^{\frac{x}{2}}$.

2.19.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння $\sqrt{4^x - 2^x - 3} = \sqrt{4\cdot 2^x - 7}$.

2.20.$^{\bullet}$ Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1 + 3^x - 9^x} = \sqrt{4 - 3\cdot 3^x}$.

2.21.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

2.22.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = 8$.

2.23.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть рівняння:

1) $4^{x+\frac{1}{2}} + \frac{2}{4^x} + 14 = 9\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)$;

2) $9^{x+\frac{1}{2}} + \frac{3}{9^x} + 26 = 16(3^x + 3^{-x})$.

2.24.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях параметра a рівняння $9^x - (a+1)\cdot 3^x + 3a - 6 = 0$ має єдиний корінь?

2.25.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях параметра a рівняння $25^x + 5^{x+1} - a^2 + a + 6 = 0$ не має коренів?

2.26.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$4^x-(a+1)\cdot 2^x+2a-2=0$$

має два різних корені?

2.27.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^x=3-x$;
2) $3^x+4^x=5^x$;
3) $\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=4^x$;
4) $3^{x-1}+5^{x-1}=34$.

2.28.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x=11-x$;
2) $3^{x-2}=\dfrac{9}{x}$;
3) $4^{x-2}+6^{x-3}=100$;
4) $\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(3+\sqrt{7}\right)^x=7^x$.

2.29.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(\sqrt{x}-a\right)\left(3^{2x}-4\cdot 3^x+3\right)=0$$

має два різних корені?

2.30.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(\sqrt{x}-a\right)\left(2^{2x}-10\cdot 2^x+16\right)=0$$

має два різних корені?

2.31.•• Розв'яжіть рівняння $4^x-(19-3x)\cdot 2^x+34-6x=0$.

2.32.•• Розв'яжіть рівняння $9^x-(14-x)\cdot 3^x+33-3x=0$.

2.33.•• Розв'яжіть рівняння $4^{\operatorname{tg} x}+4^{\operatorname{ctg} x}=8$.

2.34.•• Розв'яжіть рівняння $2^{\cos x}+2^{\sin x}=2^{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

2.35.* При яких значеннях параметра a рівняння $2^{|x|}=ax^2+a^2$ має єдиний розв'язок?

2.36.* При яких значеннях параметра a рівняння $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{|x|}=\left(a+\dfrac{1}{3}\right)x^2+a^2$ має єдиний розв'язок?

2.37.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(3-2\sqrt{2}\right)^x+\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=(3a+1)|x|+2a^2$$

має єдиний розв'язок?

2.38.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=2(a-1)x^2+\frac{1}{2}a^2$$

має єдиний розв'язок?

2.39.* При яких значеннях параметра a рівняння $4^{x+1}+2^{x+4}=2^{x+2}+16$ і $|a-9|\cdot 3^{x-2}+a\cdot 9^{x-1}=1$ рівносильні?

2.40.* При яких значеннях параметра a рівняння $3^x + 3^{x+3} = 3^{x+1} + 25$ і $|a-4|2^x + a\cdot 4^x = 4$ рівносильні?

2.41.* Знайдіть усі значення параметра p, при яких рівняння $(p-4)\,9^x + (p+1)\,3^x + 2p - 1 = 0$ не має розв'язків.

2.42.* При яких значеннях параметра a рівняння

$$(a-1)\cdot 3^{2x} - (2a-1)\cdot 3^x - 1 = 0$$

має два різних корені?

3. Показникові нерівності

Нерівності $0{,}2^x < 25$, $2^x + 5^x > 1$, $7^{x^2} > 2^x$ є прикладами **показникових нерівностей.**

Під час розв'язування багатьох показникових нерівностей застосовують таку теорему.

Теорема 3.1. ***При $a > 1$ нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 > x_2$; при $0 < a < 1$ нерівність $a^{x_1} > a^{x_2}$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 < x_2$.***

Справедливість цієї теореми випливає з того, що при $a > 1$ показникова функція $y = a^x$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ — спадною.

Наслідок. ***Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.***

Скориставшись ідеєю доведення наслідку з теореми 2.1, доведіть цей наслідок самостійно.

Розглянемо приклади розв'язування показникових нерівностей.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $8\cdot 2^{3x-1} < (0{,}5)^{-1}$.

Розв'язання. Маємо: $2^3\cdot 2^{3x-1} < (2^{-1})^{-1}$; $2^{3x+2} < 2^1$.

Оскільки основа степенів 2^{3x+2}, 2^1 більша за одиницю, то остання нерівність рівносильна такій:

$$3x + 2 < 1.$$

Звідси $3x < -1$; $x < -\frac{1}{3}$.

Відповідь: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв’яжіть нерівність $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{147}{20}\right)^{x}\geqslant\left(\frac{81}{625}\right)^{x}$.

Розв’язання. Маємо:

$$\left(\frac{4}{49}\right)^{x}\cdot\left(\frac{147}{20}\right)^{x}\geqslant\left(\frac{81}{625}\right)^{x};$$

$$\left(\frac{4}{49}\cdot\frac{147}{20}\right)^{x}\geqslant\left(\frac{81}{625}\right)^{x};$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x}\geqslant\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{4}\right)^{x};\ \left(\frac{3}{5}\right)^{x}\geqslant\left(\frac{3}{5}\right)^{4x}.$$

Оскільки $0<\frac{3}{5}<1$, то остання нерівність рівносильна такій: $x\leqslant 4x$; $x\geqslant 0$.

Відповідь: $[0;\ +\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв’яжіть нерівність $4^{-x+\frac{1}{2}}-7\cdot 2^{-x}-4<0$.

Розв’язання. Маємо: $(2^2)^{-x+\frac{1}{2}}-7\cdot 2^{-x}-4<0$;

$$2^{-2x+1}-7\cdot 2^{-x}-4<0;$$

$$2\cdot 2^{-2x}-7\cdot 2^{-x}-4<0.$$

Нехай $2^{-x}=t$. Тоді $2t^2-7t-4<0$.

Розв’язавши цю нерівність, отримаємо: $-\frac{1}{2}<t<4$.

Звідси $-\frac{1}{2}<2^{-x}<4$.

Оскільки $2^{-x}>0$, то нерівність $2^{-x}>-\frac{1}{2}$ виконується при всіх x. Тому достатньо розв’язати нерівність $2^{-x}<4$.

Маємо: $2^{-x}<2^2$; $-x<2$; $x>-2$.

Відповідь: $(-2;\ +\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 4 Розв’яжіть нерівність $4^x-2\cdot 5^{2x}+10^x>0$.

Розв’язання. Маємо: $2^{2x}-2\cdot 5^{2x}+2^x\cdot 5^x>0$.

Оскільки $5^{2x}>0$ при будь-якому x, то, поділивши обидві частини останньої нерівності на 5^{2x}, отримуємо рівносильну нерівність $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}-2+\left(\frac{2}{5}\right)^{x}>0$.

Нехай $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$. Тоді $t^2 + t - 2 > 0$. Розв'язавши цю нерівність, отримуємо $\left[\begin{array}{l} t > 1, \\ t < -2. \end{array}\right.$ Звідси $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{5}\right)^x > 1, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^x < -2. \end{array}\right.$

З нерівності $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 1$ знаходимо, що $x < 0$. Нерівність $\left(\frac{2}{5}\right)^x < -2$ не має розв'язків.

Відповідь: $(-\infty; 0)$. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $3^x + 4^x > 5^x$.

Розв'язання. Маємо: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$.

Розглянемо функцію $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$. Зауважимо, що $f(2) = 1$. Оскільки функція f — спадна, то при $x < 2$ виконується нерівність $f(x) > f(2)$, а при $x > 2$ виконується нерівність $f(x) < f(2)$. Отже, множиною розв'язків нерівності $f(x) > f(2)$, тобто нерівності $f(x) > 1$, є проміжок $(-\infty; 2)$.

Відповідь: $(-\infty; 2)$. ◄

ВПРАВИ

3.1.° Чи рівносильні нерівності:

1) $7^{2x+4} > 7^{x-1}$ і $2x + 4 > x - 1$;
2) $0{,}9^{x^2-4} < 0{,}9^{x+2}$ і $x^2 - 4 < x + 2$;
3) $a^x > a^5$, де $a > 1$, і $x > 5$;
4) $a^x < a^{-3}$, де $0 < a < 1$, і $x < -3$?

3.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$;
2) $5^x < \frac{1}{5}$;
3) $11^{x-5} < 11^{3x+1}$;
4) $0{,}4^{6x+1} \geqslant 0{,}4^{2x+5}$;
5) $2^{x^2-1} < 8$;
6) $27^{2x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$;
7) $0{,}3^{4x-8} > 1$;
8) $0{,}1^{3x-1} < 1000$;
9) $\left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} < 216^{x+1}$.

3.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $6^{7x-1} > 6$;
2) $10^x < 0{,}001$;
3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{3}{2}\right)^4$;
4) $3^{2x^2-6} > \frac{1}{81}$;
5) $49^{x+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x$;
6) $0{,}2^{2x-9} < 1$.

3.4.° Скільки цілих розв'язків має нерівність:

1) $0{,}2 \leqslant 5^{x+4} \leqslant 125$;
2) $\frac{1}{36} \leqslant 6^{3-x} < 6$;
3) $2 < 0{,}5^{x-1} \leqslant 32$?

3.5.° Знайдіть суму цілих розв'язків нерівності:

1) $\frac{1}{3} < 3^{x+3} < 9$;
2) $\frac{1}{8} < 2^{2-x} \leqslant 16$.

3.6.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x}$;
2) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3^{x+2} - 27}}$.

3.7.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^x - 16}$;
2) $f(x) = \sqrt{1 - 6^{x-4}}$.

3.8.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5$;
2) $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$;
3) $0{,}6^{\frac{x+5}{x^2-9}} < 1$;
4) $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{x-0{,}5} > \sqrt{2}$;
5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3} \leqslant \frac{9}{4}$;
6) $4 \cdot 0{,}5^{x(x+3)} \geqslant 0{,}25^{2x}$.

3.9.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-x} < \frac{9}{49}$;
2) $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$;
3) $0{,}3^{\frac{x^2-4}{x-1}} > 1$;
4) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{x-1} > 9^{-0{,}5}$.

3.10.° Розв'яжіть нерівність:

1) $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x > 5$;
2) $9 \cdot 3^{x-1} + 3^x < 36$;
3) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} > 56$;
4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \geqslant 26$;
5) $2 \cdot 6^x + 3 \cdot 6^{x+3} \leqslant 650$;
6) $\left(\frac{3}{4}\right)^x - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} > \frac{3}{16}$.

3.11.° Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{x+2} - 4 \cdot 3^x < 45$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant 3$;

3) $5^x + 5^{x-1} - 5^{x-2} > 145$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < 1\frac{2}{3}$.

3.12.• Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 > 0$;

2) $4^x + 2^{x+3} - 20 < 0$;

3) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 \leqslant 0$;

4) $0{,}25^x - 12 \cdot 0{,}5^x + 32 \geqslant 0$;

5) $6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x - 4 \leqslant 0$;

6) $25^x + 5^x - 30 \geqslant 0$.

3.13.• Розв'яжіть нерівність:

1) $9^{x+1} - 2 \cdot 3^x - 7 \leqslant 0$;

2) $2^x + 2^{\frac{x}{2}} - 72 \geqslant 0$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 > 0$;

4) $25^x - 26 \cdot 5^x + 25 \leqslant 0$.

3.14.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{5^x - 125}{x^2 - 4x + 4} \leqslant 0$;

2) $\frac{2^x - 1}{x - 1} > 0$.

3.15.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{16 - 4^x}{9x^2 + 12x + 4} \geqslant 0$;

2) $\frac{5^x - 0{,}04}{5 - x} \geqslant 0$.

3.16.• Розв'яжіть нерівність:

1) $2^{3x+1} + 0{,}25^{\frac{1-3x}{2}} - 4^{\frac{3x}{2}} > 192$;

2) $2^{2x-1} + 2^{2x-3} - 2^{2x-5} > 2^{7-x} + 2^{5-x} - 2^{3-x}$.

3.17.• Розв'яжіть нерівність:

1) $3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+3} > 84$;

2) $2 \cdot 16^x - 3 \cdot 2^{4x-1} + 7 \cdot 4^{2x-2} \leqslant 120$.

3.18.• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $3^x - 9 \cdot 3^{-x} - 8 > 0$;

2) $2^{x+3} + 2^{1-x} < 17$;

3) $6^{x+2} + 6^{-x} - 37 \geqslant 0$;

4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} \leqslant \frac{6}{5}$.

3.19.• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{1-x} > 7$;

2) $4^{1-x} - 0{,}5^{1-2x} \geqslant 1$.

3.20.• Розв'яжіть нерівність $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \leqslant 1$.

3.21.• Розв'яжіть нерівність $3^{\sqrt{x}} - 3^{2-\sqrt{x}} \leqslant 8$.

3.22.• Розв'яжіть нерівність:

1) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x < 0$; 2) $5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} \geqslant 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

3.23.• Розв'яжіть нерівність:

1) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x < 0$; 2) $2 \cdot 49^{\frac{1}{x}} - 9 \cdot 14^{\frac{1}{x}} + 7 \cdot 4^{\frac{1}{x}} \geqslant 0$.

3.24.•• Розв'яжіть нерівність $\left(5 - \sqrt{24}\right)^x + \left(5 + \sqrt{24}\right)^x \geqslant 98$.

3.25.•• Розв'яжіть нерівність $\left(\sqrt[3]{4 + \sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{4 - \sqrt{15}}\right)^x < 8$.

3.26.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 \cdot 2^x + 1 > x^2 + 2^x$; 2) $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$.

3.27.•• Розв'яжіть нерівність $x^2 \cdot 3^x + 9 < x^2 + 3^{x+2}$.

3.28.•• Розв'яжіть рівняння $\left|3^x - 1\right| + \left|3^x - 9\right| = 8$.

3.29.•• Розв'яжіть рівняння $\left|2^x - 1\right| + \left|2^x - 2\right| = 1$.

3.30.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $5^x > 6 - x$; 2) $5^x + 12^x < 13^x$.

3.31.•• Розв'яжіть нерівність $10^{4-x} > 7 + x$.

3.32.•• Розв'яжіть нерівність $(2^x - 2)\sqrt{x^2 - x - 6} \geqslant 0$.

3.33.•• Розв'яжіть нерівність $(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0$.

3.34.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(x - a)\sqrt{3 \cdot 2^x - 2 \cdot 3^x} \geqslant 0$.

3.35.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(x - a)\sqrt{6 \cdot 5^x - 5 \cdot 6^x} \leqslant 0$.

3.36.* При яких значеннях параметра a нерівність

$$4^{\cos x} - 2(a - 3) \cdot 2^{\cos x} + a + 3 > 0$$

виконується при всіх дійсних x?

3.37.* При яких значеннях параметра m нерівність

$$(m + 2) \cdot 4^{|x-1|} - 2m \cdot 2^{|x-1|} + 3m + 1 > 0$$

виконується при всіх дійсних x?

4. Логарифм і його властивості

Рівняння $2^x = 4$ і $2^x = 8$ розв'язати легко. Їхніми коренями будуть відповідно числа 2 і 3.

Проте для рівняння $2^x = 5$ одразу вказати його корінь складно.

Виникає природне запитання: чи є взагалі корені у цього рівняння?

Звернемося до графічної інтерпретації. На рисунку 4.1 зображено графіки функцій $y = 2^x$ і $y = 5$. Вони перетинаються в деякій точці A $(x_0;\ 5)$. Отже, рівняння $2^x = 5$ має єдиний корінь x_0.

Проте графічний метод не дозволяє встановити точне значення x_0.

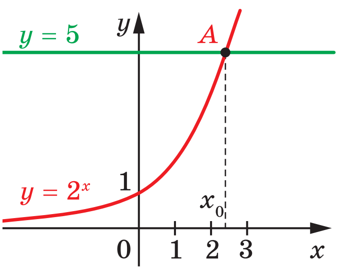


Рис. 4.1

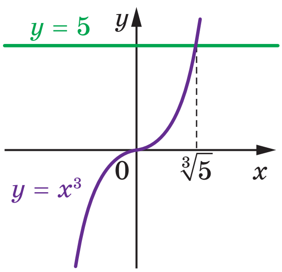


Рис. 4.2

З подібною ситуацією ми зустрічалися, розв'язуючи в 10 класі рівняння $x^3 = 5$. Графічна інтерпретація також показує, що це рівняння має єдиний корінь (рис. 4.2). Потреба називати й записувати цей корінь свого часу призвела до нового поняття «кубічний корінь» і позначення $\sqrt[3]{5}$.

Корінь рівняння $2^x = 5$ домовилися називати **логарифмом числа** 5 **з основою** 2 та позначати $\log_2 5$. Таким чином, число $\log_2 5$ — це показник степеня, до якого треба піднести число 2, щоб отримати число 5. Можна записати:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

Розглянемо рівняння $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$. Оскільки для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $a^x > 0$, то при $b \leqslant 0$ це рівняння не має розв'язків. Якщо $b > 0$, то це рівняння має єдиний корінь (рис. 4.3).

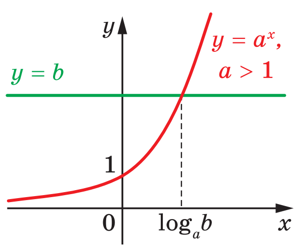


Рис. 4.3

Його називають логарифмом числа b з основою a та позначають $\log_a b$.

Означення. Логарифмом додатного числа b з основою a, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб отримати число b.

Наприклад, $\log_3 9$ — це показник степеня, до якого потрібно піднести число 3, щоб отримати число 9. Маємо: $\log_3 9 = 2$, оскільки $3^2 = 9$.

Ще кілька прикладів:

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$, оскільки $2^{-3} = \frac{1}{8}$;

$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}$, оскільки $25^{\frac{1}{2}} = 5$;

$\log_{17} 17 = 1$, оскільки $17^1 = 17$;

$\log_{100} 1 = 0$, оскільки $100^0 = 1$.

З означення логарифма випливає, що при $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$ виконується рівність

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Її називають **основною логарифмічною тотожністю**.

Наприклад, $7^{\log_7 3} = 3$, $0{,}3^{\log_{0,3} 5} = 5$.

Також з означення логарифма випливає, що при $a > 0$ і $a \neq 1$

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Розглянемо рівність $a^c = b$.

Ви знаєте, що дію знаходження числа b за даними числами a і c називають піднесенням числа a до степеня c.

Дію знаходження числа c за даними числами a і b, де $a > 0$, $a \neq 1$ і $b > 0$, називають **логарифмуванням числа b за основою a**. Справді, $c = \log_a b$.

Зазначимо, що при $a > 0$ ліва частина рівності $a^c = b$ є додатною. Отже, $b > 0$, тому при $b \leqslant 0$ вираз $\log_a b$ не має змісту.

Логарифм з основою 10 називають **десятковим логарифмом**. Замість $\log_{10} b$ записують: $\lg b$.

Використовуючи це позначення та основну логарифмічну тотожність, для кожного $b > 0$ можна записати: $10^{\lg b} = b$.

Розглянемо основні властивості логарифмів.

Теорема 4.1 (логарифм добутку). ***Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

Коротко формулюють: *логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів.*

Доведення. Розглянемо два вирази: $a^{\log_a xy}$ і $a^{\log_a x + \log_a y}$. Доведемо, що вони рівні.

Використовуючи основну логарифмічну тотожність, запишемо:

$$a^{\log_a xy} = xy;$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

Отже, $a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$. Звідси за теоремою 2.1 отримуємо: $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. ◄

Теорема 4.2 (логарифм частки). ***Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Коротко формулюють: *логарифм частки дорівнює різниці логарифмів.*

Скориставшись ідеєю доведення теореми 4.1, доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 4.3 (логарифм степеня). ***Якщо $x > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то для будь-якого $\beta \in \mathbb{R}$ виконується рівність***

$$\boxed{\log_a x^\beta = \beta \log_a x}$$

Доведення. Розглянемо два вирази: $a^{\log_a x^\beta}$ і $a^{\beta \log_a x}$. Доведемо, що вони рівні.

Маємо: $a^{\log_a x^\beta} = x^\beta$;

$$a^{\beta \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^\beta = x^\beta.$$

Отже, $a^{\log_a x^\beta} = a^{\beta \log_a x}$. Звідси за теоремою 2.1 отримуємо: $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$.

Теорема 4.4 (перехід від однієї основи логарифма до іншої). ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Доведення. Розглянемо вираз $\log_a b \cdot \log_c a$. Перетворимо його, скориставшись теоремою 4.3 при $\beta = \log_a b$. Маємо:

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

Отже, $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$. Оскільки $a \neq 1$, то легко показати, що $\log_c a \neq 0$. Тепер можна записати: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. ◄

Наслідок 1. ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, то виконується рівність***

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Доведіть цей наслідок самостійно.

Наслідок 2. ***Якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то для будь-якого $\beta \neq 0$ виконується рівність***

$$\boxed{\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}\log_a b}$$

Доведення. У виразі $\log_{a^\beta} b$ перейдемо до основи a:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^\beta} = \frac{\log_a b}{\beta \log_a a} = \frac{1}{\beta}\log_a b. \text{ ◄}$$

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть рівняння: 1) $3^x = 7$; 2) $0{,}4^{2x-5} = 9$.

Розв'язання. 1) З означення логарифма випливає, що $x = \log_3 7$.

2) Маємо: $2x - 5 = \log_{0,4} 9$; $2x = \log_{0,4} 9 + 5$; $x = \dfrac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$.

Відповідь: 1) $\log_3 7$; 2) $\dfrac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Обчисліть значення виразу: 1) $10^{2+2\lg 7}$; 2) $9^{\log_3 4 - 0,5}$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи властивості степеня та основну логарифмічну тотожність, отримуємо:

$$10^{2+2\lg 7} = 10^2 \cdot 10^{2\lg 7} = 100 \cdot (10^{\lg 7})^2 = 100 \cdot 7^2 = 4900.$$

2) Маємо: $9^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4} : (3^2)^{0,5} =$

$$= (3^{\log_3 4})^2 : 3 = 4^2 : 3 = \frac{16}{3}. \text{ ◄}$$

ПРИКЛАД 3 При якому значенні x виконується рівність:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$; 2) $\log_x 16 = 4$?

Розв'язання. 1) Вираз $\log_{\frac{1}{2}} x$ визначено при $x > 0$. З означення логарифма випливає, що $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = x$, тобто $x = 32$.

2) Вираз $\log_x 16$ визначено при $x > 0$ і $x \neq 1$. Згідно з означенням логарифма маємо: $x^4 = 16$. Звідси $x = 2$. ◄

ПРИКЛАД 4 Обчисліть значення виразу:

1) $\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15$;

2) $\frac{1}{2}\log_{36} 9 + \frac{1}{3}\log_{36} 8$.

Розв'язання. 1) Використовуючи теореми про логарифм добутку та логарифм частки, отримуємо:

$$\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 =$$

$$= \log_2 (20 \cdot 12) - \log_2 15 = \log_2 \frac{20 \cdot 12}{15} = \log_2 16 = 4.$$

2) Маємо: $\frac{1}{2}\log_{36} 9 + \frac{1}{3}\log_{36} 8 = \frac{1}{2}\log_{36} 3^2 + \frac{1}{3}\log_{36} 2^3 =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\log_{36} 3 + \frac{1}{3} \cdot 3\log_{36} 2 = \log_{36} 3 + \log_{36} 2 = \log_{36} 6 = \frac{1}{2}.$$ ◄

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $f(x) = 5^{\log_5 (x-3)}$.

Розв'язання. Дана функція визначена на множині $D(f) = (3; +\infty)$. Оскільки для всіх значень $x \in D(f)$ виконується рівність $5^{\log_5 (x-3)} = x - 3$, то доходимо висновку, що графіком функції f є частина прямої $y = x - 3$ (рис. 4.4). ◄

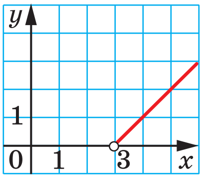


Рис. 4.4

ПРИКЛАД 6 Відомо, що $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$. Знайдіть $\lg 56$.

Розв'язання. Маємо: $\lg 56 = \lg(8 \cdot 7) = \lg 8 + \lg 7 =$

$$= \lg 2^3 + \frac{\log_2 7}{\log_2 10} = 3\lg 2 + \log_2 7 \cdot \lg 2 = 3a + ba.$$ ◄

ВПРАВИ

4.1.° Чи є правильною рівність:

1) $\log_5 125 = \frac{1}{3}$; 3) $\log_{0,01} 10 = 2$; 5) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = \frac{2}{3}$;

2) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; 4) $\lg 0{,}0001 = -4$; 6) $\log_{\sqrt{5}} 0{,}2 = -2$?

4.2.° Знайдіть логарифм з основою 2 числа:

1) 1; 2) 2; 3) 32; 4) $\sqrt{2}$; 5) 0,5; 6) $\frac{1}{8}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $2\sqrt{2}$.

4.3.° Знайдіть логарифм з основою 3 числа:

1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 81; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{243}$; 7) $\sqrt{3}$; 8) $3\sqrt{3}$.

4.4.° Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{2}$ числа:

1) 1; 2) 2; 3) 8; 4) 0,25; 5) $\frac{1}{16}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt{2}$; 8) 64.

4.5.° Знайдіть логарифм з основою $\frac{1}{3}$ числа:

1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 3; 4) 81; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; 6) $\sqrt[3]{3}$.

4.6.° Знайдіть десятковий логарифм числа:

1) 100; 3) 0,1; 5) 0,00001;

2) 1000; 4) 0,01; 6) 0,000001.

4.7.° Чому дорівнює логарифм числа 10 000 з основою:

1) $\sqrt{10}$; 2) 0,1; 3) 1000; 4) 0,0001?

4.8.° Знайдіть логарифм числа 729 з основою:

1) 27; 2) 9; 3) 3; 4) $\frac{1}{27}$; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{3}$.

4.9.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; 3) $\log_2 x = 0$; 5) $\log_x 0{,}25 = -2$;

2) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$; 4) $\log_x 9 = 2$; 6) $\log_x 5 = \sqrt{2}$.

4.10.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6 x = 2$; 3) $\log_{0,2} x = -3$; 5) $\log_x 81 = 4$;

2) $\log_{\sqrt[3]{5}} x = \frac{3}{2}$; 4) $\log_x 6 = 5$; 6) $\log_x 11 = -1$.

4.11.° Розв'яжіть рівняння:

1) $5^x = 10$; 2) $2^{x-3} = 5$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$; 4) $0{,}3^{3x+2} = 7$.

4.12.° Розв'яжіть рівняння:

1) $3^x = 2$; 2) $10^x = \frac{1}{6}$; 3) $7^{x+5} = 9$; 4) $0{,}6^{5x-2} = 20$.

4.13.° Обчисліть значення виразу:

1) $7^{2\log_7 2}$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$; 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8-2}$;

2) $64^{0{,}5\log_2 12}$; 4) $6^{1+\log_6 5}$; 6) $6^{\log_{\frac{1}{6}} 3}$.

4.14.° Обчисліть значення виразу:

1) $4^{\log_2 9}$; 2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}$; 3) $10^{2+\lg 8}$; 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 6-3}$.

4.15.° Знайдіть значення виразу:

1) $\log_6 3 + \log_6 2$; 3) $\frac{\log_5 64}{\log_5 4}$;

2) $\log_5 100 - \log_5 4$; 4) $2\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 16$.

4.16.° Обчисліть значення виразу:

1) $\lg 8 + \lg 12{,}5$; 3) $\frac{\log_7 125}{\log_7 5}$;

2) $\log_3 162 - \log_3 2$; 4) $3\log_6 2 + \frac{3}{4}\log_6 81$.

4.17.° Подайте:

1) число 6 у вигляді логарифма з основою 2;
2) число -1 у вигляді логарифма з основою 0,4;
3) число $\frac{1}{2}$ у вигляді логарифма з основою 9;
4) число $\frac{2}{7}$ у вигляді логарифма з основою 10.

4.18.° Подайте:

1) число 4 у вигляді логарифма з основою $\frac{1}{3}$;
2) число -2 у вигляді логарифма з основою $\sqrt{2}$.

4.19.° Обчисліть значення виразу:

1) $2^{3\log_2 5+4}$;
2) $8^{1-\log_2 3}$;
3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2-3}$;
4) $7^{2\log_7 3+\log_{\sqrt{7}} 4}$;
5) $9^{2\log_3 2+4\log_{81} 2}$;
6) $2\cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 8-2\lg 2}$;
7) $\lg(25^{\log_5 0,8}+9^{\log_3 0,6})$;
8) $27^{\frac{1}{\log_5 3}}+25^{\frac{1}{\log_2 5}}-36^{\frac{1}{\log_9 6}}$.

4.20.° Обчисліть значення виразу:

1) $2^{4\log_2 3-1}$;
2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 9+2}$;
3) $8^{1-\frac{1}{3}\log_2 12}$;
4) $6^{\frac{1}{2}\log_6 9-\log_{\frac{1}{6}} 3}$;
5) $12^{\log_{144} 4+\log_{12} 5}$;
6) $1000^{\frac{1}{2}\lg 25-3\lg 2}$;
7) $\log_{13}\left(100^{\frac{1}{\log_7 10}}+2^{\log_2 15+3}\right)$;
8) $5^{\log_5 4\,\cdot\,\log_2 3}$.

4.21.° Обчисліть значення виразу:

1) $\log_2\log_5\sqrt[8]{5}$;
2) $\log_{\frac{2}{3}}\log_{49} 343$;
3) $\log_9\log_2 8$;
4) $\log_2\sin 135°$;
5) $\log_3 \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}$;
6) $\log_{\frac{1}{2}}\cos 315°$;
7) $\log_4\sin\frac{\pi}{4}$;
8) $\log_{\frac{1}{3}}\mathrm{tg}(-120°)$.

4.22.° Обчисліть значення виразу:

1) $\log_3\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{125}$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}\log_4 64$;
3) $\log_6 \mathrm{tg}\ 225°$;
4) $\log_{\sqrt{3}}\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}$.

4.23.° Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{\log_7 27-2\log_7 3}{\log_7 45+\log_7 0,2}$;
2) $\dfrac{\log_9 125+3\log_9 2}{\log_9 1,2-\log_9 12}$.

4.24.° Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{3\lg 4+\lg 0,5}{\lg 9-\lg 18}$;
2) $\dfrac{\lg 625-8\lg 2}{\frac{1}{2}\lg 256-2\lg 5}$.

4.25.° Обчисліть значення виразу:

1) $\log_7\sin\frac{\pi}{5}\cdot\log_{\sin\frac{\pi}{5}} 49$;
2) $\log_3\cos^2\frac{\pi}{9}\cdot\log_{\cos\frac{\pi}{9}} 9$.

4.26.° Спростіть вираз:

1) $\log_{\sqrt{b}} a \cdot \log_a b^3$;
2) $\log_{\sqrt[3]{2}} 5 \cdot \log_5 8$.

4.27.• Доведіть рівність:

1) $\log_b a \cdot \log_d c = \log_b c \cdot \log_d a$;
2) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

4.28.• Обчисліть значення виразу $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2}\log_5 4} + 36\log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$.

4.29.• Обчисліть значення виразу $6^{\frac{6}{\log_{\sqrt{2}} 6} + \frac{1}{3}\log_6 27} - 12\log_7 \sqrt[5]{7\sqrt[4]{7}}$.

4.30.• Спростіть вираз $\dfrac{1-\log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1)\log_a \dfrac{a}{b}}$.

4.31.• Спростіть вираз $\dfrac{\log_a ab(\log_b a - 1 + \log_a b)}{1+\log_a^3 b}$.

4.32.• Доведіть, що значення виразу $\log_{7+4\sqrt{3}}(7-4\sqrt{3})$ є цілим числом.

4.33.• Доведіть, що значення виразу $\log_{9-4\sqrt{5}}(9+4\sqrt{5})$ є цілим числом.

4.34.• Члени геометричної прогресії є додатними числами. Доведіть, що логарифми послідовних членів цієї прогресії з будь-якою основою утворюють арифметичну прогресію.

4.35.• Побудуйте графік функції:

1) $y = 3^{\log_3 (x+3)}$;
2) $y = 5^{-\log_5 x}$;
3) $y = 2^{\log_2 x^2}$;
4) $y = \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$;
5) $y = \log_{\frac{1}{2}} \log_{3-x} (3-x)^4$;
6) $y = 2^{\log_4 x^2}$.

4.36.• Побудуйте графік функції:

1) $y = 7^{\log_7 (x+2)}$;
2) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2 x^2}$;
3) $y = \log_3 \log_{x+1} (x+1)^{27}$;
4) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x-2) \cdot \log_{x-2} \dfrac{1}{3}$;
5) $y = \log_x x$;
6) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} (x-1)}$.

4.37.• Доведіть, що $\log_2 3$ — ірраціональне число.

4.38. Доведіть, що $\log_3 5$ — ірраціональне число.

4.39. Наведіть приклад таких ірраціональних чисел a і b, що число a^b — ціле.

4.40. Наведіть приклад такого раціонального числа a та ірраціонального числа b, що число a^b — ціле.

4.41. Обчисліть $\frac{1}{\log_2 20!}+\frac{1}{\log_3 20!}+\ldots+\frac{1}{\log_{20} 20!}$.

4.42. При яких значеннях x є правильною рівність:

1) $\log_2(1-x^2)=\log_2(1-x)+\log_2(1+x)$;

2) $\lg\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}=\lg(x^2-2x+1)-\lg(x^2+1)$;

3) $\log_5(x^2-4x+4)=2\log_5(2-x)$;

4) $\log_5(x^2-4x+4)=2\log_5|x-2|$?

4.43. Чому дорівнює значення виразу:

1) $\lg\sin 1°\cdot\lg\sin 2°\cdot\lg\sin 3°\cdot\ldots\cdot\lg\sin 89°\cdot\lg\sin 90°$;

2) $\lg\operatorname{tg}10°\cdot\lg\operatorname{tg}15°\cdot\lg\operatorname{tg}20°\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}75°\cdot\lg\operatorname{tg}80°$;

3) $\lg(\operatorname{tg}30°\cdot\operatorname{tg}32°\cdot\operatorname{tg}34°\cdot\ldots\cdot\operatorname{tg}58°\cdot\operatorname{tg}60°)$;

4) $\lg\operatorname{tg}1°+\lg\operatorname{tg}2°+\lg\operatorname{tg}3°+\ldots+\lg\operatorname{tg}88°+\lg\operatorname{tg}89°$?

4.44. Спростіть вираз $\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\ldots\cdot\log_{10} 9$.

4.45. Обчисліть значення виразу $\log_4 5\cdot\log_5 6\cdot\log_6 7\cdot\log_7 32$.

4.46. Побудуйте графік функції:

1) $y=\lg\operatorname{tg}x+\lg\operatorname{ctg}x$; 2) $y=\log_x 1$; 3) $y=10^{\frac{1}{\log_x 10}}$.

4.47. Побудуйте графік функції:

1) $y=x^{\log_x 2x}$; 2) $y=\frac{\lg(x^2+1)}{\lg(x^2+1)}$.

4.48. Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівність:

1) $\lg xy=\lg x+\lg y$;

2) $\lg xy=\lg(-x)+\lg(-y)$;

3) $\lg x^2+\lg y^2=2\lg|x|+2\lg|y|$;

4) $\log_{x^2} y^2=\log_x(-y)$.

4.49. Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких задовольняють рівність:

1) $\lg\frac{x}{y}=\lg(-x)-\lg(-y)$;

2) $\lg x^2+\lg y^2=2\lg x+2\lg(-y)$;

3) $\log_{x^2} y^2=\log_x y$.

4.50.•• Нехай $1 < a < b$. Доведіть, що графік функції $y = b^x$ можна отримати з графіка функції $y = a^x$ шляхом стискання до осі ординат.

4.51.•• Виразіть $\log_{ab} x$ через $\log_a x$ і $\log_b x$.

4.52.•• Доведіть, що $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$.

4.53.•• Знайдіть $\log_{ab} b$, якщо $\log_{ab} a = 4$.

4.54.•• Знайдіть $\log_{45} 60$, якщо $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$.

4.55.•• Знайдіть:

1) $\log_8 9$, якщо $\log_{12} 18 = a$;
2) $\log_5 6$, якщо $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$;
3) $\log_{150} 200$, якщо $\log_{20} 50 = a$, $\log_3 20 = b$.

4.56.•• Знайдіть:

1) $\log_{30} 8$, якщо $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$;
2) $\log_{60} 27$, якщо $\log_{60} 2 = a$, $\log_{60} 5 = b$;
3) $\log_{175} 56$, якщо $\log_{14} 7 = a$, $\log_5 14 = b$.

5. Логарифмічна функція та її властивості

Оберемо додатне число a, відмінне від 1. Кожному додатному числу x можна поставити у відповідність число $\log_a x$. Тим самим буде задано функцію $f(x) = \log_a x$ з областю визначення $D(f) = (0; +\infty)$.

Цю функцію називають **логарифмічною**.

Покажемо, що логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$ є оберненою до показникової функції $g(x) = a^x$.

Для будь-якого $y_0 \in \mathbb{R}$ рівняння $\log_a x = y_0$ має корінь (він дорівнює a^{y_0}).

Це означає, що *областю значень логарифмічної функції є множина* $\mathbb{R}$.

Маємо: $D(f) = E(g) = (0; +\infty)$;
$E(f) = D(g) = \mathbb{R}$.

Для будь-якого $x \in D(f) = (0; +\infty)$ виконується рівність $a^{\log_a x} = x$. Іншими словами, $g(f(x)) = x$ для всіх $x \in D(f)$. Сказане означає, що f і g — взаємно обернені функції.

Оскільки графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$, то, користуючись графіком показникової функції

$y=a^x$, можна побудувати графік логарифмічної функції $y=\log_a x$ (рис. 5.1).

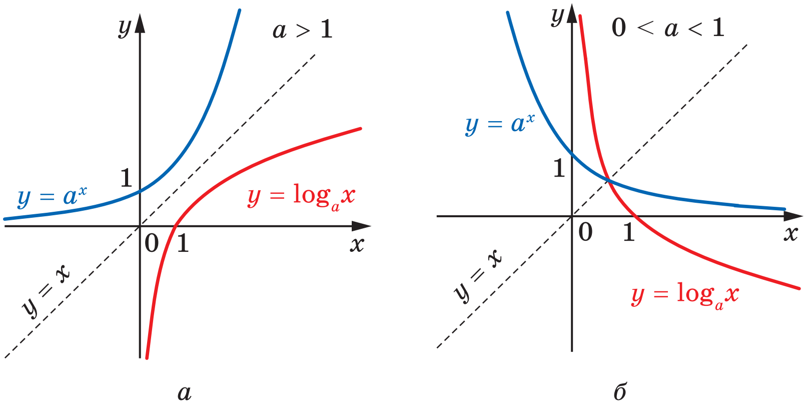


Рис. 5.1

Графік функції $y=a^x$ має з віссю ординат одну спільну точку. Це означає, що графік оберненої функції $y=\log_a x$ має єдину спільну точку з віссю абсцис.

- Тому *функція* $y=\log_a x$ *має єдиний нуль* $x=1$.

Коли функція є зростаючою (спадною), то обернена до неї функція також зростаюча (спадна). Показникова функція $y=a^x$ є зростаючою при $a>1$ та спадною при $0<a<1$.

- Тому *функція* $y=\log_a x$ *є зростаючою при* $a>1$ *та спадною при* $0<a<1$.
- Оскільки функція $y=\log_a x$ має єдиний нуль та є зростаючою (при $a>1$) або спадною (при $0<a<1$), то *функція* $y=\log_a x$ *має два проміжки знакосталості.*
  Якщо $a>1$, *то* $y<0$ *при* $x\in(0;\ 1)$, $y>0$ *при* $x\in(1;\ +\infty)$;
  якщо $0<a<1$, *то* $y<0$ *при* $x\in(1;\ +\infty)$, $y>0$ *при* $x\in(0;\ 1)$.
- Оскільки логарифмічна функція є зростаючою (при $a>1$) або спадною (при $0<a<1$), то вона *не має точок екстремуму*.

Коли визначена на деякому проміжку функція є оборотною та неперервною, то обернена до неї функція також є неперервною. Показникова функція $y=a^x$ є неперервною.

- Тому *функція* $y=\log_a x$ *є неперервною.*
- *Логарифмічна функція є диференційовною.* Детальніше про похідну логарифмічної функції ви дізнаєтеся в п. 8.
- *Графік функції* $y=\log_a x$ *має вертикальну асимптоту* $x=0$, *коли* x *прямує до нуля справа*.

У таблиці наведено властивості функції $y = \log_a x$, вивчені в цьому пункті.

Область визначення	$(0; +\infty)$
Область значень	$\mathbb{R}$
Нулі функції	$x = 1$
Проміжки знакосталості	Якщо $a > 1$, то $y < 0$ при $x \in (0; 1)$, $y > 0$ при $x \in (1; +\infty)$; якщо $0 < a < 1$, то $y < 0$ при $x \in (1; +\infty)$, $y > 0$ при $x \in (0; 1)$
Зростання / спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною
Неперервність	Неперервна
Диференційовність	Диференційовна
Асимптоти	Пряма $x = 0$ — вертикальна асимптота, коли x прямує до нуля справа

ПРИКЛАД 1 Порівняйте з одиницею основу a логарифма, коли відомо, що $\log_a 5 < \log_a 4$.

Розв'язання. Якщо припустити, що $a > 1$, то функція $y = \log_a x$ є зростаючою. Тому $\log_a 5 > \log_a 4$. Але за умовою це не так. Отже, $a < 1$. ◄

ПРИКЛАД 2 Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \log_{0,3}(x^2 + 3x)$;

2) $f(x) = \dfrac{\lg(9 - x^2)}{\lg(x + 2)}$;

3) $f(x) = \log_{x-4}(16 - x)$.

Розв'язання. 1) Оскільки областю визначення логарифмічної функції є множина додатних чисел, то областю визначення даної функції є множина розв'язків нерівності $x^2 + 3x > 0$.

Маємо: $x(x + 3) > 0$. Отже, $D(f) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

2) Вираз $\lg(9 - x^2)$ має зміст при $9 - x^2 > 0$, вираз $\lg(x + 2)$ — при $x + 2 > 0$. Крім того, знаменник дробу не може дорівнювати нулю, тому $\lg(x + 2) \neq 0$. Таким чином, область визначення $D(f)$ даної функції є множиною розв'язків системи

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1. \end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} x^2 < 9, \\ x > -2, \\ x \neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} -3 < x < 3, \\ x > -2, \\ x \neq -1. \end{cases}$ Звернувшись до рисунка 5.2, доходимо висновку, що остання система рівносильна сукупності $\left[\begin{array}{l} -2 < x < -1, \\ -1 < x < 3. \end{array}\right.$

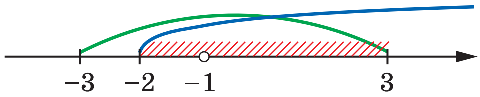


Рис. 5.2

Отже, $D(f) = (-2; -1) \cup (-1; 3)$.

3) Область визначення даної функції знайдемо, розв'язавши систему нерівностей $\begin{cases} 16 - x > 0, \\ x - 4 > 0, \\ x - 4 \neq 1. \end{cases}$

Тоді $\begin{cases} x < 16, \\ x > 4, \\ x \neq 5; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} 4 < x < 5, \\ 5 < x < 16. \end{array}\right.$

Звідси $D(f) = (4; 5) \cup (5; 16)$. ◄

ПРИКЛАД 3 Порівняйте:

1) $\log_{0,2} 6$ і $\log_{0,2} 7$; 2) $\log_6 7$ і $\log_7 6$; 3) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$ і 0; 4) $\log_{\frac{1}{6}} 38$ і -2.

Розв'язання. 1) Оскільки логарифмічна функція $y = \log_{0,2} x$ є спадною, то $\log_{0,2} 6 > \log_{0,2} 7$.

2) Маємо: $\log_6 7 > \log_6 6$, тобто $\log_6 7 > 1$. Разом з тим $\log_7 7 > \log_7 6$, тобто $1 > \log_7 6$. Отже, $\log_6 7 > 1 > \log_7 6$.

3) Ураховуючи, що $0 < \frac{\pi}{4} < 1$, маємо: $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < \log_{\frac{\pi}{4}} 1$.

Отже, $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < 0$.

4) Маємо: $-2 = \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{6}} 36$.

Оскільки $\log_{\frac{1}{6}} 38 < \log_{\frac{1}{6}} 36$, то $\log_{\frac{1}{6}} 38 < -2$. ◄

ПРИКЛАД 4 Порівняйте $\log_2 3$ і $\log_3 5$.

Розв'язання. Доведемо, що $\log_2 3 > \frac{3}{2}$.

Оскільки $\frac{3}{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \log_2 \sqrt{8}$ і $3 > \sqrt{8}$, то $\log_2 3 > \frac{3}{2}$. Аналогічно доводимо, що $\log_3 5 < \frac{3}{2}$. Отже, $\log_2 3 > \log_3 5$. ◄

Ви знаєте, що функції можна означати, описуючи їхні характеристичні властивості. Наприклад, усі логарифмічні функції $f(x) = \log_a x$ мають таку властивість:

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y, \text{ де } x > 0,\ y > 0,$$

тобто задовольняють таке рівняння Коші:

$$f(xy) = f(x) + f(y), \text{ де } x > 0,\ y > 0.$$

Можна довести (див. задачі 5.37, 5.38), що серед визначених на проміжку $(0; +\infty)$ функцій, неперервних і відмінних від нульової константи, записане рівняння задовольняють лише функції виду $f(x) = \log_a x$. Тому рівняння Коші можна використовувати для означення логарифмічної функції.

Логарифмічна функція є математичною моделлю багатьох процесів, які відбуваються в природі або пов'язані з діяльністю людини.

Звернемося до прикладів, які ми наводили в кінці п. 1.

Якщо колонія бактерій за рівні проміжки часу збільшує свою масу m в одну й ту саму кількість разів, то за допомогою функції $t = \log_a m$ можна визначити час, коли маса колонії досягне певної величини.

Логарифмічна функція дозволяє визначити час, за який кількість грошей на банківському рахунку збільшиться вдвічі, якщо банк щодня збільшує суму вкладу на p відсотків. Цей час дорівнює $\log_{\left(1+\frac{p}{100}\right)} 2$ (доведіть це самостійно).

Аналогічним чином логарифмічна функція дає змогу визначити період піврозпаду радіоактивної речовини.

ВПРАВИ

5.1.° Порівняйте з одиницею основу логарифма, якщо:

1) $\log_a 0,5 > \log_a 0,4$;
2) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$;
3) $\log_a \sqrt{5} < \log_a \sqrt{6}$;
4) $\log_a \frac{\pi}{4} < \log_a \frac{\pi}{3}$.

5.2.° Додатним чи від'ємним числом є:

1) $\log_{0,5} 0,6$; 2) $\log_{0,3} 3$; 3) $\log_2 0,27$; 4) $\log_\pi 3$?

5.3.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному відрізку:

1) $y = \log_2 x$, $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$;
2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\left[\frac{1}{16}; 8\right]$;
3) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$, $\left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16}\right]$.

5.4.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному відрізку:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $\left[\frac{1}{9}; 3\right]$;
2) $y = \lg x$, $[1; 1000]$.

5.5.° На якому проміжку найбільше значення функції $y = \log_2 x$ дорівнює 3, а найменше дорівнює −1?

5.6.° На якому проміжку найбільше значення функції $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ дорівнює −1, а найменше дорівнює −2?

5.7.° Порівняйте:

1) $\log_9 2$ і 3;
2) $\log_{\frac{1}{5}} 27$ і −2;
3) $\log_{\sqrt{3}} 26$ і 6;
4) $\log_{16} 0,1$ і $-\frac{3}{4}$.

5.8.° Порівняйте:

1) $\log_{0,1} 12$ і 1; 2) $\log_4 3$ і $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$ і $\log_{125} 30$.

5.9.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \log_2 (x - 1)$;
2) $y = \log_2 x + 3$;
3) $y = -\log_2 x$;
4) $y = \log_2 (-x)$.

5.10.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1)$;
2) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 2$;
3) $y = -\log_{\frac{1}{3}} x$;
4) $y = \log_{\frac{1}{3}} (-x)$.

5.11.° Нехай $1 < a < b$. Доведіть, що графік функції $y = \log_b x$ можна отримати з графіка функції $y = \log_a x$ шляхом стискання до осі абсцис.

5.12.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_2 x = 3 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 1$; 3) $\log_2 x = -x - 0,5$.

5.13.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = x + \frac{1}{2}$; 2) $\log_3 x = 4 - x$.

5.14.° Установіть графічно кількість коренів рівняння:

1) $\log_2 x = -x$; 2) $\log_3 x = -x^2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = \sqrt{x}$.

5.15.° Скільки коренів має рівняння:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_2 x$; 2) $\log_2 x = \frac{1}{x}$?

5.16.• Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число:

1) $\log_3 10$; 2) $\log_2 5$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 7$; 4) $\log_{0,1} 2$?

5.17.• Між якими двома послідовними цілими числами міститься на координатній прямій число: 1) $\log_2 29$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

5.18.• Порівняйте:

1) $\log_4 5$ і $\log_5 4$; 2) $\log_{0,2} 0,1$ і $\log_{0,1} 0,2$.

5.19.• Порівняйте:

1) $\log_{1,7} 1,8$ і $\log_{1,8} 1,7$; 2) $\log_{0,2} 0,3$ і $\log_{0,3} 0,2$.

5.20.• Порівняйте $\log_2 3 + \log_3 2$ і 2.

5.21.• Доведіть, що $\log_{\cos 1} 4 + \log_4 \cos 1 < -2$.

5.22.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \lg x^2$;

2) $y = \lg(1 - \sin x)$;

3) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(1 + x^2)}$;

4) $y = \sqrt{\lg \cos x}$;

5) $y = \frac{1}{\log_6(x-3)} + \sqrt{6 - x}$;

6) $y = \frac{4}{\lg(x+2)} + \lg(3 - x)$;

7) $y = \sqrt{\frac{(x+1)(3-x)}{\lg(x^2+1)}}$;

8) $y = \log_5(x^2 - 4x + 3) + \frac{1}{\log_5(7-x)}$;

9) $y = \lg(6x - x^2) + \frac{1}{\lg(3-x)}$;

10) $y = \log_{x+3}(x^2 + x)$;

11) $y = \log_2 \cos x$;

12) $y = \log_3 \operatorname{tg} x$.

5.23.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{1}{\lg(x^2+1)}$; 2) $y = \lg(1 + \sin x)$;

3) $y = \sqrt{\lg(1 + x^2)}$;

4) $y = \sqrt{\lg \sin x}$;

5) $y = \lg(x + 8) - \dfrac{5}{\lg(-x - 1)}$;

6) $y = \lg(10x - x^2) - \dfrac{1}{\lg(8 - x)}$;

7) $y = \dfrac{x}{\lg(4 - x^2)}$;

8) $y = \lg(9x - x^2) - \dfrac{1}{\lg(5 - x)}$;

9) $y = \log_{2-x}(8 + 7x - x^2)$;

10) $y = \sqrt{\dfrac{(x + 5)(2 - x)}{\lg(x^2 + 1)}}$;

11) $y = \lg \sin x$.

5.24.• Знайдіть область значень функції:

1) $y = \log_3(4 + \sin x)$; 2) $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}(1 - x^2)$.

5.25.• Знайдіть область значень функції:

1) $y = \log_2(5 + 3\cos x)$; 2) $y = \log_4(4x - x^2)$.

5.26.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$;

2) $y = \log_{\frac{1}{2}} |x|$;

3) $y = \dfrac{|\log_{0,2} x|}{\log_{0,2} x}$;

4) $y = \sqrt{\log_3^2 x}\,\log_x 3$.

5.27.• Побудуйте графік функції:

1) $y = |\log_3 x|$; 2) $y = \log_3 |x|$; 3) $y = \dfrac{\log_2 x}{\sqrt{\log_2^2 x}}$.

5.28.•• Знайдіть найбільше значення функції:

1) $y = \log_{0,1}(x^2 + 100)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 14)$.

5.29.•• Знайдіть найменше значення функції:

1) $y = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x^2 + 8}$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} \dfrac{1}{x^2 - 4x + 7}$.

5.30.•• Дослідіть на парність функцію $y = \lg\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$.

5.31.•• Дослідіть на парність функцію $y = \lg\left(\sqrt{x^2 + 1} + x\right)$.

5.32.•• При яких значеннях параметра a найменше значення функції $f(x) = 9\log_2^2 x - 30\log_2 x + 61 - 9a^2$ на відрізку $[1; 4]$ є додатним числом?

5.33.•• При яких значеннях параметра a найбільше значення функції $f(x) = -4\log_3^2 x + 20\log_3 x - 9a^2$ на відрізку $[3; 27]$ є від'ємним числом?

5.34.•• Знайдіть першу цифру після коми в десятковому записі числа lg 2.

5.35.•• Порівняйте числа $\log_2 3$ і $\log_3 7$.

5.36.•• Відомо, що $\lg 3 = 0{,}4771\ldots$. Скільки цифр містить десятковий запис числа 3^{1000}?

5.37.* Про визначену на проміжку $(0; +\infty)$ функцію f відомо, що $f(2) = 1$ і для всіх $x > 0$, $y > 0$ виконується рівність $f(xy) = f(x) + f(y)$. Знайдіть: 1) $f(1)$; 2) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; 3) $f(4)$; 4) $f(1024)$; 5) $f\left(\sqrt[3]{2}\right)$.

5.38.* Про визначену на проміжку $(0; +\infty)$ і неперервну функцію f відомо, що $f(2) = 1$ і для всіх $x > 0$, $y > 0$ виконується рівність $f(xy) = f(x) + f(y)$. Доведіть, що $f(x) = \log_2 x$.

5.39.* Для всіх $n \in \mathbb{N}$ обчисліть суму

$$S = [\log_2 1] + [\log_2 2] + [\log_2 3] + \ldots + [\log_2 2^n].$$

5.40.* Для всіх $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, доведіть, що

$$\left[\sqrt{n}\right] + \left[\sqrt[3]{n}\right] + \left[\sqrt[4]{n}\right] + \ldots + \left[\sqrt[n]{n}\right] = [\log_2 n] + [\log_3 n] + [\log_4 n] + \ldots + [\log_n n].$$

6. Логарифмічні рівняння

Рівняння виду $\log_a x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають **найпростішим логарифмічним рівнянням.**

Оскільки графіки функцій $y = \log_a x$ і $y = b$ перетинаються в одній точці (рис. 6.1), то найпростіше логарифмічне рівняння має єдиний корінь при будь-якому b. Цей корінь можна знайти, використовуючи означення логарифма. Маємо: $x = a^b$.

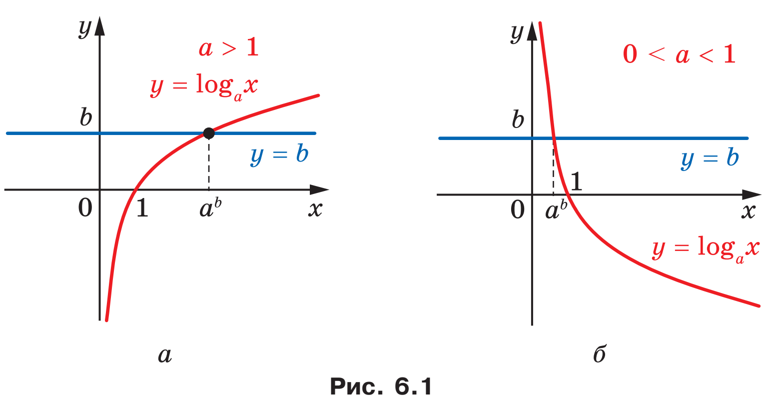


Рис. 6.1

ПРИКЛАД 1 Розв’яжіть рівняння $\log_3(3x-1)=2$.

Розв’язання. За означенням логарифма можна записати: $3x-1=3^2$. Звідси $3x-1=9$; $x=\frac{10}{3}$.

Відповідь: $\frac{10}{3}$. ◄

Розв’язане рівняння є окремим випадком рівняння виду $\log_a f(x)=b$, де $a>0$, $a\neq 1$. Міркуючи, як у прикладі 1, можна показати, що це рівняння рівносильне рівнянню $f(x)=a^b$.

Під час розв’язування багатьох логарифмічних рівнянь застосовують таку теорему.

Теорема 6.1. ***Нехай*** $a>0$, $a\neq 1$. ***Якщо*** $\log_a x_1=\log_a x_2$, ***то*** $x_1=x_2$, ***і навпаки, якщо*** $x_1>0$, $x_2>0$ ***і*** $x_1=x_2$, ***то*** $\log_a x_1=\log_a x_2$.

Оскільки логарифмічна функція є зростаючою або спадною, то для доведення цієї теореми можна скористатися ідеєю доведення теореми 2.1. Переконайтеся в цьому самостійно.

Наслідок. ***Нехай*** $a>0$, $a\neq 1$. ***Рівняння виду*** $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ ***рівносильне будь-якій із систем***

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Вибір відповідної системи, як правило, пов’язаний з тим, яку з нерівностей, $f(x)>0$ чи $g(x)>0$, розв’язати легше.

Скориставшись ідеєю доведення наслідку з теореми 2.1, доведіть наслідок з теореми 6.1 самостійно.

Тепер розв’язання рівняння прикладу 1 можна подати й так:

$\log_3(3x-1)=2\log_3 3$;

$\log_3(3x-1)=\log_3 3^2$;

$3x-1=3^2$; $x=\frac{10}{3}$.

ПРИКЛАД 2 Розв’яжіть рівняння $\lg(x^2-4x+2)=\lg(2x-3)$.

Розв’язання. Дане рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} x^2-4x+2=2x-3, \\ 2x-3>0. \end{cases}$$

Маємо: $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x > \dfrac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5, \end{array}\right. \\ x > \dfrac{3}{2}. \end{cases}$ Звідси $x = 5$.

Відповідь: 5. ◀

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть рівняння $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$.

Розв'язання. Природно перетворити це рівняння так:

$$\log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3.$$

Звідси $(2x - 1)(x - 2) = 3^3$; $2x^2 - 5x - 25 = 0$; $x = 5$ або $x = -\dfrac{5}{2}$.

Легко переконатися, що число $-\dfrac{5}{2}$ не є коренем даного рівняння (не входить до його області визначення), а число 5 є коренем даного рівняння.

Таким чином, дане рівняння розв'язано методом наслідків.

Відповідь: 5. ◀

Звернемо увагу, що зроблений під час розв'язування прикладу 3 перехід від рівняння $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$ до рівняння $\log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3$ не був рівносильним і призвів до появи стороннього кореня.

Справді, область визначення початкового рівняння задається системою нерівностей $\begin{cases} 2x - 1 > 0, \\ x - 2 > 0, \end{cases}$ множиною розв'язків якої є проміжок $(2; +\infty)$. Замінивши вираз $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2)$ на вираз $\log_3((2x - 1)(x - 2))$, ми розширили область визначення початкового рівняння, оскільки область визначення виразу $\log_3((2x - 1)(x - 2))$ задається нерівністю $(2x - 1)(x - 2) > 0$, множиною розв'язків якої є $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Отже, розширення області визначення рівняння від множини $(2; +\infty)$ до множини $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$ і стало причиною появи стороннього кореня $-\dfrac{5}{2}$.

Насправді рівняння $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$ рівносильне системі $\begin{cases} \log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3, \\ 2x - 1 > 0, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$

Тому рівняння прикладу 3 можна було розв'язати методом рівносильних переходів.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $\log_{x^2} 16 + \log_{2x} 64 = 3.$

Розв'язання. Перейдемо до логарифмів з основою 2:

$$\frac{\log_2 16}{\log_2 x^2} + \frac{\log_2 64}{\log_2 2x} = 3.$$

Оскільки з умови випливає, що $x > 0$, то $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$. Далі маємо:

$$\frac{4}{2\log_2 x} + \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 x} = 3.$$

Нехай $\log_2 x = t$, тоді отримаємо: $\frac{2}{t} + \frac{6}{1+t} = 3.$

Звідси $t = 2$ або $t = -\frac{1}{3}$. Маємо:

$$\left[\begin{aligned} &\log_2 x = 2, \\ &\log_2 x = -\frac{1}{3}; \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &x = 2^2, \\ &x = 2^{-\frac{1}{3}}. \end{aligned}\right.$$

Відповідь: 4; $2^{-\frac{1}{3}}$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $x^{\frac{\lg x + 2}{3}} = 10^{2 + \lg x}$.

Розв'язання. Оскільки на області визначення рівняння, тобто на множині $(0; +\infty)$, обидві його частини набувають додатних значень, то можемо записати рівняння, рівносильне даному:

$$\lg x^{\frac{\lg x + 2}{3}} = \lg 10^{2 + \lg x}.$$

Далі маємо: $\frac{\lg x + 2}{3} \cdot \lg x = 2 + \lg x.$

Нехай $\lg x = t$. Тоді $\frac{(t+2)\,t}{3} = 2 + t.$

Звідси $\left[\begin{aligned} &t = -2, \\ &t = 3; \end{aligned}\right.$ $\left[\begin{aligned} &\lg x = -2, \\ &\lg x = 3; \end{aligned}\right.$ $\left[\begin{aligned} &x = 10^{-2}, \\ &x = 10^3; \end{aligned}\right.$ $\left[\begin{aligned} &x = 0{,}01, \\ &x = 1000. \end{aligned}\right.$

Відповідь: 0,01; 1000. ◄

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть рівняння

$$2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0. \qquad (1)$$

Розв'язання. Зазначимо, що перехід від рівняння (1) до рівняння

$$2\log_3(x-2)+2\log_3(x-4)=0 \qquad (2)$$

може призвести до втрати розв'язків.

Справді, областю визначення початкового рівняння є множина $(2;4)\cup(4;+\infty)$, а область визначення рівняння (2) — це множина $(4;+\infty)$. Отже, такий перехід вилучає з області визначення початкового рівняння множину (2; 4), яка може містити корені рівняння (1).

Насправді рівняння (1) рівносильне такому рівнянню:

$$2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0.$$

Звідси $\log_3(x-2)+\log_3|x-4|=0$.

Це рівняння рівносильне сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ \log_3(x-2)+\log_3(4-x)=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \log_3(x-2)+\log_3(x-4)=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Далі маємо: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ \log_3((x-2)(4-x))=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \log_3((x-2)(x-4))=0;\end{cases}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ (x-2)(4-x)=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ (x-2)(x-4)=1;\end{cases}\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ x^2-6x+9=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ x^2-6x+7=0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ x=3,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \left[\begin{array}{l}x=3-\sqrt{2},\\ x=3+\sqrt{2};\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=3+\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Відповідь: 3; $3+\sqrt{2}$. ◄

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть рівняння $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}$.

Розв'язання. Із ключової задачі 4.27 випливає, що $5^{\lg x}=x^{\lg 5}$. Тоді можна записати:

$$2\cdot5^{\lg x}=50;\ 5^{\lg x}=25;$$
$$\lg x=2;\ x=100.$$

Відповідь: 100. ◄

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} \log_3 (x-2) = 0.$

Розв'язання. Помилково вважати, що рівняння виду $f(x) \cdot g(x) = 0$ рівносильне сукупності $\left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0. \end{array}\right.$ При такому переході існує небезпека отримати у відповіді сторонні корені. Наприклад, немає гарантії, що всі корені рівняння $f(x)=0$ належать області визначення функції g.

Насправді рівняння $f(x) \cdot g(x) = 0$ рівносильне системі

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x)=0, \\ g(x)=0, \end{array}\right. \\ x \in D(f), \\ x \in D(g). \end{cases}$$

Скориставшись цим, запишемо систему, рівносильну рівнянню $\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} \log_3 (x-2) = 0:$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3 (x-2)=0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ x > 2, \\ \sin x \geqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Єдиним коренем першого рівняння сукупності є число 3. Оскільки $\sin 3 < \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (рис. 6.2), то $x = 3$ не є коренем початкового рівняння.

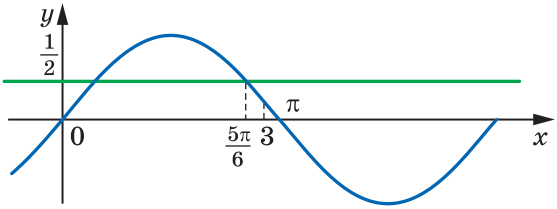


Рис. 6.2

Усі числа виду $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z},$ є коренями другого рівняння сукупності. Серед них потрібно вибрати лише ті, які задовольняють умову $x > 2$. Для цього достатньо вимагати, щоб $n \in \mathbb{N}$.

Відповідь: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{N}$.

ПРИКЛАД 9 Розв'яжіть рівняння $(x+1)\log_3^2 x + 4x\log_3 x - 16 = 0$.

Розв'язання. Розглянемо це рівняння як квадратне відносно $\log_3 x$. Тоді отримаємо: $\left[\begin{array}{l}\log_3 x = -4, \\ \log_3 x = \frac{4}{x+1};\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \frac{1}{81}, \\ \log_3 x = \frac{4}{x+1}.\end{array}\right.$

Очевидно, що $x = 3$ — корінь другого рівняння сукупності. Оскільки функція $y = \log_3 x$ є зростаючою, а функція $y = \frac{4}{x+1}$ на множині $(0; +\infty)$ є спадною, то рівняння, що розглядається, більше коренів не має.

Відповідь: $\frac{1}{81}$; 3. ◄

ПРИКЛАД 10 Розв'яжіть рівняння

$$(1 - 4x^2 + 4x)\log_3(\sin^2 \pi x + 2) = 2.$$

Розв'язання. Маємо: $(2 - (2x - 1)^2)\log_3(\sin^2 \pi x + 2) = 2$.

Очевидно, що $2 - (2x-1)^2 \leqslant 2$, $0 < \log_3(\sin^2 \pi x + 2) \leqslant 1$.

Тому $(2 - (2x-1)^2)\log_3(\sin^2 \pi x + 2) \leqslant 2$.

У цій нерівності рівність досягається лише за умови

$$\begin{cases} 2 - (2x-1)^2 = 2, \\ \log_3(\sin^2 \pi x + 2) = 1. \end{cases}$$

Звідси $x = \frac{1}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$. ◄

ВПРАВИ

6.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_5(3x - 5) = \log_5(x - 3)$; 2) $\lg(x^2 + 2) = \lg(3x + 6)$.

6.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_9(4x-6)=\log_9(x-2)$; 2) $\log_{\frac{1}{4}}(x+7)=\log_{\frac{1}{4}}(x^2+5)$.

6.3.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2\sqrt{x}-\log_2\frac{1}{x}=6$;
2) $\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x=11$;
3) $\log_7\log_4(x-2)=0$;
4) $\log_4\log_3\log_2 x=\frac{1}{2}$.

6.4.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3\frac{1}{x}+\log_3\sqrt[3]{x}=\frac{4}{3}$;
2) $\log_5 x-\log_{25}x+\log_{625}x=\frac{3}{4}$;
3) $\lg\lg\lg x=0$.

6.5.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_2(3^{5x-3}+1)=2$;
2) $\log_3(3^{x-1}+6)=x$;
3) $\log_2(2^x+7)=3-x$;
4) $\log_6(6^{-x}-5)=x+1$.

6.6.° Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6(6^{x+1}-30)=x$; 2) $\log_5(6-5^x)=1-x$.

6.7.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\lg(x^2-2x)=\lg(2x+12)$;
2) $\log_{0,5}(x^2+3x-10)=\log_{0,5}(x-2)$;
3) $2\log_7(-x)=\log_7(x+2)$;
4) $2\log_8(1-x)=\log_8(2,5x+1)$.

6.8.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_6(9-x^2)=\log_6(1-2x)$;
2) $\lg(x^2+2x-3)=\lg(2x^2-2)$;
3) $\log_{0,7}(2x^2-9x+4)=2\log_{0,7}(x+2)$;
4) $2\log_2(-x)-\log_2(3x+8)=1$.

6.9.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_5(25^x-2\cdot5^x)=2\log_{25}15$;
2) $\log_{\sqrt{5}}(16^x-6)=2+\log_{\sqrt{5}}(4^x-2)$;
3) $x\lg 3-1=2\lg 3-\lg(3^x+1)$.

6.10.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3(2^{2x}+2^x)=2\log_9 12$;
2) $x-\lg 5=x\lg 5+2\lg 2-\lg(1+2^x)$.

6.11.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{0,5}(4-x)+\log_{0,5}(x-1)=-1$;
2) $\lg(x-2)+\lg(x-3)=1-\lg 5$;
3) $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0,18$;

4) $\lg(x-1)+\lg(x-3)=\lg(1{,}5x-3)$;
5) $\log_2(5-x)-\log_2(x-1)=1-\log_2(x+2)$;
6) $2\log_5(x+1)-\log_5(x+9)=\log_5(3x-17)$.

6.12.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\log_3(5-x)+\log_3(3-x)=1$;
2) $\log_{0,6}(x+2)+\log_{0,6}(6-x)=\log_{0,6}(x+8)$;
3) $\log_2(2x-1)-\log_2(x+2)=2-\log_2(x+1)$;
4) $2\lg(x+1)-\lg(4x-5)=\lg(x-5)$.

6.13.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\log_3(5^x+2)+\log_3(5^x-1)=2+\log_3 2$;
2) $\log_2(2^x+3)+\log_2(5-2^x)=4$.

6.14.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\log_{\sqrt{3}}(2^x-3)+\log_{\sqrt{3}}(2^x-1)=2$;
2) $\lg(3^x-4)+\lg(3^x-2)=1$.

6.15.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\log_3^2 x-\log_3 x-2=0$;
2) $\lg^2 x-2\lg x^2+3=0$;
3) $\log_5 x+\log_x 5=2{,}5$;
4) $2\log_{\frac{1}{6}} x+3\sqrt{\log_{\frac{1}{6}} x}-5=0$.

6.16.• Розв'яжіть рівняння:
1) $3\log_8^2(-x)-2\log_8(-x)-1=0$;
2) $2\log_7\sqrt{x}=\log_7^2 x-6$;
3) $3\log_3 x+3\log_x 3=10$;
4) $\dfrac{\lg x}{\lg x+2}-\dfrac{2}{\lg x-1}=1$.

6.17.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\dfrac{2\lg x}{\lg(8x-7)}=1$;
2) $\dfrac{\log_4(x^2+x-2)-1}{\log_4(x-1)}=0$;
3) $\log_x(2x^2-7x+12)=2$;
4) $\log_{x+1}(x+3)=2$;
5) $\log_{x-2}(2x^2-11x+16)=2$.

6.18.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\dfrac{2\log_2 x}{\log_2(3-2x)}=1$;
2) $\dfrac{\log_5(x^2-9x+25)-1}{\lg(x-3)}=0$;
3) $\log_{x-1}(x^2-5x+7)=1$;
4) $\log_x(x+6)=2$;
5) $\log_{2x-3}(3x^2-7x+3)=2$.

6.19.• Розв'яжіть рівняння:
1) $\log_2(x-5)^2-2\log_2(x+2)=2$;
2) $\dfrac{1}{2}\lg x^2+\lg(x+7)=1$.

6.20.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{1}{4}\log_2 x^4 + \log_2(x+10) = 3 + \log_2 3;$

2) $\frac{1}{2}\log_6 x^2 + \log_6(5-x) = 1.$

6.21.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_3^2 x^3 + 4\log_3 x - 5 = 0;$

2) $\lg(10x^2)\cdot\lg x = 1;$

3) $\log_4 x^2 \cdot \log_4 \frac{16}{x} = 2;$

4) $\log_2(4x)\cdot\log_2(0,25x) = 5;$

5) $\lg^2(100x) + 2\lg x = 20;$

6) $\log_5^2(5x) + \log_5\frac{x}{25} = 3;$

7) $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^2 - 1) = 0;$

8) $2\lg(\lg x) = \lg(2\lg x + 8).$

6.22.• Розв'яжіть рівняння:

1) $3\lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0;$

2) $\log_3 x^2 \cdot \log_3\frac{x}{27} + 4 = 0;$

3) $\log_7(7x)\cdot\log_7\frac{x}{7} = \log_7 x^2 - 1;$

4) $\lg^2(10x) + \lg(10x) = 6 + 3\lg x;$

5) $\log_6^2(36x) + \log_6\frac{x^2}{216} = 8;$

6) $\log_5(\log_2 x) + \log_5(\log_2 x^3 - 14) = 1.$

6.23.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\log_5 x} = 5;$

2) $x^{\lg x + 2} = 1000;$

3) $x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9};$

4) $x^{\log_6 x} = 216x^2.$

6.24.• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\log_3 x} = 81;$

2) $x^{\lg x} = 100x;$

3) $x^{\log_2 x - 2} = 256;$

4) $\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\lg x} = 10^{6+\lg x}.$

6.25.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x 4 + \log_{x^2} 64 = 5;$

2) $3\log_x 16 - 4\log_{16} x = 2\log_2 x;$

3) $\log_x 2\cdot\log_{2x} 2 = \log_{4x} 2;$

4) $3\log_{3x} x = 2\log_{9x} x^2;$

5) $2\log_{4x} x^3 = 5\log_{2x} x;$

6) $\log_{4x} 2 + \log_2 x = 0.$

6.26.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x(9x^2)\log_3^2 x = 4;$

2) $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2;$

3) $\frac{2-4\log_{12}2}{\log_{12}(x+2)} - 1 = \frac{\log_6(8-x)}{\log_6(x+2)};$

4) $\log_{x+1}(x^3 - 9x + 8)\log_{x-1}(x+1) = 3.$

6.27.• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x 9 + \log_{x^2} 729 = 10;$

2) $\log_x (125x) \log_{25}^2 x = 1;$

3) $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0.$

6.28.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 9^x - 4 \cdot 3^{5-y} + 27 = 0, \\ \lg(2y - 3x) = \lg(4 - 4x + y); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 18, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \dfrac{5}{2}, \\ xy = 27; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3 (x + 2y) + \log_{\frac{1}{3}} (x - 2y) = 1, \\ x^2 + y^2 = 4 + \dfrac{1}{2} y; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^{\lg y} = 2, \\ xy = 20. \end{cases}$

6.29.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4^x + 2^y = 12, \\ \lg(3x - 2y) = \lg(5 + x - 3y); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 16, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_x (3x + 2y) = 2, \\ \log_y (2x + 3y) = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2\log_2 (x + y), \\ \log_2 (x + y) + \log_2 (x^2 - xy + y^2) = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x + y)\, 3^{y - x} = \dfrac{5}{27}, \\ 3\log_5 (x + y) = x - y; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}} = 32, \\ \log_3 (x - y) = 1 - \log_3 (x + y). \end{cases}$

6.30.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\lg 9} + 9^{\lg x} = 162;$

2) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 18.$

6.31.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^{\log_2 10} + 10^{\log_2 x} = 200;$

2) $7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} = 14.$

6.32.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_7(x+8)=-x$;
2) $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$;
3) $\log_5 \operatorname{tg}^2 x=\cos 2x$;
4) $x^4=\log_x 4$.

6.33.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x-5)=x-9$;
2) $\log_3^2 x+(x-1)\log_3 x=12-3x$;
3) $\log_2 \cos^2 x=\sin^8 x$;
4) $2x^6=\log_x 3$.

6.34.•• Розв'яжіть рівняння

$$\lg^2(x+1)=\lg(x+1)\cdot\lg(x-1)+2\lg^2(x-1).$$

6.35.•• Розв'яжіть рівняння

$$2\lg^2(2x-1)=\lg^2(2x+1)-\lg(2x-1)\cdot\lg(2x+1).$$

6.36.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2\log_x 27\cdot\log_9 x=x+4$;
2) $\lg\sqrt{1+x}+3\lg\sqrt{1-x}-2=\lg\sqrt{1-x^2}$.

6.37.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x\log_{x+1}5\cdot\log_{\sqrt[3]{\frac{1}{5}}}(x+1)=\dfrac{x-4}{x}$;
2) $\log_{1+x+\sin x}(x^2+x-1)=\log_{1+x+\sin x}(3x+2)$.

6.38.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{\operatorname{tg} x+1}\cdot\log_{\frac{1}{2}}(3-x)=0$.

6.39.•• Скільки розв'язків має рівняння $(\log_2(x+1)-3)\sqrt{x-a}=0$ залежно від значення параметра a?

6.40.•• Скільки розв'язків має рівняння $(\log_3(x-2)-2)\sqrt{x-a}=0$ залежно від значення параметра a?

6.41.•• При яких значеннях параметра a рівняння $(x-a)\log_2(3x-7)=0$ має єдиний розв'язок?

6.42.•• При яких значеннях параметра a рівняння $(x+a)\log_3(2x-5)=0$ має єдиний розв'язок?

6.43.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x \cos(2\pi x)=0$;
2) $\log_9 \sin 2x=\log_3\sqrt{\dfrac{\sin x}{5}}$;
3) $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1+\cos x)=2$.

6.44.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\log_x \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) = 0;$

2) $\log_{\sin 3x}(\cos x - \cos 2x) = 1;$

3) $\log_{\frac{-x^2-6x}{10}}(\sin 3x + \sin x) = \log_{\frac{-x^2-6x}{10}} \sin 2x.$

6.45.•• Розв'яжіть рівняння $(4x - x^2 - 3)\log_2(\cos^2 \pi x + 1) = 1.$

6.46.•• Розв'яжіть рівняння $\log_2(5 + 3\cos 4x) = \sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right).$

6.47.•• Розв'яжіть рівняння $2^{-|x-2|}\log_2(4x - x^2 - 2) = 1.$

6.48.•• Розв'яжіть рівняння $-\log_5(2 - |x - b|) = \log_{0,2}(5 - x)$ при всіх значеннях параметра b.

6.49.•• При яких значеннях параметра a рівняння $\log_{x^2-1}(x + a) = 1$ не має розв'язків?

6.50.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3 \dfrac{y}{x}, \\ 2^{x+2} + 8^x = 5 \cdot 4^y. \end{cases}$

6.51.•• Розв'яжіть рівняння $\log_2 \dfrac{x}{\sqrt{4x-3}} = \sqrt{4x-3} - x.$

6.52.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$\log_{\sqrt{2ax+4}}(2x^2 - x + 3) = 2\log_{2ax+4}(x^2 + 2x + 1)$$

має єдиний розв'язок?

6.53.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$\log_{\sqrt{ax-6}}(2x^2 - 3x + 2) = 2\log_{ax-6}(x^2 + 2x - 4)$$

має єдиний розв'язок?

6.54.•• Знайдіть значення параметра a, при яких рівняння

$$(a-1)\log_3^2(x-2) - 2(a+1)\log_3(x-2) + a - 3 = 0$$

має корені та всі корені менші від 3.

6.55.* Знайдіть усі значення x, які при будь-якому a задовольняють рівняння $\log_{x+a^2+1}(a^2x + 2) = 2\log_{7+2x}\left(5 - \sqrt{6-2x}\right).$

6.56.* Знайдіть усі значення x, які при будь-якому a задовольняють рівняння $\log_2\left(a^2x^3 - 5a^2x^2 + \sqrt{6-x}\right) = \log_{2+a^2}\left(3 - \sqrt{x-1}\right).$

6.57.* Василь Заплутайко розв'язує рівняння $\left(\frac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x$ так:

1) оскільки при $x = \frac{1}{2}$ виконуються рівності $\left(\frac{1}{16}\right)^x = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$ і $\log_{\frac{1}{16}} x = \log_{\frac{1}{16}} \frac{1}{2} = \log_{2^{-4}} 2^{-1} = \frac{1}{4}$, то число $x = \frac{1}{2}$ — корінь даного рівняння;

2) побудувавши графіки функцій $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ і $y = \log_{\frac{1}{16}} x$ (рис. 6.3), Василь каже, що рівняння не має інших коренів, окрім $x = \frac{1}{2}$. Чи правий Василь у своєму висновку?

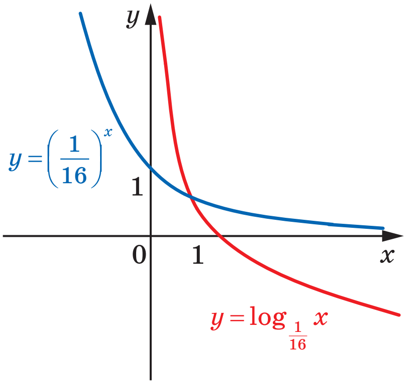


Рис. 6.3

7. Логарифмічні нерівності

Розв'язування багатьох логарифмічних нерівностей ґрунтується на такій теоремі.

Теорема 7.1. ***При $a > 1$ нерівність $\log_a x_1 > \log_a x_2$ виконується тоді й тільки тоді, коли $x_1 > x_2 > 0$; при $0 < a < 1$ нерівність $\log_a x_1 > \log_a x_2$ виконується тоді й тільки тоді, коли $0 < x_1 < x_2$.***

Справедливість цієї теореми випливає з того, що при $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a x$ є зростаючою, а при $0 < a < 1$ — спадною.

Наслідок. ***Якщо*** $a > 1$, ***то нерівність*** $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ***рівносильна системі***

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Якщо $0 < a < 1$, ***то нерівність*** $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ ***рівносильна системі***

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Скориставшись ідеєю доведення наслідку з теореми 2.1, доведіть цей наслідок самостійно.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $\log_{\sqrt{2}-1}(3x-4) < \log_{\sqrt{2}-1}(x-2)$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases} 3x-4 > x-2, \\ x-2 > 0. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x > 1, \\ x > 2; \end{cases}$ $x > 2$.

Відповідь: $(2; +\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність

$$\log_2^2 (x-1)^2 - \log_{2^{-1}} (x-1) - 5 > 0.$$

Розв'язання. Оскільки областю визначення даної нерівності є проміжок $(1; +\infty)$, то виконується рівність

$$\log_2 (x-1)^2 = 2\log_2 (x-1).$$

Тоді дану нерівність можна переписати так:

$$4\log_2^2 (x-1) + \log_2 (x-1) - 5 > 0.$$

Нехай $\log_2 (x-1) = t$. Отримуємо: $4t^2 + t - 5 > 0$.

Звідси $\left[\begin{array}{l} t < -\frac{5}{4}, \\ t > 1. \end{array}\right.$

Маємо: $\left[\begin{array}{l} \log_2 (x-1) < -\frac{5}{4}, \\ \log_2 (x-1) > 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_2 (x-1) < \log_2 2^{-\frac{5}{4}}, \\ \log_2 (x-1) > \log_2 2; \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} 0 < x - 1 < 2^{-\frac{5}{4}}, \\ x - 1 > 2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 1 < x < 1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{32}}, \\ x > 3. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left(1; 1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{32}}\right) \cup (3; +\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\log_x 3 - \dfrac{5}{2} - \log_{\frac{1}{3}} x > 0.$

Розв'язання. Маємо: $\dfrac{1}{\log_3 x} - \dfrac{5}{2} + \log_3 x > 0.$

Нехай $\log_3 x = t$. Тоді $\dfrac{1}{t} - \dfrac{5}{2} + t > 0$. Звідси

$$\frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} > 0; \quad \frac{(2t-1)(t-2)}{2t} > 0.$$

Скориставшись методом інтервалів (рис. 7.1), отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l} 0 < t < \dfrac{1}{2}, \\ t > 2. \end{array}\right.$$

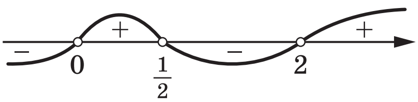


Рис. 7.1

Далі, $\left[\begin{array}{l} 0 < \log_3 x < \dfrac{1}{2}, \\ \log_3 x > 2; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 1 < x < \sqrt{3}, \\ x > 9. \end{array}\right.$

Відповідь: $(1; \sqrt{3}) \cup (9; +\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\log_x \dfrac{3x - 1}{x^2 + 1} > 0.$

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність так: $\log_x \dfrac{3x-1}{x^2+1} > \log_x 1.$

Ця нерівність рівносильна сукупності двох систем.

1) $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 0, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} < 1. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 3x - 1 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \dfrac{1}{3} < x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < 1; \end{array}\right. \end{cases}$

$$\frac{1}{3} < x < 1.$$

2) $\begin{cases} x > 1, \\ \dfrac{3x-1}{x^2+1} > 1. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - 3x + 2 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ 1 < x < 2; \end{cases}$ $1 < x < 2.$

Відповідь: $\left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2)$. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\log_3(x+7) < 4 - x$.

Розв'язання. Маємо: $\log_3(x+7) + x - 4 < 0$.

Розглянемо функцію $f(x) = \log_3(x+7) + x - 4$. Вона зростає на $D(f) = (-7; +\infty)$. Зауважимо, що $f(2) = 0$. Отже, при $x > 2$ отримуємо, що $f(x) > f(2) = 0$, а при $-7 < x < 2$ отримуємо, що $f(x) < f(2) = 0$.

Відповідь: $(-7; 2)$. ◄

ВПРАВИ

7.1.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{3}{7}}(x+5) < \log_{\frac{3}{7}} 8$;
2) $\log_8(2x-3) > \log_8 7$;
3) $\log_{\frac{2}{9}}(x-4) > \log_{\frac{2}{9}} 2$;
4) $\lg(1+3x) < \lg 16$.

7.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{12}(x-8) > \log_{12} 3$;
2) $\log_{16}(4x-6) < \log_{16} 10$;
3) $\log_{\frac{8}{11}}(2-x) < \log_{\frac{8}{11}} 2$;
4) $\log_{0,9}(2x+1) > \log_{0,9} 5$.

7.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_7 x > 2$;
2) $\log_5 x \leqslant -1$;
3) $\log_{\frac{1}{2}} x \leqslant 5$;
4) $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$;
5) $\log_2(5x+1) > 4$;
6) $\log_{0,6}(x-2) < 2$;
7) $\log_3(2x-1) \leqslant 3$;
8) $\log_{0,5}(2x+1) \geqslant -2$.

7.4.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{1}{7}} x < -1$;
2) $\log_4 x > 2$;
3) $\lg x < 5$;
4) $\log_{\frac{1}{6}} x > -3$;
5) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-3) \geqslant -2$;
6) $\log_9(5x+6) \leqslant 2$.

7.5.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\lg(2x+3) > \lg(x-1)$;
2) $\log_5 2x < \log_5(x+1)$;
3) $\log_{0,2}(2x-1) > \log_{0,2}(3x-4)$;
4) $\log_{0,4}(x^2-3) < \log_{0,4}(x+3)$;

5) $\log_{0,7}(x^2-2x-3)\leqslant\log_{0,7}(9-x)$;

6) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+31)\leqslant\log_{\frac{1}{3}}(10x+11)$.

7.6.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(2x-3)<\log_2(x+1)$;

2) $\log_{0,6}(3-2x)>\log_{0,6}(5x-2)$;

3) $\lg(x^2-2)\geqslant\lg(4x+3)$;

4) $\log_{0,1}(10-2x)\geqslant\log_{0,1}(x^2-x-2)$.

7.7.• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\log_8(x^2-4x+3)\leqslant 1$;

2) $\log_{0,5}(x^2+x)>-1$;

3) $\log_{0,7}(x^2+10x+25)>0$;

4) $\log_2(x^2-3x)\leqslant 2$;

5) $\log_2\frac{4x-5}{4x+7}>0$;

6) $\lg\frac{x^2-1}{(x-2)^2}>0$;

7) $\log_3\frac{2x+5}{x+1}\leqslant 1$;

8) $\log_4\frac{3x-1}{x}\leqslant 0,5$.

7.8.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7)>0$;

2) $\log_9(x^2-6x+8)\leqslant 0,5$;

3) $\log_{0,5}(x^2+3x)\geqslant -2$;

4) $\log_{0,3}(x^2-2x+1)\geqslant 0$;

5) $\log_4\frac{3x-1}{x-1}\leqslant 1$;

6) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x-1}{3x+1}>1$.

7.9.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,3}(x^2+x-12)\geqslant\log_{0,3}(6x-6)$;

2) $\lg(x^2-x)\leqslant\lg(3x-3)$;

3) $\log_{0,8}(1-x^2)>\log_{0,8}(x^2+5x-2)$;

4) $2\log_2(2x+7)\geqslant 5+\log_2(x+2)$;

5) $\log_3(x^2+2x-3)\leqslant\log_3(x+9)$;

6) $\log_{\frac{1}{7}}(2x^2+3x+1)\geqslant 2\log_{\frac{1}{7}}(1-x)$.

7.10.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{2}{3}}(6-2x)<\log_{\frac{2}{3}}(x^2-2x-3)$;

2) $\log_{0,1}(x^2-3x-4)\geqslant\log_{0,1}(x+1)$;

3) $2\log_2(x+5)\leqslant 3+\log_2(11+x)$;

4) $\lg(2x^2-9x+4)\leqslant 2\lg(x+2)$.

7.11.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg x + \lg(x-3) > 1$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) + \log_{\frac{1}{3}} x < -1$;
3) $\log_2 x + \log_2(x+4) < 5$;
4) $\log_{0,1}(x-5) + \log_{0,1}(x-2) \geqslant -1$;
5) $\log_6(5x+8) + \log_6(x+1) \leqslant 1 - \log_6 3$;
6) $\log_3(1-x) + \log_3(-5x-2) \geqslant 2\log_3 2 + 1$.

7.12.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_2(-x) + \log_2(1-x) \leqslant 1$;
2) $\log_{0,2}(x-1) + \log_{0,2}(x+3) \geqslant -1$;
3) $\log_3(x-2) + \log_3(x-10) \geqslant 2$;
4) $\log_7 x + \log_7(3x-8) \geqslant 1 + 2\log_7 2$.

7.13.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\log_{0,7} x + \log_{0,7}(x-1) \leqslant \log_{0,7}(8-x)$;
2) $\log_6(x-3) - \log_6(x-5) \leqslant 1 - \log_6(x-4)$.

7.14.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\lg(2x-1) + \lg(2x-3) \geqslant \lg(3x-3)$;
2) $\log_{\frac{2}{3}}(x-1) + \log_{\frac{2}{3}}(x-5) \leqslant \log_{\frac{2}{3}}(11-x)$.

7.15.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,2}^2 x \leqslant 1$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x \geqslant 4$;
3) $\lg^2 x + 3\lg x - 4 < 0$;
4) $\log_{\frac{1}{4}}^2 x + 2\log_{\frac{1}{4}} x - 8 \leqslant 0$;
5) $\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 \geqslant 0$;
6) $2\log_{\frac{1}{9}}^2 x - 5\log_{\frac{1}{9}} x + 2 \geqslant 0$.

7.16.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{0,5}^2 x \geqslant 9$;
2) $\lg^2 x - 2\lg x - 3 \geqslant 0$;
3) $2\log_4^2 x - \log_4 x - 1 < 0$;
4) $\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x - 2 \leqslant 0$.

7.17.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $\log_2^2(4x) + 2\log_2 x - 11 < 0$;
2) $\log_3^2(27x) + 3\log_3 x - 19 \geqslant 0$;
3) $\dfrac{\lg^2 x + \lg x - 6}{\lg x} \geqslant 0$;
4) $2\log_5 x - \log_x 5 \leqslant 1$.

7.18.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_7^2(7x)-\log_7 x\geqslant 3$;
2) $\log_6^2\frac{x}{216}+8\log_6 x-12\leqslant 0$;
3) $\frac{\log_3^2 x-6\log_3 x+8}{\log_3 x-1}\geqslant 0$;
4) $\log_{0,5}x-2\log_x 0,5\leqslant 1$.

7.19.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{1,6}\log_{0,5}(x^2-x-6)\geqslant 0$;
2) $\log_{0,5}\log_4(2x^2+x-1)<1$;
3) $\log_{\frac{1}{9}}\log_3\frac{x}{x-1}\geqslant 0$;
4) $\log_{1,5}\log_3\frac{3x-5}{x+1}\leqslant 0$.

7.20.• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{\frac{7}{4}}\log_5(x^2-2x-3)\leqslant 0$;
2) $\log_{0,8}\log_2\frac{3x-1}{2-x}>0$.

7.21.•• Розв'яжіть нерівність $x^{\log_3 x+2}\geqslant 27$.

7.22.•• Розв'яжіть нерівність $x^{\log_5 x+3}\leqslant 625$.

7.23.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_3(x+8)\geqslant 3-x$;
2) $x^{\sqrt{x}}\leqslant 16$.

7.24.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_3(4-x)<x$;
2) $x^{\sqrt{x-1}}\geqslant 25$.

7.25.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{2x-3}x>1$;
2) $\log_{x-2}(2x-9)<0$;
3) $\log_{x+1}(5-x)>1$;
4) $\log_{x-2}(2x-7)<1$;
5) $\log_x(x+2)\leqslant 2$;
6) $\log_x(2x^2-3x)\leqslant 1$.

7.26.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\log_{3x-2}x<1$;
2) $\log_x(x^2-7x+13)>0$;
3) $\log_{x-1}(4-x)<1$;
4) $\log_x(6-x)\geqslant 2$;
5) $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2\geqslant 4$;
6) $\log_{x-3}(x^2-4x)^2\leqslant 4$.

7.27.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{2\cdot 5^x-1}>5^x-2$;
2) $\sqrt{\log_2\frac{3x-1}{2-x}}<1$.

7.28.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{20\cdot 3^x-11}>3^x-4$;
2) $\sqrt{\log_3\frac{2x+1}{3-x}}<1$.

7.29.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{-x^2+7x-10}\log_2(x-3)\leqslant 0$;

2) $\sqrt{4-x^2}\left(\log_3\dfrac{x+1}{x}+2\right)\leqslant 0$;

3) $(x^2-2{,}8x+1{,}8)\sqrt{\log_{\frac{1}{5}}|x-2|}\geqslant 0$.

7.30.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\sqrt{-x^2+6x-5}\log_3(x-2)\leqslant 0$; 2) $\dfrac{\log^2_{\sqrt{2}}(x-3)}{x^2-4x-5}\geqslant 0$.

7.31.•• Побудуйте графік нерівності $\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} x\geqslant 1$.

7.32.•• Побудуйте графік нерівності $\log_x(x^2+y^2)\leqslant 1$.

7.33.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(2^x-a)\sqrt{x-3}\geqslant 0$.

7.34.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність $(3^x-a)\sqrt{x-2}\leqslant 0$.

7.35.•• Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases}\log_x(2\sin x+1)\leqslant 0,\\ 0<x<2\pi.\end{cases}$

7.36.•• Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases}\log_x(2\cos x+1)\leqslant 0,\\ 0<x<2\pi.\end{cases}$

7.37.•• Розв'яжіть нерівність $(2^x+3\cdot 2^{-x})^{2\log_2 x-\log_2(x+6)}>1$.

7.38.•• Розв'яжіть нерівність $(3^{x+2}+3^{-x})^{3\lg x-\lg(2x^2+3x)}<1$.

7.39.•• Розв'яжіть нерівність $\log_x(10x+3)\cdot\log_{10x}(3x+10)\geqslant 0$.

7.40.•• Розв'яжіть нерівність $\log_{2-x}(2+x)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leqslant 0$.

7.41.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $\left(\sqrt{x+2}+1\right)\log_3(x^2+4x+13)\geqslant 2$;

2) $\log_2\left(\sqrt{x-2}+4\right)\cdot\log_3(x^2+x+21)\geqslant 6$.

7.42.•• Розв'яжіть нерівність $\log_3\left(\sqrt{x-1}+3\right)\cdot\log_5(x^2+x+3)\geqslant 1$.

7.43.* Числа a, b, c є такими, що $1<a<b<c$. Доведіть, що

$$\log_a b+\log_b c+\log_c a<\log_b a+\log_c b+\log_a c.$$

7.44.* Числа a, b, c є такими, що $1<a<b<c$. Доведіть, що

$$\log_a\log_a b+\log_b\log_b c+\log_c\log_c a>0.$$

8. Похідні показникової, логарифмічної та степеневої функцій

Чи існує функція, похідна якої дорівнює самій функції? Відповісти на це запитання нескладно. Наприклад, функція, яка є нульовою константою, має цю властивість.

А чи можна вказати таку функцію f, визначену на $\mathbb{R}$ і відмінну від нульової константи, що $f'(x) = f(x)$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$? Відповідь на це запитання не є очевидною.

З оповідання «Число Ейлера» (див. «Алгебра-10»[1]) ви могли ознайомитися з фундаментальною константою — числом $e = 2{,}718...$, що відіграє особливу роль не тільки в математиці, а й у фізиці, хімії, біології, економіці тощо.

Цю сталу було введено як спільну границю двох послідовностей із загальними членами $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ і $y_n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$, $n > 1$. Зокрема, було доведено, що для всіх $n > 1$ виконуються нерівності

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n.$$

Ці нерівності можна переписати так:

$$\frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}} - 1 < \frac{1}{n-1}; \quad 1 < \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}.$$

Якщо покласти $\frac{1}{n} = x$, то отримаємо:

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1 - x}.$$

Виявляється, що останні нерівності мають місце не лише для чисел x виду $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, а й для всіх чисел x таких, що $0 < x < 1$ (цей факт ви зможете довести, навчаючись у вищому навчальному закладі).

[1] Тут і далі посилання на підручник «А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Алгебра і початки аналізу : початок вивчення на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. — Х. : Гімназія, 2018».

Тепер можна записати:

$$1 = \lim_{x\to 0+} 1 \leqslant \lim_{x\to 0+} \frac{e^x - 1}{x} \leqslant \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1-x} = 1.$$

Звідси $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

Разом з тим

$$\lim_{x\to 0-} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{-x} - 1}{-x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^x - 1}{x} \cdot e^{-x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \lim_{x\to 0+} e^{-x}.$$

Оскільки функція $y = e^{-x}$ неперервна, то $\lim\limits_{x\to 0+} e^{-x} = 1.$ Тому

$$\lim_{x\to 0-} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Таким чином, виконується рівність

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Ця рівність виражає одну з багатьох чудових властивостей числа e. Зокрема, вона означає, що при малих значеннях x має місце наближена рівність $e^x \approx 1 + x.$

Теорема 8.1. ***Функція $f(x) = e^x$ є диференційовною, і її похідну можна обчислити за формулою $(e^x)' = e^x$.***

Доведення. Маємо:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} =$$

$$= e^{x_0} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}. \quad ◄$$

Тепер можна записати:

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Отже, знайдено відповідь на запитання, поставлене на початку пункту. Функція $f(x) = e^x$ задовольняє рівність $f'(x) = f(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Функцію $f(x) = e^x$ називають **експонентою.**

Виведемо формулу для знаходження похідної показникової функції $f(x) = a^x$.

Маємо: $a = e^{\log_e a}$.

Тоді $a^x = e^{x \log_e a}$.

Користуючись правилом обчислення похідної складеної функції, запишемо: $(a^x)' = \left(e^{x\log_e a}\right)' = e^{x\log_e a} \cdot (x\log_e a)' = a^x \log_e a.$

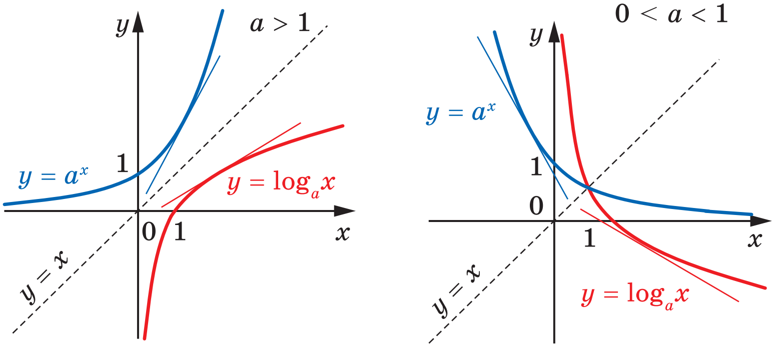


Рис. 8.1

Логарифм з основою e називають **натуральним логарифмом** і позначають $\ln a$, тобто $\log_e a = \ln a$.

Тоді при $a > 0$, $a \neq 1$ можна записати:

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

Розглянемо логарифмічну функцію $f(x) = \log_a x$. Обернена до неї функція $g(x) = a^x$ є диференційовною на $\mathbb{R}$, причому $g'(x) \neq 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Це означає, що до графіка функції g у кожній точці можна провести негоризонтальну дотичну. Тому й до графіка функції f у кожній точці можна провести невертикальну дотичну (рис. 8.1). Отже, логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$ є диференційовною.

Знайдемо формулу для обчислення похідної логарифмічної функції.

Для будь-якого $x > 0$ виконується рівність $a^{\log_a x} = x$. Знайдемо похідну лівої і правої частин останньої рівності. Маємо:

$$\left(a^{\log_a x}\right)' = (x)';$$

$$a^{\log_a x} \cdot \ln a \cdot (\log_a x)' = 1;$$

$$x \cdot \ln a \cdot (\log_a x)' = 1.$$

Звідси

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

При $a = e$ отримуємо:

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Перейдемо до розгляду похідної степеневої функції $f(x)=x^{\alpha}$, $D(f)=(0;+\infty)$. Ви знаєте, що $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ для всіх раціональних значень α. Цю формулу можна узагальнити для будь-якого $\alpha\in\mathbb{R}$.

Теорема 8.2. ***Функція*** $f(x)=x^{\alpha}$, $D(f)=(0;+\infty)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, ***є диференційовною, і її похідну можна обчислити за формулою*** $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$.

Доведення. Подамо функцію $f(x)=x^{\alpha}$ у вигляді складеної функції $f(x)=e^{\alpha\ln x}$. Оскільки функції $y=e^{x}$ і $y=\alpha\ln x$ є диференційовними, то функція f також диференційовна.

Обчислимо похідну функції f. Маємо:

$$(x^{\alpha})'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}\cdot(\alpha\ln x)'=e^{\alpha\ln x}\cdot\frac{\alpha}{x}=x^{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$ ◄

ПРИКЛАД 1 Знайдіть похідну функції: 1) $y=e^{x}(x^2-4x)$; 2) $y=x^3\cdot 3^x$; 3) $y=e^{-7x}$; 4) $y=\dfrac{x^4}{\ln x}$; 5) $y=\log_6^2 x$; 6) $y=\log_2(3x-4)$.

Розв'язання. 1) Застосовуючи теорему про похідну добутку двох функцій, отримуємо:

$$y'=(e^{x})'\cdot(x^2-4x)+(x^2-4x)'\cdot e^{x}=$$
$$=e^{x}\cdot(x^2-4x)+(2x-4)\cdot e^{x}=e^{x}(x^2-2x-4).$$

2) Маємо:

$$y'=(x^3)'\cdot 3^x+(3^x)'\cdot x^3=3x^2\cdot 3^x+3^x\ln 3\cdot x^3=3^x x^2(3+x\ln 3).$$

3) Використовуючи теорему про похідну складеної функції, запишемо: $y'=(e^{-7x})'=e^{-7x}\cdot(-7x)'=-7e^{-7x}$.

4) Маємо: $y'=\dfrac{(x^4)'\cdot\ln x-(\ln x)'\cdot x^4}{\ln^2 x}=\dfrac{4x^3\cdot\ln x-\frac{1}{x}\cdot x^4}{\ln^2 x}=$

$$=\frac{4x^3\ln x-x^3}{\ln^2 x}=\frac{x^3(4\ln x-1)}{\ln^2 x}.$$

5) Застосувавши теорему про похідну складеної функції, отримуємо:

$$y'=\left(\log_6^2 x\right)'=2\log_6 x\cdot(\log_6 x)'=\frac{2\log_6 x}{x\ln 6}.$$

6) Маємо:

$$y'=(\log_2(3x-4))'=\frac{1}{(3x-4)\ln 2}\cdot(3x-4)'=\frac{3}{(3x-4)\ln 2}.$$ ◄

ПРИКЛАД 2 Складіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{3x} + x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 4x - 9$.

Розв'язання. Оскільки кутовий коефіцієнт прямої $y = 4x - 9$ дорівнює 4, то кутовий коефіцієнт шуканої дотичної $k = 4$. Знайдемо абсцису x_0 точки дотику. Маємо:

$f'(x) = 3e^{3x} + 1$. Оскільки $f'(x_0) = 4$, то $3e^{3x_0} + 1 = 4$; $3e^{3x_0} = 3$; $e^{3x_0} = 1$; $x_0 = 0$. Звідси $f(x_0) = 1$.

Тоді шукане рівняння має вигляд $y = 4x + 1$.

Відповідь: $y = 4x + 1$. ◄

ПРИКЛАД 3 Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:

1) $f(x) = e^{6x - x^2 + 5}$; 2) $f(x) = x \ln x$; 3) $f(x) = \lg^3 x - 3 \lg x + 2$.

Розв'язання. 1) Маємо:

$$f'(x) = (e^{6x - x^2 + 5})' = e^{6x - x^2 + 5} \cdot (6x - x^2 + 5)' = e^{6x - x^2 + 5} \cdot (6 - 2x).$$

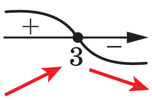


Рис. 8.2

Дослідивши знак похідної функції f (рис. 8.2), отримуємо, що функція f зростає на проміжку $(-\infty;\ 3]$, спадає на проміжку $[3;\ +\infty)$, $x_{\max} = 3$.

2) Маємо:

$$f'(x) = (x)' \cdot \ln x + (\ln x)' \cdot x = \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1.$$

Дослідимо знак $f'(x)$ на $D(f) = (0;\ +\infty)$.

Маємо: $f'(x) > 0$ при $\ln x > -1$. Звідси $x > \frac{1}{e}$. Аналогічно знаходимо, що $f'(x) < 0$ при $0 < x < \frac{1}{e}$.

Отримуємо, що функція f зростає на проміжку $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right)$, спадає на проміжку $\left(0; \frac{1}{e}\right]$, $x_{\min} = \frac{1}{e}$ (рис. 8.3).

3) Маємо: $f'(x) = 3\lg^2 x \cdot (\lg x)' - 3 \cdot \dfrac{1}{x \ln 10} =$

$$= \frac{3\lg^2 x}{x \ln 10} - \frac{3}{x \ln 10} = \frac{3(\lg^2 x - 1)}{x \ln 10} = \frac{3(\lg x - 1)(\lg x + 1)}{x \ln 10}.$$

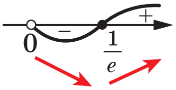


Рис. 8.3

Тоді $f'(x) = 0$ при $\lg x = -1$ або $\lg x = 1$. Отже, дана функція має дві критичні точки: $x = \frac{1}{10}$ і $x = 10$. Дослідивши знак похідної функції f на $D(f) = (0; +\infty)$ (рис. 8.4), доходимо висновку, що функція f зростає на кожному з проміжків $\left(0; \frac{1}{10}\right]$ і $[10; +\infty)$, спадає на проміжку $\left[\frac{1}{10}; 10\right]$, $x_{\max} = \frac{1}{10}$, $x_{\min} = 10$. ◄

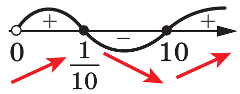


Рис. 8.4

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що:

1) показникова функція $y = a^x$ є опуклою вниз;

2) при $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a x$ є опуклою вгору, а при $0 < a < 1$ — опуклою вниз;

3) при $\alpha \geqslant 1$ і при $\alpha \leqslant 0$ степенева функція $y = x^\alpha$ є опуклою вниз на проміжку $(0; +\infty)$, а при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ — опуклою вгору на проміжку $(0; +\infty)$.

Розв'язання. 1) Маємо: $y' = a^x \ln a$, $y'' = a^x \ln^2 a$.

Оскільки $y'' \geqslant 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то показникова функція $y = a^x$ є опуклою вниз.

2) Запишемо: $y' = \frac{1}{x \ln a}$, $y'' = -\frac{1}{x^2 \ln a}$.

Якщо $a > 1$, то $\ln a > 0$, тому $y'' \leqslant 0$ для всіх $x \in (0; +\infty)$. Отже, при $a > 1$ логарифмічна функція $y = \log_a x$ є опуклою вгору.

При $0 < a < 1$ аналогічно доводимо, що $y'' \geqslant 0$ та логарифмічна функція $y = \log_a x$ є опуклою вниз.

3) Запишемо: $y' = \alpha x^{\alpha - 1}$, $y'' = \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha - 2}$. Оскільки $x^{\alpha - 2} > 0$ при всіх $x \in (0; +\infty)$, то $y'' \geqslant 0$ при $\alpha(\alpha - 1) \geqslant 0$. Отже, при $\alpha \geqslant 1$ і при $\alpha \leqslant 0$ функція $y = x^\alpha$ є опуклою вниз на проміжку $(0; +\infty)$.

При $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ аналогічно доводимо, що $y'' \leqslant 0$ та функція $y = x^\alpha$ є опуклою вгору на проміжку $(0; +\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $2^x = 3x - 1$.

Розв'язання. Легко побачити, що числа $x = 1$ і $x = 3$ є коренями даного рівняння.

Дане рівняння інших коренів не має (рис. 8.5). Справді, пряма $y = 3x - 1$ перетинає графік опуклої вниз функції $y = 2^x$ не більше ніж у двох точках.

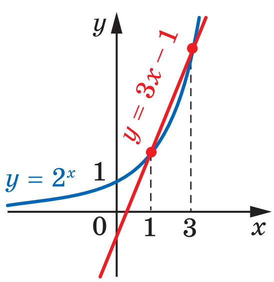


Рис. 8.5

Аналогічний висновок про кількість коренів рівняння $2^x - (3x-1) = 0$ можна отримати, скориставшись теоремою Ролля. Справді, функція $f(x) = 2^x - (3x-1)$ не може мати більше ніж два нулі, оскільки її похідна $f'(x) = 2^x \ln 2 - 3$ має лише один нуль.

Відповідь: 1; 3. ◄

ПРИКЛАД 6 Доведіть нерівність (нерівність Коші[1])

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}, \text{ де } x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ \ldots, \ x_n \geqslant 0.$$

Розв'язання. Якщо одне із чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ дорівнює нулю, то нерівність, яку треба довести, є очевидною.

Звернемося до випадку, коли $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$. Розглянемо функцію $f(x) = \ln x$. Згідно з доведеним у ключовому прикладі 4 цього пункту функція $f(x) = \ln x$ є опуклою вгору. Отже, для неї виконується нерівність Єнсена:

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n}{n}.$$

Звідси $\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n} \ln(x_1 x_2 \ldots x_n)$;

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geqslant \ln(x_1 x_2 \ldots x_n)^{\frac{1}{n}}; \quad \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}. \ ◄$$

У цьому пункті ви дізналися, що експонента $f(x) = e^x$ задовольняє рівняння

$$f'(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Це рівняння можна використати для означення експоненти. Доведемо, що $f(x) = e^x$ — єдина функція, яка задовольняє дві умови:

1) $f'(x) = f(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$;

2) $f(0) = 1$.

Справді, якщо розглянути допоміжну функцію $g(x) = e^{-x} f(x)$, то

$$g'(x) = e^{-x} f'(x) - e^{-x} f(x) = e^{-x} (f'(x) - f(x)) = 0$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Отже, $g(x) = C$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, де C — деяка стала. Таким чином, доведено, що $f(x) = g(x)e^x = Ce^x$. Оскільки функція f задовольняє умову $f(0) = 1$, то $C = 1$.

[1] Розв'язання цього прикладу спирається на матеріал розповіді «Нерівність Єнсена» (див. «Алгебра-10», с. 435).

ВПРАВИ

8.1.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^{\sqrt{5}}$; 4) $y = e^x \sin x$; 7) $y = 5^x$; 10) $y = x^e \cdot 3^x$;

2) $y = e^{5x}$; 5) $y = \frac{e^x}{x-2}$; 8) $y = 2^{x^2}$; 11) $y = \frac{2^x - 3}{2^x + 1}$;

3) $y = x^{\sqrt{3}} e^x$; 6) $y = e^x + e^{-x}$; 9) $y = 7^{2x-3}$; 12) $y = 0{,}3^{\operatorname{tg} x}$.

8.2.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^{\pi}$; 4) $y = \frac{x+1}{e^x}$; 7) $y = 10^{-x}$;

2) $y = x^6 e^x$; 5) $y = 6^x$; 8) $y = \frac{5^x + 2}{5^x - 1}$;

3) $y = e^x \cos x$; 6) $y = (2x+1)^{\sqrt{10}}$; 9) $y = 0{,}7^{\operatorname{ctg} x}$.

8.3.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = \log_9 x$; 4) $y = \ln^2 x$; 7) $y = \log_{0,2}(2x^2 + x - 4)$;

2) $y = \ln 2x$; 5) $y = \ln \sin x$; 8) $y = \ln\left(x^{\sqrt{5}} - 1\right)$;

3) $y = \lg(3^x - 1)$; 6) $y = \frac{\ln x}{x^3}$; 9) $y = x^5 \ln x$.

8.4.° Знайдіть похідну функції:

1) $y = \lg x$; 3) $y = \ln^3 x$; 5) $y = \frac{x^5}{\ln x}$;

2) $y = \ln(5^x + 7^x)$; 4) $y = \lg \cos x$; 6) $y = \log_2\left(x^{\sqrt{2}} + x\right)$.

8.5.° Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = e^{2x+1}$, $x_0 = -1$; 3) $f(x) = \left(4x^{\sqrt{3}} - 3\right)^{\sqrt{12}}$, $x_0 = 1$.

2) $f(x) = x - \ln x$, $x_0 = 3$;

8.6.° Знайдіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = e^{1-x}$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \log_5(x+2)$, $x_0 = -1$.

8.7.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:

1) $f(x) = e^{-2x}$, $x_0 = 0$; 4) $f(x) = 3x + \ln x$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = e^x + \sin x$, $x_0 = 0$; 5) $f(x) = \ln(5 + 4x)$, $x_0 = -1$;

3) $f(x) = x \cdot 2^x$, $x_0 = 1$; 6) $f(x) = \log_3(2x+1)$, $x_0 = 1$.

8.8.° Складіть рівняння дотичної до графіка функції f у точці з абсцисою x_0:
1) $f(x) = 2e^x - \cos x,\ x_0 = 0$;
2) $f(x) = 3^{2x-3},\ x_0 = 2$;
3) $f(x) = 4x - \ln 4,\ x_0 = 1$;
4) $f(x) = \ln(3x - 5),\ x_0 = 2$.

8.9.° Знайдіть рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції:
1) $f(x) = e^x + e^{-x}$;
2) $f(x) = (2^x - 7)(2^x - 9)$.

8.10.° Знайдіть рівняння горизонтальної дотичної до графіка функції $f(x) = (5^x - 65)(5^x + 15)$.

8.11.• Складіть рівняння дотичної до графіка функції:
1) $f(x) = e^{5x+2}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 5x + 7$;
2) $f(x) = \ln(3x - 2)$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 3x - 2$.

8.12.• Складіть рівняння дотичної до графіка функції:
1) $f(x) = e^x - e^{-x}$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 2x - 3$;
2) $f(x) = 6x - \ln x$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = x$;
3) $f(x) = \ln(1 - x)$, якщо ця дотична паралельна прямій $y = 1 - x$.

8.13.• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:
1) $f(x) = e^x - x$;
2) $f(x) = xe^{2x}$;
3) $f(x) = (1 - x)\,e^{x+1}$;
4) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$;
5) $f(x) = 4xe^{2-x}$;
6) $f(x) = e^{x^2}$;
7) $f(x) = e^{4x - x^2 + 1}$;
8) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-2}$;
9) $f(x) = \dfrac{4x}{e^x}$;
10) $f(x) = x^3 \ln x$;
11) $f(x) = \ln x - x$;
12) $f(x) = x^2 \lg x$;
13) $f(x) = \ln x + \dfrac{1}{x}$;
14) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;
15) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$;
16) $f(x) = x^2 - \ln x^2$;
17) $f(x) = 2\ln^3 x - 3\ln^2 x$;
18) $f(x) = \lg^2 x - \lg x$.

8.14.• Знайдіть проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції:
1) $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$;
2) $f(x) = e^{x^4 - 2x^2}$;
3) $f(x) = 5^{-x^3 + 3x + 1}$;
4) $f(x) = (4x - 1)\,e^{2x}$;
5) $f(x) = x^3 \cdot 3^{-x}$;
6) $f(x) = \dfrac{x+3}{e^x}$;

7) $f(x) = 0{,}5x^2 - \ln x$;
8) $f(x) = x \ln^2 x$;
9) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;
10) $f(x) = \ln x^2 + \dfrac{2}{x}$;
11) $f(x) = \ln^3 x - 12 \ln x$;
12) $f(x) = \lg^4 x - 2 \lg^2 x$.

8.15.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:
1) $f(x) = e^x + x$ на проміжку $[-1; 1]$;
2) $f(x) = x^2 e^{2x}$ на проміжку $[-2; 1]$;
3) $f(x) = 7^{x^2 - 2x}$ на проміжку $[0; 2]$;
4) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ на проміжку $[-1; 1]$.

8.16.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції:
1) $f(x) = (x - 1)\, e^{-x}$ на проміжку $[1; 3]$;
2) $f(x) = 5^{x^2 + 2x}$ на проміжку $[-2; 1]$.

8.17.° Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:
1) $y = e^x - e^{-x}$;
2) $y = \dfrac{\ln x}{x}$;
3) $y = \dfrac{e^x}{x}$.

8.18.•• Знайдіть проміжки опуклості та точки перегину функції:
1) $y = e^x + e^{-x}$;
2) $y = \dfrac{x}{e^x}$;
3) $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

8.19.•• Дослідіть функцію та побудуйте її графік:
1) $f(x) = xe^x$;
2) $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$;
3) $f(x) = e^{-x^2}$;
4) $f(x) = x^2 - 2 \ln x$;
5) $f(x) = \ln (9 - x^2)$.

8.20.•• Дослідіть функцію та побудуйте її графік:
1) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$;
2) $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$;
3) $f(x) = \log_2 (x^2 + x)$.

8.21.•• Доведіть подвійну нерівність $\dfrac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) < \dfrac{1}{n}$.

8.22.•• Доведіть, що при $x > 0$ виконується подвійна нерівність $\dfrac{x-1}{x} \leqslant \ln x \leqslant x - 1$.

8.23.•• Доведіть нерівність $e^x - 1 \geqslant x$.

8.24.•• Для всіх $\alpha \in \mathbb{R}$ знайдіть границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$.

8.25.•• Знайдіть границю $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

8.26.•• Для всіх $\alpha \geqslant 1$ і $x > -1$ доведіть нерівність Бернуллі $(1+x)^{\alpha} \geqslant 1+\alpha x$.

8.27.•• Для всіх $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ і $x > -1$ доведіть нерівність Бернуллі $(1+x)^{\alpha} \leqslant 1+\alpha x$.

8.28.•• Скільки коренів має рівняння $e^{x} = x+a$ залежно від значення параметра a?

8.29.•• Скільки коренів має рівняння $\ln x = ax$ залежно від значення параметра a?

8.30.•• При яких значеннях параметра a функція $y = 4 \ln x - ax - 7$ є зростаючою?

8.31.•• При яких значеннях параметра a функція $y = 2 - 3e^{x} - ax$ є спадною?

8.32.•• При яких значеннях a і b рівність $e^{ax+b} = ae^{x} + b$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$?

8.33.•• При яких значеннях параметра m функція $f(x) = 2e^{x} - me^{-x} + (1+2m)x - 3$ є зростаючою?

8.34.•• При яких значеннях параметра a функція $f(x) = 1 - 2e^{x} + (1-a)e^{-x} - e^{2x} + (a-1)x$ є спадною?

8.35.•• Знайдіть похідну функції $f(x) = x^{x}$, $D(f) = (0; +\infty)$.

8.36.•• Знайдіть додатні корені рівняння $x^{x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

8.37.•• Знайдіть похідну функції $f(x) = x^{x^{2}}$, $D(f) = (0; +\infty)$.

8.38.•• Доведіть подвійну нерівність $y \ln\dfrac{x}{y} \leqslant x - y \leqslant x \ln\dfrac{x}{y}$, якщо $x > 0$, $y > 0$.

8.39.•• Доведіть нерівність $e^{x} - e^{y} \leqslant e^{x}(x-y)$, якщо $x \geqslant y$.

8.40.•• Розв'яжіть рівняння $3^{x} = 4x+1$.

8.41.•• Розв'яжіть рівняння $4^{x-1} = 3x-2$.

8.42.•• Розв'яжіть рівняння $3^{x} + 11^{x} = 2 \cdot 7^{x}$.

8.43.•• Розв'яжіть рівняння $5^{x} + 2 \cdot 11^{x} = 3 \cdot 9^{x}$.

8.44.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\left(\sqrt{3}\right)^{x} - 2^{x-1} = 1$; 2) $3^{x} - 2x^{2} = 1$.

8.45.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2^{x+1} - 3^{x} = 1$; 2) $2^{x} = x^{2} - x + 2$.

8.46.•• При яких значеннях параметра a функція

$$f(x)=e^{2x}+2e^{x}(x-a-2)-ax^{2}+2ax+1$$

має два екстремуми?

8.47.•• При яких значеннях параметра a функція

$$f(x)=e^{2x}+e^{x}(x-3-4a)-ax^{2}+4ax-5$$

має один екстремум?

8.48.* Розв'яжіть рівняння $(x-y)^{2}+(y-e^{x+1})^{2}=2$.

8.49.* Доведіть нерівність $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)$, $n\in\mathbb{N}$.

8.50.* Доведіть нерівність $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}<\ln\sqrt{2n+1}$, $n\in\mathbb{N}$.

8.51.* Порівняйте: 1) e^{π} і π^{e}; 2) $6^{\sqrt{7}}$ і $7^{\sqrt{6}}$.

8.52.* Порівняйте значення виразів $\ln^{2}100$ і $\ln 99\cdot\ln 101$.

8.53.* Розв'яжіть рівняння $e^{x}-1=\ln(x+1)$.

8.54.* Функція f диференційовна на відрізку $[0;\,1]$, $f(0)=0$ і $f(1)>0$. Доведіть існування такого $x\in(0;1)$, що $f(x)<f'(x)$.

8.55.* Функції f і g диференційовні на відрізку $[0;\,1]$, $f(0)=f(1)=0$. Доведіть, що рівняння $f'(x)=f(x)g'(x)$ має принаймні один розв'язок.

МОЯ ЛЮБОВ — УКРАЇНА І МАТЕМАТИКА

Цей патріотичний вислів видатного українського математика, академіка Михайла Пилиповича Кравчука викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника науковцеві (див. форзац 1).

Михайло Кравчук народився в с. Човниці на Волині. Закінчивши із золотою медаллю Луцьку гімназію, а потім математичне відділення Київського університету, він залишився працювати в Києві.

Висока наукова продуктивність і працездатність, оригінальність і гнучкість мислення М. П. Кравчука дозволили йому отримати важливі наукові результати в алгебрі та теорії чисел, теорії функцій та математичному аналізі, диференціальних та інтегральних рівняннях, теорії ймовірностей та статистиці тощо. Відомо, що його науковий доробок був значною мірою використаний американськими вченими під час створення першого комп'ютера.

М. П. Кравчук брав активну участь у створенні української наукової термінології, одним із перших почав писати наукові праці українською мовою, хоча вільно володів російською, французькою, німецькою, італійською, польською та іншими мовами.

Великого значення надавав М. П. Кравчук навчальній роботі з молоддю, зокрема, за його ініціативи в 1935 р. було проведено першу Київську математичну олімпіаду для школярів. Спробуйте свої сили в розв'язанні задач цієї олімпіади.

Завдання першої Київської математичної олімпіади (1935 р.)

1. Обчисліть значення виразу $\frac{b^3 - a^3b - b^2c + ca^3}{(b-c)^2} + \sqrt{d}$ при $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0{,}19$, $c = 0{,}18$, $d = 0{,}04$.

2. Розв'яжіть рівняння $4^{x^2 - \sqrt{x^2 - 9} - 20{,}75} = \sqrt{2}$.

3. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 4, \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280. \end{cases}$

4. Додатні числа $u_1, u_2, \ldots, u_n$ утворюють арифметичну прогресію. Доведіть, що

$$\frac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}}.$$

5. Нехай a і b — катети прямокутного трикутника, c — його гіпотенуза. Доведіть, що

$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a.$$

6. При яких значеннях a, b, c многочлен $x^4 + ax^2 + bx + c$ націло ділиться на $(x-1)^3$?

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Логарифм

Логарифмом додатного числа b з основою a, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називають показник степеня, до якого потрібно піднести число a, щоб отримати число b.

Основна логарифмічна тотожність

$$a^{\log_a b} = b$$

Основні властивості логарифмів

Якщо $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ і $a \neq 1$, то виконуються рівності:

1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

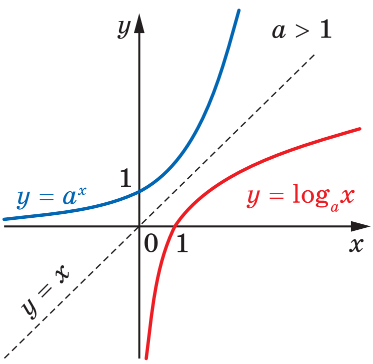
2) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

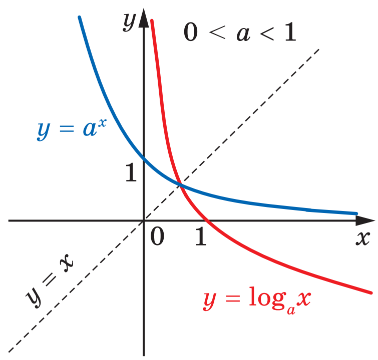
3) $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$ для будь-якого $\beta \in \mathbb{R}$;

4) $\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta} \log_a b$ для будь-якого $\beta \neq 0$;

5) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, де $b > 0$, $c \neq 1$.

Графіки показникової та логарифмічної функцій





Розв'язування показникових рівнянь і нерівностей

Якщо $a > 0$ і $a \neq 1$, то рівняння $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$.

Якщо $a > 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) > g(x)$; якщо $0 < a < 1$, то нерівність $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ рівносильна нерівності $f(x) < g(x)$.

Розв'язування логарифмічних рівнянь і нерівностей

Рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, рівносильне будь-якій із систем $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

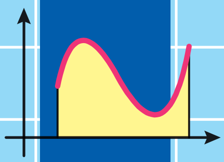
Якщо $a > 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$ Якщо $0 < a < 1$, то нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Похідні показникової, логарифмічної та степеневої функцій

$(e^x)' = e^x$; $(a^x)' = a^x \ln a$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$



§ 2. Інтеграл і його застосування

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з операцією, оберненою до диференціювання, і вивчите властивості цієї операції.
- Ви розширите клас фігур, площі яких зможете знаходити. Ознайомитеся з поняттям «визначений інтеграл» і з'ясуєте його геометричний зміст.

9. Первісна

Ви вмієте за заданою функцією знаходити її похідну, знаєте, що похідна має різноманітне застосування. Зокрема, уміючи диференціювати, за заданим законом $y = s(t)$ руху матеріальної точки по координатній прямій можна знайти закон $y = v(t)$ зміни її швидкості, а саме:

$$v(t) = s'(t).$$

У механіці нерідко доводиться розв'язувати обернену задачу: знаходити закон руху за відомим законом зміни швидкості.

Наприклад, із курсу фізики вам відомий такий факт: коли швидкість змінюється за законом $v(t) = gt$ і $s(0) = 0$, то закон руху задається формулою $s(t) = \frac{gt^2}{2}$.

Ви знаєте, що знаходження похідної заданої функції називають диференціюванням. Обернену операцію, тобто знаходження функції за її похідною, називають **інтегруванням.**

Означення. **Функцію F називають первісною функцією (або коротко первісною) функції f на проміжку I, якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність**

$$F'(x) = f(x).$$

Наприклад, функція $F(x) = x^2$ є первісною функції $f(x) = 2x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$, оскільки на $\mathbb{R}$ виконується рівність $(x^2)' = 2x$.

Часто в задачах, пов'язаних із первісною функції, проміжок I не наводять. У таких випадках вважають, що $I = (-\infty; +\infty)$. Наприклад, функція $F(x) = \cos x$ є первісною функції $f(x) = -\sin x$, оскільки виконується рівність $(\cos x)' = -\sin x$.

Розглянемо ще один приклад. Функція $F(x) = \sqrt{x}$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на проміжку $(0; +\infty)$, оскільки на цьому проміжку виконується рівність $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Проте на проміжку $[0; +\infty)$ функція $F(x) = \sqrt{x}$ не є первісною функції $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, оскільки в точці $x_0 = 0$ не виконується рівність $F'(x_0) = f(x_0)$.

Розглянемо функції $y = x^2 + 1$ і $y = x^2 - \sqrt{2}$. Кожна з них має одну й ту саму похідну $y = 2x$. Таким чином, обидві функції $y = x^2 + 1$ і $y = x^2 - \sqrt{2}$ є первісними функції $y = 2x$. Зрозуміло, що кожна з функцій виду $y = x^2 + C$, де C — довільне число, є первісною функції $y = 2x$. Отже, задача знаходження первісної має безліч розв'язків.

Мета інтегрування полягає в тому, щоб для заданої функції знайти всі її первісні на заданому проміжку.

Як пов'язані між собою всі первісні даної функції, указує така теорема.

Теорема 9.1 (основна властивість первісної). ***Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та C — довільне число, то функція***

$$y = F(x) + C$$

також є первісною функції f на проміжку I.

Будь-яку первісну функції f на проміжку I можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де C — деяке число.

Доведення. Оскільки функція F — первісна функції f на проміжку I, то для всіх $x \in I$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$. Нехай C — довільне число. Тоді

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Отже, функція $y = F(x) + C$ є первісною функції f на проміжку I.

Нехай функція G — одна з первісних функції f на проміжку I. Тоді $G'(x) = f(x)$ для всіх $x \in I$. Маємо:

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Згідно з ознакою сталості функції отримуємо, що функція $y = G(x) - F(x)$ є константою на проміжку I, тобто $G(x) - F(x) = C$, де C — деяке число.

Звідси $G(x) = F(x) + C$. ◄

З основної властивості первісної випливає, що графіки будь-яких двох первісних даної функції можна отримати один з одного паралельним перенесенням уздовж осі ординат (рис. 9.1).

Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, то запис $F(x) + C$, де C — довільне число, називають **загальним виглядом первісних** функції f на проміжку I.

Якщо хочуть наголосити, що запис $F(x) + C$, де C — довільне число, є загальним виглядом первісних саме функції f, то записують:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ де } C \text{ — довільне число.}$$

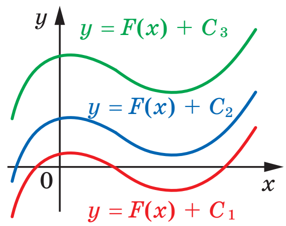


Рис. 9.1

Запис $\int f(x)dx$ називають **невизначеним інтегралом** функції f (читають: «інтеграл еф від ікс де ікс»).

Наприклад, функція $F(x) = x^3$ є первісною функції $f(x) = 3x^2$. З теореми 9.1 випливає, що запис $y = x^3 + C$, де C — довільне число, є загальним виглядом первісних функції $f(x) = 3x^2$. Тому

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C.$$

ПРИКЛАД 1 Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = x^5$.

Розв'язання. Оскільки $\left(\frac{x^6}{6}\right)' = x^5$, то однією з первісних функції $f(x) = x^5$ є функція $F(x) = \frac{x^6}{6}$. Тоді за теоремою 9.1 запис $\frac{x^6}{6} + C$, де C — довільне число, є загальним виглядом первісних. ◄

З розв'язання прикладу 1 випливає, що

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C,$$

де C — довільне число.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на кожному з проміжків $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ +\infty)$.

Розв'язання. На проміжку $(0; +\infty)$ має місце рівність $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; на проміжку $(-\infty; 0)$ мають місце рівності $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$.

Отже, функція $y = \ln x$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$, а функція $y = \ln(-x)$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{x}$ на проміжку $(-\infty;\ 0)$.

Оскільки $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, & \text{якщо } x \in (0; +\infty), \\ \ln(-x), & \text{якщо } x \in (-\infty; 0), \end{cases}$

то на будь-якому проміжку, що не містить точку 0, запис

$$\ln|x| + C, \text{ де } C \text{ — довільне число,}$$

є загальним виглядом первісних функції $f(x) = \frac{1}{x}$. ◄

ПРИКЛАД 3 Для функції $f(x) = 2\cos x$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M\left(\frac{5\pi}{6}; 3\right)$.

Розв'язання. Оскільки $(2\sin x)' = 2\cos x$, то функція $y = 2\sin x$ є однією з первісних функції $f(x) = 2\cos x$. Отже, шукана первісна має вигляд $F(x) = 2\sin x + C$, де C — деяке число. Знайдемо це число.

З умови випливає, що $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3$. Тоді $2\sin\frac{5\pi}{6} + C = 3$. Звідси $C = 2$.

Таким чином, шукана первісна має вигляд $F(x) = 2\sin x + 2$. ◄

Первісні функцій, які використовують найчастіше, наведено в таблиці.

Функція f	**Первісна функції f**
k (стала)	kx
x^{α}, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x \rvert$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
e^x	e^x
a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$

Звернемо увагу, що в таблиці наведено первісні функцій f на таких проміжках I, що $I \subset D(f)$.

Правильність заповнення цієї таблиці перевірте самостійно за допомогою операції диференціювання.

Функція $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq -1$, є первісною функції $f(x) = x^{\alpha}$ на проміжку $(0; +\infty)$. Користуючись цим, можна знайти, наприклад, первісну функції $f(x) = \sqrt[n]{x}$ на проміжку $(0; +\infty)$. Оскільки $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, то функція $F(x) = \frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}$ є первісною функції f на проміжку $(0; +\infty)$.

Ураховуючи рівності $\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{x^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$, можна записати:

$F(x) = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$.

ВПРАВИ

9.1.° Установіть, чи є функція F первісною функції f:

1) $F(x) = 3x^2 + x - 2$, $f(x) = 6x + 1$;
2) $F(x) = x^{-4}$, $f(x) = -4x^{-5}$ на проміжку $(0; +\infty)$;
3) $F(x) = \sin x + 3$, $f(x) = \cos x + 3$;
4) $F(x) = \cos 2x$, $f(x) = -\sin 2x$;
5) $F(x) = \sqrt{2x+1}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ на проміжку $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$;
6) $F(x) = 5^x$, $f(x) = 5^x \ln 5$.

9.2.° Доведіть, що функція F є первісною функції f на проміжку I:

1) $F(x) = x^4 - 2x^2 + 6$, $f(x) = 4x^3 - 4x$, $I = (-\infty; +\infty)$;
2) $F(x) = \frac{1}{x^3}$, $f(x) = -\frac{3}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$;
3) $F(x) = 5 - 3\sqrt{x}$, $f(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$;
4) $F(x) = 3\operatorname{tg}\frac{x}{3} + 6$, $f(x) = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{3}}$, $I = \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

9.3.° Чи є функція $F(x)=\dfrac{1}{x^2}$ первісною функції $f(x)=-\dfrac{2}{x^3}$ на проміжку:

1) $(0;\ +\infty)$; 2) $(-2;\ 2)$; 3) $(-\infty;\ 0]$; 4) $(-6;\ 0)$?

9.4.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x)=5$;
2) $f(x)=x$;
3) $f(x)=x^6$;
4) $f(x)=2^x$;
5) $f(x)=\dfrac{1}{x^7}$ на проміжку $(-\infty;\ 0)$;
6) $f(x)=\sqrt{x}$ на проміжку $[1;\ +\infty)$;
7) $f(x)=\sqrt[5]{x}$ на проміжку $(-\infty;\ -3)$;
8) $f(x)=x^{-5}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$.

9.5.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x)=0$;
2) $f(x)=x^8$;
3) $f(x)=\dfrac{1}{3^x}$;
4) $f(x)=\dfrac{1}{x^{20}}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$;
5) $f(x)=\sqrt[7]{x}$ на проміжку $(4;\ +\infty)$;
6) $f(x)=\sqrt[4]{x}$ на проміжку $[0{,}5;\ +\infty)$.

9.6.• Перевірте, що:

1) $\int x\cos x\,dx=\cos x+x\sin x+C$; 2) $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx=\sqrt{x^2+4}+C$,

де C — довільне число.

9.7.• Перевірте, що функція $F(x)=\dfrac{x-2}{3x-1}$ є первісною функції $f(x)=\dfrac{5}{(3x-1)^2}$ на кожному з проміжків $\left(-\infty;\ \dfrac{1}{3}\right)$ і $\left(\dfrac{1}{3};\ +\infty\right)$, та запишіть загальний вигляд первісних функції f на кожному з указаних проміжків.

9.8.• Для функції f знайдіть первісну, графік якої проходить через указану точку:

1) $f(x)=x^2$, $A\ (-1;\ 3)$;
2) $f(x)=\sin x$, $B\ (\pi;\ -1)$;
3) $f(x)=e^x$, $C\ (0;\ -6)$.

9.9.• Для функції f знайдіть первісну, графік якої проходить через указану точку:

1) $f(x)=x^3$, $M\left(1;\ \dfrac{5}{4}\right)$;
2) $f(x)=\cos x$, $N\left(\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{5}{2}\right)$;
3) $f(x)=3^x$, $K\left(2;\ \dfrac{9}{\ln 3}\right)$.

9.10.° Для функції f знайдіть на проміжку I первісну F, яка набуває даного значення в указаній точці:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $I=(0;\ +\infty)$, $F\left(\frac{1}{3}\right)=-9$;

2) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $I=\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$;

3) $f(x)=\frac{1}{x}$, $I=(-\infty;\ 0)$, $F(-e^3)=7$;

4) $f(x)=\frac{1}{x^4}$, $I=(-\infty;\ 0)$, $F\left(-\frac{1}{2}\right)=3$.

9.11.° Для функції f знайдіть на проміжку I первісну F, яка набуває даного значення в указаній точці:

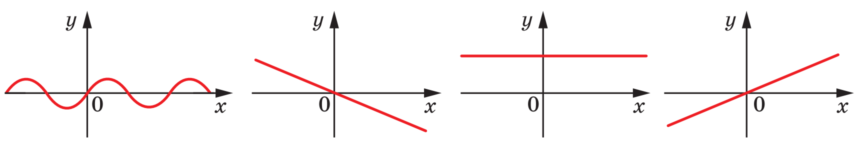
1) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$, $I=(0;\ \pi)$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$;

2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $I=(0;\ +\infty)$, $F(16)=10$;

3) $f(x)=\frac{1}{x}$, $I=(0;\ +\infty)$, $F\left(\frac{1}{e}\right)=-2$;

4) $f(x)=2^x$, $I=(-\infty;\ +\infty)$, $F(5)=1$.

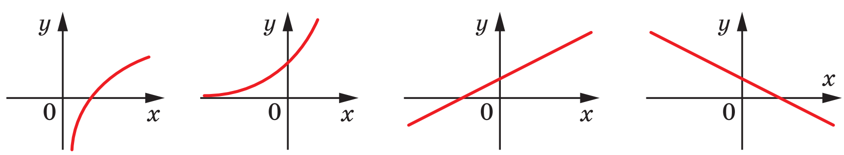
9.12.° Укажіть на рисунку 9.2 графік, який може бути графіком первісної функції $f(x)=\cos 3$.



а *б* *в* *г*

Рис. 9.2

9.13.° Укажіть на рисунку 9.3 графік, який може бути графіком первісної функції $f(x)=\sin 2$.



а *б* *в* *г*

Рис. 9.3

9.14. Для функції $f(x)=\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}$ знайдіть які-небудь дві первісні, відстань між відповідними точками яких (тобто точками з рівними абсцисами) дорівнює 2.

9.15. Доведіть, що функції $F_1(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ і $F_2(x)=-\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ є первісними функції $f(x)=\cos 2x$. При якому значенні C є правильною рівність $F_1(x)=F_2(x)+C$?

9.16. Доведіть, що функції $F_1(x)=\sin^2 x$ і $F_2(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$ є первісними функції $f(x)=\sin 2x$. При якому значенні C є правильною рівність $F_2(x)=F_1(x)+C$?

9.17. Знайдіть загальний вигляд первісних функції

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{якщо } x<0,\\ \sin x, & \text{якщо } x\geqslant 0.\end{cases}$$

9.18. Знайдіть загальний вигляд первісних функції

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x<1,\\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{якщо } x\geqslant 1.\end{cases}$$

9.19. Знайдіть $\int x^3\sin x^4\,dx$.

9.20. Знайдіть $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$.

9.21. Непарна функція, визначена на $\mathbb{R}$, має первісну. Доведіть, що ця первісна є парною функцією.

9.22. Парна функція f, визначена на $\mathbb{R}$, має первісну. Доведіть, що серед первісних функції f є непарна функція.

9.23. Періодична функція f з періодом T, визначена на $\mathbb{R}$, має первісну. Василь Заплутайко міркує так:

1) нехай F — одна з первісних функції f; тоді $\int f(x)\,dx=F(x)+C_1$, де C_1 — довільне число;
2) оскільки $(F(x+T))'=f(x+T)\cdot(x+T)'=f(x+T)$, то функція $y=F(x+T)$ — одна з первісних функції $y=f(x+T)$; звідси $\int f(x+T)\,dx=F(x+T)+C_2$, де C_2 — довільне число;
3) оскільки $f(x)=f(x+T)$, то $\int f(x)\,dx=\int f(x+T)\,dx$; звідси $F(x)+C_1=F(x+T)+C_2$, де C_1, C_2 — довільні числа; тому у випадку $C_1=C_2$ виконується рівність $F(x)=F(x+T)$;

4) оскільки рівність $F(x) = F(x+T)$ виконується для всіх $x \in \mathbb{R}$, то F — періодична функція.

Чи погоджуєтеся ви з міркуваннями Василя?

10. Правила знаходження первісної

Знаходячи похідні функцій, ви користувалися правилами диференціювання. У цьому пункті ми розглянемо три правила знаходження первісних (три правила інтегрування).

Теорема 10.1. ***Якщо функції F і G є відповідно первісними функцій f і g на проміжку I, то на цьому проміжку функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$.***

Доведення. З умови випливає, що для будь-якого $x \in I$ виконуються рівності $F'(x) = f(x)$ і $G'(x) = g(x)$. Тоді для всіх x із проміжку I маємо:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x). \blacktriangleleft$$

З теореми 10.1 випливає, що

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C,$$

де C — довільне число.

Аналогічно можна довести, що

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + C.$$

Теорема 10.2. ***Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, а k — деяке число, то на цьому проміжку функція $y = kF(x)$ є первісною функції $y = kf(x)$.***

Доведіть теорему 10.2 самостійно.

З теореми 10.2 випливає, що

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C,$$

де C — довільне число.

Теорема 10.3. ***Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, а k — деяке число, відмінне від нуля, то на відповідному проміжку функція $y = \frac{1}{k}F(kx+b)$ є первісною функції $y = f(kx+b)$.***

Доведення. Використовуючи правило знаходження похідної складеної функції, запишемо:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot(kx+b)' = \frac{1}{k}f(kx+b)\cdot k = f(kx+b). \blacktriangleleft$$

З теореми 10.3 випливає, що

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C,$$

де C — довільне число.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть загальний вигляд первісних функції $f(x)=\sqrt{x}+\frac{2}{x^2}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, то функція $y=\dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$, тобто функція $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, є первісною функції $y=\sqrt{x}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$.

Оскільки $\frac{1}{x^2}=x^{-2}$, то функція $y=\dfrac{x^{-2+1}}{-2+1}$, тобто функція $y=-\frac{1}{x}$, є первісною функції $y=\frac{1}{x^2}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$. Тоді за теоремою 10.2 функція $y=-\frac{2}{x}$ є первісною функції $y=\frac{2}{x^2}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$.

Скориставшись теоремою 10.1, отримуємо, що функція $y=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{2}{x}$ є первісною заданої в умові функції f на проміжку $(0;\ +\infty)$. Тоді запис $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{2}{x}+C$, де C — довільне число, є загальним виглядом первісних функції f на проміжку $(0;\ +\infty)$. ◀

Розв'язання прикладу 1 можна записати й так:

$$\int\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx = \int\sqrt{x}\,dx+\int\frac{2}{x^2}dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx+2\int x^{-2}\,dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+2\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{2}{x}+C,$$

де C — довільне число.

ПРИКЛАД 2 Знайдіть одну з первісних функції:

1) $y = \cos(2x+1)$;

2) $y = \dfrac{1}{(5x-3)^3}$ на проміжку $\left(\dfrac{3}{5}; +\infty\right)$.

Розв'язання. 1) Оскільки функція $F(x) = \sin x$ є первісною функції $f(x) = \cos x$, то за теоремою 10.3 функція $y = \dfrac{1}{k}F(kx+b)$, тобто функція $y = \dfrac{1}{2}\sin(2x+1)$, є первісною функції $y = \cos(2x+1)$.

2) Оскільки $\dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$, то на будь-якому проміжку, який не містить точку 0, первісною функції $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ є функція $F(x) = \dfrac{x^{-3+1}}{-3+1}$, тобто $F(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$. Тоді на проміжку $\left(\dfrac{3}{5}; +\infty\right)$ первісна функції $y = \dfrac{1}{(5x-3)^3}$ має вигляд $y = \dfrac{1}{5}\cdot\left(-\dfrac{1}{2(5x-3)^2}\right)$, тобто

$$y = -\frac{1}{10(5x-3)^2}. ◄$$

ПРИКЛАД 3 Для функції $f(x) = \dfrac{1}{4x-3}$ знайдіть первісну на проміжку $\left(-\infty; \dfrac{3}{4}\right)$, графік якої проходить через точку $M\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$.

Розв'язання. За теоремою 10.3 запис $\dfrac{1}{4}\ln|4x-3| + C$, де C — довільне число, є загальним виглядом первісних функції f на заданому проміжку.

На проміжку $\left(-\infty; \dfrac{3}{4}\right)$ шукана первісна має вигляд $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln(3-4x) + C$, де C — деяке число. З умови випливає, що $F\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$. Тоді $\dfrac{1}{4}\ln\left(3 - 4\cdot\dfrac{1}{2}\right) + C = 2$, звідси $C = 2$.

Отже, $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln(3-4x) + 2$. ◄

ПРИКЛАД 4 Швидкість руху матеріальної точки по координатній прямій змінюється за законом $v(t)=\frac{3}{\sqrt{2t+1}}$. Знайдіть закон руху $y=s(t)$, якщо $s(0)=3$ (переміщення вимірюють у метрах, час — у секундах).

Розв'язання. Функція $y=s(t)$ є первісною функції $y=v(t)$ на проміжку $[0;+\infty)$. Тоді можна записати:

$$s(t)=3\cdot\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{2t+1}+C,\ \text{тобто}\ s(t)=3\sqrt{2t+1}+C,$$

де C — деяке число.

Знайдемо C з умови $s(0)=3$. Маємо:

$$3\sqrt{2\cdot0+1}+C=3,\ \text{звідси}\ C=0.$$

Отже, шуканий закон руху задається формулою

$$s(t)=3\sqrt{2t+1}.$$ ◄

У 10 класі ви дізналися, як знайти похідні добутку функцій, частки функцій та похідну складеної функції. Можливо, після ознайомлення з матеріалом цього пункту у вас виникло запитання: як знайти первісні функцій $y=f(x)\,g(x)$, $y=\frac{f(x)}{g(x)}$ або $y=f(g(x))$, якщо відомі первісні функцій $y=f(x)$ і $y=g(x)$. На жаль, загальних правил знаходження первісних таких функцій не існує.

Також зауважимо, що не кожна функція f, визначена на проміжку I, має первісну на цьому проміжку. Можна показати, що, наприклад, функція $y=\operatorname{sgn}x$ не має первісної (див. вправу 10.26). Продовжуючи навчання у вищому навчальному закладі, ви зможете довести, що *кожна неперервна на проміжку функція має первісну на цьому проміжку*.

ВПРАВИ

10.1.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x)=4-2x$;
2) $f(x)=3x^2-x+5$;
3) $f(x)=5\sin x+\cos x$;
4) $f(x)=x^3(2-x^2)$;
5) $f(x)=5e^x-2\cdot3^x$;
6) $f(x)=\frac{6}{x}-x^3$ на проміжку $(-\infty;\ 0)$;

7) $f(x)=\dfrac{9}{\sin^2 x}+\dfrac{x^4}{4}$ на проміжку $(0;\ \pi)$;

8) $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x}}+x^3$ на проміжку $(0;\ +\infty)$;

9) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}$ на проміжку $(-\infty;\ 0)$;

10) $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{6}{x^5}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$.

10.2.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x)=x+3$;

2) $f(x)=x^2+4x-1$;

3) $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2+1}$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{2}e^x+2^x\ln 2$;

5) $f(x)=\dfrac{9}{\cos^2 x}-3\sin x$ на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$;

6) $f(x)=5\sqrt[4]{x}-\dfrac{3}{x}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$;

7) $f(x)=6x^2-\dfrac{2}{x^2}$ на проміжку $(0;\ +\infty)$;

8) $f(x)=\dfrac{9}{x^{10}}+\dfrac{8}{x^9}$ на проміжку $(-\infty;\ 0)$.

10.3.• Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x)=\sin 5x$;

2) $f(x)=2\cos\dfrac{x}{2}$;

3) $f(x)=\left(6x+\dfrac{1}{2}\right)^3$;

4) $f(x)=\left(\dfrac{x}{7}-2\right)^4$;

5) $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}}$;

6) $f(x)=7^{3x}$;

7) $f(x)=-\dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

8) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 3x}$ на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{6}\right)$;

9) $f(x)=\dfrac{8}{\sin^2 4x}$ на проміжку $\left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$;

10) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ на проміжку $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$;

11) $f(x)=\sqrt{x+4}$ на проміжку $[-4;\ +\infty)$;

12) $f(x)=\dfrac{6}{3x+2}$ на проміжку $\left(-\dfrac{2}{3};+\infty\right)$;

13) $f(x)=\dfrac{4}{(4x-3)^2}$ на проміжку $\left(-\infty;\ \dfrac{3}{4}\right)$;

14) $f(x)=\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}$ на проміжку $(-\infty;\ 2]$.

10.4.° Знайдіть загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x)=\sin\dfrac{x}{4}$;

2) $f(x)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$;

3) $f(x)=e^{5-\frac{x}{2}}$;

4) $f(x)=\dfrac{1}{2^{3x+5}}$;

5) $f(x)=(2x-3)^5$;

6) $f(x)=\dfrac{1}{\cos^2\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)}$ на проміжку $\left(-\dfrac{\pi}{8};\ \dfrac{3\pi}{8}\right)$;

7) $f(x)=\dfrac{3}{(3x-1)^3}$ на проміжку $\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$;

8) $f(x)=\dfrac{1}{3-x}$ на проміжку $(-\infty;\ 3)$;

9) $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{5}}$ на проміжку $(0;\ 5\pi)$;

10) $f(x)=\sqrt[4]{4x+7}$ на проміжку $\left(-\dfrac{7}{4};+\infty\right)$.

10.5.• Для функції f на проміжку I знайдіть первісну F, яка задовольняє дану умову:

1) $f(x) = 1 - 2x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(3) = 2$;
2) $f(x) = 3x^2 - 4x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(1) = 4$;
3) $f(x) = \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(\pi) = 7$;
4) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$;
5) $f(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{4}\right) = 1$;
6) $f(x) = \frac{7}{x - 4} + \frac{1}{\sqrt{x + 4}}$, $I = (4; +\infty)$, $F(5) = 6$;
7) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{6x + 1}}$, $I = \left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$, $F(4) = 7$;
8) $f(x) = e^{3x}$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(0) = 1$;
9) $f(x) = (2 - 3x)^2$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(1) = 0$;
10) $f(x) = \frac{4}{\cos^2\left(6x - \frac{\pi}{6}\right)}$, $I = \left(-\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{9}\right)$, $F(0) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

10.6.• Для функції f на проміжку I знайдіть первісну F, графік якої проходить через дану точку:

1) $f(x) = 3 - 6x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $A(-1; 0)$;
2) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$, $I = (-\infty; +\infty)$, $B(1; 5)$;
3) $f(x) = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$, $C(4; 10)$;
4) $f(x) = 2\sin 3x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $D\left(\frac{\pi}{3}; 0\right)$;
5) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\frac{x}{2} - 2}}$, $I = (4; +\infty)$, $E(6; 12)$;
6) $f(x) = e^{2x + 1}$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$;
7) $f(x) = \frac{1}{4x - 3e^2}$, $I = \left(\frac{3e^2}{4}; +\infty\right)$, $K(e^2; 6)$;
8) $f(x) = \frac{1}{\sin^2\frac{x}{8}}$, $I = (0; 8\pi)$, $N(2\pi; -3)$.

10.7.$^{\bullet}$ Для функції $f(x) = 4x^3 + 4x$ знайдіть первісну F, один із нулів якої дорівнює -1. Знайдіть решту нулів цієї первісної.

10.8.$^{\bullet}$ Для функції $f(x) = x^2 - 12$ знайдіть первісну F, один із нулів якої дорівнює 3.

10.9.$^{\bullet}$ Функції F_1 і F_2 є первісними функції f на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Графік функції F_1 проходить через точку A, а функції F_2 — через точку B. Графік якої з функцій, F_1 або F_2, розташований вище, якщо:

1) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$, $A\ (1;\ 2)$, $B\ (0;\ 5)$;
2) $f(x) = (2x - 1)^2$, $A\ (2;\ 6)$, $B\ (-1;\ 1)$?

10.10.$^{\bullet}$ Функції F_1 і F_2 є первісними функції $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{5x-1}}$ на проміжку $\left(\dfrac{1}{5}; +\infty\right)$. Графік функції F_1 проходить через точку $M(1;\ 9)$, а функції F_2 — через точку $N\ (10;\ 8)$. Графік якої з функцій, F_1 або F_2, розташований вище?

10.11.$^{\bullet}$ Швидкість матеріальної точки, яка рухається по координатній прямій, змінюється за законом $v(t) = t^2 + 2t - 3$. Запишіть формулу залежності її координати від часу, якщо в початковий момент часу $t = 0$ точка знаходилася в початку координат.

10.12.$^{\bullet}$ Тіло рухається по координатній прямій зі швидкістю, яка в будь-який момент часу t визначається за формулою $v(t) = 6t^2 + 1$. Знайдіть формулу, яка виражає залежність координати точки від часу, якщо в момент часу $t = 3$ с тіло знаходилося на відстані 10 м від початку координат (швидкість руху вимірюють у метрах за секунду).

10.13.$^{\bullet}$ Задайте формулою функцію, визначену на проміжку $(-\infty; +\infty)$, графік якої проходить через точку $A\ (-1;\ 6)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до цього графіка в точці з абсцисою x, дорівнює $6x^2 - 5x^4$.

10.14.$^{\bullet}$ Задайте формулою функцію, визначену на проміжку $(0; +\infty)$, графік якої проходить через точку $B\ (4;\ -5)$, якщо кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до цього графіка в точці з абсцисою x, дорівнює $\dfrac{3}{\sqrt{x}} + 1$.

10.15.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть:

1) $\int \sin^2 x\,dx$;
2) $\int \sin 5x \cos 3x\,dx$;
3) $\int \sin\dfrac{7x}{3}\sin\dfrac{5x}{3}\,dx$.

10.16.•• Знайдіть:

1) $\int \cos^2 2x\,dx$;   2) $\int \cos x \cos 8x\,dx$.

10.17.•• Знайдіть на проміжку $(1; +\infty)$ загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$;   2) $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x - 1}$.

10.18.•• Знайдіть на проміжку $(-\infty; -3)$ загальний вигляд первісних функції:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x}$;   2) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 6}{3 + x}$.

10.19.•• Знайдіть загальний вигляд первісних функції $y = \mathrm{tg}^2\, x$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

10.20.•• Знайдіть загальний вигляд первісних функції $y = \mathrm{ctg}^2\, x$ на проміжку $(0; \pi)$.

10.21.•• Для функції $f(x) = 2x^2 + 3x$ знайдіть таку первісну, що пряма $y = 5x - 2$ є дотичною до її графіка.

10.22.•• Для функції $f(x) = x^2 - 4$ знайдіть таку первісну, що пряма $y = -3$ є дотичною до її графіка.

10.23.•• Для функції $f(x) = -2x + 5$ знайдіть таку первісну, щоб її графік мав тільки одну спільну точку з прямою $y = 2$.

10.24.•• Для функції $f(x) = x + 1$ знайдіть таку первісну, щоб її графік мав тільки одну спільну точку з прямою $y = -4$.

10.25.•• Василь Заплутайко шукає первісну функції $y = \cos x^2$ так:

1) робить заміну $x^2 = t$ і отримує функцію $y = \cos t$;
2) далі шукає первісну функції $y = \cos t$ і отримує $y = \sin t$;
3) потім замість t підставляє значення $t = x^2$ і робить висновок, що кожна первісна має вигляд $y = \sin x^2 + C$, де C — деяке число.

У чому полягає помилка Василя?

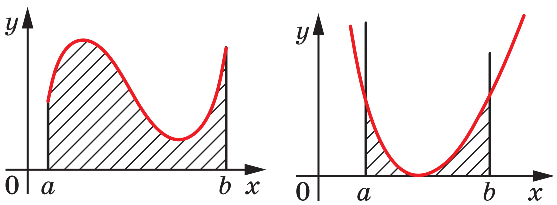
10.26.* Чи має функція $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$ первісну?

10.27.* Чи може функція, розривна в деякій точці, мати первісну на проміжку $(-\infty; +\infty)$?

11. Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл

Розглянемо функцію f, яка є неперервною на відрізку $[a; b]$ і набуває на ньому невід'ємних значень. Фігуру, обмежену графіком функції f і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$, називають *криволінійною трапецією*.

На рисунку 11.1 наведено приклади криволінійних трапецій.



а *б* *в*

Рис. 11.1

У курсі геометрії ви ознайомилися з поняттям площі многокутника. Строге означення площі криволінійної трапеції виходить за межі навчальної програми. Надалі будемо користуватися властивостями площі криволінійної трапеції, звертаючись до інтуїтивного уявлення про площу фігури.

Розглянемо теорему, яка дає змогу обчислювати площі криволінійних трапецій.

Теорема 11.1. ***Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, можна обчислити за формулою***

$$S = F(b) - F(a),$$

де F — будь-яка первісна функції f на відрізку $[a; b]$.

Доведення. Розглянемо функцію $y = S(x)$, де $x \in [a; b]$, яку визначено таким правилом.

Якщо $x = a$, то $S(a) = 0$; якщо $x \in (a; b]$, то $S(x)$ — це площа криволінійної трапеції, показаної штриховкою на рисунку 11.2.

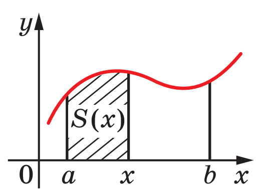


Рис. 11.2

Доведемо, що $S'(x) = f(x)$ для всіх $x \in [a; b]$.

Нехай x_0 — довільна точка відрізка $[a; b]$ і Δx — приріст аргументу функції $y = S(x)$

у точці x_0. Обмежимося розглядом випадку, коли $\Delta x > 0$ (випадок, коли $\Delta x < 0$, розглядають аналогічно).

Маємо: $\Delta S = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0)$.

Отримуємо, що ΔS — це площа криволінійної трапеції, заштрихованої на рисунку 11.3.

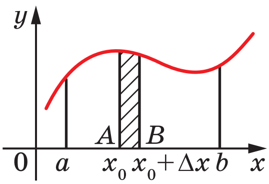


Рис. 11.3

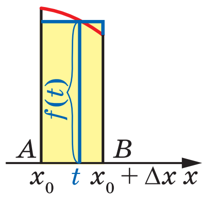


Рис. 11.4

На відрізку AB як на стороні побудуємо прямокутник, площа якого дорівнює ΔS (рис. 11.4). Довжини сторін цього прямокутника дорівнюють Δx і $f(t)$, де t — деяка точка проміжку $[x_0;\ x_0 + \Delta x]$. Існування такої точки t можна довести, використовуючи для функції f другу теорему Вейєрштрасса та другу теорему Больцано—Коші про проміжне значення неперервної функції.

Таким чином, $\Delta S = f(t) \cdot \Delta x$. Звідси $\dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(t)$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то $t \to x_0$. Оскільки функція f є неперервною в точці x_0, то $\lim\limits_{t \to x_0} f(t) = f(x_0)$. Звідси, якщо $\Delta x \to 0$, то $f(t) \to f(x_0)$.

Маємо: $S'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(t) = f(x_0)$.

Оскільки x_0 — довільна точка області визначення функції $y = S(x)$, то для будь-якого $x \in [a;\ b]$ виконується рівність $S'(x) = f(x)$.

Отримали, що функція $y = S(x)$ є однією з первісних функції f на відрізку $[a;\ b]$.

Нехай F — деяка первісна функції f на відрізку $[a;\ b]$. Тоді згідно з основною властивістю первісної можна записати:

$$F(x) = S(x) + C,$$

де C — деяке число.

Маємо: $F(b) - F(a) = (S(b) + C) - (S(a) + C) = S(b) - S(a) = S(b)$.

За означенням функції $y = S(x)$ шукана площа S криволінійної трапеції дорівнює $S(b)$. Отже,

$$S = F(b) - F(a). \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 1 Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = \sin x$ та прямими $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ і $x = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. На рисунку 11.5 зображено криволінійну трапецію, площу якої потрібно знайти.

Однією з первісних функції $f(x) = \sin x$ на відрізку $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ є функція $F(x) = -\cos x$.

Тоді $S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. ◄

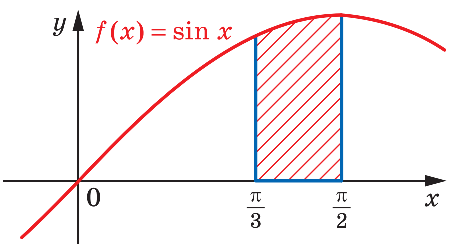


Рис. 11.5

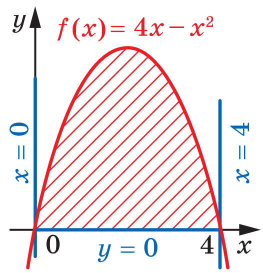


Рис. 11.6

ПРИКЛАД 2 Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = 4x - x^2$ і прямою $y = 0$.

Розв'язання. Графік функції f перетинає пряму $y = 0$ у точках $x_1 = 0$ і $x_2 = 4$ (рис. 11.6). Тоді фігура, площу якої треба знайти, є криволінійною трапецією, обмеженою графіком функції f і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

Однією з первісних функції f на відрізку $[0; 4]$ є функція $F(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$. Тоді

$$S = F(4) - F(0) = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = \frac{32}{3}. \blacktriangleleft$$

Означення. **Нехай F — первісна функції f на проміжку I, числа a і b, де $a < b$, належать проміжку I. Різницю $F(b) - F(a)$ називають визначеним інтегралом функції f на відрізку $[a; b]$.**

Визначений інтеграл функції f на відрізку $[a; b]$ позначають $\int\limits_a^b f(x)dx$ (читають: «інтеграл від a до b еф від ікс де ікс»). Отже,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),} \qquad (1)$$

де F — довільна первісна функції f на відрізку $[a; b]$.

Наприклад, функція $F(x) = x^3$ є первісною функції $f(x) = 3x^2$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Тоді для довільних чисел a і b, де $a < b$, можна записати:

$$\int\limits_a^b 3x^2\,dx = F(b) - F(a) = b^3 - a^3.$$

Зауважимо, що значення різниці $F(b) - F(a)$ не залежить від того, яку саме первісну функції f вибрано. Справді, кожну первісну G функції f на проміжку I можна подати у вигляді $G(x) = F(x) + C$, де C — деяка стала. Тоді

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Під час доведення теореми 11.1 встановлено, що функція $y = S(x)$ (рис. 11.2) є первісною неперервної на відрізку функції f, яка набуває на ньому лише невід'ємних значень. Це твердження ілюструє той факт, що *кожна неперервна на відрізку функція має первісну на цьому відрізку*. У свою чергу це означає, що для кожної неперервної на відрізку $[a; b]$ функції існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Рівність (1) називають **формулою Ньютона—Лейбніца**.

Отже, для обчислення визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ за формулою Ньютона—Лейбніца потрібно:

1) знайти будь-яку первісну F функції f на відрізку $[a; b]$;
2) обчислити значення первісної F у точках $x = b$ і $x = a$.
3) знайти різницю $F(b) - F(a)$.

Під час обчислення визначених інтегралів різницю $F(b) - F(a)$ позначають $F(x)\Big|_a^b$.

Використовуючи таке позначення, обчислимо, наприклад, інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx$.

Маємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}.$$

ПРИКЛАД 3 Обчисліть $\int_1^2 (x^4 + x^2 - 2)\,dx$.

Розв'язання. Маємо:

$$\int_1^2 (x^4 + x^2 - 2)\,dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3} - 2\cdot 1\right) = 6\frac{8}{15}. \blacktriangleleft$$

Якщо функція f має первісну F на відрізку $[a; b]$ і $c \in (a; b)$, то з формули Ньютона—Лейбніца випливає така властивість визначеного інтеграла:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Справді,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \big(F(b) - F(c)\big) + \big(F(c) - F(a)\big) = \int_c^b f(x)\,dx + \int_a^c f(x)\,dx.$$

Якщо кожна з функцій f і g має первісну на відрізку $[a; b]$, то, використовуючи теореми 10.1 і 10.2, можна довести (зробіть це самостійно) такі властивості визначеного інтеграла:

1) $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$

2) $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx,$ де k — деяке число.

Формула Ньютона—Лейбніца дає змогу встановити зв'язок між визначеним інтегралом і площею S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$.

Використовуючи теорему 11.1, можна записати:

$$\boxed{\boldsymbol{S = \int_a^b f(x)\,dx}}$$

Ця рівність виражає **геометричний зміст визначеного інтеграла**.

Зауважимо, що в наведеній формулі розглядаються неперервні функції f, які на відрізку $[a; b]$ набувають тільки невід'ємних значень. Проте визначений інтеграл можна використовувати для обчислення площ більш складних фігур.

Розглянемо неперервні на відрізку $[a; b]$ функції f і g такі, що для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geqslant g(x)$.

Покажемо, як знайти площу S фігури Φ, обмеженої графіками функцій f і g та прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 11.7).

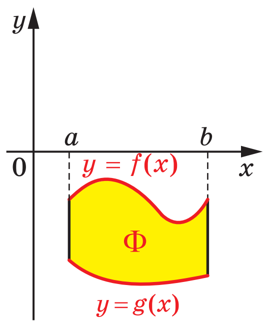


Рис. 11.7

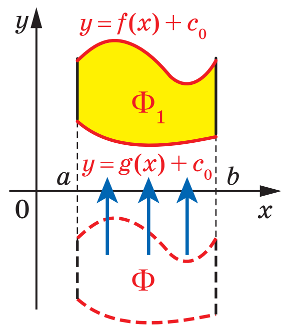


Рис. 11.8

Перенесемо фігуру Φ угору на c_0 одиниць так, щоб отримана фігура Φ_1 знаходилася вище від осі абсцис (рис. 11.8). Фігура Φ_1 обмежена графіками функцій $y = f(x) + c_0$ і $y = g(x) + c_0$ та прямими $x = a$, $x = b$.

Оскільки фігури Φ і Φ_1 мають рівні площі, то шукана площа S дорівнює різниці $S_f - S_g$, де:

S_f — площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x) + c_0$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ (рис. 11.9, *а*);

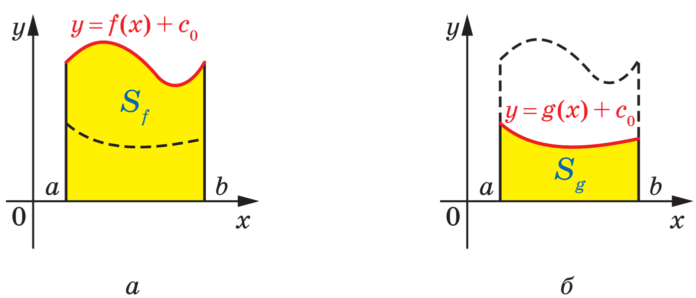


Рис. 11.9

S_g — площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = g(x) + c_0$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ (рис. 11.9, *б*).

Таким чином, використовуючи властивості визначеного інтеграла, можемо записати:

$$S = S_f - S_g = \int_a^b (f(x) + c_0)\,dx - \int_a^b (g(x) + c_0)\,dx =$$

$$= \int_a^b ((f(x) + c_0) - (g(x) + c_0))\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

Отже, *якщо функції f і g є неперервними на відрізку $[a; b]$ і для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geqslant g(x)$, то площу S фігури, яка обмежена графіками функцій f і g та прямими $x = a$ і $x = b$, можна обчислити за формулою*

$$\boxed{S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx}$$

ПРИКЛАД 4 Знайдіть площу S фігури, обмеженої графіками функцій $f(x) = -x^2 + 6x - 6$ і $g(x) = x^2 - 2x$.

Розв'язання. Розв'язавши рівняння $f(x) = g(x)$, установлюємо, що графіки функцій f і g перетинаються у двох точках з абсцисами $x = 1$ і $x = 3$. На рисунку 11.10 зображено фігуру (вона зафарбована жовтим кольором), площу якої потрібно знайти.

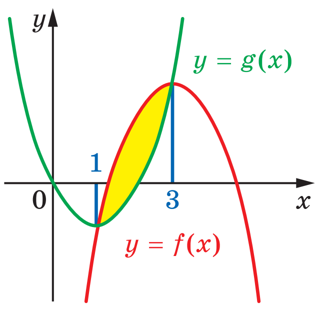


Рис. 11.10

Тоді шукана площа

$$S = \int_1^3 (f(x) - g(x))\,dx =$$

$$= \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)\,dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 - 6x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(-\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3\right) - \left(-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 4 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1\right) = \frac{8}{3}. \blacktriangleleft$$

ВПРАВИ

11.1.° Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку 11.11.

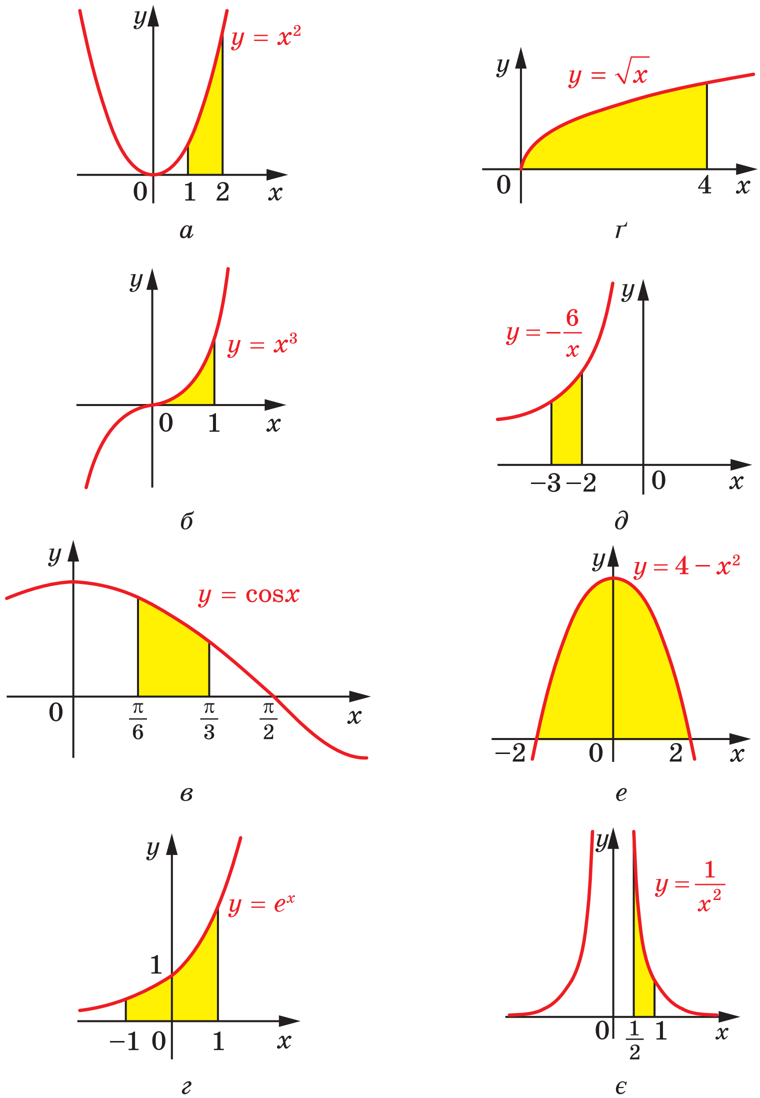


Рис. 11.11

11.2.° Знайдіть площу криволінійної трапеції, зображеної на рисунку 11.12.

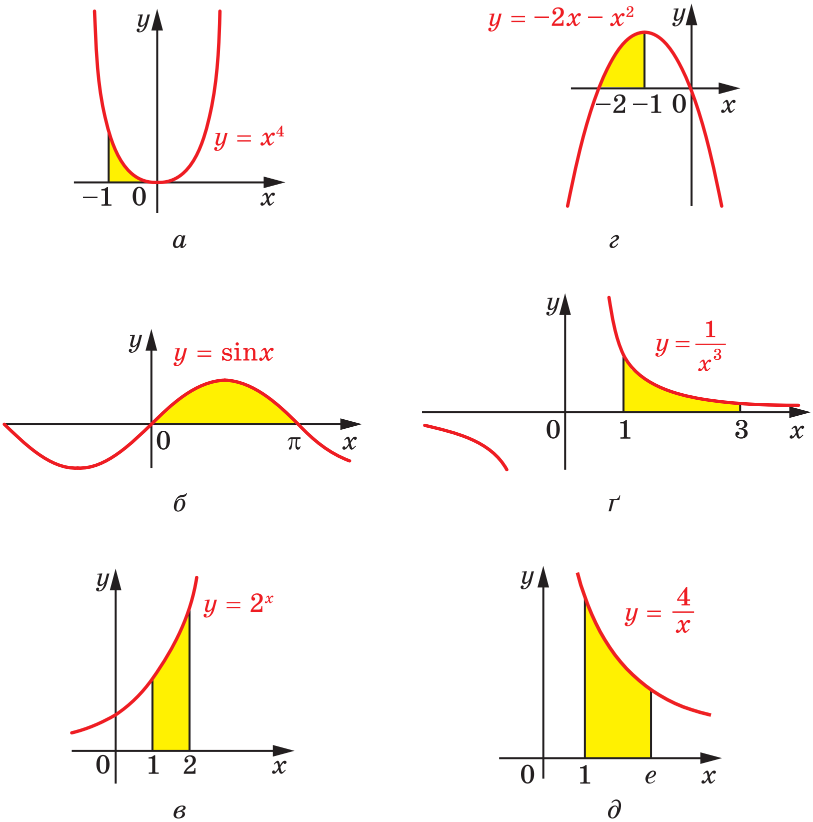


Рис. 11.12

11.3.° Обчисліть:

1) $\int\limits_5^7 x\,dx$;

2) $\int\limits_3^8 dx$;

3) $\int\limits_{-3}^0 x^2\,dx$;

4) $\int\limits_{-1}^2 x^4\,dx$;

5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$;

6) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

7) $\int\limits_{16}^{100} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

8) $\int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x}$;

9) $\int\limits_1^{10} \frac{dx}{x^2}$;

10) $\int_{-2}^{3} 3^x\,dx$;

11) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\,dx$;

12) $\int_{-4}^{-2} (2x+4)\,dx$;

13) $\int_{0}^{6} (3x^2 - x)\,dx$;

14) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x + 2\cos x)\,dx$.

11.4.° Обчисліть:

1) $\int_{-4}^{-2} 2dx$;

2) $\int_{1}^{2} x^3\,dx$;

3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$;

4) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

5) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^4}$;

6) $\int_{0}^{4} e^x\,dx$;

7) $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x}$;

8) $\int_{4}^{9} \sqrt{x}\,dx$;

9) $\int_{-1}^{1} (1-5x^4)\,dx$.

11.5.° Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої:

1) параболою $y = x^2 + 1$ і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

2) косинусоїдою $y = \cos x$ і прямими $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$;

3) графіком функції $y = -x^3$ і прямими $y = 0$, $x = -2$;

4) параболою $y = 3 - 2x - x^2$ і прямими $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$;

5) гіперболою $y = \frac{1}{2x}$ і прямими $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$;

6) параболою $y = 2x - x^2$ і віссю абсцис;

7) синусоїдою $y = \sin 2x$ і прямими $y = 0$, $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{\pi}{4}$;

8) графіком функції $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ і прямими $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$;

9) графіком функції $y = e^x + 1$ і прямими $y = 0$, $x = 0$, $x = -2$;

10) графіком функції $y = \sqrt{5-x}$ і прямими $y = 0$, $x = -4$.

11.6.° Знайдіть площу криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$;

2) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;

3) $y = -\frac{8}{x}$, $y = 0$, $x = -4$, $x = -2$;

4) $y = \frac{1}{(x+2)^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$;

5) $y = \sqrt{x+4}$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 5$;

6) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = -4$.

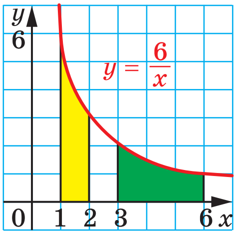


Рис. 11.13

11.7.° Доведіть, що криволінійні трапеції, зафарбовані на рисунку 11.13, рівновеликі.

11.8.° Обчисліть:

1) $\int_1^3 (4x^3 - 4x + 3)\,dx$;

2) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}\,dx$;

3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3dx}{\sin^2 2x}$;

4) $\int_{-2}^{1} (x-3)^2\,dx$;

5) $\int_{\frac{1}{5}}^{1} (5x-3)^5\,dx$;

6) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$;

7) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{3-2x}$;

8) $\int_0^{2\pi} \left(\sin\frac{x}{6} + \cos 5x\right)dx$;

9) $\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)dx$;

10) $\int_{-6}^{0} e^{-\frac{x}{6}}\,dx$;

11) $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{(4x+1)^3}$;

12) $\int_{12}^{116} \sqrt[3]{\frac{x}{4} - 2}\,dx$.

11.9.° Обчисліть:

1) $\int_1^4 \left(\frac{4}{x^2} + 2x - 3x^2\right)dx$;

2) $\int_{\frac{4\pi}{3}}^{4\pi} \sin\frac{x}{4}\,dx$;

3) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}$;

4) $\int_0^1 (2x-1)^4\,dx$;

5) $\int_4^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$;

6) $\int_{\ln 3}^{\ln 4} e^{-2x}\,dx$;

7) $\int_0^3 \frac{dx}{3x+1}$;

8) $\int_1^{\frac{7}{6}} \frac{dx}{(6x-5)^2}$;

9) $\int_1^4 \sqrt{7x-3}\,dx$.

11.10.• Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2$, $y = 4$;
2) $y = 2x^2$, $y = 2x$;
3) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 2$;
4) $y = \frac{4}{x}$, $y = 1$, $x = 1$;
5) $y = \frac{4}{x}$, $y = 4$, $x = 4$;
6) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$;
7) $y = 2 + x - x^2$, $y = 2 - x$;
8) $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$;
9) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$;
10) $y = -x^2 + 2x$, $y = x^2$;
11) $y = x^3$, $y = x^2$;
12) $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$;
13) $y = \frac{7}{x}$, $x + y = 8$;
14) $y = \frac{2}{x^2}$, $y = 2x$, $x = 2$;
15) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

11.11.• Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) графіком функції $y = x^3$ і прямими $y = 8$, $x = 1$;
2) параболою $y = 0{,}5x^2$ і прямою $y = -x$;
3) параболою $y = 4 - x^2$ і прямою $y = 3$;
4) параболою $y = 6 + x - x^2$ і прямою $y = 6 - 2x$;
5) параболами $y = x^2 - 4x + 4$ і $y = 4 - x^2$;
6) гіперболою $y = \frac{3}{x}$ і прямими $y = 3$, $x = 3$;
7) графіком функції $y = e^{-x}$ і прямими $y = e$, $x = 0$;
8) гіперболою $y = \frac{5}{x}$ і прямою $x + y = 6$.

11.12.• Знайдіть площу фігури, обмеженої віссю ординат і графіками функцій $y = \cos 2x$, $y = \sin x$, заданих на відрізку $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$.

11.13.• При якому додатному значенні параметра a визначений інтеграл $\int_0^a (6 - 2x)\,dx$ набуває найбільшого значення?

11.14.• При яких значеннях параметра a площа фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 0$, $x = a$, дорівнює 9?

11.15.• При яких значеннях параметра a площа фігури, обмеженої лініями $y = 2x^3$, $y = 0$, $x = a$, дорівнює 8?

11.16.• При якому значенні параметра a пряма $x = a$ розбиває фігуру, обмежену графіком функції $y = \frac{2}{x}$ і прямими $y = 0$, $x = 3$, $x = 12$, на дві рівновеликі фігури?

11.17.$^{\bullet}$ При якому значенні параметра a пряма $x = a$ розбиває фігуру, обмежену графіком функції $y = -x^3$ та прямими $y = 0$, $x = -2$, на дві рівновеликі фігури?

11.18.$^{\bullet}$ При яких значеннях параметра a виконується нерівність:

1) $\int\limits_0^a (4-2x)dx < 3$, де $a > 0$;

2) $\int\limits_{\log_{0,2} 6}^{a} 0,2^x\, dx > \frac{19}{\ln 0,2}$, де $a > \log_{0,2} 6$?

11.19.$^{\bullet}$ При яких значеннях параметра a, більших за $\frac{1}{2}$, виконується нерівність $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{a}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx > 1,5$?

11.20.$^{\bullet}$ Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{12}} \mathrm{tg}^2\, 3x\, dx$; 2) $\int\limits_{-\pi}^{0} 2\sin^2 \frac{x}{4} dx$; 3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos x\, dx$; 4) $\int\limits_1^2 \frac{e^x + x^3}{x^3 e^x} dx$.

11.21.$^{\bullet}$ Обчисліть визначений інтеграл:

1) $\int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{15\pi}{4}} \mathrm{ctg}^2 \frac{x}{5} dx$;

2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x\, dx$;

3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \sin 7x \cos 3x\, dx$;

4) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x^2 - e^x}{x^2 e^x} dx$.

11.22.$^{\bullet}$ Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 - 3x - 4$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$;
2) $y = -x^2$, $y = x - 2$;
3) $y = x^2 - 4$, $y = 4 - x^2$;
4) $y = x^2 - 2x$, $y = x$;
5) $y = 3 \sin x$, $y = -2 \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$;
6) $y = \frac{4}{x} - 2$, $y = 2$, $x = 2$, $x = 4$.

11.23.$^{\bullet}$ Знайдіть площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 - 4x$, $y = x - 4$;
2) $y = 3 - x^2$, $y = 2x$;
3) $y = \cos x$, $y = -2 \cos x$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$;
4) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

11.24.•• Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) графіком функції $y = \begin{cases} 2 - x^2, \text{ якщо } x < 1, \\ 2x - 1, \text{ якщо } x \geqslant 1, \end{cases}$ і прямими $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$;

2) графіком функції $y = \begin{cases} \cos x, \text{ якщо } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 - x, \text{ якщо } 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$ і прямою $y = 0$.

11.25.•• Знайдіть площу фігури, обмеженої:

1) графіком функції $y = \begin{cases} x + 3, \text{ якщо } x < -1, \\ x^2 + 1, \text{ якщо } x \geqslant -1, \end{cases}$ і прямими $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$;

2) графіком функції $y = \begin{cases} x + 2, \quad \text{ якщо } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ 2\cos 2x, \text{ якщо } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{4}, \end{cases}$ і прямою $y = 0$.

11.26.•• Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, прямою, яка дотикається до цієї параболи в точці з абсцисою $x_0 = 2$, та осями координат.

11.27.•• Знайдіть площу фігури, обмеженої віссю абсцис, графіком функції $y = 2x^3$ та прямою, яка дотикається до цього графіка в точці з абсцисою $x_0 = 1$.

11.28.•• Областю визначення неперервної функції f є проміжок $[0; +\infty)$. Знайдіть похідну функції $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$.

11.29.•• Областю визначення неперервної функції f є проміжок $(-\infty; 0]$. Знайдіть похідну функції $F(x) = \int\limits_x^0 f(t)\,dt$.

11.30.•• Функція f неперервна на відрізку $[a; b]$. Доведіть існування такого $c \in (a; b)$, що $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b - a)$.

11.31.•• Функції f і g неперервні на відрізку $[a; b]$ і для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geqslant g(x)$. Доведіть, що $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

11.32.•• Функція f неперервна на відрізку $[a; b]$ і для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \leqslant 0$. Нехай S — площа фігури, обмеженої прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$ та графіком функції f. Доведіть, що $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -S$.

11.33.•• Доведіть, що коли неперервна на $\mathbb{R}$ функція $y = f(x)$ є парною, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx$, де $a > 0$.

11.34.•• Доведіть, що коли неперервна на $\mathbb{R}$ функція $y = f(x)$ є непарною, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$, де $a > 0$.

11.35.•• Обчисліть:

1) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$;
2) $\int\limits_{-3}^{0} \sqrt{9-x^2}\,dx$;
3) $\int\limits_{4}^{8} \sqrt{8x-x^2}\,dx$;
4) $\int\limits_{-5}^{1} \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$;
5) $\int\limits_{-4}^{1} |x|\,dx$;
6) $\int\limits_{0}^{5} |x-2|\,dx$.

11.36.•• Обчисліть:

1) $\int\limits_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$;
2) $\int\limits_{0}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12-x^2}\,dx$;
3) $\int\limits_{1}^{5} \sqrt{6x-x^2-5}\,dx$;
4) $\int\limits_{-2}^{2} |x+1|\,dx$.

11.37.•• Знайдіть $\int\limits_{-2}^{2} \frac{2^{\sqrt[3]{x}}-1}{2^{\sqrt[3]{x}}+1}dx$.

11.38.•• Знайдіть $\int\limits_{-1}^{1} \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)dx$.

11.39.* Обчисліть визначений інтеграл $\int\limits_{1}^{e} \ln x\,dx$.

11.40.* Обчисліть визначений інтеграл $\int\limits_{0}^{1} \arcsin x\,dx$.

11.41.* Знайдіть одну з первісних функції $y = \sqrt{4-x^2}$ на проміжку $[-2; 2]$.

11.42.* Доведіть нерівність $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > \int\limits_{1}^{n+1} \frac{1}{x}dx$.

11.43.* Доведіть збіжність послідовності із загальним членом $x_n = \frac{1}{\sqrt{1^3}}+\frac{1}{\sqrt{2^3}}+\frac{1}{\sqrt{3^3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

12. Обчислення об'ємів тіл

У попередньому пункті ви дізналися, як за допомогою інтегрування можна обчислювати площу криволінійної трапеції. Нагадаємо, що коли фігура обмежена графіками функцій f і g та прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 12.1), то її площу можна обчислити за формулою

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

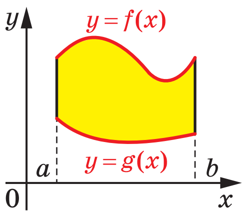


Рис. 12.1

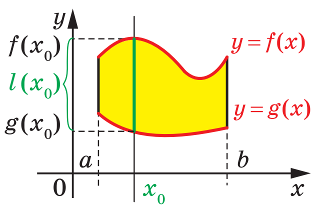


Рис. 12.2

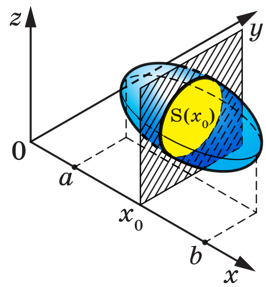


Рис. 12.3

Розглянемо функцію $l(x) = f(x) - g(x)$. Величина $l(x_0) = f(x_0) - g(x_0)$ дорівнює довжині відрізка, по якому вертикальна пряма $x = x_0$ перетинає дану фігуру (рис. 12.2). Отже, можна записати:

$$S = \int_a^b l(x)\,dx. \qquad (1)$$

Виявляється, що останню формулу можна узагальнити для розв'язування задач на обчислення об'ємів просторових тіл.

У просторовій прямокутній декартовій системі координат розглянемо тіло Φ, об'єм якого дорівнює V. Нехай площина $x = x_0$ перетинає тіло Φ по фігурі з площею $S(x_0)$, а проекцією тіла Φ на вісь абсцис є відрізок $[a; b]$ (рис. 12.3). Якщо $y = S(x)$ — неперервна на відрізку $[a; b]$ функція, то об'єм тіла Φ можна обчислити за формулою

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx} \qquad (2)$$

Цю формулу можна довести, використовуючи ідею доведення теореми 11.1.

Покажемо, як за допомогою отриманої формули вивести формулу об'єму піраміди.

Нехай дано піраміду з висотою OM, рівною h, і основою, площа якої дорівнює S (рис. 12.4). Доведемо, що об'єм піраміди дорівнює $V = \frac{1}{3}Sh$. Уведемо систему координат так, щоб вершина піраміди O збіглася з початком координат, а висота піраміди OM належала додатній півосі осі абсцис (рис. 12.5). Тоді основа піраміди лежить у площині $x = h$, а проекцією піраміди на вісь абсцис є відрізок $[0;\ h]$.

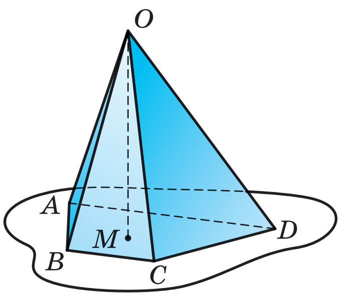


Рис. 12.4

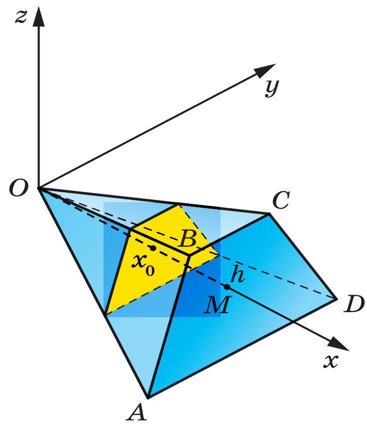


Рис. 12.5

Нехай площина $x = x_0$ перетинає піраміду по многокутнику з площею $S(x_0)$. Зрозуміло, що площина перерізу паралельна площині основи піраміди. Тому многокутник, утворений у перерізі, подібний многокутнику основи піраміди з коефіцієнтом подібності $\frac{x_0}{h}$. Скориставшись теоремою про відношення площ подібних фігур, можна записати:

$$\frac{S(x_0)}{S} = \frac{x_0^2}{h^2}.$$

Звідси $S(x_0) = \frac{x_0^2}{h^2}S$. Тепер можна записати:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{x^2}{h^2}Sdx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^h = \frac{S}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}Sh.$$

ПРИКЛАД Фігура, обмежена графіком функції $f(x) = x^2 + 1$ і прямими $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ (рис. 12.6), обертається навколо осі абсцис, утворюючи тіло об'єму V (рис. 12.7). Знайдіть V.

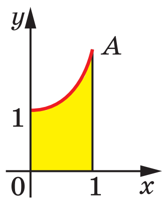


Рис. 12.6

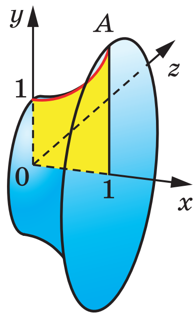


Рис. 12.7

Розв'язання. У перетині утвореного тіла площиною $x = x_0$, де $x_0 \in [0; 1]$, утворюється круг (рис. 12.8), радіус якого дорівнює $f(x_0)$. Тоді площа цього круга дорівнює:

$$S(x_0) = \pi f^2(x_0) = \pi\left(x_0^2 + 1\right)^2 = \pi\left(x_0^4 + 2x_0^2 + 1\right).$$

Тому

$$V = \int_0^1 S(x)\,dx = \int_0^1 \pi(x^4 + 2x^2 + 1)\,dx =$$

$$= \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{28\pi}{15}.$$ ◄

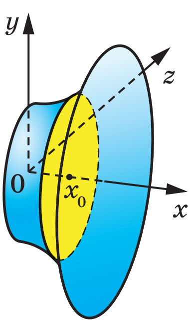


Рис. 12.8

Узагалі, має місце таке твердження.

Якщо в результаті обертання навколо осі абсцис фігури, обмеженої графіком неперервної та невід'ємної на відрізку $[a; b]$ функції f і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$, утворюється тіло об'єму V, то

$$\boxed{V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

ВПРАВИ

12.1.• Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями:

1) $y = 2x + 1,\ x = 1,\ x = 0,\ y = 0;$
2) $y = x^2 + 1,\ x = 1,\ x = 2,\ y = 0;$
3) $y = \sqrt{x},\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0;$
4) $y = x^2,\ y = x;$
5) $y = \frac{1}{x},\ y = 0,\ x = \frac{1}{2},\ x = 2,\ y = x.$

12.2.• Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями:

1) $y = \sqrt{\cos x},\ y = 0,\ x = -\frac{\pi}{4},\ x = \frac{\pi}{4};$
2) $y = x - x^2,\ y = 0;$
3) $y = \sqrt{x},\ y = 1,\ x = 2.$

12.3.• У кулі радіуса R на відстані $\frac{R}{2}$ від її центра проведено площину, яка розбиває кулю на дві частини. Знайдіть об'єми цих частин.

12.4.• Доведіть, що об'єм кулі радіуса R дорівнює $\frac{4}{3}\pi R^3$.

12.5.• Виведіть формулу для обчислення об'єму конуса.

«РОЗУМОМ ВІН ПЕРЕВЕРШИВ РІД ЛЮДСЬКИЙ»

Ці величні слова написано нащадками про видатного англійського науковця — фізика й математика Ісаака Ньютона. В історії науки поряд з Ньютоном стоїть ще одна гігантська фігура — німецького науковця Ґотфріда Вільгельма Лейбніца, який залишив після себе немеркнучий слід у філософії, математиці, юриспруденції, логіці, дипломатії, історії, політології. Серед великої наукової спадщини цих геніальних учених особливе місце належить досягненням, пов'язаним зі створенням диференціального та інтегрального числення — науки про похідні та первісні.

Варто підкреслити, що Ньютон і Лейбніц створювали свої теорії в той час, коли звичні для нас поняття та терміни або взагалі не існували, або не мали точного змісту. Спробуйте уявити собі підручник з «Алгебри і початків аналізу», у якому немає термінів «множина», «функція», «дійсне число», «границя» тощо. Більш того, багато зручних сучасних позначень тоді ще не набули загальноприйнятого вжитку. Деякі з них Ньютону та Лейбніцу довелося самим винаходити, узагальнювати й пристосовувати до потреб. Наприклад, Лейбніц почав позначати операцію множення крапкою (до нього використовували символи: $\square$, $\times$, $*$, M тощо), операцію ділення — двокрапкою (раніше часто використовували літеру D); Ньютон поширив позначення для степеня a^n на випадок цілих та дробових значень n, а позначення $\sqrt{x}$ узагальнив до $\sqrt[n]{x}$. Термін «функція» і символ інтеграла «$\int$» уперше зустрічаються в роботах Лейбніца.

Узагалі, історію розвитку математики можна сміливо розділити на дві епохи: до і після появи похідної та інтеграла. Відкриття Ньютона та Лейбніца дали змогу науковцям швидко й легко розв'язувати задачі, які раніше вважалися абсолютно неприступними.

Наведемо показовий приклад. У першій половині XVII ст. видатний італійський математик Бонавентура Кавальєрі запропонував

Ісаак Ньютон
(1643–1727)

Ґотфрід Вільгельм Лейбніц
(1646–1716)

новий метод для обчислення площ. Користуючись ним, Кавальєрі зміг обчислити площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = x^n$, віссю абсцис і вертикальною прямою $x = 1$, при деяких значеннях n (рис. 12.9). Наполегливо працюючи понад 10 років, шляхом надзвичайно складних та громіздких міркувань Кавальєрі зміг розв'язати задачу лише для натуральних значень n, менших від 10.

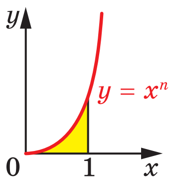


Рис. 12.9

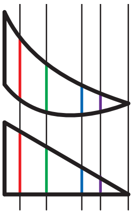


Рис. 12.10

Годі й казати, що, використовуючи формулу Ньютона—Лейбніца, шукану площу можна знайти в один рядок не тільки для натуральних, а й для всіх додатних значень n:

$$S = \int_0^1 x^n\,dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Проте в той час метод, запропонований Кавальєрі, мав надзвичайно важливе значення, оскільки до XVII ст. протягом кількох тисяч років усі намагання науковців розв'язати таку або подібну задачі були взагалі безрезультатними.

Для своїх розрахунків Кавальєрі сформулював такий принцип: *якщо всі прямі, паралельні між собою, перетинають фігури* F_1 *і* F_2 *по відрізках однакової довжини* (рис. 12.10), *то такі фігури мають рівні площі.*

Ознайомившись із цим принципом, у 1644 р. видатний італійський математик і фізик Еванджеліста Торрічеллі писав: «Без сумнівів, геометричний принцип Кавальєрі є дивовижним за своєю економією засобом для знаходження теорем... Це — справді царська дорога серед хащ математичного тернику».

Наприклад, із принципу Кавальєрі випливає, що прямокутник і паралелограм з однаковими стороною та висотою мають рівні площі (рис. 12.11).

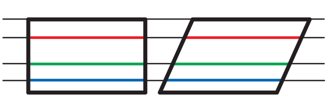


Рис. 12.11

Але принцип Кавальєрі застосовний і для більш складних фігур. Наприклад, обчислимо площу «криволінійного чотирикутника» $ABCD$, обмеженого лініями $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{x}+1$, $x=0$, $x=1$.

Поряд із «криволінійним чотирикутником» розглянемо одиничний квадрат (рис. 12.12). Кожна вертикальна пряма перетинає обидві фігури по відрізках одиничної довжини. Тоді з принципу Кавальєрі випливає, що площа «криволінійного чотирикутника» $ABCD$ дорівнює площі одиничного квадрата, тобто одиниці.

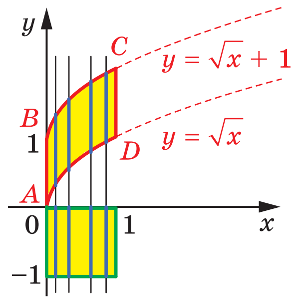


Рис. 12.12

Просторовий аналог принципу Кавальєрі дає змогу обчислити, наприклад, об'єм півкулі через об'єми циліндра та конуса.

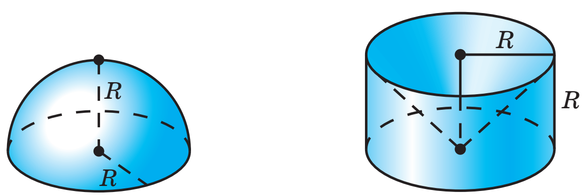


Рис. 12.13

На рисунку 12.13 зображено півкулю радіуса R і циліндр, з якого «вирізано» конус. Радіуси основ, а також висоти циліндра і конуса дорівнюють R. Можна показати (зробіть це самостійно), що кожна горизонтальна площина перетинає півкулю по кругу, площа якого дорівнює площі кільця (рис. 12.14).

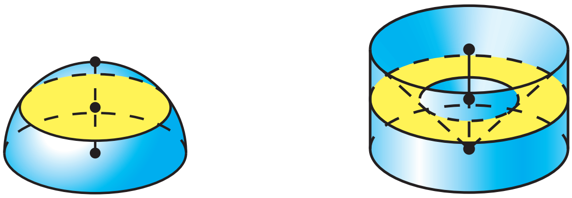


Рис. 12.14

Тоді з просторового принципу Кавальєрі випливає, що об’єм півкулі дорівнює:

$$V = V_{\text{цил}} - V_{\text{кон}} = \pi R^3 - \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

Ідеї, близькі до сформульованого принципу Кавальєрі, наштовхнули Ньютона та Лейбніца до створення зручної загальної теорії (див. формули (1) і (2) на с. 118), яка дозволила просто й швидко обчислювати площі та об’єми різноманітних фігур.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Первісна

Функцію F називають первісною функцією (або коротко первісною) функції f на проміжку I, якщо для всіх $x \in I$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Невизначений інтеграл

Сукупність усіх первісних функції $y = f(x)$ на проміжку I називають її невизначеним інтегралом і позначають $\int f(x)dx$.

Основна властивість первісної

Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I та C — довільне число, то функція $y = F(x) + C$ також є первісною функції f на проміжку I.

Будь-яку первісну функції f на проміжку I можна подати у вигляді $y = F(x) + C$, де C — деяке число.

Правила знаходження первісної

1. Якщо функції F і G є відповідно первісними функцій f і g на проміжку I, то на цьому проміжку функція $y = F(x) + G(x)$ є первісною функції $y = f(x) + g(x)$.
2. Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, а k — деяке число, то на цьому проміжку функція $y = kF(x)$ є первісною функції $y = kf(x)$.
3. Якщо функція F є первісною функції f на проміжку I, а k — деяке число, відмінне від нуля, то на відповідному проміжку функція $y = \frac{1}{k}F(kx + b)$ є первісною функції $y = f(kx + b)$.

Визначений інтеграл

Нехай F — первісна функції f на проміжку I, числа a і b, де $a < b$, належать проміжку I. Різницю $F(b) - F(a)$ називають визначеним інтегралом функції f на відрізку $[a; b]$ і позначають $\int_a^b f(x)dx$.

Формула Ньютона—Лейбніца

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, де F — довільна первісна функції f на відрізку $[a; b]$.

Площа криволінійної трапеції

1) Площу S криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$ та прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, можна обчислити за формулою $S = F(b) - F(a)$, де F — будь-яка первісна функції f на проміжку $[a; b]$.
2) Якщо функції f і g є неперервними на відрізку $[a; b]$ і для всіх $x \in [a; b]$ виконується нерівність $f(x) \geqslant g(x)$, то площу S фігури, яка обмежена графіками функцій f і g та прямими $x = a$ і $x = b$, можна обчислити за формулою

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx.$$

ТАБЛИЦЯ ПЕРВІСНИХ

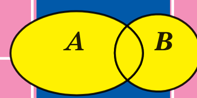
Функція f	Первісна функції f
k (стала)	kx
x^{α}, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$

Функція f	Первісна функції f
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\text{ctg}\ x$
e^x	e^x
$a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$

Обчислення об’ємів тіл обертання

Якщо в результаті обертання навколо осі абсцис фігури, обмеженої графіком неперервної та невід’ємної на відрізку $[a; b]$ функції f і прямими $x = a$, $x = b$ і $y = 0$, утворюється тіло об’єму V, то

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx.$$



§ 3. Елементи теорії ймовірностей

13. **Біном Ньютона**

14. **Аксіоми теорії ймовірностей**

15. **Умовна ймовірність**

16. **Незалежні події**

17. **Випадкова величина**

18. **Математичне сподівання випадкової величини**

19. **Геометрична ймовірність**

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з формулою бінома Ньютона, характеристиками випадкової величини.
- Розширите та поглибите свої знання про теорію ймовірностей, набудете нових знань для розв'язування ймовірнісних задач.

13. Біном Ньютона

У 9 класі ви ознайомилися з основними правилами комбінаторики, дізналися, що таке перестановки, розміщення та сполуки (комбінації), і вивчили формули для їх обчислення. Нагадаємо основні означення та формули.

Означення. Перестановкою скінченної множини M називають будь-який упорядкований набір, утворений з усіх елементів множини M.

Наприклад, існує 6 перестановок множини $M = \{a, b, c\}$:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Кількість перестановок n-елементної множини позначають P_n.

Для будь-якого $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ справедлива формула

$$\boxed{P_n = n!}$$

Означення. Будь-який k-елементний упорядкований набір елементів даної n-елементної множини називають розміщенням з n елементів по k елементів.

Наприклад, якщо $M = \{a, b, c\}$, то існує 6 розміщень із 3 елементів по 2 елементи:

$$(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b).$$

Кількість розміщень з n елементів по k елементів позначають A_n^k.

Для будь-яких чисел $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ і $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, де $k \leqslant n$, справедлива формула

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Означення. Будь-яку k-елементну підмножину заданої n-елементної множини називають сполукою (комбінацією) з n елементів по k елементів.

Наприклад, якщо $M = \{a, b, c, d\}$, то існує 6 комбінацій із 4 елементів по 2 елементи:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}.$$

Кількість комбінацій з n елементів по k елементів позначають C_n^k.

Для будь-яких чисел $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ і $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, де $k \leqslant n$, справедлива формула

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}}$$

Перестановки, розміщення та комбінації застосовують під час розв'язування багатьох задач. Одним із таких прикладів є задача знаходження формули скороченого множення для виразу $(a+b)^n$.

Формули скороченого множення для випадків, коли показник степеня n набуває значень 1, 2, 3, вам добре відомі. Знайдемо формулу для загального випадку $n \in \mathbb{N}$.

Вираз $(a+b)^n$ є добутком n однакових множників $(a + b)$.

У добутку

$$\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n \text{ множників}} \qquad (1)$$

розкриємо всі дужки одразу. Для цього в кожній з n дужок $(a + b)$ необхідно вибрати змінну a або b, перемножити вибрані змінні та додати всі такі добутки.

Наприклад, якщо в усіх дужках вибрати змінну a:

$$(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b),$$

то дістанемо вираз a^n, що є одним із доданків суми, яку отримаємо після розкриття дужок у добутку (1). Якщо в першому множнику $(a + b)$ добутку (1) вибрати змінну b, а в усіх інших — змінну a:

$$(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b),$$

то отримаємо доданок $a^{n-1}b$. Зауважимо, що доданок $a^{n-1}b$ можна отримати й іншими способами, наприклад, вибираючи з другого множника змінну b і з решти — змінну a:

$$(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b).$$

Узагалі, якщо в k множниках $(a + b)$ добутку (1) вибрати змінну b, а в решті $(n - k)$ множниках — змінну a, то отримаємо доданок виду $a^{n-k}b^k$, де $0 \leqslant k \leqslant n$. Серед n множників $(a + b)$ вибрати k множників (для вибору в них змінної b) можна C_n^k способами. Тому в результуючій сумі кількість доданків виду $a^{n-k}b^k$ дорівнюватиме C_n^k.

Таким чином, після розкриття дужок вираз $(a+b)^n$ можна подати у вигляді суми

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n.}$$

Отриману формулу називають **формулою бінома Ньютона**, а коефіцієнти C_n^k — **біноміальними коефіцієнтами**.

Зауважимо, що у формулі бінома Ньютона вираз $(a+b)^n$ подано як суму $n+1$ доданка, де $(k+1)$-й доданок має вигляд

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Якщо у формулі бінома Ньютона знак змінної b поміняти на протилежний, то отримаємо формулу

$$(a-b)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 - C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + (-1)^n b^n.$$

ПРИКЛАД 1 Розкрийте дужки у виразі $(a+b)^5$.

Розв'язання. Оскільки $C_5^1 = 5$, $C_5^2 = 10$, $C_5^3 = 10$, $C_5^4 = 5$, то можна записати:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2 Вираз $\left(\frac{5}{\sqrt[4]{x^3}} + 2x^3\right)^{40}$ розклали за формулою бінома Ньютона. Який член розкладу не залежить від x?

Розв'язання. Запишемо $(k+1)$-й член розкладу:

$$T_{k+1} = C_{40}^k \left(\frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{40-k} \left(2x^3\right)^k = C_{40}^k 5^{40-k} 2^k x^{-\frac{3}{4}(40-k)+3k}.$$

Доданок T_{k+1} не буде залежати від x, якщо $-\frac{3}{4}(40-k) + 3k = 0$. Звідси $k = 8$ і $T_9 = C_{40}^8 5^{32} 2^8$.

Відповідь: $T_9 = C_{40}^8 5^{32} 2^8$. ◄

Використовуючи формулу бінома Ньютона, запишемо розклади виразів $(a+b)^n$, де $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, у такій формі:

$(a+b)^0$: $\mathbf{1}$

$(a+b)^1$: $\mathbf{1} \cdot a^1 + \mathbf{1} \cdot b^1$

$(a+b)^2$: $\mathbf{1} \cdot a^2 + \mathbf{2} \cdot a^1 b^1 + \mathbf{1} \cdot b^2$

$(a+b)^3$: $\mathbf{1} \cdot a^3 + \mathbf{3} \cdot a^2 b^1 + \mathbf{3} \cdot a^1 b^2 + \mathbf{1} \cdot b^3$

$(a+b)^4$: $\mathbf{1} \cdot a^4 + \mathbf{4} \cdot a^3 b^1 + \mathbf{6} \cdot a^2 b^2 + \mathbf{4} \cdot a^1 b^3 + \mathbf{1} \cdot b^4$

$(a+b)^5:\quad \mathbf{1}\cdot a^5 + \mathbf{5}\cdot a^4b^1 + \mathbf{10}\cdot a^3b^2 + \mathbf{10}\cdot a^2b^3 + \mathbf{5}\cdot a^1b^4 + \mathbf{1}\cdot b^5$

... ...

Було помічено, що записані в трикутну таблицю біноміальні коефіцієнти (їх виділено червоним кольором) мають багато цікавих властивостей. Наприклад, можна побачити, що, додавши два сусідніх червоних числа, отримаємо інше червоне число, записане в наступному рядку між двома даними числами (рис. 13.1).

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Рис. 13.1

Ця властивість випливає з рівності $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, яку ви розглядали в 9 класі.

Таким чином, сума двох сусідніх біноміальних коефіцієнтів C_n^k і C_n^{k+1} дорівнює біноміальному коефіцієнту C_{n+1}^{k+1}, який записано в наступному рядку таблиці між C_n^k і C_n^{k+1}.

На форзаці 4 можна побачити більшу кількість рядків трикутної таблиці біноміальних коефіцієнтів. Її називають **трикутником Паскаля** на честь французького математика Блеза Паскаля, який написав детальний трактат про цю трикутну таблицю чисел.

Блез Паскаль

(1623–1662)

Французький математик, фізик, літератор і філософ. Один із засновників математичного аналізу, теорії ймовірностей і проективної геометрії. Створив перші зразки обчислювальної техніки.

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що сума чисел у кожному рядку трикутника Паскаля є степенем двійки.

Розв'язання. У формулу бінома Ньютона

$$1 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1}b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot a^1 b^{n-1} + 1 \cdot b^n = (a+b)^n$$

підставимо значення $a = b = 1$. Маємо:

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + 1 = 2^n.$$

Залишилося лише зауважити, що 1, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^{n-1}, 1 є числами одного рядка трикутника Паскаля. ◄

У трикутнику Паскаля приховано багато цікавих закономірностей. Наприклад, якщо замість непарних чисел трикутника Паскаля поставити чорну точку ●, а замість парних нічого не ставити взагалі (біла точка), то можна отримати рисунок 13.2. Цей рисунок[1] можна побудувати, керуючись таким правилом: між точками однакового кольору в наступному рядку треба ставити білу точку, а між точками різного кольору — чорну точку.

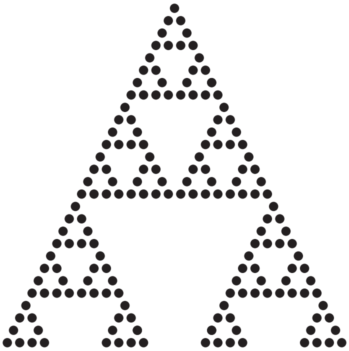


Рис. 13.2

ВПРАВИ

13.1.° Запишіть усі двоцифрові числа, утворені із цифр 1, 2, 3 або 4. Обчисліть кількість таких чисел.

13.2.° Запишіть усі трицифрові числа, утворені із цифр 1, 2, 3 або 4, якщо цифри в числі не можуть повторюватися. Підрахуйте кількість таких чисел.

[1] Такі фігури в математиці називають *фракталами* (від лат. *fractus* — подрібнений, дробовий).

13.3.° Запишіть усі чотирицифрові числа, утворені із цифр 1 або 2. Підрахуйте кількість таких чисел.

13.4.° Запишіть усі трицифрові числа, утворені із цифр 1, 2, 3, 4 або 5, якщо цифри у числі не можуть повторюватися та мають бути розміщені в порядку зростання. Підрахуйте кількість таких чисел.

13.5.° Запишіть формулу бінома Ньютона для виразу $(a+b)^6$.

13.6.° Запишіть формулу бінома Ньютона для виразу $(a+b)^7$.

13.7.• Обчисліть кількість доданків після розкриття дужок у виразі $(a_1+a_2+\ldots+a_{10})(b_1+b_2+\ldots+b_{20})$.

13.8.• Обчисліть кількість доданків після розкриття дужок у виразі $(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2+b_3+b_4)(c_1+c_2)$.

13.9.• Скількома способами в таблиці розміром $n \times n$ можна вибрати n клітинок так, щоб у кожному рядку та в кожному стовпчику було вибрано одну клітинку?

13.10.• На площині позначено 10 точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Скільки різних ламаних з вершинами в даних точках можна побудувати, якщо ламана має проходити через кожну з десяти точок по одному разу?

13.11.• Скількома способами 30 учнів можуть розсістися за 15 партами?

13.12.• Керівництво фірми придбало для своїх співробітників 6 туристичних путівок до різних країн. Скількома способами ці путівки можна розподілити між 25 співробітниками, якщо один співробітник може отримати не більше ніж одну путівку?

13.13.• У коробці лежить n карток із числами від 1 до n. З коробки треба послідовно вибрати п'ять карток. Скількома способами можна зробити такий вибір?

13.14.• На колі позначено 25 точок. Скільки існує шестикутників з вершинами в цих точках?

13.15.• Серед усіх стоцифрових послідовностей, складених із нулів та одиниць, знайдіть кількість тих, у яких 40 одиниць і 60 нулів.

13.16.• Обчисліть суму

$$3^n + C_n^1 3^{n-1} 2^1 + C_n^2 3^{n-2} 2^2 + \ldots + C_n^{n-1} 3^1 2^{n-1} + 2^n.$$

13.17.• Обчисліть суму $C_{100}^0 - C_{100}^1 + C_{100}^2 - C_{100}^3 + \ldots + C_{100}^{100}$.

13.18.• Обчисліть суму

$$2^{300}-C_{300}^{1}2^{299}+C_{300}^{2}2^{298}-C_{300}^{3}2^{297}+\ldots-C_{300}^{299}2+1.$$

13.19.• Доведіть, що

$$1+C_{100}^{1}3+C_{100}^{2}3^{2}+\ldots+C_{100}^{99}3^{99}+3^{100}=$$
$$=5^{100}-C_{100}^{1}5^{99}+C_{100}^{2}5^{98}-\ldots-C_{100}^{99}5+1.$$

13.20.• Доведіть, що

$$1+C_{100}^{1}3+C_{100}^{2}3^{2}+\ldots+C_{100}^{99}3^{99}+3^{100}=$$
$$=1-C_{200}^{1}3+C_{200}^{2}3^{2}-\ldots-C_{200}^{199}3^{199}+3^{200}.$$

13.21.• Знайдіть відношення суми чисел у 20-му рядку трикутника Паскаля до суми чисел у 19-му рядку.

13.22.• Знайдіть відношення суми чисел у 100-му рядку трикутника Паскаля до суми чисел у 200-му рядку.

13.23.• У виразі $\left(\sqrt{5}+\sqrt[3]{3}\right)^{100}$ розкрили дужки за формулою бінома Ньютона. Скільки з отриманих доданків є раціональними?

13.24.• У виразі $\left(\sqrt[3]{5}+\sqrt[4]{2}\right)^{800}$ розкрили дужки за формулою бінома Ньютона. Скільки раціональних доданків було отримано?

13.25.• При якому значенні n восьмий член розкладу виразу $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^{2}}\right)^{n}$ за формулою бінома Ньютона не залежить від x?

13.26.• У виразі $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{22}$ розкрили дужки за формулою бінома Ньютона. Який член розкладу можна подати у вигляді cx^{2}, де c — деяка стала?

13.27.• У виразі $\left(x^{4}+\frac{1}{x}\right)^{n}$ розкрили дужки за формулою бінома Ньютона. Відомо, що шостий член розкладу має вигляд $56x^{7}$. Знайдіть n.

13.28.• Скількома способами можна розкласти n різних куль по трьох різних ящиках (деякі ящики можуть залишитися порожніми)?

13.29.• Кожну клітинку прямокутника 3×5 можна пофарбувати в синій, жовтий або червоний колір. Скількома способами можна розфарбувати прямокутник?

13.30.$^{\bullet}$ Скількома способами можна розкласти 6 монет різного номіналу по 4 відділеннях гаманця?

13.31.$^{\bullet\bullet}$ Скількома способами можна розкласти n різних куль по трьох різних ящиках так, щоб жодний ящик не залишився порожнім?

13.32.$^{\bullet\bullet}$ Скількома способами можна розкласти n різних куль по трьох однакових ящиках так, щоб жодний ящик не залишився порожнім?

13.33.$^{\bullet\bullet}$ Скількома способами можна розкласти n різних куль по трьох однакових ящиках (деякі ящики можуть залишитися порожніми)?

13.34.$^{\bullet\bullet}$ Скількома способами можна розкласти n однакових куль по трьох різних ящиках (деякі ящики можуть залишитися порожніми)?

13.35.$^{\bullet\bullet}$ Скількома способами можна розкласти n однакових куль по трьох різних ящиках так, щоб жодний ящик не залишився порожнім?

13.36.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що суми чисел трикутника Паскаля, які стоять на червоних прямих (рис. 13.3), збігаються із числами Фібоначчі, тобто із числами послідовності (u_n), заданої рекурентно: $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $n \in \mathbb{N}$.

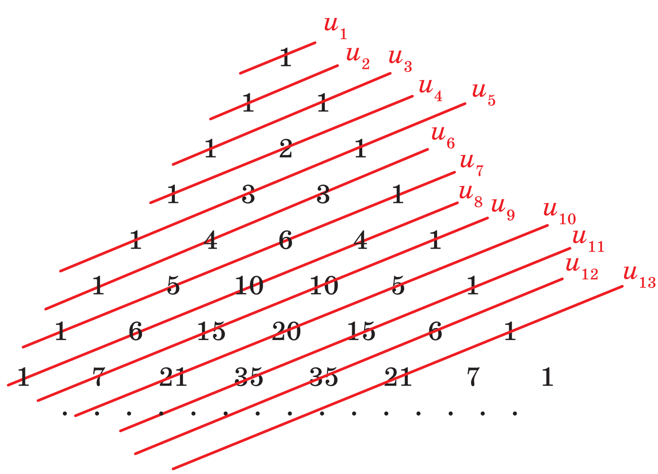


Рис. 13.3

13.37.•• Нехай у трикутнику Паскаля вибрано деяке число. Доведіть, що сума чисел трикутника Паскаля, розташованих паралельно стороні трикутника від вибраного числа до одиниці (наприклад, на рисунку 13.4 вибраним є число 10), дорівнює числу, що стоїть праворуч від даного в наступному рядку (на рисунку 13.4 сума червоних чисел дорівнює зеленому числу).

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Рис. 13.4

13.38.•• Поясніть, чому значення виразів $11^2 = 121$, $11^3 = 1331$ схожі на рядки трикутника Паскаля. Обчисліть 11^4.

13.39.•• Знайдіть кількість нулів у кінці десяткового запису числа $1001^{1000} - 1$.

13.40.•• Знайдіть кількість нулів у кінці десяткового запису числа $999^{1001} + 1$.

13.41.•• Використовуючи формулу бінома Ньютона, для всіх $x \geqslant 0$ і $n \in \mathbb{N}$ доведіть нерівність Бернуллі $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

13.42.•• Як вигідніше покласти гроші в банк на рік: під $12\,\%$ на рік чи під $1\,\%$ на місяць?

13.43.•• Для всіх $x > 0$ і $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, доведіть нерівність $\sqrt[n]{1+x} < 1 + \frac{x}{n}$.

13.44.•• Для всіх $x \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$ доведіть нерівність

$$(1+x)^n + (1-x)^n \geqslant 2.$$

13.45.•• Для всіх $x \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$ доведіть нерівність

$$\sin^{2n} x + \cos^{2n} x \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

13.46.•• У виразі $\left(1+\sqrt{2}\right)^{200}$ розкрили дужки за формулою бінома Ньютона. Який з отриманих доданків найбільший?

13.47.•• У виразі $(a+b)^{50}$ розкрили дужки за формулою бінома Ньютона при $a=2$, $b=-\sqrt{3}$. Який з отриманих доданків найменший?

13.48.•• Обчисліть суми

$$A = C_{101}^1 + C_{101}^3 + C_{101}^5 + \ldots + C_{101}^{101} \text{ і } B = C_{101}^0 + C_{101}^2 + C_{101}^4 + \ldots + C_{101}^{100}.$$

13.49.* Обчисліть суму $1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$.

13.50.* Обчисліть суму $\frac{C_n^0}{1} + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots + \frac{C_n^n}{n+1}$.

13.51.* Доведіть, що $\left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \left(C_n^2\right)^2 + \ldots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$.

13.52.* Знайдіть перші 1000 цифр після коми в десятковому записі числа $\left(\sqrt{50}+7\right)^{1000}$.

13.53.* Послідовність (a_n) задано рекурентним способом: $a_1 = 9$, $a_{k+1} = 19a_k^{20} + 20a_k^{19}$. Доведіть, що десятковий запис числа a_{21} закінчується не менше ніж на 1 000 000 дев'яток.

14. Аксіоми теорії ймовірностей

«Гральний кубик кинули тричі», «З коробки з білими та чорними кулями навмання витягують одну кулю», «Стрілець стріляє по мішені двічі» тощо. Такими словами, що описують деякий експеримент, починаються умови багатьох задач із теорії ймовірностей. І це не дивно, адже перш ніж відповідати на запитання «Чому дорівнює ймовірність?», потрібно чітко уявити експеримент (ще говорять: «випадковий експеримент»), у якому може виникнути таке запитання. Ознайомимося докладніше з тим, як у теорії ймовірностей прийнято описувати та досліджувати подібні експерименти.

Характерною особливістю випадкових експериментів є те, що вони закінчуються **результатом** (ще говорять: **елементарним наслідком**), який неможливо передбачити заздалегідь. Множину всіх результатів експерименту називають **простором елементарних наслідків** цього експерименту й позначають грецькою буквою Ω (омега). У теорії ймовірностей розглядають експерименти, у яких Ω — непорожня множина.

Наприклад, якщо монету підкинути два рази та записати, що випало на монеті, то в такому досліді елементарними наслідками будуть записи:

ГГ, ГЧ, ЧГ, ЧЧ,

де буква Г означає, що на монеті «випав герб», а буква Ч — «випало число». Таким чином, у цьому експерименті простір елементарних наслідків складається із чотирьох елементів:

$$\Omega = \{ГГ, ГЧ, ЧГ, ЧЧ\}.$$

Ще один приклад. Якщо гральний кубик кинути один раз і записати число, яке випало на верхній грані кубика, то в такому експерименті простір елементарних наслідків складається із шести чисел:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Проте ми можемо, кидаючи гральний кубик, робити інакше, наприклад, фіксувати лише факт випадіння шістки. Причини цього можуть бути найрізноманітнішими. Наприклад, на даному кубику можна розпізнати тільки шістку, оскільки числа на решті граней кубика стерлися. У цьому, узагалі кажучи, новому експерименті йдеться вже не про шість, а тільки про два елементарних наслідки:

«випала шістка», «не випала шістка»,

які утворюють двоелементний простір елементарних наслідків

$$\Omega = \{\text{«випала шістка», «не випала шістка»}\}.$$

Коли ми вивчаємо випадковий експеримент, нас, окрім елементарних наслідків, цікавлять ще й такі об'єкти, як *випадкові події, що є підмножинами простору елементарних наслідків* Ω. Наведемо приклад.

Для шкільної лотереї випущено 5 лотерейних білетів із серійними номерами від 1 до 5. Учасник лотереї деяким випадковим чином вибирає один із цих білетів і дізнається про його серійний номер. Таким чином, ідеться про дослід з п'ятьма елементарними наслідками та простором елементарних наслідків:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Беручи участь у якій-небудь лотереї, ми, як правило, мало цікавимося серійним номером самим по собі (елементарним наслідком досліду). Розповідаючи друзям про участь у лотереї, ми скоріше розкажемо про виграш, ніж обговорюватимемо цифри серійного номера білета. Тому важливіше дізнатися, чи є білет виграшним.

Наприклад, якщо за правилами розглядуваної лотереї виграшними є білети з парними серійними номерами, то нас цікавитиме, чи потрапив наш серійний номер до множини виграшних номерів

$$A = \{2, 4\}$$

або ж він є елементом множини програшних номерів

$$B = \{1, 3, 5\}.$$

Іншими словами, у цьому експерименті особливу роль відіграють дві підмножини: A (вибраний білет виграв) і B (вибраний білет програв). А, наприклад, підмножина $C = \{1,\ 2\}$ навряд чи викликатиме будь-який інтерес.

Таким чином, підмножини множини Ω, які цікавлять дослідника в тій чи іншій задачі, називають **випадковими подіями** (або просто **подіями**) експерименту, що вивчається.

Як ви знаєте з курсу алгебри 9 класу, у теорії ймовірностей кожній випадковій події X ставлять у відповідність деяке невід'ємне число $P(X)$, яке називають **ймовірністю випадкової події** X.

До випадкових подій завжди відносять множину Ω і порожню множину $\varnothing$. Таким чином, у будь-якому експерименті існує щонайменше дві випадкові події. У кінці цього пункту ми докладніше пояснимо, як формують множину випадкових подій.

Повернемося до досліду з лотерейним білетом. Нехай учасник витягнув виграшний білет, тобто білет із серійним номером 2 або 4. Оскільки цей елементарний наслідок є елементом множини A, то відбулася подія $A = \{2,\ 4\}$ — учасник виграв.

Узагалі вважають, що *в експерименті відбулася подія X, якщо елементарний наслідок ω, яким закінчився експеримент, є елементом множини X. У такому разі говорять, що елементарний наслідок* ω **сприяє події** X.

Наприклад, можна сказати, що будь-який елементарний наслідок сприяє події Ω, тобто подія Ω обов'язково відбувається, тому Ω називають **достовірною подією**. І навпаки, немає жодного наслідку, який сприяє події $\varnothing$, тобто ця подія ніколи не відбувається, тому її називають **неможливою подією.**

Можна зробити й такий висновок: у будь-якому експерименті події Ω і $\varnothing$ не можуть відбутися одночасно.

Означення. Якщо в деякому досліді дві події не можуть відбутися одночасно, то їх називають несумісними.

Іншими словами, події A і B є несумісними, якщо множини A і B не перетинаються.

Наприклад, Ω і $\varnothing$ — несумісні події.

Розглянемо більш змістовний приклад. Гральний кубик кидають один раз. Результатом досліду є число, що випало на верхній грані, тому $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. У цьому досліді можна розглянути різні події, наприклад такі:

A — «на кубику випала трійка», тобто $A = \{3\}$;

B — «на кубику випало парне число», тобто $B = \{2,\ 4,\ 6\}$;

C — «на кубику випало непарне число», тобто $C = \{1,\ 3,\ 5\}$.

Тоді події A і B є несумісними, оскільки множини A і B не мають спільних елементів. Події B і C також несумісні. Пару ж подій A і C не можна назвати несумісними, оскільки множини A і C мають спільний елемент — число 3. Це можна сказати також інакше. Якщо в результаті кидання на кубику випаде трійка, то одночасно відбудуться і подія A, і подія C.

Наведемо ще один приклад. Усередині прямокутника $ABCD$ навмання вибирають точку, тобто $\Omega = ABCD$. Нехай подія X полягає в тому, що вибрана точка належить кругу блакитного кольору, а подія Y — у тому, що вибрана точка належить трикутнику червоного кольору (рис. 14.1).

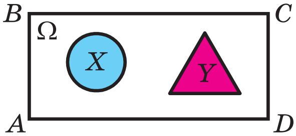


Рис. 14.1

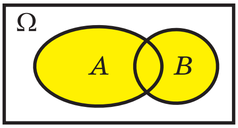


Рис. 14.2

Оскільки блакитний круг не має спільних точок із червоним трикутником, то події X і Y є несумісними.

Означення. **Подію, яка відбувається в тому й тільки в тому випадку, коли відбувається принаймні одна з двох подій — A або B деякого експерименту, називають об'єднанням подій A і B.**

Можна сказати й так: множину $A \cup B$ називають об'єднанням подій A і B.

Об'єднання подій є прикладом **операції над подіями**.

Об'єднання двох подій проілюстровано на рисунку 14.2.

Розглянемо в досліді з гральним кубиком такі події:

X — «на кубику випало просте число», тобто $X = \{2, 3, 5\}$;

Y — «на кубику випало складене число», тобто $Y = \{4, 6\}$;

Z — «на кубику випало число, більше за 1», тобто $Z = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Тоді випадкова подія Z є об'єднанням випадкових подій X і Y, тобто $Z = X \cup Y$.

Аналогічно означають об'єднання трьох або більшої кількості подій.

Перейдемо до вивчення інших операцій над подіями.

Нехай у пеналі дівчинки лежать кілька кольорових олівців і ручок. Дівчинка навмання бере один із цих предметів. У цьому досліді розглянемо такі події:

X — «вибраний предмет пише червоним кольором»;

Y — «вибраний предмет — олівець»;

Z — «вибраний предмет — червоний олівець».

Зауважимо, що подія Z відбувається тоді й тільки тоді, коли одночасно відбувається і подія X, і подія Y.

Означення. Подію, яка відбувається в тому й тільки в тому випадку, коли відбувається і подія A, і подія B деякого експерименту, називають перетином подій A і B.

Можна сказати й так: множину $A \cap B$ називають перетином подій A і B.

У розглянутому досліді з олівцями та ручками подія Z є перетином подій X і Y, тобто $Z = X \cap Y$.

На діаграмі (рис. 14.3) проілюстровано перетин подій A і B.

Аналогічно означають перетин трьох або більшої кількості подій.

Нехай A — подія деякого досліду. Розглянемо подію B, яка полягає в тому, що не відбулася подія A. Наприклад, у досліді з гральним кубиком розглянемо подію A — «на кубику випало парне число». Тоді подія B — «на кубику випало непарне число».

Означення. Подію, яка відбувається в тому й тільки в тому випадку, коли не відбувається подія A, називають доповненням події A.

Можна сказати й так: множину $\bar{A}$ називають доповненням події A.

У розглянутому досліді з гральним кубиком подія B є доповненням події A, тобто $B = \bar{A}$. Також можна сказати, що $A = \bar{B}$.

На рисунку 14.4 проілюстровано доповнення події A.

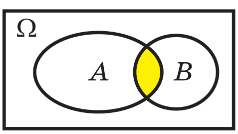


Рис. 14.3

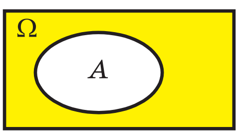


Рис. 14.4

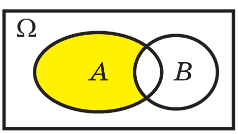


Рис. 14.5

Використовуючи операції об'єднання, перетину та доповнення, можна означити інші операції з випадковими подіями. Наприклад, операцію **різниці подій** A і B деякого експерименту (позначають $A \setminus B$) означають рівністю $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Випадкова подія $A \setminus B$ відбувається тоді й тільки тоді, коли відбувається подія A та одночасно не відбувається подія B.

Різницю випадкових подій A і B проілюстровано на рисунку 14.5.

ПРИКЛАД 1 У коробці лежать червоні, сині та білі кулі. З коробки навмання виймають одну кулю. Подія A полягає в тому, що витягнута куля виявиться червоною; подія B — у тому, що вона виявиться синьою. Знайдіть ймовірність події $A \cup B$, якщо

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3}.$$

Розв'язання. Подія $A \cup B$ полягає в тому, що витягнута навмання куля виявиться або червоною, або синьою. Природно припустити, що шукана ймовірність дорівнюватиме сумі

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Обґрунтуємо це припущення. Нехай у коробці лежить n куль, з яких a червоних і b синіх. Тоді ймовірність події A дорівнює $P(A) = \frac{a}{n}$. Аналогічно ймовірність події B дорівнює $P(B) = \frac{b}{n}$.

Події A і B несумісні, тому наслідки, що сприяють події A, відмінні від наслідків, що сприяють події B. Отже, події $A \cup B$ сприяє $a + b$ наслідків. Таким чином, ймовірність того, що навмання витягнута куля виявиться або червоною, або синьою, дорівнює:

$$P(A \cup B) = \frac{a + b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = P(A) + P(B) = \frac{5}{6}.$$

Відповідь: $\frac{5}{6}$. ◄

Розв'язання прикладу 1 ілюструє таку найважливішу властивість ймовірності.

Твердження 1. ***Ймовірність об'єднання двох несумісних подій A і B будь-якого досліду можна обчислити за формулою***

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B).} \tag{1}$$

Наприклад, використовуючи рівність (1), можна довести, що ймовірність неможливої події $\varnothing$ в будь-якому досліді дорівнює нулю. Справді, якщо $A = B = \varnothing$, то $A \cup B = \varnothing$.

Оскільки розглядувані події A і B є несумісними, то можна застосувати формулу (1). Отримуємо:

$$P(\varnothing) = P(\varnothing) + P(\varnothing).$$

Звідси $P(\varnothing) = 0$.

Знайти ймовірність достовірної події Ω, спираючись на рівність (1), неможливо, тому приймають без доведення таке твердження.

Твердження 2. ***Ймовірність достовірної події Ω дорівнює 1.***

Наведемо ще один приклад застосування формули (1).

Нехай A — деяка подія. Оскільки об'єднання подій A і $\bar{A}$ дорівнює достовірній події, то $P(A \cup \bar{A}) = 1$. Зважаючи на те, що події A і $\bar{A}$ несумісні, а також застосовуючи формулу (1), можна записати рівність

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \tag{2}$$

Рівність (2) використовують, наприклад, для обчислення ймовірності доповнення події.

Звернемо увагу, що, формулюючи твердження 1 і виводячи формулу (2), ми неявно зробили такі припущення:

- *якщо A і B — випадкові події деякого досліду, то $A \cup B$ — також випадкова подія*;
- *якщо A — випадкова подія деякого досліду, то $\bar{A}$ — також випадкова подія.*

Для того щоб кожного разу не робити подібних застережень, у теорії ймовірностей прийнято вважати, що набори випадкових подій завжди задовольняють ці умови та містять достовірну подію Ω. Такий набір випадкових подій ще називають **алгеброю** подій.

Наприклад, якщо простір елементарних наслідків є скінченним, то зазвичай до алгебри подій відносять усі підмножини простору елементарних наслідків.

Узагалі, якщо під час опису деякого досліду вказано:

- *множину елементарних наслідків;*
- *алгебру подій;*
- *ймовірності всіх випадкових подій,*

то говорять, що задано **ймовірнісний простір**, а твердження 1 і 2 називають **аксіомами теорії ймовірностей**.

Так само, як у курсі геометрії, аксіоми теорії ймовірностей використовують для доведення інших, більш складних тверджень — теорем.

Наприклад, застосовуючи аксіоми теорії ймовірностей, ми довели рівність (2). Використовуючи аксіоми та метод математичної індукції, можна довести, що коли A_1, A_2, ..., A_n — несумісні випадкові події, то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \tag{3}$$

Доведемо також таку теорему.

Теорема 14.1. ***Якщо A і B — події деякого досліду, то***

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)} \tag{4}$$

Доведення. Розглянемо такі випадкові події:

$$C_1 = A \backslash B,\ \ C_2 = B \backslash A,\ \ C_3 = A \cap B.$$

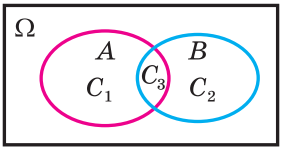


Рис. 14.6

Нескладно переконатися (рис. 14.6), що ці події попарно несумісні та виконується рівність

$$A \cup B = C_1 \cup C_2 \cup C_3.$$

Використовуючи рівність (3), отримуємо:

$$P(A \cup B) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3).$$

Звідси

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(C_1) + P(C_2) + 2P(C_3). \qquad (5)$$

Водночас, оскільки $A = C_1 \cup C_3$ і $B = C_2 \cup C_3$, то можна записати:

$$P(A) = P(C_1) + P(C_3) \ \text{ і } \ P(B) = P(C_2) + P(C_3).$$

Додаючи ці рівності, отримуємо:

$$P(A) + P(B) = P(C_1) + P(C_2) + 2P(C_3). \qquad (6)$$

З рівностей (5) і (6) випливає справедливість рівності (4). ◄

Звернемо увагу на те, що формула (4) є узагальненням формули (1). Справді, якщо події A і B несумісні, то вони ніколи не відбуваються одночасно; тому $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$.

ПРИКЛАД 2 Кожний учень курсів іноземних мов вивчає або тільки англійську мову, або тільки німецьку мову, або обидві ці іноземні мови одразу. Нехай подія A полягає в тому, що навмання вибраний учень вивчає англійську мову, а подія B — у тому, що навмання вибраний учень вивчає німецьку мову. Яка ймовірність того, що навмання вибраний учень вивчає обидві іноземні мови, якщо $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{5}$?

Розв'язання. Подія $A \cup B$ полягає в тому, що навмання вибраний учень вивчає англійську або німецьку мову. Оскільки кожний учень курсів вивчає хоча б одну іноземну мову, то подія $A \cup B$ є достовірною, тобто дорівнює Ω. Звідси випливає, що $P(A \cup B) = P(\Omega) = 1$.

Подія $A \cap B$ полягає в тому, що навмання вибраний учень вивчає і англійську мову, і німецьку, тобто вивчає обидві іноземні мови одразу. Використовуючи формулу (4), отримуємо:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - 1 = \frac{3}{20}.$$

Відповідь: $\frac{3}{20}$. ◄

ВПРАВИ

14.1.° У коробці лежать 7 синіх і 5 червоних олівців. Дослід полягає в тому, що з коробки навмання виймають один олівець і фіксують його колір. Опишіть елементарні наслідки такого досліду.

14.2.° Дослід полягає в тому, що одночасно підкидають три монети. Результатом досліду є кількість гербів, які при цьому випали. Опишіть елементарні наслідки такого досліду.

14.3.° У слові «МАТЕМАТИКА» навмання вибирають одну букву. Опишіть простір елементарних наслідків цього досліду.

14.4.° Дослід полягає в тому, що одночасно кидають два гральних кубики. Результатом досліду є сума очок, що випали на кубиках. Опишіть простір елементарних наслідків цього досліду.

14.5.° Уболівальник стежить за футбольним матчем і фіксує його остаточний результат. Опишіть простір елементарних наслідків цього досліду.

14.6.° Тренерка спостерігає за результатом забігу спортсменки на певну дистанцію, фіксуючи час забігу. Опишіть простір елементарних наслідків цього досліду.

14.7.° Чи є події A і B несумісними, якщо дослід полягає в тому, що:
1) монету підкидають один раз, A — «випав герб», B — «випало число»;
2) гральний кубик кидають два рази, A — «випала одиниця при першому киданні», B — «випала шістка при другому киданні»;
3) у мішень стріляють два рази, A — «у мішень улучили двічі», B — «у мішень улучили рівно один раз»?

14.8.° Бібліотекар шкільної бібліотеки бере навмання один із підручників. Серед даних подій знайдіть пари несумісних:
A — «взято підручник з математики»,
B — «взято підручник для 11 класу»,
C — «взято підручник з фізики для 10 класу»,
D — «взято підручник, виданий до 2017 року»,
E — «взято підручник з гуманітарного предмета».

14.9.° Шоколадне яйце із сюрпризом містить усередині іграшку із серії «Транспорт» (машинку чи літачок) або із серії «Тварини» (фігурку кота чи собаки). Подія A полягає в тому, що вибране навмання шоколадне яйце із сюрпризом містить іграшку із серії

«Транспорт»; подія B — у тому, що шоколадне яйце із сюрпризом містить фігурку собаки. Укажіть серед подій X, Y, Z, T подію:

1) $\overline{A}$, 2) $A \cup B$, 3) $A \setminus B$, де:

X — «шоколадне яйце із сюрпризом містить фігурку кота»,

Y — «шоколадне яйце із сюрпризом містить іграшку із серії «Тварини»,

Z — «шоколадне яйце із сюрпризом містить машинку чи літачок»,

T — «шоколадне яйце із сюрпризом не містить фігурку кота».

14.10.° Діаграма (рис. 14.7) ілюструє подію A, яка полягає в тому, що навмання вибраний учень 11-А класу має світле волосся. Кожна червона точка на діаграмі зображує учня. Знайдіть ймовірність того, що навмання вибраний учень 11-А класу:

1) має світле волосся;
2) має темне волосся.

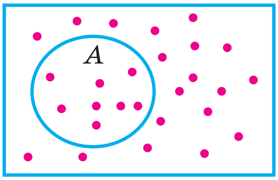


Рис. 14.7

14.11.° Серед членів спортклубу вибирають навмання одну людину. Подія A полягає в тому, що вибрана людина відвідує заняття в тренажерному залі, а подія B — у тому, що вона відвідує басейн. У чому полягає подія, проілюстрована на діаграмі (рис. 14.8)?

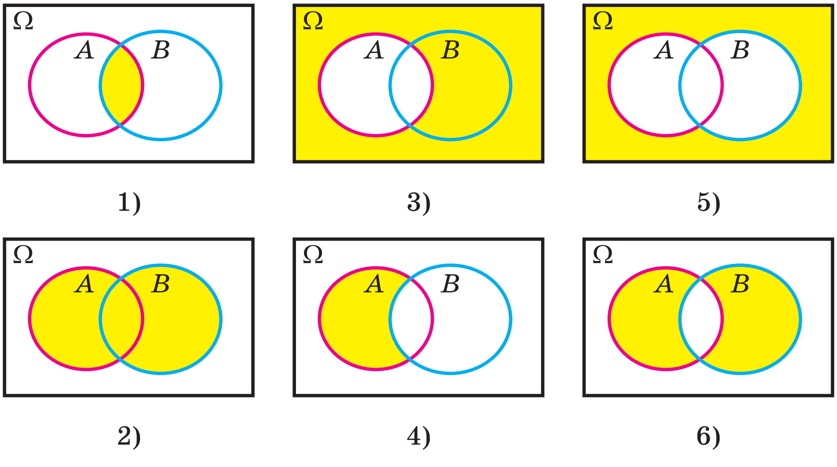


Рис. 14.8

14.12.° На діаграмі (рис. 14.9) проілюстровано події A і B. Перерисуйте діаграму в зошит і заштрихуйте ту область, яка ілюструє таке:

1) відбулася подія A, але не відбулася подія B;
2) відбулася подія B, але не відбулася подія A;
3) не відбулася ні подія A, ні подія B.

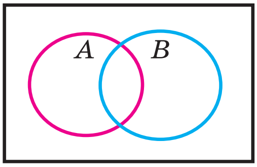


Рис. 14.9

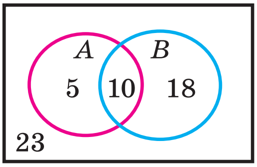


Рис. 14.10

14.13.° Дослід полягає в тому, що з множини $U = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ навмання вибирають один елемент. У цьому досліді розглядають такі події:

A — вибраний елемент належить множині $\{1,\ 2\}$,
B — вибраний елемент належить множині $\{1,\ 3,\ 5\}$,
C — вибраний елемент належить множині $\{4,\ 5\}$.

Який елемент міг бути вибраний, якщо відбулася подія:

1) $A \cap B$; 2) $B \cup C$; 3) $\overline{B}$; 4) $C \setminus A$; 5) $A \cup B \cup C$?

14.14.° Дослід полягає в тому, що навмання вибирають дійсне число. У цьому досліді розглядають такі події:

A — вибране число належить проміжку $[0;\ 2]$,
B — вибране число належить проміжку $(0;\ +\infty)$,
C — вибране число належить проміжку $[1;\ 3)$.

За допомогою числових проміжків запишіть множину тих чисел, які могли бути вибрані, якщо відбулася подія:

1) $A \cup B$; 2) $A \cap C$; 3) $\overline{B}$; 4) $A \setminus C$; 5) $A \cap B \cap C$.

14.15.° Подія A полягає в тому, що хтось із вибраних навмання людей у басейні вміє плавати брасом, подія B — у тому, що вміє плавати на спині. На діаграмі (рис. 14.10) вказано кількість людей у тій чи іншій групі. Знайдіть ймовірність події:

1) A; 2) $\overline{B}$; 3) $A \cup B$; 4) $\overline{A} \cap \overline{B}$; 5) $A \setminus B$; 6) $A \setminus \overline{B}$.

14.16.° Використовуючи умову попередньої задачі, знайдіть ймовірність події:

1) B; 2) $\overline{A}$; 3) $A \cap B$; 4) $\overline{A} \cup \overline{B}$; 5) $B \setminus A$; 6) $\overline{B} \setminus A$.

14.17.• Стрілець робить два постріли — спочатку в першу мішень, а потім у другу. Ймовірність того, що він улучить тільки в першу мішень, дорівнює $18\ \%$, тільки в другу мішень — $8\ \%$. Знайдіть ймовірність того, що з двох пострілів стрілець улучить у мішень тільки один раз.

14.18.• Учні 10-х і 11-х класів вирішили зіграти між собою матч у футбол та матч у баскетбол. Ймовірність того, що збірна команда 10-х класів виграє у команди 11-х класів тільки у футбол, дорівнює $33\ \%$, тільки в баскетбол — $18\ \%$. Яка ймовірність того, що збірна команда 10-х класів виграє рівно один із двох зіграних матчів?

14.19.• Від деякої зупинки до центру міста можна дістатися автобусом, тролейбусом і трамваєм. Людина, що їде в центр, сідає на той транспортний засіб, який прийде на зупинку першим. Відомо, що автобус приїжджає першим із ймовірністю $\frac{4}{7}$, тролейбус — $\frac{2}{7}$, трамвай — $\frac{1}{7}$. Яка ймовірність того, що людина відправиться в центр не на трамваї?

14.20.• У їдальні пропонують три перші страви — солянку, борщ та овочевий суп. Серед тих, хто хоче скуштувати першу страву, солянку в середньому вибирає кожна друга людина, борщ — кожна третя, а овочевий суп — кожна шоста людина. Яка ймовірність того, що чергова людина, маючи намір замовити першу страву, не вибере борщ?

14.21.• Про події A і B деякого досліду відомо, що $P(A) = P(B) = 0$. Доведіть, що:

1) $P(A \cap B) = 0$; 2) $P(A \backslash B) = 0$; 3) $P(A \cup B) = 0$.

14.22.• Нехай A і B — події деякого досліду. Відомо, що $P(A) \geqslant 0{,}8$ і $P(B) \geqslant 0{,}8$. Доведіть, що $P(A \cap B) \geqslant 0{,}6$.

14.23.• Про події A і B деякого досліду відомо, що $P(A) = P(B) = 1$. Доведіть, що:

1) $P(A \cup B) = 1$; 2) $P(A \cap B) = 1$.

14.24.• Гральний кубик кинули двічі. Подія A полягає в тому, що сума очок, які випали на кубику, є парною; подія B — у тому, що принаймні один раз випала одиниця. Знайдіть ймовірність події:

1) $\overline{A}$; 3) $A \cup B$;

2) $A \cap B$; 4) $A \backslash B$.

14.25.$^{\bullet}$ Правильну трикутну піраміду, грані якої пофарбовано в жовтий, зелений, червоний і синій кольори, підкинули двічі. Нехай подія A полягає в тому, що обидва рази піраміда впала на одну й ту саму грань; подія B полягає в тому, що першого разу піраміда впала на жовту грань або на зелену грань. Знайдіть ймовірність події:

1) $\overline{A}$; 2) $A \cap B$; 3) $A \cup B$; 4) $B \setminus A$.

14.26.$^{\bullet}$ Чоловіки дарують дружинам подарунки на 8 Березня. Ймовірність того, що жінка отримає в подарунок квіти й не отримає в подарунок парфуми, дорівнює $20\ \%$, парфуми без квітів — $10\ \%$, а квіти та парфуми разом — $15\ \%$. Яка ймовірність того, що жінка отримає на 8 Березня в подарунок: 1) квіти; 2) парфуми?

14.27.$^{\bullet}$ Гідрометцентр прогнозує температуру та вологість повітря на найближчі дні. Ймовірність того, що вологість підвищиться до $100\ \%$ або температура знизиться на $5\ °C$, дорівнює $85\ \%$, а ймовірність того, що й вологість підвищиться до $100\ \%$, і температура знизиться на $5\ °C$, — $40\ \%$. Яка ймовірність того, що найближчими днями температура повітря знизиться на $5\ °C$, якщо ймовірність того, що вологість підвищиться до $100\ \%$, дорівнює $70\ \%$?

14.28.$^{\bullet\bullet}$ Серед абітурієнтів механіко-математичного факультету університету є призери обласних олімпіад і відмінники. Ймовірність натрапити серед абітурієнтів на призера обласної олімпіади дорівнює $20\ \%$, на відмінника — $35\ \%$, а на призера обласної олімпіади або на відмінника — $43\ \%$. Яка ймовірність натрапити серед абітурієнтів на призера обласної олімпіади та відмінника в одній особі?

14.29.$^{\bullet\bullet}$ Випускниця університету хоче працювати в банку або в страховій компанії. Після співбесід у цих установах вона оцінює ймовірність бути прийнятою на роботу в банк у 0,5, а в страхову компанію — у 0,6. Крім того, вона вважає, що їй надійде пропозиція з обох цих установ із ймовірністю 0,4. Як вона має оцінити ймовірність бути прийнятою на роботу?

14.30.$^{\bullet\bullet}$ Міжнародні фінансові аналітики провели дослідження та виявили, що ймовірність зростання курсу євро до долара в наступному місяці становить 0,55, ймовірність зростання курсу швейцарського франка до долара — 0,35, а ймовірність того, що зростуть курси обох європейських валют до долара, — 0,23. Знайдіть ймовірність того, що зросте курс щонайменше однієї європейської валюти.

14.31.•• У несправній люстрі поміняли на нові вимикач і лампочку. Ймовірність того, що не менше ніж рік пропрацює лампочка, становить 0,96, а не менше ніж рік пропрацює вимикач — 0,98. Крім того, відомо, що з ймовірністю 0,01 протягом року можуть вийти з ладу і лампочка, і вимикач. Яка ймовірність того, що протягом року доведеться замінити:
1) тільки лампочку;
2) тільки вимикач;
3) лампочку або вимикач;
4) рівно один із двох нових елементів люстри?

14.32.•• Петро й Андрій прийшли на озеро рибалити. Ймовірність того, що перша спіймана рибина виявиться коропом, у Петра дорівнює $\frac{3}{5}$, а в Андрія — $\frac{1}{2}$. Ймовірність того, що перша спіймана рибина виявиться коропом хоча б в одного з хлопців, дорівнює $\frac{7}{10}$. Яка ймовірність того, що перша спіймана рибина виявиться коропом:
1) і в Петра, і в Андрія;
2) тільки в Петра;
3) тільки в Андрія;
4) тільки в одного з хлопців?

14.33.* Випускники курсів іноземних мов вивчали англійську, німецьку та французьку мови. Ймовірність того, що навмання вибраний випускник знає англійську й німецьку мови, дорівнює 0,6, німецьку та французьку — 0,5, англійську та французьку — 0,4. Чи може адміністрація курсів гарантувати, що в середньому кожний четвертий випускник знає всі три мови?

15. Умовна ймовірність

Розглянемо дослід, який полягає в тому, що гральний кубик кидають двічі. На рисунку 15.1 показано всі 36 рівноможливих результатів цього досліду. Нехай подія A полягає в тому, що сума чисел, які випали на кубику при першому та другому киданнях, дорівнює 12. Подія A відбувається тільки в одному випадку — коли обидва рази випадуть шістки. Тому $P(A) = \frac{1}{36}$.

Рис. 15.1

Поставимо таке запитання: чи зміниться ймовірність події A, якщо відомо, що при першому киданні випала шістка (відбулася подія B)? Наш досвід підказує, що ймовірність події A має змінитися. Справді, якщо при першому киданні випала шістка, то для настання події A при другому киданні також має випасти шістка. Ймовірність випадіння шістки при другому киданні дорівнює $\frac{1}{6}$. Тому ймовірність події A за умови випадіння шістки при першому киданні (подія B) дорівнює $\frac{1}{6}$. Це записують так: $P_B(A) = \frac{1}{6}$ і називають **умовною ймовірністю**, тобто ймовірністю події A за умови, що відбулася подія B.

Увести строге означення поняття умовної ймовірності нам допоможуть такі приклади.

ПРИКЛАД 1 З коробки, у якій лежать 2 червоні та 4 сині кулі, навмання беруть спочатку одну кулю, а потім — ще одну. Подія A полягає в тому, що перша взята куля виявиться червоною, а подія B — у тому, що друга взята куля також виявиться червоною. Обчисліть $P_A(B)$.

Розв'язання. Якщо відбулася подія A, то перша взята куля — червона. Це означає, що перед вибором другої кулі в коробці знаходяться одна червона куля та 4 сині. Тому ймовірність того, що в цій ситуації друга взята куля також виявиться червоною, дорівнює $\frac{1}{5}$, тобто $P_A(B)=\frac{1}{5}$. ◄

Розв'язування задач на обчислення умовних ймовірностей зручно ілюструвати за допомогою деревоподібної схеми — **дендрограми** (від лат. *dendro* — дерево та грец. *gram* — запис, зображення). Наприклад, дослід із прикладу 1 можна проілюструвати дендрограмою, на якій подано всі можливі результати даного досліду (рис. 15.2).

Біля стрілок дендрограми зручно ставити значення ймовірностей відповідних подій. Пропонуємо вам перевірити самостійно правильність обчислення ймовірностей, записаних на дендрограмі 15.2.

Дендрограма є прикладом важливого математичного об'єкта, яку застосовують у різних галузях знань. Наприклад, у класифікації живих організмів використовують ієрархічну модель, яка нагадує графічну схему 15.2. Хімічну структуру органічних сполук також зручно зображати у вигляді подібних схем. Такого роду об'єкти, які складаються з точок і відрізків, що їх сполучають, називають графами.

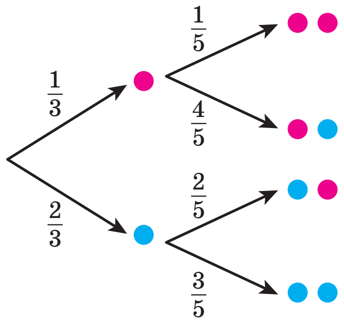


Рис. 15.2

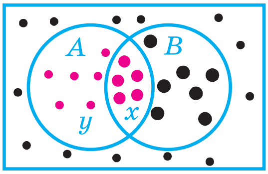


Рис. 15.3

Розглянемо такий дослід. Нехай у прямокутнику позначено n точок, деякі з яких пофарбовано в червоний колір, а деякі мають більший розмір, ніж решта (рис. 15.3).

Кількість великих червоних точок позначимо через x, маленьких червоних — через y.

Дослід полягає в тому, що з позначених n точок прямокутника навмання вибирають одну. Таким чином, множина позначених точок утворює простір елементарних наслідків.

У цьому досліді подія A полягає в тому, що вибрана точка виявиться червоною, а подія B — у тому, що вибрана точка виявиться великою.

Оскільки всі результати в даному досліді є рівноможливими, то $P(A) = \frac{x + y}{n}$.

Тепер знайдемо ймовірність події $A \cap B$, яка полягає в тому, що вибрана точка виявиться червоною та великою одночасно. Отримуємо: $P(A \cap B) = \frac{x}{n}$.

Обчислимо також ймовірність $P_A(B)$. Якщо відбулася подія A, тобто вибрано червону точку, то це означає, що з n рівноможливих результатів досліду має сенс розглядати тільки $x + y$ червоних точок (рис. 15.4).

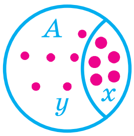


Рис. 15.4

Із цих $x + y$ рівноможливих результатів події B сприяють тільки x результатів, тому $P_A(B) = \frac{x}{x + y}$.

Використовуючи знайдені значення ймовірностей, можна записати:

$$P_A(B) \cdot P(A) = \frac{x}{x + y} \cdot \frac{x + y}{n} = \frac{x}{n} = P(A \cap B).$$

Таким чином, установлено, що **для досліду з n рівноможливими елементарними наслідками виконується рівність**

$$\boxed{P_A(B) \cdot P(A) = P(A \cap B),} \qquad (1)$$

яку за умови $P(A) > 0$ можна переписати у вигляді

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \qquad (2)$$

Рівність (2) пояснює, чому при $P(A) > 0$ використовують таке означення.

Означення. **Нехай A і B — події деякого досліду і $P(A) > 0$. Тоді умовною ймовірністю $P_A(B)$ події B за умови, що відбулася подія A, називають число $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.**

У випадку, коли $P(A) = 0$, умовну ймовірність $P_A(B)$ не означають.

ПРИКЛАД 2 Відомо, що озиме жито успішно переносить зиму з ймовірністю $\frac{9}{10}$. Якщо озиме жито успішно перенесе зиму, то ймовірність того, що й озима пшениця успішно перезимує, дорівнює $\frac{13}{15}$. Якщо ж озиме жито навесні доведеться пересівати, то ймовірність того, що доведеться пересівати й озиму пшеницю, дорівнює $\frac{4}{5}$. Знайдіть ймовірність того, що пшениця успішно перезимує.

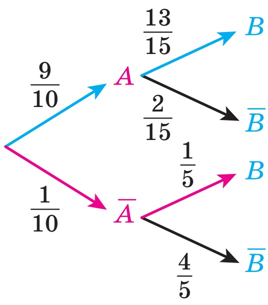


Рис. 15.5

Розв'язання. Позначимо через A і B події, які полягають у тому, що успішно перенесуть зиму жито й пшениця відповідно. Тоді інформацію, подану в задачі, можна проілюструвати дендрограмою, зображеною на рисунку 15.5.

Жито й пшениця успішно перезимують, якщо відбудеться і подія A, і подія B (блакитні стрілки на дендрограмі). Ураховуючи формулу (1), отримуємо, що

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{13}{15} = \frac{39}{50} = 78\,\%.$$

Пшениця успішно перезимує, а жито доведеться пересівати, якщо відбудеться і подія B, і подія $\bar{A}$ (червоні стрілки на дендрограмі). Тому

$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50} = 2\,\%.$$

Пшениця успішно перезимує (подія B) у разі одного з двох варіантів — жито успішно перезимує (подія A) або жито доведеться пересівати (подія $\bar{A}$). Ці два варіанти проілюстровано на дендрограмі (рис. 15.5) блакитною та червоною вітками.

Це означає, що подія B є об'єднанням двох несумісних подій: $A \cap B$ (блакитна вітка) і $\bar{A} \cap B$ (червона вітка), тому

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 78\,\% + 2\,\% = 80\,\%.$$

Відповідь: 0,8. ◄

Звернемо увагу, що під час розв'язування прикладу 2 для пошуку ймовірності того, що пшениця успішно перезимує, було розглянуто два взаємовиключальних варіанти: жито успішно перезимує та жито доведеться пересівати. Зрозуміло, що ці міркування можна узагальнити.

Нехай у деякому досліді розглядають такі події H_1 і H_2, що за будь-якого результату досліду відбувається рівно одна із цих подій і $P(H_1) > 0$, $P(H_2) > 0$. Це означає, що множини H_1 і H_2 не перетинаються та їх об'єднання дорівнює всьому простору елементарних наслідків Ω. Тоді для будь-якої події A цього досліду виконується рівність

$$P(A) = P_{H_1}(A) \cdot P(H_1) + P_{H_2}(A) \cdot P(H_2).$$

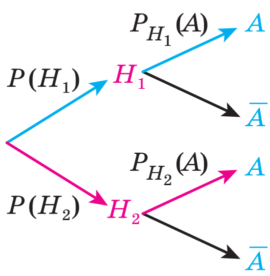


Рис. 15.6

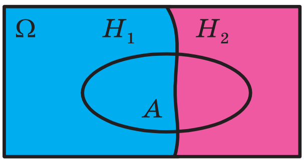


Рис. 15.7

Дендрограма на рисунку 15.6 і рисунок 15.7 ілюструють цю формулу.

Цю рівність називають **формулою повної ймовірності.**

ВПРАВИ

15.1.° Серед учнів вашого класу навмання вибрали одного. Знайдіть ймовірність того, що вибраний учень має оцінку «12» з алгебри, якщо відомо, що вибрали хлопця.

15.2.° У таблиці подано інформацію про тварин притулку. З усіх тварин навмання вибрали одну. Знайдіть ймовірність того, що вік вибраної тварини більший за рік, якщо відомо, що вибрали собаку.

Вік тварини	*Собаки*	*Кішки*
Менший ніж рік	5	4
Від року до двох років	3	8
Більший за два роки	12	18

15.3.$^{\bullet}$ У коробці лежать кілька куль одного кольору: або всі жовті, або всі сині. Ймовірність того, що в коробці лежать жовті кулі, дорівнює $\frac{1}{2}$. З коробки навмання послідовно беруть дві кулі.

1) Яка ймовірність того, що друга вийнята куля виявиться жовтою?
2) Яка ймовірність того, що друга вийнята куля виявиться жовтою, якщо перша вийнята куля також виявилася жовтою?
3) Яка ймовірність того, що друга вийнята куля виявиться жовтою, якщо перша вийнята куля виявилася синьою?

15.4.$^{\bullet}$ Монету підкидають 4 рази. Знайдіть ймовірність того, що в кожному з останніх двох підкидань випаде герб, якщо в кожному з перших двох підкидань випало число.

15.5.$^{\bullet}$ У коробці лежать ручки синього та червоного кольорів. З коробки навмання послідовно витягують дві ручки. Складіть дендрограму цього досліду.

15.6.$^{\bullet}$ В одному ящику лежать кулі трьох кольорів: червоного, синього та жовтого, а в другому двох кольорів: зеленого й чорного. З кожної коробки навмання вибирають по одній кулі. Складіть дендрограму цього досліду.

15.7.$^{\bullet}$ Людина очікує на зупинці автобус або тролейбус і заходить у той транспортний засіб, який прийде першим. Знаходячись у транспорті, людина сідає біля вікна, якщо є таке вільне місце. Складіть дендрограму цього досліду.

15.8.$^{\bullet}$ Відомо, що $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}5$ і $P(A \cup B) = 0{,}6$. Знайдіть:

1) $P(A \cap B)$; 2) $P_A(B)$; 3) $P_B(A)$.

15.9.$^{\bullet}$ Відомо, що $P_A(B) = 0{,}5$, $P_B(A) = 0{,}75$ і $P(A \cap B) = 0{,}25$. Знайдіть:

1) $P(A)$; 2) $P(B)$; 3) $P(A \cup B)$.

15.10.$^{\bullet}$ На зборах присутні 19 осіб, серед яких 12 жінок і 7 чоловіків. Для підрахунку результатів голосування потрібно вибрати рахункову комісію з трьох осіб. Членів рахункової комісії обирають послідовно шляхом жеребкування. Відомо, що першими двома членами комісії виявилися чоловіки. Знайдіть ймовірність того, що третім з вибраних членів рахункової комісії виявиться жінка. Складіть дендрограму цього досліду.

15.11.$^{\bullet}$ З коробки, у якій лежать 20 синіх і 15 жовтих куль, навмання беруть спочатку одну, а потім ще одну кулю. Відомо, що перша куля була синьою. Обчисліть ймовірність того, що друга куля виявиться жовтою. Складіть дендрограму цього досліду.

15.12.• Після подорожі до Європи в мандрівника залишилися світлини — 10 пейзажів і 15 портретів із Франції та 6 пейзажів і 14 портретів з Італії. Мандрівник вибирає навмання 2 світлини. Яка ймовірність того, що вони обидві будуть пейзажами, якщо відомо, що він не вибрав жодного портрета, зробленого у Франції?

15.13.• У букіністичній крамниці на полиці з детективами стоять 20 книг, з яких 4 у твердій і 16 у м'якій обкладинках, а на полиці зі збірками поезій — 40 книг, з яких 10 у твердій і 30 у м'якій обкладинках. Відвідувач крамниці бере навмання одну книгу із цих полиць. Яка ймовірність того, що це буде збірка поезій, якщо відомо, що вибрана книга не є детективом у м'якій обкладинці?

15.14.•• На проспекті встановлено два світлофори. Ймовірність зафіксувати зелений колір на першому світлофорі дорівнює 0,8, а на другому світлофорі — 0,9. Ймовірність зафіксувати зелене світло одночасно на обох світлофорах дорівнює 0,7. Знайдіть ймовірність:

1) зафіксувати зелене світло на першому світлофорі за умови, що на другому світлофорі також горить зелене світло;
2) зафіксувати зелене світло на другому світлофорі за умови, що на першому світлофорі також горить зелене світло;
3) зафіксувати на першому світлофорі сигнал, який забороняє рух, за умови, що на другому світлофорі горить зелене світло;
4) зафіксувати зелене світло на другому світлофорі за умови, що на першому світлофорі горить сигнал, який забороняє рух.

15.15.•• Піцерія пропонує за бажанням відвідувача додавати в піцу бекон та/або гриби. Ймовірність того, що відвідувач попросить додати бекону, дорівнює 0,6, а додати грибів — 0,7. Ймовірність же того, що відвідувач попросить додати в піцу бекону або грибів, дорівнює 0,8. Знайдіть ймовірність того, що:

1) відвідувач попросить додати бекону, якщо відомо, що він уже попросив додати грибів;
2) відвідувач попросить додати грибів, якщо відомо, що він не любить бекон.

15.16.•• Ймовірність того, що навмання вибраний клієнт банку має поточний рахунок, дорівнює 80 %, депозитний — 60 %. Серед тих, у кого відкрито поточний рахунок, частка клієнтів з депозитним рахунком становить 70 %. Знайдіть ймовірність того, що у клієнта, який має депозитний рахунок, відкрито й поточний.

15.17.•• За даними страхової компанії, ймовірність того, що водій потрапить в аварію протягом року, дорівнює 0,05. Проте якщо відомо, що стаж водіння менший від 2 років, то така ймовірність становить уже 0,15. Серед водіїв 25 % мають стаж менший від 2 років. Знайдіть ймовірність того, що у водія, який потрапив в аварію протягом року, стаж водіння був меншим від 2 років.

15.18.•• У коробці лежать 24 сині та 16 червоних ручок. Учень вибирає навмання ручку з коробки та цією ручкою пише число на папері. Електронний сканер розпізнає число, написане синьою ручкою, із ймовірністю 90 %, а число, написане червоною ручкою, — із ймовірністю 70 %. Знайдіть ймовірність того, що написане число буде розпізнано.

15.19.•• На змаганнях з метання списа останньому спортсмену залишилося виконати останню спробу. Якщо під час кидка вітер буде попутним, то спортсмен зможе перемогти з ймовірністю 0,42; якщо ж вітер буде зустрічним — то з ймовірністю 0,35. Ймовірність того, що під час кидка вітер буде попутним, дорівнює 0,6. Знайдіть ймовірність того, що спортсмен переможе.

15.20.•• Два заводи виробляють парасольки. Перший завод виробляє 30 %, а другий — 70 % усього обсягу виробництва парасольок. Ймовірність купити браковану парасольку дорівнює 1 %, якщо її виготовлено на першому заводі, і дорівнює 3 %, якщо на другому. Знайдіть ймовірність того, що навмання вибрана парасолька виявиться бракованою.

15.21.•• З коробки, у якій лежать 10 синіх і 18 червоних куль, навмання беруть спочатку одну, а потім ще одну кулю. Обчисліть ймовірність того, що перша взята куля синя, за умови, що друга куля виявилася червоною.

15.22.•• З коробки, у якій лежать 2 сині та 3 червоні кулі, навмання беруть спочатку одну, а потім ще одну кулю. Обчисліть ймовірність того, що взяті кулі одного кольору, якщо серед узятих куль є червона.

15.23.* Петрик виграє партію в настільний теніс у свого друга Сергійка з ймовірністю 0,6. Хлопчики вирішили зіграти матч із 10 партій, переможець у якому отримує кульок цукерок. За рахунку 5 : 5 приз отримає Сергійко. Після 7 зіграних партій рахунок був 4 : 3 на користь Петрика, але тут прийшла мама Сергійка і матч довелося перервати. Як діти мають розділити кульок цукерок?

16. Незалежні події

Розглянемо дослід, у якому спочатку підкидають монету в 1 гривню, а потім — монету у 2 гривні. Цей дослід може закінчитися одним із чотирьох рівноможливих результатів (рис. 16.1).

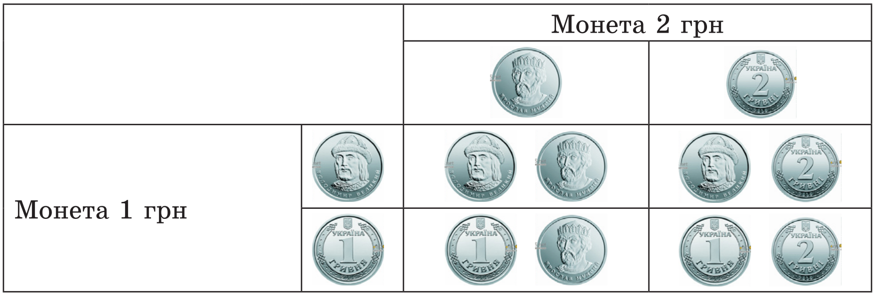


Рис. 16.1

Розглянемо дві події:

A — у результаті підкидання монети в 1 грн випав герб;

B — у результаті підкидання монети у 2 грн випав герб.

Оскільки події A сприяють два із чотирьох результатів досліду (рис. 16.1), то $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Аналогічно $P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Поставимо таке запитання: чи зміниться ймовірність випадіння герба в результаті підкидання монети у 2 грн (подія B), якщо відомо, що в результаті підкидання монети в 1 грн уже випав герб (відбулася подія A)? Тобто порівняємо величини $P(B)$ і $P_A(B)$.

Наш досвід підказує, що ймовірність не має змінитися, оскільки підкидання монети у 2 грн виконується *незалежно* від результату підкидання монети в 1 грн.

Справді, якщо відбулася подія A — у результаті підкидання монети в 1 грн випав герб, то із чотирьох рівноможливих результатів досліду є сенс розглядати тільки два (рис. 16.2).

Рис. 16.2

Із цих двох результатів події B сприяє тільки один, тому $P_A(B)=\frac{1}{2}$. Таким чином, $P_A(B)=P(B)$.

Значення $P_A(B)$ можна було б знайти, користуючись означенням умовної ймовірності, а саме: із чотирьох рівноможливих елементарних наслідків (рис. 16.1) події $A\cap B$ сприяє тільки один — на обох монетах випав герб, тому

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

Таким чином, розрахунки підтвердили припущення, що $P_A(B)=P(B)$, тобто ймовірність події B не змінюється залежно від того, чи відбулася подія A. Так само можна показати, що $P_B(A)=P(A)$, тобто ймовірність події A не змінюється залежно від того, чи відбулася подія B. У такому разі говорять, що події A і B є **незалежними**.

Умовні ймовірності $P_A(B)$ і $P_B(A)$ визначені тільки для подій A і B з додатними ймовірностями. Тому рівності $P_A(B)=P(B)$ і $P_B(A)=P(A)$ означають поняття незалежності подій тільки у випадку, коли $P(A)>0$ і $P(B)>0$.

Звернемо увагу, що рівність $P_A(B)=P(B)$ можна переписати так:

$$\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B);$$

$$P(A\cap B)=P(A)P(B).$$

Ці міркування пояснюють, чому використовують таке означення.

Означення. Події A і B деякого досліду називають незалежними, якщо $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

Коли $P(A)=0$ або $P(B)=0$, то рівність $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ виконується (доведіть це самостійно). Тому такі події A і B також відносять до незалежних.

Якщо ж $P(A)>0$ і $P(B)>0$, то рівність $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ є рівносильною кожній із двох таких рівностей: $P_A(B)=P(B)$ і $P_B(A)=P(A)$.

Якщо події A і B не є незалежними, то їх називають **залежними**. Наприклад, нехай гральний кубик кидають один раз. Якщо подія A полягає в тому, що на гральному кубику випало парне число, а подія B — у тому, що на гральному кубику випала двійка, то $P(A)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=P(B)=\frac{1}{6}$. Тому $P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$, тобто такі події A і B є залежними.

Поняття незалежності подій можна узагальнити для трьох і більшої кількості подій: ***події деякого досліду називають незалежними[1], якщо для будь-якого набору A_1, A_2, ..., A_n цих подій виконується рівність***

$$P(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

Якщо ймовірності всіх розглядуваних подій більші за нуль, то так само, як і у випадку незалежності двох подій, *кілька подій є незалежними тоді й тільки тоді, коли ймовірність будь-якої з них не змінюється залежно від того, чи відбулися які-небудь з решти подій*.

ПРИКЛАД 1 Стрілець улучає в мішень із ймовірністю 0,9. Знайдіть ймовірність того, що з трьох послідовних незалежних пострілів стрілець улучить у мішень тільки з третього разу.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що стрілець не влучить у мішень при першому пострілі, подія B — у тому, що він не влучить у мішень при другому пострілі, а подія C — у тому, що він улучить у мішень при третьому пострілі. Зауважимо, що $P(A)=0{,}1$, $P(B)=0{,}1$, $P(C)=0{,}9$.

Стрілець улучить у мішень тільки з третього разу, якщо відбудеться подія $A\cap B\cap C$. Оскільки постріли здійснюються незалежно один від одного, то події A, B і C будуть незалежними, тому

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)=0{,}1\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9=0{,}009.$$ ◄

ПРИКЛАД 2 У партії з 20 000 лампочок є 500 бракованих. Дослід полягає в тому, що послідовно навмання вибирають 40 лампочок. Яка ймовірність того, що бракованою виявиться тільки перша лампочка із 40 вибраних?

Розв'язання. Використовуючи комбінаторні формули, розв'язати задачу досить легко. Закодуємо 20 000 лампочок числами від 1 до 20 000. Тоді елементарним наслідком даного випробування буде будь-який 40-елементний упорядкований набір чисел із множини $\{1, 2, \ldots, 20\,000\}$. Наприклад, упорядкований набір $(2, 3, \ldots, 41)$ означає, що першою витягли лампочку з номером 2, потім — лампочку з номером 3 і т. д., останньою витягнули лампочку з номером 41. Тому простір рівноможливих елементарних наслідків складається з $A_{20\,000}^{40}$ елементів.

[1] Також використовують термін «незалежні в сукупності події».

Водночас кількість таких 40-елементних наборів, серед яких тільки перший елемент відповідає бракованій лампочці (подія X), дорівнює $A_{500}^{1}A_{19\,500}^{39}$ (подумайте чому), тому

$$P(X)=\frac{A_{500}^{1}A_{19\,500}^{39}}{A_{20\,000}^{40}}.$$

Відповідь отримано, і задачу розв'язано. Проте поставимо цілком резонне запитання: як скористатися такою відповіддю на практиці? Отримане число велике чи маленьке? Як у десятковому записі числа $P(X)$ знайти хоча б кілька знаків після коми? Навряд чи вийде підрахувати відповідні числа й на калькуляторі, оскільки навіть після скорочення всіх дробів доведеться працювати з більш ніж 100-цифровими числами[1].

У таких випадках у теорії ймовірностей можна розв'язувати задачу з деякою похибкою (так само, як, наприклад, у шкільному курсі фізики нехтують опором повітря під час розрахунку параметрів руху тіла).

Наведемо відповідні міркування.

Зауважимо, що ймовірність, узявши одну лампочку, натрапити на браковану становить $p=\frac{500}{20\,000}=0{,}025.$ Оскільки число 40 мале порівняно з $20\,000$ і 500, то вважатимемо, що на кожному із 40 кроків ймовірність натрапити на браковану лампочку не залежить від результатів, отриманих на інших кроках, і дорівнює p.

Позначимо через A_k випадкову подію «взяти небраковану лампочку на k-му кроці», де $2\leqslant k\leqslant 40,$ а через B_1 — випадкову подію «взяти браковану лампочку на першому кроці». Тоді $P(A_k)=1-p=$ $=0{,}975,$ $P(B_1)=p=0{,}025.$ Випадкову подію X — «бракованою є тільки перша лампочка із 40 вибраних» — можна подати у вигляді

$$X=B_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap\ldots\cap A_{40}.$$

Згідно з нашими домовленостями випадкові події $B_1, A_2, A_3,$ $A_4, \ldots, A_{40}$ є незалежними. Отже,

$$P(X)=P(B_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_{40})=p(1-p)^{39}\approx 0{,}00931.$$

Таким чином, шукана ймовірність приблизно дорівнює $1\,\%$. ◄

---

[1] За допомогою спеціалізованих обчислювальних програм, які підтримують роботу з багатоцифровими числами, було знайдено, що

$$P(X)=\frac{A_{500}^{1}A_{19\,500}^{39}}{A_{20\,000}^{40}}=0{,}00932\ldots.$$

ВПРАВИ

16.1.° При обстрілі суміші ізотопів Урана пучком нейтронів ймовірність початку керованої ядерної ланцюгової реакції становить 40 %. Яка ймовірність того, що з двох таких незалежних дослідів тільки в другому почнеться керована ядерна ланцюгова реакція?

16.2.° За даними демографічних досліджень, ймовірність того, що новонароджена дитина виявиться хлопчиком, дорівнює 0,512. Знайдіть ймовірність того, що в сім'ї, яка планує мати трьох дітей, діти народяться в послідовності: хлопчик, дівчинка, хлопчик.

16.3.° Стрілець улучає в мішень із ймовірністю p. Дослід полягає в тому, що стрілець стріляє доти, доки не влучить у мішень. Знайдіть ймовірність того, що йому доведеться стріляти 6 разів.

16.4.° У неякісній партії деталей ймовірність натрапити на браковану деталь становить 0,2. Контролер перевіряє деталі доти, доки не виявить першу браковану. Знайдіть ймовірність того, що йому доведеться перевірити 8 деталей.

16.5.• Нехай A і B — незалежні події деякого досліду. Доведіть, що події $\overline{A}$ і B також є незалежними.

16.6.• Нехай A і B — незалежні події деякого досліду. Доведіть, що події $\overline{A}$ і $\overline{B}$ також є незалежними.

16.7.• Нехай A і B — незалежні події деякого досліду з ненульовими ймовірностями. Чи можуть події A і B бути несумісними?

16.8.• Нехай A і B — несумісні події деякого досліду з ненульовими ймовірностями. Чи можуть події A і B бути незалежними?

16.9.• Андрій улучає в мішень із ймовірністю 0,4, Сергій — із ймовірністю 0,5, а Петро — із ймовірністю 0,7. Усі троє роблять по одному пострілу. Яка ймовірність того, що:

1) улучать усі хлопці;
2) жоден із хлопців не влучить;
3) тільки Андрій улучить;
4) рівно один із хлопців улучить;
5) тільки один із хлопців не влучить;
6) щонайменше двоє хлопців улучать?

16.10.• Серед лотерейних білетів 10 % виграшних. Гравець придбав 3 білети. Яка ймовірність того, що серед куплених білетів:
1) не буде виграшних;
2) буде рівно один виграшний;
3) буде рівно два виграшних;
4) будуть усі виграшні?

16.11.• Ймовірність того, що футбольний матч між командами A і B завершиться внічию, становить 50 %. Ймовірність перемоги команди A дорівнює 20 %, а команди B — 30 %. Команди A і B планують провести серію із чотирьох ігор між собою. Яка ймовірність того, що:
1) усі ігри закінчаться внічию;
2) команда B не програє жодного матчу;
3) команда A переможе тільки в другій грі;
4) команда A переможе тільки один раз у серії ігор?

16.12.•• Електричний блок (рис. 16.3) працює безвідмовно протягом року з ймовірністю p. Для підвищення надійності системи електричний блок дублюють ще одним таким самим блоком так, що отримана система працює тоді, коли працює щонайменше один із блоків (рис. 16.4). Яка ймовірність безвідмовної роботи системи протягом року, якщо несправність кожного електричного блока відбувається незалежно від роботи інших блоків?

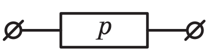


Рис. 16.3

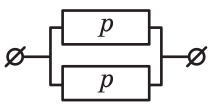


Рис. 16.4

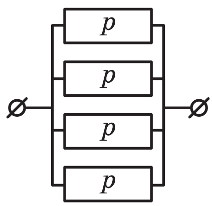


Рис. 16.5

16.13.•• Електричний блок (рис. 16.3) працює безвідмовно протягом року з ймовірністю p. Для підвищення надійності системи електричний блок дублюють ще трьома такими самими блоками так, що отримана система працює тоді, коли працює щонайменше один із блоків (рис. 16.5). Яка ймовірність безвідмовної роботи системи протягом року, якщо несправність кожного електричного блока відбувається незалежно від роботи інших блоків?

16.14.•• Схема складається з трьох електричних блоків (рис. 16.6), кожний з яких працює безвідмовно протягом року з ймовірністю p. Якщо виходить з ладу хоча б один блок, то система припиняє працювати. Для підвищення надійності системи схему доповнюють ще трьома блоками (рис. 16.7). Яка ймовірність безвідмовної роботи системи протягом року? Чи підвищиться надійність системи, якщо використати схему, зображену на рисунку 16.8?

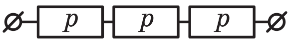


Рис. 16.6

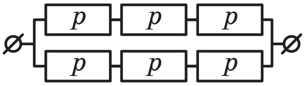


Рис. 16.7

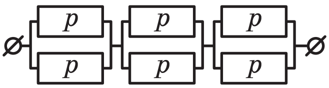


Рис. 16.8

16.15.•• Деякі (найменш надійні) блоки електричної схеми дублюють (рис. 16.9). Ймовірності безвідмовної роботи кожного блока протягом року зображено на цьому рисунку. Яка ймовірність безвідмовної роботи всієї системи протягом року?

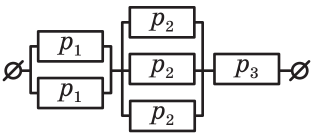


Рис. 16.9

16.16.•• Під час одного оберту локатора радіолокаційна станція виявляє об'єкт із ймовірністю 70 %. Виявлення об'єкта на кожному оберті не залежить від результатів попередніх обертів. Скільки обертів має зробити радіолокаційна станція, щоб виявили об'єкт із ймовірністю, що перевищує 99,9 %?

16.17.•• Ймовірність того, що Василь Заплутайко дасть правильну відповідь на поставлене запитання вчителя, становить 7 %. Скільки запитань має поставити вчитель, щоб Василь дав хоча б одну правильну відповідь із ймовірністю, більшою за 50 %?

16.18.•• Для реклами безалкогольного напою виробник вирішив закрити кришками зі скритим написом «приз» 30 000 пляшок із 500 000 випущених. Сергійко любить цей напій і планує за місяць випити 15 пляшок. Яка ймовірність того, що Сергійко знайде напис «приз» тільки під кришкою п'ятої випитої пляшки напою? Відповідь округліть до десятих відсотка.

16.19.•• У деякій країні близько 10 млн виборців, з яких партію A підтримують близько 2 млн осіб. Яка ймовірність того, що серед 5 осіб, опитаних навмання, партію A підтримає тільки перша опитана людина? Відповідь округліть до одного відсотка.

17. Випадкова величина

Під час вивчення теорії ймовірностей нас часто цікавлять числові величини, пов'язані з результатами дослідів. Зокрема, кидаючи гральні кубики в настільній грі, хочуть дізнатися про кількість клітинок, на які треба пересунути фішку; вивчаючи якість продукції, обчислюють відсоток бракованих деталей у випадково вибраній пробній партії; плануючи роботу станції швидкої допомоги, з'ясовують кількість викликів, що надходять за певний проміжок часу, і т. п. У таких випадках говорять, що в даному досліді розглядається **випадкова величина** (кількість клітинок у грі, відсоток бракованих деталей, кількість викликів «швидкої допомоги»).

Наприклад, баскетболіст під час тренування послідовно виконує три кидки: штрафний (1 очко), з-під кільця (2 очки) і потім кидок з-за триочкової лінії (3 очки). Тренер записує результати, послідовно відмічаючи знаком «плюс» попадання, а знаком «мінус» — промах баскетболіста. У цьому досліді 8 елементарних наслідків:

Елементарні наслідки	+ + +	+ + −	+ − +	+ − −	− + +	− + −	− − +	− − −

Нехай випадкова величина x дорівнює кількості очок, набраних баскетболістом за ці кидки. Це означає, що коли, наприклад, дослід закінчився результатом «+ − +», то баскетболіст успішно виконав штрафний і триочковий кидки, тому $x = 4$. Узагалі, значення, якого набуде випадкова величина x, визначається елементарним наслідком розглядуваного досліду. Описати всі значення випадкової величини можна такою таблицею.

Елементарний наслідок	+ + +	+ + −	+ − +	+ − −	− + +	− + −	− − +	− − −
Значення випадкової величини x	6	3	4	1	5	2	3	0

Таким чином, кожному елементарному наслідку поставлено у відповідність деяке число — значення випадкової величини. Це означає, що випадкова величина являє собою функцію, аргументами якої є елементарні наслідки, а значеннями — набрані баскетболістом очки.

Означення. **Функцію, яка кожному елементарному наслідку деякого досліду ставить у відповідність число, називають *випадковою величиною*.**

Випадкові величини будемо позначати латинськими літерами x, y, ...

Задають випадкову величину так само, як і будь-яку функцію: таблицею значень, формулою, описово, графіком тощо. Наприклад, для розглянутої вище випадкової величини x ми навели два способи її задання: описово («випадкова величина x дорівнює кількості очок, набраних баскетболістом») і таблицею значень.

Областю визначення випадкової величини є простір елементарних наслідків Ω, а областю значень (множиною значень) випадкової величини — деяка підмножина множини $\mathbb{R}$.

ПРИКЛАД 1 Випадкова величина x дорівнює кількості гербів, що випали в результаті підкидання двох монет. Знайдіть множину значень випадкової величини x.

Розв'язання. Оскільки в результаті підкидання двох монет може випасти або 0, або 1, або 2 герби, то множиною значень випадкової величини x є множина $\{0, 1, 2\}$. ◄

Звернемося ще раз до досліду з прикладу 1. Якщо пронумерувати монети, то можна вважати, що даний дослід закінчується одним із чотирьох рівноможливих елементарних наслідків:

Елементарні наслідки	ГГ	ГЧ	ЧГ	ЧЧ

,

де буквою Г позначено випадіння на монеті герба, а буквою Ч — випадіння числа.

Розглянемо випадкову величину x, яка дорівнює кількості гербів, що випали в результаті підкидання двох монет. Подамо її можливі значення у вигляді таблиці:

Елементарний наслідок	ГГ	ГЧ	ЧГ	ЧЧ
Значення випадкової величини x	2	1	1	0

Із цієї таблиці бачимо, що випадкова величина x набуває значення 2 в одному із чотирьох рівноможливих випадків, тобто з ймовірністю $\frac{1}{4}$. Цей факт прийнято записувати так: $P(x=2)=\frac{1}{4}$.

Міркуючи аналогічно, отримуємо: $P(x=0)=\frac{1}{4}$, $P(x=1)=\frac{1}{2}$.

Набір ймовірностей — $P(x=0)=\frac{1}{4}$, $P(x=1)=\frac{1}{2}$, $P(x=2)=\frac{1}{4}$ — називають **розподілом ймовірностей** випадкової величини x. Розподіл ймовірностей випадкової величини часто подають у вигляді таблиці:

Значення x	0	1	2
Ймовірність	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

Зауважимо, що сума чисел, записаних у другому рядку таблиці розподілу ймовірностей випадкової величини, дорівнює 1. Це випливає з того, що випадкова величина гарантовано набуває одного зі значень, указаних у першому рядку таблиці.

ПРИКЛАД 2 Розподіл ймовірностей випадкової величини z задано таблицею, у якій пропущено одне значення:

Значення z	1	3	7	8	10
Ймовірність	0,1	0,35	0,25		0,15

Знайдіть ймовірності: 1) $P(z=4)$; 2) $P(z<6)$; 3) $P(9 \leqslant z < 12)$; 4) $P(z=8)$.

Розв'язання. 1) Запис $P(z=4)$ означає ймовірність події, яка полягає в тому, що випадкова величина z дорівнює 4. Оскільки в першому рядку таблиці розподілу ймовірностей відсутнє число 4, то це означає, що випадкова величина z за жодного результату досліду не може дорівнювати 4. Тому $P(z=4)=0$.

2) Випадкова величина z набуває значення, меншого від 6, тільки тоді, коли $z=1$ або $z=3$. Оскільки події «випадкова величина набуває значення 1» і «випадкова величина набуває значення 3» є несумісними, то

$$P(z<6)=P(z=1)+P(z=3)=0,1+0,35=0,45.$$

3) Маємо:

$$P(9 \leqslant z < 12)=P(z=10)=0,15.$$

4) Оскільки сума чисел, записаних у другому рядку таблиці, дорівнює 1, то

$$P(z=8)=1-(0,1+0,35+0,25+0,15)=0,15. \blacktriangleleft$$

Розглянемо такий дослід. Червоний і синій гральні кубики кидають один раз і фіксують числа, що випали на кожному кубику. Нехай випадкова величина x дорівнює числу, що випало на червоному кубику. У цьому самому досліді нас можуть цікавити й інші випадкові величини, наприклад:

- величина y дорівнює числу, що випало на синьому кубику;
- величина z дорівнює сумі чисел, що випали на кубиках;
- величина t дорівнює добутку чисел, що випали на кубиках;
- величина u дорівнює величині x, піднесеній до п'ятого степеня.

Таким чином, в одному досліді може вивчатися кілька різних випадкових величин.

Звернемо увагу, що яким би елементарним наслідком не закінчився описаний вище дослід, значення випадкової величини z завжди дорівнює сумі значень випадкових величин x і y. У такому разі говорять, що випадкова величина z дорівнює **сумі випадкових величин** x і y. Записують: $z = x + y$.

Оскільки випадкові величини x і y є функціями, то це можна сказати й інакше: функція z є сумою функцій x і y.

Аналогічно означають інші операції з випадковими величинами. Наприклад, $t = xy$ і $u = x^5$.

ПРИКЛАД 3 Монету підкидають тричі. Випадкова величина x дорівнює кількості гербів, що випали при цьому, а випадкова величина y дорівнює 0, якщо в результаті першого підкидання випав герб, і 3 в іншому випадку. Знайдіть:

а) розподіл випадкової величини x;
б) розподіл випадкової величини y;
в) розподіл випадкової величини $z = x + y$.

Розв'язання. Будемо писати букву Г, якщо на монеті випадає герб, і букву Ч, якщо число. Тоді в розглядуваному досліді існує 8 рівноможливих результатів:

ГГГ, ГГЧ, ГЧГ, ГЧЧ, ЧГГ, ЧГЧ, ЧЧГ, ЧЧЧ.

а) Випадкова величина x дорівнює нулю (випало 0 гербів) тільки в одному з восьми випадків — якщо відбудеться наслідок ЧЧЧ, тому

$P(x = 0) = \frac{1}{8}$ — результат досліду ЧЧЧ.

Аналогічно знайдемо ймовірності для інших значень величини x. Маємо:

$P(x = 1) = \frac{3}{8}$ — результати досліду ГЧЧ, ЧГЧ, ЧЧГ;

$P(x = 2) = \frac{3}{8}$ — результати досліду ГГЧ, ГЧГ, ЧГГ;

$P(x = 3) = \frac{1}{8}$ — результат досліду ГГГ.

Тепер можна скласти таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини x.

Значення x	0	1	2	3
Ймовірність	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

б) Знайдемо розподіл випадкової величини y. Маємо:

$P(y=0)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ — результати досліду ГГГ, ГГЧ, ГЧГ, ГЧЧ;

$P(y=3)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ — результати досліду ЧГГ, ЧГЧ, ЧЧГ, ЧЧЧ.

Складемо таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини y.

Значення y	0	3
Ймовірність	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

в) Складемо загальну таблицю значень величин x і y залежно від результатів досліду.

Результат досліду	ГГГ	ГГЧ	ГЧГ	ГЧЧ	ЧГГ	ЧГЧ	ЧЧГ	ЧЧЧ
Значення x	3	2	2	1	2	1	1	0
Значення y	0	0	0	0	3	3	3	3

Сформуємо в цій таблиці ще один рядок для значень випадкової величини $z=x+y$.

Результат досліду	ГГГ	ГГЧ	ГЧГ	ГЧЧ	ЧГГ	ЧГЧ	ЧЧГ	ЧЧЧ
Значення x	3	2	2	1	2	1	1	0
Значення y	0	0	0	0	3	3	3	3
Значення $z=x+y$	3	2	2	1	5	4	4	3

З отриманої таблиці видно, що випадкова величина z дорівнює, наприклад, числу 5 в одному випадку з восьми — коли буде отримано ЧГГ, тому

$P(z=5)=\frac{1}{8}$ — результат досліду ЧГГ.

Аналогічно знайдемо ймовірності для інших значень величини z.

Складемо таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини $z=x+y$.

Значення $z=x+y$	1	2	3	4	5
Ймовірність	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

◄

ВПРАВИ

17.1.° З метою контролю відвідуваності уроків учнями та ученицями 11-А класу заступник директора протягом дня заходить у клас і записує прізвища тих, хто відсутній на уроці. Опишіть усі елементарні наслідки цього досліду. Яку випадкову величину розглядає заступник директора школи? Укажіть множину значень цієї величини.

17.2.° Для визначення кількості клітинок, на які треба перемістити фішку в настільній грі, кидають червоний і синій гральні кубики та фіксують числа, що на них випали. За правилами гри, якщо випаде «дубль», гравець пропускає хід, інакше — пересуває фішку на кількість клітинок, яка дорівнює сумі чисел, що випали на кубиках. Що є простором елементарних наслідків у цьому досліді? Яку випадкову величину розглядає гравець? Укажіть множину значень цієї величини.

17.3.° Вивчаючи якість продукції силікатного заводу (відсоток браку), заводський контролер фіксує кількість бракованих цеглин у випадково вибраній палеті. Відомо, що кожна палета містить 275 цеглин. Що є простором елементарних наслідків у цьому досліді? Яка випадкова величина цікавить виробника? Укажіть множину значень цієї величини.

17.4.° Плануючи роботу станції швидкої допомоги, з'ясовують кількість викликів, що надходять за одну годину. Для цього прослуховують запис розмов випадково вибраного оператора служби швидкої допомоги протягом години. Що є простором елементарних наслідків у цьому досліді? Яку випадкову величину досліджують працівники охорони здоров'я? Укажіть множину значень цієї величини.

17.5.° У коробці лежать 15 куль, з яких п'ять куль підписано числом 1, а решта 10 куль — числом 2. З коробки навмання беруть одну кулю. Випадкова величина x дорівнює числу, написаному на вибраній кулі. Укажіть множину значень і складіть таблицю розподілу ймовірностей цієї випадкової величини.

17.6.° Гральний кубик кидають один раз. Випадкова величина x дорівнює числу, що випало на кубику. Укажіть множину значень і складіть таблицю розподілу ймовірностей цієї випадкової величини.

17.7.° За таблицею розподілу ймовірностей випадкової величини x знайдіть значення змінної a.

1)

Значення x	1	2	3	4	5
Ймовірність	0,17	0,17	0,17	0,17	a

2)

Значення x	–1	–2	–3	–4
Ймовірність	$4a$	$3a$	$2a$	a

3)

Значення x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Ймовірність, %	25	b	21	a	38	$-a$

4)

Значення x	a	$1 - a^2$	7
Ймовірність	$5a^2 - 2a$	$2 - 3a$	a^2

17.8.° Чи може наведена таблиця задавати розподіл ймовірностей випадкової величини x?

Значення x	0	–1	1	–2	2
Ймовірність	0,47	0,02	0,19	0,17	0,16

17.9.° За таблицею розподілу ймовірностей випадкової величини x знайдіть значення змінної a.

1)

Значення x	0	12	48
Ймовірність	0,27	0,05	a

2)

Значення x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Ймовірність, %	17	30	a	29	24

3)

Значення x	1	2	3	4
Ймовірність	a	$4a$	$9a$	$16a$

17.10.° Дано таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини x.

Значення x	0	2	5	7	12	20
Ймовірність, %	9	26	35	11	7	12

Знайдіть:

1) $P(x = 5)$;
2) $P(x = 1)$;
3) $P(x \geqslant 7)$;
4) $P(x < 5)$;
5) $P(2 \leqslant x < 8)$.

17.11.° Дано таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини y.

Значення y	−3	−2	−1	1	2	3
Ймовірність	0,02	0,09	0,36	0,28	0,14	0,11

Знайдіть:

1) $P(y = 3)$;
2) $P(y \geqslant 0)$;
3) $P(y < 5)$;
4) $P(-2 < y \leqslant 2)$.

17.12.• Дано таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини x.

Значення x	1	7	10	13
Ймовірність, %	40	30	20	10

Знайдіть розподіл ймовірностей випадкової величини:

1) $x + 1$;
2) $-2x$;
3) x^2;
4) $(x - 7)^2$.

17.13.• Дано таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини y.

Значення y	−3	1	2	3
Ймовірність, %	15	30	25	30

Знайдіть розподіл ймовірностей випадкової величини:

1) $y - 4$;
2) $3y$;
3) y^3;
4) $(2 - y)^2$.

17.14.• Про випадкову величину y відомо, що $P(y > 3) = 0{,}2$ і $P(y < -3) = 0{,}4$. Знайдіть:

1) $P(y + 2 > 5)$;
2) $P(2y < -6)$;
3) $P(y^2 > 9)$;
4) $P(5y + 1 \leqslant 16)$.

17.15.• Про випадкову величину x відомо, що $P(x > 1) = 0{,}5$ і $P(x \geqslant -3) = 0{,}7$. Знайдіть:

1) $P(x - 4 > -3)$;
2) $P(7 - x \leqslant 10)$;
3) $P(2x + 7 < 1)$;
4) $P((x + 1)^2 > 4)$.

17.16.• Монету підкидають двічі. Випадкова величина x дорівнює кількості гербів, що при цьому випали. Знайдіть розподіл ймовірностей випадкової величини $z = x + x^2$.

17.17.• Монету та гральний кубик підкидають одночасно. Випадкова величина x дорівнює числу, що випало на кубику, а випадкова величина y дорівнює 1, якщо на монеті випав герб, і 0, якщо число. Знайдіть розподіл ймовірностей випадкової величини $z = xy$.

17.18.• Гральний кубик кидають двічі. Випадкова величина x дорівнює сумі чисел, що випали на кубику. Складіть таблицю розподілу ймовірностей цієї випадкової величини.

17.19.• В одній коробці лежать 2 кулі, пронумеровані числами 1 і 2, а в другій — 3 кулі, пронумеровані числами 1, 2 і 3. З кожної коробки навмання беруть по одній кулі. Випадкова величина y дорівнює сумі чисел на взятих кулях. Складіть таблицю розподілу ймовірностей цієї випадкової величини.

17.20.• Гральний кубик кидають один раз і записують кількість натуральних дільників числа, яке випало на кубику. Складіть таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини, що вивчається в цьому досліді.

17.21.• Монету підкидають не більше ніж 5 разів доти, доки вперше не випаде герб, і записують, скільки разів довелося підкинути монету. Складіть таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини, що вивчається.

17.22.• Гральний кубик кидають не більше ніж 3 рази доти, доки вперше не випаде шістка, і записують, скільки разів довелося кидати кубик. Складіть таблицю розподілу ймовірностей записаної випадкової величини.

18. Математичне сподівання випадкової величини

Нехай випадкова величина x дорівнює величині місячного прибутку деякої фірми. Аналітики прогнозують такий розподіл ймовірностей випадкової величини x у наступному місяці:

Значення x (тис. грн)	-500	-40	110
Ймовірність	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{7}{10}$

Із таблиці видно, що при одному збігу обставин фірма отримає прибуток, при інших — збиток. Яку величину прибутку можна очікувати в наступному місяці?

Для відповіді на це запитання міркуватимемо так. Припустимо, що власник фірми має не одну таку фірму, а десять однакових фірм. Ймовірність отримати збиток у розмірі 500 тис. грн дорівнює $\frac{1}{10}$, тому вважатимемо, що тільки одна з десяти розглядуваних фірм отримає в наступному місяці збиток у розмірі 500 тис. грн. Міркуючи аналогічно, вважаємо, що дві фірми отримають збиток по 40 тис. грн, а кожна з решти семи — прибуток у розмірі 110 тис. грн. Загальний прибуток усіх десяти фірм дорівнюватиме $(-500)\cdot 1+(-40)\cdot 2+110\cdot 7$ тис. грн, а отже, на кожну з них припадатиме

$$(-500)\cdot\frac{1}{10}+(-40)\cdot\frac{2}{10}+110\cdot\frac{7}{10}=19 \text{ тис. грн.}$$

Характеристика 19 тис. грн показує очікуваний рівень прибутку кожної такої фірми в наступному місяці. Цю характеристику називають **математичним сподіванням** випадкової величини x і позначають $M(x)$. Таким чином, $M(x)=19$.

Звернемо увагу на вираз $(-500)\cdot\frac{1}{10}+(-40)\cdot\frac{2}{10}+110\cdot\frac{7}{10}$, за допомогою якого було обчислено математичне сподівання $M(x)$. Нескладно помітити, що для обчислення $M(x)$ кожне зі значень випадкової величини x треба помножити на ймовірність настання цього значення й усі отримані добутки додати.

Означення. Якщо випадкова величина x має такий розподіл ймовірностей:

Значення x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Ймовірність	p_1	p_2	p_3	...	p_n

,

то число $M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + ... + x_np_n$ називають математичним сподіванням випадкової величини x.

ПРИКЛАД 1 Страховий поліс[1] передбачає виплати у випадку незначного пошкодження автомобіля (несправність кондиціонера або пошкодження лобового скла) або його викрадення. У разі незначного пошкодження розмір виплат складе 25 тис. грн, а в разі викрадення — 500 тис. грн. За досвідом минулих років відомо, що незначні пошкодження відбуваються з ймовірністю 6 %, а викрадання — із ймовірністю 0,1 %. На продажу кожного поліса страхова компанія планує заробити по 3 тис. грн. Визначте, яку ціну поліса має встановити страхова компанія.

Розв'язання. Розглянемо випадкову величину x, яка дорівнює розміру виплат страхової компанії за страховим полісом. Складемо таблицю розподілу ймовірностей випадкової величини x:

Значення x (тис. грн)	0	25	500
Ймовірність	0,939	0,06	0,001

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини x. Маємо:

$$M(x) = 0 \cdot 0{,}939 + 25 \cdot 0{,}06 + 500 \cdot 0{,}001 = 2.$$

Величина $M(x) = 2$ показує, що очікуваний розмір виплат за кожним полісом складе 2 тис. грн. Оскільки страхова компанія планує заробляти по 3 тис. грн на кожному полісі, то вона має встановити ціну такого поліса в 5 тис. грн.

Відповідь: 5 тис. грн. ◄

Зауважимо, що під час розв'язування прикладу 1 множина елементарних наслідків розглядуваного експерименту «залишилася поза кадром». У цій задачі множина елементарних наслідків $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ складалася з таких елементів:

ω_1 — відсутність страхових випадків,

[1] Документ, за яким страхова компанія зобов'язується виплатити власнику поліса певні грошові суми в разі настання передбачених страхових випадків.

ω_2 — несправність кондиціонера,

ω_3 — пошкодження лобового скла,

ω_4 — викрадання автомобіля.

Якщо ймовірність несправності кондиціонера становить, наприклад, $2\,\%$, то ймовірність пошкодження лобового скла дорівнює $4\,\%$. Тепер можна скласти таблицю розмірів виплат та ймовірностей залежно від страхових випадків (елементарних наслідків експерименту).

Елементарні наслідки	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Значення x (тис. грн)	0	25	25	500
Ймовірність	0,939	0,02	0,04	0,001

Математичне сподівання $M(x)$ випадкової величини x можна знайти, користуючись і цією таблицею. Маємо:

$$M(x) = 0 \cdot 0{,}939 + 25 \cdot 0{,}02 + 25 \cdot 0{,}04 + 500 \cdot 0{,}001 = 2.$$

Таким чином, *математичне сподівання можна знаходити як за таблицею розподілу ймовірностей випадкової величини, так і за таблицею значень випадкової величини та ймовірностей залежно від елементарних наслідків експерименту*.

Сформулюємо деякі властивості математичного сподівання.

1. Якщо $x = c$, де c — константа, то $M(x) = c$.

2. Якщо $M(x)$ — математичне сподівання випадкової величини x, а c — константа, то

$$M(x + c) = M(x) + c.$$

3. Якщо $M(x)$ — математичне сподівання випадкової величини x, а c — константа, то

$$M(cx) = cM(x).$$

Доведемо, наприклад, першу властивість. Якщо випадкова величина x дорівнює константі c, то це означає, що її розподіл ймовірностей має вигляд

Значення x	c
Ймовірність, %	100

Звідси

$$M(x) = c \cdot 1 = c.$$

Доведення другої та третьої властивостей намітимо в такій задачі.

ПРИКЛАД 2 Множина значень випадкової величини x складається з трьох чисел. Доведіть, що для довільної константи c виконуються рівності

$$M(x+c) = M(x) + c \text{ і } M(cx) = cM(x).$$

Розв'язання. Нехай розподіл ймовірностей випадкової величини x має вигляд

Значення x	x_1	x_2	x_3
Ймовірність	p_1	p_2	p_3

Тоді за означенням математичного сподівання отримуємо:

$$M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3.$$

Розглянемо випадкові величини $x+c$ і cx. Їхній розподіл ймовірностей задається такою таблицею:

Значення $x+c$	x_1+c	x_2+c	x_3+c
Значення cx	cx_1	cx_2	cx_3
Ймовірність	p_1	p_2	p_3

Ураховуючи, що $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, отримуємо:

$$M(x+c) = (x_1+c)p_1 + (x_2+c)p_2 + (x_3+c)p_3 =$$
$$= (x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) + c(p_1 + p_2 + p_3) = M(x) + c$$

і

$$M(cx) = cx_1p_1 + cx_2p_2 + cx_3p_3 = c(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) = cM(x).$$

Зазначимо, що формулу $M(cx) = cM(x)$ доведено для $c \neq 0$. Випадок $c = 0$ розгляньте самостійно. ◄

ВПРАВИ

18.1.° Про випадкову величину x відомо, що $M(x) = 5$, $D(x) = 3$. Знайдіть математичне сподівання випадкової величини y, яка дорівнює:

1) $x - 3$; 2) $2x$; 3) $-x + 1$; 4) $\frac{x+4}{3}$.

18.2.° Про випадкову величину x відомо, що $M(x) = -2$, $\sigma(x) = 1$. Знайдіть математичне сподівання випадкової величини:

1) $x + 1$; 2) $-4x$; 3) $2x - 3$; 4) $\frac{5-2x}{3}$.

18.3.° На карті з масштабом 1 : 10 000 лінійкою вимірюють відстань між пунктами A і B. Випадкова величина x дорівнює виміряній відстані (у сантиметрах). Відомо, що $M(x) = 7$. Оцініть відстань на місцевості між пунктами A і B (у метрах).

18.4.° Український школяр Андрій із Чернігова та його американська подруга Сандра з Бостона захоплюються метеорологією. У своєму листі Сандра повідомляє, що температура в Бостоні є випадковою величиною з математичним сподіванням 50 °F. Андрій знає, що перевести температуру зі шкали Фаренгейта в шкалу Цельсія можна за формулою $t_C = \frac{5}{9}(t_F - 32)$. Чому дорівнює математичне сподівання температури в Бостоні, виміряної за шкалою Цельсія?

18.5.• Випадкова величина x має такий розподіл ймовірностей:

Значення x	1	2	6
Ймовірність	0,4	0,5	0,1

Знайдіть математичне сподівання величини x.

18.6.• Випадкова величина y має такий розподіл ймовірностей:

Значення y	−2	5	19
Ймовірність	0,6	0,1	0,3

Знайдіть математичне сподівання величини y.

18.7.• Монету підкидають один раз. Випадкова величина x дорівнює 1, якщо випав герб, і 0, якщо випало число. Знайдіть математичне сподівання випадкової величини x.

18.8.• Знайдіть математичне сподівання числа очок, які випадають у результаті кидання грального кубика.

18.9.• Нехай a — деяке число. Відомо, що кожне значення випадкової величини не менше від a. Чи може її математичне сподівання виявитися меншим від a?

18.10.• Нехай x — випадкова величина і $M(x^2) = 0$. Знайдіть $M(x)$.

18.11.• Таблиця розподілу ймовірностей виграшу в азартній грі має вигляд:

Величина виграшу, грн	0	100	300	1500
Ймовірність, %	80	15	4	1

Ціна квитка для участі у грі становить 50 грн. Чи варто грати в таку гру?

18.12.° Фермер, який вирощує горох, має сумніви, чи використовувати йому насіння нового сорту. Ціна насіння нового сорту така, що його має сенс використовувати тільки тоді, коли врожайність гороху збільшиться на 10 %. Зібравши врожай із двох експериментальних ділянок, фермер оцінив розподіл кількості горошин у стручку старого й нового сортів (див. таблицю). Чи варто фермеру використовувати насіння нового сорту?

Кількість горошин у стручку	2	3	4	5	6	7	8
Ймовірність (горох старого сорту), %	12	13	20	26	18	6	5
Ймовірність (горох нового сорту), %	2	5	18	21	27	23	4

18.13.° Громадська організація проводить безпрограшну лотерею, прибуток від якої піде на благодійні цілі. Кожний учасник лотереї купляє за 500 грн лотерейний білет. Таблиця розподілу ймовірностей суми виграшу має такий вигляд:

Сума виграшу, грн	100	200	400	1000	5000
Ймовірність	0,5	0,3	0,15	0,03	0,02

Оплата виграшів відбувається за рахунок коштів, виручених від продажу білетів. Яку суму для благодійних цілей сподівається отримати організація з одного лотерейного білета?

18.14.° Використовуючи результати виступу збірної команди України на міжнародній математичній олімпіаді за попередні роки, розподіл ймовірностей кількості золотих медалей, виборених командою на окремій олімпіаді, можна оцінити так:

Кількість золотих медалей у команді	0	1	2	3	4
Ймовірність, %	10	50	25	10	5

Знайдіть математичне сподівання кількості золотих медалей команди України на черговій міжнародній математичній олімпіаді.

18.15.° Використовуючи результати виступу футбольного клубу «Динамо» (Київ) у чемпіонаті України за попередні роки, розподіл ймовірностей посісти певне місце в підсумковій таблиці можна оцінити так:

Місце в підсумковій таблиці	1	2	3
Ймовірність, %	60	36	4

Знайдіть математичне сподівання місця команди «Динамо» (Київ) у підсумковій таблиці чергової першості країни з футболу.

18.16.$^{\bullet}$ Випадкова величина x дорівнює кількості препаратів, проданих аптекою одному покупцеві за одну покупку. Відомо, що множина значень випадкової величини x дорівнює $\{0, 1, ..., 6\}$ і $P(x = k) = a\ (6k - k^2)$ для всіх $k = 0, 1, ..., 6$. Знайдіть математичне сподівання кількості препаратів, проданих аптекою одному покупцеві за одну покупку.

18.17.$^{\bullet}$ Випадкова величина y дорівнює кількості школярів на черговому занятті математичного гуртка. Відомо, що множина значень випадкової величини y дорівнює $\{5, 6, 7\}$ і $P(y = k) = ak$ для всіх $k = 5, 6, 7$. Знайдіть математичне сподівання кількості школярів на занятті математичного гуртка.

18.18.$^{\bullet}$ Комерційне підприємство може укласти деяку угоду. У цьому разі прогноз його прибутку на найближчий місяць визначається такою таблицею:

Прибуток підприємства, тис. грн	−500	−40	110
Ймовірність, %	10	20	70

Якщо ж угоду не буде укладено, то прибуток підприємства визначається такою таблицею:

Прибуток підприємства, тис. грн	−11	1	35
Ймовірність, %	20	20	60

За якого рішення очікуваний рівень прибутку буде вищим?

18.19.$^{\bullet\bullet}$ Чому дорівнює математичне сподівання кількості шісток, що випадуть у результаті кидання трьох гральних кубиків?

18.20.$^{\bullet\bullet}$ Чому дорівнює математичне сподівання кількості гербів, що випадуть у результаті підкидання п'яти монет?

18.21.$^{\bullet\bullet}$ Ймовірність забити пенальті (штрафний 11-метровий удар у футболі) дорівнює p.

1) Складіть таблицю розподілу ймовірностей кількості забитих м'ячів у серії з п'яти пенальті.
2) З точністю до 1 % обчисліть ймовірності зі складеної таблиці розподілу, якщо $p = 0{,}8$.
3) Базуючись на отриманих у другому завданні наближених значеннях ймовірностей, оцініть математичне сподівання кількості забитих м'ячів у серії з п'яти пенальті.

18.22.•• З великої коробки із цукерками, серед яких 30 % шоколадних, Карлсон навмання виймає 4 цукерки.

1) Складіть таблицю розподілу ймовірностей кількості шоколадних цукерок у Карлсона.
2) Оцініть математичне сподівання кількості шоколадних цукерок у Карлсона.

19. Геометрична ймовірність

«Морський бій» — гра, знайома майже кожному школяру. У який корабель більше шансів улучити — у двопалубний чи чотирипалубний? Звісно, що в чотирипалубний, оскільки він складається з більшої кількості клітинок. Те саме можна сказати інакше: оскільки «площа» чотирипалубного корабля більша за «площу» двопалубного, то ймовірність улучити в чотирипалубний корабель більша, ніж ймовірність улучити у двопалубний.

Задачі, у яких ймовірність випадкової події можна знайти, обчисливши певні геометричні величини, є непоодинокими. Наведемо ще один приклад.

Згадаймо, що коли перші краплі дощу падають на суху асфальтовану баскетбольну площадку (рис. 19.1), то залишають на ній темні точки-відмітини. Яка ймовірність того, що чергова темна точка з'явиться в центральному крузі площадки (подія A)? Природно вважати, що ймовірність випадкової події A дорівнюватиме відношенню площі центрального круга до площі всієї площадки. Наприклад, якщо площадка має розміри 26 м × 14 м, а радіус центрального круга дорівнює 1,8 м, то

$$P(A) = \frac{\pi \cdot 1{,}8^2}{26 \cdot 14} \approx 0{,}03.$$

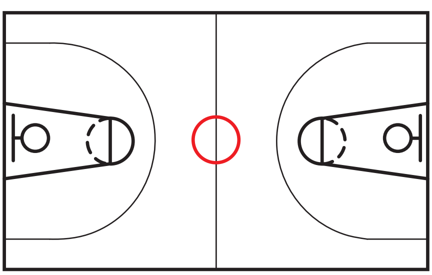


Рис. 19.1

Узагальнимо наші міркування.

Розглянемо таке випробування. У плоскій фігурі U з ненульовою площею S навмання вибирають точку X. Яка ймовірність того, що точка X потрапить до даної фігури A, яка належить фігурі U і площа якої дорівнює S_A (рис. 19.2)? Зазвичай вважають, що така ймовірність дорівнюватиме відношенню площі S_A фігури A до площі S фігури U, тобто

$$P(A) = \frac{S_A}{S}.$$

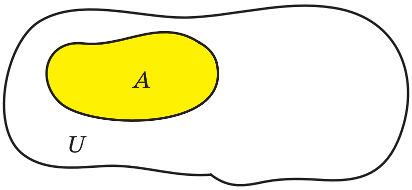


Рис. 19.2

Зауважимо, що для дослідів з вибором точки на прямій або в просторі можна записати аналогічні відношення. Наприклад, нехай точку X вибирають навмання на проміжку U завдовжки l (рис. 19.3). Якщо проміжок A завдовжки l_A належить проміжку U, то ймовірність того, що точка X потрапить до проміжку A, можна обчислити за формулою

$$P(A) = \frac{l_A}{l}.$$

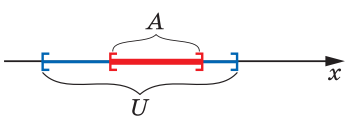


Рис. 19.3

У досліді з вибором точки з тіла U об'єму V використовують формулу

$$\boxed{P(A) = \frac{V_A}{V},}$$

де V_A — об'єм тіла A, що є частиною тіла U.

Ймовірність випадкової події, що визначена в такий спосіб, називають **геометричною ймовірністю**.

ПРИКЛАД 1 У прямокутний трикутник з катетами 5 і 12 навмання кидають точку. Яка ймовірність того, що точка потрапить у круг, вписаний у цей трикутник?

Розв'язання. Площа трикутника дорівнює $S = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$. Використовуючи формулу $r = \frac{S}{p}$, обчислимо радіус вписаного круга. Маємо: $r = 2$. Тоді площа вписаного круга дорівнює $S_{кр} = 4\pi$.

Отже, ймовірність того, що навмання вибрана точка потрапить у вписаний круг, становить $\frac{4\pi}{30} = \frac{2\pi}{15}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Юнак і дівчина домовилися про побачення з 15:00 до 16:00. Відомо, що кожний із них приходить у будь-який час з 15:00 до 16:00 незалежно від другого. Якщо юнак прийде й не зустріне дівчину, то буде чекати її ще протягом 20 хв. Дівчина в аналогічній ситуації буде чекати юнака протягом лише 10 хв. Яка ймовірність того, що побачення відбудеться?

Розв'язання. Нехай x і y — час (у хвилинах) приходу на побачення юнака та час приходу дівчини відповідно, відраховані від 15:00. Наприклад, якщо юнак прийшов о 15:20, то $x = 20$ хв. Описати незалежний і випадковий вибір змінних $x \in [0; 60]$ та $y \in [0; 60]$ можна так. Виберемо навмання в квадраті $OKLM$ точку $Q(x; y)$ (рис. 19.4). Тоді координати x і y точки Q визначають час приходу юнака та дівчини відповідно.

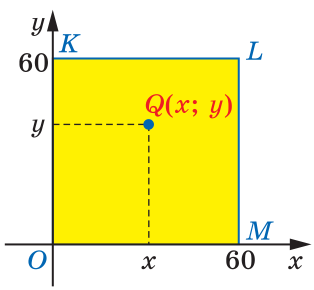


Рис. 19.4

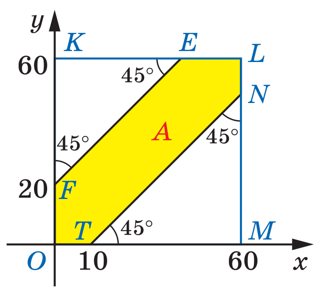


Рис. 19.5

З'ясуємо, за яких умов відбудеться побачення.

Якщо юнак прийшов раніше від дівчини, тобто $x < y$, то побачення відбудеться за умови, що дівчина прийде не пізніше ніж через 20 хв, тобто час y має задовольняти умову $y \leqslant x + 20$.

Якщо юнак прийшов не раніше від дівчини, тобто $y \leqslant x$, то побачення відбудеться за умови, що він прийде не пізніше ніж через 10 хв після дівчини, тобто час x має задовольняти умову $x \leqslant y + 10$.

Таким чином, побачення відбудеться тоді, коли числа x і y задовольнятимуть сукупність нерівностей

$$\left[\begin{array}{l} x < y \leqslant x + 20, \\ y \leqslant x \leqslant y + 10. \end{array}\right.$$

Побудувавши графік цієї сукупності при $x \in [0; 60]$ і $y \in [0; 60]$ (рис. 19.5), отримаємо фігуру A.

Отже, юнак і дівчина зустрінуться тоді й лише тоді, коли навмання вибрана у квадраті $OKLM$ точка потрапить до фігури A. Щоб знайти площу S_A фігури A, підрахуємо площу квадрата $OKLM$ та площі трикутників KEF і MTN. Маємо:

$$S_{OKLM} = 60^2 = 3600, \quad S_{KEF} = \frac{1}{2} \cdot 40^2 = 800,$$

$$S_{MTN} = \frac{1}{2} \cdot 50^2 = 1250.$$

Звідси $S_A = 3600 - 800 - 1250 = 1550.$

Використовуючи геометричне визначення ймовірності, отримуємо: $P(A) = \frac{1550}{3600} = \frac{31}{72}.$ ◄

ВПРАВИ

19.1.° На відрізку [−2; 2] навмання вибирають число x. Яка ймовірність того, що $|x| < 1$?

19.2.° У куб помістили інший куб з удвічі меншою стороною. Яка ймовірність того, що навмання вибрана у великому кубі точка потрапить до меншого куба?

19.3.° У круг радіуса 1 вписали квадрат. Яка ймовірність того, що навмання вибрана точка круга не потрапить до вписаного квадрата?

19.4.• У квадраті зі стороною 3 навмання вибирають точку. Яка ймовірність того, що відстань від вибраної точки до найближчої сторони квадрата не перевищує 1?

19.5.• Від двох паличок завдовжки l випадковим чином відрізають по шматку. Яка ймовірність того, що довжина кожного із цих шматків виявиться більшою за $\frac{l}{5}$?

19.6.• У прямокутнику зі сторонами 5 і 7 навмання вибирають точку. Яка ймовірність того, що відстань від вибраної точки до всіх сторін прямокутника виявиться меншою від 4?

19.7.• У квадраті з вершинами в точках з координатами (0; 0), (1; 0), (0; 1), (1; 1) навмання вибирають точку $Q(x; y)$. Для випадкових подій $A = \{(x;\ y) \mid x < 0{,}4\}$ і $B = \{(x;\ y) \mid y > 0{,}7\}$ доведіть рівність $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

19.8.• У квадраті з вершинами в точках з координатами (0; 0), (1; 0), (0; 1), (1; 1) навмання вибирають точку $Q(x; y)$. Для випадкових подій $A = \{(x; y) \mid x \geqslant 0{,}5\}$ і $B = \{(x;\ y) \mid y < 0{,}3\}$ доведіть рівність $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

19.9.• У кулю радіуса R вписали куб. Яка ймовірність того, що точка, навмання вибрана в кулі, потрапить до вписаного куба?

19.10.• Навколо циліндра з радіусом основи R і висотою H описали кулю. Яка ймовірність того, що точка, навмання вибрана в кулі, потрапить до циліндра?

19.11.• У квадраті з вершинами в точках з координатами (0; 0), (1; 0), (0; 1), (1; 1) навмання вибирають точку $Q(x; y)$. Знайдіть ймовірність випадкової події:

1) $\{(x;\ y) \mid x < 0{,}3\}$;
2) $\{(x;\ y) \mid x + y > 0{,}2\}$;
3) $\{(x; y) \mid \max\{x; y\} \geqslant 0{,}7\}$.

19.12.• У квадраті з вершинами в точках з координатами (0; 0), (1; 0), (0; 1), (1; 1) навмання вибирають точку $Q(x; y)$. Знайдіть ймовірність випадкової події:

1) $\{(x; y) \mid y \geqslant 0{,}8\}$;
2) $\{(x;\ y) \mid x - y < 0{,}3\}$;
3) $\{(x; y) \mid \min\{x; y\} \leqslant 0{,}4\}$.

19.13.• На площині проведено нескінченну кількість паралельних прямих. Відстань між сусідніми прямими дорівнює 5. Яка ймовірність того, що монета радіуса 1, яку випадковим чином кидають на площину, перетне одну з паралельних прямих?

19.14.• На координатну площину випадковим чином кидають монету радіуса $\dfrac{1}{4}$. Яка ймовірність того, що вона перетне одну з прямих виду $y = k$ або $x = k$, де $k \in \mathbb{Z}$?

19.15.•• У квадраті з вершинами в точках з координатами (0; 0), (1; 0), (0; 1), (1; 1) навмання вибирають точку $Q(x; y)$. Знайдіть ймовірність випадкової події:

1) $\{(\ ;\ ) \mid \quad \}$; 2) $\{(x; y) \mid \sin \pi x < y\}$; 3) $\{(x; y) \mid 5xy \leqslant 1\}$.

19.16.•• На відрізку $[-1; 1]$ координатної прямої навмання вибирають дві точки. Нехай p і q — координати цих точок. Знайдіть ймовірність того, що рівняння $t^2 + 2pt + q = 0$ має корені.

19.17.•• У квадраті з вершинами в точках з координатами (0; 0), (1; 0), (0; 1), (1; 1) навмання вибирають точку $Q(x; y)$. Знайдіть ймовірність випадкової події:

1) $\{(x; y) \mid y > x^2\}$; 2) $\left\{(x; y) \mid \cos\frac{\pi x}{2} \geqslant y\right\}$; 3) $\{(x; y) \mid 2xy > 1\}$.

19.18.•• У прямокутний рівнобедрений трикутник ABC $(\angle C = 90°)$ вписано квадрат $CDEF$, вершини якого лежать на сторонах трикутника. У трикутнику ABC навмання вибирають п'ять точок. Яка ймовірність того, що рівно три з них потраплять до квадрата $CDEF$?

19.19.•• Точка C ділить відрізок AB на відрізки завдовжки $AC = a_1$ і $CB = a_2$. На відрізок AB навмання кидають n точок. Яка ймовірність того, що на відрізок AC потраплять k таких точок?

19.20.•• У квадраті з вершинами в точках з координатами (0; 0), (1; 0), (0; 1), (1; 1) навмання вибирають точку $Q(x; y)$. Знайдіть таке число z, що ймовірність виконання нерівності $x^2y \leqslant z$ дорівнює $50\ \%$.

19.21.•• У квадраті з вершинами в точках з координатами (0; 0), (1; 0), (0; 1), (1; 1) навмання вибирають точку $Q(x; y)$. Знайдіть таке число z, що ймовірність виконання нерівності $y \leqslant zx^2$ дорівнює $30\ \%$.

19.22.•• Андрій та Микола домовилися про зустріч о 12:00. Кожний із них приходить на зустріч у будь-який час з 11:50 до 12:10 незалежно один від одного. Друзі домовилися чекати один одного 10 хв. Яка ймовірність того, що зустріч відбудеться?

19.23.•• Поїзди метро ходять кожні 3 хвилини. Посадка пасажирів триває протягом 20 секунд. Яка ймовірність того, що пасажир, після того як зайшов на станцію, протягом 1 хвилини сяде у вагон метро?

19.24.•• Від трьох паличок, довжина кожної з яких дорівнює l, випадковим чином відрізають по шматку. Яка ймовірність того, що з трьох відрізаних шматків можна буде скласти трикутник?

19.25.•• На відрізок навмання послідовно кидають дві точки. Яка ймовірність того, що з трьох утворених частин відрізка можна буде скласти трикутник?

19.26.•• На відрізок навмання послідовно кидають три точки. Яка ймовірність того, що третя точка потрапить між двома першими?

19.27.* На відрізку AB навмання вибирають точку C. Потім на відрізку AC навмання вибирають точку D. Яка ймовірність того, що $AD < \frac{AB}{3}$?

19.28.* Із множини $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ навмання вибирають число x, а потім ще одне число y (числа x і y можуть бути рівними). Позначимо через p_n ймовірність того, що $x^2 + y^2 \leqslant n^2$. Знайдіть $\lim\limits_{n \to \infty} p_n$.

МЕТОД МОНТЕ–КАРЛО Й ЗАДАЧА БЮФФОНА

Геометричну ймовірність використовують у таких розділах математики, які, на перший погляд, не мають ніякого відношення до теорії ймовірностей. Покажемо, наприклад, як за допомогою геометричної ймовірності наближено обчислюють площі складних фігур.

Розглянемо фігуру A, задану на координатній площині xy, наприклад, нерівністю $\left(x + \sqrt{y - y^2}\right)2^{y\sqrt{x - x^2}} \leqslant 1$ (рис. 19.6). Побудувати графік (навіть приблизний) такої нерівності — складна задача[1]. Незрозуміло також, як відомими методами обчислити площу фігури A.

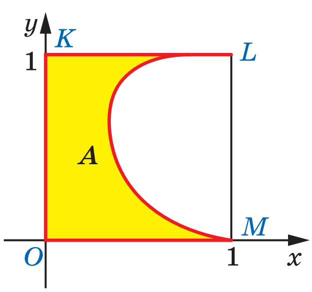


Рис. 19.6

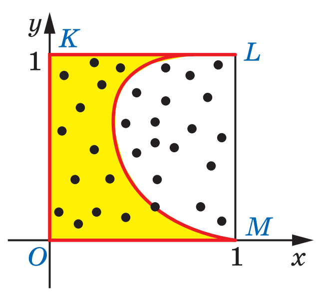


Рис. 19.7

Скористаємося формулою геометричної ймовірності $P(A) = \frac{S_A}{S}$, звідки $S_A = SP(A)$. Отже, для обчислення площі фігури A необхід-

[1] Графік даної нерівності, зображений на рисунку 19.6, побудовано за допомогою комп'ютера.

но знати площу S фігури U, якій належить фігура A, та ймовірність того, що випадково вибрана точка фігури U належить фігурі A.

Оскільки область визначення даної нерівності задається умовами $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, то всі точки фігури A належать одиничному квадрату $OKLM$ (рис. 19.7). Тому за фігуру U візьмемо одиничний квадрат $OKLM$ з площею $S = 1$.

Величину $P(A)$ можна наближено оцінити, обчисливши частоту потрапляння точки до фігури A. Для цього треба N разів навмання вибрати точку $Q(x;\ y)$ с координатами $x \in [0;1]$, $y \in [0;1]$ і підрахувати кількість тих випадків, коли виконуватиметься дана нерівність (рис. 19.7). Зазвичай такі випробування моделюють за допомогою комп'ютера. Використовуючи стандартний генератор випадкових чисел, на комп'ютері легко реалізувати випадкове вибирання чисел $x \in [0;1]$, $y \in [0;1]$. Крім цього, у такий спосіб необхідну велику кількість випробувань можна провести за лічені секунди.

Провівши $N = 10^6$ таких випробувань, автори підручника з'ясували, що в $N_A = 457\,134$ випадків навмання вибрана точка потрапила до фігури A. Отже, $p(A) \approx \dfrac{457\,134}{10^6} \approx 0{,}457$. Скориставшись формулою $S_A = P(A)S$, маємо, що $S_A \approx 0{,}457$.

Такий метод наближеного обчислення площі називають **методом Монте-Карло**.

Назва методу Монте-Карло походить від назви міста князівства Монако. Місто Монте-Карло відоме численними казино, у яких проводять азартні ігри з виграшом, застосовуючи різне обладнання, зокрема рулетку — один із найпростіших механічних пристроїв для утворення випадкових чисел.

Станіслав Улам
(1909–1984)

Народився у Львові, закінчив Львівський політехнічний інститут. У 1936 р. переїхав до США. Основні його здобутки належать до топології, функціонального аналізу, теорії ймовірностей, теорії множин.

Одним із засновників методу Монте-Карло вважають відомого математика Станіслава Улама, який у середині XX ст. описав можливості цього методу. Проте головна ідея методу Монте-Карло була відома набагато раніше. Ще у XVIII ст. французький натураліст, біолог, математик і письменник Жорж Луї Леклерк Бюффон запропонував ймовірнісний спосіб означення й обчислення числа π.

Задача Бюффона. Нехай на площині проведено нескінченну кількість паралельних прямих. Відстань між сусідніми прямими дорівнює 4. На площину навмання кидають голку завдовжки 2. Знайдіть ймовірність того, що голка перетне одну з прямих.

Розв'язання. Визначатимемо положення голки двома параметрами: перший — кут x між прямою, що містить голку, і проведеними прямими; другий — відстань y від середини голки до найближчої прямої (рис. 19.8). Зрозуміло, що $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ і $y \in [0; 2]$. Можна вважати, що кут x і відстань y вибирають навмання як координати точки $Q(x; y)$ прямокутника $OFGH$ зі сторонами $\frac{\pi}{2}$ і 2 (рис. 19.9). Розглянемо прямокутний трикутник ABC, катет AC якого паралельний даним прямим (рис. 19.8). Оскільки голка AB має довжину 2, то середня лінія KL трикутника ABC дорівнює:

$$KL = \frac{BC}{2} = \frac{AB \sin x}{2} = \sin x.$$

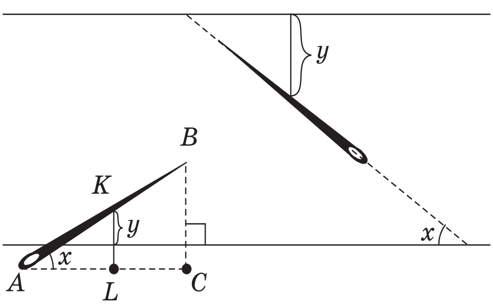


Рис. 19.8

Легко зрозуміти, що голка перетне проведену пряму тоді й тільки тоді, коли $y \leqslant KL$, тобто при $y \leqslant \sin x$. Іншими словами, голка перетне пряму тоді, коли взята навмання точка $Q(x; y)$ належатиме фігурі A, що розташована в прямокутнику $OFGH$ нижче від графіка функції $y = \sin x$ (рис. 19.9). Обчислимо площу фігури A.

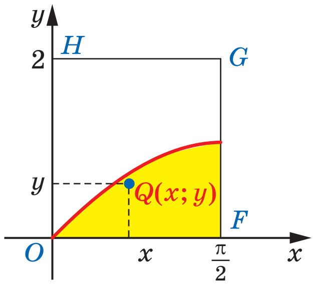


Рис. 19.9

Маємо: $S_A = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. Площа прямокутника $OFGH$ дорівнює: $S = \frac{\pi}{2} \cdot 2 = \pi$, тому $P(A) = \frac{1}{\pi}$. Звідси $\pi = \frac{1}{P(A)}$.

Отже, величина, обернена до ймовірності того, що голка перетне проведені прямі, дорівнює π. ◄

Базуючись на отриманому висновку, науковці проводили експериментальне визначення числа π. Деякі результати наведено в таблиці.

Дослідник	Кількість випробувань	Наближене експериментальне значення числа π
Вольф	5000	3,1596
Сміт	3204	3,1553
Фокс	1120	3,1419

Якщо змоделювати на комп'ютері випадкове кидання голки, то, провівши велику кількість таких «випробувань», можна знайти декілька десяткових знаків числа π.

Спробуйте й ви обчислити кілька знаків числа π.

КРАСА ТА РОЗУМ УКРАЇНИ

Роксолана, Соломія Крушельницька, Леся Українка — відомі в усьому світі українки минулого.

Сучасні українські дівчата стають найкращими не тільки в політиці та мистецтві, а й на аренах математичних змагань. У найпрестижнішій Європейській математичній олімпіаді для дівчат (EGMO) українські школярки Софія Дубова (2014 рік), Ольга Шевченко (2017 рік) та Аліна Гарбузова (2018 рік) тричі виборювали першість серед усіх учасниць, розв'язавши абсолютно всі запропоновані задачі. Узагалі, українська команда дівчат досі залишається єдиною командою Європи, яка тричі ставала першою в офіційному командному заліку. Такі досягнення переконали європейську спільноту обрати місцем проведення EGMO у 2019 р. місто Київ. Упевнені, що в черговий раз побачимо наших розумниць на вершині п'єдесталу пошани.

Команда України на першій олімпіаді EGMO (Кембридж, Велика Британія, 2012 рік)

Склад команди (*зліва направо*): Харитонова Олена (срібло); Кравченко Юлія (срібло); Павлюк Марія (срібло); Сердюк Ярослава (срібло)

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

Формула бінома Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a^1 b^{n-1} + b^n.$$

Несумісні події

Якщо в деякому досліді дві події не можуть відбутися одночасно, то їх називають несумісними.

Об'єднання, перетин, доповнення подій

Подію, яка відбувається в тому й тільки в тому випадку, коли відбувається принаймні одна з двох подій A або B деякого експерименту, називають об'єднанням подій A і B. Об'єднання подій A і B позначають $A \cup B$.

Подію, яка відбувається в тому й тільки в тому випадку, коли відбувається і подія A, і подія B деякого експерименту, називають перетином подій A і B. Перетин подій A і B позначають $A \cap B$.

Подію, яка відбувається в тому й тільки в тому випадку, коли не відбувається подія A, називають доповненням події A. Доповнення події A позначають $\bar{A}$.

Якщо A і B — несумісні події деякого досліду, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Якщо A і B — події деякого досліду, то

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B); \quad P(A \cap B) = P(A) P_A(B).$$

Незалежні події

Події A і B деякого досліду називають незалежними, якщо $P(A \cap B) = P(A) P(B)$.

Випадкова величина

Випадковою величиною називають функцію, яка кожному елементарному наслідку деякого досліду ставить у відповідність число. Множину тих значень, яких вона може набувати, називають областю значень (множиною значень) випадкової величини.

Розподіл ймовірностей випадкової величини

Набір ймовірностей $P(x=k)$, де k пробігає множину значень випадкової величини, називають розподілом ймовірностей випадкової величини x.

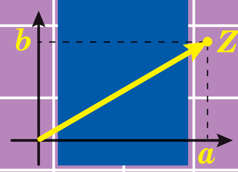
Математичне сподівання

Якщо випадкова величина x має такий розподіл ймовірностей:

Значення x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Ймовірність	p_1	p_2	p_3	...	p_n

,

то число $M(x)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\ldots+x_np_n$ **називають математичним сподіванням випадкової величини x.**



§ 4. Комплексні числа

20. **Множина комплексних чисел**

21. **Комплексна площина. Тригонометрична форма комплексного числа**

22. **Множення і ділення комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі. Корінь *n*-го степеня з комплексного числа**

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з поняттям комплексного числа, різними формами його запису та вивчите властивості комплексних чисел.
- Ви дізнаєтеся, як за допомогою комплексних чисел визначають квадратний корінь з від'ємних чисел.

20. Множина комплексних чисел

Алгебраїчні рівняння слугують математичними моделями реальних процесів, які вивчають у найрізноманітніших галузях знань. Тому одним із важливих завдань математики є дослідження алгебраїчних рівнянь.

Вам добре відомий ланцюжок $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, який демонструє співвідношення між числовими множинами. Він ілюструє процес розширення числових множин. Багато в чому це розширення стимулювалося розвитком теорії розв'язування алгебраїчних рівнянь. Пояснимо сказане.

Рівняння $x + 2 = 0$ не має натуральних коренів. Проте зазначене рівняння має розв'язки на множині $\mathbb{Z}$. Рівняння $2x - 1 = 0$ не має розв'язків на множині $\mathbb{Z}$, але воно має розв'язки на множині $\mathbb{Q}$. Рівняння $x^2 - 2 = 0$ не має розв'язків на множині $\mathbb{Q}$, але воно має розв'язки на множині $\mathbb{R}$.

Ці приклади показують, що розширення числових множин може зробити нерозв'язуване рівняння розв'язуваним.

Рівняння $x^2 + 1 = 0$ не має розв'язків на множині $\mathbb{R}$. Виникає природне запитання: чи є необхідність розширити множину $\mathbb{R}$ так, щоб це рівняння стало розв'язуваним?

Звернемося, наприклад, до рівняння $x^3 - 15x + 10 = 0$. Розглянувши неперервну функцію $f(x) = x^3 - 15x + 10$, за допомогою першої теореми Больцано—Коші встановлюємо, що на кожному з проміжків $(-5; 0)$, $(0; 1)$ і $(1; 4)$ функція f має нуль.

Проте гарантія існування коренів даного кубічного рівняння ніяк не допомагає знайти їх. Це рівняння є складним. Якщо методами розв'язування квадратних рівнянь володіли ще стародавні греки, то для кубічних рівнянь, незважаючи на величезні зусилля багатьох поколінь учених, протягом більше ніж тисяча років не вдавалося знайти більш-менш загального способу розв'язування.

Лише в XVI ст. італійські науковці винайшли прийом, який ми продемонструємо на даному кубічному рівнянні.

Зробивши заміну $x = z + \frac{5}{z}$, отримуємо:

$$z^3 + 15z + \frac{75}{z} + \frac{125}{z^3} - 15\left(z + \frac{5}{z}\right) + 10 = 0.$$

Звідси $z^3 + \frac{125}{z^3} + 10 = 0.$

Маємо:

$$z^6 + 10z^3 + 125 = 0;\ \ (z^3 + 5)^2 + 100 = 0;$$

$$\left(\frac{z^3 + 5}{10}\right)^2 + 1 = 0.$$

Виконавши заміну $\frac{z^3 + 5}{10} = t$, отримуємо рівняння $t^2 + 1 = 0$.

Звісно, рівняння $t^2 + 1 = 0$ не має коренів. Але бажання розв'язати початкове кубічне рівняння спонукало вчених ввести до розгляду деякий новий об'єкт (позначимо його, наприклад, символом i) такий, що $i^2 + 1 = 0$. Виконуючи дії із цим об'єктом як з дійсними числами, італійські вчені змогли виразити через нього значення змінної z, а потім знайти й x. Виявилося, що вирази для знаходження змінної x не містять символу i та визначають дійсні корені даного кубічного рівняння.

Таким чином, розширення множини $\mathbb{R}$ до множини, на якій рівняння $x^2 + 1 = 0$ буде мати корені, є доцільним.

Окреслимо напрями пошуку нової числової множини (будемо її називати множиною *комплексних чисел*):

1) множина комплексних чисел має містити множину дійсних чисел;
2) над елементами множини комплексних чисел мають бути визначені арифметичні дії (додавання, віднімання, множення та ділення);
3) арифметичні дії повинні мати властивості відповідних дій із дійсними числами;
4) рівняння $x^2 + 1 = 0$ повинно мати розв'язок на множині комплексних чисел.

Серед множин, які ви вивчали раніше, немає такої, яка задовольняє всі перелічені вимоги. Але існує множина, що задовольняє деякі із цих умов.

На координатній площині розглянемо множину (позначатимемо її $\mathbb{C}$) усіх векторів $\overrightarrow{OZ}$, де O — початок координат, а Z — будь-яка точка на площині. Елементи множини $\mathbb{C}$ можна додавати й віднімати за правилами, подібними до тих, за якими додають і віднімають дійсні числа. Наприклад,

$$\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2} = \overrightarrow{OZ_2} + \overrightarrow{OZ_1}$$

або

$$\overrightarrow{OZ_1} - \left(\overrightarrow{OZ_2} + \overrightarrow{OZ_3}\right) = \overrightarrow{OZ_1} - \overrightarrow{OZ_2} - \overrightarrow{OZ_3}.$$

Якщо між двома множинами встановлено взаємно однозначну відповідність, то елементи однієї множини можна ототожнити з елементами другої. Наприклад, точку координатної прямої ми називаємо дійсним числом, а дійсне число — точкою. Існує й інша геометрична інтерпретація дійсних чисел, коли дійсне число ототожнюють з вектором. Розглянемо таку інтерпретацію.

Нехай точка Z лежить на осі абсцис і має координати $(x;\ 0)$. Тоді вектору $\overrightarrow{OZ}$ з координатами $(x;\ 0)$ відповідає дійсне число x (рис. 20.1). І навпаки, кожному дійсному числу x відповідає вектор $\overrightarrow{OZ}$ з координатами $(x;\ 0)$. Наведена відповідність дозволяє ототожнити дійсне число x і вектор $\overrightarrow{OZ}$ з координатами $(x;\ 0)$. Множина таких векторів є підмножиною множини $\mathbb{C}$. Тому можна вважати, що $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

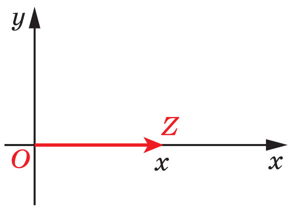


Рис. 20.1

Таким чином, множина $\mathbb{C}$ частково задовольняє описані вище вимоги до множини комплексних чисел. Це дає підстави будувати множину комплексних чисел, ґрунтуючись на множині $\mathbb{C}$.

Означення. ***Комплексним числом*** **називають вектор $\overrightarrow{OZ}$, де O — початок координат, а Z — довільна точка площини.**

Комплексне число $\overrightarrow{OZ}$ позначають буквою z.

Пишуть: $z = \overrightarrow{OZ}$.

Розглянемо вектор $\overrightarrow{OA}$ з координатами $(1;\ 0)$. Цей вектор ототожнено з дійсним числом 1. Тому таке комплексне число $\overrightarrow{OA}$ позначають цифрою 1 і називають **одиницею**.

Розглянемо вектор $\overrightarrow{OB}$ з координатами $(0;\ 1)$. Таке комплексне число $\overrightarrow{OB}$ позначають буквою i та називають **уявною одиницею** (рис. 20.2).

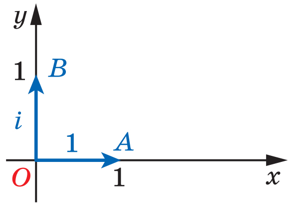


Рис. 20.2

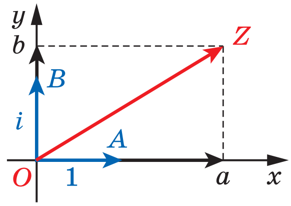


Рис. 20.3

Вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ неколінеарні. Тому для будь якого вектора $\overrightarrow{OZ}$ існує єдина пара дійсних чисел $(a; b)$ така, що $\overrightarrow{OZ} = a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB}$. Зауважимо, що пара дійсних чисел $(a; b)$ — це координати точки Z і вектора $\overrightarrow{OZ}$ (рис. 20.3).

З урахуванням введених позначень рівність $\overrightarrow{OZ} = a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB}$ можна записати так: $z = a \cdot 1 + b \cdot i$.

Таким чином, *довільне комплексне число z можна подати у вигляді $z = a \cdot 1 + b \cdot i$,* де a, b — деякі дійсні числа (координати точки Z і вектора $\overrightarrow{OZ}$).

Наголосимо, що в записі $z = a \cdot 1 + b \cdot i$ символи 1 та i — це позначення векторів з координатами (1; 0) та (0; 1) відповідно.

Замість виразу $a \cdot 1 + b \cdot i$ для комплексного числа z прийнято скорочений запис $a + bi$. Цей запис називають **алгебраїчною формою комплексного числа.**

У записі $z = a + bi$ число a називають **дійсною частиною** комплексного числа z та позначають $\text{Re } z$, число b — **уявною частиною** та позначають $\text{Im } z$ (від французьких слів *réele* — дійсний та *imaginaire* — уявний), тобто $\text{Re } z = a$, $\text{Im } z = b$.

Наприклад, для комплексного числа $z = 2 + 4i$ маємо: $\text{Re } z = 2$, $\text{Im } z = 4$ (рис. 20.4).

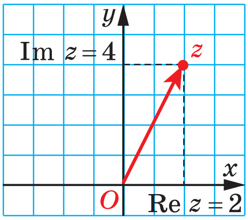


Рис. 20.4

Якщо $\text{Re } z = 0$, тобто $z = bi$, то таке комплексне число z називають **суто уявним.**

Далі, якщо інше не обумовлене, у записі $a + bi$ числа a та b вважатимемо дійсними.

Ви знаєте, що два вектори рівні тоді й тільки тоді, коли рівні їхні відповідні координати. Тому *комплексні числа z_1 і z_2 рівні тоді й тільки тоді, коли вони мають однакові дійсні частини та однакові уявні частини.*

Оскільки комплексні числа — це вектори, то можна вважати, що для комплексних чисел введено операції: додавання, віднімання та множення на дійсне число. Наприклад, виконуються рівності:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i,$$

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i,$$

$$k(a + bi) = ka + kbi, \ k \in \mathbb{R}.$$

Нагадаємо, що записані рівності виражають правила дій з векторами в координатній формі.

ПРИКЛАД 1 Нехай $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -4 + i$. Виконайте дії:

1) $z_1 + 2z_2$; 2) $-\frac{z_1}{2} - 3\left(z_2 + \frac{z_1}{2}\right)$.

Розв'язання. Маємо:

1) $z_1 + 2z_2 = (3 + 2i) + 2(-4 + i) = 3 + 2i - 8 + 2i = -5 + 4i$;

2) $-\frac{z_1}{2} - 3\left(z_2 + \frac{z_1}{2}\right) = -\frac{1}{2}z_1 - 3z_2 - \frac{3}{2}z_1 = -2z_1 - 3z_2 =$

$$= -6 - 4i + 12 - 3i = 6 - 7i.$$ ◄

ПРИКЛАД 2 Знайдіть дійсні числа x та y з рівності $(3x + 2yi) + (-5y + 4xi) = 1 + 10i$.

Розв'язання. Додамо комплексні числа, які стоять у лівій частині рівності:

$$(3x - 5y) + (2y + 4x)\, i = 1 + 10i.$$

Далі, скориставшись умовою рівності двох комплексних чисел, отримуємо:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1, \\ 2y + 4x = 10. \end{cases}$$

Звідси знаходимо, що $x = 2$, $y = 1$. ◄

Із курсу геометрії вам відомо, що модулем вектора $\overrightarrow{OZ}$ називають довжину відрізка OZ. Якщо вектор $\overrightarrow{OZ}$ має координати $(a; b)$, то $|\overrightarrow{OZ}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Таким чином, **модулем комплексного числа** $z = a + bi$ є число $\sqrt{a^2 + b^2}$. Записують: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (рис. 20.5).

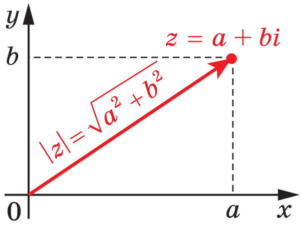


Рис. 20.5

Модуль комплексного числа є дійсним числом.

Наприклад,

$$|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5,$$

$$|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1,$$

$$|-5| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5.$$

З означення модуля комплексного числа випливає, що для будь-якого $z \in \mathbb{C}$ виконується нерівність $|z| \geqslant 0$, причому $|z| = 0$ тоді й тільки тоді, коли $z = 0$.

На множині $\mathbb{C}$ визначено операції додавання, віднімання та множення на дійсне число. Нагадаємо, що одним з мотивів введення комплексних чисел була необхідність знайти таке комплексне число, яке є розв'язком рівняння $x^2+1=0$, тобто рівняння $x \cdot x+1=0$. Для цього потрібно дати означення добутку комплексних чисел. Зауважимо, що відомий вам скалярний добуток векторів для цієї мети не підходить. Справді, скалярний добуток $z \cdot z$ для будь-якого вектора $z \in \mathbb{C}$ дорівнює дійсному числу $|z|^2$. Оскільки $|z|^2 \geqslant 0$, то $z^2+1>0$ при будь-якому $z \in \mathbb{C}$.

Спробуємо ввести добуток комплексних чисел $z_1=a_1+b_1 i$ та $z_2=a_2+b_2 i$ так, щоб зберегти звичні властивості множення. Для цього у виразі $(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)$ розкриємо дужки звичним способом:

$$(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)=a_1 a_2+a_1 b_2 i+a_2 b_1 i+b_1 b_2(i \cdot i). \qquad (1)$$

Бачимо, що для означення добутку комплексних чисел $z_1=a_1+b_1 i$ та $z_2=a_2+b_2 i$ треба лише домовитися про значення добутку $i \cdot i$. При цьому добуток $i \cdot i$ має бути означений так, щоб рівняння $z \cdot z=-1$, тобто рівняння $z^2+1=0$, мало розв'язок. Тому домовилися, що $i \cdot i=-1$, тобто $i^2+1=0$. Отже, рівність (1) можна записати так:

$$(a_1+b_1 i)(a_2+b_2 i)=a_1 a_2+a_1 b_2 i+a_2 b_1 i+b_1 b_2 \cdot(-1)=$$
$$=(a_1 a_2-b_1 b_2)+(a_1 b_2+a_2 b_1) i.$$

Тепер дамо таке означення.

Означення. Добутком комплексних чисел $a_1+b_1 i$ та $a_2+b_2 i$ називають комплексне число $(a_1 a_2-b_1 b_2)+(a_1 b_2+a_2 b_1) i$.

Наприклад,

$$(2+3i)(1-i)=(2+3)+(-2+3)i=5+i.$$

Неважко переконатися, що визначений у такий спосіб добуток комплексних чисел має всі звичні властивості. Наприклад,

1) $z_1 z_2=z_2 z_1$;
2) $(z_1 z_2) z_3=z_1(z_2 z_3)$;
3) $z_1(z_2+z_3)=z_1 z_2+z_1 z_3$.

Із властивостей операції множення випливає, що ціла низка тотожностей, справедливих для дійсних чисел, наприклад формули скороченого множення або правила розкриття дужок, є справедливими й для комплексних чисел. Отже, дії з комплексними числами можна виконувати за правилами дій із многочленами, замінюючи i^2 на -1.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть усі такі комплексні числа z, що $z^2 = -8 + 6i$.

Розв'язання. Нехай $z = a + bi$. Тоді $(a + bi)^2 = -8 + 6i$.

Звідси $a^2 + 2abi - b^2 = -8 + 6i$; $(a^2 - b^2) + 2abi = -8 + 6i$.

Таким чином, задача зводиться до пошуку дійсних розв'язків системи $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8, \\ 2ab = 6. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} b = \dfrac{3}{a}, \\ a^2 - \dfrac{9}{a^2} = -8; \end{cases}$ $\begin{cases} b = \dfrac{3}{a}, \\ a^4 + 8a^2 - 9 = 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} b = \dfrac{3}{a}, \\ \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = -1; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1, \\ b = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1, \\ b = -3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Отже, задача має два розв'язки: $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -1 - 3i$. ◄

Означення. **Комплексні числа $a + bi$ та $a - bi$ називають *спряженими*.**

Наприклад, комплексні числа $5 + 7i$ та $5 - 7i$ є спряженими. Також кажуть, що число $5 - 7i$ є спряженим до числа $5 + 7i$, а число $5 + 7i$ є спряженим до числа $5 - 7i$.

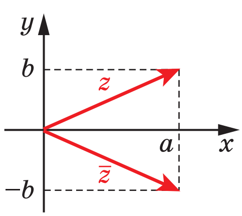


Рис. 20.6

Комплексне число, спряжене до числа z, позначають $\bar{z}$, тобто якщо $z = a + bi$, то

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$$

Наприклад, $\overline{5 + 7i} = 5 - 7i$, $\bar{i} = -i$.

Спряжені комплексні числа — це вектори, симетричні відносно осі абсцис (рис. 20.6).

Число, спряжене до дійсного числа a, збігається із числом a. Наприклад, $\bar{5} = 5$.

Для будь-яких комплексних чисел z_1 і z_2 виконуються рівності:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$;
2) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$;
3) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

Доведіть ці властивості самостійно.

ПРИКЛАД 4 Розкладіть на множники вираз $a^2 + b^2$, використовуючи формулу різниці квадратів.

Розв'язання. Маємо: $a^2 + b^2 = a^2 - b^2i^2 = (a - bi)(a + bi)$. ◄

Отриману в прикладі 4 тотожність $(a - bi)(a + bi) = a^2 + b^2$ можна записати так: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Із цієї тотожності випливає, що *добуток спряжених чисел є дійсним числом*.

Дію ділення комплексних чисел означають, використовуючи дію множення. Наприклад, під часткою чисел $-1 + i$ та $1 + i$ розуміють таке число z, що $z(1 + i) = -1 + i$. Оскільки $i(1 + i) = -1 + i$, то число i є часткою чисел $-1 + i$ та $1 + i$.

Означення. Часткою комплексних чисел z_1 і z_2, де $z_2 \neq 0$, називають таке комплексне число z, що $z \cdot z_2 = z_1$.

Записують: $z_1 : z_2 = z$ або $\frac{z_1}{z_2} = z$.

При заданих z_1 і z_2, де $z_2 \neq 0$, використовуючи властивості операції множення, покажемо існування та єдиність такого z, що $z \cdot z_2 = z_1$. Тим самим доведемо, що частка комплексних чисел z_1 і z_2 існує та визначається однозначно.

Помноживши обидві частини рівності $z \cdot z_2 = z_1$ на $\bar{z}_2$, отримаємо: $zz_2\bar{z}_2 = z_1\bar{z}_2$. Звідси $z|z_2|^2 = z_1\bar{z}_2$.

Помноживши обидві частини останньої рівності на дійсне число $\frac{1}{|z_2|^2}$, отримуємо: $z = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Неважко переконатися, що отримане число $z = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$ задовольняє рівність $z \cdot z_2 = z_1$.

Таким чином, доведено, що частка комплексних чисел z_1 і z_2, де $z_2 \neq 0$, існує та визначається однозначно.

ПРИКЛАД 5 Знайдіть частку $\frac{2 - 3i}{2 + i}$.

Розв'язання. Щоб знайти частку $\frac{z_1}{z_2}$, зручно домножити чисельник і знаменник дробу на $\bar{z}_2$.

Маємо: $\frac{2 - 3i}{2 + i} = \frac{(2 - 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{4 - 2i - 6i - 3}{4 + 1} = \frac{1 - 8i}{5} = \frac{1}{5} - \frac{8}{5}i$. ◄

Підіб’ємо підсумки. Множина $\mathbb{C}$ задовольняє всі чотири сформульовані вище вимоги:

1) множина $\mathbb{C}$ містить у собі множину дійсних чисел;
2) над елементами множини $\mathbb{C}$ визначено арифметичні дії;
3) арифметичні дії на множині $\mathbb{C}$ мають властивості відповідних дій з дійсними числами;
4) рівняння $x^2 + 1 = 0$ має розв’язок на множині $\mathbb{C}$.

ВПРАВИ

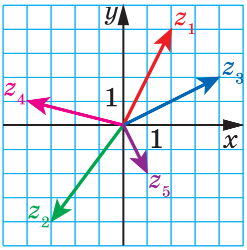


Рис. 20.7

20.1.° Подайте в алгебраїчній формі комплексні числа, зображені на рисунку 20.7.

20.2.° Назвіть дійсну та уявну частини комплексного числа:

1) -5; 3) $3 + 2i$; 5) $i - 2$;
2) $3i$; 4) $4 - 5i$; 6) $-1 - 6i$.

20.3.° Укажіть, які з даних комплексних чисел рівні:

$z_1 = 2 - 3i$; $z_2 = 2 - \sqrt[3]{27}i$; $z_3 = 3 - 2i$;
$z_4 = \sqrt{4} - 3i$; $z_5 = \sqrt{9} - \sqrt{4}$; $z_6 = \sqrt[3]{8} - 3i$.

20.4.° Знайдіть дійсні числа x і y з рівності:

1) $x + (x - y)\,i = -6 + i$; 3) $(x^2 + 5yi) - (y + xi) = 3 + 3i$.
2) $x^2 + xyi = 9 - 2i$;

20.5.° Знайдіть дійсні числа x і y з рівності:

1) $5x - 7yi = 2 + 3i$; 3) $(x + 3y^2 i) - (2y - xi) = 1 + 6i$.
2) $6x - y^2 i = -1 - 4i$;

20.6.° Знайдіть суму комплексних чисел:

1) $(3 - 5i) + (2 + 3i)$; 3) $(4 - 3i) + 2$.
2) $4i + (1 - i)$;

20.7.° Знайдіть різницю комплексних чисел z_1 і z_2, якщо:

1) $z_1 = -9 + 2i$, $z_2 = 2 - 5i$; 3) $z_1 = -3 - i$, $z_2 = 4 + i$.
2) $z_1 = 7$, $z_2 = 4 + i$;

20.8.° Знайдіть значення виразу $3z_1 - 2z_2$, якщо $z_1 = 5 - 6i$, $z_2 = 1 - 9i$.

20.9.° Розв’яжіть рівняння $-2(z + i) = 4 - 3i$.

20.10.° Розв’яжіть рівняння $3(z - 1) = i - z$.

20.11.° Запишіть число, спряжене до даного:

1) $2 - 7i$; 2) $-3 + 5i$; 3) 6; 4) $-7i$.

20.12.° Запишіть число, спряжене до даного:
1) $8-3i$; 2) $-6+11i$; 3) -12; 4) $9i$.

20.13.° Доведіть, що: 1) $z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}\,z$; 2) $z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}\,z$.

20.14.° Знайдіть модуль комплексного числа:
1) $-7i$; 2) 3; 3) $5+12i$.

20.15.° Знайдіть модуль комплексного числа:
1) $4i$; 2) -18; 3) $15-8i$.

20.16.° Доведіть, що для всіх $z\in\mathbb{C}$ виконується рівність:
1) $\bar{\bar{z}}=z$; 2) $|z|=|\bar{z}|$.

20.17.° Доведіть, що для всіх $z\in\mathbb{C}$ число $z+\bar{z}$ є дійсним.

20.18.° Доведіть, що рівність $\bar{z}=z$ є справедливою тоді й тільки тоді, коли z — дійсне число.

20.19.° Знайдіть добуток комплексних чисел:
1) $(2+3i)(3+2i)$; 2) $(4+3i)(4-3i)$; 3) $(5+i)2i$.

20.20.° Знайдіть добуток комплексних чисел:
1) $(6+i)(1-3i)$; 2) $(2-3i)(2+3i)$; 3) $3i(7-4i)$.

20.21.° Знайдіть значення виразу: 1) i^{73}; 2) i^{4n+2}; 3) i^{4n+3}, $n\in\mathbb{N}$.

20.22.° Знайдіть значення виразу: 1) i^{54}; 2) i^{4n}; 3) i^{4n+1}, $n\in\mathbb{N}$.

20.23.° Спростіть вираз:
1) $(2+i)(1-i)+i(4-5i)$; 3) $(1+i)^4$;
2) $(\sqrt{5}+2i)(\sqrt{5}-2i)+(1-i)^2$; 4) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

20.24.° Спростіть вираз:
1) $(4-i)i+(7-2i)(3+i)$; 3) $(1-i)^4$;
2) $(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)+(1+i)^2$; 4) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

20.25.° Знайдіть усі такі комплексні числа z, що:
1) $z^2=i$; 2) $z^2=-5+12i$.

20.26.° Знайдіть усі такі комплексні числа z, що:
1) $z^2=-i$; 2) $z^2=15-8i$.

20.27.° Обчисліть:
1) $\frac{-1}{i}$; 2) $\frac{2+i}{-i}$; 3) $\frac{4}{2-i}$; 4) $\frac{3i}{1+2i}$; 5) $\frac{1+4i}{2+3i}$; 6) $\frac{3+4i}{3-4i}$.

20.28.° Обчисліть:
1) $\frac{3}{-i}$; 2) $\frac{5i}{3+2i}$; 3) $\frac{7+i}{2+i}$; 4) $\frac{4-5i}{4+5i}$.

20.29.° Розв'яжіть рівняння:

1) $iz = 2 + i$; 2) $(4 - i)z = 3 + i$; 3) $\dfrac{i}{z + i} = \dfrac{4 - i}{iz - 1}$.

20.30.° Розв'яжіть рівняння:

1) $-iz = 7 - 3i$; 2) $(4 + 3i)z = 4 - 3i$; 3) $\dfrac{3i - z}{i - 1} = 2iz + 1$.

20.31.° Обчисліть:

1) $\dfrac{(3 - i)(1 + 3i)}{2 - i}$; 3) $\dfrac{2}{3 - i} + \dfrac{2}{3 + i}$; 5) $\left(\dfrac{1 + i^7}{1 - i^5}\right)^9$.

2) $\dfrac{4 - 3i}{(1 - i)(2 + i)}$; 4) $\dfrac{1 + 2i}{1 - 2i} + \dfrac{1 - 2i}{1 + 2i}$;

20.32.° Обчисліть:

1) $\dfrac{(2 + 5i)(1 + i)}{-1 + i}$; 3) $\dfrac{5 + i}{5 - i} + \dfrac{5 - i}{5 + i}$;

2) $\dfrac{4 + i}{(-2 + 3i)(1 + 2i)}$; 4) $\left(\dfrac{1 - i^{19}}{1 + i^{17}}\right)^{15}$.

20.33.° Дано: $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - 2i$. Обчисліть:

1) $\dfrac{\overline{z}_1}{z_2}$; 2) $\dfrac{z_1}{\overline{z}_1 + z_2}$; 3) $\dfrac{z_1 - z_2}{\overline{z}_2}$.

20.34.° Дано: $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 2i$. Обчисліть:

1) $\dfrac{z_1 + \overline{z}_2}{(z_2)^2}$; 2) $\dfrac{z_1 - \overline{z}_2}{\overline{z}_1 - z_2}$; 3) $\dfrac{(\overline{z}_1 + z_2)^2}{z_2}$.

20.35.• Доведіть нерівність:

1) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

2) $|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$.

20.36.• Доведіть рівність $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$.

20.37.• Доведіть нерівність $|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$.

20.38.• Доведіть, що $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

20.39.• Доведіть, що число $z^n + \overline{z}^n$ є дійсним для всіх $z \in \mathbb{C}$.

20.40.• Доведіть, що:

1) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; 2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

20.41.• Знайдіть усі натуральні значення n, при яких значення виразу $1 + i + i^2 + \ldots + i^n$ дорівнює 1.

20.42.$^{\bullet}$ Знайдіть значення виразу $i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + 100i^{100}$.

20.43.$^{\bullet}$ Знайдіть усі комплексні числа, які спряжені до свого квадрата.

20.44.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що коли $x + yi = (a + bi)^n$, то $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^n$.

20.45.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що коли $x + yi = (a + bi)^n$, то $x - yi = (a - bi)^n$.

21. Комплексна площина. Тригонометрична форма комплексного числа

Розглянемо на координатній площині точку $Z\ (a;\ b)$ (рис. 21.1). Оскільки комплексне число $z = a + bi$ — це вектор $\overrightarrow{OZ}$ з координатами $(a;\ b)$, то кожному комплексному числу $z = a + bi$ можна поставити у відповідність єдину точку $Z(a;\ b)$ координатної площини. І навпаки, кожна точка Z з координатами $(a;\ b)$ є відповідною єдиному комплексному числу $z = a + bi$. Комплексне число $z = a + bi$ називають **комплексною координатою** точки $Z(a;\ b)$. Наприклад, число $z = 2 - 3i$ є комплексною координатою точки M з декартовими координатами $(2;\ -3)$ (рис. 21.2). Це позначають так: $M(2 - 3i)$.

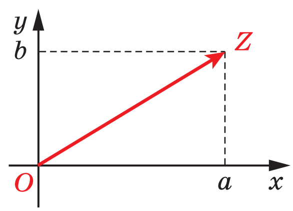


Рис. 21.1

Отримана взаємно однозначна відповідність між множиною комплексних чисел і множиною точок координатної площини дає змогу ототожнювати елементи цих двох множин. Так, замість слів «точка, яка зображує число $2 - 3i$» (рис. 21.2), коротко говорять: «точка $2 - 3i$». Також, наприклад, говорять: «трикутник з вершинами $1 - i$, $1 + i$, $-i$» (рис. 21.3).

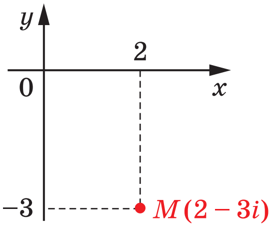


Рис. 21.2

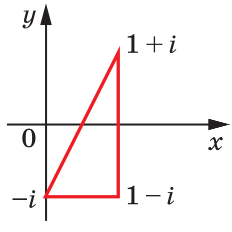


Рис. 21.3

Зрозуміло, що за такої інтерпретації дійсні числа зображають точками осі абсцис, а суто уявні числа — точками осі ординат. Тому вісь абсцис називають **дійсною віссю** (позначають Re), а вісь ординат — **уявною віссю** (позначають Im). Площину, на якій зображають комплексні числа z, називають **комплексною площиною** z (позначають (z)).

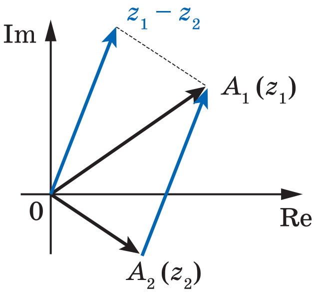


Рис. 21.4

На комплексній площині розглянемо точки $A_1(z_1)$ і $A_2(z_2)$ (рис. 21.4). Оскільки $\overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} = z_1 - z_2$, то $\overrightarrow{A_2A_1} = z_1 - z_2$. Таким чином, будь-який вектор на площині дорівнює різниці комплексної координати кінця вектора та комплексної координати початку вектора. Цей факт дозволяє будь-який вектор на площині розглядати як комплексне число.

З рівності $\overrightarrow{A_2A_1} = z_1 - z_2$ отримуємо: $|z_1 - z_2| = |\overrightarrow{A_2A_1}| = A_2A_1$. Це означає, що число $|z_1 - z_2|$ дорівнює відстані між точками z_1 і z_2. Ця властивість виражає геометричний зміст модуля різниці двох комплексних чисел.

ПРИКЛАД 1 Зобразіть на комплексній площині всі такі числа z, які задовольняють умову:

1) $z\bar{z} = 1$; 2) $1 < |z+1| < 2$; 3) $|z - i| = |z - 1|$.

Розв'язання. 1) Оскільки $z\bar{z} = |z|^2$, то отримуємо, що $|z| = 1$. Тоді всі шукані точки розташовані на відстані 1 від початку координат. Отже, шукана множина точок — це коло із центром у початку координат радіуса 1 (рис. 21.5).

2) Розглянемо нерівність $|z+1| < 2$, тобто $|z-(-1)| < 2$. Число $|z-(-1)|$ дорівнює відстані від точки $-1+0i$ до деякої точки z. Тоді нерівність $|z+1| < 2$ задовольняють усі ті й тільки ті точки комплексної площини, які лежать усередині круга радіуса 2 із центром у точці $-1+0i$.

Зрозуміло, що нерівність $|z+1| > 1$ задовольняють усі ті й тільки ті точки комплексної площини, які лежать поза кругом радіуса 1 із центром у точці $-1+0i$.

Тоді шукані точки утворюють кільце, обмежене колами $|z+1| = 1$ і $|z+1| = 2$ (рис. 21.6).

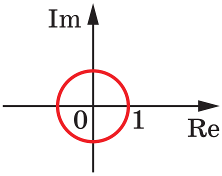


Рис. 21.5

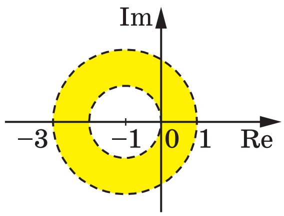


Рис. 21.6

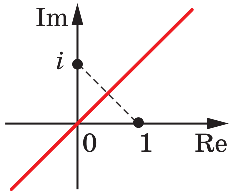


Рис. 21.7

3) Дану умову задовольняють усі ті й тільки ті точки комплексної площини, які рівновіддалені від точок i та 1. Таким чином, шукана множина — це серединний перпендикуляр відрізка з кінцями i та 1 (рис. 21.7). ◄

Розглянемо комплексні числа z і z_0 такі, що $|z| = |z_0|$ і точка z_0 належить додатному напряму дійсної осі (рис. 21.8). Тоді точку z можна розглядати як образ точки z_0 при повороті із центром O на деякий кут φ, тобто $z = R_O^{\varphi}(z_0)$.

Кут φ називають **аргументом** комплексного числа z. Його позначають так: $\arg z$.

Для числа $z = 0$ аргумент не означають. Тому в усіх подальших міркуваннях, пов'язаних з аргументом комплексного числа z, будемо вважати, що $z \neq 0$.

Оскільки існує безліч кутів повороту, при яких точка z є образом точки z_0, то дане комплексне число z має безліч аргументів. Будь-які два аргументи даного комплексного числа відрізняються одне від одного на число виду $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Наприклад, кожне число виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, є аргументом числа i. Легко встановити, що кожний кут виду $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, є аргументом числа $-1 + i$ (рис. 21.9).

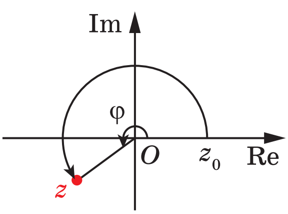


Рис. 21.8

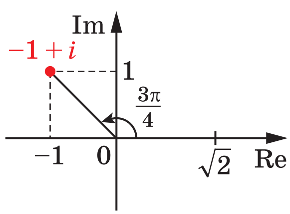


Рис. 21.9

Нехай r — модуль, а φ — аргумент комплексного числа $z = a + bi$. Тоді з означення синуса та косинуса кута повороту можна записати: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ (рис. 21.10). Отже, число z можна подати в такому вигляді:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (1)$$

Запис комплексного числа $z \neq 0$ у вигляді (1) називають **тригонометричною формою комплексного числа**.

Наприклад, $5 = 5(\cos 0 + i\sin 0)$;

$$-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi);$$

$$2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

$$-3i = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Оскільки модуль комплексного числа $z = a + bi$ дорівнює $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, то аргумент φ комплексного числа z, де $z \neq 0$, можна знайти із системи

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases} \qquad (2)$$

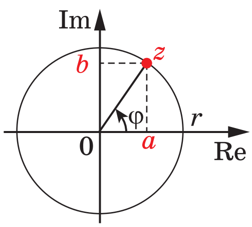


Рис. 21.10

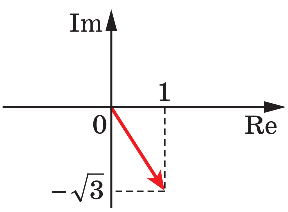


Рис. 21.11

ПРИКЛАД 2 Запишіть комплексне число $z = 1 - i\sqrt{3}$ у тригонометричній формі.

Розв'язання. На рисунку 21.11 зображено комплексне число $z = 1 - i\sqrt{3}$. Тоді $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Використовуючи формули (2), знаходимо: $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2}, \\ \sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ Звідси $\varphi = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Тоді шуканою тригонометричною формою числа $z = 1 - i\sqrt{3}$ можуть слугувати, наприклад, такі записи:

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right);$$

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right). \blacktriangleleft$$

Зауважимо, що комплексне число $z = 1 - i\sqrt{3}$ можна подати й так:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Проте за означенням такий запис не є тригонометричною формою комплексного числа z.

Зауважимо, що для двох комплексних чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ та $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, записаних у тригонометричній формі, рівність $z_1 = z_2$ виконується тоді й тільки тоді, коли $r_1 = r_2$ і $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

ВПРАВИ

21.1.° Позначте на комплексній площині точку, яка відповідає комплексному числу:

1) 3; 3) $1 + 2i$; 5) $2 - 3i$; 7) $\frac{1}{1-i}$;
2) $-5i$; 4) $-3 + i$; 6) $-4 - i$; 8) $(1 + i)^4$.

21.2.° Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $\text{Re}\ z = 3$; 4) $\text{Im}\ z \leqslant 2$;
2) $\text{Re}\ z \geqslant 4$; 5) $\text{Re}\ z = \text{Im}\ z$;
3) $\text{Im}\ z = -1$; 6) $(\text{Re}\ z)^2 = \text{Im}\ z$.

21.3.° Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $\text{Re}\ z = -2$; 4) $\text{Im}\ z \geqslant -3$;
2) $\text{Re}\ z \leqslant 1$; 5) $\text{Re}\ z + \text{Im}\ z = 1$;
3) $\text{Im}\ z = 4$; 6) $(\text{Re}\ z)^2 = (\text{Im}\ z)^2$.

21.4.° Скориставшись рисунком 21.12, назвіть комплексне число, що дорівнює вектору:

1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{BD}$.

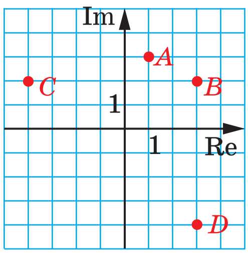


Рис. 21.12

21.5.° Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $|z| = 1$; 2) $|z| \leqslant 1$; 3) $|z + i| = 2$; 4) $|z + i| \geqslant 2$.

21.6.° Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $|z - 2i| = 3$; 2) $|z - 2i| < 3$; 3) $|z - 2i| \geqslant 3$.

21.7.° Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $\arg z = \frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{6} < \arg z \leqslant \frac{2\pi}{3}$; 3) $\begin{cases} \frac{\pi}{6} < \arg z \leqslant \frac{2\pi}{3}, \\ |z| = 2. \end{cases}$

21.8.° Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $\arg z = -\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z < \frac{\pi}{2}$; 3) $\begin{cases} -\frac{\pi}{4} \leqslant \arg z < \frac{\pi}{2}, \\ |z| = 1. \end{cases}$

21.9.° Знайдіть усі аргументи комплексного числа:

1) 7; 2) $4i$; 3) $-2 - 2i$; 4) $\sqrt{3} + i$.

21.10.° Знайдіть усі аргументи комплексного числа:

1) -3; 2) $-5i$; 3) $-3 + 3i$; 4) $-1 + i\sqrt{3}$.

21.11.° Укажіть, яке з комплексних чисел записано в тригонометричній формі:

1) $3\left(\cos\frac{\pi}{11} - i\sin\frac{\pi}{11}\right)$;

2) $9(\cos 3\pi + i \sin 3\pi)$;

3) $-2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

4) $5\left(\cos\left(-\frac{27\pi}{5}\right) + i\sin\frac{27\pi}{5}\right)$;

5) $4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

6) $\cos\left(-\frac{1}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

7) $6\left(\sin\frac{2\pi}{13} + i\cos\frac{2\pi}{13}\right)$;

8) $\cos 2\pi + i \sin 4\pi$.

21.12.° Запишіть у тригонометричній формі комплексне число:

1) 7; 2) $4i$; 3) $-2 + 2i$; 4) $\sqrt{3} + i$; 5) $-1 + 2i$; 6) $-3 - i$; 7) $(3 - 2i)^2$; 8) $\frac{2 + i}{1 + i}$.

21.13.° Запишіть у тригонометричній формі комплексне число:

1) -3; 3) $-3+3i$; 5) $2-i$; 7) $(1+3i)^2$;

2) $-5i$; 4) $-1+\sqrt{3}i$; 6) $-2-3i$; 8) $\frac{3-i}{1-i}$.

21.14.° Запишіть у тригонометричній формі комплексне число:

1) $4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $3\left(\cos\frac{\pi}{11}-i\sin\frac{\pi}{11}\right)$;

3) $6\left(\sin\frac{2\pi}{13}+i\cos\frac{2\pi}{13}\right)$;

4) $-2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

5) $-\cos\frac{1}{3}-i\sin\frac{1}{3}$.

21.15.° Запишіть у тригонометричній формі комплексне число:

1) $5\left(\cos\left(-\frac{19\pi}{5}\right)+i\sin\frac{19\pi}{5}\right)$;

2) $7\left(\cos\frac{7\pi}{29}-i\sin\frac{7\pi}{29}\right)$;

3) $\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}$;

4) $-3\left(\cos\frac{2\pi}{11}+i\sin\frac{2\pi}{11}\right)$.

21.16.° Доведіть, що коли φ — аргумент комплексного числа z, то $-\varphi$ — аргумент комплексного числа $\bar{z}$.

21.17.° Доведіть, що коли φ — аргумент комплексного числа z, то $-\varphi$ — аргумент комплексного числа $\frac{1}{z}$.

21.18.° На комплексній площині позначено дві точки $A\ (z_1)$ і $B\ (z_2)$. Знайдіть комплексну координату середини відрізка AB.

21.19.• На комплексній площині позначено дві точки $A(z_1)$ і $B\ (z_2)$. Знайдіть комплексну координату такої точки C відрізка AB, що $AC : CB = m : n$.

21.20.• На комплексній площині зображено трикутник з вершинами $A\ (z_1)$, $B\ (z_2)$ і $C\ (z_3)$. Знайдіть комплексну координату точки перетину медіан трикутника ABC.

21.21.• Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $1<|z-1-i|<3$; 3) $|z-2i|>|z-4|$; 5) $|z|\leqslant \operatorname{Im} z$;

2) $|z-2i|=|z-4|$; 4) $|z|=\operatorname{Re} z$; 6) $|z-1|=\operatorname{Re} z$.

21.22.• Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $2\leqslant|z-1+i|<3$; 3) $|z-2|\geqslant|z+4i|$; 5) $|z|\geqslant \operatorname{Re} z$;

2) $|z-2|=|z+4i|$; 4) $|z|=\operatorname{Im} z$; 6) $|z-i|=\operatorname{Im} z$.

21.23.•• Подайте в тригонометричній формі число $1+\cos\varphi+i\sin\varphi$, якщо:

1) $\varphi\in(0;\pi)$; 2) $\varphi\in(\pi;2\pi)$.

21.24.•• Подайте в тригонометричній формі число $1-\cos\varphi+i\sin\varphi$, якщо:

1) $\varphi\in(0;\pi)$; 2) $\varphi\in(-\pi;0)$.

21.25.•• Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $\operatorname{Re}\frac{1}{z}+\operatorname{Im}\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$; 2) $(1+i)\bar{z}=(1-i)z$.

21.26.•• Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову:

1) $\operatorname{Re}\frac{1}{z}-\operatorname{Im}\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$; 2) $(1-i)\bar{z}=(1+i)z$.

22. Множення і ділення комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі. Корінь n-го степеня з комплексного числа

Знайдемо добуток комплексних чисел z_1 і z_2, записаних у тригонометричній формі.

Нехай $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$.

Маємо: $z_1z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$

$$=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2))=$$
$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Отже,

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \quad (1)$$

Отримана формула дає змогу зробити такий висновок: ***модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку модулів множників, а аргумент добутку дорівнює сумі аргументів множників***, тобто

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,\ \arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2.$$

Із формули (1) випливає, що коли комплексну координату точки M помножити на комплексне число $\cos\varphi+i\sin\varphi$, то отримаємо точку M_1 — образ точки M при повороті R_O^{φ}, тобто при повороті із центром у початку координат на кут φ (рис. 22.1).

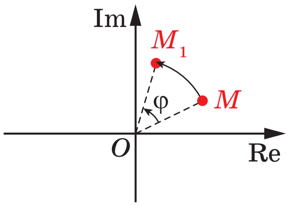


Рис. 22.1

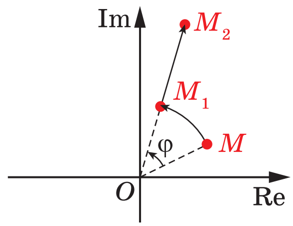


Рис. 22.2

Наприклад, множення комплексної координати точки M на число $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ задає поворот точки M із центром у початку координат на кут $\frac{\pi}{2}$.

Коли комплексну координату точки M помножити на комплексне число $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то отримаємо точку M_2 — образ точки M при композиції перетворень повороту R_O^{φ} і гомотетії H_O^r, тобто $R_O^{\varphi}(M) = M_1$ і $H_O^r(M_1) = M_2$ (рис. 22.2).

Обчислимо частку $\frac{z_1}{z_2}$. Маємо:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2))}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Отже,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \qquad (2)$$

Отримана формула дає змогу зробити такий висновок: ***модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів діленого та дільника, а аргумент частки дорівнює різниці аргументів діленого та дільника***, тобто $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$.

Із формули (1) випливає, що

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi),$$
$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi).$$

Узагалі, для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ є справедливою формула

$$\boxed{(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),}$$

яку називають **формулою Муавра**.

За допомогою методу математичної індукції доведіть формулу Муавра самостійно.

ПРИКЛАД 1 Зобразіть на комплексній площині всі числа z, які задовольняють умову $\arg(zi) = \frac{\pi}{3}$.

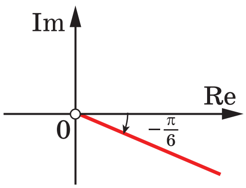


Рис. 22.3

Розв'язання. Нехай $\arg z = \varphi$. Оскільки $\arg i = \frac{\pi}{2}$, то $\arg(zi) = \varphi + \frac{\pi}{2}$.

Маємо: $\varphi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Звідси $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.

Шукана множина чисел — це промінь, у якого «виколото» початок (рис. 22.3). ◄

ПРИКЛАД 2 Обчисліть $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{12}$.

Розв'язання. Маємо: $z_1 = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$,

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Тоді

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{12} = \left(\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{12} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{12} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)\right)^{12} = 2^6(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = -64. \blacktriangleleft$$

Означення. Коренем n-го степеня з комплексного числа z, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке комплексне число w, що $w^n = z$.

Наприклад, число $1 + i$ є квадратним коренем із числа $2i$. Справді, $(1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$. Число $-1 - i$ також є квадратним коренем із числа $2i$.

Очевидно, що число 1 є кубічним коренем із числа 1. Ви знаєте, що на множині $\mathbb{R}$ існує тільки одне число, що є коренем кубічним з одиниці. На множині $\mathbb{C}$ ця властивість не зберігається. Кожне із чисел $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ та $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ також є коренем кубічним з одиниці. Дійсно,

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1,$$

$$\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^3 = \cos 4\pi + i\sin 4\pi = 1.$$

Таким чином, на множині комплексних чисел кубічний корінь з одиниці набуває щонайменше трьох значень. Насправді має місце така теорема.

Теорема 22.1. ***Для будь-якого комплексного числа $z \neq 0$ існує рівно n комплексних чисел, кожне з яких є коренем n-го степеня із числа z.***

Доведення. Подамо число z у тригонометричній формі: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Коренями n-го степеня із числа z будуть усі ті й тільки ті комплексні числа w, що задовольняють рівність $w^n = z$. Покажемо, що при заданому z рівняння $w^n = z$ має n різних коренів (тим самим теорему буде доведено).

Якщо $w = 0$, то $w^n = 0$, тобто $z = 0$, що суперечить умові теореми. Отже, $w \neq 0$.

Тоді можна число w подати в тригонометричній формі: $w = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Маємо: $\left(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right)^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;

$$\rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Скориставшись умовою рівності двох комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі, отримуємо: $\rho^n = r$ і $n\alpha = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Оскільки ρ і r є додатними дійсними числами, то можна записати: $\rho = \sqrt[n]{r}$ (тут $\sqrt[n]{r}$ — це арифметичний корінь n-го степеня з додатного дійсного числа r). Також отримуємо, що $\alpha = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$.

Таким чином, шукані числа w можуть бути записані у вигляді

$$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Якщо в правій частині рівності (3) змінити значення k на $k + n$, то значення виразу не зміниться. Це означає, що достатньо розглянути лише такі значення k: 0, 1, 2, ..., $(n - 1)$. Маємо:

$$w_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

$$w_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right),$$

$$\ldots,$$

$$w_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n}\right).$$

Зауважимо, що числа w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1} є попарно різними, оскільки будь-які з двох кутів $\frac{\varphi}{n}$, $\frac{\varphi + 2\pi}{n}$, ..., $\frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n}$ відрізняються менше ніж на 2π.

Отже, формула (3) задає рівно n чисел w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1}, кожне з яких є коренем n-го степеня із числа z. ◄

Таким чином, ми дійшли висновку, що всі n коренів n-го степеня із числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, записаного в тригонометричній формі, можуть бути обчислені за формулою

$$\boxed{\boldsymbol{w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)}, \text{ де } \boldsymbol{k \in \{0, 1, 2, \ldots, n - 1\}}} \quad (4)$$

Задача знаходження кореня n-го степеня з комплексного числа буде розв'язана повністю, якщо ми знайдемо всі значення кореня n-го степеня із числа $z = 0$.

Очевидно, що число $w = 0$ задовольняє рівність $w^n = 0$. Інших чисел, які задовольняють рівність $w^n = 0$, не існує. Справді, при $w \neq 0$ маємо: $|w^n| = |w|^n \neq 0$. Звідси $w^n \neq 0$.

ПРИКЛАД 3 Знайдіть кубічні корені із числа $z = -1$.

Розв'язання. Маємо: $z = -1 + 0i = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)$.

Скориставшись формулою (4), запишемо:

$$w_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right), \text{ де } k \in \{0, 1, 2\}.$$

Звідси $w_0 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$w_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{3}\right) = -1,$$

$$w_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \blacktriangleleft$$

Із формули (4) випливає, що корені n-го степеня із числа 1 обчислюють за формулою

$$e_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \text{ де } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Зауважимо, що модулі комплексних чисел e_k дорівнюють 1. Тому на комплексній площині числа e_k лежать на колі радіуса 1, причому аргументи сусідніх чисел відрізняються на $\frac{2\pi}{n}$. Тому числа e_k ділять одиничне коло на n рівних дуг і є вершинами правильного n-кутника.

Наприклад, на рисунку 22.4 зображено кубічні корені із числа 1. Вони є вершинами правильного трикутника. На рисунку 22.5 зображено корені четвертого степеня із числа 1. Вони є вершинами квадрата.

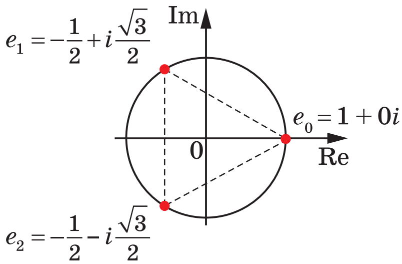


Рис. 22.4

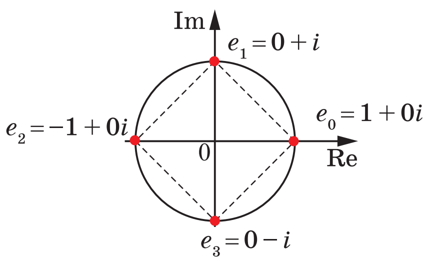


Рис. 22.5

ВПРАВИ

22.1.° Знайдіть добуток комплексних чисел z_1 і z_2, якщо:

1) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

2) $z_1 = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right)$, $z_2 = \cos 1 + i\sin 1$;

3) $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

4) $z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, $z_2 = \sqrt{3} + i$.

22.2.° Знайдіть добуток комплексних чисел z_1 і z_2, якщо:

1) $z_1 = 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $z_1 = 7\left(\cos\frac{1}{3} + i\sin\frac{1}{3}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{1}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$;

3) $z_1 = -3\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $z_2 = -4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

22.3.° Знайдіть частку $\frac{z_1}{z_2}$, якщо:

1) $z_1 = 8\left(\cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$;

2) $z_1 = 6\left(\sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}\right)$, $z_2 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16}\right)$;

3) $z_1 = -2(\cos 2 + i\sin 2)$, $z_2 = \cos 1 + i\sin 1$.

22.4.° Знайдіть частку $\frac{z_1}{z_2}$, якщо:

1) $z_1 = 12\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, $z_2 = 8\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$;

2) $z_1 = 9\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $z_2 = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

3) $z_1 = 15(\cos 6 + i\sin 6)$, $z_2 = 5(\sin 2 + i\cos 2)$.

22.5.° Запишіть у тригонометричній формі число z, якщо:

1) $z = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}\right)\right)^{10}$;

2) $z = \left(\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{18} - i\sin\frac{\pi}{18}\right)\right)^{6}$;

3) $z = \left(\cos\frac{1}{35} + i\sin\frac{1}{35}\right)^{7}$.

22.6.° Запишіть у тригонометричній формі число z, якщо:

1) $z = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right)\right)^{4}$;

2) $z = \left(-2\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)\right)^{5}$.

22.7.$^{\bullet}$ Знайдіть значення виразу:

1) $(1+i)^{20}$;
2) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{9}$;
3) $(3+4i)^{4}$;
4) $(1-i)^{12}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{6}$;
5) $\frac{(1+i)^{10}}{\left(\sqrt{3}-i\right)^{8}}$.

22.8.$^{\bullet}$ Знайдіть значення виразу:

1) $(1-i)^{14}$;
2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{15}$;
3) $\left(\frac{5}{13}-\frac{12}{13}i\right)^{10}$;
4) $(1+i)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^{8}$;
5) $\frac{(1-i)^{14}}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^{9}}$.

22.9.$^{\bullet}$ Знайдіть корені n-го степеня із числа z, якщо:

1) $z=3\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $n=3$;
2) $z=8\left(\cos\frac{6}{7}+i\sin\frac{6}{7}\right)$, $n=3$;
3) $z=-32i$, $n=5$;
4) $z=\sqrt{3}+i$, $n=4$.

22.10.$^{\bullet}$ Знайдіть корені n-го степеня із числа z, якщо:

1) $z=4\left(\cos\frac{16\pi}{19}+i\sin\frac{16\pi}{19}\right)$, $n=4$;
2) $z=125\left(\cos\frac{9}{11}+i\sin\frac{9}{11}\right)$, $n=3$;
3) $z=64$, $n=6$;
4) $z=\sqrt{3}-i$, $n=4$.

22.11.$^{\bullet}$ Зобразіть на комплексній площині числа, які є коренями n-го степеня із числа z, якщо:

1) $z=i$, $n=3$;
2) $z=1+i$, $n=4$;
3) $z=-i$, $n=6$.

22.12.$^{\bullet}$ Зобразіть на комплексній площині числа, які є коренями n-го степеня із числа z, якщо:

1) $z=-1$, $n=4$;
2) $z=1+\sqrt{3}i$, $n=3$;
3) $z=1$, $n=8$.

22.13.$^{\bullet}$ Нехай $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ — корені n-го степеня із числа 1. Знайдіть добуток $e_0 e_1 \cdot \ldots \cdot e_{n-1}$.

22.14.$^{\bullet}$ Нехай $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ — корені n-го степеняі із числа 1. Знайдіть суму $e_0+e_1+\ldots+e_{n-1}$.

22.15.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі такі дійсні x та y, що $(x+yi)^6=x-yi$.

22.16.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі такі дійсні x та y, що $(x+yi)^4=x-yi$.

22.17.$^{\bullet\bullet}$ Василь Заплутайко доводить «рівність» $1=-1$ так:

$$1=\sqrt{(-1)^2}=\left(\sqrt{-1}\right)^2=i^2=-1.$$

У чому полягає помилка Василя?

22.18.•• Доведіть, що точки z_1 і z_2, відмінні від точки $z = 0$, лежать на прямій, яка проходить через початок координат, тоді й тільки тоді, коли виконується рівність $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

22.19.•• Доведіть, що точки z_1, z_2, z_3 лежать на одній прямій тоді й тільки тоді, коли виконується рівність $\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} = \frac{\overline{z}_3 - \overline{z}_2}{\overline{z}_3 - \overline{z}_1}$.

22.20.•• Точки $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$, $D(z_4)$ комплексної площини є вершинами чотирикутника. Доведіть, що сторони AB і CD паралельні тоді й тільки тоді, коли $\frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{\overline{z}_4 - \overline{z}_3}{\overline{z}_2 - \overline{z}_1}$.

22.21.•• Точки $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$, $D(z_4)$ комплексної площини належать колу $|z| = 1$. Доведіть, що хорди AB і CD паралельні тоді й тільки тоді, коли $z_1 z_2 = z_3 z_4$.

22.22.•• Доведіть, що геометричним місцем точок z комплексної площини, які задовольняють рівняння

$$(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)z + (z_2 - z_1)\overline{z} + z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1 = 0,$$

де $z_1 \neq z_2$, є пряма, яка проходить через точки $M(z_1)$ і $N(z_2)$.

22.23.•• Точки $M(z_1)$ і $N(z_2)$ комплексної площини належать колу $|z| = 1$. Доведіть, що рівняння прямої, яка проходить через точки M і N, можна подати у вигляді $z + z_1 z_2 \overline{z} = z_1 + z_2$.

22.24.•• Точки $M(z_1)$ і $N(z_2)$ комплексної площини відмінні від точки O (0). Доведіть, що вектори $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$ перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли виконується рівність $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

22.25.•• На комплексній площині позначили точки $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ і $D(z_4)$. Доведіть, що прямі AB і CD перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли виконується рівність

$$(z_1 - z_2)(\overline{z}_3 - \overline{z}_4) + (\overline{z}_1 - \overline{z}_2)(z_3 - z_4) = 0.$$

22.26.•• Точки $A(z_1)$, $B(z_2)$, $C(z_3)$ і $D(z_4)$ комплексної площини належать колу $|z| = 1$. Доведіть, що хорди AB і CD перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли виконується рівність $z_1 z_2 + z_3 z_4 = 0$.

22.27.•• Точка $A(z_1)$ комплексної площини належить колу $|z| = 1$. Доведіть, що рівняння дотичної, проведеної до цього кола в точці A, має вигляд $\overline{z}_1 z + z_1 \overline{z} = 2$.

ЗАСТОСУВАННЯ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

Комплексні числа виникли досить несподівано: під час пошуку дійсних коренів кубічних рівнянь з дійсними коефіцієнтами. У багатьох випадках застосування комплексних чисел також є неочікуваним. Узагалі, комплексні числа можуть слугувати ефективним інструментом для розв'язування задач з комбінаторики, тригонометрії, теорії чисел, геометрії та багатьох інших галузей математики.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть значення виразу

$$S = 1 - 3C_{101}^2 + 3^2 C_{101}^4 - 3^3 C_{101}^6 + \ldots - 3^{49} C_{101}^{98} + 3^{50} C_{101}^{100}.$$

Розв'язання. Розглянемо комплексне число $z = 1 + \sqrt{3}i$. Скориставшись формулою бінома Ньютона, можна записати:

$$(1+\sqrt{3}i)^{101} = 1 + C_{101}^1 \sqrt{3}i + C_{101}^2 (\sqrt{3}i)^2 + \ldots + C_{101}^{100} (\sqrt{3}i)^{100} + (\sqrt{3}i)^{101}.$$

Далі маємо:

$$(1+\sqrt{3}i)^{101} = 1 + \sqrt{3} C_{101}^1 i - 3C_{101}^2 - \ldots + 3^{50} C_{101}^{100} + (\sqrt{3})^{101} i =$$
$$= (1 - 3C_{101}^2 + 3^2 C_{101}^4 + \ldots - 3^{49} C_{101}^{98} + 3^{50} C_{101}^{100}) +$$
$$+ (\sqrt{3}C_{101}^1 - (\sqrt{3})^3 C_{101}^3 + \ldots - (\sqrt{3})^{99} C_{101}^{99} + (\sqrt{3})^{101})i.$$

Тепер зрозуміло, що значення S дорівнює дійсній частині комплексного числа $(1+\sqrt{3}i)^{101}$.

Оскільки $1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, то отримуємо:

$$(1+\sqrt{3}i)^{101} = 2^{101}\left(\cos\frac{101\pi}{3} + i\sin\frac{101\pi}{3}\right) = 2^{101}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^{100} - 2^{100}\sqrt{3}i.$$

Таким чином, значення даного виразу дорівнює 2^{100}.

Відповідь: 2^{100}. ◄

Зауважимо, що під час розв'язування прикладу 1 ми отримали й таку рівність:

$$\sqrt{3}C_{101}^1 - (\sqrt{3})^3 C_{101}^3 + \ldots - (\sqrt{3})^{99} C_{101}^{99} + (\sqrt{3})^{101} = -2^{100}\sqrt{3}.$$

ПРИКЛАД 2 Виразіть $\sin 5\alpha$ через $\sin \alpha$ і $\cos \alpha$.

Розв'язання. Розглянемо комплексне число $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Використовуючи формули Муавра та бінома Ньютона, подамо число z^5 двома способами:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 = \cos 5\alpha + i\sin 5\alpha;$$

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 =$$
$$= \cos^5\alpha + 5\cos^4\alpha(i\sin\alpha) + 10\cos^3\alpha(i\sin\alpha)^2 +$$
$$+ 10\cos^2\alpha(i\sin\alpha)^3 + 5\cos\alpha(i\sin\alpha)^4 + (i\sin\alpha)^5 =$$
$$= (\cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\sin^4\alpha) +$$
$$+ (5\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\sin^3\alpha + \sin^5\alpha)i.$$

Залишилося прирівняти уявні частини отриманих виразів.

Відповідь: $\sin 5\alpha = 5\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\sin^3\alpha + \sin^5\alpha$. ◄

Зазначимо, що під час розв'язування прикладу 2 ми отримали й такий результат: $\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\sin^4\alpha$.

ПРИКЛАД 3 Чи існують такі натуральні числа $x \geqslant 15$ і $y \geqslant 15$, що $x^2 + y^2 = 29 \cdot 41$?

Розв'язання. Подамо добуток $29 \cdot 41$ у вигляді

$$29 \cdot 41 = |5 + 2i|^2 \cdot |5 + 4i|^2.$$

Скориставшись рівністю $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$, отримаємо:

$$29 \cdot 41 = |5 + 2i|^2 \cdot |5 + 4i|^2 = |(5 + 2i)(5 + 4i)|^2 = |17 + 30i|^2 = 17^2 + 30^2.$$

Відповідь: так, наприклад, $x = 17$, $y = 30$. ◄

ПРИКЛАД 4 На сторонах AB і BC трикутника ABC у зовнішній бік побудовано квадрати $ABDE$ і $CBLK$. Точки M_1 і M_2 — середини відрізків LD і CA відповідно. Доведіть, що центри квадратів та точки M_1 і M_2 є вершинами квадрата.

Розв'язання. Уведемо комплексну площину так, щоб точка B збігалася з початком координат (рис. 22.6). Позначимо через O_1 і O_2 центри квадратів $ABDE$ і $CBLK$ відповідно. Нехай a і c — комплексні координати точок A і C відповідно. Зауважимо, що точка D є образом точки A при повороті із центром B на кут $\frac{\pi}{2}$, а точка L — образом точки C при повороті із центром B на кут $-\frac{\pi}{2}$. Тоді комплексні координати точок D і L дорівнюють числам ia та $-ic$ відповідно.

Знайдемо комплексні координати z_{O_1}, z_{O_2} і z_{M_2} точок O_1, O_2 і M_2. Оскільки ці точки є серединами відрізків AD, CL і AC відповідно, то $z_{O_1} = \frac{a + ia}{2}$, $z_{O_2} = \frac{c - ic}{2}$, $z_{M_2} = \frac{a + c}{2}$.

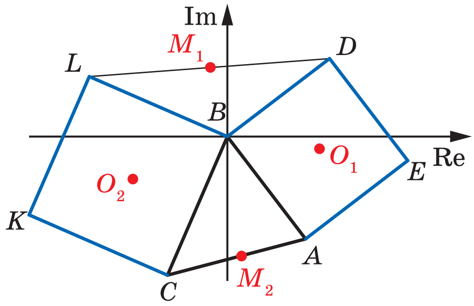


Рис. 22.6

Покажемо, що точка M_2 — вершина рівнобедреного прямокутного трикутника $O_1M_2O_2$. Для цього достатньо переконатися, що при повороті із центром M_2 на кут $\frac{\pi}{2}$ вектор $\overrightarrow{M_2O_2}$ є образом вектора $\overrightarrow{M_2O_1}$. Іншими словами, достатньо перевірити рівність $i\overrightarrow{M_2O_1} = \overrightarrow{M_2O_2}$, тобто $i(z_{O_1} - z_{M_2}) = z_{O_2} - z_{M_2}$.

Маємо: $i(z_{O_1} - z_{M_2}) = i\left(\frac{a+ia}{2} - \frac{a+c}{2}\right) = \frac{i(ia-c)}{2} = \frac{-a-ic}{2}$;

$$z_{O_2} - z_{M_2} = \frac{c-ic}{2} - \frac{a+c}{2} = \frac{-a-ic}{2}.$$

Міркуючи аналогічно, можна показати, що M_1 — вершина рівнобедреного прямокутного трикутника $O_1M_1O_2$. ◄

ПРИКЛАД 5 Коло із центром O вписано в чотирикутник $ABCD$. Доведіть, що точка O та середини діагоналей чотирикутника лежать на одній прямій.

Розв'язання. Уведемо комплексну площину так, щоб точка O збігалася з початком координат, а радіус кола дорівнював 1 (рис. 22.7). Позначимо через M, N, P і Q точки дотику кола до сторін AB, BC, CD і DA відповідно. Нехай z_M, z_N, z_P і z_Q — комплексні координати точок M, N, P і Q відповідно. Рівняння прямих AB і AD мають вигляд $\bar{z}_M z + z_M \bar{z} = 2$ і $\bar{z}_Q z + z_Q \bar{z} = 2$ відповідно (див. задачу 22.27). Тоді комплексну координату точки A можна знайти, розв'язавши систему $\begin{cases} \bar{z}_M z + z_M \bar{z} = 2, \\ \bar{z}_Q z + z_Q \bar{z} = 2. \end{cases}$

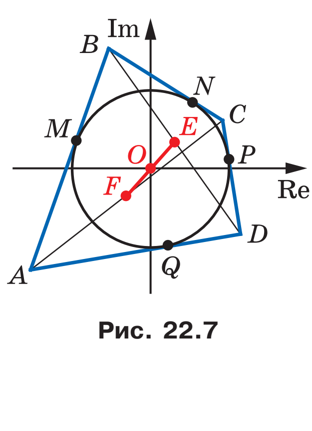


Рис. 22.7

Оскільки $z_M \neq 0$ і $z_Q \neq 0$, то можна записати:

$$\begin{cases} z_Q\bar{z}_M z + z_M z_Q \bar{z} = 2z_Q, \\ z_M\bar{z}_Q z + z_M z_Q \bar{z} = 2z_M. \end{cases}$$

Віднімаючи від першого рівняння отриманої системи друге, маємо:

$$z_Q\bar{z}_M z - z_M\bar{z}_Q z = 2z_Q - 2z_M.$$

Оскільки $\bar{z}_M = \frac{1}{z_M}$ і $\bar{z}_Q = \frac{1}{z_Q}$, то можна записати:

$$\frac{z_Q}{z_M}z - \frac{z_M}{z_Q}z = 2(z_Q - z_M); \quad (z_Q^2 - z_M^2)z = 2z_M z_Q (z_Q - z_M);$$

$$(z_Q + z_M)z = 2z_M z_Q.$$

Звідси $z = \frac{2z_M z_Q}{z_M + z_Q}$.

Аналогічно можна показати, що комплексні координати точок B, C і D відповідно дорівнюють $\frac{2z_M z_N}{z_M + z_N}$, $\frac{2z_N z_P}{z_N + z_P}$, $\frac{2z_P z_Q}{z_P + z_Q}$.

Позначимо через F і E середини діагоналей AC і BD відповідно. Нехай z_F і z_E — комплексні координати точок F і E відповідно. Тоді $z_F = \frac{z_M z_Q}{z_M + z_Q} + \frac{z_N z_P}{z_N + z_P}$, $z_E = \frac{z_M z_N}{z_M + z_N} + \frac{z_P z_Q}{z_P + z_Q}$. Для завершення розв'язування достатньо показати, що виконується рівність $\frac{z_E}{z_F} = \frac{\bar{z}_E}{\bar{z}_F}$ (див. ключову задачу 22.18). Скориставшись рівностями $z_M\bar{z}_M = 1$, $z_N\bar{z}_N = 1$, $z_P\bar{z}_P = 1$, $z_Q\bar{z}_Q = 1$, завершіть розв'язування самостійно. ◄

ПРИКЛАД 6 Є дві карти прямокутної форми, які зображають одну й ту саму місцевість, але мають різний масштаб. Меншу карту поклали так, що вона опинилася цілком усередині більшої карти. Доведіть, що можна проткнути голкою одночасно обидві карти так, що проколоті точки на обох картах будуть зображати одну й ту саму точку місцевості.

Розв'язання. Уведемо комплексну площину так, щоб одна з вершин більшої карти збігалася з початком координат, а сторони, які містять цю вершину, належали додатним півосям.

Розглянемо перетворення, у результаті якого з більшої карти можна отримати меншу карту, розміщену так, як показано на рисунку 22.8.

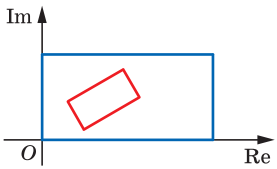


Рис. 22.8

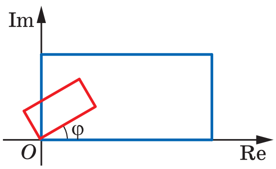


Рис. 22.9

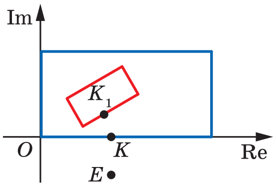


Рис. 22.10

Нехай число r — відношення масштабу меншої карти до масштабу більшої карти. Зрозуміло, що $r < 1$. Помножимо комплексну координату z кожної точки площини на число $a = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Результат такої дії з точками площини можна розглядати як композицію перетворень гомотетії H_O^r і повороту R_O^{φ}. Унаслідок цього перетворення ми отримали образ більшої карти, який дорівнює меншій карті та розміщений так, як показано на рисунку 22.9. Тепер перенесемо цей образ «на відповідне місце» (рис. 22.10).

Для цього до комплексної координати az кожної точки площини додамо комплексне число b. Результат такої дії можна розглядати як паралельне перенесення на вектор b.

Отже, у результаті описаних перетворень кожна точка $M(z)$ більшої карти має образ — точку $N(az + b)$ меншої карти. Точки M і N збігаються за умови виконання рівності $z = az + b$. Оскільки $a \neq 1$, то це рівняння має єдиний корінь $z = \dfrac{b}{1-a}$.

Тим самим ми показали, що існує єдина точка $E\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ комплексної площини, яка в результаті описаних перетворень виявилася «нерухомою». Тепер доведемо, що ця «нерухома точка» належить обом картам.

Кожна точка більшої карти є прообразом деякої точки меншої карти. Тому точка E не може належати більшій карті та при цьому не належати меншій карті.

Припустимо, що точка E розміщена поза більшою картою. Розглянемо точку K більшої карти, яка найменш віддалена від точки E, та її образ K_1 при описаних перетвореннях (рис. 22.10).

Зазначимо, що в результаті гомотетії з коефіцієнтом r, де $0 < r < 1$, відстань між образами будь-яких двох точок є меншою, ніж відстань між цими точками.

Тоді має виконуватися нерівність $KE > K_1E$, а це суперечить тому, як було вибрано точку K. ◄

ВПРАВИ

22.28. Виразіть $\cos 6\alpha$ через $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$.

22.29. Доведіть рівність

$$\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}=\frac{1}{2}.$$

22.30. Доведіть, що

$$\cos^{100}\varphi=\frac{1}{2^{99}}(\cos 100\varphi+C_{100}^{1}\cos 98\varphi+C_{100}^{2}\cos 96\varphi+\ldots+C_{100}^{50}).$$

22.31. Доведіть, що

$$\sin^{100}\varphi=\frac{1}{2^{99}}(\cos 100\varphi-C_{100}^{1}\cos 98\varphi+C_{100}^{2}\cos 96\varphi-\ldots+C_{100}^{50}).$$

22.32. Доведіть рівність $C_{51}^{0}-C_{51}^{2}+C_{51}^{4}-C_{51}^{6}+\ldots+C_{51}^{48}-C_{51}^{50}=-2^{25}$.

22.33. Знайдіть такі натуральні числа $x\geqslant 18$ і $y\geqslant 18$, що

$$x^2+y^2=37\cdot 53.$$

22.34. На дошці написано функції $y=x+\frac{1}{x}$ і $y=x^2$. Якщо на дошці написано функції f і g, то дозволено дописати будь-яку з функцій $y=f^2(x)$, $y=f(x)+g(x)$, $y=f(x)g(x)$, $y=cf(x)$, де c — довільна дійсна стала. Чи може в результаті виконання декількох таких дій на дошці з'явитися функція $y=\frac{1}{x}$?

22.35. У чотирикутнику $ABCD$ точки M і N — середини сторін AB і CD відповідно. Точка K — середина відрізка MN. Медіани трикутника BCD перетинаються в точці P. Доведіть, що точки A, K і P лежать на одній прямій.

22.36. Дано трикутник ABC і довільну точку O. Нехай точки P, Q і R — відповідно точки перетину медіан трикутників AOB, BOC, COA. Доведіть, що точка O та точки перетину медіан трикутників ABC і PQR лежать на одній прямій.

22.37. На сторонах AB і AC трикутника ABC у зовнішній бік побудовано квадрати $ABNM$ і $ACQP$. Доведіть, що $MC=BP$, $MC\perp BP$.

22.38. На сторонах BC і AC трикутника ABC у зовнішній бік побудовано рівносторонні трикутники BCK і CAM. Знайдіть кут між прямими BM і AK та доведіть, що $BM=AK$.

22.39. На прямій l узято послідовно точки A, B і C, а на відрізках AB і AC у різних півплощинах відносно прямої l побудовано рівносторонні трикутники ABD і ACN. Доведіть, що середини K і L відповідно відрізків DC і BN та точка A є вершинами рівностороннього трикутника.

22.40. На прямій l узято послідовно точки A, C, E. На відрізках AC і CE в одну півплощину відносно прямої l побудовано рівносторонні трикутники ABC і CDE. Точки K і M — середини відрізків AD і BE відповідно. Доведіть, що трикутник CKM рівносторонній.

22.41. Відомо, що ABC і $A_1B_1C_1$ — рівносторонні трикутники (порядок вершин указано в напрямку руху годинникової стрілки). Середини відрізків AA_1, BB_1 і CC_1 є вершинами трикутника. Доведіть, що цей трикутник є рівностороннім.

22.42. Через кінці діаметра AB кола провели дотичні l_1 і l_2 відповідно. На колі позначили точку X. Дотична до кола, проведена в точці X, перетинає прямі l_1 і l_2 у точках C і D відповідно. Доведіть, що добуток $AC \cdot BD$ не залежить від вибору точки X.

22.43. Точки A, B і C лежать на колі. У цих точках до кола проведено дотичні, які перетинають прямі BC, AC і CA в точках M, N і P відповідно. Доведіть, що точки M, N і P лежать на одній прямій.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 4

Комплексне число

Комплексним числом називають вектор $\overrightarrow{OZ}$, де O — початок координат, а Z — довільна точка площини.

Довільне комплексне число z можна подати у вигляді $z = a + bi$, де a, b — координати точки Z і вектора $\overrightarrow{OZ}$. Запис $a + bi$ називають алгебраїчною формою комплексного числа.

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ є число $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Операції над комплексними числами

Добутком комплексних чисел $a_1 + b_1 i$ та $a_2 + b_2 i$ називають комплексне число $(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.

Комплексні числа $a + bi$ та $a - bi$ називають спряженими.

Часткою комплексних чисел z_1 і z_2, де $z_2 \neq 0$, називають таке комплексне число z, що $z \cdot z_2 = z_1$.

Коренем n-го степеня з комплексного числа z, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, називають таке комплексне число w, що $w^n = z$. Для будь-якого комплексного числа $z \neq 0$ існує рівно n комплексних чисел, кожне з яких є коренем n-го степеня із числа z.

Тригонометрична форма комплексного числа

Запис комплексного числа $z \neq 0$ у вигляді $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, де r — модуль числа z, називають тригонометричною формою комплексного числа. Кут φ називають аргументом комплексного числа z.

Операції над комплексними числами, записаними в тригонометричній формі

Модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку модулів множників, а аргумент добутку дорівнює сумі аргументів множників.

Модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів діленого та дільника, а аргумент частки дорівнює різниці аргументів діленого та дільника.

$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$ (формула Муавра).

Усі n коренів n-го степеня із числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, записаного в тригонометричній формі, можуть бути обчислені за формулою $w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$, де $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

§ 5. Многочлени

- У цьому параграфі ви розширите свої знання про многочлени, навчитеся розв’язувати квадратне рівняння з від’ємним дискримінантом і дізнаєтеся, які корні многочлена називають кратними.
- Ви ознайомитися з теоремою Вієта для кубічного многочлена та з методом Кардано розв’язування кубічних рівнянь.

23. Розв’язування алгебраїчних рівнянь на множині комплексних чисел

Вам добре відома формула коренів квадратного рівняння

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \qquad (1)$$

У результаті підстановки чисел $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ у рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ отримаємо правильну рівність. Під час цієї підстановки в лівій частині рівняння доведеться виконувати лише арифметичні операції. Оскільки для дійсних і комплексних чисел арифметичні операції мають спільні властивості, то на множині комплексних чисел корені квадратного рівняння можна знаходити за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \Delta}{2a},$$

де за Δ треба взяти будь-яке значення квадратного кореня з дискримінанта $D = b^2 - 4ac$.

Розглянемо, наприклад, квадратне рівняння $x^2 - 6x + 10 = 0$. Його дискримінант $D = 6^2 - 4 \cdot 10 = -4$ — від’ємне число. Числа $2i$ та $-2i$ є квадратними коренями з дискримінанта. Таким чином, числа

$$x_1 = \frac{6+2i}{2} = 3+i \text{ та } x_2 = \frac{6-2i}{2} = 3-i$$

є комплексними коренями даного квадратного рівняння.

Маючи комплексні корені квадратного тричлена, його можна розкласти на множники аналогічно випадку дійсних коренів. Наприклад, можна записати:

$$x^2 - 6x + 10 = (x-(3+i))(x-(3-i)).$$

Таким чином, кожний квадратний тричлен можна розкласти на два лінійних множники. Тому кожне квадратне рівняння має не більше ніж два комплексних корені.

ПРИКЛАД 1 Розв’яжіть рівняння $z^2 - (9+i)z + 20 = 0$.

Розв’язання. Знайдемо дискримінант $D = (9+i)^2 - 80 = 18i$.

Квадратні корені із числа $18i = 18\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ дорівнюють:

$$\sqrt{18}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=3+3i,$$

$$\sqrt{18}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-3-3i.$$

Тепер можна записати корені даного квадратного рівняння:

$$z_1=\frac{9+i+(3+3i)}{2}=6+2i,$$

$$z_2=\frac{9+i-(3+3i)}{2}=3-i. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть рівняння $z^2-(3+2i)z+(5+i)=0.$

Розв'язання. Знайдемо дискримінант

$$D=(3+2i)^2-4(5+i)=-15+8i.$$

У даному випадку пошук квадратних коренів із $D=-15+8i$, записаних у тригонометричній формі, є недоцільним, оскільки аргумент комплексного числа $-15+8i$, — «незручний» кут. Обчислимо ці квадратні корені $\Delta=x+yi$ в алгебраїчній формі.

Маємо:

$$\Delta^2=(x^2-y^2)+2xyi=-15+8i. \text{ Звідси}$$

$$\begin{cases}x^2-y^2=-15,\\2xy=8.\end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо такі значення квадратних коренів із дискримінанта: $1+4i$, $-1-4i$.

Тепер можна записати корені даного квадратного рівняння:

$$z_1=\frac{(3+2i)+(1+4i)}{2}=2+3i,$$

$$z_2=\frac{(3+2i)-(1+4i)}{2}=1-i. \blacktriangleleft$$

Уведення до розгляду комплексних чисел привело до того, що довільне квадратне рівняння має корінь. Цей факт є окремим випадком однієї з перлин математики — основної теореми алгебри.

Теорема 23.1 (основна теорема алгебри). ***Кожний многочлен***

$$P(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z+a_0$$

степеня $n\in\mathbb{N}$ ***з комплексними коефіцієнтами має комплексний корінь.***

З ідеєю доведення основної теореми алгебри ви можете ознайомитися в оповіданні «Дама із собачкою» на с. 238.

За цією теоремою будь-яке алгебраїчне рівняння, наприклад

$$x^6 - x + 2 = 0,$$

має комплексний корінь.

Наслідок. ***Кожний многочлен***

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

степеня $n \in \mathbb{N}$ ***з комплексними коефіцієнтами можна єдиним способом подати у вигляді добутку лінійних множників***

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$

Числа $z_1, z_2, \ldots, z_n$***, серед яких можуть бути рівні, є коренями многочлена P. Кожний корінь многочлена P дорівнює одному із цих чисел.***

Доведення. За основною теоремою алгебри многочлен P має комплексний корінь — число z_1. Тому за теоремою Безу многочлен P можна подати у вигляді

$$P(z) = (z - z_1)Q(z),$$

де многочлен Q має вигляд

$$Q(z) = z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \ldots + b_1 z + b_0.$$

Якщо степінь многочлена Q — число натуральне, то, застосовуючи основну теорему алгебри до многочлена Q, подамо його у вигляді

$$Q(z) = (z - z_2)R(z),$$

де z_2 — корінь многочлена Q. Тоді многочлен P можна подати у вигляді

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)R(z).$$

Якщо продовжити цей процес далі, то многочлен P можна подати у вигляді

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n). \qquad (2)$$

Зрозуміло, що, з одного боку, кожне із чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$ є коренем многочлена P. З другого боку, кожний корінь многочлена P дорівнює одному із чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Справді, якщо деяке число z^* є коренем многочлена P, то, підставляючи значення $z = z^*$ у рівність (2) і враховуючи, що $P(z^*) = 0$, отримуємо:

$$(z^* - z_1)(z^* - z_2)\ldots(z^* - z_n) = 0.$$

Це означає, що z^* дорівнює одному із чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Те, що спосіб подання многочлена P у вигляді добутку (2) — єдино можливий, доведіть самостійно. ◄

ВПРАВИ

23.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $z^2+8z+25=0$;
2) $z^2-(3-2i)z+10=0$;
3) $z^2-3z+11-3i=0$;
4) $z^2+(i-5)z+8-i=0$.

23.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $z^2-10z+41=0$;
2) $z^2+2(i-6)z+30=0$;
3) $z^2-2z-7-6i=0$;
4) $z^2+2(i-2)z+3+4i=0$.

23.3.• Розв'яжіть рівняння:

1) $z^4+15z^2-16=0$;
2) $z^3-2z^2+4z-8=0$;
3) $z^4+1=0$;
4) $z^3-(2+i)z^2+2(1+i)z-2i=0$.

23.4.• Розв'яжіть рівняння:

1) $z^4-5z^2-36=0$;
2) $z^3+3z^2+9z+27=0$;
3) $z^4+9=0$;
4) $z^3-(4-i)z^2+(7-i)z-4=0$.

23.5.•• Розв'яжіть рівняння $1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0$.

23.6.•• Розв'яжіть рівняння $z^8-z^6+z^4-z^2+1=0$.

23.7.•• Знайдіть остачу від ділення многочлена $P(x)=x^{120}+2x^{65}+2$ на x^2-x+1.

23.8.•• Знайдіть остачу від ділення многочлена $P(x)=x^{2012}-x^{101}+5$ на x^2+1.

23.9.•• Доведіть, що коли комплексне число z_0 є коренем многочлена P з дійсними коефіцієнтами, то комплексне число $\bar{z}_0$ також є коренем многочлена P.

23.10.•• Про рівняння $z^4-5z^3+13z^2-16z+10=0$ відомо, що число $z=1+i$ є його коренем. Розв'яжіть це рівняння.

23.11.•• Доведіть, що кожний многочлен P степеня $n\in\mathbb{N}$ з дійсними коефіцієнтами можна розкласти на лінійні або квадратичні множники з дійсними коефіцієнтами.

23.12.•• Доведіть, що кожний многочлен непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має дійсний корінь.

23.13.•• Чи існує функція, графік якої має спільну точку з будь-якою параболою виду $y=ax^2+bx+c$?

23.14.* Знайдіть усі такі $n\in\mathbb{N}$, що многочлен $P(x)=x^n+x+90$ ділиться націло на x^2-x+2.

23.15.* Нехай P — деякий ненульовий многочлен. Доведіть існування таких ненульових многочленів Q і R, що $P(x)Q(x) = R(x^{2012})$.

23.16.* Нехай многочлен $P(x) = x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ має $2n$ різних додатних коренів. Доведіть існування такого многочлена Q, що $P(x^2) = Q(x)Q(-x)$.

ДАМА ІЗ СОБАЧКОЮ

У попередньому пункті ви ознайомилися з однією з головних теорем усієї математики — основною теоремою алгебри.

Доведенням цієї теореми займалися багато видатних науковців: Жан д'Аламбер, Леонард Ейлер, Жозеф-Луї Лагранж, Карл Гаусс та ін. Наприклад, Гаусс навів чотири різних доведення цієї теореми. Причина такої кількості доведень полягала в тому, що в той час самі множини дійсних чи комплексних чисел не мали точних означень, а через те й міркування науковців не були переконливими.

Сучасні доведення основної теореми алгебри спираються на низку властивостей дійсних або комплексних чисел, які не вивчають у середній школі. Проте існують цікаві геометричні ілюстрації до деяких із цих доведень. Одне з них отримало образну назву «Дама із собачкою».

Розглянемо многочлен

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0.$$

Перш за все зауважимо, що коли $a_0 = 0$, то твердження теореми очевидно виконується, бо число $z = 0$ є коренем многочлена P.

Нехай $a_0 \neq 0$. На множині комплексних чисел розглянемо функції $w = P\ (z)$ і $w = Q\ (z)$, де $Q(z) = z^n$. Поряд із комплексною площиною (z), на якій позначатимемо аргументи функцій P і Q, будемо розглядати комплексну площину (w), де позначатимемо значення функцій P і Q (рис. 23.1).

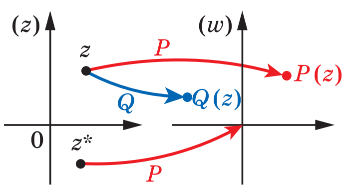


Рис. 23.1

Для доведення основної теореми алгебри треба показати існування такого комплексного числа z^*, що $P(z^*) = 0$, тобто існування такої точки z^* комплексної площини (z), якій відповідає початок координат комплексної площини (w) (рис. 23.1).

Нехай точка комплексної площини z рухається по колу радіуса R із центром у початку координат, тобто $|z| = R$ (рис. 23.2). Кожну точку z цього кола можна подати у вигляді

$$z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Простежимо за тим, як під час такого руху точки z рухатиметься точка $Q(z) = z^n$ на комплексній площині (w). Точку $Q(z)$ називатимемо «дамою». За формулою Муавра

$$Q(z) = z^n = R^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = R^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

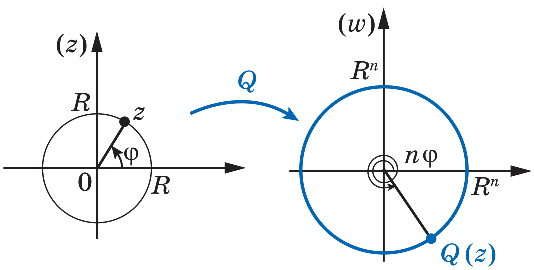


Рис. 23.2

Це означає, що точка $Q(z)$ рухатиметься по колу радіуса R^n із центром у початку координат. Коли точка z обходить коло, кут φ змінюється від 0 до 2π, а кут $n\varphi$ — від 0 до $2\pi n$. Тому одному оберту точки z відповідатиме n обертів точки $Q(z)$ на комплексній площині (w). Отже, «дама» $Q(z)$ рухається колом радіуса R^n, робить n обертів навколо початку координат і повертається в початкову точку.

З'ясуємо, як під час розглянутого руху точки z рухатиметься точка $P(z)$ на комплексній площині (w). Точку $P(z)$ називатимемо «собачкою».

Дослідження руху точки $P(z)$ розіб'ємо на три випадки:

1) радіус R є досить великим;

2) радіус R є досить малим;

3) радіус R зменшується від досить великого до досить малого.

Нехай радіус R є досить великим. Подамо функцію P у вигляді

$$P(z) = z^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right).$$

Оскільки $|z| = R$, то для величини $\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}$ можна записати оцінку:

$$\left|\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right| \leqslant \left|\frac{a_{n-1}}{z}\right| + \left|\frac{a_{n-2}}{z^2}\right| + \ldots + \left|\frac{a_0}{z^n}\right| =$$

$$= \frac{|a_{n-1}|}{R} + \frac{|a_{n-2}|}{R^2} + \ldots + \frac{|a_0|}{R^n}.$$

Тому при досить великих значеннях R величина $\left|\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right|$ є досить малою. Це означає, що траєкторія руху точки $P(z)$ мало відрізняється від траєкторії руху точки $Q(z) = z^n$ (нагадаємо, що точка $Q(z)$ рухається колом радіуса R^n). Наприклад, якщо вибрати таке значення R, що

$$\left|\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right| < \frac{1}{10},$$

то

$$|P(z) - Q(z)| = \left|z^n\left(\frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right)\right| \leqslant |z^n| \cdot \frac{1}{10} = \frac{R^n}{10}.$$

Отже, відстань між точками $P(z)$ і $Q(z)$ не перевищуватиме $\frac{1}{10}$ радіуса кола, яким рухається точка $Q(z)$ (рис. 23.3). Говорячи неформально, коли «дама» $Q(z)$ рухається колом, «собачка» $P(z)$ бігає біля «дами», віддаляючись не більше ніж на довжину повідця — величину $\frac{R^n}{10}$.

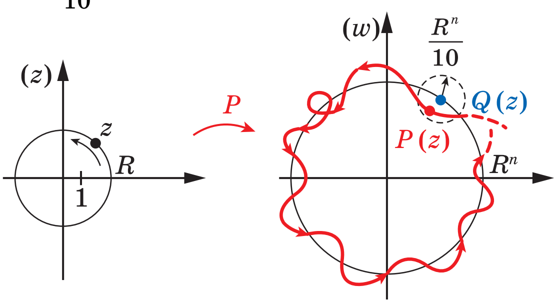


Рис. 23.3

Оскільки «дама» $Q(z)$ робить n обертів навколо початку координат, то і «собачка» $P(z)$ також n разів оббігає навколо початку координат і повертається в початкову точку.

Перейдемо до другого випадку. Простежимо за рухом «собачки» $P(z)$, коли точка z комплексної площини (z) рухається колом деякого досить малого радіуса R із центром у початку координат. Тепер рух «собачки»

$$P(z) = \left(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z\right) + a_0$$

не буде визначатися рухом «дами» $Q(z) = z^n$. У цьому випадку «собачка» бігатиме біля точки a_0, де, можливо, лежить смачна кістка. Справді, відстань між «собачкою» $P(z)$ і точкою a_0 можна оцінити так:

$$\left| P(z) - a_0 \right| = \left| z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| z^n \right| + \left| a_{n-1}z^{n-1} \right| + \ldots + \left| a_1 z \right| \leqslant R^n + \left| a_{n-1} \right| R^{n-1} + \ldots + \left| a_1 \right| R.$$

Тому, вибираючи досить малий радіус R, можна забезпечити виконання, наприклад, нерівності

$$\left| P(z) - a_0 \right| \leqslant \frac{|a_0|}{10}.$$

Це означає, що «собачка» $P(z)$ бігає в крузі радіуса $\frac{|a_0|}{10}$ із центром у точці a_0 (рис. 23.4). Отже, якщо радіус R досить малий, то «собачка» $P(z)$ під час руху жодного разу не оббігає навколо початку координат.

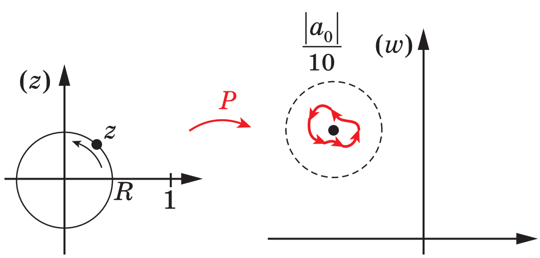
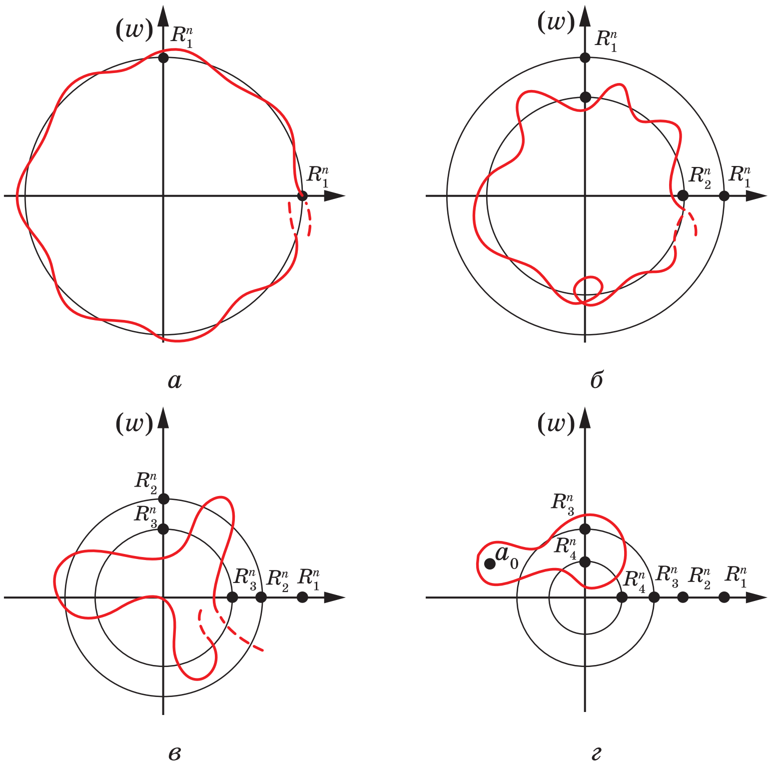


Рис. 23.4

Перейдемо до останнього етапу дослідження руху «собачки» $P(z)$. Нехай радіус кола R неперервно зменшується від досить великого (коли «собачка» $P(z)$ n разів оббігала початок координат і рухалася майже по колу) до досить малого (коли «собачка» $P(z)$ жодного разу не оббігає навколо початку координат і знаходиться біля точки a_0). Прослідкуємо, як така зміна радіуса R впливає на траєкторію руху «собачки» $P(z)$ і кількість обертів навколо початку координат. Під час «плавного» зменшення значень R траєкторія руху «собачки» також буде «плавно» деформуватися (рис. 23.5, *а–г*). Тому існує такий момент, коли кількість обертів змінює своє значення. Цей момент відповідатиме такому радіусу R, що траєкторія руху «собачки» $P(z)$ проходить через початок координат (рис. 23.5, *в*). Але це як раз і означає існування такого комплексного числа z^*, що $P(z^*) = 0$.

Отже, рівняння $P(z) = 0$ має корінь.



$R_1 > R_2 > R_3 > R_4$

Рис. 23.5

24. Кратні корені

Розглянемо квадратне рівняння з нульовим дискримінантом, наприклад $x^2 - 6x + 9 = 0$. Іноді говорять, що це рівняння має два однакових корені: $x_1 = 3$ і $x_2 = 3$. Причиною для такого висловлювання є те, що вираз $x^2 - 6x + 9$ можна подати у вигляді добутку двох однакових множників $(x - 3)(x - 3)$, кожний з яких визначає корінь початкового рівняння. У таких випадках точніше буде сказати, що число $x = 3$ є **кратним коренем** многочлена $x^2 - 6x + 9$ і кратність цього кореня дорівнює двом.

Означення. **Число x_0 називають кратним коренем многочлена P, якщо многочлен P можна подати у вигляді $P(x) = (x - x_0)^k Q(x)$, де $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, Q — многочлен і $Q(x_0) \neq 0$. Число k називають кратністю кореня x_0.**

Наприклад, многочлен

$$P(x) = (x-1)^4 (x^2+1)^2$$

має кратний корінь $x_0 = 1$. Кратність кореня $x_0 = 1$ дорівнює 4. Говорять також, що число $x_0 = 1$ є коренем кратності чотири.

Якщо корінь x_0 многочлена P не є кратним, то його називають *простим коренем*. Такий многочлен P можна подати у вигляді $P(x) = (x - x_0)^1 Q(x)$, де $Q(x_0) \neq 0$. Кажуть, що *простий корінь має кратність один*.

Якщо многочлен P можна подати у вигляді $P(x) = (x - x_0)^k Q(x)$, де $k \in \mathbb{N}$ і $Q(x_0) \neq 0$, то це означає, що многочлен P ділиться націло на $(x - x_0)^k$ і не ділиться націло на $(x - x_0)^{k+1}$. Іншими словами, *число x_0 є коренем кратності k многочлена P тоді й лише тоді, коли P ділиться націло на $(x - x_0)^k$ і не ділиться націло на $(x - x_0)^{k+1}$, де $k \in \mathbb{N}$.*

Оскільки многочлен P степеня n не може ділитися націло на $(x - x_0)^k$ при $k > n$, то кожний корінь x_0 многочлена P має кратність k, що задовольняє нерівність $1 \leqslant k \leqslant n$.

Розглянемо, наприклад, многочлен $P(x) = (x-1)^4 (x^2+1)^2$ на множині комплексних чисел. Його кратним коренем буде не лише число $x_0 = 1$, а й комплексні числа $x_1 = i$ та $x_2 = -i$. Справді, многочлен P можна подати у вигляді

$$P(x) = (x-1)^4 (x-i)^2 (x+i)^2.$$

Тому числа $x_1 = i$ та $x_2 = -i$ є коренями многочлена P кратності два.

У попередньому пункті ви дізналися, що кожний многочлен

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

степеня $n \in \mathbb{N}$ з комплексними коефіцієнтами можна подати у вигляді добутку

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n),$$

де серед чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$ можуть бути однакові.

Використовуючи поняття кратності кореня, можна сформулювати очевидний наслідок цього твердження: ***кожний многочлен степеня $n \in \mathbb{N}$ має рівно n коренів з урахуванням їхньої кратності.***

Наприклад, можна сказати, що многочлен

$$P(x) = (x - 1)^4 (x - i)^2 (x + i)^2$$

має 8 коренів з урахуванням їхньої кратності: $1, 1, 1, 1, i, i, -i, -i$. Узагалі, коли говорять, що числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ є коренями многочлена степеня $n \in \mathbb{N}$, то серед перелічених чисел можуть бути однакові. Кратність кореня визначає, скільки разів цей корінь повторюється в переліку.

Якщо многочлен P розкладено на лінійні множники, то з'ясувати, які корені є кратними, легко. Важче знайти кратність кореня, якщо многочлен задано в стандартному вигляді

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Виявляється, що кратність кореня можна знайти, використовуючи похідні[1] многочлена P. Для визначення кратності кореня поряд із першою та другою похідними многочлена $y = P(x)$ доцільно розглядати похідні третього, четвертого, ..., n-го порядків. Наприклад, під третьою похідною многочлена P розуміють першу похідну многочлена P''. Третю похідну многочлена P позначають P''' або $P^{(3)}$.

Теорема 24.1. ***Якщо кратний корінь x_0 многочлена P має кратність k, де $k > 1$ і $k \in \mathbb{N}$, то число x_0 є коренем многочлена P' кратності $k - 1$.***

Доведення. Якщо кратний корінь x_0 многочлена P має кратність k, то многочлен P можна подати у вигляді $P(x) = (x - x_0)^k Q(x)$,

[1] Оскільки в навчальній програмі поняття похідної розглядається тільки для функцій f таких, що $D(f) \subset \mathbb{R}$ і $E(f) \subset \mathbb{R}$, то використовувати похідну для пошуку кратних коренів будемо лише на множині дійсних чисел.

де $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$ і $Q(x_0) \neq 0$. Використовуючи таке подання многочлена P, обчислимо його похідну. Маємо:

$$P'(x) = \left((x - x_0)^k Q(x)\right)' = k(x - x_0)^{k-1} Q(x) + (x - x_0)^k Q'(x) =$$
$$= (x - x_0)^{k-1} (kQ(x) + (x - x_0)Q'(x)).$$

Якщо многочлен $kQ(x) + (x - x_0)Q'(x)$ позначити через $Q_1(x)$, то можна записати:

$$P'(x) = (x - x_0)^{k-1} Q_1(x).$$

Оскільки значення многочлена $Q_1(x)$ у точці $x = x_0$ дорівнює $Q_1(x_0) = kQ(x_0) + (x_0 - x_0)Q'(x_0) = kQ(x_0)$ і $Q(x_0) \neq 0$, то $Q_1(x_0) \neq 0$. Це означає, що x_0 є коренем многочлена P' кратності $k - 1$. ◄

Теорема 24.2. ***Якщо число x_0 є простим коренем многочлена P, то число x_0 не є коренем многочлена P'.***

Міркуючи аналогічно доведенню теореми 24.1, доведіть це твердження самостійно.

Наприклад, легко перевірити, що число $x_0 = 1$ є коренем многочлена $P(x) = x^5 - 3x^2 + 2$. Знайдемо кратність k цього кореня. Коли припустити, що $k > 1$, то за теоремою 24.1 число $x_0 = 1$ має бути коренем многочлена $P'(x) = 5x^4 - 6x$. Але $P'(1) \neq 0$, тому наше припущення неправильне, і $k = 1$. Отже, $x_0 = 1$ — простий корінь многочлена $P(x) = x^5 - 3x^2 + 2$.

Інший приклад. Число $x_0 = -1$ є коренем многочлена $P(x) = x^4 - 3x^2 - 2x$. Знайдемо кратність k цього кореня. Оскільки число $x_0 = -1$ є коренем і многочлена $P'(x) = 4x^3 - 6x - 2$, то за теоремою 24.2 число $x_0 = -1$ не є простим коренем многочлена P. Тому $k > 1$ і за теоремою 24.1 число $x_0 = -1$ є коренем многочлена $P'(x) = 4x^3 - 6x - 2$ кратності $k_1 = k - 1$. Припустимо, що $k_1 > 1$. Тоді, використовуючи теорему 24.1 для многочлена P', маємо, що число $x_0 = -1$ повинно бути коренем многочлена $P''(x) = 12x^2 - 6$. Але $P''(-1) \neq 0$. Отже, наше припущення неправильне, і $k_1 = 1$. Звідси $k = 2$.

Таким чином, якщо треба з'ясувати, чи є число x_0 коренем многочлена P і якої кратності, то можна діяти за такою схемою.

1. Обчислити значення $P(x_0)$ та переконатися, що $P(x_0) = 0$ (якщо $P(x_0) \neq 0$, то число x_0 не є коренем многочлена P).

2. Обчисливши похідні P', P'', P''' ..., серед послідовності значень $P'(x_0)$, $P''(x_0)$, $P'''(x_0)$, ... знайти перше ненульове — нехай це $P^{(k)}(x_0)$.

3. Зробити висновок, що число x_0 є коренем многочлена P кратності k.

ПРИКЛАД Знайдіть кратність кореня $x_0 = 1$ многочлена $P(x) = x^{10} - 45x^2 + 80x - 36$.

Розв'язання. Оскільки $P(1) = 1^{10} - 45 \cdot 1^2 + 80 \cdot 1 - 36 = 0$, то число $x_0 = 1$ є коренем многочлена P. Серед послідовності значень $P'(1)$, $P''(1)$, ... знайдемо перше ненульове. Маємо:

$$P'(x) = 10x^9 - 90x + 80, \qquad P'(1) = 10 \cdot 1^9 - 90 \cdot 1 + 80 = 0,$$
$$P''(x) = 90x^8 - 90, \qquad P''(1) = 90 \cdot 1^8 - 90 = 0,$$
$$P'''(x) = 720x^7, \qquad P'''(1) = 720 \cdot 1^7 \neq 0.$$

Тому число $x_0 = 1$ є коренем многочлена P кратності три. ◄

ВПРАВИ

24.1.° Укажіть кратність кожного дійсного кореня многочлена:
1) $P(x) = (x-2)^3$;
2) $P(x) = (x+4)^3(2x-1)^2$;
3) $P(x) = x(x-1)^2(x+2)$;
4) $P(x) = (x+3)^5(x^2+1)^3$.

24.2.° Укажіть кратність кожного дійсного кореня многочлена:
1) $P(x) = (x+1)^5$;
2) $P(x) = (3x+2)^2(x-4)^7$;
3) $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)^2$;
4) $P(x) = (x-7)^2(x^4+2)$.

24.3.° Укажіть кратність кожного дійсного кореня многочлена:
1) $P(x) = (x^2-6x+8)^2$;
2) $P(x) = (x^2+4x-5)(x^2-25)$;
3) $P(x) = (x^3+x^2+x)(x^3-x)^3$;
4) $P(x) = (x^4-1)^2(x^2-1)^3(x-1)^4$.

24.4.° Укажіть кратність кожного дійсного кореня многочлена:
1) $P(x) = (x^2-3x+2)^3$;
2) $P(x) = (x^2-1)(x^2-5x+4)$;
3) $P(x) = (x^3+1)^2(x^2+x)^4$.

24.5.• Знайдіть комплексні корені многочлена P і вкажіть їхню кратність, якщо:
1) $P(z) = (z^4-1)^5$;
2) $P(z) = (z^2-2z+5)^3$;
3) $P(z) = (z^4-5z^2-36)^7(z-3)^2$;
4) $P(z) = (z^3-2z+4)^4$.

24.6.$^{\bullet}$ Знайдіть комплексні корені многочлена P і вкажіть їхню кратність, якщо:

1) $P(z)=(z^2-4z+5)^5$;
2) $P(z)=(z^4-4)(z^2+2)^2$;
3) $P(z)=(z^3-7z^2+16z-10)^2$.

24.7.$^{\bullet}$ Наведіть приклад многочлена з дійсними коефіцієнтами, який має корені:

1) $x_1=2$ кратності три та $x_2=3$ кратності два;
2) $x_1=i$ кратності два;
3) $x_1=-1$ кратності три та $x_2=1-i$ кратності чотири;
4) $x_1=-1+2i$ кратності один та $x_2=1-i$ кратності два.

24.8.$^{\bullet}$ Наведіть приклад многочлена з дійсними коефіцієнтами, який має корені:

1) $x_1=3$ кратності два та $x_2=-2$ кратності три;
2) $x_1=-i$ кратності три;
3) $x_1=2-i$ кратності один та $x_2=1+i$ кратності три.

24.9.$^{\bullet}$ Многочлени P і Q задовольняють умову: якщо $P(x_0)=0$, де $x_0\in\mathbb{C}$, то $Q(x_0)=0$. Чи випливає звідси, що многочлен Q ділиться націло на многочлен P?

24.10.$^{\bullet}$ Многочлен Q ділиться націло на многочлен P і число x_0 є кратним коренем многочлена P. Чи можна стверджувати, що число x_0 є кратним коренем многочлена Q?

24.11.$^{\bullet}$ Укажіть кратність кореня x_0 многочлена P:

1) $P(x)=x^8-8x+7,\ \ x_0=1$;
2) $P(x)=3x^6-8x^4-64,\ \ x_0=-2$;
3) $P(x)=5x^{12}+12x^5+7,\ \ x_0=-1$;
4) $P(x)=x^4-12x^3+54x^2-108x+81,\ \ x_0=3$.

24.12.$^{\bullet}$ Укажіть кратність кореня x_0 многочлена P:

1) $P(x)=x^{25}+25x^3+26,\ \ x_0=-1$;
2) $P(x)=x^4-24x^2+64x-48,\ \ x_0=2$;
3) $P(x)=7x^{12}-22x^7+70x-55,\ \ x_0=1$.

24.13.$^{\bullet}$ При яких дійсних A і B число $x=-1$ є кратним коренем многочлена $P(x)=Ax^{2020}+Bx^{2019}+1$?

24.14.$^{\bullet}$ При яких дійсних A і B число $x=1$ є кратним коренем многочлена $P(x)=x^{2019}+Ax+B$?

24.15.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть кратні корені многочлена $P(x)=x^4-8x^3+64x+64$.

24.16.•• Знайдіть кратні корені многочлена $P(x) = x^4 + 4x^3 - 8x + 4$.

24.17.•• Усі корені многочлена $P(x) = x^3 + ax^2 + 5x + 3b$, де $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, є цілими числами. Доведіть, що многочлен не має кратних коренів.

24.18.•• Усі корені многочлена $P(x) = x^3 + ax^2 + 7x + 8b$, де $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, є цілими числами. Доведіть, що многочлен не має кратних коренів.

24.19.•• Многочлен $P(x) = x^3 + px + q$ має кратні корені. Доведіть, що $27q^2 + 4p^3 = 0$.

24.20.•• Про коефіцієнти многочлена $P(x) = x^3 - 3px + 2q$ відомо, що $p^3 = q^2$. Доведіть, що многочлен P має кратні корені.

24.21.•• Доведіть, що при жодному $n \in \mathbb{N}$ многочлен

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

не має кратних коренів.

24.22.•• Доведіть, що при жодному $n \in \mathbb{N}$ многочлен

$$P(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} - \ldots - x + 1$$

не має кратних коренів.

24.23.•• Многочлен P такий, що число x_0 є коренем многочлена P' кратності k. Чи можна стверджувати, що x_0 є коренем многочлена P кратності $k + 1$?

24.24.•• Многочлен P степеня n має n різних дійсних коренів. Чи може многочлен P' мати кратні корені?

24.25.•• Усі комплексні корені многочлена $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ — прості. Чи може многочлен $na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1$ мати кратні корені?

24.26.•• Многочлен P з дійсними коефіцієнтами має екстремум у точці x_0. Доведіть, що многочлен $Q(x) = P(x) - P(x_0)$ має кратний корінь.

24.27.•• Про многочлен P з дійсними коефіцієнтами та число x_0 відомо, що $P'(x_0) = P''(x_0) = \ldots = P^{(2011)}(x_0) = 0$, а $P^{(2012)}(x_0) \neq 0$. Доведіть, що функція $y = P(x)$ має в точці x_0 екстремум.

24.28.•• Про многочлен P з дійсними коефіцієнтами та число x_0 відомо, що $P'(x_0) = P''(x_0) = \ldots = P^{(2010)}(x_0) = 0$, а $P^{(2011)}(x_0) \neq 0$. Доведіть, що функція $y = P(x)$ не має в точці x_0 екстремуму.

24.29.•• Доведіть, що коли комплексне число z_0 є кратним коренем многочлена P з дійсними коефіцієнтами кратності k, то комплексне число $\bar{z}_0$ також є кратним коренем, до того ж тієї самої кратності k.

24.30.•• Нехай P — такий многочлен з дійсними коефіцієнтами, що розв'язком нерівності $P(x) \geqslant 0$ є одноелементна множина. Доведіть, що P має кратний корінь.

24.31.•• Многочлен степеня $n \in \mathbb{N}$ з дійсними коефіцієнтами має k дійсних коренів, кожний з яких є простим коренем. Доведіть, що числа n і k однакової парності.

24.32.* Многочлен P з дійсними коефіцієнтами такий, що рівняння $P(x) = 3$ має три дійсних корені, а рівняння $P(x) = 4$ має чотири дійсних корені. Доведіть, що серед цих семи коренів є корінь многочлена P'.

24.33.* Многочлен $P(x)$ з дійсними коефіцієнтами набуває невід'ємних значень при всіх дійсних значеннях x. Доведіть, що його можна подати у вигляді суми квадратів кількох многочленів з дійсними коефіцієнтами.

24.34.* Многочлен P степеня n має n різних дійсних коренів. Яку найбільшу кількість нульових коефіцієнтів він може мати?

25. Кубічні рівняння

У 8 та 9 класах ви детально ознайомилися з властивостями квадратичної функції, отримали формули для розв'язування квадратних рівнянь, ознайомилися з теоремою Вієта, яка встановлює зв'язок коренів квадратного рівняння з його коефіцієнтами.

У цьому пункті вивчимо деякі властивості кубічних рівнянь.

Означення. **Рівняння виду $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, де x — змінна, a, b, c, d — параметри, причому $a \neq 0$, називають *кубічним*.**

Кубічні рівняння не є для вас новими. Так, у 8 класі ви дізналися, як шукати раціональні корені многочленів із цілими коефіцієнтами. Тому ви можете розв'язати, наприклад, кубічне рівняння $x^3 - 2x + 1 = 0$.

Тепер ознайомимося із загальним методом (його називають **методом Кардано**) розв'язування кубічних рівнянь на такому прикладі.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть у комплексних числах кубічне рівняння

$$x^3+3x^2-3x-11=0. \qquad (1)$$

Розв'язання. Якщо доповнити два перших доданки x^3+3x^2 лівої частини рівняння до формули куба суми $x^3+3x^2+3x+1=$ $=(x+1)^3$, то рівняння (1) можна переписати у вигляді

$$(x+1)^3-6x-12=0.$$

Зробивши заміну $t=x+1$, отримаємо:

$$t^3-6(t-1)-12=0;$$

$$t^3-6t-6=0. \qquad (2)$$

Отже, виділення в рівнянні (1) повного куба $(x+1)^3$ дало змогу перейти до рівняння (2) з нульовим коефіцієнтом при t^2.

Для розв'язання рівняння (2) подамо змінну t у вигляді суми $t=u+v$, де значення змінних u і v виберемо пізніше. Маємо:

$$(u+v)^3-6(u+v)-6=0;$$

$$u^3+v^3+3uv(u+v)-6(u+v)-6=0;$$

$$u^3+v^3+(u+v)(3uv-6)-6=0. \qquad (3)$$

Підберемо значення змінних u і v так, щоб $3uv-6=0$, тобто $uv=2$.

Тоді рівняння (3) набуває вигляду $u^3+v^3=6$. Отже, щоб знайти змінні u і v, розв'яжемо систему

$$\begin{cases} u^3+v^3=6, \\ uv=2. \end{cases} \qquad (4)$$

Підставляючи $v=\dfrac{2}{u}$ в перше рівняння системи, знаходимо:

$$u^3+\frac{8}{u^3}=6;$$

$$u^6-6u^3+8=0.$$

Звідси $u^3=4$ або $u^3=2$.

Якщо $u^3=4$, то з першого рівняння системи (4) отримуємо: $v^3=2$, а якщо $u^3=2$, то отримуємо: $v^3=4$. Оскільки значення $t=u+v$ не змінюється, якщо поміняти місцями доданки u і v, то можна розглядати лише випадок $\begin{cases} u^3=4, \\ v^3=2, \\ uv=2. \end{cases}$ Оскільки рівняння $v^3=2$

випливає з двох інших рівнянь останньої системи, то достатньо розв'язати систему $\begin{cases} u^3 = 4, \\ uv = 2. \end{cases}$

Використовуючи формули для кореня n-го степеня з комплексного числа, розв'яжемо рівняння $u^3 = 4$. Маємо:

$$u_1 = \sqrt[3]{4},$$

$$u_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$u_3 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Звідси за формулою $v = \frac{2}{u}$ отримуємо:

$$v_1 = \sqrt[3]{2},$$

$$v_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right),$$

$$v_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-4\pi}{3} + i\sin\frac{-4\pi}{3}\right).$$

Таким чином, знаходимо три розв'язки рівняння (2):

$$t_1 = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2},$$

$$t_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) + \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\sin\frac{-2\pi}{3}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2} + i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{2}\right),$$

$$t_3 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) + \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-4\pi}{3} + i\sin\frac{-4\pi}{3}\right) =$$

$$= -\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2} - i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{2}\right).$$

Повертаючись до змінної x, можна записати всі три розв'язки рівняння (1).

Відповідь: $x_1 = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 1,\ \ x_2 = -\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}{2} + i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{2}\right),$

$$x_3 = -\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 2}{2} - i\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{2}\right).$$ ◄

Зазначимо, що метод Кардано може бути застосований до будь-якого кубічного рівняння $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, де $a \neq 0$.

Наведений приклад переконливо показує, що використання методу Кардано вимагає неабияких зусиль та уважності. Водночас, якщо в задачі потрібно знайти не самі корені x_1, x_2, x_3 кубічного рівняння, а значення деяких виразів, які містять корені, наприклад $x_1 + x_2 + x_3$ або $x_1x_2x_3$, то можна обійтися простішими розрахунками. У цьому допомагає теорема Вієта.

Теорема 25.1 (теорема Вієта). ***Комплексні числа x_1, x_2, x_3 є коренями многочлена з комплексними коефіцієнтами***

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0,$$

тоді й тільки тоді, коли

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}. \end{cases} \qquad (5)$$

Доведення. Якщо числа x_1, x_2, x_3 є коренями многочлена P, то многочлен P можна подати у вигляді добутку

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

У правій частині останньої рівності розкриємо дужки. Маємо:

$$P(x) = ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - ax_1x_2x_3.$$

Оскільки многочлени

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad (6)$$

і

$$ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - ax_1x_2x_3 \qquad (7)$$

набувають однакових значень при всіх значеннях x, то їхні коефіцієнти при однакових степенях змінної x збігаються, тому

$$\begin{cases} -a(x_1 + x_2 + x_3) = b, \\ a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = c, \\ -ax_1x_2x_3 = d. \end{cases}$$

Звідси випливають рівності системи (5).

Навпаки, якщо виконуються рівності системи (5), то у многочленів (6) і (7) рівними є відповідні коефіцієнти, тому ці многочлени рівні при всіх значеннях x. Оскільки многочлен (7) можна переписати у вигляді $a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, то маємо, що

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Це означає, що числа x_1, x_2, x_3 є коренями многочлена P. ◄

ПРИКЛАД 2 Знайдіть суму та добуток усіх комплексних коренів кубічного рівняння

$$x^3+3x^2-3x-11=0.$$

Розв'язання. У розв'язанні прикладу 1 знайдено всі корені x_1, x_2, x_3 даного рівняння. Проте навіть якщо відомо точні значення цих коренів, обчислення їхніх суми та добутку вимагає певної технічної роботи (спробуйте провести ці розрахунки).

Водночас, використовуючи теорему Вієта, одразу маємо, що

$$x_1+x_2+x_3=-3,$$
$$x_1x_2x_3=11. ◄$$

ПРИКЛАД 3 Скільки дійсних коренів має рівняння $x^3-2x^2-x+1=0$? Знайдіть суму квадратів цих коренів.

Розв'язання. З'ясуємо, скільки дійсних коренів має многочлен $P(x)=x^3-2x^2-x+1$. Маємо:

$$P(-1)=-1<0,\ P(0)=1>0,\ P(1)=-1<0,\ P(3)=7>0.$$

Оскільки на кінцях кожного з відрізків [−1; 0], [0; 1], [1; 3] многочлен P набуває значень різних знаків, то на кожному з інтервалів (−1; 0), (0; 1), (1; 3) многочлен P має дійсний корінь. Звідси випливає, що многочлен P має три дійсних корені: x_1, x_2, x_3.

Знайдемо суму $x_1^2+x_2^2+x_3^2$. За теоремою Вієта для многочлена P маємо:

$$x_1+x_2+x_3=2,$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1.$$

Тоді

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=2^2-2(-1)=6. ◄$$

ПРИКЛАД 4 Три комплексних числа x_1, x_2, x_3 є коренями рівняння $x^3-x^2+2x+1=0$. Складіть кубічне рівняння з коренями x_1x_2, x_1x_3 та x_2x_3.

Розв'язання. За теоремою Вієта комплексні корені x_1, x_2, x_3 даного рівняння задовольняють рівності

$$x_1+x_2+x_3=1,$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2,$$
$$x_1x_2x_3=-1.$$

Тоді для чисел $t_1=x_1x_2$, $t_2=x_1x_3$ та $t_3=x_2x_3$ виконуються рівності

$$t_1+t_2+t_3=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2,$$

$$t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = x_1^2x_2x_3 + x_2^2x_1x_3 + x_3^2x_1x_2 = x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = -1,$$
$$t_1t_2t_3 = x_1^2x_2^2x_3^2 = 1.$$

Тому за теоремою Вієта числа t_1, t_2 і t_3 є коренями рівняння $x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0$. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть у дійсних числах систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 11, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 27. \end{cases}$$

Розв'язання. Розглянемо многочлен $P(t) = t^3 + pt^2 + qt + r$ з коренями x, y, z.

За теоремою Вієта $p = -(x + y + z) = -3$.

Оскільки $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$, то $9 = 11 + 2(xy + xz + yz)$. Звідси
$$q = xy + xz + yz = -1.$$

Тому многочлен P можна записати так:
$$P(t) = t^3 - 3t^2 - t + r.$$

Знайдемо коефіцієнт r. Оскільки числа x, y, z є коренями многочлена P, то
$$x^3 - 3x^2 - x + r = 0, \quad y^3 - 3y^2 - y + r = 0, \quad z^3 - 3z^2 - z + r = 0.$$

Додавши три останні рівності, отримаємо:
$$(x^3 + y^3 + z^3) - 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z) + 3r = 0.$$

Звідси, використовуючи умову задачі, маємо:
$$27 - 3 \cdot 11 - 3 + 3r = 0; \quad r = 3.$$

Таким чином,
$$P(t) = t^3 - 3t^2 - t + 3.$$

Розкладаючи многочлен P на множники, отримуємо, що
$$P(t) = t^2(t - 3) - (t - 3) = (t - 3)(t^2 - 1) = (t - 3)(t - 1)(t + 1).$$

Отже, коренями многочлена є числа 3, 1 і −1.

Відповідь: (3; 1; −1), (1; 3; −1), (1; −1; 3), (3; −1; 1), (−1; 1; 3), (−1; 3; 1). ◄

ВПРАВИ

25.1.° Комплексні числа x_1, x_2, x_3 є коренями рівняння $2x^3 - 4x^2 + x - 6 = 0$. Знайдіть значення виразів $x_1 + x_2 + x_3$ та $x_1x_2x_3$.

25.2.° Комплексні числа x_1, x_2, x_3 є коренями рівняння $-x^3 + 2x^2 - 7x - 1 = 0$. Знайдіть значення виразів $x_1 + x_2 + x_3$ та $x_1x_2x_3$.

25.3.° Нехай x_1, x_2, x_3 — комплексні корені рівняння $3x^3 - px + q = 0$. Знайдіть значення виразу $x_1 + x_2$, якщо $x_3 = -2$.

25.4.° Нехай x_1, x_2, x_3 — комплексні корені рівняння $6x^3 + px^2 - qx + 18 = 0$. Знайдіть значення виразу x_1x_2, якщо $x_3 = 3$.

25.5.• Рівняння $x^3 + px^2 + x = 0$ має комплексні корені x_1, x_2 та $x_3 = 0$. Знайдіть x_1x_2.

25.6.• Число 2 є кратним коренем рівняння $x^3 + px^2 - 20x + q = 0$. Знайдіть комплексні корені цього рівняння.

25.7.• Комплексні числа x_1, x_2, x_3 є коренями рівняння $5x^3 + px^2 + 15x - 40 = 0$. Знайдіть значення виразу $x_1 + x_2$, якщо $x_3 = 25$.

25.8.• Комплексні числа x_1, x_2, x_3 є коренями рівняння $x^3 + 29x^2 - 6x + q = 0$. Знайдіть значення виразу x_1x_2, якщо $x_3 = -31$.

25.9.• Дійсні корені рівняння $x^3 + px^2 - qx + 6 = 0$ відносяться як 1 : 2 : 3. Знайдіть коефіцієнти p і q.

25.10.• Рівняння $x^3 - 8x^2 + px + q = 0$ має комплексні корені x_1, x_2, x_3. Відомо, що $x_1 - x_2 = 1$, $x_2 + x_3 = 5$. Знайдіть коефіцієнти p і q.

25.11.• Три дійсних корені рівняння $x^3 - 6x^2 - qx + 10 = 0$ утворюють арифметичну прогресію. Знайдіть значення q.

25.12.• Три дійсних корені рівняння $x^3 + px^2 + 39x - 27 = 0$ утворюють геометричну прогресію. Знайдіть значення p.

25.13.• Відомо, що рівняння $2x^3 - 4x^2 - 3x + 1 = 0$ має дійсні корені x_1, x_2, x_3. Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$;

2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$;

3) $\frac{x_2 + x_3}{x_1} + \frac{x_1 + x_3}{x_2} + \frac{x_1 + x_2}{x_3}$;

4) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

25.14.• Відомо, що рівняння $x^3 + 2x^2 - 5x + 1 = 0$ має дійсні корені x_1, x_2, x_3. Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_1x_3}$;

2) $x_1(x_2 - x_1) + x_2(x_3 - x_2) + x_3(x_1 - x_3)$;

3) $x_1^2(x_2 + x_3) + x_2^2(x_1 + x_3) + x_3^2(x_1 + x_2)$.

25.15.• Нехай x_1, x_2, x_3 — комплексні корені рівняння $x^3 + px + q = 0$. Доведіть рівності

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2 = x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2.$$

25.16.• Нехай x_1, x_2, x_3 — комплексні корені рівняння $x^3 + px^2 + q = 0$. Доведіть рівності

$$x_1^2(x_2 + x_3) = x_2^2(x_1 + x_3) = x_3^2(x_1 + x_2).$$

25.17.• Числа x_1, x_2, x_3 є коренями многочлена $P(x) = x^3 + px + q$. Доведіть, що числа $t_1 = x_2 + x_3$, $t_2 = x_1 + x_3$ і $t_3 = x_1 + x_2$ є коренями многочлена $Q(x) = x^3 + px - q$.

25.18.• Числа x_1, x_2, x_3 є коренями многочлена $P(x) = x^3 + px + q$. Доведіть, що числа $t_1 = x_2x_3$, $t_2 = x_1x_3$ і $t_3 = x_1x_2$ є коренями многочлена $Q(x) = x^3 - px^2 - q^2$.

25.19.• Коренями многочлена $x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$ є комплексні числа x_1, x_2, x_3. Складіть кубічне рівняння з коренями $3x_1$, $3x_2$ та $3x_3$.

25.20.• Коренями многочлена $x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$ є комплексні числа x_1, x_2, x_3. Складіть кубічне рівняння з коренями x_1^2, x_2^2 та x_3^2.

25.21.• Коренями многочлена $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$ є комплексні числа x_1, x_2, x_3. Складіть кубічне рівняння з коренями $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$ та $x_2 + x_3$.

25.22.• Розв'яжіть рівняння:

1) $z^3 + 6z + 2 = 0;$
2) $z^3 + 6z^2 + 9z + 1 = 0.$

25.23.• Розв'яжіть рівняння:

1) $z^3 + 18z + 15 = 0;$
2) $z^3 - 9z^2 + 24z - 17 = 0.$

25.24.•• Розв'яжіть систему рівнянь у дійсних числах:

1) $\begin{cases} xyz = -6, \\ xy + xz + yz = 1, \\ \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{xz} = -\dfrac{2}{3}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14, \\ xyz = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y + z = -1, \\ x^3 + y^3 + z^3 = -25, \\ xy + xz + yz = -5. \end{cases}$

25.25.•• Розв'яжіть систему рівнянь у дійсних числах:

1) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ xy+xz+yz=-1, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy+xz+yz=x+y+z-13, \\ x^2+y^2+z^2=29, \\ xyz=-24; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ x^3+y^3+z^3=8. \end{cases}$

25.26.•• Дано два трикутники — один зі сторонами a_1, a_2, a_3, а другий зі сторонами b_1, b_2, b_3. Доведіть, що ці трикутники рівні тоді й тільки тоді, коли

$$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3, \\ a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3, \\ a_1a_2a_3=b_1b_2b_3. \end{cases}$$

25.27.•• Про дійсні числа x, y, z відомо, що $x+y+z$, $xy+xz+yz$ та xyz — раціональні числа. Чи можна гарантувати, що серед чисел x, y, z є раціональні?

25.28.•• Дано числа a, b, c, серед яких немає рівних. Знайдіть значення змінних x, y, z, якщо

$$\begin{cases} x+ya+za^2=-a^3, \\ x+yb+zb^2=-b^3, \\ x+yc+zc^2=-c^3. \end{cases}$$

25.29.•• Про числа x, y, z відомо, що

$$(x+y+z)-3(xy+xz+yz)+9xyz=\frac{1}{3}.$$

Доведіть, що принаймні одне із цих чисел дорівнює $\frac{1}{3}$.

25.30.•• Чи існують такі дійсні числа a, b, c, що

$$\begin{cases} a+b+c=0, \\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0? \end{cases}$$

25.31.•• Числа x, y, z, a задовольняють систему

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}. \end{cases}$$

Доведіть, що принаймні одне із чисел x, y, z дорівнює a.

25.32.•• Про дійсні числа a, b, c відомо, що

$$a+b+c \geqslant 0,$$
$$ab+ac+bc \geqslant 0,$$
$$abc \geqslant 0.$$

Доведіть, що числа a, b і c невід'ємні.

25.33.•• Про дійсні числа a, b, c відомо, що

$$\begin{cases} abc=1, \\ a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}. \end{cases}$$

Доведіть, що принаймні одне із чисел a, b, c дорівнює 1.

25.34.* Про дійсні числа $a_1 < a_2 < a_3$ та $b_1 < b_2 < b_3$ відомо, що

$$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3,$$
$$a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=b_1b_2+b_1b_3+b_2b_3,$$
$$a_1 < b_1.$$

Доведіть, що $a_2 > b_2$ та $a_3 < b_3$.

25.35.* Про дійсні числа x, y, z відомо, що $x+y+z=5$, $x^2+y^2+z^2=9$. Доведіть, що $4 \leqslant xyz \leqslant \frac{112}{27}$.

25.36.* Цілі числа a, b, c такі, що числа $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ і $\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$ також цілі. Доведіть, що $|a|=|b|=|c|$.

25.37.* Цілі числа a, b, c такі, що кожне із чисел $a+b+c$ і $a^2+b^2+c^2$ ділиться націло на непарне число n. Доведіть, що число $a^5+b^5+c^5$ також ділиться націло на число n.

25.38.* Сума невід'ємних чисел a, b, c дорівнює одиниці. Доведіть, що

$$ab+bc+ca-2abc \leqslant \frac{7}{27}.$$

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 5

Основна теорема алгебри

Кожний многочлен $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ степеня $n \in \mathbb{N}$ з комплексними коефіцієнтами має комплексний корінь.

Кожний многочлен $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ степеня $n \in \mathbb{N}$ з комплексними коефіцієнтами можна єдиним способом подати у вигляді добутку лінійних множників $P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$. Числа $z_1, z_2, \ldots, z_n$, серед яких можуть бути рівні, є коренями многочлена P. Кожний корінь многочлена P дорівнює одному із цих чисел.

Кратні корені

Число x_0 називають кратним коренем многочлена P, якщо многочлен P можна подати у вигляді $P(x) = (x - x_0)^k Q(x)$, де $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$, Q — многочлен і $Q(x_0) \neq 0$. Число k називають кратністю кореня x_0.

Кожний многочлен степеня $n \in \mathbb{N}$ має рівно n коренів з урахуванням їхньої кратності.

Якщо кратний корінь x_0 многочлена P має кратність k, де $k > 1$ і $k \in \mathbb{N}$, то число x_0 є коренем многочлена P' кратності $k - 1$.

Якщо число x_0 є простим коренем многочлена P, то число x_0 не є коренем многочлена P'.

Кубічні рівняння

Рівняння виду $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, де x — змінна, a, b, c, d — параметри, причому $a \neq 0$, називають кубічним.

Теорема Вієта для кубічного рівняння

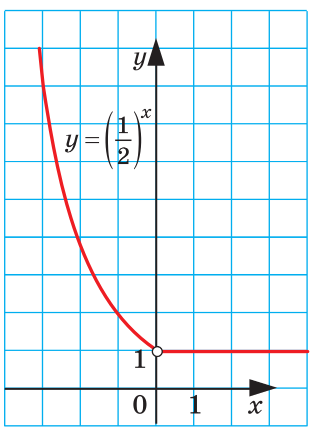
Комплексні числа x_1, x_2, x_3 є коренями многочлена з комплексними коефіцієнтами $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, тоді й тільки тоді, коли
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}. \end{cases}$$

Відповіді та вказівки до вправ

§ 1. Показникова та логарифмічна функції

1. Степінь з довільним дійсним показником. Показникова функція

1.10. 1) $-6a^{\sqrt{5}}-13$; 2) $\frac{1}{a^{2\sqrt{7}}}$; 3) $\frac{2a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}}$; 4) $2a^{\sqrt[3]{3}}-a^{2\sqrt[3]{3}}$. **1.11.** 1) $a^{\sqrt{6}}+1$; 2) $4^{\frac{1}{\pi}}ab$. **1.12.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні. **1.13.** 3) $(-4; +\infty)$; 4) $[1; +\infty)$. **1.14.** 36. **1.15.** $[-2; 4]$. **1.17.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$. **1.18.** $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$. **1.20.** $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{-5,2}>\left(7-4\sqrt{3}\right)^{5,6}$. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що числа $7+4\sqrt{3}$ і $7-4\sqrt{3}$ є взаємно оберненими. **1.21.** 1) Коренів немає; 2) 3 корені; 3) безліч коренів; 4) 2 корені. **1.22.** 1) 1 корінь; 2) безліч коренів; 3) 2 корені. **1.23.** 7) Див. рисунок.



До задачі 1.23 (7)

1.25. *Вказівка*. Знайдіть область визначення даної функції. **1.27.** 1) 4; $\frac{1}{4}$; 2) 1; −1. **1.28.** 1) 6; $\frac{1}{6}$; 2) 6; $5\frac{1}{5}$. **1.29.** 1) $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}\right\}$; 2) $[-1; 1]$; 3) $[-1; 1]$. **1.30.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[-1; 1]$; 3) $\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq\pi k, k\in\mathbb{Z}\}$. **1.33.** 1) 0. *Вказівка*. Візьміть до уваги, що $2^{\cos x}\leqslant 2$, $x^2+2\geqslant 2$; 2) 0.

1.34. 1) 0; 2) 0. **1.35.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $\{0\}$; 3) $[0;\ +\infty)$. **1.36.** $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; 2) $\{0\}$. **1.37.** 1) Непарна; 2) парна. **1.38.** 1) Непарна; 2) непарна. **1.39.** 1) Неперервна на множині $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$; 2) неперервна на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **1.40.** 1) Неперервна на множині $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$; 2) неперервна на кожному з проміжків $(\pi k;\ \pi+\pi k)$, $k\in\mathbb{Z}$. **1.41.** $\left(-\infty;\ \frac{1}{4}\right)\cup(1;\ +\infty)$. *Вказівка.* З'ясуйте, при яких значеннях параметра a рівняння $\frac{t-1}{t-4}=a$ має хоча б один додатний корінь. **1.42.** $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$. **1.43.** $a=1$. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що для будь-якого $x\in\mathbb{R}$ має виконуватися рівність $f(x+a)=f(-x+a)$. **1.44.** $a=1{,}5$. **1.45.** $|a|>\frac{7\sqrt{3}}{12}$. **1.46.** $a<-\frac{\sqrt{129}+15}{2}$ або $a>\frac{\sqrt{129}-15}{2}$. **1.47.** $x=y=z=1$. *Вказівка.* Спочатку розгляньте випадок $x>1$. Тоді, скориставшись відповідно першим і третім рівняннями системи, доведіть, що $z>1$ і $y>1$. Далі скористайтеся таким «ланцюжком»: $z=x^y>x^1=y^z>y^1=z^x>z^1$. Випадок $0<x<1$ можна розглянути аналогічно. **1.48.** $x=y=z=1$. **1.49.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0}}{\Delta x}=a^{x_0}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-a^0}{\Delta x}=$ $=a^{x_0}f'(0)$. **1.50.** Так. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, рівність $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=\sqrt{2}^2=2$. Якщо $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — число раціональне, то $a=b=\sqrt{2}$. Якщо $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — число ірраціональне, то $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b=\sqrt{2}$. **1.51.** 1) 1. *Вказівка.* Підставте $x=y=0$, тоді отримаємо: $f(0)=0$ або $f(0)=1$. Випадок $f(0)=0$ неможливий. Справді, якщо в рівність $f(x+y)=$ $=f(x)\,f(y)$ підставити $y=0$ і $x=1$, то отримаємо таке: $f(1)=f(1)\,f(0)=$ $=0$; 2) $\frac{1}{3}$. *Вказівка.* Підставте $x=-y=1$; 3) 9. *Вказівка.* Підставте $x=y=1$; 4) 3^{20}. *Вказівка.* Послідовно підставляючи $x=y$, $x=2y$, $x=3y$, ..., доведіть, що $f(nx)=f^n(x)$; 5) $\sqrt[4]{3}$. *Вказівка.* Підставляючи $x=y=\frac{t}{2}$, отримайте, що $f(t)=f^2\left(\frac{t}{2}\right)\geqslant 0$ для всіх $t\in\mathbb{R}$. Далі скористайтеся рівністю $f(x) = f^n\left(\frac{x}{n}\right)$ при $n = 4$. **1.52.** *Вказівка.* Скориставшись рівностями $f(nx) = f^n(x)$ і $f\left(\frac{x}{m}\right) = (f(x))^{\frac{1}{m}}$, де $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, доведіть, що $f(rx) = (f(x))^r$, де $r \in \mathbb{Q}$. При $x = 1$ остання рівність набуває вигляду $f(r) = 3^r$ для всіх $r \in \mathbb{Q}$. Далі скористайтеся означенням степеня 3^x для $x \in \mathbb{R}$ і неперервністю функції f.

2. Показникові рівняння

2.3. 1) 1; 2) 3; 3) 3; 4) 1; 5) 3; 6) 2. **2.4.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 3. **2.5.** 1) 1; 2; 2) 2; 3) 1; 4) 2. **2.6.** 1) 1; 2) −1; 2. **2.7.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 2; 5) −2; 6) $\frac{1}{10}$. **2.8.** 1) $-\frac{5}{2}$; $\frac{1}{4}$; 2) $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) 6,5. **2.9.** 1) 5; 2) 2; 3) 1; 4) 3; 5) $\frac{4}{3}$; 6) 3; 7) 2; 8) 0; $\frac{1}{2}$. **2.10.** 1) 1; 2) 2; 3) 2; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 4; 6) 0; $\frac{1}{3}$. **2.11.** 1) −1; 1; 2) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) 1; 5) −1; 2; 6) 1. **2.12.** 1) −1; 1; 2) 1; 2; 3) 1; 4) −1; 5) 0; 6) 2. **2.13.** 1) 2; 2) −1; 1; 3) 2. **2.14.** 1) 2; 2) 3; 3) 4. **2.15.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) 3; −3; 3) 3; 4) 6; 5) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; 7) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **2.16.** 1) 1; 2) 3; 3) πk, $k \in \mathbb{Z}$. **2.17.** 1) 0; 1; 2) 0; −1; 3) −1; 4) 0. **2.18.** 1) 0; 1; 2) 0; 2. **2.19.** 2. **2.20.** 0. **2.21.** −2; 2. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що числа $2+\sqrt{3}$ і $2-\sqrt{3}$ є взаємно оберненими. **2.22.** −2; 2. **2.23.** 1) −1; 0; 1. *Вказівка.* Зробіть заміну $2^x + \frac{1}{2^x} = t$. Тоді $4^x + \frac{1}{4^x} = \left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot \frac{1}{2^x} = t^2 - 2$; 2) −1; 0; 1. **2.24.** $(-\infty; 2] \cup \{5\}$. **2.25.** $[-2; 3]$. **2.26.** $(1; 3) \cup (3; +\infty)$. **2.27.** 1) 1; 2) 2; 3) 1; 4) 3. **2.28.** 1) 2; 2) 3; 3) 5; 4) 1. **2.29.** $(-\infty; 0] \cup \{1\}$. **2.30.** $(-\infty; 0) \cup \cup \{1, \sqrt{3}\}$. **2.31.** 1; 3. **2.32.** 1; 2. **2.33.** $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* Якщо $\operatorname{tg} x \leqslant 0$, то рівняння не має розв'язків. Якщо $\operatorname{tg} x > 0$, то

$4^{\operatorname{tg} x} + 4^{\operatorname{ctg} x} \geqslant 2\sqrt{4^{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}} \geqslant 2\sqrt{4^2}$. **2.34.** $\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **2.35.** $a = -1$. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що коли рівняння має корінь x_0, то воно має корінь $-x_0$. **2.36.** $a = 1$. **2.37.** $a = -1$. **2.38.** $a = -2$. **2.39.** $[0; 9] \cup \{-9\}$. *Вказівка*. Нескладно встановити, що $x = 0$ — єдиний корінь першого рівняння. Підставимо його до другого рівняння. Маємо: $|a - 9| \cdot 3^{-2} + a \cdot 9^{-1} = 1$; $|a - 9| = 9 - a$. Звідси шукані значення параметра потрібно шукати серед розв'язків нерівності $a \leqslant 9$. **2.40.** $[0; 4] \cup \{-4\}$. **2.41.** $\left(-\infty; \frac{3}{7}\right) \cup [4; +\infty)$. *Вказівка*. Знайдіть усі значення параметра p, при яких рівняння $(p - 4)\, y^2 + (p + 1)\, y + 2p - 1 = 0$ не має додатних коренів. **2.42.** $a < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Показникові нерівності

3.4. 1) 5; 2) 3; 3) 4. **3.5.** 1) -5; 2) 7. **3.6.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $(1; +\infty)$. **3.7.** 1) $(-\infty; -2]$; 2) $(-\infty; 4]$. **3.8.** 1) $(-\infty; 1) \cup (5; +\infty)$; 2) $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$; 3) $(-5; -3) \cup (3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0)$; 5) $(0; 4]$; 6) $[-1; 2]$. **3.9.** 1) $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2] \cup \left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -2) \cup (1; 2)$; 4) $(-1; +\infty)$. **3.10.** 1) $(-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2)$; 3) $(5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1]$; 5) $(-\infty; 0]$; 6) $(-\infty; 1)$. **3.11.** 1) $(-\infty; 2)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $(3; +\infty)$; 4) $(1; +\infty)$. **3.12.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1)$; 3) $[0; 1]$; 4) $(-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$; 5) $(-\infty; 1]$; 6) $[1; +\infty)$. **3.13.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $[6; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$; 4) $[0; 2]$. **3.14.** 1) $(-\infty; 2) \cup (2; 3]$; 2) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. **3.15.** 1) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup \left(-\frac{2}{3}; 2\right]$; 2) $[-2; 5)$. **3.16.** 1) $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$; 2) $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$. **3.17.** 1) $(0; 1)$; 2) $\left(-\infty; \frac{7}{4}\right]$. **3.18.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-3; 1)$; 3) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$; 4) $\{0\}$. **3.19.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. **3.20.** $[0; 1]$. **3.21.** $[0; 4]$. **3.22.** 1) $(0; 1)$; 2) $(-\infty; -1] \cup (0; +\infty)$. **3.23.** 1) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; 1]$. **3.24.** $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. **3.25.** $(-3; 3)$. **3.26.** 1) $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$; 2) $(0; 2)$. **3.27.** $(-\infty; -3) \cup (0; 3)$. **3.28.** $[0; 2]$.

3.29. [0; 1]. **3.30.** 1) (1; +∞); 2) (2; +∞). **3.31.** (−∞; 3). **3.32.** $[3;+\infty)\cup\{-2\}$. **3.33.** $(-\infty;-2]\cup\{4\}$. **3.34.** Якщо $a \geqslant 1$, то $x = 1$; якщо $a < 1$, то $x \in [a; 1]$. **3.35.** Якщо $a < 1$, то $x \in (-\infty; a]\cup\{1\}$; якщо $a \geqslant 1$, то $x \in (-\infty; 1]$. **3.36.** $a < \frac{19}{3}$. **3.37.** $m > -1{,}5$.

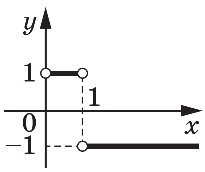
4. Логарифм і його властивості

4.19. 4) 144; 5) 64; 6) 1; 7) 0; 8) 48. **4.20.** 4) 9; 5) 10; 7) 2. **4.21.** 1) −3; 2) −1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $-\frac{1}{4}$; 8) $-\frac{1}{2}$. **4.22.** 1) 1; 2) −1; 3) 0; 4) −1. **4.23.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) −3. **4.24.** 1) −5; 2) −2. **4.25.** 1) 2; 2) 4. **4.26.** 1) 6; 2) 9. **4.28.** 30. **4.29.** 21. **4.30.** $\log_a b$. **4.31.** $\log_b a$. **4.39.** *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, числа $a = \sqrt{3}$, $b = \log_3 4$. **4.40.** *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, числа $a = 3$, $b = \log_3 4$. **4.41.** 1. **4.42.** 1) $-1 < x < 1$; 2) $x \neq 1$; 3) $x < 2$; 4) $x \neq 2$. **4.43.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **4.44.** lg 2. *Вказівка.* У кожному з логарифмів перейдіть до основи 10. **4.45.** $\frac{5}{2}$. **4.50.** *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $b^x = a^{x\log_a b}$. **4.51.** $\frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_a x + \log_b x}$. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\log_x ab = \log_x a + \log_x b = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x}$. **4.52.** *Вказівка.* У виразі $\log_{ab} x$ перейдіть до логарифма з основою a. **4.53.** −3. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\log_{ab} b + \log_{ab} a = 1$. **4.54.** $\frac{2a+b+1}{2b+1}$. **4.55.** 1) $\frac{2(2a-1)}{3(2-a)}$; 2) $\frac{a+b}{1-a}$. **4.56.** 1) $\frac{3-3a}{b+1}$.

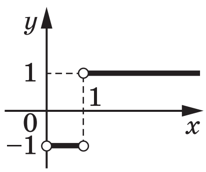
5. Логарифмічна функція та її властивості

5.12. 1) 2; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$. **5.13.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 3. **5.14.** 1) 1 корінь; 2) 1 корінь; 3) 1 корінь. **5.15.** 1) 1 корінь; 2) 1 корінь. **5.16.** 1) $2 < \log_3 10 < 3$; 2) $2 < \log_2 5 < 3$; 3) $-2 < \log_{\frac{1}{3}} 7 < -1$; 4) $-1 < \log_{0,1} 2 < 0$. **5.17.** 1) $4 < \log_2 29 < 5$; 2) $-4 < \log_{\frac{1}{2}} 9 < -3$. **5.18.** 1) $\log_4 5 > \log_5 4$; 2) $\log_{0,2} 0{,}1 >$

$> \log_{0,1} 0{,}2$. **5.20.** $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що числа $\log_2 3$ і $\log_3 2$ є додатними та взаємно оберненими. **5.22.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) усі дійсні числа, крім чисел виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\{0\}$; 4) усі числа виду $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $(3; 4) \cup (4; 6]$; 6) $(-2; -1) \cup (-1; 3)$; 7) $[-1; 0) \cup (0; 3]$; 8) $(-\infty; 1) \cup (3; 6) \cup (6; 7)$; 9) $(0; 2) \cup \cup (2; 3)$; 10) $(-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (0; +\infty)$; 11) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 12) $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **5.23.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) усі дійсні числа, крім чисел виду $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\mathbb{R}$; 4) усі числа виду $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $(-8; -2) \cup (-2; -1)$; 6) $(0; 7) \cup (7; 8)$; 7) $\left(-2; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; 2\right)$; 8) $(0; 4) \cup (4; 5)$; 9) $(-1; 1) \cup (1; 2)$; 10) $[-5; 0) \cup (0; 2]$. 11) $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **5.24.** 1) $[1; \log_3 5]$; 2) $[0; +\infty)$. **5.25.** 1) $[1; 3]$; 2) $(-\infty; 1]$. **5.26.** 3) Див. рисунок; 4) див. рисунок. **5.27.** 3) Див. рисунок.



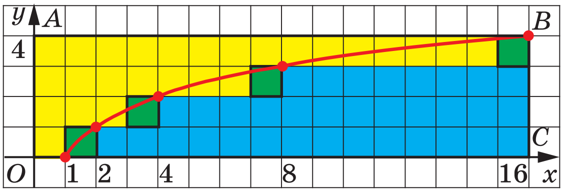
До задачі 5.26 (3)



До задач 5.26 (4) і 5.27 (3)

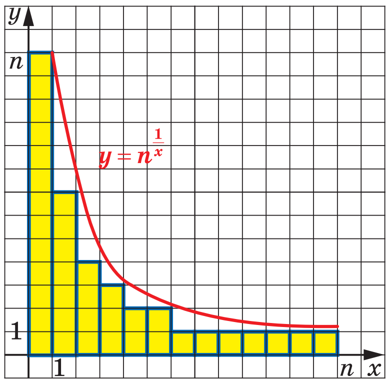
5.28. 1) −2; 2) −1. **5.29.** 1) 3; 2) 1. **5.30.** Непарна. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\sqrt{x^2+1} - x = \left(\sqrt{x^2+1} + x\right)^{-1}$. **5.32.** $(-2; 2)$. **5.33.** $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$. **5.34.** $\lg 2 = 0{,}3\ldots$, тому перша цифра після коми — трійка. *Вказівка.* Доведіть нерівності $\frac{3}{10} < \lg 2 < \frac{1}{3}$. **5.35.** $\log_2 3 < \log_3 7$. *Вказівка.* Доведіть подвійну нерівність $\log_2 3 < \frac{5}{3} < \log_3 7$. **5.36.** 478. *Вказівка.* Якщо натуральне число a містить у своєму десятковому записі m цифр, то $10^{m-1} \leqslant a < 10^m$. **5.37.** 1) 0. *Вказівка.* Підставте $x = y = 1$; 2) −1. *Вказівка.* Підставте $x = \frac{1}{y} = 2$; 3) 2. *Вказівка.*

Підставте $x = y = 2$; 4) 10. *Вказівка.* Послідовно підставляючи $x = y$, $x = y^2$, $x = y^3$, ..., доведіть, що $f(x^n) = nf(x)$; 5) $\frac{1}{3}$. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $f(x) = nf(\sqrt[n]{x})$ при $n = 3$. **5.38.** *Вказівка.* Спочатку доведіть, що $f(2^r) = r$ для всіх $r \in \mathbb{Q}$. Далі, скориставшись означенням степеня 2^x для $x \in \mathbb{R}$ і неперервністю функції f, доведіть, що $f(2^x) = x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, і зробіть заміну $t = 2^x$. **5.39.** $(n-2)2^n + n + 2$. *Вказівка.* Перше розв'язання. Розгляньте графік функції $y = \log_2 x$, $D(y) = [1; 2^n]$ (на рисунку зображено випадок, коли $n = 4$). Нехай $S_с$, $S_з$ та $S_ж$ — відповідно площі синьої, зеленої та жовтої фігур. Тоді $S = S_с + S_з$. Крім цього, $S_ж + S_з = 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 2$. Далі врахуйте, що площа прямокутника $OABC$ дорівнює $S_с + S_ж + S_з$. Друге розв'язання. У сумі S останній доданок дорівнює n. Крім того, у сумі S є: 2^0 доданків, рівних 0 (це $[\log_2 1]$); 2^1 доданків, рівних 1 (це $[\log_2 2]$ і $[\log_2 3]$); 2^2 доданків, рівних 2 (це $[\log_2 4]$, $[\log_2 5]$, $[\log_2 6]$, $[\log_2 7]$), ...; 2^{n-1} доданків, рівних $(n-1)$ (це доданки від $[\log_2 2^{n-1}]$ до $[\log_2(2^n - 1)]$). Це означає, що $S - n = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + \ldots + (n-1) \cdot 2^{n-1} = 2(1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + \ldots + (n-1) \cdot 2^{n-2})$. Для обчислення останньої суми розгляньте похідну функції $f(x) = x + x^2 + \ldots + x^{n-1}$ у точці $x_0 = 2$.

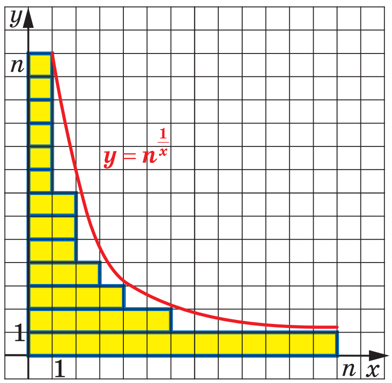


До задачі 5.39

5.40. *Вказівка.* Розгляньте графік функції $y = n^{\frac{1}{x}}$, $D(y) = [1; n]$, і знайдіть обернену функцію. Тоді $n + [\sqrt{n}] + [\sqrt[3]{n}] + \ldots + [\sqrt[n]{n}]$ — площа жовтої фігури, яку пораховано «по вертикалі» (рис. *а*), а $n + [\log_2 n] + [\log_3 n] + [\log_4 n] + \ldots + [\log_n n]$ — площа тієї самої жовтої фігури, яку пораховано «по горизонталі» (рис. *б*).



а



б

До задачі 5.40

6. Логарифмічні рівняння

6.3. 1) 16; 2) 64; 3) 6; 4) 512. **6.4.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) 5; 3) 10^{10}. **6.5.** 1) 0,8; 2) 2; 3) 0; 4) −1. **6.6.** 1) 1; 2) 0; 1. **6.7.** 1) −2; 6; 2) коренів немає; 3) −1; 4) 0. **6.8.** 1) −2; 2) коренів немає; 3) 0; 13; 4) −2. **6.9.** 1) 1; 2) 1; 3) 2. **6.10.** 1) $\log_2 3$; 2) 2. **6.11.** 1) 2; 3; 2) 4; 3) 8; 4) 4; 5) 4; 6) 7. **6.12.** 1) 2; 2) −1; 4; 3) 3; 4) 8. **6.13.** 1) $\log_5 4$; 2) 0. **6.14.** 1) 2; 2) $\log_3\left(3+\sqrt{11}\right)$. **6.15.** 1) 9; $\frac{1}{3}$; 2) 10; 1000; 3) 25; $\sqrt{5}$; 4) $\frac{1}{6}$. **6.16.** 1) −8; $-\frac{1}{2}$; 2) 343; $\frac{1}{49}$; 3) 27; $\sqrt[3]{3}$; 4) $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **6.17.** 1) 7; 2) коренів немає; 3) 3; 4; 4) 1; 5) 4. **6.18.** 1) Коренів немає; 2) 5; 3) 4; 4) 3; 5) 3. **6.19.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) −5; −2; $\frac{\sqrt{89}-7}{2}$. **6.20.** 1) −6; −4; 2; 2) −1; 2; 3. **6.21.** 1) $\frac{1}{3}$; $3^{\frac{5}{9}}$; 2) 0,1; $\sqrt{10}$; 3) 4; 4) 8; $\frac{1}{8}$; 5) 100; 10^{-8}; 6) 5; $\frac{1}{625}$; 7) 10; 8) 10 000. **6.22.** 1) $\sqrt[3]{10}$; $\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$; 2) 3; 9; 3) 1; 49; 4) 100; $\frac{1}{100}$; 5) 6; 6^{-7}; 6) 32. **6.23.** 1) $\frac{1}{5}$; 5; 2) 0,001; 10; 3) 3; 9; 4) 216; $\frac{1}{6}$. **6.24.** 1) $\frac{1}{9}$; 9; 2) $\frac{1}{10}$; 100; 3) 16; $\frac{1}{4}$; 4) 1 000 000; 0,001. **6.25.** 1) 2;

2) $\frac{1}{4}$; 4; 3) $2^{\sqrt{2}}$; $2^{-\sqrt{2}}$; 4) 1; 9; 5) 1; 16; 6) $\frac{1}{2}$. **6.26.** 1) $\frac{1}{9}$; 3; 2) $\sqrt{3}$; 3; 3) 7; 4) 3. **6.27.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{625}$; 5; 3) $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}$. **6.28.** 1) (1; 3); 2) (9; 3), (3; 9); 3) (8; 2), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$; 4) (3; 9), (9; 3); 5) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$; 6) (2; 10), (10; 2). **6.29.** 1) (1,5; 2); 2) (8; 2), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$; 3) (5; 5); 4) (1; 1), $\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{6}}{3}\right)$; 5) (4; 1); 6) (2; 1). **6.30.** 1) 100; 2) $3^{\sqrt{2}}$; $3^{-\sqrt{2}}$. **6.31.** 1) 4; 2) $\frac{1}{7}$; 7. **6.32.** 1) −1; 2) $\frac{1}{4}$; 2. *Вказівка.* Розгляньте дане рівняння як квадратне відносно $\log_2 x$; 3) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; 4) $\sqrt{2}$. **6.33.** 1) 8; 2) 3; $\frac{1}{27}$; 3) $\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 4) $\sqrt[6]{3}$. **6.34.** 3; $\sqrt{2}$. **6.35.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1,5. **6.36.** 1) 2; 2) коренів немає. **6.37.** 1) 1; 2) 3. **6.38.** $-\frac{\pi}{4}+\pi k, k \in (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$. **6.39.** Якщо $a \leqslant -1$ або $a \geqslant 7$, то 1 розв'язок; якщо $-1 < a < 7$, то 2 розв'язки. **6.40.** Якщо $a \leqslant 2$ або $a \geqslant 11$, то 1 розв'язок; якщо $2 < a < 11$, то 2 розв'язки. **6.41.** $a = \frac{8}{3}$ або $a \leqslant \frac{7}{3}$. **6.42.** $a = -3$ або $a \geqslant -2{,}5$. **6.43.** 1) k, де $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; 2) $\arccos\frac{1}{10}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 3) $\frac{\pi}{3}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **6.44.** 1) $1+4k$, $k \in \mathbb{N}$; 2) $\frac{\pi}{4}+2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{5\pi}{3}$. *Вказівка.* Задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}\cos x = \frac{1}{2},\\ -6 < x < 0,\\ x^2+6x+10 \neq 0,\\ \sin 2x > 0.\end{cases}$ **6.45.** 2. **6.46.** $\frac{\pi}{4}+\pi k, k \in \mathbb{Z}$. *Вказівка.* Покажіть, що $\log_2(5+3\cos 4x) \geqslant 1$. **6.47.** 2. **6.48.** Якщо $b < 3$ або $b \geqslant 7$, то розв'язків немає; якщо $b = 3$, то $3 \leqslant x < 5$; якщо $3 < b < 7$, то $x = \frac{3+b}{2}$. **6.49.** $(-\infty; -1] \cup \{1-\sqrt{2}\}$. **6.50.** (2; 2). *Вказівка.* Роз-

гляньте функцію $f(t)=\sqrt{t}+\log_3 t$. **6.51.** 1; 3. **6.52.** $\left(-2;-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2};-1\right]\cup$ $\cup\left\{-\frac{3}{4}\right\}$. *Вказівка*. Рівняння $2x^2-x+3=x^2+2x+1$ є наслідком заданого. Воно має 2 корені: $x_1=1$, $x_2=2$. Початкове рівняння має єдиний розв'язок, якщо один із цих коренів належить області визначення рівняння, а другий — не належить. **6.53.** $\left(2;\frac{7}{3}\right)\cup\left(\frac{7}{3};3\right]\cup\left\{\frac{7}{2}\right\}$. **6.54.** $\left[\frac{1}{3};1\right]$. *Вказівка*. Для того щоб корінь рівняння $\log_3(x-2)=b$ був меншим від 3, має виконуватись умова $b<0$. Тоді потрібно знайти, при яких значеннях параметра a рівняння $(a-1)t^2-2(a+1)t+$ $+a-3=0$ має лише від'ємні корені. **6.55.** 1. *Вказівка*. Підставте в дане рівняння $a=1$. **6.56.** 5. **6.57.** Ні. *Вказівка*. Число $x=\frac{1}{4}$ також є коренем даного рівняння. Рисунок 6.3 не може слугувати обґрунтуванням того, що дане рівняння має один корінь. У цьому й полягає помилка Василя. Насправді можна показати, що дане рівняння має три корені. Побудувавши, наприклад, за допомогою комп'ютерної програми графіки функцій $y=\left(\frac{1}{16}\right)^x$, $y=\log_{\frac{1}{16}} x$ на проміжку $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$, можна побачити наявність цих трьох коренів.

7. Логарифмічні нерівності

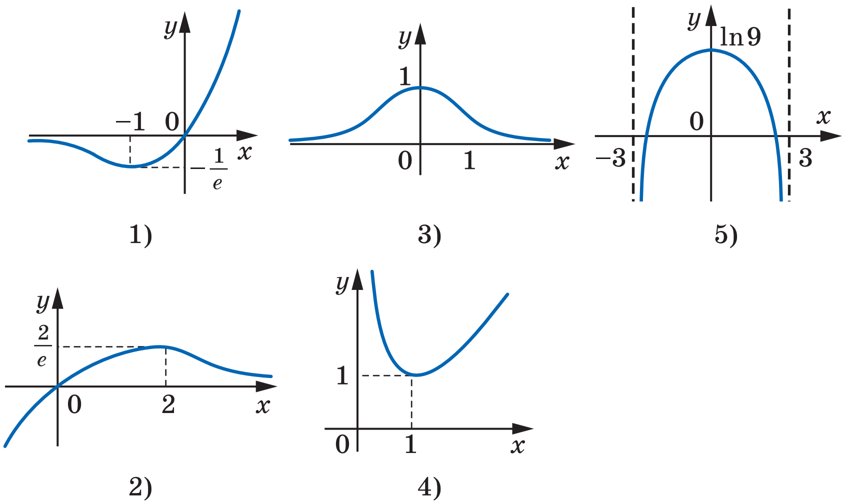
7.5. 1) $(1;+\infty)$; 2) $(0;1)$; 3) $(3;+\infty)$; 4) $(-3;-2)\cup(3;+\infty)$; 5) $(-\infty;-3]\cup$ $\cup[4;9)$; 6) $\left(-\frac{11}{10};4\right]\cup[5;+\infty)$. **7.6.** 1) $\left(\frac{3}{2};4\right)$; 2) $\left(\frac{5}{7};\frac{3}{2}\right)$; 3) $[5;+\infty)$; 4) $(-\infty;-4]\cup[3;5)$. **7.7.** 1) $[-1;1)\cup(3;5]$; 2) $(-2;-1)\cup(0;1)$; 3) $(-6;-5)\cup$ $\cup(-5;-4)$; 4) $[-1;0)\cup(3;4]$; 5) $\left(-\infty;-\frac{7}{4}\right)$; 6) $\left(\frac{5}{4};2\right)\cup(2;+\infty)$; 7) $(-\infty;-2{,}5)\cup$ $\cup[2;+\infty)$; 8) $\left(\frac{1}{3};1\right]$. **7.8.** 1) $(2;3)$; 2) $[1;2)\cup(4;5]$; 3) $[-4;-3)\cup(0;1]$; 4) $[0;1)\cup(1;2]$; 5) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)\cup[3;+\infty)$; 6) $\left(\frac{1}{2};3\right)$. **7.9.** 1) $(3;6]$; 2) $(1;3]$;

3) $\left(\frac{1}{2};1\right)$; 4) $\left(-2;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{2};+\infty\right)$; 5) $[-4;-3)\cup(1;3]$; 6) $[-5;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right]$. **7.10.** 1) (−3; −1); 2) (4; 5]; 3) (−5; 7]; 4) $\left[0;\frac{1}{2}\right)\cup(4;13]$. **7.11.** 1) (5; +∞); 2) (1; +∞); 3) (0; 4); 4) (5; 7]; 5) $\left(-1;-\frac{3}{5}\right]$; 6) $\left(-\infty;-\frac{7}{5}\right]$. **7.12.** 1) [−1; 0); 2) (1; 2]; 3) [11; +∞); 4) $\left[\frac{14}{3};+\infty\right)$. **7.13.** 1) $\left[2\sqrt{2};8\right)$; 2) [6; 7]. **7.14.** 1) [2; +∞); 2) [6; 11). **7.15.** 1) $\left[\frac{1}{5};5\right]$; 2) $\left(0;\frac{1}{9}\right]\cup[9;+\infty)$; 3) (0,0001; 10); 4) $\left[\frac{1}{16};256\right]$; 5) $(0;4]\cup[8;+\infty)$; 6) $\left(0;\frac{1}{81}\right]\cup\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$. **7.16.** 1) $\left(0;\frac{1}{8}\right]\cup[8;+\infty)$; 2) $(0;0,1]\cup[1000;+\infty)$; 3) (0,5; 4); 4) [0,04; 5]. **7.17.** 1) $\left(\frac{1}{128};2\right)$; 2) $(0;3^{-10}]\cup[3;+\infty)$; 3) $[0,001;1)\cup[100;+\infty)$; 4) $\left(0;\frac{1}{\sqrt{5}}\right]\cup(1;5]$. **7.18.** 1) $\left(0;\frac{1}{49}\right]\cup[7;+\infty)$; 2) $\left[\frac{1}{216};6\right]$; 3) $(3;9]\cup$ $\cup[81;+\infty)$; 4) $\left[\frac{1}{4};1\right)\cup[2;+\infty)$. **7.19.** 1) $\left[\frac{1-\sqrt{27}}{2};-2\right)\cup\left(3;\frac{1+\sqrt{27}}{2}\right]$; 2) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)\cup(1;+\infty)$; 3) [1,5; +∞); 4) (3; +∞). **7.20.** 1) $\left[-2;1-\sqrt{5}\right)\cup$ $\cup\left(1+\sqrt{5};4\right]$; 2) $\left(\frac{3}{4};1\right)$. **7.21.** $\left(0;\frac{1}{27}\right)\cup[3;+\infty)$. **7.22.** 1) $\left[\frac{1}{625};5\right]$. **7.23.** 1) $[1;+\infty)$; 2) (0; 4]. **7.24.** 1) (1; 4); 2) $[5;+\infty)$. **7.25.** 1) (2; 3); 2) (4,5; 5); 3) (0; 2); 4) (3,5; 5); 5) (0; 1) ∪ [2; +∞); 6) (1,5; 2]. **7.26.** 1) $\left(\frac{2}{3};1\right)\cup(1;+\infty)$; 2) $(1;3)\cup(4;+\infty)$; 3) $(1;2)\cup(2,5;4)$; 4) (1; 2]; 5) (0; 1]; 6) $\left(3;\frac{5+\sqrt{7}}{2}\right]\cup\left(4;\frac{9}{2}\right]$. **7.27.** 1) $\left[\log_5\frac{1}{2};1\right)$; 2) $\left[\frac{3}{4};1\right)$. **7.28.** 1) $\left[\log_3\frac{11}{20};3\right)$. **7.29.** 1) $(3;4]\cup\{5\}$; 2) $\left[-\frac{9}{8};-1\right)\cup\{2,-2\}$; 3) $\left[\frac{9}{5};2\right)\cup$ $\cup(2;3]\cup\{1\}$. **7.30.** 1) $(2;3]\cup\{5\}$; 2) $(5;+\infty)\cup\{4\}$. **7.33.** Якщо $a\leqslant 8$, то

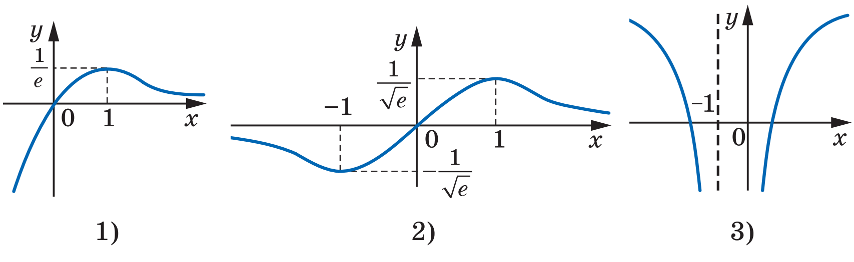
$x \in [3;\ +\infty)$; якщо $a > 8$, то $x \in [\log_2 a; +\infty) \cup \{3\}$. **7.34.** Якщо $a \leqslant 9$, то $x = 2$; якщо $a > 9$, то $x \in [2;\ \log_3 a]$. **7.35.** $(0; 1) \cup \left[\pi; \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right)$. **7.36.** $(0; 1) \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right]$. **7.37.** $(3; +\infty)$. **7.38.** $(0; 3)$. **7.39.** $\left(0; \frac{1}{10}\right) \cup (1; +\infty)$. **7.40.** $(-2; -1] \cup (1; 2)$. **7.41.** 1) $[-2; +\infty)$. *Вказівка*. Скористайтеся нерівностями $\sqrt{x+2} + 1 \geqslant 1$ і $\log_3 (x^2 + 4x + 13) \geqslant 2$; 2) $[2; +\infty)$. **7.42.** $[1; +\infty)$. **7.43.** *Вказівка*. Нехай $x = \log_a b$, $y = \log_b c$, $z = \log_c a$. Тоді $x > 1$, $y > 1$, $xyz = 1$ і дана нерівність набуває вигляду $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Останню нерівність можна переписати так: $x + y + z < xy + yz + xz$; $(x-1)(y-1)(z-1) < 0$. **7.44.** *Вказівка*. Маємо $\log_a \log_a b > \log_b \log_a b$; $\log_c \log_c a > \log_b \log_c a$. Тому $\log_a \log_a b + \log_b \log_b c + \log_c \log_c a > \log_b \log_a b + \log_b \log_b c + \log_b \log_c a = \log_b (\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a) = \log_b 1 = 0$.

8. Похідні показникової, логарифмічної та степеневої функцій

8.5. 1) $\frac{2}{e}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 24. **8.6.** 1) -1; 2) $\frac{1}{\ln 5}$. **8.7.** 1) $y = -2x + 1$; 2) $y = 2x + 1$; 3) $y = (2 + 2\ln 2)\,x - 2\ln 2$; 4) $y = 4x - 1$; 5) $y = 4x + 4$; 6) $y = \frac{2x}{3\ln 3} - \frac{2}{3\ln 3} + 1$. **8.8.** 1) $y = 2x + 1$; 2) $y = 6x \ln 3 - 12\ln 3 + 3$; 3) $y = 4x - \ln 4$; 4) $y = 3x - 6$. **8.9.** 1) $y = 2$; 2) $y = -1$. **8.10.** $y = -1600$. **8.11.** 1) $y = 5x + 3$; 2) $y = 3x - 3$. **8.12.** 1) $y = 2x$; 2) $y = x + 1 + \ln 5$; 3) $y = -x$. **8.13.** 1) Зростає на $[0;\ +\infty)$, спадає на $(-\infty;\ 0]$, $x_{\min} = 0$; 2) зростає на $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, спадає на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$, $x_{\min} = -\frac{1}{2}$; 3) зростає на $(-\infty;\ 0]$, спадає на $[0;\ +\infty)$, $x_{\max} = 0$; 4) зростає на $\left[0; \frac{2}{\ln 2}\right]$, спадає на $(-\infty;\ 0]$ і $\left[\frac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$, $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = \frac{2}{\ln 2}$; 5) зростає на $(-\infty;\ 1]$, спадає на $[1;\ +\infty)$, $x_{\max} = 1$; 6) зростає на $[0;\ +\infty)$, спадає на $(-\infty;\ 0]$, $x_{\min} = 0$; 7) зростає на $(-\infty;\ 2]$, спадає на $[2;\ +\infty)$, $x_{\max} = 2$; 8) зростає на [3; $+\infty$), спадає на ($-\infty$; 2) і (2; 3], $x_{\min} = 3$; 9) зростає на ($-\infty$; 1], спадає на [1; $+\infty$), $x_{\max} = 1$; 10) зростає на $\left[e^{-\frac{1}{3}}; +\infty\right)$, спадає на $\left(0; e^{-\frac{1}{3}}\right]$, $x_{\min} = e^{-\frac{1}{3}}$; 11) зростає на (0; 1], спадає на [1; $+\infty$), $x_{\max} = 1$; 12) зростає на $\left[e^{-\frac{1}{2}}; +\infty\right)$, спадає на $\left(0; e^{-\frac{1}{2}}\right]$, $x_{\min} = e^{-\frac{1}{2}}$; 13) зростає на [1; $+\infty$), спадає на (0; 1], $x_{\min} = 1$; 14) зростає на [e; $+\infty$), спадає на (0; 1) і (1; e], $x_{\min} = e$; 15) зростає на (0; e^2], спадає на [e^2; $+\infty$), $x_{\max} = e^2$; 16) зростає на [−1; 0) і [1; $+\infty$), спадає на ($-\infty$; −1] і (0; 1], $x_{\min} = -1$, $x_{\min} = 1$; 17) зростає на (0; 1] і [e; $+\infty$), спадає на [1; e], $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = e$; 18) зростає на $\left[\sqrt{10}; +\infty\right)$, спадає на $\left(0; \sqrt{10}\right]$, $x_{\min} = \sqrt{10}$. **8.14.** 1) Зростає на [−2; $+\infty$), спадає на ($-\infty$; −2], $x_{\min} = -2$; 2) зростає на [−1; 0] і [1; $+\infty$), спадає на ($-\infty$; −1] і [0; 1], $x_{\max} = 0$, $x_{\min} = -1$, $x_{\min} = 1$; 3) зростає на [−1; 1], спадає на ($-\infty$; −1] і [1; $+\infty$), $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = -1$; 4) зростає на $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$, спадає на $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$, $x_{\min} = -\frac{1}{4}$; 5) зростає на $\left(-\infty; \frac{3}{\ln 3}\right]$, спадає на $\left[\frac{3}{\ln 3}; +\infty\right)$, $x_{\max} = \frac{3}{\ln 3}$; 6) зростає на ($-\infty$; −2], спадає на [−2; $+\infty$), $x_{\max} = -2$; 7) зростає на [1; $+\infty$), спадає на (0; 1], $x_{\min} = 1$; 8) зростає на $\left(0; \frac{1}{e^2}\right]$ і [1; $+\infty$), спадає на $\left[\frac{1}{e^2}; 1\right]$, $x_{\max} = \frac{1}{e^2}$, $x_{\min} = 1$; 9) зростає на (0; e], спадає на [e; $+\infty$), $x_{\max} = e$; 10) зростає на [1; $+\infty$), спадає на ($-\infty$; 0) і (0; 1], $x_{\min} = 1$; 11) зростає на $\left(0; \frac{1}{e^2}\right]$ і [e^2; $+\infty$), спадає на $\left[\frac{1}{e^2}; e^2\right]$, $x_{\max} = \frac{1}{e^2}$, $x_{\min} = e^2$; 12) зростає на $\left[\frac{1}{10}; 1\right]$ і [10; $+\infty$), спадає на $\left(0; \frac{1}{10}\right]$ і [1; 10], $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = \frac{1}{10}$, $x_{\min} = 10$. **8.15.** 1) $e + 1$; $\frac{1}{e} - 1$; 2) e^2; 0; 3) 1; $\frac{1}{7}$; 4) $2\frac{1}{2}$; 2. **8.16.** 1) $\frac{1}{e^2}$; 0; 2) 125; $\frac{1}{5}$. **8.17.** 1) Опукла вгору на $(-\infty; 0]$, опукла вниз на $[0; +\infty)$, $x = 0$ — точка перегину; 2) опукла вгору на $\left(0; \sqrt{e^3}\right]$, опукла вниз на $\left[\sqrt{e^3}; +\infty\right)$, $x = \sqrt{e^3}$ — точка перегину; 3) опукла вгору на $(-\infty; 0)$, опукла вниз на $(0; +\infty)$. **8.18.** 1) Опукла вниз на $(-\infty;+\infty)$; 2) опукла вгору на $(-\infty;2]$, опукла вниз на $[2;+\infty)$, $x=2$ — точка перегину; 3) опукла вгору на кожному з проміжків $(0;\ 1)$ і $[e^2;+\infty)$, опукла вниз на $(1;e^2]$, $x=e^2$ — точка перегину. **8.19.** Див. рисунок. **8.20.** Див. рисунок.



До задачі 8.19



До задачі 8.20

8.21. *Вказівка.* Скористайтеся подвійною нерівністю $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. **8.22.** *Вказівка.* Для доведення нерівності $\ln x \leqslant x-1$ розбийте проміжок $(0;+\infty)$ на дві частини точкою $x_0=1$. Для доведення нерівності $\frac{x-1}{x} \leqslant \ln x$ зробіть у нерівності $\ln x \leqslant x-1$ заміну $x = \frac{1}{t}$. **8.24.** α. *Вказівка*. Знайдіть похідну функції $y = (1 + x)^{\alpha}$ в точці $x_0 = 0$. **8.25.** 1. **8.28.** При $a < 1$ коренів немає, при $a = 1$ — 1 корінь, при $a > 1$ — 2 корені. **8.29.** При $a \leqslant 0$ або $a = e^{-1}$ — 1 корінь, при $0 < a < e^{-1}$ — 2 корені, при $a > e^{-1}$ коренів немає. **8.30.** $a \leqslant 0$. **8.31.** $a \geqslant 0$. **8.32.** $a = 1$, $b = 0$. *Вказівка*. Розгляньте рівність $\left(e^{ax+b}\right)' = (ae^x + b)'$. **8.33.** $m \geqslant 0$. **8.34.** $a \leqslant 1$. **8.35.** $x^x(1 + \ln x)$. *Вказівка*. Скористайтеся рівністю $x^x = e^{x \ln x}$. **8.36.** $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$. **8.40.** 0; 2. **8.41.** 1; 2. **8.42.** 0; 1. *Вказівка*. Поділіть обидві частини рівняння на 7^x. **8.43.** 0; 1. **8.44.** 1) 2; 4. *Вказівка*. Розгляньте функцію $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x - 2^{x-1} - 1$. Оскільки функція $f'(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x \ln\sqrt{3} - 2^{x-1}\ln 2$ має лише один нуль, то функція f має не більше ніж два нулі; 2) 0; 1; 2. **8.45.** 1) 0; 1; 2) 1; 2; 3. **8.46.** $(0; 1) \cup (1; +\infty)$. **8.47.** $(-\infty; 0]$. **8.48.** $x = -1$, $y = 0$. *Вказівка*. Точка $A(x; e^{x+1})$ належить графіку функції $f(x) = e^{x+1}$, точка $B(y; y)$ — графіку функції $g(x) = x$. Тоді $AB^2 = (x - y)^2 + (y - e^{x+1})^2$. Далі знайдіть найменшу відстань між точками графіків функцій f і g. **8.49.** *Вказівка*. Розгляньте функцію $f(x) = \ln x$. Застосувавши теорему Лагранжа, можна записати:

$$\ln 2 - \ln 1 = \frac{1}{x_1} < 1, \quad \ln 3 - \ln 2 = \frac{1}{x_2} < \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad \ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{x_n} < \frac{1}{n},$$

$x_i \in (i; i + 1)$ та додати записані нерівності. **8.51.** 1) $e^{\pi} > \pi^{e}$. *Вказівка*. Дослідіть на зростання і спадання функцію $y = \frac{\ln x}{x}$. **8.52.** $\ln^2 100 > \ln 99 \cdot \ln 101$. *Вказівка*. Розгляньте функцію $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(x-1)}$. **8.53.** 0. *Вказівка*. Функції $f(x) = e^x - 1$ і $g(x) = \ln(x + 1)$ є взаємно оберненими та зростаючими. Отже, спільні точки їхніх графіків лежать на прямій $y = x$. Тому дане рівняння рівносильне рівнянню $f(x) = x$. Далі скористайтеся доведеним у задачі 8.23. **8.54.** *Вказівка*. Застосуйте теорему Лагранжа для функції $g(x) = e^{-x} f(x)$ на відрізку [0; 1]. **8.55.** *Вказівка*. Застосуйте теорему Ролля для функції $h(x) = e^{-g(x)} f(x)$ на відрізку [0; 1].

§ 2. Інтеграл і його застосування

9. Первісна

9.8. 1) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{10}{3}$; 2) $y = -\cos x - 2$; 3) $y = e^x - 7$. **9.9.** 1) $y = \frac{x^4}{4} + 1$; 2) $y = \sin x + 2$; 3) $y = \frac{3^x}{\ln 3}$. **9.10.** 1) $y = -\frac{1}{x} - 6$; 2) $y = \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3}$; 3) $y = \ln(-x) + 4$; 4) $y = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}$. **9.11.** 1) $y = -\operatorname{ctg} x + 1$; 2) $y = 2\sqrt{x} + 2$; 3) $y = \ln x - 1$; 4) $y = x^2 - 24$. **9.15.** $\frac{1}{2}$. **9.16.** $-\frac{1}{2}$. **9.17.** $F(x) + C$, де $F(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 0, \\ -\cos x + 1, & \text{якщо } x \geqslant 0, \end{cases}$ C — довільне число. **9.18.** $F(x) + C$, де $F(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{якщо } x < 1, \\ 2\sqrt{x}, & \text{якщо } x \geqslant 1, \end{cases}$ C — довільне число. **9.19.** $-\frac{\cos x^4}{4} + C$, де C — довільне число. *Вказівка.* Обчисліть похідну функції $y = -\frac{\cos x^4}{4}$. **9.20.** $e^{\sin x} + C$, де C — довільне число. **9.21.** *Вказівка.* Припустіть, що F — первісна непарної функції f. Тоді $F'(x) = f(x)$ і $F'(-x) = -f(-x)$. Звідси $F'(x) = F'(-x)$. Отже, $F(x) = F(-x) + C$, де C — деяке число. Підставивши $x = 0$, доведіть, що $C = 0$. **9.23.** Ні. *Вказівка.* Візьміть до уваги, що первісна періодичної функції не завжди є періодичною. Наприклад, усі первісні періодичної функції $f(x) = 1$ не є періодичними. Помилка Василя полягає у твердженні, що рівність $F(x) + C_1 = F(x + T) + C_2$ виконується для довільних чисел C_1, C_2. Для кожного значення C_1 існує лише єдине значення C_2. Його можна знайти, наприклад, з рівності $C_2 = F(0) - F(T) + C_1$.

10. Правила знаходження первісної

10.5. 1) $F(x) = x - x^2 + 8$; 2) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5$; 3) $F(x) = -\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{2} + 6{,}5$; 4) $F(x) = \frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{5}{3}$; 5) $F(x) = 4x + \frac{1}{x} - 4$; 6) $F(x) =$

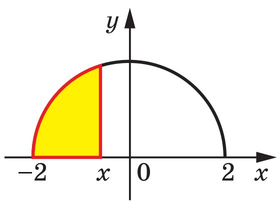
$= 7\ln(x-4)+2\sqrt{x+4}$; 7) $F(x)=\sqrt{6x+1}+2$; 8) $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+\frac{2}{3}$; 9) $F(x)=$ $=\frac{(3x-2)^3}{9}-\frac{1}{9}$; 10) $F(x)=\frac{2}{3}\mathrm{tg}\left(6x-\frac{\pi}{6}\right)$. **10.6.** 1) $F(x)=3x-3x^2+6$; 2) $F(x)=x^4-2x^3+x+5$; 3) $F(x)=x^2-2\sqrt{x}-2$; 4) $F(x)=-\frac{2}{3}\cos 3x-\frac{2}{3}$; 5) $F(x)=8\sqrt{\frac{x}{2}-2}+4$; 6) $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+1}+3{,}5$; 7) $F(x)=\frac{1}{4}\ln(4x-3e^2)+5{,}5$; 8) $F(x)=-8\mathrm{ctg}\frac{x}{8}+5$. **10.7.** $F(x)=x^4+2x^2-3$, первісна має ще один нуль, який дорівнює 1. **10.8.** $F(x)=\frac{x^3}{3}-12x+27$. **10.9.** 1) F_2; 2) F_2. **10.10.** F_1. **10.11.** $s(t)=\frac{t^3}{3}+t^2-3t$. **10.12.** $s(t)=2t^3+t-47$ або $s(t)=2t^3+$ $+t-67$. **10.13.** $y=2x^3-x^5+7$. **10.14.** $y=6\sqrt{x}+x-21$ **10.15.** 1) $\frac{x}{2}-$ $-\frac{1}{4}\sin 2x+C$. *Вказівка.* Застосуйте формули пониження степеня; 2) $-\frac{1}{16}\cos 8x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$. *Вказівка.* Застосуйте формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму; 3) $\frac{3}{4}\sin\frac{2x}{3}-$ $-\frac{1}{8}\sin 4x+C$. **10.16.** 1) $\frac{x}{2}+\frac{1}{8}\sin 4x+C$; 2) $\frac{1}{14}\sin 7x+\frac{1}{18}\sin 9x+C$. 1) $\frac{1}{2}\ln\frac{x-1}{x+1}+C$. *Вказівка.* Скористайтеся рівністю $\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2(x-1)}-$ $-\frac{1}{2(x+1)}$; 2) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+3\ln(x-1)+C$. **10.18.** 1) $\frac{1}{3}\ln\frac{x}{x+3}+C$; 2) $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-3\ln(-x-3)+C$. **10.19.** $\mathrm{tg}\,x-x+C$. **10.20.** $-\mathrm{ctg}\,x-x+C$. **10.21.** $F_1(x)=\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+\frac{5}{6}$, $F_2(x)=\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-\frac{323}{24}$. **10.22.** $F_1(x)=$ $=\frac{x^3}{3}-4x+\frac{2}{3}$, $F_2(x)=\frac{x^3}{3}-4x-\frac{20}{3}$. **10.23.** $F(x)=-x^2+5x-\frac{17}{4}$. **10.24.** $F(x)=\frac{x^2}{2}+x-3{,}5$. **10.26.** Ні. *Вказівка.* Припустіть, що

F — первісна функції f. Тоді для будь-якого $x > 0$ виконується рівність $\frac{F(x) - F(0)}{x} = 1$. Справді, за теоремою Лагранжа для функції F на відрізку $[0;\ x]$ існує таке $c \in (0; x)$, що $\frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(c) = f(c) = 1$. Тому $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = 1$. Аналогічно доведіть, що $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = -1$. Тому не існує границі $\lim\limits_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x}$, тобто функція F не є диференційовною в точці $x_0 = 0$. **10.27.** Може. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, похідну функції $y = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, x = 0. \end{cases}$

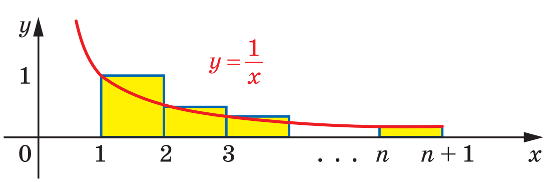
11. Площа криволінійної трапеції. Визначений інтеграл

11.5. 1) $4\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 4; 4) $7\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{2}\ln 8$; 6) $1\frac{1}{3}$; 7) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; 8) $\frac{1}{2}$; 9) $\frac{3e^2 - 1}{e^2}$; 10) 18. **11.6.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $7\frac{1}{3}$; 3) 8 ln 2; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{52}{3}$; 6) $\frac{72 - 2\ln 3}{\ln 3}$. **11.8.** 1) 70; 2) 1,5; 3) $\sqrt{3}$; 4) 39; 5) 0; 6) $\frac{4}{3}$; 7) $\frac{1}{2}\ln 5$; 8) 3; 9) 0; 10) $6e - 6$; 11) $-\frac{1}{9}$; 12) 240. **11.9.** 1) −45; 2) 6; 3) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$; 4) $\frac{1}{5}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{7}{288}$; 7) $\frac{1}{3}\ln 10$; 8) $\frac{1}{12}$; 9) $\frac{78}{7}$. **11.10.** 1) $10\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $e^2 - 1$; 4) 4 ln 4 − 3; 5) 12 − 4 ln 4; 6) $10\frac{2}{3}$; 7) $1\frac{1}{3}$; 8) 4,5; 9) 4,5; 10) $\frac{1}{3}$; 11) $\frac{1}{12}$; 12) 1; 13) 24 − 7 ln 7; 14) 2; 15) $\sqrt{2} - 1$. **11.11.** 1) $4\frac{1}{4}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) $2\frac{2}{3}$; 6) 6 − 3 ln 3; 7) 1; 8) 12 − 5 ln 5. **11.12.** $\frac{3\sqrt{3}}{4} - 1$. **11.13.** 3. **11.14.** 3; −3. **11.15.** 2; −2. **11.16.** 6. **11.17.** $-\sqrt[4]{8}$. **11.18.** 1) $(0; 1) \cup (3; +\infty)$; 2) $(\log_{0,2} 6; +\infty)$. **11.19.** $(1; +\infty)$. **11.20.** 1) $\frac{4 - \pi}{12}$;

2) $\pi - 2$; 3) 0; 4) $\frac{3e^2+8e-8}{8e^2}$. **11.21.** 1) $\frac{20-5\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) 0,2; 4) $e^2 - e - \frac{1}{2}$. **11.22.** 1) 16,5; 2) 4,5; 3) $21\frac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) 7,5; 6) $8 - 4\ln 2$. **11.23.** 1) 4,5; 2) $10\frac{2}{3}$; 3) 4,5; 4) 9. **11.24.** 1) $5\frac{1}{3}$; 2) 1,5. **11.25.** 1) $2\frac{5}{6}$; 2) 3. **11.26.** $1\frac{1}{12}$. **11.27.** $\frac{1}{6}$. **11.28.** $F'(x) = f(x)$. *Вказівка*. Скористайтеся означенням визначеного інтеграла. **11.29.** $F'(x) = -f(x)$. **11.30.** *Вказівка*. Припустіть, що F — первісна функції f на відрізку $[a; b]$. Застосуйте теорему Лагранжа для функції F на відрізку $[a; b]$. **11.31.** *Вказівка*. Розгляньте $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$. **11.35.** 1) $\frac{\pi}{2}$. *Вказівка*. Використайте геометричний зміст визначеного інтеграла; 2) $\frac{9\pi}{4}$; 3) 4π; 4) $\frac{9\pi}{2}$; 5) 8,5; 6) 6,5. **11.36.** 1) $\frac{25\pi}{2}$; 2) 3π; 3) 2π; 4) 5. **11.37.** 0. *Вказівка*. Доведіть, що функція $y = \frac{2^{\sqrt[3]{x}}-1}{2^{\sqrt[3]{x}}+1}$ є непарною. **11.38.** 0. **11.39.** 1. *Вказівка*. Зобразіть криволінійну трапецію, площа якої дорівнює шуканому інтегралу, і розгляньте функцію, обернену до підінтегральної функції. **11.40.** $\frac{\pi}{2} - 1$. **11.41.** $\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2}$. *Вказівка*. Знайдіть площу жовтої фігури, зображеної на рисунку. **11.42.** *Вказівка*. Знайдіть площу жовтої фігури, зображеної на рисунку.



До задачі 11.41



До задачі 11.42

11.43. *Вказівка*. Послідовність (x_n) є зростаючою. Тому достатньо довести нерівність $x_n - 1 = \frac{1}{\sqrt{2^3}} + \frac{1}{\sqrt{3^3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^3}} \leqslant \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x^3}}dx < 2$.

12. Обчислення об'ємів тіл

12.1. 1) $\frac{13\pi}{3}$; 2) $\frac{178\pi}{15}$; 3) $\frac{15\pi}{2}$; 4) $\frac{2\pi}{15}$; 5) $\frac{19\pi}{24}$. **12.2.** 1) $\pi\sqrt{2}$; 2) $\frac{\pi}{30}$; 3) $\frac{\pi}{2}$. **12.3.** $\frac{9}{8}\pi R^3$, $\frac{5}{24}\pi R^3$.

§ 3. Елементи теорії ймовірностей

13. Біном Ньютона

13.7. 200. **13.8.** 24. **13.9.** $n!$. **13.11.** 30!. **13.12.** A_{25}^{6}. **13.13.** A_n^5. **13.14.** C_{25}^{6}. **13.15.** C_{100}^{40}. **13.16.** 5^n. **13.17.** 0. *Вказівка.* Підставте у формулу бінома Ньютона $a=1$, $b=-1$. **13.18.** 1. **13.21.** 2. **13.22.** $\frac{1}{2^{100}}$. **13.23.** 17. **13.24.** 67. **13.25.** 49. **13.26.** Тринадцятий член розкладу має вигляд $C_{22}^{12}x^2$. **13.27.** 8. **13.28.** 3^n. **13.29.** 3^{15}. **13.30.** 4^6. **13.31.** $3^n-3\cdot 2^n+3$. *Вказівка.* Обчисліть кількість способів розкласти n різних куль по трьох різних ящиках так, щоб: а) два ящики були порожніми; б) один ящик був порожнім. **13.32.** $\frac{3^{n-1}-2^n+1}{2}$. *Вказівка.* Порівняйте шукану кількість із кількістю способів розкласти n різних куль по трьох різних ящиках так, щоб жодний ящик не залишився порожнім. **13.33.** $\frac{3^{n-1}+1}{2}$. *Вказівка.* Обчисліть кількість способів розкласти n різних куль по трьох однакових ящиках так, щоб: а) два ящики були порожніми; б) один ящик був порожнім. **13.34.** C_{n+2}^{2}. *Вказівка.* Якщо серед $(n+2)$ куль, розставлених у ряд, закреслити дві, то решта n куль розіб'ються на три групи, що дозволить відповідно розкласти їх по трьох різних ящиках. Наприклад, якщо закреслено кулі, зображені на рисунку, то до першого ящика потрапить одна куля, до другого — три кулі, а до останнього — $(n-4)$ кулі.

$$\bigcirc\otimes\bigcirc\bigcirc\bigcirc\otimes\bigcirc\ldots\bigcirc\bigcirc\bigcirc$$

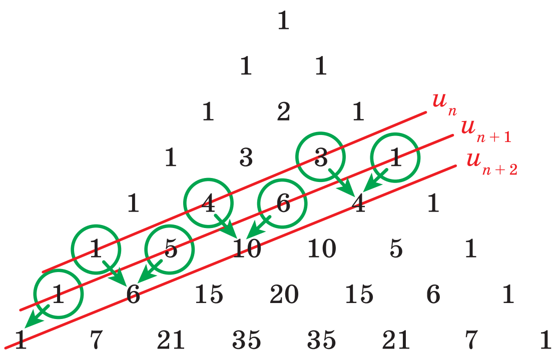
До задачі 13.34

13.35. C_{n-1}^{2} при $n\geqslant 3$; 0 при $n<3$. *Вказівка.* Якщо між n кулями, розставленими в ряд, поставити дві перегородки, то кулі розіб'ються на три групи, що дозволить відповідно розкласти їх по трьох різних ящиках. Наприклад, якщо перегородки поставити так, як зображено на рисунку, то до першого ящика потрапить одна куля, до другого — три кулі, а до останнього — $(n-4)$ кулі. Цю задачу можна розв'язати й інакше. Якщо спочатку покласти до кожного ящика по одній кулі, то дану задачу можна звести до задачі 13.34.

○|○○○|○...○○○

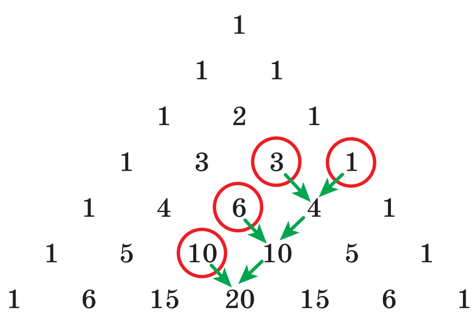
До задачі 13.35

13.36. *Вказівка.* На рисунку показано, що сума чисел, які стоять на сусідніх червоних прямих, дорівнює сумі чисел, розміщених на наступній червоній прямій.



До задачі 13.36

13.37. *Вказівка.* Див. рисунок.



До задачі 13.37

13.38. $11^4=(10+1)^4=10^4+C_4^1 10^3+C_4^2 10^2+C_4^3 10^1+1=14\,641$. **13.39.** 6. **13.40.** 3. **13.45.** *Вказівка.* Скористайтеся формулами пониження степеня та нерівністю, доведеною в задачі 13.44. **13.46.** $C_{200}^{117}\left(\sqrt{2}\right)^{117}$. *Вказівка.* Порівняйте два сусідніх доданки формули бінома Ньютона. **13.47.** $-C_{50}^{23}2^{27}\left(\sqrt{3}\right)^{23}$. **13.48.** $A=B=2^{100}$. *Вказівка.* Доведіть, що $A+B=2^{101}$, а $A-B=0$. **13.49.** $n2^{n-1}$. *Вказівка.* Обчисліть похідну обох частин рівності $(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\ldots+C_n^nx^n$. **13.50.** $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$. *Вказівка.* Знайдіть первісні обох частин рівності $(1+x)^n=1+C_n^1x+C_n^2x^2+C_n^3x^3+\ldots+C_n^nx^n$. **13.51.** *Вказівка.* За формулою бінома Ньютона розкрийте дужки в рівності $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$ і порівняйте коефіцієнти при x^n. **13.52.** Усі 1000 цифр після коми — дев'ятки. *Вказівка.* Використовуючи формулу бінома Ньютона, доведіть, що $\left(\sqrt{50}+7\right)^{1000}+\left(\sqrt{50}-7\right)^{1000}$ — ціле число. Тому число $\left(\sqrt{50}+7\right)^{1000}$ менше цілого на додатне число $\left(\sqrt{50}-7\right)^{1000}=\frac{1}{\left(\sqrt{50}+7\right)^{1000}}<\frac{1}{10^{1000}}$. **13.53.** *Вказівка.* Покладіть $b_n=a_n+1$. Тоді $b_{k+1}=19(b_k-1)^{20}+20(b_k-1)^{19}+1$. Використовуючи формулу бінома Ньютона, маємо: $b_{k+1}=19(1-20b_k+C_{20}^2b_k^2-\ldots+b_k^{20})-20(1-19b_k+C_{19}^2b_k^2-\ldots-b_k^{19})+1=b_k^2x_k$, де $x_k\in\mathbb{Z}$. Це означає, що коли десятковий запис числа b_k закінчується на m нулів, то запис числа b_{k+1} закінчується щонайменше на $2m$ нулів. Звідси випливає, що десятковий запис числа b_{21} закінчується щонайменше на $2^{20}=(2^{10})^2>1000^2=1\,000\,000$ нулів.

14. Аксіоми теорії ймовірностей

14.1. «синій», «червоний». **14.2.** 0, 1, 2, 3. **14.3.** $\Omega=\{\text{М, А, Т, Е, И, К}\}$. **14.4.** $\Omega=\{2, 3, \ldots, 12\}$. **14.5.** $\Omega=\{(0;0),(0;1),(1;0),(0;2),(1;1),(2;0),\ldots\}$. **14.6.** $\Omega=(0;+\infty)$. **14.9.** 1) $\bar{A}=Y$; 2) $A\cup B=T$; 3) $A\backslash B=\mathbb{Z}$. **14.14.** 1) $[0;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ 0]$; 4) $[0;\ 1)$; 5) $[1;\ 2]$. **14.17.** 26 %. **14.18.** 51 %. **14.19.** $\frac{6}{7}$. **14.21.** 1) *Вказівка.* Подія A є об'єднанням несумісних подій $X = A \cap B$ і $Y = A \setminus B$, тому $P(A) = P(X) + P(Y) \geqslant \geqslant P(X)$. Звідси випливає, що $0 \leqslant P(X) \leqslant P(A) = 0$. **14.22.** *Вказівка.* Скористайтеся теоремою 14.1. **14.24.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{5}{36}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{13}{36}$. **14.25.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{5}{8}$; 4) $\frac{3}{8}$. **14.26.** 1) 35 %; 2) 25 %. **14.28.** 12 %. *Вказівка.* Нехай подія A полягає в тому, що даний абітурієнт — призер обласної олімпіади, а подія B — відмінник. Тоді подія $A \cap B$ полягає в тому, що даний абітурієнт буде призером обласної олімпіади та відмінником в одній особі. Далі скористайтеся теоремою 14.1. **14.29.** 0,7. **14.30.** 0,67. **14.31.** 1) 0,03; 2) 0,01; 3) 0,05; 4) 0,04. **14.32.** 1) 40 %; 2) 20 %; 3) 10 %; 4) 30 %. **14.33.** Так. *Вказівка.* Розгляньте такі події: A — «вибраний випускник знає англійську та німецьку мови», B — «вибраний випускник знає німецьку та французьку мови», C — «вибраний випускник знає англійську та французьку мови». Далі доведіть, що для цих подій виконується рівність $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - 2P(A \cap B \cap C)$, і скористайтеся тим, що $P(A \cup B \cup C) \leqslant 1$.

15. Умовна ймовірність

15.3. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 0. **15.4.** $\frac{1}{4}$. **15.8.** 1) 0,2; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0,4. **15.9.** 1) 0,5; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{7}{12}$. **15.12.** $\frac{8}{29}$. **15.13.** $\frac{10}{11}$. **15.14.** 1) $\frac{7}{9}$; 4) 1. **15.15.** 1) $\frac{5}{7}$; 4) $\frac{1}{2}$. **15.16.** $\frac{14}{15}$. **15.17.** 75 %. **15.18.** 82 %. *Вказівка.* Нехай подія H_1 означає, що вибрана ручка синя, а подія H_2 — що ручка червона. Далі скористайтеся формулою повної ймовірності $P(A) = P_{H_1}(A) \cdot P(H_1) + P_{H_2}(A) \cdot P(H_2)$. **15.19.** 39,2 %. **15.20.** 2,4 %. **15.21.** $\frac{10}{27}$. **15.22.** $\frac{1}{3}$. **15.23.** 0,648 усіх цукерок треба віддати Петрику, решту — Сергійку. *Вказівка.* Складіть дендрограму, як міг би продовжуватися цей матч, і знайдіть ймовірність того, що в матчі переміг би Петрик.

16. Незалежні події

16.1. 24 %. **16.3.** $p(1-p)^5$. **16.5.** *Вказівка*. Оскільки подія B є об'єднанням несумісних подій $\bar{A}\cap B$ і $A\cap B$, то $P(\bar{A}\cap B)=$ $=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-P(A)P(B)=P(B)(1-P(A))=P(B)P(\bar{A})$. **16.7.** Ні. *Вказівка*. Якщо A і B — несумісні й незалежні події, то $P(A\cap B)=0$ і $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. **16.9.** 1) 14 %; 2) 9 %; 3) 6 %; 4) 36 %; 5) 41 %; 6) 55 %. **16.10.** 1) 72,9 %; 2) 24,3 %; 3) 2,7 %; 4) 0,1 %. **16.11.** 1) 6,25 %; 2) 40,96 %; 3) 10,24 %; 4) 40,96 %. **16.12.** $2p-p^2$. **16.13.** $1-(1-p)^4$. **16.14.** $2p^3-p^6$. У разі використання схеми, зображеної на рисунку 16.8, ймовірність безвідмовної роботи збільшиться (не зменшиться при $p=0$ або $p=1$) і дорівнюватиме $p^3(2-p)^3$. **16.15.** $(1-(1-p_1)^2)(1-(1-p_2)^3)p_3$. **16.16.** 6 обертів. *Вказівка*. Ймовірність того, що станція не виявить об'єкт за k обертів, дорівнює $0{,}3^k$. **16.17.** 10 запитань. **16.18.** $P(A)=\dfrac{A_{30000}^{1}\cdot A_{470000}^{14}}{A_{500000}^{15}}$, $P(A)\approx\dfrac{3}{50}\left(\dfrac{47}{50}\right)^{14}\approx 2{,}5\,\%$. **16.19.** 8 %.

17. Випадкова величина

17.1. Елементарним наслідком є список відсутніх, тобто будь-який набір прізвищ учнів та учениць класу. Випадкова величина, яку розглядає заступник директора, дорівнює кількості відсутніх на уроці (кількості прізвищ у списку відсутніх). Множина значень випадкової величини складається із цілих невід'ємних чисел, які не перевищують кількості учнів та учениць у класі. **17.7.** 2) 0,1; 3) 0; 4) 0,5. **17.8.** Ні. **17.9.** 3) $\dfrac{1}{30}$. **17.10.** 3) 30 %; 4) 35 %; 5) 72 %. **17.11.** 1) 0,11; 2) 0,53; 3) 1; 4) 0,78. **17.12.** 1) Див. табл. 1; 4) див. табл. 2.

Таблиця 1

Значення $x+1$	2	8	11	14
Ймовірність, %	40	30	20	10

Таблиця 2

Значення $(x-7)^2$	0	9	36
Ймовірність, %	30	20	50

17.13. 1) Див. табл. 3; 4) див. табл. 4.

Таблиця 3

Значення $y-4$	-7	-3	-2	-1
Ймовірність, %	15	30	25	30

Таблиця 4

Значення $(2-y)^2$	0	1	25
Ймовірність, %	25	60	15

17.14. 1) 0,2; 3) 0,6; 4) 0,8. **17.16.** Див. табл. 5.

Таблиця 5

Значення z	0	2	6
Ймовірність	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

17.17. Див. табл. 6.

Таблиця 6

Значення z	0	1	2	3	4	5	6
Ймовірність	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

17.18. Див. табл. 7.

Таблиця 7

Значення x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Ймовірність	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

17.20. Див. табл. 8.

Таблиця 8

Значення x	1	2	3	4
Ймовірність	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

17.21. Див. табл. 9.

Таблиця 9

Значення x	1	2	3	4	5
Ймовірність	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

17.22. Див. табл. 10.

Таблиця 10

Значення x	1	2	3
Ймовірність	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{36}$

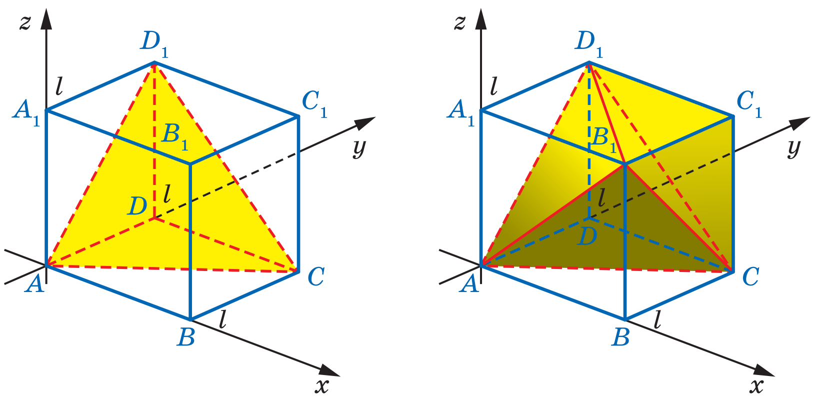
18. Математичне сподівання випадкової величини

18.1. 1) $M(y) = 2$; 2) $M(y) = 10$; 3) $M(y) = -4$; 4) $M(y) = 3$. **18.4.** $M(t_C) = 10$ °C. **18.5.** 2. **18.6.** 5. **18.9.** Ні. **18.10.** 0. **18.11.** *Вказівка*. Знайдіть математичне сподівання виграшу. **18.13.** 200 грн. **18.14.** 1,5. **18.15.** 1,44. **18.16.** 3. **18.17.** $\frac{55}{9}$. **18.19.** 0,5. **18.20.** 2,5. **18.21.** 3) $M(x) \approx 4$. **18.22.** 2) 1,2.

19. Геометрична ймовірність

19.5. $\frac{16}{25}$. **19.6.** $\frac{3}{35}$. **19.9.** $\frac{2}{\sqrt{3}\pi}$. **19.10.** $\frac{6R^2H}{(4R^2+H^2)^{3/2}}$. **19.11.** 2) 0,98; 3) 0,51. **19.12.** 2) 75,5 %; 3) 64 %. **19.13.** $\frac{2}{5}$. *Вказівка*. Проведіть пряму l, перпендикулярну до даних прямих. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що центр монети потрапить на пряму l. **19.14.** $\frac{3}{4}$. **19.15.** 1) $\frac{1}{4}$. *Вказівка*. Для обчислення площі фігури $\{(x; y) \mid y \leqslant x^3, x \in [0; 1], y \in [0; 1]\}$ обчисліть інтеграл $\int_0^1 x^3 dx$; 2) $1 - \frac{2}{\pi}$; 3) $\frac{1 + \ln 5}{5}$. **19.16.** $\frac{2}{3}$. *Вказівка*. У квадраті з вершинами в точках з координатами (−1; −1), (1; −1), (1; 1), (−1; 1) навмання виберемо точку $Q(p; q)$. Рівняння $t^2 + 2pt + q = 0$ має корені, якщо точка $Q(p; q)$ належить фігурі, заданій нерівністю $D = 4p^2 - 4q \geqslant 0$. **19.17.** 1) $\frac{2}{3}$;

2) $\frac{2}{\pi}$; 3) $\frac{1-\ln 2}{2}$. **19.18.** $\frac{C_5^3}{2^5}$. *Вказівка.* Візьміть до уваги: ймовірність того, що одна вибрана навмання в трикутнику ABC точка потрапить до квадрата $CDEF$, дорівнює $\frac{1}{2}$. **19.19.** $C_n^k \frac{a_1^k a_2^{n-k}}{(a_1+a_2)^n}$. **19.20.** $\frac{3}{2}-\sqrt{2}$. **19.21.** $\frac{9}{10}$. **19.22.** $\frac{3}{4}$. **19.23.** $\frac{4}{9}$. **19.24.** 0,5. *Вказівка.* Елементарним наслідком у даному випробуванні є впорядкована трійка чисел $(x; y; z)$, де кожна зі змінних може набувати значень від 0 до l. Відповідно до умови задачі таку трійку можна отримати, вибираючи навмання точку $Q(x; y; z)$ у кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (див. рис. *а*).

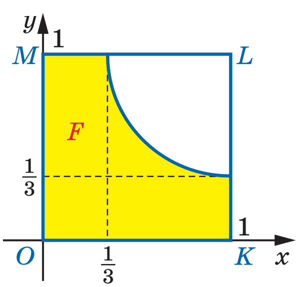


а *б*

До задачі 19.24

Із відрізків завдовжки x, y і z можна скласти трикутник, якщо $\begin{cases} x < y+z, \\ y < x+z, \\ z < x+y. \end{cases}$ Тіло F, що є графіком записаної системи, можна отримати з куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ шляхом видалення трьох рівних трикутних пірамід, які відповідають нерівностям $x \geqslant y+z$, $y \geqslant x+z$ і $z \geqslant x+y$. Наприклад, нерівності $y \geqslant x+z$ відповідає піраміда $ACDD_1$ з об'ємом $\frac{l^3}{6}$ (рис. *а*). Тіло F зображено на рисунку *б*. Об'єм тіла F дорівнює $V_F = l^3 - 3\cdot\frac{l^3}{6} = \frac{l^3}{2}$. Таким чином, ймовірність із трьох відрізаних шматків паличок скласти трикутник становить $p(F) = \frac{V_F}{V_{\text{куба}}} = \frac{\frac{l^3}{2}}{l^3} = \frac{1}{2}$. **19.25.** $\frac{1}{4}$. *Вказівка.* Нехай довжина даного відрізка l. Елементарним наслідком у даному випробувані є пара чисел $(x;\ y)$, де кожна зі змінних може набувати значень від 0 до l. Тоді трикутник можна буде скласти, якщо пара $(x;\ y)$ є розв'язком системи $\begin{cases} x \leqslant y, \\ l - y < y, \\ y - x < l - y + x, \\ x < l - x \end{cases}$ або системи $\begin{cases} x > y, \\ l - x < x, \\ x - y < l - x + y, \\ y < l - y. \end{cases}$ **19.26.** $\frac{1}{6}$.

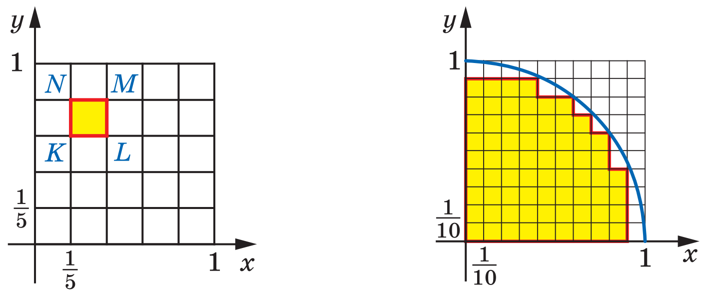
19.27. *Вказівка.* Помилково було б описувати умову задачі ймовірнісною моделлю, коли на відрізку AB навмання вибирають дві точки, які позначають через C і D так, щоб точка D потрапила на відрізок AC. Справді, за умовою задачі вибір двох таких точок не є незалежним. Наприклад, ймовірність того, що $AD < \frac{AB}{4}$, коли $AC = \frac{AB}{2}$, дорівнює $50\ \%$, а ймовірність того, що $AD < \frac{AB}{4}$, коли $AC = \frac{AB}{4}$, дорівнює $100\ \%$. Скористайтесь іншою ймовірнісною моделлю. Якщо відрізок AB точкою C розбили на два, то величини $\lambda_1 = \frac{AC}{AB} \in [0; 1]$ і $\lambda_2 = \frac{AD}{AC} \in [0; 1]$ однозначно визначають точки C і D. Відповідно до умов задачі оберемо навмання точку $Q(\lambda_1; \lambda_2)$ у квадраті $OKLM$ з вершинами O (0; 0), K (1; 0), L (1; 1), M (0; 1). Маємо: $AD = \lambda_1\lambda_2 AB$. Умова $AD < \frac{AB}{3}$, тобто умова $\lambda_1\lambda_2 < \frac{1}{3}$, виконується лише тоді, коли точка $Q(\lambda_1; \lambda_2)$ потрапляє до фігури F, зображеної на рисунку. Для знаходження площі фігури F обчислимо $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{1}{3x} dx = \frac{1}{3} \ln x \Big|_{\frac{1}{3}}^{1} = -\frac{1}{3} \ln \frac{1}{3} = \frac{\ln 3}{3}$. Отже, пло-



До задачі 19.27

ща фігури F і ймовірність того, що $AD < \frac{AB}{3}$, дорівнює $\frac{1+\ln 3}{3}$.

19.28. $\frac{\pi}{4}$. *Вказівка.* В описаному досліді n^2 елементарних наслідків — упорядкованих пар $(x;\ y)$, де $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$, $x \leqslant n$, $y \leqslant n$. Нехай нерівність $x^2 + y^2 \leqslant n^2$ задовольняють k_n елементарних наслідків. Тоді $p_n = \frac{k_n}{n^2}$. Поставимо у відповідність кожному елементарному наслідку $(x;\ y)$ квадратик $KLMN$ розміром $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n}$, вершини якого мають координати $K\left(\frac{x-1}{n}; \frac{y-1}{n}\right)$, $L\left(\frac{x}{n}; \frac{y-1}{n}\right)$, $M\left(\frac{x}{n}; \frac{y}{n}\right)$, $N\left(\frac{x-1}{n}; \frac{y}{n}\right)$.



а *б*

До задачі 19.28

Наприклад, на рисунку *а* зображено квадрат $KLMN$, який відповідає парі чисел (2; 4) для $n = 5$. Якщо нерівність $x^2 + y^2 \leqslant n^2$ переписати у вигляді $\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \left(\frac{y}{n}\right)^2 \leqslant 1$, то легко зрозуміти, що елементарний наслідок $(x;\ y)$ задовольняє дану нерівність тільки тоді, коли відповідний квадратик $KLMN$ повністю лежить усередині одиничного круга. Такі квадратики утворюють фігуру A_n площею $k_n \cdot \frac{1}{n^2} = p_n$ (на рисунку *б* зображено фігуру A_n при $n = 10$). З означення площі випливає, що послідовність площ фігур A_n прямує до площі чверті одиничного круга, тобто $\lim\limits_{n \to \infty} p_n = \frac{\pi}{4}$.

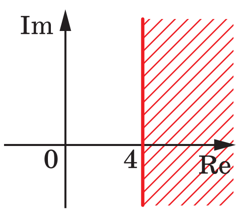
§ 4. Комплексні числа

20. Множина комплексних чисел

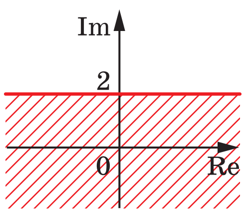
20.4. 3) $x = 2,\ y = 1$ або $x = -\frac{9}{5},\ y = \frac{6}{25}$. **20.27.** 4) $\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i$; 5) $\frac{14}{13} + \frac{5}{13}i$. **20.29.** 1) $1 - 2i$. **20.30.** 2) $\frac{7}{25} - \frac{24}{25}i$. **20.31.** 3) $\frac{6}{5}$; 5) 1. **20.32.** 2) $-\frac{33}{65} - \frac{4}{65}i$. **20.33.** 2) $\frac{1}{25} + \frac{7}{25}i$. **20.34.** 3) $\frac{69}{13} + \frac{58}{13}i$. **20.41.** $n = 4k,\ k \in \mathbb{N}$. **20.42.** $50 - 50i$. **20.43.** 0; 1; $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **20.44.** *Вказівка*. Скористайтеся рівністю $|z^n| = |z|^n$.

21. Комплексна площина. Тригонометрична форма комплексного числа

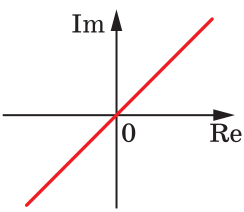
21.2. 2) Див. рисунок; 4) див. рисунок; 5) див. рисунок.



До задачі 21.2 (2)

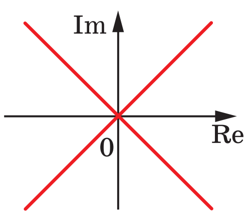


До задачі 21.2 (4)

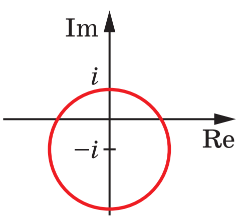


До задачі 21.2 (5)

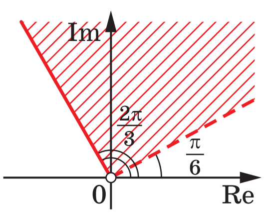
21.3. 6) Див. рисунок. **21.5.** 3) Див. рисунок. **21.7.** 2) Див. рисунок.



До задачі 21.3 (6)

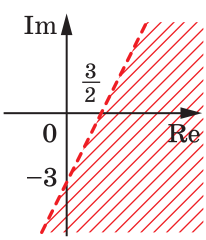


До задачі 21.5 (3)

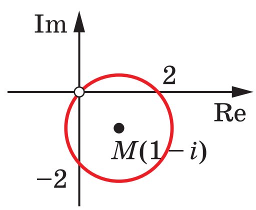


До задачі 21.7 (2)

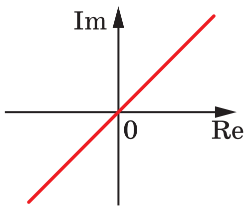
21.9. 1) $2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **21.10.** 2) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; 4) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **21.12.** 3) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 5) $\sqrt{5}\left(\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right) + i\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right)\right)$; 7) $13\left(\cos\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right) + i\sin\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right)\right)$. **21.13.** 3) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 7) $10\left(\cos\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right) + i\sin\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)\right)$. **21.14.** 2) $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{11}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{11}\right)\right)$; 3) $6\left(\cos\frac{9\pi}{26} + i\sin\frac{9\pi}{26}\right)$; 5) $\cos\left(\pi + \frac{1}{3}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{1}{3}\right)$. **21.15.** 3) $\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}$; 4) $3\left(\cos\frac{13\pi}{11} + i\sin\frac{13\pi}{11}\right)$. **21.19.** $\frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$. **21.21.** 3) Див. рисунок. **21.23.** 1) $2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$; 2) $-2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\left(\pi + \frac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\varphi}{2}\right)\right)$. **21.24.** 1) $2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right)\right)$; 2) $-2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi-\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi-\varphi}{2}\right)\right)$. **21.25.** 1) Коло із центром $M\ (1 - i)$ радіуса $\sqrt{2}$ з виколотою точкою $z = 0$ (див. рисунок); 2) див. рисунок. **21.26.** 1) Див. рисунок.



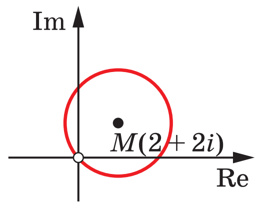
До задачі 21.21 (3)



До задачі 21.25 (1)



До задачі 21.25 (2)



До задачі 21.26 (1)

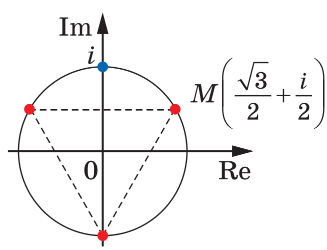
22. Множення і ділення комплексних чисел, записаних у тригонометричній формі. Корінь n-го степеня з комплексного числа

22.1. 2) $5\left(\cos\left(1-\frac{\pi}{16}\right)+i\sin\left(1-\frac{\pi}{16}\right)\right)$; 3) $8\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$. **22.2.** 2) $21\left(\cos\frac{1}{12}+i\sin\frac{1}{12}\right)$. **22.3.** 2) $\frac{3}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{16}+i\sin\frac{3\pi}{16}\right)$; 3) $2(\cos(\pi+1)+i\sin(\pi+1))$. **22.4.** 2) $-3i$; 3) $3\left(\cos\left(8-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(8-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

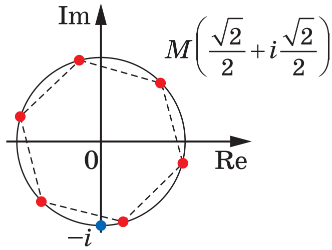
22.5. 2) $27\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; 3) $\cos\frac{1}{5}+i\sin\frac{1}{5}$. **22.7.** 2) -1; 3) $625\left(\cos\left(4\arccos\frac{3}{5}\right)+i\sin\left(4\arccos\frac{3}{5}\right)\right)$; 4) -64; 5) $\frac{\sqrt{3}-i}{16}$.

22.8. 3) $\cos\left(-10\arccos\frac{5}{13}\right)+i\sin\left(-10\arccos\frac{5}{13}\right)$. **22.9.** 1) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$, $\sqrt{3}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$, $\sqrt{3}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$;

3) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right)$, $2\left(\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}\right)$, $2\left(\cos\frac{7\pi}{10}+i\sin\frac{7\pi}{10}\right)$, $2\left(\cos\frac{11\pi}{10}+i\sin\frac{11\pi}{10}\right)$, $-2i$. **22.11.** 1) Див. рисунок; 3) див. рисунок.

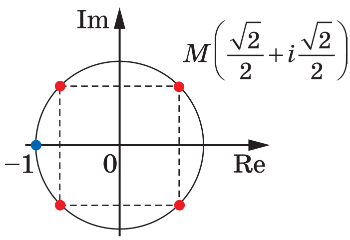


До задачі 22.11 (1)

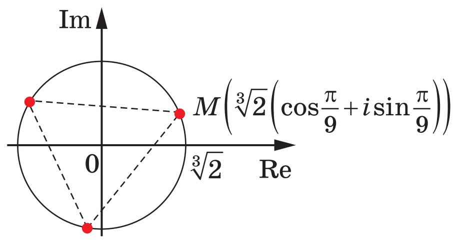


До задачі 22.11 (3)

22.12. 1) Див. рисунок; 2) див. рисунок.



До задачі 22.12 (1)



До задачі 22.12 (2)

22.13. 1. **22.14.** 0. **22.15.** (0; 0); $\left(\cos\frac{2\pi k}{7}; \sin\frac{2\pi k}{7}\right)$, де $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **22.16.** (0; 0); $\left(\cos\frac{2\pi k}{5}; \sin\frac{2\pi k}{5}\right)$, де $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. **22.17.** Помилка Василя полягає в тому, що він поширив означення та властивості арифметичного квадратного кореня з невід'ємного дійсного числа на комплексні числа. На множині комплексних чисел існує два значення квадратного кореня із числа $(-1)^2 = 1$ — це числа 1 і −1. **22.18.** *Вказівка.* Оскільки $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$, то рівність $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ означає, що число $\frac{z_1}{z_2}$ — дійсне. Тоді $\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

22.19. *Вказівка*. Дана рівність означає, що число $\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$ — дійсне. **22.21.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $z_1\bar{z}_1 = 1,$ $z_2\bar{z}_2 = 1,$ $z_3\bar{z}_3 = 1,$ $z_4\bar{z}_4 = 1,$ а також доведеним у задачі 22.20. **22.22.** *Вказівка*. Скористайтеся доведеним у задачі 22.19. **22.23.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $z_1\bar{z}_1 = 1,$ $z_2\bar{z}_2 = 1,$ а також доведеним у задачі 22.22. **22.24.** *Вказівка*. Дана рівність означає, що число $\frac{z_1}{z_2}$ є суто уявним. Тоді $\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$ **22.25.** *Вказівка*. Скористайтеся доведеним у задачі 22.24. **22.26.** *Вказівка*. Скористайтеся доведеним у задачі 22.25. **22.27.** *Вказівка*. Розгляньте $M(z)$ — довільну точку дотичної. Тоді $OA \perp MA$. Далі скористайтеся доведеним у задачі 22.25. **22.29.** *Вказівка*. Нехай $a = \cos\frac{\pi}{13} + i\sin\frac{\pi}{13}.$ Тоді $a^3 = \cos\frac{3\pi}{13} + i\sin\frac{3\pi}{13},$ $a^5 = \cos\frac{5\pi}{13} + i\sin\frac{5\pi}{13},$ ..., $a^{11} = \cos\frac{11\pi}{13} + i\sin\frac{11\pi}{13}.$ Тоді $a + a^3 + a^5 + \ldots + a^{11} = \left(\cos\frac{\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \ldots + \cos\frac{11\pi}{13}\right) + i\left(\sin\frac{\pi}{13} + \sin\frac{3\pi}{13} + \ldots + \sin\frac{11\pi}{13}\right).$ Далі, використовуючи формулу суми геометричної прогресії, перетворіть вираз $a + a^3 + a^5 + \ldots + a^{11}$ і прирівняйте дійсні частини чисел, записаних у лівій і правій частинах рівності. **22.30.** *Вказівка*. Нехай $z = \cos\varphi + i\sin\varphi.$ Тоді $\cos^{100}\varphi = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^{100}$. Далі скористайтеся формулою бінома Ньютона. **22.32.** *Вказівка*. Розгляньте комплексне число $(1+i)^{51}$. **22.33.** $x = 19,$ $y = 40.$ **22.34.** Ні. *Вказівка*. Розгляньте значення даних функцій при $x = i$. **22.39.** *Вказівка*. Припустіть, що комплексні координати точок A, K і N дорівнюють z_1, z_2 і z_3 відповідно. Достатньо показати, що $(z_2 - z_1) = e(z_3 - z_1),$ де e — одне із чисел $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ або $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$

§ 5. Многочлени

23. Розв'язування алгебраїчних рівнянь на множині комплексних чисел

23.1. 2) $1+2i$; $2-4i$; 3) $2+3i$; $1-3i$; 4) $2+i$; $3-2i$. **23.2.** 2) $3+i$; $9-3i$; 3) $4+i$; $-2-i$; 4) $4-3i$; i. **23.3.** 2) 2; $2i$; $-2i$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; 4) i; $1+i$; $1-i$. **23.4.** 2) -3; $3i$; $-3i$; 4) 1; $1+u$; $2-2i$. **23.5.** $\cos\frac{2\pi k}{7}+i\sin\frac{2\pi k}{7}$, де $k\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **23.6.** $\cos\frac{\pi+2\pi k}{10}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{10}$, де $k\in\{0,1,3,4,5,6,8,9\}$. **23.7.** $-2x+5$. *Вказівка*. Знайдіть корені квадратного рівняння $x^2-x+1=0$ та підставте їх у рівність $P(x)=Q(x)(x^2-x+1)+ax+b$. **23.8.** $-x+6$. **23.9.** *Вказівка.* Скориставшись рівностями $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$, $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$, доведіть, що $\overline{P(z)}=P(\bar{z})$. **23.11.** *Вказівка.* Скористайтесь методом математичної індукції. Якщо $n=1$, то твердження задачі є очевидним. Нехай твердження задачі має місце для всіх $k\leqslant n$. Розгляньте многочлен P степеня $n+1$ з дійсними коефіцієнтами. За основною теоремою алгебри многочлен P має корінь z_0. Якщо $z_0\in\mathbb{R}$, то існує такий многочлен Q з дійсними коефіцієнтами, що $P(z)=(z-z_0)Q(z)$. Якщо $z_0\notin\mathbb{R}$, то за доведеним у ключовій задачі 23.9 многочлен P має ще один корінь $\bar{z}_0$. Тоді існує такий многочлен Q, що $P(z)=(z-z_0)(z-\bar{z}_0)Q(z)=(z^2-(z_0+\bar{z}_0)z+z_0\bar{z}_0)Q(z)$, причому коефіцієнти многочлена Q і квадратного тричлена $z^2-(z_0+\bar{z}_0)z+z_0\bar{z}_0$ є дійсними числами. Далі скористайтеся припущенням індукції для многочлена Q. **23.12.** *Вказівка.* За результатом ключової задачі 23.11 даний многочлен можна розкласти на добуток лінійних і квадратичних множників з дійсними коефіцієнтами. Якби серед цих множників не було жодного лінійного, то степінь даного многочлена був би парним числом. **23.13.** Так, наприклад, $y=x^3$. **23.14.** $n=13$. *Вказівка.* Маємо $P(x)=(x^2-x+2)Q(x)$.

Оскільки комплексні числа $z_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$ є коренями рівняння $z^2-z+2=0$, то $P(z_1)=0$, тобто $z_1^n=-z_1-90$. Ураховуючи рівність $|z_1|=\sqrt{2}$ і рівність $|z_1^n|=|-z_1-90|$, маємо, що $(\sqrt{2})^n=|-z_1-90|$. Оскільки $|-z_1-90|\leqslant|z_1|+90\leqslant 92$ і $|-z_1-90|\geqslant 90-|z_1|\geqslant 88$, то $88\leqslant(\sqrt{2})^n\leqslant 92$. **23.15.** *Вказівка.* Скориставшись основною теоремою алгебри, розкладіть многочлен P на лінійні множники: $P(z)=$ $=a(z-z_1)(z-z_2)\cdot\ldots\cdot(z-z_n)$. Розгляньте добуток $a\left(z^{2012}-z_1^{2012}\right)\times$ $\times\left(z^{2012}-z_2^{2012}\right)\cdot\ldots\cdot\left(z^{2012}-z_n^{2012}\right)$. **23.16.** *Вказівка.* Подайте многочлен $P(x^2)$ у вигляді добутку виразів виду $\left(x^2-\left(\sqrt{x_k}\right)^2\right)$, де x_k — корінь многочлена P, $k\in\mathbb{N}$, $k\leqslant 2n$, і скористайтеся формулою різниці квадратів.

24. Кратні корені

24.5. 1) Кожний із коренів $z_1=1$, $z_2=-1$, $z_3=i$, $z_4=-i$ має кратність п'ять; 2) кожний із коренів $z_1=1+2i$, $z_2=1-2i$ має кратність три; 3) кожний із коренів $z_1=2i$, $z_2=-2i$, $z_3=-3$ має кратність сім, а корінь $z_4=3$ — кратність дев'ять; 4) кожний із коренів $z_1=-2$, $z_2=1-i$, $z_3=1+i$ має кратність чотири. **24.6.** 2) Кожний із коренів $z_1=\sqrt{2}$, $z_2=-\sqrt{2}$ має кратність один, а кожний із коренів $z_3=\sqrt{2}i$, $z_4=-\sqrt{2}i$ — кратність три; 3) кожний із коренів $z_1=1$, $z_2=3-i$, $z_3=3+i$ має кратність два. **24.7.** 1) $(x-2)^3(x-3)^2$; 2) $(x^2+1)^2$; 4) $(x^2+2x+5)(x^2-2x+2)^2$. **24.9.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, $P(x)=(x-1)^3$, $Q(x)=(x-1)^2$. **24.10.** Так. **24.11.** 4) 4. **24.12.** 3) 3. **24.13.** $A=2019$, $B=2020$. **24.14.** $A=-2019$, $B=2018$. **24.15.** $x_1=2-2\sqrt{3}$ та $x_2=2+2\sqrt{3}$ — корені кратності два. *Вказівка.* Розв'яжіть рівняння $P'(x)=0$. **24.16.** $x_1=-1-\sqrt{3}$ та $x_2=-1+\sqrt{3}$ — корені кратності два. **24.17.** *Вказівка.* Якщо x_0 — кратний корінь многочлена P, то x_0 — корінь многочлена $P'(x)=3x^2+2ax+5$. Звідси $x_0\in\{-1,1,-5,5\}$. **24.21.** *Вказівка.* Доведіть, що будь-який кратний корінь многочлена P є коренем многочлена $P - P'$. **24.23.** Ні. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, многочлен $P(x) = (x - x_0)^{k+1} + 1$. **24.24.** Ні. *Вказівка.* Між двома коренями многочлена P є корінь многочлена P'. Тому многочлен P' степеня $n - 1$ має не менше ніж $n - 1$ різних коренів. **24.25.** Так. *Вказівка.* Розгляньте, наприклад, многочлен $P(x) = x^n - 1$. **24.27.** *Вказівка.* Доведіть, що многочлен $P(x) - P(x_0)$ можна подати у вигляді $(x - x_0)^{2012} Q(x)$, де $Q(x_0) \neq 0$. **24.29.** *Вказівка.* Нехай $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$. З доведеного в ключовій задачі 23.9 випливає, що $\bar{z}_0$ є коренем многочлена P. Позначимо кратність кореня $\bar{z}_0$ через m. Тоді многочлен P можна подати у вигляді $P(x) = (x - z_0)^k \left(x - \bar{z}_0\right)^m Q(x)$, де $Q(z_0) \neq 0$, $Q(\bar{z}_0) \neq 0$. Припустимо, що $m < k$. Тоді можна записати: $P(x) = \left(x^2 - \left(z_0 + \bar{z}_0\right)x + z_0\bar{z}_0\right)^m (x - z_0)^{k-m} Q(x)$, де коефіцієнти многочлена $R(x) = \left(x^2 - \left(z_0 + \bar{z}_0\right)x + z_0\bar{z}_0\right)^m$ є дійсними числами. Многочлен P ділиться націло на многочлен R. Тоді частка від цього ділення — многочлен $P_1(x) = (x - z_0)^{k-m} Q(x)$ — також має дійсні коефіцієнти. З доведеного в ключовій задачі 23.9 випливає, що $\bar{z}_0$ є коренем многочлена P_1, тому $Q\left(\bar{z}_0\right) = 0$. Отримали суперечність. Випадок $m > k$ розглядається аналогічно. **24.30.** *Вказівка.* Нехай розв'язком нерівності є множина $\{x_0\}$. Тоді x_0 — корінь парної кратності многочлена P. **24.31.** *Вказівка.* Скористайтеся доведеним у ключовій задачі 23.11. **24.32.** *Вказівка.* Скористайтеся задачею 24.31. **24.33.** *Вказівка.* Використовуючи доведене в ключовій задачі 23.11, розкладіть многочлен у добуток многочленів першого та другого степенів з дійсними коефіцієнтами, де многочлени другого степеня мають від'ємні дискримінанти. Доведіть, що всі многочлени першого степеня входять у цей добуток у парних степенях. Далі в кожному многочлені другого степеня виділіть повний квадрат і розкрийте дужки в добутку. **24.34.** Якщо n — парне число, то $n/2$; якщо n — непарне число, то $(n+1)/2$. *Вказівка.* Спочатку доведіть, що многочлен $P^{(m)}$ має $n - m$ різних простих дійсних коренів. Якщо припустити, що многочлен P має деякі два сусідніх нульових коефіцієнти, то існуватиме таке m, що $P^{(m)}(x) = a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_{n-m}x^{n-m}$. Це означає, що число $x_0 = 0$ є коренем многочлена $P^{(m)}$ кратності не менше ніж два. З отриманої суперечності випливає, що многочлен P не має двох сусідніх нульових коефіцієнтів. Водночас многочлени $(x^2-1)(x^2-2)\ldots(x^2-k)$ та $x(x^2-1)(x^2-2)\ldots(x^2-k)$ є прикладами многочленів парного і непарного степенів, у яких кожний другий коефіцієнт нульовий.

25. Кубічні рівняння

25.6. -6 — простий корінь і 2 — корінь кратності два. **25.7.** $\frac{67}{625}$. **25.8.** 56. **25.9.** $p=6$, $q=-11$. **25.11.** -3. **25.13.** 3) 3. *Вказівка.* Скористайтеся тим, що $\frac{x_2+x_3}{x_1}+\frac{x_1+x_3}{x_2}+\frac{x_1+x_2}{x_3}=\frac{s-x_1}{x_1}+\frac{s-x_2}{x_2}+\frac{s-x_3}{x_3}$, де $s=x_1+x_2+x_3$; 4) $\frac{31}{2}$. *Вказівка.* Додайте значення многочлена $2x^3-4x^2-3x+1$ при $x=x_1$, $x=x_2$ і $x=x_3$. **25.14.** 1) 2; 2) -19; 3) 13. **25.17.** *Вказівка.* Оскільки $x_1+x_2+x_3=0$, то $t_1=-x_1$. Тому $Q(t_1)=(-x_1)^3+p(-x_1)-q=-P(x_1)=0$. Інше доведення можна отримати, якщо перевірити рівності $t_1+t_2+t_3=0$, $t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=p$, $t_1t_2t_3=q$. **25.18.** *Вказівка.* Переконайтеся, що $t_1+t_2+t_3=p$, $t_1t_2+t_1t_3+t_2t_3=0$, $t_1t_2t_3=q^2$. **25.20.** $x^3+7x^2+14x-1=0$. **25.21.** $x^3-4x^2+7x-2=0$. **25.22.** 1) $\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}$; $\left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\right)\sqrt{3}i$; $\left(\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{2}\right)\sqrt{3}i$; 2) $2\cos\frac{\pi}{9}-2$; $2\cos\frac{5\pi}{9}-2$; $2\cos\frac{7\pi}{9}-2$. **25.23.** 1) $\sqrt[3]{9}-2\sqrt[3]{3}$; $\left(\frac{2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}}{2}\right)\sqrt{3}i$; $\left(\frac{2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9}}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}}{2}\right)\sqrt{3}i$; 2) $2\cos\frac{2\pi}{9}+3$; $2\cos\frac{4\pi}{9}+3$; $2\cos\frac{8\pi}{9}+3$. **25.24.** 1) $(-1; 2; 3)$; $(-1; 3; 2)$; $(2; 3; -1)$; $(2; -1; 3)$; $(3; 2; -1)$; $(3; -1; 2)$; 3) $(-3; 1; 1)$; $(1; -3; 1)$; $(1; 1; -3)$. **25.25.** 2) $(2; 4; -3)$; $(2; -3; 4)$; $(4; 2; -3)$; $(4; -3; 2)$; $(-3; 4; 2)$; $(-3; 2; 4)$; 3) $(2; -1; 1)$; $(2; 1; -1)$; $(1; -1; 2)$; $(1; 2; -1)$; $(-1; 1; 2)$; $(-1; 2; 1)$. **25.27.** Ні. *Вказівка.* Наведіть приклад многочлена з раціональними коефіцієнтами, який має три ірраціональних корені. **25.28.** $x=-abc$, $y=ab+ac+bc$, $z=-(a+b+c)$. **25.29.** *Вказівка.* Нехай числа x, y, z є коренями многочлена

$P(z)=z^3-pz^2+qz-r$. За умовою задачі $p-3q+9r=\frac{1}{3}$. **25.30.** Ні. *Вказівка.* Числа a, b, c мали б бути коренями рівняння $x^3+d=0$. **25.31.** *Вказівка.* Розгляньте кубічний многочлен з коренями x, y, z та за теоремою Вієта знайдіть зв'язок між його коефіцієнтами. Далі підставте у цей многочлен значення a. **25.32.** *Вказівка.* Розгляньте кубічний многочлен з коренями a, b, c та за теоремою Вієта знайдіть його коефіцієнти. Далі покажіть, що цей многочлен не має від'ємних коренів. **25.34.** *Вказівка.* Розгляньте многочлени $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$ та $Q(x)=(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$ і доведіть, що вони відрізняються лише вільним членом. Це означає, що графік многочлена Q можна отримати з графіка многочлена P паралельним перенесенням угору чи вниз. **25.35.** *Вказівка.* Доведіть, що $q=xy+xz+yz=8$. Позначте $r=xyz$. Тоді x, y, z є коренями рівняння $t^3-5t^2+8t-r=0$. Дане кубічне рівняння має три (з урахуванням кратності) корені тоді й тільки тоді, коли $4\leqslant r\leqslant\frac{112}{27}$.

25.36. *Вказівка.* Нехай $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$. За умовою задачі x, y, z — раціональні числа. Розглянемо кубічний многочлен $P(t)=t^3+pt^2+qt+r$ з коренями x, y, z. За теоремою Вієта $p=-(x+y+z)=-\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$ — ціле число, $q=xy+xz+yz=$ $=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}+\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{a}+\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$ — ціле число, а $r=-xyz=-\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}=$ $=-1$. Отже, усі коефіцієнти многочлена P — цілі числа, а старший і вільний коефіцієнти дорівнюють 1 і -1 відповідно. Тому раціональними коренями цього многочлена можуть бути лише числа 1 і -1, звідки $|x|=|y|=|z|=1$. **25.37.** *Вказівка.* З умови задачі випливає, що число $ab+bc+ca$ також ділиться націло на n. Розгляньте рівняння $t^5=(a+b+c)t^4-(ab+bc+ca)t^3+abct^2$, коренями якого є числа a, b, c. Послідовно підставте в дане рівняння замість t значення a, b, c та додайте отримані рівності. **25.38.** *Вказівка.* Нехай $q=ab+bc+ca$, $r=abc$. Тоді рівність $t^3-t^2+qt-r=(t-a)(t-b)(t-c)$

виконується для всіх t. При $t=\frac{1}{2}$ отримуємо $-\frac{1}{8}+\frac{q-2r}{2}=$
$=\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)$. Якщо кожне із чисел a, b, c не більше за $\frac{1}{2}$, то з нерівності Коші випливає: $\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)\leqslant$
$\leqslant\left(\frac{\frac{3}{2}-(a+b+c)}{3}\right)^3=\frac{1}{216}$. Тому $-\frac{1}{8}+\frac{q-2r}{2}\leqslant\frac{1}{216}$. Звідси $q-2r\leqslant\frac{7}{27}$.
Якщо ж серед чисел a, b, c є більші за $\frac{1}{2}$, то таке число серед них єдине. Тоді $\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}-b\right)\left(\frac{1}{2}-c\right)\leqslant 0$. Звідси $-\frac{1}{8}+\frac{q-2r}{2}\leqslant 0<\frac{1}{216}$.

Предметний покажчик

ЗМІСТ

Форзац 3

Таблиця первісних деяких функцій

Функція f	Первісна функції f
k (стала)	kx
$x^n,\ n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
e^x	e^x

Правила інтегрування

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

$$\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx,$$

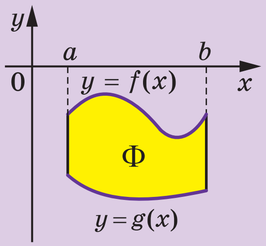
$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

Формула Ньютона—Лейбніца

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Обчислення площ

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



Форзац 4

Трикутник Паскаля

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
...

Біном Ньютона

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

Тригонометрична форма комплексного числа

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad r = \sqrt{a^2+b^2},\quad a = r\cos\varphi,\quad b = r\sin\varphi$$

Формула Муавра

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Корені n–го степеня

$$w^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

$$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

$$k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

Ймовірність об'єднання подій

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Умовна ймовірність

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ймовірність перетину незалежних подій

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

9 789664 743263