11

ISBN 978-966-914-220-7

MATEMATIKA

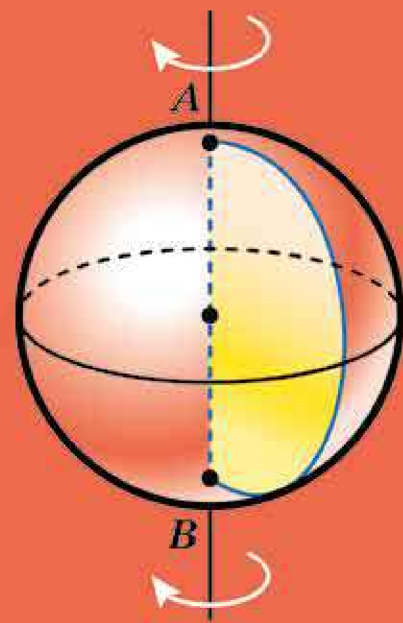
ALGEBRA ÉS AZ ANALÍZIS ELEMEI.
MÉRTAN

11

MATEMATIKA

ALGEBRA ÉS AZ ANALÍZIS ELEMEI. MÉRTAN

STANDARD SZINT



MATEMATIKA

ALGEBRA ÉS AZ ANALÍZIS ELEMEI. MÉRTAN

STANDARD SZINT

Tankönyv
a magyar oktatási nyelvű általános
középfokú tanintézetek 11. osztálya számára

Ajánlotta
Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma

Львів
Видавництво „Світ”
2019

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]
М52

Перекладено за виданням:
Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019

Авторський колектив:
Аркадій МЕРЗЛЯК,
Дмитро НОМІРОВСЬКИЙ,
Віталій ПОЛОНСЬКИЙ,
Михайло ЯКІР

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 12.04.2019 № 472)

Видано за державні кошти. Продаж заборонено

Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія,
М52 рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. з навч. угор. мовою закл. загал. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. Д. Ф. Поллої. – Львів : Світ, 2019. – 208 с. : іл.
ISBN 978-966-914-220-7

УДК [373.5 : 372.851] : [512.1 + 514.1]

ISBN 978-966-914-220-7 (угор.)
ISBN 978-966-474-323-2 (укр.)

A SZERZŐKTŐL

Kedves tizenegyedikes tanulók!

Ebben a tanévben befejezitek az iskolát, és bízunk benne, hogy a megszerzett tudás megbízható alap lesz számotokra jövőbeli szakmátok elsajátításához. Reményeink szerint ebben segíteni fog nektek ez a tankönyv is. Ismerkedjetek meg a szerkezetével.

A tankönyv hét paragrafusra van tagolva, amelyek mindegyike pontokból áll. A pontok elméleti anyagának tanulmányozása során külön figyeljetek a **félkövér**, ***félkövér dőlt*** és *dőlt* betűkkel szedett szövegrészekre; a könyvben így vannak kiemelve a meghatározások, szabályok és a legfontosabb matematikai állítások. Természetesen az elméleti részt rendszerint gyakorló feladatok követik. Ezeket úgy tekinthetjük, mint a feladat megoldásának egyik lehetséges módját.

A könyvben számos fontos tételt ismerhettek meg. Közülük néhány bizonyítással együtt szerepel. Azokban az esetekben, amikor a bizonyítás nem tartozik az iskolai tananyag keretébe, csak a tétel megfogalmazását közöljük.

Mindegyik ponthoz önálló munkára ajánlott feladatok találhatók. Ezek megoldásához csak az elméleti tananyag elsajátítása után kezdjetek. A feladatok között vannak egyszerűek, közepes nehézségi fokozatúak és bonyolultak, mindenekelőtt azok, melyek **(*)**-gal vannak jelölve.

A tananyagon kívül a tankönyvből megismerhettek matematikatörténeti érdekességeket, különös tekintettel az ukrán matematikusok tevékenységére.

Sok sikert kívánunk!

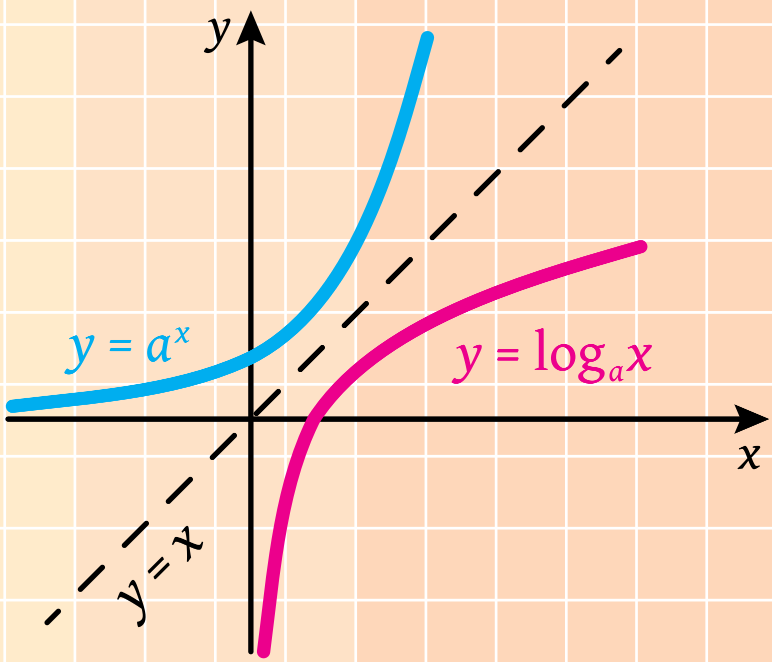
EGYEZMÉNYES JELEK

n°	alap- és középszintű tudásnak megfelelő feladatok
$n^{\bullet}$	az elégséges tudásszintnek megfelelő feladatok
$n^{\bullet\bullet}$	magas tudásszintnek megfelelő feladatok
n^{*}	matematikai szakkörökre és tanórán kívüli foglalkozásokra ajánlott feladatok
◀	tétel bizonyításának és a feladat megoldásának végét jelölő karakter
	kulcsfeladatok, amelyek eredményei felhasználhatók más feladatok megoldása során
	*Elkészültem a leckével* c. rovat

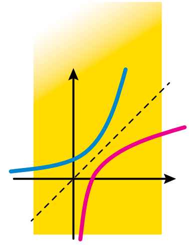
A **zöld** számozású példákat házi feladatként, a **kék** számozásúakat szóbeli feladatként ajánljuk.

1. fejezet

Algebra és az analízis elemei



1.§. EXPONENCIÁLIS ÉS LOGARITMUS-FÜGGVÉNY

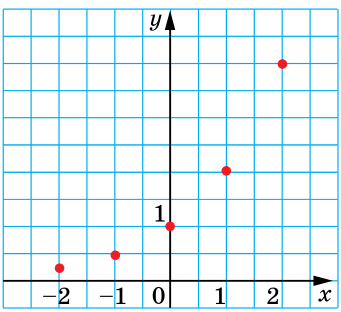


Ebben a paragrafusban megismerkedtek bármilyen valós kitevőjű hatvány fogalmával. Megtudjátok, hogy mely függvényeket nevezünk exponenciális és logaritmus függvényeknek, elsajátítjátok a tulajdonságaikat, megtanultok exponenciális és logaritmus egyenleteket és egyenlőtlenségeket megoldani.

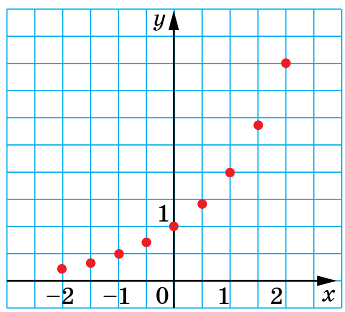
1. Exponenciális függvény és tulajdonságai

Vizsgáljuk meg az $f(x) = 2^x$ függvényt, ahol az x racionális szám, vagyis az f függvény értelmezési tartománya a $\mathbb{Q}$ halmaz lesz.

Az 1.1 ábrán az f függvény grafikonjának pontjait jelölték, amelyek valamely x egész számoknak felelnek meg. Kiszámítjuk az $f(x) = 2^x$ függvény értékét valamilyen x törtszám esetén. Például, ha $x = \frac{1}{2}$, akkor $2^x = 2^{\frac{1}{2}} = \mathbf{1{,}41...}$. Ha az 1.1. ábrán az f függvény grafikonjának pontjaihoz hozzáadjuk az $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$ megfelelő pontokat, akkor az 1.2. ábrán látható ponthalmazt kapunk.



1.1. ábra



1.2. ábra

Az f függvény grafikonjáról sokkal pontosabb képet kaphatunk, ha azokat a pontokat is megjelöljük rajta, amelyek az argumentum más racionális értékeinek felelnek meg (1.3. ábra).

Kiderül, hogy csak egy olyan, az $\mathbb{R}$ halmazon folytonos g függvény létezik, amelynek grafikonja az f függvény grafikonjának minden pontjára illeszkedik. Az f függvény grafikonja pontjainak halmaza részhalmaza lesz a g függvénygrafikon pontjai halmazának.

A g függvényt 2-es alapú **exponenciális függvénynek** nevezzük, és a jelölése: $g(x) = 2^x$.

Hasonlóan vizsgálhatjuk meg a bármilyen a alapú exponenciális függvényt, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$. Így jelöljük: $g(x) = a^x$.

A g függvény x pontbeli értékét a **pozitív *a* szám valós *x* kitevőjű hatványának** nevezzük és így jelöljük: a^x.

A racionális kitevőjű hatvány nagyon sok tulajdonsága érvényes lesz a valós kitevőjű hatványra is.

Ha $a > 0$, $b > 0$ és bármilyen valós x és y-ra érvényesek a következő egyenlőségek:

1) $\boldsymbol{a^x a^y = a^{x+y}}$;

2) $\boldsymbol{a^x : a^y = a^{x-y}}$;

3) $\boldsymbol{(a^x)^y = a^{xy}}$;

4) $\boldsymbol{(ab)^x = a^x b^x}$;

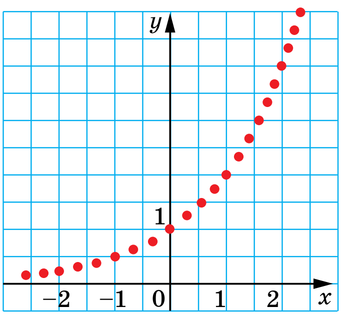
5) $\boldsymbol{\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}}$.

1. feladat. Egyszerűsítsétek a kifejezést $\dfrac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}}$!

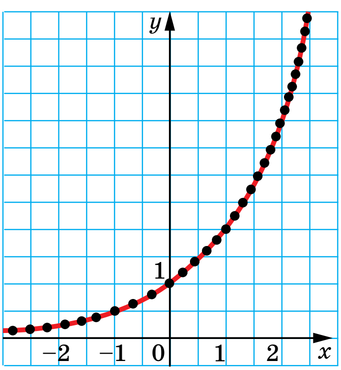
Megoldás. Az következőt kapjuk:

$$\frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{3\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}\right)}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = \frac{\left(a^{\sqrt{7}}+1\right)\left(a^{\sqrt{7}}-1\right)a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} =$$

$$= \frac{\left(a^{2\sqrt{7}}-1\right)a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = \frac{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{2\sqrt{7}}} = 1. ◀$$



1.3. ábra

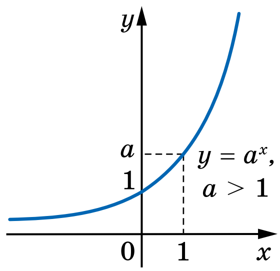


1.4. ábra

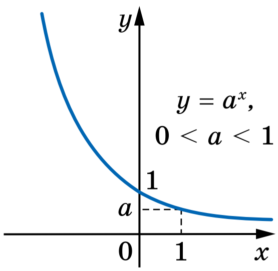
Vizsgáljuk meg az $f(x) = a^x$ függvényt, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$.

- *Az exponenciális függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza, vagyis* $D(f) = \mathbb{R}$.
- *Az exponenciális függvény értékkészlete a* $(0; +\infty)$ *halmaz lesz, vagyis* $E(f) = (0; +\infty)$.
- *Az exponenciális függvénynek nincsenek zérushelyei, és* a $(-\infty; +\infty)$ *intervallum az előjeltartási intervalluma.*
- *Ha* $a > 1$*, az exponenciális függvény növekvő; ha* $0 < a < 1$*, az exponenciális függvény fogyó.*
- *Az exponenciális függvény differenciálható.* Az exponenciális függvény deriváltjáról a 8. pontban tudhattok meg többet.

Az 1.5. és az 1.6. ábrákon az exponenciális függvény grafikonjának vázlata látható az $a > 1$ és $0 < a < 1$ esetében.



1.5. ábra



1.6. ábra

Az exponenciális függvénynek $y = a^x$ egy fontos tulajdonságát jegyezzük meg, amely az x abszolút értékének növekedésével függ össze. Ha $a > 1$ és $x < 0$, akkor az $y = a^x$ függvény grafikonja pontjai és az abszcisszatengely közötti távolság kisebb és kisebb lesz, de soha nem lesz nullával egyenlő. Hasonló tulajdonsággal rendelkezik az $y = a^x$ függvény grafikonja is, ha $0 < a < 1$ és $x > 0$.

2. feladat. Határozzátok meg az $f(x) = 3^x$ függvény legkisebb és legnagyobb értékét a $[-4; 3]$ intervallumon!

Megoldás. Mivel az f függvény növekvő a $[-4; 3]$ intervallumon (1.5. ábra), akkor a legkisebb értékét az $x = -4$ pontban, a legnagyobbat az $x = 3$ pontban veszi fel. Tehát

$$\min_{[-4;3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81}, \qquad \max_{[-4;3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Felelet: $\frac{1}{81}$, 27. ◄

1. Milyen tulajdonságokkal rendelkeznek a valós kitevőjű hatványok?
2. Fogalmazzátok meg az exponenciális hatványfüggvény tulajdonságait!
3. Ábrázoljátok az $y = a^x$ függvény grafikonjának vázlatát, ha $a > 1$; ha $0 < a < 1$!

GYAKORLATOK

1.1.° Az adott függvények közül melyik exponenciális:
1) $y = x^6$; 2) $y = \sqrt[6]{x}$; 3) $y = 6^x$; 4) $y = 6$?

1.2.° Az exponenciális függvény mely tulajdonsága alapján állíthatjuk, hogy
1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$?

1.3.° Állapítsátok meg, hogy az adott függvények közül melyek növekvők, és melyek fogyók:
1) $y = 10^x$; 3) $y = 2^{-x}$; 5) $y = 2^x \cdot 3^x$;
2) $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; 6) $y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x$!

1.4.° Szerkesszétek meg az $y = 3^x$ függvény grafikonját! Milyen határok között változnak a függvény értékei, ha x –1-től 3-ig bezárólag növekszik?

1.5.° Szerkesszétek meg az $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ függvény grafikonját! Milyen határok között változnak a függvény értékei, ha x –2-től 2-ig bezárólag növekszik?

1.6.° Hasonlítsátok össze:
1) $5^{3,4}$ és $5^{3,26}$; 3) 1 és $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$; 5) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}$ és $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{7}}$;
2) $0,3^{0,4}$ és $0,3^{0,3}$; 4) $0,17^{-3}$ és 1; 6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7}$ és $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$!

1.7.° Hasonlítsátok össze 1-gyel a kifejezés értékét!
1) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$; 2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $\left(\frac{6}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 4) $\left(\frac{7}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 5) $0,62^{-0,4}$; 6) $3,14^{-0,4}$.

1.8.° Hasonlítsátok össze 1-gyel a pozitív értékét, ha:
1) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$; 2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$; 3) $a^{-0,3} > a^{1,4}$; 4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1,2}$!

1.9.° Hasonlítsátok össze az m és n számokat, ha:

1) $0{,}8^m < 0{,}8^n$;
3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$;
2) $3{,}2^m > 3{,}2^n$;
4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$!

1.10.• Számítsátok ki a kifejezés értékét:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$; 2) $\left(\left(3\sqrt[3]{7}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$; 4) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$!

1.11.• Határozzátok meg a kifejezés értékét:

1) $5^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\frac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}}$; 2) $\left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$; 3) $\left(\left(\sqrt[5]{10}\right)^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$!

1.12.• Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $\left(a^{\sqrt{5}}+2\right)\left(a^{\sqrt{5}}-2\right)-\left(a^{\sqrt{5}}+3\right)^2$; 2) $\frac{a^{2\sqrt{3}}-b^{2\sqrt{2}}}{\left(a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}\right)^2}+1$!

1.13.• Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $\left(\left(a^{\pi}+b^{\pi}\right)^2-\left(a^{\pi}-b^{\pi}\right)^2\right)^{\frac{1}{\pi}}$; 2) $\frac{a^{2\sqrt{7}}-a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}}-a^{3\sqrt{7}}}$!

1.14.• Igaz-e az állítás:

1) a [–1; 2] intervallumon az $y = 0{,}2^x$ függvény legnagyobb értéke 5 lesz;
2) az $y = 4 - 7^x$ függvény értelmezési tartománya a valós számok halmaza lesz;
3) az $y = 6^x + 5$ függvény értékkészlete az $[5; +\infty)$ intervallum lesz;
4) az $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ függvény legkisebb értéke a [–2; 2] intervallumon 16-tal egyenlő?

1.15.• Határozzátok meg az $y = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ függvény legnagyobb értékét a [–2; 3] intervallumon!

1.16.• Az $y = 2^x$ függvény milyen intervallumon veszi fel 16-os legnagyobb értékét, és az $\frac{1}{4}$ legkisebbet?

1.17.• Az $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ függvény milyen intervallumon veszi fel 27-es legnagyobb értékét, és az $\frac{1}{9}$ legkisebbet?

1.18.• Határozzátok meg a függvény értékkészletét:

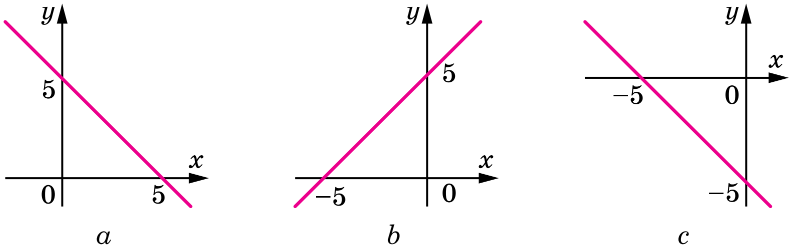
1) $y=-9^x$; 2) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^x+1$; 3) $y=7^x-4$; 4) $y=6^{|x|}$!

1.19.• Oldjátok meg az egyenlőtlenséget:

1) $2^x>-1$; 2) $2^{\sqrt{x}}>-2$!

1.20.• Oldjátok meg a $2^{\frac{1}{x}}>0$ egyenlőtlenséget!

1.21.•• Az 1.7. ábrán látható függvények grafikonjai közül melyik metszi az $y=5^x$ függvény grafikonját egynél több pontban?



1.7. ábra

1.22.•• Határozzátok meg grafikusan az egyenlet gyökeinek számát:

1) $2^x=x$; 2) $2^x=\sin x$; 3) $2^{-x}=2-x^2$!

1.23.•• Határozzátok meg grafikusan az egyenlet gyökeinek számát:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=x^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=\cos x$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=4-\frac{3}{x}$!

1.24.•• Szerkesszétek meg az $y=\sqrt{2^{\cos x}-2}$ függvény grafikonját!

1.25.* Határozzátok meg a függvények legnagyobb és legkisebb értékeit:

1) $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$; 2) $y=3^{|\sin x|}-2$!

1.26.* Határozzátok meg a függvények legnagyobb és legkisebb értékeit:

1) $y=6^{\cos x}$; 2) $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{|\cos x|}+5$!

KÉSZÜLJÜNK FEL A KÖVETKEZŐ TÉMÁRA

1.27. Adjátok meg az 1; 4; 8; 16; $\frac{1}{32}$; $\frac{1}{64}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{32}$ számokat a következő számok hatványaként: 1) 2; 2) $\frac{1}{2}$!

1.28. Adjátok meg az 1; 9; 81; $\frac{1}{27}$; $\sqrt{27}$; $\sqrt[5]{243}$ számokat a következő számok hatványaként: 1) 3; 2) $\frac{1}{3}$!

1.29. Egyszerűsítsétek a kifejezéseket:

1) $7^{x+1} + 7^x$;
2) $2^{x+1} + 2^{x-4}$;
3) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1}$;
4) $2^{x+3} + 3 \cdot 2^{x+2} - 5 \cdot 2^{x+1}$;
5) $\left(\frac{1}{6}\right)^{1-x} + 36^{\frac{x}{2}} - 6^{x+1}$;
6) $9^{x+1} + 3^{2x+1}$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1.30. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományát:

1) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - 2x - 8}$;
2) $f(x) = \sqrt{16x - x^2}$!

1.31. Határozzátok meg a függvények értékkészletét:

1) $f(x) = 12 - 4x - x^2$;
2) $f(x) = 3 + \sqrt[4]{x-1}$;
3) $f(x) = \cos x \operatorname{tg} x$!

SZÜKSÉG VAN-E AZ EXPONENCIÁLIS FÜGGVÉNYEK TANULMÁNYOZÁSÁRA?

Az exponenciális függvény a természetben és az emberi tevékenységek során végbemenő folyamatok matematikai modellje.

Például a biológusok számára ismert tény, hogy a baktériumok mennyisége adott körülmények között egyenlő időközönként ugyanannyiszorosan növekszik.

Ez azt jelenti, hogyha például $t = 0$ időpontban a tömegük a volt, akkor $t = 2$, $t = 3$, …, $t = n$, … időpontokban a tömegük megfelelően a^2, a^3, …, a^n, … lesz. Ezért úgy tekinthető, hogy bármely t időpontban a tömegük a^t lesz. Ellenőrizhető (végezzétek el önállóan), hogy az $f(t) = a^t$ függvény értéke egyenlő időközönként ugyanannyiszorosára változik.

Ezért a vizsgált folyamat leírható az $f(t) = a^t$ exponenciális függvény segítségével.

Fizikából tudott, hogy a radioaktív bomlási folyamat során a radioaktív anyag egyenlő időintervallumokban ugyanannyiszorosan fog csökkenni.

Ha pénzt teszünk a bankszámlára adott százalékos kamatra, akkor minden évben a számlánkon lévő összeg ugyanannyiszorosan fog növekedni.

Ezért ezek a folyamatok leírhatók exponenciális függvénnyel.

2. Exponenciális egyenletek

Vizsgáljuk meg a következő egyenleteket: $2^x = 8$,

$$3^x \cdot 3^{x-1} = 4,$$

$$0{,}3^{x-4} = 0{,}3^{x^2}.$$

Ezekben az egyenletekben a változó csak a hatványkitevőben van. A fenti egyenletek lehetnek példái **az exponenciális egyenleteknek**.

2.1. tétel. ***Ha az $a > 0$ és $a \neq 1$, az $a^{x_1} = a^{x_2}$ egyenlőség csak akkor és csakis akkor teljesül, ha $x_1 = x_2$.***

Bizonyítás. Egyértelmű, hogyha $x_1 = x_2$, akkor $a^{x_1} = a^{x_2}$.

Bebizonyítjuk, hogy az $a^{x_1} = a^{x_2}$ egyenlőségből következik az $x_1 = x_2$ egyenlőség is.

Feltételezzük, hogy $x_1 \neq x_2$, vagyis $x_1 < x_2$ vagy $x_1 > x_2$. Legyen például $x_1 < x_2$.

Vizsgáljuk meg az $y = a^x$ függvényt. Ez vagy növekvő, vagy fogyó (csökkenő) függvény lesz. Ekkor az $x_1 < x_2$ egyenlőtlenségből következik, hogy az $a^{x_1} < a^{x_2}$ (az $a > 1$ esetében) vagy $a^{x_1} > a^{x_2}$ (a $0 < a < 1$ esetében). Viszont feltétel szerint teljesül az $a^{x_1} = a^{x_2}$ egyenlőtlenség. Ellentmondást kaptunk.

Hasonlóan megvizsgálva az $x_1 > x_2$ esetet, ekkor is ellentmondást kapunk. Tehát az $x_1 = x_2$. ◄

Következmény. ***Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor az***

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

egyenlet egyenértékű az

$$f(x) = g(x).$$

egyenlettel.

Vizsgáljuk meg az exponenciális egyenletek megoldásának példáit.

1. feladat. Oldjátok meg a $2^x = 8$ egyenletet!

Megoldás. Az egyenlet mindkét oldalát 2-es alapra hozzuk. A következőt kapjuk:

$$2^x = 2^3.$$

Innen $x = 3$.

Felelet: 3. ◄

2. feladat. Oldjátok meg a következő egyenletet: $3^{2x+1} + 9^x = 36.$

Megoldás. A következőt kapjuk: $3^{2x+1} + (3^2)^x = 36;$ $3^{2x+1} + 3^{2x} = 36.$

Kivisszük a 3^{2x} tényezőt a zárójel elé: $3^{2x}(3^1+1)=36.$

A következőt kapjuk: $3^{2x}\cdot 4=36$; $3^{2x}=9$; $3^{2x}=3^2$; $2x=2$; $x=1$.

Felelet: 1. ◀

3. feladat. Oldjátok meg a következő egyenletet: $25^x+4\cdot 5^x-5=0$!

Megoldás. Mivel $25^x=(5^2)^x=5^{2x}=(5^x)^2$, ezért az adott egyenletet a helyettesítési módszerrel célszerű megoldani.

Legyen $5^x=t$. Tehát az adott egyenlet így írható át:

$$t^2+4t-5=0.$$

Innen $t=1$ vagy $t=-5$.

Ha $t=1$, akkor $5^x=1$. Innen $5^x=5^0$; $x=0$.

Ha $t=-5$, akkor $5^x=-5$. Mivel $5^x>0$ bármilyen x esetén, ezért az $5^x=-5$ egyenletnek nincsenek gyökei.

Felelet: 0. ◀

4. feladat. Oldjátok meg a következő egyenletet: $9\cdot 5^x=25\cdot 3^x$!

Megoldás. Adott: $3^2\cdot 5^x=5^2\cdot 3^x$. Innen $\dfrac{5^x}{3^x}=\dfrac{5^2}{3^2}$; $\left(\dfrac{5}{3}\right)^x=\left(\dfrac{5}{3}\right)^2$; $x=2$.

Felelet: 2. ◀

1. Mit mondhatunk az x_1 és x_2-ről, ha teljesül a következő egyenlőség: $a^{x_1}=a^{x_2}$, ha $a>0$ és $a\neq 1$?
2. Milyen egyenlet lesz egyenértékű $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, ha $a>0$ és $a\neq 1$?

GYAKORLATOK

2.1.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $4^x=64$;
2) $3^x=\dfrac{1}{81}$;
3) $0{,}6^{2x-3}=1$;
4) $10^{-x}=0{,}001$;
5) $2^{5-x}=2^{3x-7}$;
6) $8^x=16$;
7) $\sqrt{5^x}=25$;
8) $0{,}25^{x^2-4}=2^{x^2+1}$;
9) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{x-1}\cdot\left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-1}=\dfrac{2}{3}$;
10) $\left(\dfrac{4}{7}\right)^{3x-7}=\left(\dfrac{7}{4}\right)^{7x-3}$;
11) $36^x=\left(\dfrac{1}{216}\right)^{2-x}$;
12) $5^{x^2-2x}=6^{x^2-2x}$!

2.2.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $0{,}4^{x^2-x-6}=1$; 4) $9^{-x}=27$; 7) $\left(\frac{2}{5}\right)^x\cdot\left(\frac{25}{8}\right)^x=\frac{125}{64}$;

2) $\left(\frac{3}{5}\right)^x=\frac{5}{3}$; 5) $\sqrt{2^x}=8^{-\frac{2}{3}}$; 8) $32^{\frac{3}{5}x-2}=4^{6-\frac{3}{2}x}$;

3) $0{,}7^x=2\frac{2}{49}$; 6) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3}=4{,}5^{x-2}$; 9) $3^{x^2-9}=7^{x^2-9}$!

2.3.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $3^{x+2}+3^x=30$; 3) $2^{x+4}-2^x=120$; 5) $5^x+7\cdot5^{x-2}=160$;

2) $4^{x+1}+4^{x-2}=260$; 4) $7^{x+1}+4\cdot7^x=77$; 6) $6^{x+1}-4\cdot6^{x-1}=192$!

2.4.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $5^{x+1}+5^x=150$; 3) $7^{x+2}+4\cdot7^{x-1}=347$;

2) $2^x+2^{x-3}=18$; 4) $4^x-3\cdot4^{x-2}=52$!

2.5.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $2^{2x}-6\cdot2^x+8=0$; 3) $25^x-5^x-20=0$;

2) $9^x-6\cdot3^x-27=0$; 4) $100\cdot0{,}3^{2x}+91\cdot0{,}3^x-9=0$!

2.6.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $6^{2x}-3\cdot6^x-18=0$; 2) $2\cdot4^x-9\cdot2^x+4=0$!

2.7.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $2^x\cdot5^x=0{,}1\cdot(10^{x-1})^5$; 3) $\frac{1}{9}\cdot\sqrt{3^{3x-1}}=81^{-\frac{3}{4}}$;

2) $3^{x-1}=6^x\cdot2^{-x}\cdot3^{x+1}$; 4) $4\cdot2^{\cos x}=\sqrt{8}$!

2.8.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $100^x=0{,}01\sqrt{10}$; 3) $9\cdot3^{\sin x}=\sqrt{27}$;

2) $2^{x-1}\cdot3^{x-1}=\frac{1}{36}\cdot6^{2x+5}$; 4) $\sqrt[5]{7^{x+1}}=\frac{49}{\sqrt{7}}$!

2.9.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $2^x+2^{x-1}+2^{x-2}=56$; 3) $2\cdot7^x+7^{x+2}-3\cdot7^{x-1}=354$;

2) $6\cdot5^x-5^{x+1}-3\cdot5^{x-1}=10$; 4) $4^{x-2}-3\cdot2^{2x-1}+5\cdot2^{2x}=228$!

2.10.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $5^{x+1}+5^x+5^{x-1}=31$; 3) $2^{x+2}-2^{x+1}+2^{x-1}-2^{x-2}=9$;

2) $3^{x+1}-2\cdot3^{x-1}-4\cdot3^{x-2}=17$; 4) $2\cdot3^{2x+1}+3^{2x-1}-5\cdot3^{2x}=36$!

2.11.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $2^{2x+1}-5\cdot2^x+2=0$; 3) $9^x-6\cdot3^{x-1}=3$;

2) $5^{2x-3}-2\cdot5^{x-2}=3$; 4) $\frac{9}{2^x-1}-\frac{21}{2^x+1}=2$!

2.12.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$;

2) $4^{x+0,5} + 7 \cdot 2^x = 4$;

3) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2$;

4) $\dfrac{5}{3^x - 6} + \dfrac{5}{3^x + 6} = 2$!

2.13.•• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $4 \cdot 9^{1,5x-1} - 27^{x-1} = 33$;

2) $0,5^{5-2x} + 3 \cdot 0,25^{3-x} = 5$;

3) $4 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{x-1} - 6 \cdot 3^{x-2} = 15 \cdot 9^{x^2-1}$;

4) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$!

2.14.•• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $6^{x-2} - \left(\dfrac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-1}{2}} = 246$;

2) $5 \cdot 2^{x-1} - 6 \cdot 2^{x-2} - 7 \cdot 2^{x-3} = 8^{x^2-1}$.

3) $6^x + 6^{x-1} - 6^{x-2} = 7^x - 8 \cdot 7^{x-2}$!

2.15.•• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $4^{x+1} + 4^{1-x} = 10$;

2) $5^x - 0,2^{x-1} = 4$!

2.16.•• Oldjátok meg az egyenletet: $3^{x+1} + 3^{2-x} = 28$!

2.17.•• Oldjátok meg az egyenletet: $\sqrt{4^x - 2^x - 3} = \sqrt{4 \cdot 2^x - 7}$!

2.18.•• Oldjátok meg az egyenletet: $\sqrt{1 + 3^x - 9^x} = \sqrt{4 - 3 \cdot 3^x}$!

2.19.* Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0$;

2) $2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 25^{x+0,5} = 0$;

3) $7 \cdot 49^x + 3 \cdot 28^x = 4 \cdot 16^x$;

4) $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$!

2.20.* Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0$;

2) $5 \cdot 2^x + 2 \cdot 5^x = 7 \cdot 10^{\frac{x}{2}}$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

2.21. Oldjátok meg az egyenlőtlenséget: $f'(x) \leqslant 0$, ha $f(x) = \dfrac{x^2 + 21}{x - 2}$!

2.22. Milyen legkisebb értéket vesz fel a következő kifejezés:

$$\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha?$$

3. Exponenciális egyenlőtlenségek

A $0{,}2^x < 25$, $2^x + 5^x > 1$, $7^{x^2} > 2^x$ egyenlőtlenségek az **exponenciális egyenlőtlenségeknek** példái.

Nagyon sok exponenciális egyenlőtlenség megoldásának alapját a következő tétel adja.

3.1. tétel. ***Ha a > 1, akkor az*** $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ***egyenlőtlenség egyenértékű az*** $f(x) > g(x)$ ***egyenlőtlenséggel; ha*** $0 < a < 1$***, akkor az*** $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ ***egyenértékű az*** $f(x) < g(x)$ ***egyenlőtlenséggel.***

Megvizsgálunk néhány példát az exponenciális egyenlőtlenségek megoldására.

1. feladat. Oldjátok meg a $8 \cdot 2^{3x-1} < 0{,}5^{-1}$ egyenlőtlenséget!

Megoldás. Adott: $2^3 \cdot 2^{3x-1} < (2^{-1})^{-1}$; $2^{3x+2} < 2^1$.

Mivel a 2^{3x+2} és 2^1 hatványok alapjai nagyobbak egynél, ezért az utóbbi egyenlőtlenség egyenértékű a következővel:

$$3x + 2 < 1.$$

Ebből következik, hogy $3x < -1$; $x < -\frac{1}{3}$.

Felelet: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. ◄

2. feladat. Oldjátok meg a következő egyenlőtlenséget: $2^{2x} \cdot \left(\frac{3}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{9}{25}\right)^x$!

Megoldás. $4^x \cdot \left(\frac{3}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{9}{25}\right)^x$;

$$\left(4 \cdot \frac{3}{20}\right)^x \geqslant \left(\frac{9}{25}\right)^x; \ \left(\frac{3}{5}\right)^x \geqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{2x}.$$

Mivel $0 < \frac{3}{5} < 1$, ezért az legutóbbi egyenlőtlenség egyenértékű az $x \leqslant 2x$; $x \geqslant 0$.

Felelet: $[0; +\infty)$. ◄

3. feladat. Oldjátok meg a következő egyenlőtlenséget: $2^{2x+1} - 7 \cdot 2^x - 4 < 0$!

Megoldás. $2 \cdot 2^{2x} - 7 \cdot 2^x - 4 < 0$.

Legyen $2^x = t$. Ekkor $2t^2 - 7t - 4 < 0$.

Megoldva ezt az egyenletet, a következőt kapjuk: $-\frac{1}{2} < t < 4$.

Innen: $-\frac{1}{2} < 2^x < 4$.

Mivel $2^x > 0$, ezért a $2^x > -\frac{1}{2}$ bármilyen x-re teljesül. Ezért elegendő megoldani a $2^x < 4$ egyenlőtlenséget.

A következőt kapjuk: $2^x < 2^2$; $x < 2$.

Felelet: **$(-\infty; 2)$.** ◄

1. Hozzatok fel példákat exponenciális egyenlőtlenségekre!
2. Milyen egyenlőtlenség lesz egyenértékű az $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ egyenlőtlenséggel, ha $a > 1$? ha $0 < a < 1$?

GYAKORLATOK

3.1.° Egyenértékűek-e a következő egyenlőtlenségek:

1) $7^{2x+4} > 7^{x-1}$ és $2x + 4 > x - 1$;

2) $0{,}9^{x^2-4} < 0{,}9^{x+2}$ és $x^2 - 4 < x + 2$;

3) $a^x > a^5$, ha $a > 1$ és $x > 5$;

4) $a^x < a^{-3}$, ha $0 < a < 1$ és $x < -3$?

3.2.° Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$; 3) $11^{x-5} < 11^{3x+1}$; 5) $0{,}3^{4x-8} > 1$;

2) $5^x < \frac{1}{5}$; 4) $0{,}4^{6x+1} \geqslant 0{,}4^{2x+5}$; 6) $9^{1-3x} \leqslant 0$!

3.3.° Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $6^{7x-1} > 6$; 2) $10^x < 0{,}001$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{3}{2}\right)^4$; 4) $0{,}2^{2x-9} < 1$!

3.4.• Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $2^{x^2-1} < 8$;

2) $27^{2x+1} > \left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$;

3) $0{,}1^{3x-1} < 1000$;

4) $\left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} < 216^{x+1}$;

5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x-x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5$;

6) $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$;

7) $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{x-0{,}5} > \sqrt{2}$;

8) $4 \cdot 0{,}5^{x(x+3)} \geqslant 0{,}25^{2x}$!

3.5.• Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $3^{2x^2-6} > \frac{1}{81}$;
2) $49^{x+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x$;
3) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-x} < \frac{9}{49}$;
4) $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$;
5) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{x-1} > 9^{-0,5}$!

3.6.• Hány egész megoldása van a következő egyenlőtlenségeknek:

1) $0,2 \leqslant 5^{x+4} \leqslant 125$; 2) $\frac{1}{36} \leqslant 6^{3-x} < 6$; 3) $2 < 0,5^{x-1} \leqslant 32$?

3.7.• Határozzuk meg az egyenlőtlenségek egész megoldásainak összegét:

1) $\frac{1}{3} < 3^{x+3} < 9$; 2) $\frac{1}{8} < 2^{2-x} \leqslant 16$!

3.8.• Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományait:

1) $f(x) = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^x}$; 2) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3^{x+2}-27}}$!

3.9.• Határozzuk meg a függvények értelmezési tartományait:

1) $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^x - 16}$; 2) $f(x) = \sqrt{1-6^{x-4}}$!

3.10.• Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x > 5$;
2) $9 \cdot 3^{x-1} + 3^x < 36$;
3) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} > 56$;
4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \geqslant 26$;
5) $2 \cdot 6^x + 3 \cdot 6^{x+3} \leqslant 650$;
6) $\left(\frac{3}{4}\right)^x - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} > \frac{3}{16}$!

3.11.• Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $3^{x+2} - 4 \cdot 3^x < 45$;
2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant 3$;
3) $5^x + 5^{x-1} - 5^{x-2} > 145$;
4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < 1\frac{2}{3}$!

3.12.•• Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 > 0$;
2) $4^x + 2^{x+3} - 20 < 0$;
3) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 \leqslant 0$;
4) $0,25^x - 12 \cdot 0,5^x + 32 \geqslant 0$;
5) $6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x - 4 \leqslant 0$;
6) $25^x + 5^x - 30 \geqslant 0$!

3.13.•• Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $9^{x+1}-2\cdot 3^{x}-7\leqslant 0$;
3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+2>0$;
2) $2^{x}+2^{\frac{x}{2}}-72\geqslant 0$;
4) $25^{x}-26\cdot 5^{x}+25\leqslant 0$!

3.14.•• Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $\frac{5^{x}-125}{x^{2}-4x+4}\leqslant 0$;
2) $\frac{16-4^{x}}{9x^{2}+12x+4}\geqslant 0$!

3.15.•• Határozzátok meg az egyenlőtlenségek megoldásának halmazát:

1) $3^{x}-9\cdot 3^{-x}-8>0$;
3) $6^{x+2}+6^{-x}-37\geqslant 0$;
2) $2^{x+3}+2^{1-x}<17$;
4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}\leqslant\frac{6}{5}$!

3.16.•• Határozzátok meg az egyenlőtlenségek megoldásának halmazát:

1) $3^{x+1}-2\cdot 3^{1-x}>7$;
2) $4^{1-x}-0{,}5^{1-2x}\geqslant 1$!

3.17.* Oldjátok meg az egyenlőtlenséget: $2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}\leqslant 1$!

3.18.* Oldjátok meg az egyenlőtlenséget: $3^{\sqrt{x}}-3^{2-\sqrt{x}}\leqslant 8$!

3.19.* Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $3\cdot 4^{x}+2\cdot 9^{x}-5\cdot 6^{x}<0$;
2) $5\cdot 25^{\frac{1}{x}}+3\cdot 10^{\frac{1}{x}}\geqslant 2\cdot 4^{\frac{1}{x}}$!

3.20.* Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $3\cdot 16^{x}+2\cdot 81^{x}-5\cdot 36^{x}<0$;
2) $2\cdot 49^{\frac{1}{x}}-9\cdot 14^{\frac{1}{x}}+7\cdot 4^{\frac{1}{x}}\geqslant 0$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

3.21. Mivel lesz egyenlő a $\frac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}$ kifejezés értéke, ha $\cos\alpha=\frac{1}{5}$?

3.22. Határozzátok meg a $\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}$ kifejezés értékét, ha $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$!

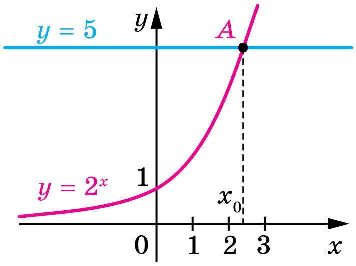
4. A logaritmus és tulajdonságai

Könnyen meg lehet oldani a $2^{x}=4$ és $2^{x}=8$ egyenlőtlenségeket. Ezeknek a gyökei megfelelően a 2 és a 3 lesz.

Viszont a $2^{x}=5$ egyenletnek a gyökét nehéz kapásból megmondani.

Felmerül egy természetes kérdés: van-e egyáltalán gyöke ennek az egyenlőtlenségnek.

Vizsgáljuk meg a grafikus megoldását. A 4.1. ábrán az $y = 2^x$ és az $y = 5$ függvények grafikonjai láthatók. Ezek metszik egymást egy valamilyen $A(x_0;\ 5)$ pontban. Tehát a $2^x = 5$ egyenletnek egyetlen x_0 gyöke lesz.



4.1. ábra

A $2^x = 5$ egyenlet gyökét az **5 szám 2-es alapú logaritmusának** nevezzük, és $\log_2 5$-nek jelöljük. Így a $\log_2 5$ szám az a hatványkitevő lesz, amelyre fel kell emelni a 2-t, hogy megkapjuk az 5-ös számot. Fel lehet írni, hogy:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

Meghatározás. A pozitív b szám a alapú $a > 0$ és $a \neq 1$ logaritmusának azt az a hatványkitevőt nevezzük, amelyre fel kell emelni az a számot, hogy megkapjuk a b-t.

A b szám a alapú logaritmusát a következőképpen jelölik: $\log_a b$.

Például a $\log_3 9$ az a hatványkitevő, amelyre fel kell emelni a 3-at, hogy megkapjuk a 9-et. A $\log_3 9 = 2$, mivel $3^2 = 9$.

Még néhány példa:

$$\log_{17} 17 = 1,\ \text{mivel}\ 17^1 = 17;$$
$$\log_{100} 1 = 0,\ \text{mivel}\ 100^0 = 1;$$
$$\log_2 \frac{1}{8} = -3,\ \text{mivel}\ 2^{-3} = \frac{1}{8}.$$

A logaritmus meghatározásából következik, hogyha $a > 0$, $a \neq 1$ és $b > 0$, teljesül a következő egyenlőség:

$$\boxed{a^{\log_a b} = b}$$

Ezt a **logaritmus alapazonosságának** nevezzük.

Például $7^{\log_7 3} = 3$, $0{,}3^{\log_{0,3} 5} = 5$.

Szintén a logaritmus meghatározásából következik, hogyha $a > 0$ és $a \neq 1$

$$\boxed{\log_a 1 = 0}$$

$$\boxed{\log_a a = 1}$$

Azt a logaritmust, amelynek alapja 10, **tízesalapú logaritmusnak** nevezzük. A $\log_{10} b$ helyett így jelöljük: lg b.

Felhasználva ezt a jelölést és az alapazonosságot, bármilyen $b > 0$ esetére felírható: $\mathbf{10^{\lg b} = b}$.

Vizsgáljuk meg a logaritmus legfontosabb tulajdonságait.

4.1 tétel (a szorzat logaritmusa). ***Ha $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor teljesül a következő egyenlőség:***

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

Ez röviden így fogalmazható meg: *a szorzat logaritmusa egyenlő a logaritmusok összegével.*

Bizonyítás. Megvizsgálunk két kifejezést: $a^{\log_a xy}$ és $a^{\log_a x + \log_a y}$. Bebizonyítjuk, hogy ezek egyenlőek.

Felhasználva a logaritmus alapazonosságát és a hatvány tulajdonságát, felírhatjuk:

$$a^{\log_a xy} = xy;$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

Innen $a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$. Ebből a 2.1. tétel alapján kapjuk, hogy $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. ◄

4.2 tétel (a hányados logaritmusa). ***Ha $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor teljesül a következő egyenlőség:***

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Ez röviden így fogalmazható meg: *a hányados logaritmusa egyenlő a logaritmusok különbségével.*

4.3 tétel (a hatvány logaritmusa). ***Ha $x > 0$, $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor bármilyen $\beta \in \mathbb{R}$-re teljesül a következő egyenlőség:***

$$\boxed{\log_a x^{\beta} = \beta \log_a x}$$

4.4 tétel (az egyik alapról áttérés a másik alapra). ***Ha $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, akkor teljesül a következő egyenlőség:***

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

1. következmény. ***Ha $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, akkor teljesül a következő egyenlőség:***

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

2. következmény. ***Ha $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, akkor bármilyen $\beta \neq 0$-ra teljesül a következő egyenlőség:***

$$\boxed{\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}\log_a b}$$

1. feladat. Oldjátok meg az egyenleteket: 1) $3^x = 7$; 2) $4^{2x-5} = 9$!

Megoldás. 1) A logaritmus meghatározásából következik, hogy $x = \log_3 7$.

2) $2x - 5 = \log_4 9$; $2x = \log_4 9 + 5$; $x = \dfrac{\log_4 9 + 5}{2}$.

Felelet: 1) $\log_3 7$; 2) $\dfrac{\log_4 9 + 5}{2}$. ◄

2. feladat. Számítsátok ki a kifejezés értékét: 1) $10^{2+2\lg 7}$; 2) $9^{\log_3 4 - 0,5}$!

Megoldás. 1) Alkalmazzuk a hatvány tulajdonságait és a logaritmus alapazonosságát, a következőt kapjuk:

$$10^{2+2\lg 7} = 10^2 \cdot 10^{2\lg 7} = 100 \cdot (10^{\lg 7})^2 = 100 \cdot 7^2 = 4900.$$

2) Ehhez jutunk: $9^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4} : (3^2)^{0,5} =$

$$= (3^{\log_3 4})^2 : 3 = 4^2 : 3 = \frac{16}{3}. \text{ ◄}$$

3. feladat. Számítsátok ki a kifejezés értékét: $\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15$!

Megoldás. Alkalmazva a szorzat és a hányados logaritmusának képletét, a következőt kapjuk:

$$\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2 (20 \cdot 12) - \log_2 15 =$$

$$= \log_2 \frac{20 \cdot 12}{15} = \log_2 16 = 4. \text{ ◄}$$

?

1. Mit nevezünk a b szám a alapú logaritmusának, ahol $a > 0$, $a \neq 1$?
2. Milyen egyenlőséget nevezünk a logaritmus alapazonosságának?
3. Fogalmazzátok meg a szorzat logaritmusának tételét!
4. Fogalmazzátok meg a hányados logaritmusának tételét!
5. Fogalmazzátok meg a hatvány logaritmusának tételét!
6. Fogalmazzátok meg egyik alapról a másik alapra történő átmenet tételét és következményeit!

GYAKORLATOK

4.1.° Igaz -e az egyenlőség:

1) $\log_7 \frac{1}{49} = -2$; 3) $\log_5 125 = \frac{1}{3}$; 5) $\log_{0,01} 10 = 2$;

2) $\log_{25} 5 = 2$; 4) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$; 6) $\lg 0,0001 = -4$?

4.2.° Határozzátok meg a számok 2-es alapú logaritmusát:

1) 1; 2) 2; 3) 32; 4) $\sqrt{2}$; 5) 0,5; 6) $\frac{1}{8}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) $2\sqrt{2}$!

4.3.° Határozzátok meg a számok 3-as alapú logaritmusát:

1) 3; 2) $\frac{1}{3}$; 3) 1; 4) 81; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{243}$; 7) $\sqrt{3}$; 8) $3\sqrt{3}$!

4.4.° Határozzátok meg a számok $\frac{1}{2}$ -es alapú logaritmusát:

1) 1; 2) 2; 3) 8; 4) 0,25; 5) $\frac{1}{16}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\sqrt{2}$; 8) 64!

4.5.° Határozzátok meg a számok $\frac{1}{3}$ -os alapú logaritmusát:

1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 3; 4) 81; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; 6) $\sqrt[3]{3}$!

4.6.° Határozzátok meg a számok tízes alapú logaritmusát:

1) 1; 3) 100; 5) 0,1; 7) 0,00001;

2) 10; 4) 1000; 6) 0,01; 8) 0,000001!

4.7.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\log_7 x = -1$; 3) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$; 5) $\log_x 9 = 2$;

2) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; 4) $\log_2 x = 0$; 6) $\log_x 2 = 2$!

4.8.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\log_6 x = 2$; 3) $\log_{0,2} x = -3$; 5) $\log_x 81 = 4$;

2) $\log_{\sqrt[3]{5}} x = \frac{3}{2}$; 4) $\log_x 6 = 5$; 6) $\log_x 11 = -1$!

4.9.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $6^x = 2$; 3) $0,4^x = 9$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$;

2) $5^x = 10$; 4) $2^{x-3} = 5$; 6) $0,3^{3x+2} = 7$!

4.10.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $3^x = 2$; 2) $10^x = \frac{1}{6}$; 3) $7^{x+5} = 9$; 4) $0{,}6^{5x-2} = 20$!

4.11.° Számítsátok ki:

1) $2^{\log_2 32}$; 2) $5^{\log_5 0{,}45}$; 3) $7^{2\log_7 2}$!

4.12.° Számítsátok ki:

1) $3^{\log_3 \frac{1}{27}}$; 2) $5^{\frac{1}{2}\log_5 49}$!

4.13.° Számítsátok ki a kifejezések értékeit:

1) $\log_6 3 + \log_6 2$;
2) $\log_5 100 - \log_5 4$;
3) $\log_{49} 84 - \log_{49} 12$;
4) $\frac{\log_5 64}{\log_5 4}$!

4.14.° Számítsátok ki a kifejezések értékeit:

1) $\lg 8 + \lg 12{,}5$; 2) $\log_3 162 - \log_3 2$; 3) $\frac{\log_7 125}{\log_7 5}$!

4.15.• Számítsátok ki:

1) $64^{0{,}5\log_2 12}$;
2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$;
3) $6^{1+\log_6 5}$;
4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8 - 2}$;
5) $6^{\log_{\frac{1}{6}} 3}$;
6) $2^{3\log_2 5 + 4}$;
7) $8^{1-\log_2 3}$;
8) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2 - 3}$!

4.16.• Számítsátok ki:

1) $4^{\log_2 9}$;
2) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}$;
3) $10^{2+\lg 8}$;
4) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 6 - 3}$;
5) $2^{4\log_2 3 - 1}$;
6) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 9 + 2}$;
7) $8^{1-\frac{1}{3}\log_2 12}$!

4.17.• Számítsátok ki:

1) $\log_2 \log_5 \sqrt[8]{5}$;
2) $\log_{\frac{2}{3}} \log_{49} 343$;
3) $\log_9 \log_2 8$;
4) $\log_3 \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;
5) $\log_2 5 - \log_2 35 + \log_2 56$;
6) $2\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 16$!

4.18.• Számítsátok ki:

1) $\log_3 \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$;
2) $\log_{\frac{1}{3}} \log_4 64$;
3) $\log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$;
4) $3\log_6 2 + \frac{3}{4}\log_6 81$!

4.19.$^{\bullet}$ Határozzátok meg az x értékét, ha:

1) $\log_9 x = \frac{1}{4}\log_9 16 + 2\log_9 5$; 3) $\lg x = 2 + \lg 3 - \lg 5$;

2) $\log_7 x = 2\log_7 8 - 4\log_7 2$; 4) $\log_3 x = \frac{2}{3}\log_3 216 + \frac{1}{2}\log_3 25$!

4.20.$^{\bullet}$ Határozzátok meg az x értékét, ha:

1) $\log_a x = 3\log_a 2 + 2\log_a 3$; 2) $\lg x = \frac{2}{5}\lg 32 - \frac{1}{3}\lg 64 + 1$!

4.21.$^{\bullet\bullet}$ Számítsátok ki a kifejezések értékeit:

1) $\frac{\log_7 27 - 2\log_7 3}{\log_7 45 + \log_7 0{,}2}$; 3) $\log_7 \sin\frac{\pi}{5} \cdot \log_{\sin\frac{\pi}{5}} 49$;

2) $\frac{\log_9 125 + 3\log_9 2}{\log_9 1{,}2 - \log_9 12}$; 4) $\log_3 \cos^2\frac{\pi}{9} \cdot \log_{\cos\frac{\pi}{9}} 9$!

4.22.$^{\bullet\bullet}$ Számítsátok ki a kifejezések értékeit:

1) $\frac{3\lg 4 + \lg 0{,}5}{\lg 9 - \lg 18}$; 3) $\log_{\sqrt{b}} a \cdot \log_a b^3$;

2) $\frac{\lg 625 - 8\lg 2}{\frac{1}{2}\lg 256 - 2\lg 5}$; 4) $\log_{\sqrt[3]{2}} 5 \cdot \log_5 8$!

4.23.$^{\bullet\bullet}$ Számítsátok ki:

1) $5^{\log_5 4 \cdot \log_2 3}$; 4) $2 \cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 8 - 2\lg 2}$;

2) $7^{2\log_7 3 + \log_{\sqrt{7}} 4}$; 5) $\lg\left(25^{\log_5 0{,}8} + 9^{\log_3 0{,}6}\right)$;

3) $9^{2\log_3 2 + 4\log_{81} 2}$; 6) $27^{\frac{1}{\log_5 3}} + 25^{\frac{1}{\log_2 5}} - 36^{\frac{1}{\log_9 6}}$!

4.24.$^{\bullet\bullet}$ Számítsátok ki:

1) $6^{\frac{1}{2}\log_6 9 - \log_{\frac{1}{6}} 3}$; 3) $1000^{\frac{1}{2}\lg 25 - 3\lg 2}$;

2) $12^{\log_{144} 4 + \log_{12} 5}$; 4) $\log_{13}\left(100^{\frac{1}{\log_7 10}} + 2^{\log_2 15 + 3}\right)$!

4.25.$^{\bullet\bullet}$ Számítsátok ki a kifejezés értékét:

$$\lg\sin 1° \cdot \lg\sin 2° \cdot \lg\sin 3° \cdot \ldots \cdot \lg\sin 89° \cdot \lg\sin 90°!$$

4.26.$^{\bullet\bullet}$ Egyszerűsítsétek a kifejezést: $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \lg 9$!

4.27.$^{\bullet\bullet}$ Számítsátok ki a kifejezés értékét: $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 32$!

4.28.•• Szerkesszétek meg a függvények grafikonjait:

1) $y = \log_x 1$; 3) $y = 5^{-\log_5 x}$; 5) $y = 2^{\log_2 x^2}$;

2) $y = 3^{\log_3 (x+3)}$; 4) $y = 10^{\frac{1}{\log_x 10}}$; 6) $y = \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$!

4.29.•• Szerkesszétek meg a függvények grafikonjait:

1) $y = 7^{\log_7 (x+2)}$; 3) $y = \log_x x$;

2) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} (x-1)}$; 4) $y = \dfrac{\lg (x^2+1)}{\lg (x^2+1)}$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

4.30. Egyszerűsítsétek a kifejezést: $\left(\dfrac{a^{0,5}+3b^{0,5}}{a-2a^{0,5}b^{0,5}+b}+\dfrac{a^{0,5}-3b^{0,5}}{a-b}\right)\cdot\dfrac{a^{0,5}-b^{0,5}}{2}$!

4.31. Határozzátok meg a függvények extrémum pontjait:

1) $f(x) = \dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}$; 2) $f(x) = 7x + x^2 - 3x^3$!

5. A logaritmusfüggvény és tulajdonságai

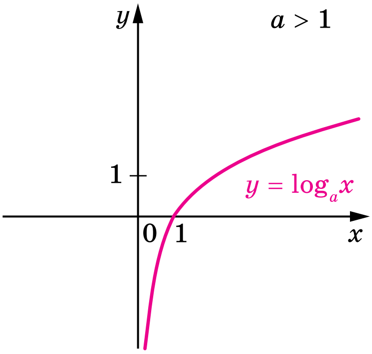
Kiválasztunk egy pozitív a számot, amely nem 1-gyel egyenlő. Minden pozitív x számnak megfeleltethető egy olyan y szám, amelyre igaz lesz az $y = \log_a x$ egyenlőség. Az adott $f(x) = \log_a x$ függvény értelmezési tartománya $D(f) = (0; +\infty)$ lesz.

Ezt a függvényt **logaritmusfüggvénynek** nevezzük.

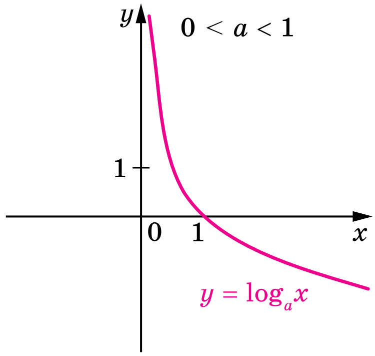
Megvizsgáljuk a logaritmusfüggvény legfontosabb tulajdonságait.

- *Az $y = \log_a x$ függvénynek egyetlen zérushelye van*, *az* $x = 1$.
- *Az $y = \log_a x$ függvénynek két előjeltartási intervalluma van.*
  Ha $a > 1$, akkor az $y < 0$ a $(0; 1)$ intervallumon; $y > 0$ az $(1; +\infty)$ intervallumon;
  ha $0 < a < 1$, akkor az $y < 0$ az $(1; +\infty)$ intervallumon; $y > 0$ a $(0; 1)$ intervallumon.
- Az $y = \log_a x$ függvény növekvő, ha $a > 1$, és fogyó a $0 < a < 1$ esetében.
- *A logaritmusfüggvény differenciálható*. A logaritmus függvény deriváltjával a 8. pontban fogtok megismerkedni.

Az 5.1. és az 5.2. ábrákon a logaritmusfüggvény van ábrázolva megfelelően az $a > 1$ és a $0 < a < 1$ eseteire.



5.1. ábra



5.2. ábra

Az $y = \log_a x$ függvénynek egy nagyon fontos tulajdonságával ismerkedünk meg. Ha x értékét a nullához közelítjük, akkor az $y = \log_a x$ függvény pontjainak távolságát az ordinátatengelyhez viszonyítva egyre csökkentve a távolság mind jobban fog közelíteni a nullához, de azzal soha nem lesz egyenlő.

1. feladat. Hasonlítsátok össze a számokat:

1) $\log_2 6$ és $\log_2 7$; 2) $\log_{0,2} 6$ és $\log_{0,2} 7$; 3) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$ és 0!

Megoldás. 1) Mivel az $y = \log_2 x$ függvény növekvő, ezért $\log_2 6 < \log_2 7$.

2) Mivel az $y = \log_{0,2} x$ függvény fogyó, ezért $\log_{0,2} 6 > \log_{0,2} 7$.

3) Figyelembe véve, hogy $0 < \frac{\pi}{4} < 1$, azt kapjuk, hogy $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < \log_{\frac{\pi}{4}} 1$.

Tehát $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < 0$. ◄

2. feladat. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományát:

1) $f(x) = \log_3 (x^2 + 3x)$; 2) $f(x) = \log_{x-4} (16 - x)$!

Megoldás. 1) Mivel a logaritmusfüggvény értelmezési tartománya a pozitív számok halmaza, ezért az adott függvény értelmezési tartománya az $x^2 + 3x > 0$ egyenlőtlenség megoldása lesz.

Azt kapjuk, hogy $x(x + 3) > 0$; $x < -3$ vagy $x > 0$.

Tehát $D(f) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

2) Az adott függvény értelmezési tartományát megkapjuk, ha megoldjuk a következő egyenlőtlenségrendszert: $\begin{cases} 16 - x > 0, \\ x - 4 > 0, \\ x - 4 \neq 1. \end{cases}$

Innen $\begin{cases} x < 16, \\ x > 4, \\ x \neq 5; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} 4 < x < 5, \\ 5 < x < 16. \end{array}\right.$

Innen $D(f) = (4; 5) \cup (5; 16)$. ◄

1. Mik a logaritmusfüggvények?

2. Fogalmazzátok meg a logaritmusfüggvények tulajdonságait!

3. Ábrázoljátok az $y = \log_a x$ logaritmusfüggvény grafikonját, ha $a > 1$; $0 < a < 1$ esetekre!

GYAKORLATOK

5.1.° Növekvő, vagy csökkenő a következő függvény:

1) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; 3) $y = \log_{0,1} x$; 5) $y = \log_{\sqrt{5}} x$;

2) $y = \log_3 x$; 4) $y = \lg x$; 6) $y = \log_{\frac{\pi}{3}} x$?

5.2.° A logaritmusfüggvény mely tulajdonságára alapozva lehet kijelenteni, hogy:

1) $\lg 7 > \lg 5$; 2) $\log_{0,6} 4 < \log_{0,6} 3$?

5.3.° Hasonlítsátok össze:

1) $\log_{12} 5$ és $\log_{12} 6$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ és $\log_{\frac{1}{3}} 4$;

2) $\log_5 \frac{1}{2}$ és $\log_5 \frac{1}{3}$; 4) $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,7$ és $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,6$!

5.4.° Hasonlítsátok össze:

1) $\log_{0,9} \sqrt{3}$ és $\log_{0,9} \sqrt{2}$; 3) $\log_{\frac{2}{3}} 6,8$ és $\log_{\frac{2}{3}} 6,9$;

2) $\log_7 \frac{2}{3}$ és $\log_7 \frac{1}{2}$; 4) $\lg \frac{\pi}{3}$ és $\lg \frac{\pi}{4}$!

5.5.° Határozzátok meg a függvény értelmezési tartományát:

1) $f(x) = \log_3 (x + 1)$; 4) $f(x) = \log_{0,6} (5x - 6 - x^2)$;

2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 1)$; 5) $f(x) = 2 \lg x + 3 \lg (2 - x)$;

3) $f(x) = \log_4 (-x)$; 6) $f(x) = \lg (x^2 - 1)$!

5.6.° Határozzátok meg a függvény értelmezési tartományát:

1) $f(x) = \log_7 (6 - x)$;
2) $f(x) = \log_{0,4} (7x - x^2)$;
3) $f(x) = \lg (x + 2) - 2 \lg (x + 5)$!

5.7.• Hasonlítsátok össze a logaritmus alapját az egyessel:

1) $\log_a 0,5 > \log_a 0,4$;
2) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$;
3) $\log_a \sqrt{5} < \log_a \sqrt{6}$;
4) $\log_a \frac{\pi}{4} < \log_a \frac{\pi}{3}$!

5.8.• Hasonlítsátok össze a logaritmus alapját az egyessel:

1) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a \frac{1}{2}$;
2) $\log_a 2 < \log_a \sqrt{3}$!

5.9.• Pozitív vagy negatív szám e:

1) $\log_{0,5} 0,6$;
2) $\log_{0,3} 3$;
3) $\log_2 0,27$;
4) $\log_\pi 3$?

5.10.• Hasonlítsátok össze nullával:

1) $\log_4 5$;
2) $\log_2 \frac{1}{3}$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$;
4) $\log_{\frac{\pi}{3}} 2$!

5.11.• Határozzátok meg a függvény legnagyobb és legkisebb értékét az adott intervallumon:

1) $y = \log_2 x$, $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$;
2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\left[\frac{1}{16}; 8\right]$;
3) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$, $\left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16}\right]$!

5.12.• Határozzátok meg a függvény legnagyobb és legkisebb értékét az adott intervallumon:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $\left[\frac{1}{9}; 3\right]$;
2) $y = \lg x$, $[1; 1000]$!

5.13.• Mely intervallumon lesz az $y = \log_2 x$ függvény legnagyobb értéke 3, legkisebb értéke -1?

5.14.• Mely intervallumon lesz az $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ függvény legnagyobb értéke -1, legkisebb értéke -2?

5.15.• Hasonlítsátok össze:

1) $\log_9 2$ és 3;
2) $\log_{\frac{1}{5}} 27$ és -2;
3) $\log_{\sqrt{3}} 26$ és 6!

5.16.• Hasonlítsátok össze:

1) $\log_{0,1} 12$ és 1;
2) $\log_4 3$ és $-\frac{1}{2}$!

5.17.• Határozzátok meg a függvény értelmezési tartományát:

1) $f(x) = \lg x^2$;
2) $f(x) = \log_3 \operatorname{tg} x$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{\lg x}$; 4) $f(x) = \dfrac{4}{\log_5(10-x)}$!

5.18.• Határozzátok meg a függvény értelmezési tartományát:

1) $f(x) = \log_{12}|x|$; 2) $y = \dfrac{5}{\lg(x+3)}$; 3) $y = \lg \sin x$!

5.19.• Oldjátok meg grafikusan az egyenleteket:

1) $\log_2 x = 3 - x$; 2) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 1$; 3) $\log_2 x = -x - 0{,}5$!

5.20.• Oldjátok meg grafikusan az egyenleteket:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = x + \dfrac{1}{2}$; 2) $\log_3 x = 4 - x$!

5.21.• Állapítsátok meg grafikusan az egyenlet gyökeinek számát:

1) $\log_2 x = -x$; 2) $\log_3 x = -x^2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = \sqrt{x}$!

5.22.• Hány gyöke van az egyenletnek:

1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \log_2 x$; 2) $\log_2 x = \dfrac{1}{x}$?

5.23.•• Melyik két egymást követő egész szám között lesz a koordináta-egyenesen a következő kifejezés értéke:

1) $\log_3 10$; 2) $\log_2 5$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 7$; 4) $\log_{0,1} 2$?

5.24.•• Melyik két egymást követő egész szám között lesz a koordináta-egyenesen a következő kifejezés értéke: 1) $\log_2 29$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

5.25.•• Hasonlítsátok össze:

1) $\log_4 5$ és $\log_5 4$; 2) $\log_{1,5} 1{,}3$ és $\log_{1,3} 1{,}5$; 3) $\log_{0,7} 0{,}8$ és $\log_{0,8} 0{,}7$!

5.26.•• Hasonlítsátok össze:

1) $\log_{1,7} 1{,}8$ és $\log_{1,8} 1{,}7$; 2) $\log_{0,2} 0{,}3$ és $\log_{0,3} 0{,}2$!

5.27.•• Határozzátok meg a függvény értelmezési tartományát:

1) $y = \lg(1 - \sin x)$;

2) $y = \sqrt{\lg \cos x}$;

3) $y = \dfrac{x}{\lg(4 - x^2)}$;

4) $y = \dfrac{1}{\log_6(x-3)} + \sqrt{6-x}$;

5) $y = \dfrac{4}{\lg(x+2)} + \lg(3-x)$;

6) $y = \log_5(x^2 - 4x + 3) + \dfrac{1}{\log_5(7-x)}$;

7) $y = \lg(6x - x^2) + \dfrac{1}{\lg(3-x)}$;

8) $y = \log_{x+3}(x^2 + x)$!

5.28.•• Határozzátok meg a függvény értelmezési tartományát:

1) $y = \dfrac{1}{\lg(x^2+1)}$;

2) $y = \lg(1 + \sin x)$;

3) $y = \sqrt{\lg \sin x}$;

4) $y = \lg(x+8) - \dfrac{5}{\lg(-x-1)}$;

5) $y = \lg(10x - x^2) - \dfrac{1}{\lg(8-x)}$;

6) $y = \log_{2-x}(8 + 7x - x^2)$!

5.29.* Szerkesszétek meg a függvény grafikonját:

1) $y = \dfrac{|\log_{0,2} x|}{\log_{0,2} x}$;

2) $y = \sqrt{\log_3^2 x \log_x 3}$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

5.30. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\sqrt{x^2+15} = x+1$;

2) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2$;

3) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 2 = 0$;

4) $\sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x+1} - 6 = 0$;

5) $3 \cos^2 x + 7 \sin x - 5 = 0$;

6) $\cos 2x - 5 \cos x - 2 = 0$!

6. Logaritmusos egyenletek

A $\log_a x = b$ típusú egyenleteket, ahol $a > 0$, $a \neq 1$, **legegyszerűbb logaritmusos egyenleteknek** nevezzük. Ezeket az egyenleteket a logaritmus meghatározása alapján lehet megoldani.

1. feladat. Oldjátok meg a $\log_3(3x-1) = 2$ egyenletet!

Megoldás. A logaritmus meghatározása alapján felírható, hogy $3x - 1 = 3^2$. Innen $3x - 1 = 9$; $x = \dfrac{10}{3}$.

Felelet: $\dfrac{10}{3}$. ◄

Az 1. feladat megoldható a következő módon is:

$$\log_3(3x-1) = 2\log_3 3,$$
$$\log_3(3x-1) = \log_3 3^2,$$
$$3x - 1 = 3^2,\ x = \frac{10}{3}.$$

A logaritmusos egyenletek megoldása során az alábbi tételt alkalmazzák.

6.1. tétel. ***Ha $a > 0$, $a \neq 1$, akkor***

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

egyenértékű a következő rendszerek bármelyikével:

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

2. feladat. Oldjátok meg az egyenletet: $\lg(2x - 3) = \lg(x^2 - 4x + 2)$!

Megoldás. Az adott egyenlet egyenértékű a következő rendszerrel:

$$\begin{cases} 2x - 3 = x^2 - 4x + 2, \\ 2x - 3 > 0. \end{cases}$$

Ebből következik: $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5, \end{array}\right. \\ x > \frac{3}{2}. \end{cases}$ Innen $x = 5$.

Felelet: 5. ◄

3. feladat. Oldjátok meg az egyenletet: $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$!

Megoldás. Az adott $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$ egyenlet egyenértékű a következő rendszerrel:

$$\begin{cases} \log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3, \\ 2x - 1 > 0, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$$

Innen: $\begin{cases} (2x - 1)(x - 2) = 3^3, \\ x > 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - 5x - 25 = 0, \\ x > 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -\frac{5}{2}, \end{array}\right. \\ x > 2. \end{cases}$ Ebből ezt kapjuk: $x = 5$.

Felelet: 5. ◄

4. feladat. Oldjátok meg az egyenletet: $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$!

Megoldás. Mivel $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$, ezért az adott egyenlet ekvivalens a következő egyenlettel:

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2}.$$

Legyen $\log_2 x = t$. Ekkor megkapjuk, hogy: $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$.

Innen $\begin{cases} 2t^2 - 5t + 2 = 0, \\ t \neq 0. \end{cases}$ Tehát $\left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2}, \\ t = 2. \end{array}\right.$

Ekkor az eredeti egyenlet ekvivalens lesz a következő rendszerrel:

$\left[\begin{array}{l} \log_2 x = \frac{1}{2}, \\ \log_2 x = 2. \end{array}\right.$ Innen: $\left[\begin{array}{l} x = 2^{\frac{1}{2}}, \\ x = 2^2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2}, \\ x = 4. \end{array}\right.$

Felelet: $\sqrt{2}$; 4. ◄

1. Milyen egyenletet neveznek legegyszerűbb logaritmikus egyenletnek?
2. Milyen egyenletrendszerrel lesz egyenértékű a $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, ha $a > 0$, $a \neq 1$?

GYAKORLATOK

6.1.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\log_2 (x - 1) = 1$;
2) $\log_3 (2x + 1) = 3$;
3) $\lg (3 - 2x) = 2$;
4) $\log_{\frac{1}{6}} (4x - 8) = -2$;
5) $\log_7 (x^2 - 2x - 8) = 1$;
6) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4x - 5) = -4$!

6.2.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\log_{\frac{1}{5}} (x + 7) = -3$;
2) $\log_4 (2x - 5) = 0{,}5$;
3) $\log_{\sqrt{3}} (x^2 - 5x - 3) = 2$;
4) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 5x + 6) = -1$!

6.3.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\log_\pi (x + 1) = \log_\pi (4x - 5)$;
2) $\log_5 (3x - 5) = \log_5 (x - 3)$!

6.4.° Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\log_9 (4x - 6) = \log_9 (x - 2)$;
2) $\log_{\frac{1}{4}} (x + 7) = \log_{\frac{1}{4}} (2x + 5)$!

6.5.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \frac{1}{x} = 6$;
2) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;
3) $2\log_3 x + \log_9 x - \log_{27} x = 6{,}5$;
4) $\log_6 x + 2\log_{36} x + 3\log_{216} x = 3$;

5) $\log_7 \log_4 (x-2) = 0$; 6) $\log_4 \log_3 \log_2 x = \frac{1}{2}$!

6.6.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 \sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}$;

2) $\log_5 x - \log_{25} x + \log_{625} x = \frac{3}{4}$;

3) $\lg \lg \lg x = 0$!

6.7.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\lg(x^2 - 2x) = \lg(2x + 12)$;

2) $\log_4 (x-1) = \log_4 (x^2 - x - 16)$;

3) $\log_{0,5} (x^2 + 3x - 10) = \log_{0,5} (x-2)$;

4) $\log_6 (x^2 - x - 2) = \log_6 (2 - x)$!

6.8.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\log_6 (9 - x^2) = \log_6 (1 - 2x)$;

2) $\lg(x^2 + 2x - 3) = \lg(2x^2 - 2)$!

6.9.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\log_4 (x-3) + \log_4 x = 1$;

2) $\log_{0,5} (4-x) + \log_{0,5} (x-1) = -1$;

3) $\log_3 (2x-1) + \log_3 (x-4) = 2$;

4) $\lg(x-1) + \lg(x-3) = \lg(1,5x-3)$!

6.10.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\log_7 x + \log_7 (x+6) = 1$;

2) $\log_3 (5-x) + \log_3 (3-x) = 1$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} (4x-1) + \log_{\frac{1}{2}} (x+1) = \log_{0,5} 3,5$;

4) $\log_{0,6} (x+2) + \log_{0,6} (6-x) = \log_{0,6} (x+8)$!

6.11.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\log_2^2 x + 3\log_2 x - 4 = 0$;

2) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 = 0$;

3) $\log_5 x + \log_x 5 = 2,5$;

4) $\frac{2}{\lg(x+2) - 3} + \frac{4}{\lg(x+2) + 1} = 1$!

6.12.• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $3\log_8^2 (-x) - 2\log_8 (-x) - 1 = 0$;

2) $2\log_7 \sqrt{x} = \log_7^2 x - 6$;

3) $3\log_3 x + 3\log_x 3 = 10$;

4) $\frac{\lg x}{\lg x + 2} - \frac{2}{\lg x - 1} = 1$!

6.13.•• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $2\log_{0,4} x = \log_{0,4} (2x^2 - x)$;

2) $2\log_7 (-x) = \log_7 (x+2)$;

3) $2\log_8 (1-x) = \log_8 (2,5x+1)$;

4) $2\log_3 x = 1 + \log_3 (x+6)$!

6.14.•• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\log_{0,7}(2x^2 - 9x + 4) = 2\log_{0,7}(x + 2)$;

2) $2\log_2(-x) - \log_2(3x + 8) = 1$!

6.15.•• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\log_2(5 - x) - \log_2(x - 1) = 1 - \log_2(x + 2)$;

2) $2\log_5(x + 1) - \log_5(x + 9) = \log_5(3x - 17)$!

6.16.•• Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\log_2(2x - 1) - \log_2(x + 2) = 2 - \log_2(x + 1)$;

2) $2\lg(x + 1) - \lg(4x - 5) = \lg(x - 5)$!

6.17.* Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\log_x(2x^2 - 7x + 12) = 2$;

2) $\log_{x+1}(x + 3) = 2$;

3) $\log_{x-2}(2x^2 - 11x + 16) = 2$;

4) $\log_{2x-3}(3x^2 - 7x + 3) = 2$!

6.18.* Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1$;

2) $\log_x(x + 6) = 2$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

6.19. Határozzátok meg a függvény deriváltját:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9x}{x + 4}$;

2) $f(x) = (5x - 1)\sqrt{x}$!

6.20. Határozzátok meg a függvény növekedési intervallumait és az extrémum pontjait:

1) $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 2x$;

2) $f(x) = \dfrac{x^2 + 9}{x^2 - 9}$;

3) $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + 5}$!

6.21. Állítsátok fel az $f(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3$ függvény érintőjének az egyenletét az $x_0 = 3$ abszcisszájú pontban!

7. Logaritmusos egyenlőtlenségek

Nagyon sok logaritmusos egyenlőtlenség megoldása az alábbi tételen alapul.

7.1. tétel. ***Ha $a > 1$, akkor a $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ egyenlőtlenség egyenértékű a következő rendszerrel:***

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Ha $0 < a < 1$, akkor a $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ egyenlőtlenség egyenértékű a következő rendszerrel:

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

1. feladat. Oldjátok meg a $\log_2 x > 3$ egyenlőtlenséget!

Megoldás. Mivel $3 = \log_2 2^3$, ezért felírható:

$$\log_2 x > \log_2 2^3.$$

Ez az egyenlőtlenség egyenértékű a következővel: $x > 2^3$. Innen $x > 8$.

Felelet: $(8; +\infty)$. ◀

2. feladat. Oldjátok meg a $\log_{0,3} x \geqslant 1$ egyenlőtlenséget!

Megoldás. A következőt kaptuk: $\log_{0,3} x \geqslant \log_{0,3} 0{,}3$.

Ez az egyenlőtlenség egyenértékű a következő rendszerrel: $\begin{cases} x \leqslant 0{,}3, \\ x > 0. \end{cases}$

Felelet: $(0; 0{,}3]$. ◀

3. feladat. Oldjátok meg a $\log_{\frac{1}{2}} (3x - 4) < \log_{\frac{1}{2}} (x - 2)$ egyenlőtlenséget!

Megoldás. Ez az egyenlőtlenség egyenértékű a következő rendszerrel:

$$\begin{cases} 3x - 4 > x - 2, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$$

Innen $\begin{cases} x > 1, \\ x > 2; \end{cases}$ $x > 2$.

Felelet: $(2; +\infty)$. ◀

Melyik egyenlőtlenség-rendszerrel lesz egyenértékű a $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ egyenlőtlenség, ha $a > 1$? ha $0 < a < 1$?

GYAKORLATOK

7.1.° Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $\log_{0,1} x < \log_{0,1} 9$;
2) $\log_{11} x > \log_{11} 12$;
3) $\log_{0,8} x > \log_{0,8} 14$;
4) $\log_7 x < \log_7 15$;
5) $\log_{\frac{3}{7}} (x + 5) < \log_{\frac{3}{7}} 8$;
6) $\log_8 (2x - 3) > \log_8 7$;
7) $\log_{\frac{2}{9}} (x - 4) > \log_{\frac{2}{9}} 2$;
8) $\lg (1 + 3x) < \lg 16$!

7.2.° Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $\lg x < \lg 4$;
2) $\log_{\frac{5}{6}} x > \log_{\frac{5}{6}} \frac{6}{7}$;
3) $\log_{12} (x - 8) > \log_{12} 3$;
4) $\log_{16} (4x - 6) < \log_{16} 10$;

5) $\log_{\frac{8}{11}}(2-x)<\log_{\frac{8}{11}}2$; 6) $\log_{0,9}(2x+1)>\log_{0,9}5$!

7.3.° Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $\log_7 x>2$; 2) $\log_5 x\leqslant -1$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x\leqslant 5$; 4) $\log_{\frac{1}{3}} x>1$; 5) $\log_2(5x+1)>4$; 6) $\log_{0,6}(x-2)<2$; 7) $\log_3(2x-1)\leqslant 3$; 8) $\log_{0,5}(2x+1)\geqslant -2$!

7.4.° Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $\log_{\frac{1}{7}} x<-1$; 2) $\log_4 x>2$; 3) $\lg x<5$; 4) $\log_{\frac{1}{6}} x>-3$; 5) $\log_{\frac{1}{3}}(2x-3)\geqslant -2$; 6) $\log_9(5x+6)\leqslant 2$!

7.5.• Hány egész megoldása van az egyenlőtlenségnek:

1) $\log_{0,25}(3x-5)>-3$; 2) $\log_3(7-x)<3$?

7.6.• Határozzátok meg az egyenlőtlenség egész megoldásait:

1) $\log_{0,5}(1-x)>-1$; 2) $\log_{36}(x+1)\leqslant 0,5$!

7.7.• Határozzátok meg az egyenlőtlenség megoldásának halmazát:

1) $\lg(2x+3)>\lg(x-1)$;
2) $\log_5 2x<\log_5(x+1)$;
3) $\log_{0,2}(2x-1)>\log_{0,2}(3x-4)$;
4) $\log_{0,4}(x^2-3)<\log_{0,4}(x+3)$;
5) $\log_{0,7}(x^2-2x-3)\leqslant\log_{0,7}(9-x)$;
6) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x+31)\leqslant\log_{\frac{1}{3}}(10x+11)$!

7.8.• Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $\log_2(2x-3)<\log_2(x+1)$;
2) $\log_{0,6}(3-2x)>\log_{0,6}(5x-2)$;
3) $\lg(x^2-2)\geqslant\lg(4x+3)$;
4) $\log_{0,1}(10-2x)\geqslant\log_{0,1}(x^2-x-2)$!

7.9.•• Határozzátok meg az egyenlőtlenség megoldásának halmazát:

1) $\log_8(x^2-4x+3)\leqslant 1$;
2) $\log_{0,5}(x^2+x)>-1$;
3) $\log_{0,7}(x^2+10x+25)>0$;
4) $\log_2(x^2-3x)\leqslant 2$;
5) $\log_{0,3}(x^2+x-12)\geqslant\log_{0,3}(6x-6)$;
6) $\lg(x^2-x)\leqslant\lg(3x-3)$!

7.10.•• Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7)>0$;
2) $\log_9(x^2-6x+8)\leqslant 0{,}5$;
3) $\log_{0,5}(x^2+3x)\geqslant -2$;
4) $\log_{0,3}(x^2-2x+1)\geqslant 0$;
5) $\log_{\frac{2}{3}}(6-2x)<\log_{\frac{2}{3}}(x^2-2x-3)$;
6) $\log_{0,1}(x^2-3x-4)\geqslant\log_{0,1}(x+1)$!

7.11.•• Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $\lg x+\lg(x-3)>1$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+\log_{\frac{1}{3}}x<-1$;
3) $\log_2 x+\log_2(x+4)<5$;
4) $\log_{0,1}(x-5)+\log_{0,1}(x-2)\geqslant -1$;
5) $\log_6(5x+8)+\log_6(x+1)\leqslant 1-\log_6 3$;
6) $\log_3(1-x)+\log_3(-5x-2)\geqslant 2\log_3 2+1$!

7.12.•• Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $\log_2(-x)+\log_2(1-x)\leqslant 1$;
2) $\log_{0,2}(x-1)+\log_{0,2}(x+3)\geqslant -1$;
3) $\log_3(x-2)+\log_3(x-10)\geqslant 2$;
4) $\log_7 x+\log_7(3x-8)\geqslant 1+2\log_7 2$!

7.13.•• Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $\log_{0,2}^2 x\leqslant 1$;
2) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x\geqslant 4$;
3) $\lg^2 x+3\lg x-4<0$;
4) $\log_{\frac{1}{4}}^2 x+2\log_{\frac{1}{4}}x-8\leqslant 0$;
5) $\log_2^2 x-5\log_2 x+6\geqslant 0$;
6) $2\log_{\frac{1}{9}}^2 x-5\log_{\frac{1}{9}}x+2\geqslant 0$!

7.14.•• Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $\log_{0,5}^2 x\geqslant 9$;
2) $\lg^2 x-2\lg x-3\geqslant 0$;
3) $2\log_4^2 x-\log_4 x-1<0$;
4) $\log_{0,2}^2 x-\log_{0,2}x-2\leqslant 0$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

7.15. Határozzátok meg az $f(x)=x^3-3x^2+1$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét a $[-2;\ 1]$ intervallumon!

7.16. Az $f(x)=x^3-x^2-2x$ függvény mely pontjában húzott érintője alkot az abszcisszatengellyel $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ szöget?

7.17. Írjátok fel az $y=x^2-x+2$ függvény azon érintőjének egyenletét, amely párhuzamos az $x+y+2=0$ egyenessel!

8. Az exponenciális és a logaritmusfüggvények deriváltjai

Létezik-e olyan függvény, amelynek deriváltja saját magával lesz egyenlő? Erre a kérdésre egyszerű válaszolni. Például a nullfüggvény rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Létezik-e olyan f függvény, amely az $\mathbb{R}$ halmazon van értelmezve, nullfüggvénnyel nem azonos, és bármely $x \in \mathbb{R}$-re teljesül az $f'(x) = f(x)$ egyenlőség? Erre a kérdésre már nem egyértelmű a felelet.

Az $f(x) = a^x$ függvények között létezik egy olyan egyetlen függvény, hogy $f'(x) = f(x)$ bármilyen $x \in \mathbb{R}$-re teljesül. Ennek a függvénynek az alapja egy olyan szám lesz, amelyet e betűvel jelölnek, és a függvény az $f(x) = e^x$. Tehát

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Megállapították, hogy ez az e irracionális szám, ami felírható végtelen nem periodikus tizedes tört alakban:

$$e = 2{,}71828182845\ldots\ .$$

Az $f(x) = e^x$ függvényt **exponensnek** nevezzük.

A logaritmust, amelynek az alapja e, **természetes logaritmusnak** nevezzük, és ln a-val jelöljük, vagyis $\log_e a = \ln a$.

Bebizonyítható, hogy az $f(x) = a^x$ exponenciális függvény deriváltja $a^x \ln a$ lesz.

Tehát, ha $a > 0$, $a \neq 1$, akkor

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

Az 5. pontban már megjegyeztük, hogy az $f(x) = \log_a x$ függvény differenciálható.

Bebizonyítható, hogy

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

Ebből következik:

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

1. feladat. Határozzátok meg a következő függvények deriváltjait:

1) $y = e^x(x^2 - 4x)$; 2) $y = x^3 \cdot 3^x$; 3) $y = \dfrac{x^4}{\ln x}$!

Megoldás. 1) Alkalmazzuk a két függvény szorzata deriváltjáról szóló tételt, a következőt kapjuk:

$$y' = (e^x)' \cdot (x^2 - 4x) + (x^2 - 4x)' \cdot e^x =$$

$$= e^x (x^2 - 4x) + (2x - 4)e^x = e^x (x^2 - 2x - 4).$$

2) Adott:

$$y' = (x^3)' \cdot 3^x + (3^x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot 3^x + 3^x \ln 3 \cdot x^3 = 3^x x^2 (3 + x \ln 3).$$

3) Adott: $y' = \dfrac{(x^4)' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot x^4}{\ln^2 x} = \dfrac{4x^3 \cdot \ln x - \dfrac{1}{x} \cdot x^4}{\ln^2 x} =$

$$= \frac{4x^3 \ln x - x^3}{\ln^2 x} = \frac{x^3 (4\ln x - 1)}{\ln^2 x}. ◄$$

2. feladat. Határozzuk meg az $f(x) = e^x + x$ függvény érintőjének egyenletét az $x_0 = 0$ abszcisszájú pontban!

Megoldás. Adott, hogy $f(x_0) = 1$. Meghatározzuk az f függvény deriváltját az $x_0 = 0$ pontban: $f'(x) = e^x + 1$. Innen $f'(x_0) = 2$. Ekkor a keresett egyenlet az $y = 2x + 1$ lesz.

Felelet: $y = 2x + 1$.◄

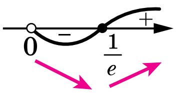
3. feladat. Határozzuk meg az $f(x) = x \ln x$ függvény növekedési és fogyási intervallumait és extrémumpontjait!

Megoldás. Adott:

$$f'(x) = (x)' \cdot \ln x + (\ln x)' \cdot x = \ln x + \frac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1.$$

Megvizsgáljuk az $f'(x)$ előjelét a $D(f) = (0; +\infty)$ intervallumon.

Az $f'(x) > 0$, ha $\ln x > -1$. Innen $x > \dfrac{1}{e}$. Hasonlóan meghatározzuk, hogy $f'(x) < 0$ ha $0 < x < \dfrac{1}{e}$.



8.1. ábra

Azt kaptuk, hogy az f függvény növekedő a $\left[\dfrac{1}{e}; +\infty\right)$ intervallumon, és fogyó a $\left(0; \dfrac{1}{e}\right]$ intervallumon, $x_{\min} = \dfrac{1}{e}$ (8.1. ábra).◄

?

1. Milyen függvényt nevezünk exponenciálisnak?
2. Mit nevezünk természetes logaritmusnak?
3. Mivel egyenlő az $y = e^x$ deriváltja? És az $y = a^x$-é?
4. Mivel lesz egyenlő az $y = \ln x$ deriváltja? És az $y = \log_a x$-é?

GYAKORLATOK

8.1.° Határozzátok meg a függvény deriváltját:

1) $y = 4e^x$; 3) $y = e^x \sin x$; 5) $y = 5^x$;

2) $y = x^2 e^x$; 4) $y = \frac{e^x}{x-2}$; 6) $y = x \cdot 3^x$!

8.2.° Határozzátok meg a függvény deriváltját:

1) $y = x^6 e^x$; 2) $y = e^x \cos x$; 3) $y = \frac{x+1}{e^x}$; 4) $y = 6^x$!

8.3.° Határozzátok meg a függvény deriváltját:

1) $y = \log_9 x$; 2) $y = \frac{\ln x}{x^3}$; 3) $y = x^5 \ln x$!

8.4.° Határozzátok meg a függvény deriváltját:

1) $y = \lg x$; 2) $y = \frac{x^5}{\ln x}$!

8.5.• Határozzátok meg a függvény deriváltját:

1) $y = e^x + e^{-x}$; 2) $y = \frac{2^x - 3}{2^x + 1}$!

8.6.• Határozzátok meg a függvény deriváltját:

1) $y = 10^{-x}$; 2) $y = \frac{5^x + 2}{5^x - 1}$!

8.7.• Számítsátok ki az f függvény deriváltját az x_0 pontban:

1) $f(x) = e^x - 3x,\ x_0 = 0$; 3) $f(x) = \frac{\cos x}{e^x},\ x_0 = 0$!

2) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x,\ x_0 = 4$;

8.8.• Számítsátok ki az f függvény deriváltját az x_0 pontban:

1) $f(x) = e^x \operatorname{tg} x,\ x_0 = 0$; 3) $f(x) = x - \ln x,\ x_0 = 3$!

2) $f(x) = \frac{1}{6}\ln x,\ x_0 = \frac{1}{6}$;

8.9.• Állítsátok fel az f függvény érintőjének egyenletét az x_0 pontban:

1) $f(x) = e^x,\ x_0 = 0$; 3) $f(x) = x \cdot 2^x,\ x_0 = 1$;

2) $f(x) = e^x + \sin x,\ x_0 = 0$; 4) $f(x) = 3x + \ln x,\ x_0 = 1$!

8.10.• Állítsátok fel az f függvény érintőjének egyenletét az x_0 pontban:

1) $f(x) = \ln x,\ x_0 = 1$; 2) $f(x) = 2e^x - \cos x,\ x_0 = 0$!

8.11.• Határozzátok meg a függvény vízszintes érintőjének egyenletét:

1) $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$; 2) $f(x) = (2^x - 7)(2^x - 9)$!

8.12.• Határozzátok meg a függvény vízszintes érintőjének egyenletét $f(x) = (5^x - 65)(5^x + 15)$ egyenessel!

8.13.•• Állítsátok fel a következő függvény érintőjének egyenletét:

1) az $f(x) = e^x$, ha az érintő párhuzamos az $y = ex - 6$;

2) az $f(x) = 6x - \ln x$, ha az érintő párhuzamos az $y = x$ egyenessel!

8.14.•• Határozzátok meg a függvény növekedési és fogyási intervallumait, valamint az extrémumpontjait:

1) $f(x) = e^x - x$; 4) $f(x) = \frac{4x}{e^x}$; 7) $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$;

2) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$; 5) $f(x) = x^3 \ln x$; 8) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$!

3) $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$; 6) $f(x) = \ln x - x$;

8.15.•• Határozzátok meg a függvény növekedési és fogyási intervallumait, valamint az extrémumpontjait:

1) $f(x) = \frac{x^3}{3^x}$; 3) $f(x) = 0{,}5x^2 - \ln x$; 5) $f(x) = 2\ln x + \frac{2}{x}$;

2) $f(x) = \frac{x+3}{e^x}$; 4) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; 6) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$!

8.16.•• Határozzátok meg az $f(x) = e^x + x$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét a $[-1; 1]$ intervallumon!

8.17.•• Határozzátok meg az $f(x) = (x - 1)\,e^{-x}$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét az $[1; 3]$ intervallumon!

8.18.•• Végezzétek el a függvény vizsgálatát, és szerkesszétek meg a grafikonját:

1) $f(x) = xe^x$; 2) $f(x) = x^2 - 2\ln x$!

8.19.•• Végezzétek el az $f(x) = \frac{x}{e^x}$ függvény vizsgálatát, és szerkesszétek meg a grafikonját!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

8.20. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\cos 2x = \cos x - 1$; 2) $\cos 2x = \sin x$!

8.21. Határozzátok meg a függvények grafikonjainak a metszéspontjait:

1) $y = 1 + \sqrt{x+5}$ és $y = x$; 2) $y = 2 - 2\sqrt{x+5}$ és $y = -x$!

A SZERELMEM UKRAJNA ÉS A MATEMATIKA

Ez a hazafias kijelentés a híres ukrán matematikus, Mihajlo Pilipovics Kravcsuk akadémikus gránit síremlékének talapzatán található (lásd az 1. belső borítólapot).

Mihajlo Kravcsuk Volhínia megye Csovnici falujában született. A lucki gimnáziumot aranyéremmel fejezte be, majd a kijevi egyetem matematika szakán tanult, és ugyancsak Kijevben kezdett dolgozni.

Magas fokú tudományos eredményessége és hatékonysága, gondolkodásának eredetisége, rugalmassága lehetővé tette, hogy M. P. Kravcsuk fontos tudományos eredményeket érjen el az algebra és számelmélet, függvényelmélet és matematikai analízis, differenciális- és integrálegyenletek, a valószínűségszámítás és a statisztika területén. Ismeretes, hogy tudományos eredményeit az amerikai tudósok is alkalmazták az első számítógép megalkotása során.

A tudós aktívan részt vett az ukrán tudományos szaknyelv megteremtésében, az elsők között kezdte tudományos cikkeit ukrán nyelven írni, attól függetlenül, hogy folyékonyan beszélt oroszul, franciául, németül, olaszul, lengyelül és más nyelveken is.

M. P. Kravcsuk nagy figyelmet fordított az ifjúság oktatására, az ő kezdeményezésére tartották meg az iskolások első kijevi matematikai olimpiáját 1935-ben. Próbáljátok ki tudásotokat e verseny feladatainak megoldásával.

Az első kijevi matematikai olimpia feladatai (1935)

1. Számítsátok ki a kifejezés értékét: $\dfrac{b^3 - a^3b - b^2c + ca^3}{(b-c)^2} + \sqrt{d}$, ha $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 0{,}19$, $c = 0{,}18$, $d = 0{,}04$!

2. Oldjátok meg az egyenletet: $4^{x^2 - \sqrt{x^2-9} - 20{,}75} = \sqrt{2}$!

3. Oldjátok meg az egyenletrendszert: $\begin{cases} x + y = 4, \\ (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 280! \end{cases}$

4. Az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ pozitív számok számtani sorozatot alkotnak. Bizonyítsátok be, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_2}} + \frac{1}{\sqrt{u_2} + \sqrt{u_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{u_1} + \sqrt{u_n}}!$$

5. Legyen a és b a derékszögű háromszög befogói, c az átfogója. Bizonyítsátok be, hogy

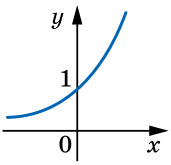
$$\log_{c+b} a + \log_{c-b} a = 2\log_{c+b} a \cdot \log_{c-b} a!$$

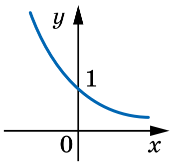
1. SZÁMÚ FELADAT.
ELLENŐRIZD MAGAD TESZTELÉSSEL!

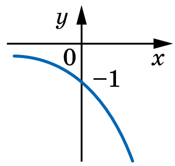
1. Melyik lesz az értelmezési tartománya a következő függvénynek: $y = \dfrac{7}{7^x - 1}$?

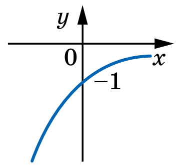
A) $(-\infty; +\infty)$;   C) $(-\infty; 7) \cup (7; +\infty)$;
B) $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;   D) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Az egyik ábrán az $y = 3^{-x}$ függvény grafikonja látható. Melyik ez az ábra?

A)


B)


C)


D)


3. Mivel lesz egyenlő a $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\dfrac{15}{4}\right)^x = \dfrac{4}{9}$ egyenlet megoldása?

A) 2;   B) –2;   C) 1;   D) –1.

4. Oldd meg a következő egyenlőtlenséget: $0{,}6^{x^2} > 0{,}6$!

A) $(-\infty; 1)$;   C) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$;
B) $(1; +\infty)$;   D) $(-1; 1)$.

5. Oldd meg a $3^{x+3} + 5 \cdot 3^{x-1} = 86$ egyenletet!

A) 0;   B) 1;   C) 2;   D) 3.

6. Számítsd ki a kifejezés értékét: $\log_{0,2} 25 - \log_3 \dfrac{1}{27}$!

A) 1;   B) –1;   C) 5;   D) –5.

7. Add meg a 3-as számot 10 hatványaként!

A) $3 = 10^{\log_3 10}$;   C) $3 = 10^{\lg 3}$;
B) $3 = 10^{\log_3 3}$;   D) nem adható meg.

8. Mivel egyenlő a $\log_6 108 - \log_6 3$ kifejezés értéke?

A) –1;   B) 2;   C) –3;   D) 4.

9. Oldjátok meg a $\log_{0,2} x > \log_{0,2} 5$ egyenlőtlenséget!

A) $(-\infty; 5)$;   C) $(0; 5) \cup (5; +\infty)$;
B) $(5; +\infty)$;   D) $(0; 5)$.

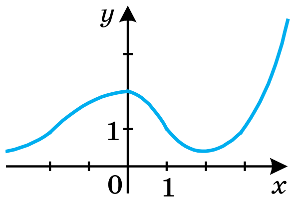
10. Az adott pontok közül melyik illeszkedik az $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ függvény grafikonjához?

A) (2; 1); B) (2; –1); C) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$; D) (2; 0).

11. Az a és b mely értékeire teljesül a $\lg ab = \lg(-a) + \lg(-b)$ egyenlőség?

A) $a > 0$, $b < 0$; C) $a < 0$, $b < 0$;
B) $a < 0$, $b > 0$; D) nincsenek ilyen értékek.

12. Az ábrán az $y = f(x)$ függvény grafikonja látható, amely a valós számok halmazán van értelmezve. Hány gyöke lesz az $\ln f(x) = 0$ egyenletnek?



A) Egyetlen egy sem;
B) két gyöke;
C) három gyöke;
D) nem állapítható meg.

13. Határozzátok meg a $\log_{0,2}(3 - 2x) < -1$ egyenlőtlenség legnagyobb egész gyökét!

A) –2; B) –1; C) 1; D) ilyen gyöke nem létezik.

14. Milyen lesz a $\log_x \sqrt{x} < 1$ egyenlőtlenség megoldásának halmaza?

A) $(-\infty; +\infty)$; B) $(0; +\infty)$; C) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; D) $\varnothing$.

15. Oldjátok meg a $\log_4(x-4) + \log_4(x-1) = 1$ egyenletet!

A) 0; 5; B) 0; C) 5; D) 1; 4.

16. Hasonlítsátok össze a $\log_4 5$, $\log_6 4$, $\log_{0,2} 3$ kifejezések értékeit!

A) $\log_{0,2} 3 < \log_6 4 < \log_4 5$; C) $\log_{0,2} 3 < \log_4 5 < \log_6 4$;
B) $\log_6 4 < \log_{0,2} 3 < \log_4 5$; D) $\log_4 5 < \log_6 4 < \log_{0,2} 3$.

17. Határozzátok meg az $y = x^3e^x$ függvény deriváltját!

A) $y' = 3x^2e^x$; C) $y' = 3x^2e^x + x^3e^x$;
B) $y' = 3x^2e^x - x^3e^x$; D) $y' = x^3e^x \ln 3$.

18. Határozzátok meg az $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$ függvény csökkenési intervallumait!

A) $(-\infty; 0)$, $(1; \sqrt{e}]$; C) $(0; \sqrt{e}]$;
B) $(0; 1)$, $(1; \sqrt{e}]$; D) $(0; 1)$.

AZ 1. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Az $y = a^x$ függvény tulajdonságai, ha $a > 0$, $a \neq 1$

Értelmezési tartomány	$\mathbb{R}$
Értékkészlet	$(0; +\infty)$
Zérushelyei	–
Előjeltartási intervallumok	$y > 0$ az $\mathbb{R}$-en
Növekedés/ fogyás	Ha $a > 1$, akkor a függvény növekvő; ha $0 < a < 1$, akkor a függvény fogyó
Differenciálhatóság	Differenciálható

Exponenciális egyenletek

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor az $a^{x_1} = a^{x_2}$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $x_1 = x_2$.

Ha $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor az $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ egyenlet egyenértékű az $f(x) = g(x)$ egyenlettel.

Exponenciális egyenlőtlenségek

Ha $a > 1$, akkor az $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ egyenlőtlenség egyenértékű az $f(x) > g(x)$ egyenlőtlenséggel;

ha $0 < a < 1$, akkor az $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ egyenlőtlenség egyenértékű az $f(x) < g(x)$ egyenlőtlenséggel.

A logaritmus és tulajdonságai

A pozitív b szám a alapú logaritmusának, ahol $a > 0$ és $a \neq 1$ azt a hatványkitevőt nevezzük, amelyre fel kell emelni az a számot, hogy megkapjuk a b-t.

A logaritmus alapazonossága: $a^{\log_a b} = b$.

Ha $x > 0$, $y > 0$ és $a \neq 1$, akkor teljesülnek a következő egyenlőségek:

$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$;

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Ha $x > 0$, $a > 0$ és $a \neq 1$, akkor bármilyen $\beta \in \mathbb{R}$ esetén teljesül a következő egyenlőség: $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$.

Ha $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$, teljesül a következő egyenlőség:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

Ha $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, teljesül a következő egyenlőség:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Ha $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, akkor bármilyen $\beta \neq 0$ esetén teljesül a következő egyenlőség: $\log_{a^\beta} b = \dfrac{1}{\beta}\log_a b$.

Az $y = \log_a x$ függvény tulajdonságai

Értelmezési tartomány	$(0; +\infty)$
Értékkészlet	$\mathbb{R}$
Zérushelyei	$x = 1$
Előjeltartási intervallumok	Ha $a > 1$, akkor $y < 0$ a $(0; 1)$ intervallumon, $y > 0$ az $(1; +\infty)$ intervallumon; ha $0 < a < 1$, akkor $y < 0$ az $(1; +\infty)$ intervallumon, $y > 0$ a $(0; 1)$ intervallumon
Növekedés / fogyás	Ha $a > 1$, akkor növekvő, ha $0 < a < 1$, akkor a függvény fogyó
Differenciálhatóság	Differenciálható

Logaritmusos egyenletek

Ha $a > 0$, $a \neq 1$, akkor a $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ alakú egyenlet egyenértékű a következő rendszerek egyikével: $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases}$ $\begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Logaritmusos egyenlőtlenségek

Ha $a > 1$, akkor a $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ egyenlőtlenség egyenértékű a következő rendszerrel: $\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Ha $0 < a < 1$, akkor a $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ egyenlőtlenség egyenértékű a következő rendszerrel: $\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Az exponenciális és a logaritmusfüggvény deriváltjai

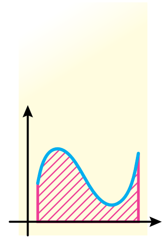
$(e^x)' = e^x$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

2.§. INTEGRÁL ÉS ALKALMAZÁSA



Ebben a paragrafusban megismerkedtek egy művelettel, amely a differenciálásnak a fordított művelete, és megtanuljátok ennek a tulajdonságait is. Bővítitek azoknak az alakzatoknak a körét, melyeknek a területét meg tudjátok határozni. Megismerkedtek a „határozott integrál” fogalmával és annak mértani jelentésével is.

9. Primitív függvény

Már tudjátok, hogy az adott függvény deriváltjának meghatározását differenciálásnak nevezzük. A fordított műveletet, vagyis amikor a deriváltja alapján kell meghatározni a függvényt, **integrálásnak** nevezzük.

Meghatározás. Az F függvényt, az f függvény primitív függvényének (vagy röviden primitívjének) nevezzük az I intervallumon, ha minden $x \in I$-re teljesül a következő egyenlőség:

$$F'(x) = f(x).$$

Például az $F(x) = x^2$ primitív függvénye lesz az $f(x) = 2x$ függvénynek a $(-\infty;\ +\infty)$ intervallumon, mivel az $\mathbb{R}$ halmazon teljesül az $(x^2)' = 2x$ egyenlőség.

Gyakran azoknál a feladatoknál, amelyek a primitív függvénnyel kapcsolatosak, elhagyják az I intervallumot. Ilyen esetekben úgy tekintjük, hogy $I = (-\infty;\ +\infty)$. Így az $F(x) = \cos x$ a primitívje lesz az $f(x) = -\sin x$ függvénynek, mivel $(\cos x)' = -\sin x$.

Vizsgáljunk meg még egy példát. Az $F(x) = \sqrt{x}$ primitív függvénye az $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ függvénynek a $(0;\ +\infty)$ intervallumon, mivel ezen az intervallumon teljesül a következő egyenlőség: $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Vizsgáljuk meg az $y = x^2 + 1$ és az $y = x^2 - 2$ függvényeket. Mindkettőnek ugyanaz a függvény lesz a deriváltja, az $y = 2x$. Tehát mindkét függvény, az $y = x^2 + 1$ és az $y = x^2 - 2$ is primitív függvénye az $y = 2x$-nek. Természetesen mindegyik $y = x^2 + C$ alakú függvény, ahol a C – bármilyen szám, primitív függvénye az $y = 2x$-nek. Tehát a primitív függvény meghatározásáról szóló feladatnak végtelen sok megoldása lesz.

Az integrálási módszer abban rejlik, hogy az adott függvénynek meghatározzuk minden primitívjét az adott intervallumon.

Milyen kapcsolatban vannak egymással az adott függvény primitív függvényei, azt a következő tétel adja meg.

9.1. tétel (a primitív függvény alaptulajdonsága). Ha az F függvény primitív függvénye f-nek az I intervallumon és C tetszőleges szám, akkor az

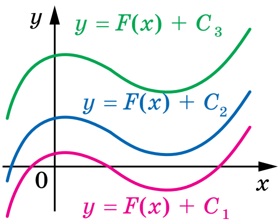
$$y = F(x) + C$$

szintén primitívje lesz az f függvénynek az I intervallumon.

Az f függvény bármely primitív függvénye az I intervallumon megadható $y = F(x) + C$ alakban, ahol C valamely szám.

Ha az F függvény primitív függvénye f-nek az I intervallumon, akkor az $F(x) + C$ kifejezést, ahol C tetszőleges szám, az f primitív függvény általános alakjának nevezzük az I tartományban.

A primitív függvény alaptulajdonságából következik, hogy bármely két primitív függvény grafikonja megkapható egyiknek a másikba történő párhuzamos eltolásával, amit az ordinátatengely mentén hajtunk végre (9.1. ábra).



9.1. ábra

Az $y = f(x)$ függvény primitívjeinek halmazát az I intervallumon a **határozatlan integráljának** nevezzük, és így jelöljük:

$$\int f(x)\,dx$$

(olvasd: integrál $fx\ dx$).

A primitív függvényekkel kapcsolatos feladatok megoldása során célszerű a 3. belső borítón lévő táblázatot használni.

1. feladat. Határozd meg az $f(x) = x^5$ primitív függvényének általános alakját!

Megoldás. Alkalmazva a primitív függvények táblázatát, azt kapjuk, hogy az $f(x) = x^5$ egyik primitívje az $F(x) = \frac{x^6}{6}$ lesz. Tehát a 9.1. tétel alapján a primitív függvény általános alakja az $\frac{x^6}{6} + C$, ahol a C tetszőleges szám lesz. ◄

Az 1. feladat megoldásából következik, hogy

$$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C.$$

2. feladat. Az $f(x) = \cos x$ függvénynek határozzuk meg azt a primitívjét, amelynek grafikonja illeszkedik az $M\left(\frac{\pi}{6}; 3\right)$ ponthoz!

Megoldás. Alkalmazva a primitív függvények táblázatát, azt kapjuk, hogy a keresett primitív $F(x) = \sin x + C$ alakban adható meg, ahol a C valamely szám lesz. Meghatározzuk ezt a számot.

A feltételből az következik, hogy $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3.$ Tehát $\sin\frac{\pi}{6} + C = 3.$ Figyelembe véve, hogy $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$ meghatározzuk, hogy $C = 2{,}5$.

Tehát a keresett primitív függvény $F(x) = \sin x + 2{,}5$. ◄

1. Melyik függvényt nevezzük az f függvény primitívjének az I intervallumon?
2. Fogalmazzátok meg a primitív függvény alaptulajdonságát!
3. Mit nevezünk a primitív függvény általános alakjának?
4. Mit nevezünk határozatlan integrálnak? hogyan jelölik?

GYAKORLATOK

9.1.° Állapítsátok meg, hogy az F függvény primitívje-e f-nek:

1) $F(x) = 3x^2 + x - 2$, $f(x) = 6x + 1$;
2) $F(x) = x^{-4}$, $f(x) = -4x^{-5}$ a $(0; +\infty)$ intervallumon;
3) $F(x) = \sin x + 3$, $f(x) = \cos x + 3$;
4) $F(x) = 5^x$, $f(x) = 5^x \ln 5$!

9.2.° Bizonyítsátok be, hogy az F függvény primitívje f-nek az I intervallumon:

1) $F(x) = x^4 - 2x^2 + 6$, $f(x) = 4x^3 - 4x$, $I = (-\infty; +\infty)$;
2) $F(x) = \frac{1}{x^3}$, $f(x) = -\frac{3}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$;
3) $F(x) = 5 - 3\sqrt{x}$, $f(x) = -\frac{3}{2\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$!

9.3.° Az $F(x) = \frac{1}{x^2}$ primitív függvénye-e az $f(x) = -\frac{2}{x^3}$ függvénynek a következő intervallumon:

1) $(0; +\infty)$; 2) $(-2; 2)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $(-6; 0)$?

9.4.° ° Határozd meg a függvény primitív függvényét:

1) $f(x) = 5$;
2) $f(x) = x$;
3) $f(x) = x^6$;
4) $f(x) = 2^x$;
5) $f(x) = \frac{1}{x^7}$ a $(-\infty; 0)$ intervallumon;
6) $f(x) = \sqrt{x}$ az $[1; +\infty)$ intervallumon;
7) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ a $(-\infty; -3)$ intervallumon;
8) $f(x) = x^{-5}$ a $(0; +\infty)$ intervallumon!

9.5.° Határozd meg a függvény primitív függvényét:

1) $f(x) = 0$;
2) $f(x) = x^8$;
3) $f(x) = \frac{1}{3^x}$;
4) $f(x) = \frac{1}{x^{20}}$ a $(0; +\infty)$ intervallumon;
5) $f(x) = \sqrt[7]{x}$ a $(4; +\infty)$ intervallumon;
6) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ a $[0,5; +\infty)$ intervallumon!

9.6.• Határozzátok meg a primitívjét az f függvénynek, amelynek grafikonja illeszkedik az adott ponthoz:
1) $f(x) = x^2$, $A(-1; 3)$;
2) $f(x) = \sin x$, $B(\pi; -1)$;
3) $f(x) = e^x$, $C(0; -6)$!

9.7.• Határozzátok meg a primitívjét az f függvénynek, amelynek grafikonja illeszkedik az adott ponthoz:

1) $f(x) = x^3$, $M\left(1; \frac{5}{4}\right)$;

2) $f(x) = \cos x$, $N\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{2}\right)$;

3) $f(x) = 3^x$, $K\left(2; \frac{9}{\ln 3}\right)$!

9.8.• Az I intervallumon határozzátok meg az f függvény F primitívjét, amely az adott pontban a következő értéket veszi fel:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{3}\right) = -9$;

2) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (-\infty; 0)$, $F(-e^3) = 7$;

4) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$, $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$!

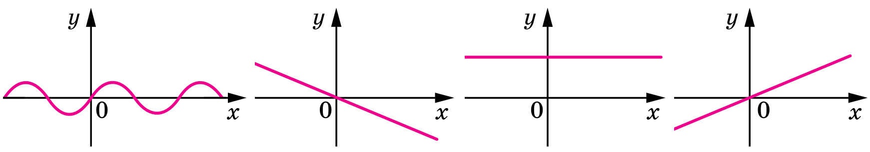
9.9.• Az I intervallumon határozzátok meg az f függvény F primitívjét, amely az adott pontban a következő értéket veszi fel:

1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$, $F(16) = 10$;

2) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{e}\right) = -2$;

3) $f(x) = 2^x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(5) = 1$!

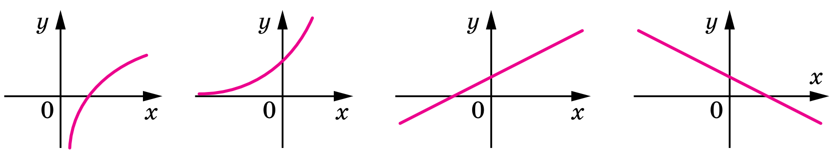
9.10.•• A 9.2. ábrán határozzátok meg azt a grafikont, amely az $f(x) = \cos 3$ függvény primitívjének lesz a grafikonja:



a *b* *c* *d*

9.2. ábra

9.11.•• A 9.3. ábrán határozzátok meg azt a grafikont, amely az $f(x) = \ln 2$ függvény primitívjének lesz a grafikonja:



a *b* *c* *d*

9.3. ábra

9.12.•• Az $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$ függvénynek határozzátok meg azt a két primitívjét, melyeknek a megfelelő pontjai (vagyis az azonos abszcisszájú pontok) közötti távolság 2-vel lesz egyenlő!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

9.13. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $\log_2 (1{,}5x - 3) \leqslant 1 + 2\log_2 0{,}3;$

2) $\log_{0,4} (3{,}5 - 5x) \geqslant 2\log_{0,4} 0{,}2 - 1!$

9.14. Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $\dfrac{2\sin(\pi - \alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\alpha \sin(\pi + \alpha)};$

2) $\dfrac{2\cos^2\alpha}{1 + \sin(\pi + \alpha)} + 2\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha\right)!$

10. A primitív függvény meghatározásának szabályai

A függvény deriváltjának meghatározása során alkalmaztátok a differenciálás szabályait. Ebben a pontban megvizsgáljuk a primitív függvény meghatározásának szabályait.

10.1. tétel. ***Ha az F és a G függvények megfelelően az f és g függvények primitívjei az I intervallumon, akkor az $y = F(x) + G(x)$ függvény az $y = f(x) + g(x)$ függvénynek lesz a primitívje.***

Bizonyítás. A feltételből következik, hogy bármilyen $x \in I$ esetén teljesülnek az $F'(x) = f(x)$ és $G'(x) = g(x)$ egyenlőségek. Ekkor minden x-re az I intervallumból igaz lesz a következő egyenlőség:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$$

Tehát az I intervallumon az $y = F(x) + G(x)$ függvény az $y = f(x) + g(x)$ függvénynek a primitívje lesz. ◄

A 10.1. tételből következik, hogy

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C,$$

ahol C – tetszőleges szám.

Hasonlóan bizonyítható, hogy

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + C.$$

10.2. tétel. ***Ha az I intervallumon az F függvény primitívje lesz az f függvénynek és a k valamely szám, akkor ezen az intervallumon az $y = kF(x)$ függvény primitívje lesz az $y = kf(x)$ függvénynek.***

Most felírhatjuk:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C,$$

ahol C – tetszőleges szám.

1. feladat. Határozzátok meg az $f(x) = x^2 + \cos x$ függvény primitívjének általános alakját!

Megoldás. Az $y = x^2$ függvény primitívje az $y = \dfrac{x^3}{3}$ függvény lesz, az $y = \cos x$ függvénynek pedig az $y = \sin x$.

Alkalmazva a 10.1. tételt megkapjuk, hogy az $y = \dfrac{x^3}{3} + \sin x$ függvény lesz az adott f függvény primitívje. Ekkor az $\dfrac{x^3}{3} + \sin x + C$ az f függvény primitívjének általános alakja. ◄

2. feladat. Határozzátok meg az $f(x) = 5 \sin x$ függvénynek azt az F primitívjét, amely kielégíti az $F(0) = 0$ feltételt!

Megoldás. Az $y = \sin x$ függvény primitívje az $y = -\cos x$ függvény lesz. Alkalmazva a 10.2. tételt megkapjuk, hogy az $y = -5 \cos x$ függvény lesz az $y = 5 \sin x$ primitív függvénye. Ekkor létezik egy olyan C szám, hogy $F(x) = -5 \cos x + C$. Meghatározzuk ezt a C számot az $F(0) = 0$ feltétel alapján: $-5\cos 0 + C = 0$. Innen $C = 5$.

Felelet: $F(x) = -5 \cos x + 5$. ◄

3. feladat. Az anyagi pont koordinátaegyenesen történő mozgásának sebessége a $v(t) = 3t^2 + 4t$ szabállyal adható meg. Határozzátok meg az $y = s(t)$ mozgástörvényét, ha $s(0) = 3$ m (az elmozdulást méterekben, az időt másodpercekben mérjük).

Megoldás. Az $y = s(t)$ függvény primitív függvénye lesz az $y = v(t)$ függvénynek a $[0; +\infty)$ intervallumon. Ekkor felírható:

$$s(t) = t^3 + 2t^2 + C,$$

ahol C – valamely szám. Meghatározzuk C értékét az $s(0) = 3$ feltétel alapján. Ezt kapjuk:

$$t^3 + 2t^2 + C = 3, \text{ innen } C = 3.$$

Tehát a keresett mozgási törvényt a következő képlet adja meg:

$$s(t) = t^3 + 2t^2 + 3. \blacktriangleleft$$

1. Hogyan kell meghatározni az $y = f(x) + g(x)$ függvény primitívjét?
2. Hogyan kell meghatározni az $y = kf(x)$ függvény primitívjét, ha k – valamely szám?

GYAKORLATOK

10.1.° Határozzátok meg a primitív függvény általános alakját:

1) $f(x) = 4 - 2x$;
2) $f(x) = 3x^2 - x + 5$;
3) $f(x) = 5 \sin x + \cos x$;
4) $f(x) = 5e^x - 2 \cdot 3^x$;
5) $f(x) = \frac{6}{x} - x^3$, a $(-\infty; 0)$ intervallumon;
6) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + x^3$, a $(0; +\infty)$ intervallumon;
7) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^4}$, a $(-\infty; 0)$ intervallumon;
8) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{6}{x^5}$, a $(0; +\infty)$ intervallumon!

10.2.° Határozzátok meg a primitív függvény általános alakját:

1) $f(x) = x + 3$;
2) $f(x) = x^2 + 4x - 1$;
3) $f(x) = \frac{1}{2}e^x + 2^x \ln 2$;

4) $f(x)=\dfrac{9}{\cos^2 x}-3\sin x$, a $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallumon;

5) $f(x)=5\sqrt[4]{x}-\dfrac{3}{x}$, a $(0;+\infty)$ intervallumon;

6) $f(x)=\dfrac{9}{x^{10}}+\dfrac{8}{x^9}$, a $(-\infty;0)$ intervallumon!

10.3.• Határozzátok meg az f függvénynek azt az F primitívjét az I intervallumon, amely kielégíti az adott feltételt:
1) $f(x)=1-2x,\ I=(-\infty;+\infty),\ F(3)=2;$
2) $f(x)=3x^2-4x,\ I=(-\infty;+\infty),\ F(1)=4;$
3) $f(x)=4-\dfrac{1}{x^2},\ I=(0;+\infty),\ F\left(\dfrac{1}{4}\right)=1;$
4) $f(x)=(2-3x)^2,\ I=(-\infty;+\infty),\ F(1)=0!$

10.4.• Határozzátok meg az f függvénynek azt az F primitívjét az I intervallumon, amelynek grafikonja átmegy az adott ponton:
1) $f(x)=3-6x,\ I=(-\infty;+\infty),\ A(-1;0);$
2) $f(x)=4x^3-6x^2+1,\ I=(-\infty;+\infty),\ B(1;5);$
3) $f(x)=2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}},\ I=(0;+\infty),\ C(4;10);$
4) $f(x)=2\sin x,\ I=(-\infty;+\infty),\ D\left(\dfrac{\pi}{2};0\right)!$

10.5.• Határozzátok meg az $f(x)=4x^3+4x$ függvénynek azt az F primitívjét, amelynek egyik zérushelye -1! Határozzátok meg ennek a primitív függvénynek a többi zérushelyét!

10.6.• Az $f(x)=x^2-12$ függvénynek határozzuk meg azt az F primitívjét, melynek egyik zérushelye a 3-as!

10.7.•• Az F_1 és F_2 függvények az $f(x)=5x^4-3x^2-2$ függvény primitív függvényei a $(-\infty;+\infty)$ intervallumon. Az F_1 függvény grafikonja átmegy az $A(1;2)$ ponton, az F_2 függvényé pedig a $B(0;5)$ ponton. Az F_1 vagy az F_2 függvény grafikonja lesz-e fentebb?

10.8.•• Az F_1 és F_2 függvények az $f(x)=5x^4-3x^2-2$ függvény primitív függvényei a $(-\infty;+\infty)$ intervallumon. Az F_1 függvény grafikonja átmegy az $A(2;6)$ ponton, az F_2 függvényé pedig a $B(-1;1)$ ponton. Az F_1 vagy az F_2 függvény grafikonja lesz-e fentebb?

10.9.•• A koordinátaegyenesen mozgó anyagi pont sebessége a $v(t)=t^2+2t-3$ törvény szerint változik. Határozzátok meg a pont koordinátáit az idő függvényében, ha a $t=0$ kezdeti időpontban ez a pont a koordináta kezdőpontjában helyezkedik el (a sebességet méter per másodpercenkéntben mérjük)!

10.10.•• A test a koordinátatengelyen a $v(t) = 6t^2 + 1$ képlettel megadott sebességgel mozog a t idő függvényében. Határozzátok meg azt a képletet, amely kifejezi a pont koordinátáit az idő függvényében, ha a $t = 3$ sec időpontban a test a koordináta-rendszer kezdőpontjától 10 m távolságra lesz (a sebességet méter per másodpercenkéntben mérjük)!

10.11.•• Határozzátok meg az $f(x) = -2x + 5$ függvénynek azt a primitívjét, amely grafikonjának csak egy közös pontja lesz az $y = 2$ egyenessel!

10.12.•• Határozzátok meg az $f(x) = x + 1$ függvénynek azt a primitívjét, amely grafikonjának csak egy közös pontja lesz az $y = -4$ egyenessel!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

10.13. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\cos^2 x - \cos 2x = \sin x$;

2) $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \cos^2(2\pi - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $(\sin x - \cos x)^2 = 1 + \sin x$!

10.14. Határozzátok meg a függvény értelmezési tartományát:

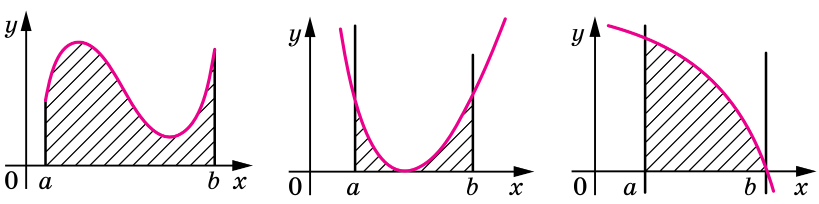
1) $f(x) = (5 - 2x)^{\frac{1}{3}} + \log_3(x^2 + 2{,}5x)$;

2) $f(x) = \sqrt{4 - x^2} + \log_{0,4}(1 - x)$!

11. A görbevonalú trapéz területe. Határozott integrál

Vizsgáljuk meg az f függvényt, amely folytonos az $[a; b]$ intervallumon, és ezen az intervallumon nem negatív értékeket vesz fel. Az f függvény grafikonjával és az $y = 0$, $x = a$ és $x = b$ egyenesekkel határolt alakzatot *görbevonalú trapéznak* nevezzük.

A 11.1. ábrán a görbevonalú trapéz példái láthatók.



11.1. ábra

Vizsgáljuk meg a görbevonalú trapéz területének kiszámítására szolgáló tételt.

11.1. tétel. ***Az $y = f(x)$ függvény és az $y = 0$, $x = a$ és $x = b$ $(a < b)$ egyenesek által határolt görbevonalú trapéz S területét a következő képlettel számíthatjuk ki:***

$$S = F(b) - F(a),$$

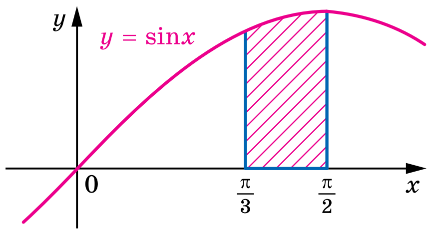
ahol, F az f függvény primitívje lesz az $[a; b]$ intervallumon.

1. feladat. Határozzátok meg az alakzat S területét, amely az $f(x) = \sin x$ függvény grafikonja, és amelyet az $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ és $x = \frac{\pi}{2}$ egyenesek határolnak!

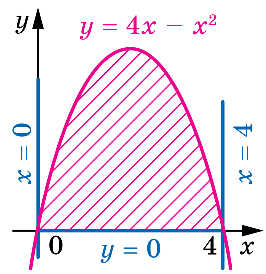
Megoldás. A 11.2. ábrán **görbevonalú trapéz** látható, amelynek meg kell határozni a területét.

Az $f(x) = \sin x$ függvény egyik primitívje a $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon az $F(x) = -\cos x$ lesz. Ekkor $S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Felelet: $\frac{1}{2}$. ◀



11.2. ábra



11.3. ábra

2. feladat. Határozzátok meg az alakzat S területét, amelyet az $f(x) = 4x - x^2$ függvény grafikonja és az $y = 0$ egyenes határol!

Megoldás. Az f függvény grafikonja az $y = 0$ egyenest az $x_1 = 0$ és $x_2 = 4$ (11.3. ábra) pontokban metszi. Ezért az alakzat, amelynek területét meg kell határozni, görbevonalú trapéz lesz, amelyet az f függvény és az $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$ egyenesek határolnak.

Az f függvény egyik primitívje a $[0; 4]$ intervallumon az $F(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$ lesz.

Ekkor

$$S = F(4) - F(0) = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = \frac{32}{3}.$$

Felelet: $\frac{32}{3}$. ◄

Meghatározás. **Legyen az F az f függvény primitívje az I intervallumon, az a és b számok, ahol $a < b$ az I intervallumhoz tartozik. Az $F(b) - F(a)$ különbséget az f függvény $[a; b]$ intervallumon lévő határozott integráljának nevezzük.**

Az f függvény $[a; b]$ intervallumon lévő határozott integrálját így jelöljük: $\int\limits_a^b f(x)dx$ (olv.: integrál a-tól b-ig fx dx). Tehát,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),} \qquad (1)$$

ahol F – az f függvény tetszőleges primitívje az $[a; b]$ intervallumon.

Például az $F(x) = x^3$ függvény primitív függvénye az $f(x) = 3x^2$ függvénynek a $(-\infty; +\infty)$ intervallumon. Ekkor bármilyen a és b számra vonatkozóan, ha $a < b$, felírható a következő egyenlőség:

$$\int\limits_a^b 3x^2 dx = F(b) - F(a) = b^3 - a^3.$$

Megjegyezzük, hogy az $F(b) - F(a)$ különbség értéke független az f függvény kiválasztásától. Valóban, az f függvény minden primitívje az I intervallumon megadható $G(x) = F(x) + C$ alakban, ahol C bármilyen szám lehet. Ekkor:

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(b).$$

Az (1) egyenlőséget **Newton–Leibniz képletének** nevezzük.

Tehát az $\int\limits_a^b f(x)dx$ határozott integrál Newton–Leibniz képlettel történő kiszámításához a következők szükségesek:

1) meghatározni az f függvény bármely F primitívjét az $[a; b]$ intervallumon;

2) kiszámítani az F értékét az $x = b$ és $x = a$ pontokban;

3) meghatározni az $F(b) - F(a)$ különbséget.

A határozott integrál kiszámítása során az $F(b) - F(a)$ különbséget $F(x)\Big|_a^b$-val jelölik.

Alkalmazva ezt a jelölést, kiszámítjuk a következő integrált: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx$.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}.$$

3. feladat. Számítsátok ki: $\int\limits_1^2 (x^4 + x^2 - 2)dx$.

Megoldás:

$$\int\limits_1^2 (x^4 + x^2 - 2)dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3} - 2\cdot 1\right) = 6\frac{8}{15}.$$

Felelet: $6\frac{8}{15}$. ◀

A Newton–Leibniz-képlet lehetőséget ad a határozott integrál és a görbevonalú trapéz $y = f(x)$ függvény és $y = 0$, $x = a$ és $x = b$ $(a < b)$ egyenesek által határolt S területe közötti összefüggés megállapítására.

Felhasználva a 11.1. tételt, felírható:

$$\boxed{S = \int\limits_a^b f(x)dx}$$

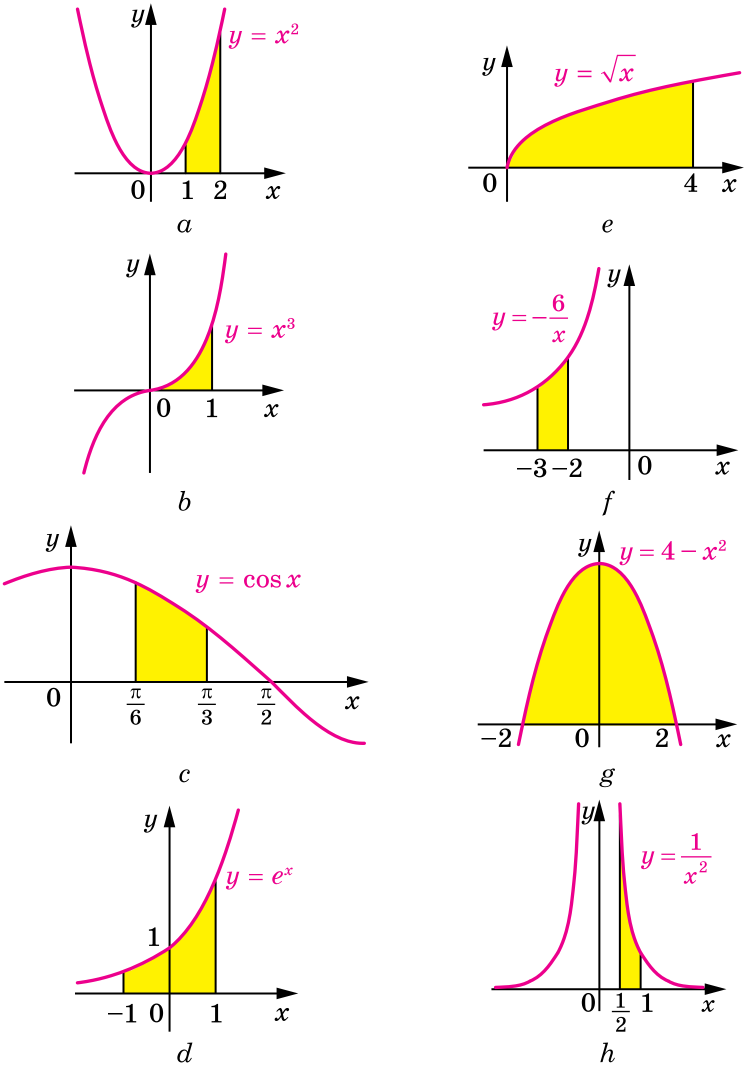
Ez a képlet adja meg **a határozott integrál geometriai értelmezését**.

?

1. Milyen alakzatot nevezünk görbevonalú trapéznak?
2. Milyen képlettel számítható ki a görbevonalú trapéz területe?
3. Mit nevezünk határozott integrálnak?
4. Írjátok fel Newton–Leibniz képletét!
5. Miben rejlik a határozott integrál geometriai értelmezése?

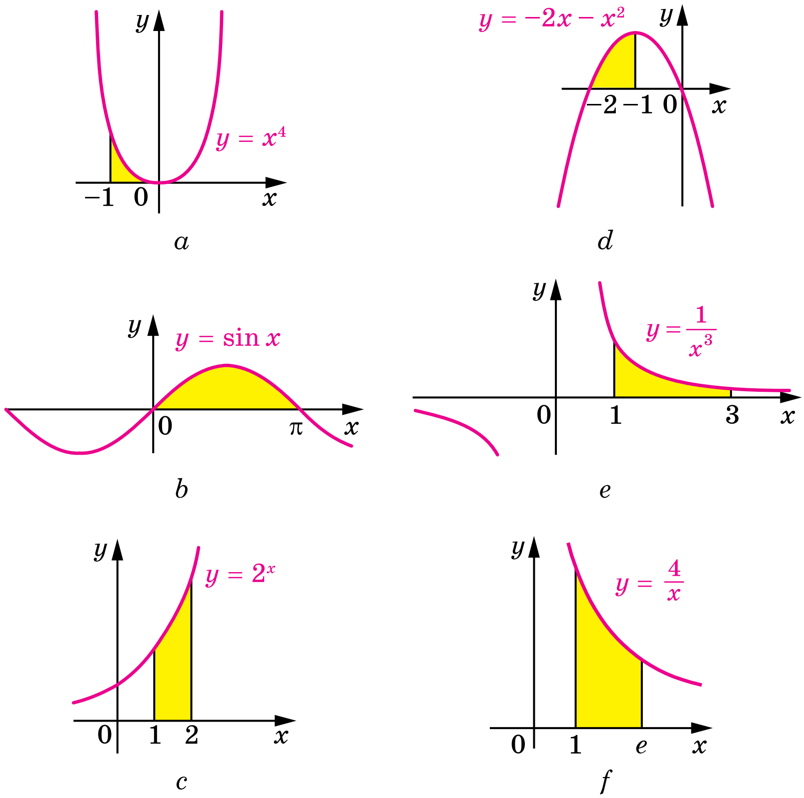
GYAKORLATOK

11.1.° Határozzátok meg a 11.4. ábrán látható görbevonalú trapézok területeit!



11.4. ábra

11.2.° Határozzátok meg a 11.5 ábrán látható görbevonalú trapézok területeit!



11.5. ábra

11.3.° Számítsátok ki a határozott integrál értékét:

1) $\int\limits_5^7 x\,dx$;

2) $\int\limits_3^8 dx$;

3) $\int\limits_{-3}^0 x^2\,dx$;

4) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$;

5) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

6) $\int\limits_{16}^{100} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

7) $\int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x}$;

8) $\int\limits_1^{10} \frac{dx}{x^2}$;

9) $\int\limits_{-2}^3 3^x\,dx$!

11.4.° Számítsátok ki a határozott integrál értékét:

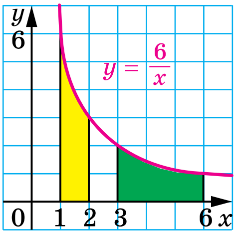
1) $\int_{-4}^{-2} 2\,dx$;
3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$;
5) $\int_{0}^{4} e^x\,dx$;
2) $\int_{1}^{2} x^3\,dx$;
4) $\int_{1}^{3} \frac{dx}{x^4}$;
6) $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x}$!

11.5.• Számítsátok ki a görbevonalú trapéz területét, amelyet a következők határolnak:

1) az $y = x^2 + 1$ parabola és az $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$ egyenesek;
2) az $y = \cos x$ cosinusid és az $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$ egyenesek;
3) az $y = -x^3$ görbe és az $y = 0$, $x = -2$ egyenesek;
4) az $y = 3 - 2x - x^2$ parabola és az $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$ egyenesek;
5) az $y = \frac{1}{2x}$ hiperbola és az $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$ egyenesek;
6) az $y = 2x - x^2$ parabola és az abszcisszatengely!

11.6.• Számítsátok ki a görbevonalú trapéz területét, amelyet a következők határolnak:

1) az $y = x^2 - 1$ parabola és az $y = 0$, $x = 2$ egyenesek;
2) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;
3) $y = -\frac{8}{x}$, $y = 0$, $x = -4$, $x = -2$!



11.6. ábra

11.7.• Bizonyítsátok be, hogy a 11.6. ábrán látható színezett görbevonalú trapézok területei egyenlők!

11.8.• Számítsátok ki a határozott integrál értékét:

1) $\int_{-4}^{-2} (2x + 4)\,dx$;
4) $\int_{1}^{3} (4x^3 - 4x + 3)\,dx$;
2) $\int_{0}^{6} (3x^2 - x)\,dx$;
5) $\int_{-2}^{1} (x - 3)^2\,dx$;
3) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x + 2\cos x)\,dx$;
6) $\int_{1}^{e} \left(\frac{1}{x} - x\right) dx$!

11.9.• Számítsátok ki a határozott integrál értékét:

1) $\int_{-1}^{1} (1 - 5x^4)\,dx$;
3) $\int_{0}^{1} (2x - 1)^2\,dx$;
2) $\int_{1}^{4} \left(\frac{4}{x^2} + 2x - 3x^2\right) dx$;
4) $\int_{1}^{4} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\right) dx$!

11.10.•• Határozzátok meg a következő vonalakkal határolt területet:

1) $y = x^2$, $y = 4$;
2) $y = 2x^2$, $y = 2x$;
3) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 2$;
4) $y = \dfrac{4}{x}$, $y = 1$, $x = 1$;
5) $y = \dfrac{4}{x}$, $y = 4$, $x = 4$;
6) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$;
7) $y = 2 + x - x^2$, $y = 2 - x$;
8) $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$;
9) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$;
10) $y = -x^2 + 2x$, $y = x^2$;
11) $y = x^3$, $y = x^2$;
12) $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$;
13) $y = \dfrac{7}{x}$, $x + y = 8$;
14) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$!

11.11.•• Határozzátok meg az alakzat területét, melyet a következők határolnak:

1) az $y = x^3$ függvény grafikonja és az $y = 8$, $x = 1$ egyenesek;
2) az $y = 0{,}5x^2$ parabola és az $y = -x$ egyenes;
3) az $y = 4 - x^2$ parabola és az $y = 3$ egyenes;
4) az $y = 6 + x - x^2$ parabola és az $y = 6 - 2x$ egyenes;
5) az $y = x^2 - 4x + 4$ és az $y = 4 - x^2$ parabolák;
6) az $y = \dfrac{3}{x}$ hiperbola és az $y = 3$, $x = 3$ egyenesek;
7) az $y = e^{-x}$ függvény grafikonja és az $y = e$, $x = 0$ egyenesek;
8) az $y = \dfrac{5}{x}$ hiperbola és az $x + y = 6$ egyenes!

11.12.•• Az a mely értékeinél teljesül a következő egyenlőtlenség:

1) $\displaystyle\int_0^a (4 - 2x)\,dx < 3$, ahol $a > 0$; 2) $\displaystyle\int_{\log_{0,2} 6}^{a} 0{,}2^x\,dx > \frac{19}{\ln 0{,}2}$, ahol $a > \log_{0,2} 6$?

11.13.•• Az a mely $\dfrac{1}{2}$-nél nagyobb értékeinél teljesül a következő egyenlőtlenség: $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{a} \left(\frac{1}{x^2} + 1\right) dx > 1{,}5$?

11.14.* Az a mely értékeinél lesz az $y = x^2$, $y = 0$, $x = a$ vonalakkal határolt alakzat területe 9-cel egyenlő?

11.15.* Az a mely értékeinél lesz az $y = 2x^3$, $y = 0$, $x = a$ vonalakkal határolt alakzat területe 8-cal egyenlő?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

11.16. Számítsátok ki a kifejezés értékét:

1) $\left(4^{-0,25}-2^{0,5}\right)\left(4^{-0,25}+\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$;

2) $\dfrac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{6}}{\left(\sqrt{6}+1\right)\left(\sqrt{6}-1\right)}$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{5}-\dfrac{5}{2}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{5}\right)^3}$!

11.17. Határozzátok meg az $x^2-3x<4$ egyenlőtlenség egész megoldásainak az összegét!

AZ ÉRTELMÉVEL MEGELŐZTE AZ EMBERISÉGET

Ezekkel a dicsérő szavakkal jellemzik Isaac Newtont, a híres angol tudóst, fizikust és matematikust. A tudománytörténet Newton mellett egy nagy német tudóst, Gottfried Wilhelm Leibnizt is számon tartja, aki a filozófiában, a matematikában a joggyakorlatban, a logikában, a történelemben és a politikatudományban is nagyot alkotott. A két híres tudósnak jelentős eredményei vannak a differenciálszámításban és az integrálszámításban, ők alkották meg a derivált és az integrál fogalmakat.

Isaac Newton
(1643–1727)

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646–1716)

Érdemes megjegyezni, hogy Newton és Leibniz akkor alkották meg az elméleteiket, amikor a számunkra már közismert fogalmak még egyáltalán nem léteztek, vagy nem voltak még pontosan értelmezve. Próbáljatok elképzelni egy olyan matematika tankönyvet, amelyben még nem szerepelnek a következő fogalmak: *halmaz, függvény, valós szám* stb. A többi között a ma használt jelöléseket még egyáltalán nem is alkalmazták. Néhányat éppen Newtonnak és Leibniznek sikerült kitalálnia, általánosítania és az igényekhez alakítania. Például Leibniz jelölte a szorzási műveletet egy ponttal (előtte a következő szimbólumokat használták: $\square$, $\times$, $*$, M), az osztási műveletet kettősponttal (előtte gyakran D betűvel) jelölte, Newton alkalmazta először a hatvány jelölésére az a^n képletet az n egész és tört értékekre is, az $\sqrt{x}$ jelölést általánosította az $\sqrt[n]{x}$-re is. A *függvény* kifejezést és az integrál $\int$ jelét először Leibniz munkáiban találjuk.

Általában a matematika története két korszakra osztható: a derivált és az integrál megjelenése előttire és az azt követőre. Newton és Leibniz eredményei lehetővé tették a tudósok számára, hogy gyorsan és könnyen megoldhassák azokat a feladatokat, melyeket előtte megoldhatatlanoknak tekintettek.

2. SZÁMÚ FELADAT. *ELLENŐRIZD MAGAD TESZTELÉSSEL!*

1. A következő függvények közül melyik lesz primitívje az $f(x) = x^4$ függvénynek?

A) $F(x) = 4x^3$; B) $F(x) = \dfrac{x^5}{5}$; C) $F(x) = x^5$; D) $F(x) = \dfrac{x^5}{4}$.

2. A következő esetek közül melyikben lesz az F függvény primitívje az f függvénynek?

A) $f(x) = \sin x$, $F(x) = \cos x$; C) $f(x) = x$, $F(x) = 1$;
B) $f(x) = 2^x$, $F(x) = 2^x \ln 2$; D) $f(x) = \cos x$, $F(x) = \sin x$.

3. A következő függvények közül melyik lesz az $f(x) = \dfrac{4}{x^5}$ primitív függvényének általános alakja a $(0; +\infty)$ intervallumon?

A) $-\dfrac{1}{x^4}$; B) $-\dfrac{1}{x^4} + C$; C) $-\dfrac{20}{x^6} + C$; D) $-\dfrac{2}{3x^6} + C$.

4. A következő függvények közül melyik lesz az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ primitív függvénye a $(-\infty; -1]$ intervallumon?

A) $F(x) = -1 - \ln x$; C) $F(x) = 1 - \ln(-x)$;
B) $F(x) = \ln x + 1$; D) $F(x) = \ln(-x) - 1$.

5. Nevezd meg az $f(x) = e^x - 4x^3$ primitív függvényét a $(-\infty; +\infty)$ intervallumon!

A) $e^x + C$; B) $e^x - 12x^2 + C$; C) $\dfrac{e^{x+1}}{x+1} - x^4 + C$; D) $e^x - x^4 + C$.

6. Az F függvény primitív függvénye az $f(x) = x - 3$ függvénynek. A következő pontok közül melyik fog illeszkedni az F függvény grafikonjára, ha $F(2) = 5$?

A) (0; 8); B) (–2; 17); C) (1; 5,5); D) (4; 4).

7. A következő függvények közül melyik lesz az $f(x) = 7^x$ függvény primitívje?

A) $F(x) = \dfrac{7^x}{\ln 7}$; C) $F(x) = 7^x$;
B) $F(x) = 7^x \ln 7$; D) $F(x) = \dfrac{7^{x+1}}{x+1}$.

8. Számítsátok ki az $\int_0^3 x^2 dx$ integrált!

A) 27; B) 9; C) 6; D) 3.

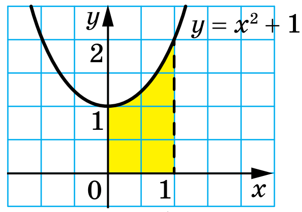
9. Számítsátok ki az $\int_1^5 \dfrac{dx}{x^2}$ integrált!

A) 0,2; B) 0,8; C) –0,2; D) –0,8.

10. Számítsátok ki az $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ integrált!

A) 0; B) 1; C) 2; D) –1.

11. Számítsátok ki a rajzon látható színezett alakzat területét!



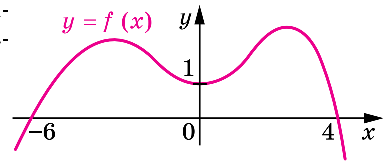
A) $\frac{4}{3}$; C) 1;

B) $\frac{1}{3}$; D) 2.

12. Számítsátok ki az $\int_{-1}^{4}(f(x)+1)dx$ integrál értékét, ha $\int_{-1}^{4}f(x)dx = 2$!

A) 3; B) 5; C) 7; D) 9.

13. Az ábrán az $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Határozd meg a következő kifejezés értékét!

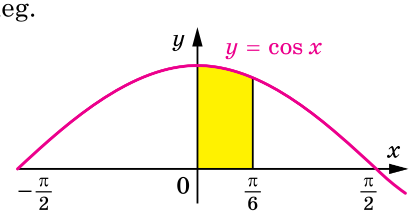


$$\int_{-6}^{0}f'(x)dx - \int_{0}^{4}f'(x)dx.$$

A) 0; C) 1;

B) 2; D) nem állapítható meg.

14. Számítsátok ki az ábrán látható színezett rész területét!



A) $\frac{\pi}{6}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$;

B) $\frac{1}{2}$; D) 1.

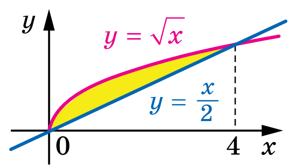
15. Határozzátok meg a görbevonalú trapéz területét, melyet a következő vonalak határolnak: $y = 6x - x^2$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$.

A) $12\frac{2}{3}$; B) $14\frac{1}{3}$; C) $14\frac{2}{3}$; D) $15\frac{1}{3}$.

16. Melyik integrálnak lesz az értéke az ábrán látható besatírozott rész területe?

A) $\int_{0}^{4}\frac{x}{2}dx$; C) $\int_{0}^{4}\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx$;

B) $\int_{0}^{4}\sqrt{x}\,dx$; D) $\int_{0}^{4}\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x}\right)dx$.



17. Számítsátok ki az $y = x^2$, $y = 2 - x$ grafikonjaik által határolt síkidom területét!

A) 3,5; B) 4; C) 4,5; D) 5.

18. Az a mely értékénél fogja az $x = a$ egyenes két egyenlő részre osztani az $y = \frac{10}{x}$ és az $y = 0$, $x = 2$, $x = 8$ egyenesek által határolt alakzat területét?

A) 4; B) 5; C) 10; D) nincs ilyen értéke.

A 2. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Primitív

Az F függvényt az f függvény primitív függvényének (vagy röviden primitívjének) nevezzük az I intervallumon, ha minden $x \in I$ esetére teljesül a következő egyenlőség: $F'(x) = f(x)$.

A primitív függvény alaptulajdonsága

Ha az F függvény primitív függvénye az f-nek az adott I intervallumon és C bármilyen szám, akkor az $y = F(x) + C$ szintén primitívje lesz az f függvénynek az I intervallumon.

Az f függvény bármely primitív függvénye az I intervallumon megadható az $y = F(x) + C$ alakban, ahol a C valamely szám.

Határozatlan integrál

Határozatlan integrálnak nevezzük az $y = f(x)$ függvény primitív függvényeinek az összességét az I intervallumon és $\int f(x)dx$-szel jelöljük.

A primitív függvény meghatározásának szabályai

Ha az F és a G függvények megfelelően az f és g függvények primitívjei az I intervallumon, akkor az $y = F(x) + G(x)$ függvény az $y = f(x) + g(x)$ függvénynek lesz a primitívje.

Ha az I intervallumon az F függvény primitívje lesz az f függvénynek és a k bármely szám, akkor ezen az intervallumon az $y = kF(x)$függvény primitívje lesz az $y = kf(x)$ függvénynek.

A görbevonalú trapéz területe

Az $y = f(x)$ függvény és az $y = 0$, $x = a$ és $x = b$ $(a < b)$ egyenesek által határolt görbevonalú trapéz S területét a következő képlettel számíthatjuk ki: $S = F(b) - F(a)$, ahol az F az f függvény primitívje lesz az $[a; b]$ intervallumon.

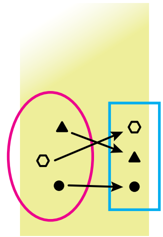
Határozott integrál

Legyen az F az f függvény primitívje az I intervallumon, az a és b számok, ahol $a < b$, az I intervallumhoz tartoznak. Az $F(b) - F(a)$ különbséget az f függvény $[a; b]$ intervallumon lévő határozott integráljának nevezzük és $\int_a^b f(x)dx$-szel jelöljük.

Newton–Leibniz-képlet

Az $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, ahol F bármilyen primitív függvénye az f függvénynek az $[a; b]$ intervallumon.

3.§. A KOMBINATORIKA ALAPJAI, VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ÉS MATEMATIKAI STATISZTIKA



Ebben a paragrafusban megismerkedtek különböző halmazok elemei számának kombinatorikai módszerrel történő meghatározásával, amelyeket megadott szabályok szerint alakítanak ki; a véletlen események valószínűségének klasszikus meghatározásával; megismeritek a matematikai statisztikát – azt a tudományt, amely az adatok gyűjtésével és annak feldolgozásával és elemzésével foglalkozik.

12. Az összeg és a szorzat kombinatorikai szabályai

Az osztálytársaitok az étkezdében hányféleképpen tudnának sorba állni? Hányféleképpen választható meg az osztályotokban az osztályelnök és a helyettese? Hányféleképpen lehetne kiosztani a futball-világbajnokságon az arany-, ezüst- és bronzérmet?

Ezekre a kérdésekre válaszolva meg kell határozni, hogy az adott szabályok szerint hány különböző kombináció létezik egy véges elemszámú halmazban. A matematikának azt a fejezetét, amely a hasonló feladatok megoldásával foglalkozik, **kombinatorikának** nevezik.

A legtöbb kombinatorikai feladatot két szabály alkalmazásával lehet megoldani: az összeadási és a szorzási szabály segítségével.

Vizsgáljuk meg a következő feladatot. A turista 5 Herszon környéki és 7 kárpátaljai turistaútvonal felől érdeklődik. Állapítsuk meg, hányféleképpen tudja megszervezni a munkahelyi szabadságát, ha csak egy ilyen utazásra van ideje!

Mivel összesen $5 + 7 = 12$ különböző eset lehetséges, ezért egyet kiválasztani ezek közül 12-féleképpen tud.

Tehát az összes útvonal számának meghatározására összeadtuk a herszoni utak számát a kárpátaljai utakéval. Ezt a módszert kombinatorikai **összeadási szabálynak** nevezzük.

Most térjünk vissza az útvonalak kiválasztásához. Ha a turistának két utazásra lesz ideje, és először Herszon környékére, azután Kárpátaljára szeretne utazni, akkor a nyaralását 35-féleképpen töltheti el. Valóban, ha az első utazását kiválasztja Herszon térségébe, akkor ehhez 7 különböző kárpátaljai útvonalat választhat. Mivel 5 útvonal közül választhatja ki a Herszon megyei utazást, ezért a párok száma (herszoni útvonal; kárpátaljai útvonal) egyenlő $7 + 7 + 7 + 7 + 7$, vagyis $7 \cdot 5 = 35$. Az ilyen módszert kombinatorikai **szorzási szabálynak** nevezzük.

Ezt a gondolatmenetet a következő táblázat szemlélteti.

		Kárpátaljai útvonalak						
		1	2	3	4	5	6	7
Herszon környéki útvonalak	1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
	2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
	3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
	4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
	5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	(5; 7)

1. feladat. Hány háromjegyű számot lehet összeállítani az 1, 2, 3 számjegyekből úgy, hogy minden számban a számjegyek különbözőek legyenek?

Megoldás. Az első számjegye az ilyen háromjegyű számnak bármelyik szám lehet az 1, 2 vagy 3 számból. Tehát 3 eset lehetséges.

Mivel ebben a háromjegyű számban a számjegyeknek különbözőknek kell lenniük, ezért bármilyen is legyen az első számjegy, a második már csak a maradék két számjegy közül lehet az egyik. Tehát az első számjegy mindhárom lehetséges számjegyéhez a maradék két számjegy közül választhatunk második számjegyet. A szorzási szabályt alkalmazva azt kapjuk, hogy az első két számjegyét a háromjegyű számnak $3 \cdot 2 = 6$ módszerrel lehet kiválasztani.

Mivel a háromjegyű szám minden számjegyének különbözőnek kell lenni, ezért a szám első két számjegye egyértelműen meghatározza a harmadik számjegyet is. Ezért az 1, 2, 3 számjegyekből $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ különböző háromjegyű számot alakíthatunk ki úgy, hogy a szám minden számjegye különböző legyen.

Felelet: 6. ◄

Az első feladat megoldása során szükség volt a $3 \cdot 2 \cdot 1$ szorzat kiszámítására. A kombinatorikában az egymást követő természetes számok szorzatát 1-től n-ig igen gyakran kell meghatározni. Ennek a szorzatnak külön neve van, a „**faktoriális**", a jelölése

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

(az $n!$-t úgy olvassuk, hogy en faktoriális).

Például: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot = 6$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

2. feladat. Az információvédelem miatt a számítógépeken jelszavakat alkalmaznak – latin betűk sorozatát 3-tól 5 karakterig (a jelszóban lehetnek egyforma betűk is). Hány különböző jelszó készíthető a latin ábécé 26 betűjének felhasználásával?

Megoldás. Vizsgáljunk meg három betűből álló különböző jelszavakat. Az első karakternek bármilyen betűt választhatunk. Tehát 26 lehetőség van. Hasonlóan a második és a harmadik karakter is 26-féle lehet. Alkalmazva a szorzási szabályt, 26^3 hárombetűs jelszót kaphatunk.

Hasonlóan gondolkodva megállapítható, hogy négybetűs jelszóból 26^4 lehet, ötbetűsből pedig 26^5.

Tehát az összeadási szabályt alkalmazva megkapjuk, hogy az összes jelszó száma $26^3 + 26^4 + 26^5$ lesz.

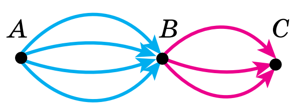
Felelet: $26^3 + 26^4 + 26^5$. ◄

1. Hozzatok fel példákat olyan feladatokra, amelyeknek a megoldásával a kombinatorika foglalkozik!
2. Mit nevezünk a szám faktoriálisának? Hogyan jelöljük?

GYAKORLATOK

12.1.° A városból B városba 4 útvonal vezet, B városból C-be pedig 3 út (lásd a 12.1. ábrát). Hányféleképpen lehet eljutni A városból C-be?

12.2.° A hegy csúcsához 5 útvonal vezet. Hányféleképpen tud a hegymászó feljutni a hegyre, és onnan le? Adjátok meg arra az esetre is a választ, ha a hegymászó felfelé és lefelé különböző útvonalon akar eljutni!



12.1. ábra

12.3.° Az étkezdében 3 első, 6 második és 5 harmadik fogást lehet választani. Hányféleképpen rendelhető egy háromfogásos ebéd (mindegyik menüből csak egyet-egyet)?

12.4.° Hány ötjegyű szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből úgy, hogy a számjegyek különbözőek legyenek?

12.5.° Hány négyjegyű szám írható fel az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből?

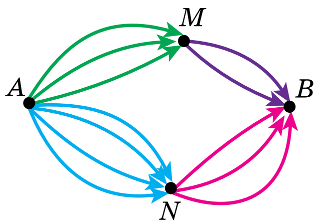
12.6.° Hány olyan háromjegyű szám létezik, amelyekben a számjegyek páratlanok?

12.7.• Vizsgáljunk meg kétbetűs szótagokat, amelyekben az első betű mássalhangzó, a második pedig magánhangzó. Hány ilyen szótag képezhető a következő szó betűiből:

1) sabla; 2) sarovari?

12.8.• A kosárban 10 alma és 7 körte van. Anti kiválaszt egy almát vagy egy körtét. Ezután Maxim is kiválaszt egy almát vagy egy körtét. Melyik esetben van több választási lehetősége Maximnak: ha Anti almát választott, vagy ha körtét?

12.9.• A 12.2. ábrán azok az útvonalak vannak ábrázolva, melyek A városból B városba vezetnek. Hányféleképpen lehet eljutni A városból B városba?



12.2. ábra

12.10.• A kávézóban 3 különböző salátából, 6 húskészítményből és 5 desszerféléből lehet választani. Hányféleképpen választható ebéd, ha két különböző ételfélét akarunk ebédelni?

12.11.• Hányféle ötjegyű szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekből, amelyekben a számjegyeknek különbözőeknek kell lenniük, és így kell kezdődniük:

1) 1-es számmal; 2) 34-gyel?

12.12.• Hány négyjegyű számot írhatunk fel a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számjegyekkel?

12.13.• Hány olyan háromjegyű szám létezik, amelyeknek minden számjegye páros?

12.14.• Hány olyan hétjegyű telefonszám létezik, amely nem 0-val kezdődik?

12.15.• A pénzérmét 4-szer dobjuk fel. Hányféle fejből és írásból álló különböző sorozatot kaphatunk?

12.16.• A játékkockát 3-szor feldobjuk. Hányféle különböző sorozatot kaphatunk a dobott pontszámokból?

12.17.• Hány háromjegyű páros szám írható fel a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával?

12.18.• Hány háromjegyű páratlan szám írható fel a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyek felhasználásával?

12.19.• Hány ötjegyű különböző számjegyekből álló szám írható fel a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyek felhasználásával?

12.20.• Hány ötjegyű különböző számjegyekből álló páros szám írható fel az 1, 2, 3, 4, 5 számjegyek felhasználásával?

12.21.•• Hány 5-tel osztható ötjegyű szám létezik?

12.22.•• Hány 25-tel osztható hétjegyű szám létezik?

12.23.* A könyvesboltban 4 különböző kiadású *Eneida*, 3 különböző kiadású *Natalka Poltavka* és 2 különböző kiadású *Moszkovita boszorkány* c. könyv található. Ezenkívül 5 különböző könyv, melyekben az *Eneida* és a *Natalka Poltavka* is megtalálható, és még 6 olyan könyv, amelyekben a *Natalka Poltavka* és a *Moszkovita boszorkány* is megtalálható. Hányféleképpen lehet úgy bevásárolni, hogy mindhárom műnek egy-egy példányát vegyük meg?

12.24.* Hány olyan hétjegyű szám létezik, amelyekben a számjegyeknek azonos a párossága?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

12.25. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\sqrt{2{,}1x+1}=x-1$;
2) $2x+\sqrt{3x-2}=3$;
3) $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$;
4) $2\sqrt{x-2}=\sqrt[4]{x-2}+15$;
5) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$;
6) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x}=5$!

12.26. Határozzátok meg az egyenlőtlenség legnagyobb egész megoldását:

$$x^2+3\left(\sqrt{3-x}\right)^2-13\leqslant 0!$$

13. Permutációk. Variációk. Kombinációk

Zoli, Ilike, Jani bementek az iskolai büfébe. Hányféleképpen tudnak ott sorba állni? Érthető, hogy 6 lehetőség lesz.

Zoli, Ilike, Jani	Ilike, Jani, Zoli	Jani, Zoli; Ilike
Zoli, Jani, Ilike	Ilike, Zoli, Jani	Jani, Ilike, Zoli

Nézzünk még egy példát.

A napi órarend 7 tanórát tartalmaz. Hányféleképpen lehet elkészíteni a napi órarendet, hogy mind a 7 óra különböző legyen. Másképpen fogalmazva, hány permutációja van a 7 tanórának?

A hasonló feladatokat a **permutációk** száma meghatározásának nevezzük. Az n elemből keletkező permutációk számát P_n-nel jelöljük. Bármilyen természetes n-re teljesül a következő egyenlőség:

$$\boxed{P_n=n!} \qquad (1)$$

Tehát három gyerek $3!=6$-féle módon állhat sorba, és a 7 órából készíthető órarendek száma: $7!=5\,040$ lesz.

1. feladat. Hányféleképpen állhat 5 gépkocsi egymás után sorba?

Megoldás. Ebben a feladatban az 5 elem permutációinak a számát kell meghatározni. Az **(1)** képletet alkalmazva kapjuk: $P_5 = 5! = 120$.

Felelet: 120. ◀

Megvizsgálunk néhány típusfeladatot.

2. feladat. A *FIFA*[1] szabálya szerint a futball-világbajnokságon 32 csapat vesz részt. Hányféleképpen lehetne az arany-, ezüst- és bronzérmet kiosztani a csapatok között?

Megoldás. Az első helyezett lehet bármelyik csapat a 32 közül, a második pedig a maradék 31 csapat közül egy, a harmadik pedig bármelyik a fennmaradó 30 közül. A szorzási szabály alapján a lehetséges helyezettek sorrendje $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$.

Felelet: 29 760. ◀

A feladat megoldása során megállapítottuk, hányféle variáció létezik a 3 dobogós hely mindegyikére, ha 32 csapat közül kell választani. Ezt úgy mondják, hogy a 32 elem harmadosztályú **variációinak** a száma.

Az n elem k-adik osztályú összes lehetséges variációinak számát A_n^k-val **(**vagy V_n^k-vel**)**, a francia *arragement* – variálni szó első betűjével jelölik.

A győztes helyezettek elosztásával kapcsolatos feladat megoldásaként kapott eredmény lehetővé teszi a következtetés levonását, hogy $A_{32}^3 = \mathbf{32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760}$.

Általánosítva bármilyen természetes n és k számra, ahol $k \leqslant n$, teljesül a következő képlet:

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)} \qquad (2)$$

A meghatározás szerint úgy tekintjük, hogy $0! = 1$. Ez a megállapítás lehetőséget ad arra, hogy a **(2)** képletet a következőképpen írjuk át:

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Vizsgáljuk meg a következő két feladatot. Hányféleképpen lehet a 30-as létszámú osztály tanulói közül megválasztani az osztályfelelőst és a helyettesét? Hányféleképpen választható ki ebből az osztályból két ügyeletes?

---

[1] Labdarúgó Szövetségek Nemzetközi Föderációja

Az első kérdésre a válasz már ismert: A_{30}^{2}. Ahhoz, hogy válaszoljunk a második kérdésre is, meg kell állapítani, hogy a 30 elemű halmazból hányféleképpen választható ki egy 2 elemű halmaz. Ilyen esetekben azt mondjuk, hogy meg kell határozni a 30 elemből a másodosztályú **kombinációk** számát.

Az összes lehetséges kombinációk számát n elemből k-elemig C_n^k-val jelöljük, a francia *combinaison* – kombináció szó első betűje nyomán.

Tehát a naposok kiválasztásának számát meghatározó feladat így is megfogalmazható: mennyivel egyenlő C_{30}^{2}?

Bebizonyítható, hogy igaz a következő képlet:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}} \qquad (3)$$

3. feladat. A körvonalon megjelöltek 8 pontot. Hány olyan háromszög létezik, amelynek a csúcsai ezek a pontok lesznek?

Megoldás. A háromszögek keresett száma a 8 elemből 3 kiválasztását adó kombináció száma adja. A (3) képletet alkalmazva kapjuk:

$$C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56.$$

Felelet: 56 háromszög. ◄

1. Milyen képlettel számítható ki n elem permutációinak a száma?
2. Milyen képlettel számítható ki n elem k-adik osztályú variációinak száma?
3. Milyen képlettel számítható ki n elem k-adik osztályú kombinációinak a száma?

GYAKORLATOK

13.1.° Hányféleképpen rakható fel a könyvespolcra 7 különböző könyv?

13.2.° Az iskolában 20 osztály és 20 osztályfőnök van. Hányféleképpen osztható el az osztályfőnökség a 20 tanító között?

13.3.° Hányféleképpen ülhet be 5 személy a gépkocsiba, ha mindegyik tudja vezetni az autót?

13.4.° A futballcsapat 11 játékosból áll, ki kell választani a csapatkapitányt és helyettesét. Hányféleképpen végezhető ez el?

13.5.° A 15 tagú bizottságnak meg kell választania az elnököt, a helyettesét és a titkárt. Hányféleképpen lehet ezt megtenni?

13.6.° A 9. osztályban 12 tantárgy van. A napi órarendben 6 óra van. Hányféleképpen készíthető el a napi órarend, hogy mind a 6 óra különböző legyen?

13.7.° Az Európa-bajnokság döntőjébe 16 csapat került. Hányféleképpen osztható ki közöttük az arany-, ezüst- és bronzérem?

13.8.° Az osztályba 32 tanuló jár. Kettesével fényképet cserélnek. Hány fényképet osztottak szét?

13.9.° A matematikát elmélyített szinten oktató osztályban 29 tanuló tanul. Hányféleképpen alakítható ki egy öttagú csapat a matematikai versenyre?

13.10.° Adott egy szabályos n szög. Hány olyan négyszög létezik, amelynek csúcsai ennek az n szögnek is a csúcsai?

13.11.° A síkban 10 pont van úgy elhelyezve, hogy bármelyik három nem fekszik egy egyenesen. Hány olyan háromszög létezik, amelyeknek ezek a pontok a csúcsai?

13.12.• Hány hatjegyű szám képezhető az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyekből, hogy a számjegyek ne ismétlődjenek, és a szélső számok párosak legyenek?

13.13.• 20 munkás között 7 kőműves van. Hányféleképpen alakíthatók 5 tagú brigádok közülük úgy, hogy ezekben pontosan 2 kőműves legyen?

13.14.• Az iskolai sorsjegyhez 100 jegyet készítettek, amelyek közül 12 a nyerő. Az első tanuló kihúzott 10 szelvényt. Hányféle választási lehetősége van, ha pontosan 3 nyerő szelvényt akar kihúzni?

13.15.•• Az egyenesen 12 pont van, a vele párhuzamos egyenesen pedig 7 pont. Hány olyan háromszög létezik, amelyek csúcsai ezek a pontok lesznek?

13.16.•• Az egyenesnek és a körvonalnak nincs közös pontja. A körvonalon bejelöltek 9 piros pontot, az egyenesen pedig 15 kék pontot. Adott, hogy egyetlen két piros pontra illeszkedő egyenes sem tartalmaz kék pontot. Hány olyan háromszög létezik, amelyek csúcsai ezek a pontok lesznek?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

13.17. A nadrág az ingnél 30%-kal drágább, a zakónál pedig 22%-kal olcsóbb. Hány százalékkal olcsóbb az ing, mint a zakó?

13.18. Számítsátok ki a kifejezések értékeit:

1) $3^{\log_3 7} + 49^{\log_7 \sqrt{13}}$;

2) $\log_6 144 - \log_6 4$;

3) $\dfrac{18}{5^{\log_5 2}}$;

4) $\log_2 7 \cdot \log_7 4$!

14. A véletlen esemény valószínűségének klasszikus meghatározása

Ahhoz, hogy meghatározzuk valamelyik esemény bekövetkezésének a valószínűségét, nem kötelező kísérleteket és megfigyeléseket végezni. Elegendő az élettapasztalatra és a józan észre hivatkozni.

1. feladat. Egy dobozban 15 biliárdgolyó van, amelyek 1-től 15-ig vannak megszámozva. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a véletlenül kiválasztott golyó sorszáma a 3 többszöröse lesz?

Megoldás. Érthető, hogy ebben a kísérletben 15 egyenlő lehetőségű eredmény lehetséges. Ezek között 5 olyan van, amely kielégíti a feltételt: vagyis amikor a 3, 6, 9, 12, 15 sorszámú golyót húzunk. Ezért annak a valószínűsége, hogy a 3 többszörösét húzzuk, egyenlő lesz: $\dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$.

Felelet: $\dfrac{1}{3}$. ◄

Több valószínűségszámítási feladat megoldása a következő pontok szerint írható le.

- A kísérlet során n darab egyenlő esélyű eredményt kaphatunk.
- Megvizsgálunk valamilyen A eseményt, ami m eredménnyel járhat. Ezeket kedvező eseményeknek nevezzük.
- Az A esemény $P(A)$ valószínűsége a következő képlettel számítható ki:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

Ezt a definíciót a **klasszikus valószínűség meghatározásának** nevezzük.

2. feladat. Az iskolai versenyen Marika, Szandi, Andris és Dani lettek a győztesek. A járási versenyre viszont csak két tanuló küldhető a győztesek közül. Olyan döntés született, hogy sorsolással döntik majd el a járási csapat összeállítását. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az iskolát egy fiú és egy lány fogja képviselni?

Megoldás. A sorsolás során ki kell választani egy párt, amely részt fog venni a versenyen, a következő 6 egyenlő esélyű párok közül:

1) Marika és Szandi;	4) Szandi és Andris;
2) Marika és Andris;	5) Szandi és Dani;
3) Marika és Dani;	6) Andris és Dani.

Ezek között a párok között 4 olyan van, amelyik fiúból és lányból áll. Tehát annak valószínűsége, hogy az iskolát egy fiú és egy lány képviselje: $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Felelet: $\frac{2}{3}$. ◄

Nézzünk meg még egy példát.

Legyen a dobozban 9 zöld golyó. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a véletlenül kiválasztott golyó zöld lesz? Sárga lesz?

Az adatok alapján bármilyen golyót is választunk ki, az zöld színű lesz.

Azt az eseményt, amely az adott körülmények között mindenféleképpen teljesül bármilyen kísérletnél, **biztos eseménynek** nevezzük.

Az ilyen esemény valószínűségét 1-nek tekintjük. Másképpen fogalmazva, ha az A biztos esemény lesz, akkor $P(A) = 1$.

Tehát annak valószínűsége, hogy a véletlenül kiválasztott golyó zöld lesz: 1.

Mivel a dobozban nincs egyetlen sárga golyó sem, ezért a véletlenül kiválasztott golyó nem lehet sárga.

Azt az eseményt, amely az adott körülmények között egyetlen alkalommal sem teljesülhet, **lehetetlen eseménynek** nevezzük.

Az ilyen esemény bekövetkezésének a valószínűsége 0 lesz. Másképp fogalmazva, ha az A – lehetetlen esemény, akkor $P(A) = 0$.

Ahhoz, hogy meghatározzuk a véletlen esemény valószínűségét, meg kell számolnunk az összes lehetséges esemény számát, és a számunkra kedvező eseményekét is.

Ezek a számítások gyakran a különböző kombinációk számának meghatározását jelenti, amelyet egy véges halmaz elemeivel végzünk adott szabályok szerint, ezért a kombinatorikai szabályok alkalmazása eredményes módszer lesz nagyon sok valószínűségszámítási feladat megoldásánál.

3. feladat. Az üzletben a tálcán 28 alma található – 15 sárga és 13 piros. A vásárló 3 almát vásárolt, melyeket az eladó véletlenszerűen választott ki. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott almák sárgák lesznek?

Megoldás. Az eladó 28 almából 3-at C_{28}^3 módon tudja kiválasztani. Kiszámítjuk azt az esetet, amikor ezek között az esetek között mindhárom alma sárga lesz. Ekkor 15 alma közül kell 3-at kiválasztania, amit C_{15}^3 módon tud elvégezni.

Tehát a véletlen esemény A valószínűsége három sárga alma kiválasztása lesz, az eredmény: $P(A) = \frac{C_{15}^3}{C_{28}^3}$.

A $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ képletet alkalmazva kiszámítható, hogy $P(A) = \frac{5}{36}$.

Felelet: $\frac{5}{36}$. ◀

Milyen képletet alkalmaznak a véletlen esemény valószínűségének klasszikus meghatározására?

GYAKORLATOK

14.1.° Annak a valószínűsége, hogy hibás elektromos cikket vásárolunk 0,007. Igaz-e, hogy bármilyen 1000 elektromos cikk között 7 hibás van?

14.2.° Annak valószínűsége, hogy célbatalálunk 75% lesz. Előfordulhat-e, hogy 100 lövés közül 98-ban a célt eltaláljuk?

14.3.° A fiókban 8 kék és 12 piros ceruza van. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a véletlenül kiválasztott tárgy:
1) toll lesz; 2) ceruza lesz?

14.4.° A 2, 4, 6, 8 számjegyekből háromjegyű számot képezünk. Mennyi lesz annak a valószínűsége, hogy a kapott szám osztható:
1) 5-tel; 2) 2-vel?

14.5.° Mennyi annak a valószínűsége, hogy a *matematika* szó betűinek felcserélgetésével a *literatura* szót kapjuk?

14.6.° Az {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} halmazból véletlenszerűen kiválasztunk egy számot. Mennyi lesz annak a valószínűsége, hogy:

1) 2-vel egyenlő;
2) 5-tel egyenlő;
3) páratlan;
4) 4 többszöröse;
5) nem osztódik öttel;
6) 11 többszöröse?

14.7.° Mennyi lesz annak a valószínűsége, hogy a tanár az osztályotokban fiút hív a táblához felelni?

14.8.° Mennyi annak a valószínűsége, hogy a véletlenül választott kétjegyű szám a 11 többszöröse?

14.9.• Egy dobozban 17 kártya van, amelyek 1-től 17-ig vannak számozva. A dobozból találomra húztak egy kártyát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy erre a kártyára a következő szám van felírva:

1) 12;
2) páros szám;
3) 3 többszöröse;
4) nem osztható 5-tel;
5) kétjegyű szám;
6) törzsszám?

14.10.• Egy dobozban 15 kártya van, amelyek 1-től 15-ig vannak számozva. Mennyi annak a valószínűsége, hogy erre a véletlenül kiválasztott kártyára a következő szám van felírva:

1) páratlan;
2) összetett szám;
3) nem osztható 2-vel és 3-mal sem?

14.11.• A dobozban a kék, b sárga és c piros golyó van. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a véletlenül kiválasztott golyó:

1) sárga;
2) kék;
3) nem piros?

14.12.• A Mikulás zsákjában n darab plüssmaci, m cukorka és k mandarin van. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a véletlenül kiválasztott ajándék:

1) maci;
2) ehető ajándék;
3) nem cukorka?

14.13.•• A polcon 12 füzet van, amelyek közül 5 négyzetrácsos. Mennyi annak a valószínűsége, hogy amennyiben kiválasztunk véletlenszerűen 2 füzetet, az négyzetrácsos lesz?

14.14.•• Andris 40 darabos éremgyűjteményében különböző országokból származó 40 darab érem van, amelyek között 6 ukrán. Andris véletlenszerűen kiválasztott 3 érmét közülük. Mennyi lesz annak a valószínűsége, hogy mindhárom ukrán érme lesz?

14.15.•• A dobozban 12 sárga és 15 kék golyó van. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen kiválasztott öt golyó sárga színű lesz?

14.16.•• 1000 darab sorsjegyet készítettek, amelyek között 15 nyerő. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen kiválasztott három sorsjegy nyerő?

14.17.•• A fiókban ceruzák és tollak vannak. Tudjuk, hogy ceruzából 12-vel kevesebb van, mint tollból. Hány ceruza van a fiókban, ha annak valószínűsége, hogy a kiválasztott tárgy:

1) toll lesz, $\frac{5}{8}$-dal egyenlő; 2) ceruza lesz, $\frac{1}{6}$-dal egyenlő?

14.18.•• Az ajándékkészletben 12 zöld és néhány piros lufi van. Hány piros lufi van ebben a készletben, ha annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott lufi:

1) zöld lesz, $\frac{3}{7}$-del egyenlő;

2) piros lesz, $\frac{2}{5}$-del egyenlő?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

14.19. *A* pontból a *B*-be az utat az egyik turista 3 óra alatt teszi meg, míg a másik turista a *B*-ből az *A*-ba 6 óra alatt. Hány óra múlva találkoznak, ha egyszerre indulnak egymás felé az *A* és *B* pontokból?

14.20. Végezzétek el a számításokat, és az eredményt írjátok fel normálalakban:

1) $(2{,}6 \cdot 10^3) \cdot (4{,}5 \cdot 10^{-8})$; 2) $\frac{3{,}6 \cdot 10^{-6}}{12 \cdot 10^{-4}}$!

15. A matematikai statisztika alapjai

Milyen példányszámba kell kinyomtatni a 11. osztályos *Matematika* tankönyvet?

Érdemes-e az adott politikusnak indulnia a választáson a polgármesteri pozícióért?

Hány kilogramm halat és tengeri állatot eszik meg egy év alatt az átlagpolgár Ukrajnában?

Érdemes-e az adott énekes koncertjére kibérelni a stadiont?

Ezekre és más ezekhez hasonló kérdésekre adja meg a választ a statisztika.

Meghatározás. **A statisztika** (latin *status* – állapot) **— a valóság számszerű információinak megfigyelésére, összegzésére, elemzésére és modellezésére irányuló gyakorlati tevékenység és tudomány.**

A statisztikai elemzés a következőkből áll:

Adatok összegyűjtése

↓

Adatok feldolgozása és benyújtása alkalmas formában

↓

Adatok elemzése

↓

Következtetések és tanácsok

Vizsgáljuk meg mindegyik részt.

Az adatok összegyűjtése

Már tudjátok, hogy a rossz szokások, a nem rendes étkezés, a kevés mozgással járó életmód szív- és érrendszeri betegségek kialakulásához vezet. Az orvosok ilyen következtetésre jutottak. Természetesen ehhez nem vizsgálták meg a Föld minden emberét.

Tudjuk, hogy a vizsgálat *véletlenszerű*, ám *tömeges* jellegű volt.

A statisztikában azokat az elemeket, amelyek alapján a kutatásokat végzik, **mintának** nevezzük.

Ebben az esetben a minta több millió emberből áll.

Szükséges annak megjegyezése, hogy a statisztikai következtetés, amelyet csak a minta elemeiből vonnak le, nem lesz mindig megbízható. Ha például valamely művész népszerűségét vizsgáljuk, és csak azokat az embereket kérdezzük meg, akik a koncertjeire járnak, akkor a kapott eredmények nem lesznek objektívek, mert ők azért mennek el a hangversenyre, mert az előadó tetszik nekik. A statisztikusok azt mondják, hogy a mintának **reprezentatívnak** kell lennie **(**a francia *représentatif* – jellemző**)**.

Tehát az orvosok, amikor a szív-és érrendszeri betegségek kockázati tényezőit kutatják, akkor különböző korú és foglalkozású, nemzetiségű stb. személyeket vizsgálnak meg.

Tehát az adatok feldolgozásának *tömegesnek és reprezentatív mintára alapulónak kell lennie*. Néha a minta megegyezik a kutatás célját biztosító alapsokasággal. Az ilyen kutatás példája lehet a külső független tesztelés ukrán nyelvből.

Az adatok megadásának módjai

Az információt (az adatok halmaza) érdemes táblázatban, grafikonon és diagramon tárolni.

Vizsgáljunk meg néhány példát.

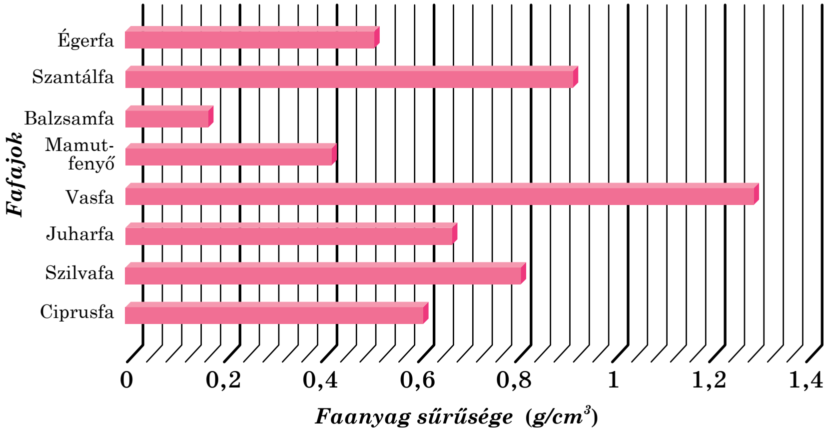
1. példa. Eurovíziós dalfesztivál – nemzetközi könnyűzenei műsor. A következő táblázatban az ukrajnai előadók névsora és eredményeik láthatók a 2003–2018-as évek között.

Év	Előadó	Helyezett	A megszerzett pontszámok
2003	Olekszandr Ponomarjov	14	30
2004	Ruszlana	1	280
2005	Grindzsoli	19	30
2006	Tina Karol	7	145
2007	Verka Szergyucska	2	235
2008	Ani Lorak	2	230
2009	Szvitlana Loboda	12	76
2010	Aljosa	10	108
2011	Mika Newton	4	159
2012	Gajtana	15	65
2013	Zlata Ohnyevics	3	214
2014	Marija Jaremcsuk	6	113
2015	*Nem vettek részt rajta*		
2016	Dzsamala	1	534
2017	*O. Torvald*	24	36
2018	*Melovin*	17	130

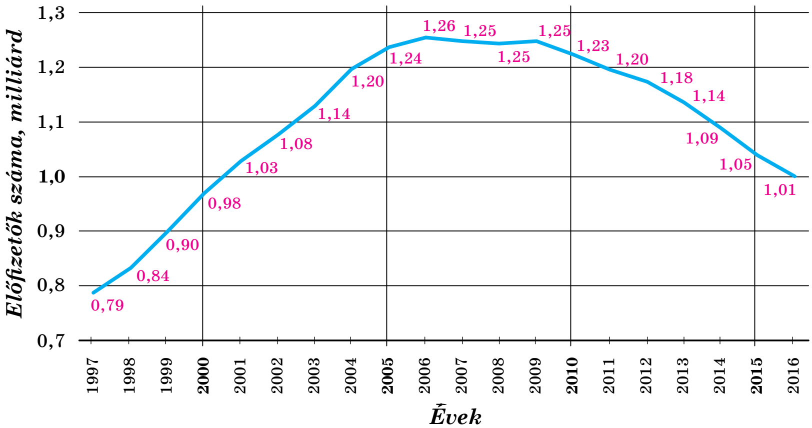
2. példa. A 15.1. ábrán általános adatok vannak az egyes fafajok anyagának sűrűségéről (a fa tömegének és a térfogatának aránya).

3. példa. A 15.2. ábrán az látható, hogyan változott a világ vezetékes telefonelőfizetőinek száma az 1997–2016 években.

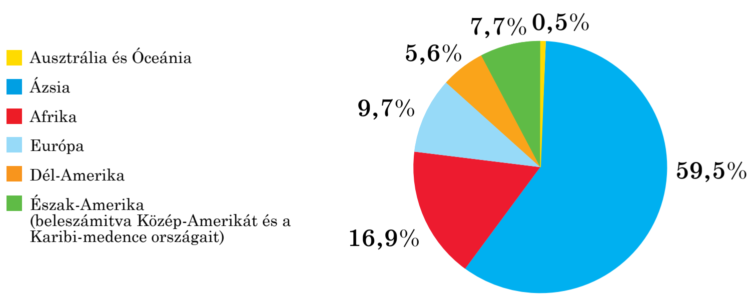
4. példa. A kördiagramon (15.3. ábra) a világ népességének kontinensenkénti eloszlása látható.



15.1. ábra

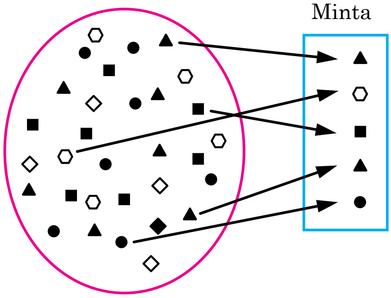


15.2. ábra



15.3. ábra

A vizsgálat tárgyát képező egységek összességét, halmazát **alapsokaságnak** vagy **statisztikai sokaságnak** nevezzük. Az alapsokaság és a minta közötti összefüggést a 15.4. ábra illusztrálja.



15.4. ábra

A statisztika legfontosabb feladata az, hogy a minta elemzésének alapján véleményt mondjunk az alapsokaságról. Az összegyűjtött adatokat analizálva kiemelünk egy vagy több általános tulajdonságot, ami jellemezni fogja az alapsokaságot. Ha például a minta számadatokat tartalmaz, akkor a legnagyobb és a legkisebb érték közötti különbséget a minta **terjedelmének** nevezzük. A minta fontos jellemzője lehet még a **számtani közép**, a **medián** és a **módusz** is.

Legyenek a minta elemei az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ számadatok.

A jelen minta **középértékének** azt a számot nevezzük, amely egyenlő:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

A következő táblázat például az ukrajnai iskolások eredményeit tartalmazza a nemzetközi matematikai versenyen a 2009–2019 évek között (a diákcsapat 6-nál nem több személyből áll).

Év	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Érmek száma	6	6	6	5	5	6	6	6	5	6

Az adott mintának a **középértéke** egyenlő:

$$\bar{x} = \frac{6+6+6+5+5+6+6+6+5+6}{10} = \frac{57}{10} = 5{,}7.$$

Mivel évente csak 6 érmet lehet szerezni, ezért az 5,7-es átlag arról tanúskodik, hogy Ukrajna csapata kellőképpen helyt állt ezen a nemzetközi megmérettetésen.

Figyeljünk arra, hogy a minta számtani átlagát csak abban az esetben lehet meghatározni, ha az adatok számok.

Vizsgáljunk meg egy olyan mintát, amely olyan adatokból áll, amelyeket egymással össze lehet hasonlítani. Ha az adatok száma páratlan, akkor növekvő sorrendben felírt elemek **mediánjának** nevezzük a középen álló adatot.

Például nagyon sok ukrajnai egyetemen a diákok osztályozása nem számmal, hanem betűkkel történik: A, B, C, D, E, F (A – a legmagasabb osztályzat, F – a legalacsonyabb osztályzat). Például 9 diák a legutóbbi vizsgán szerzett érdemjegye a következő mintát adja (a jegyek sorozata):

$$F, F, D, D, \mathbf{C}, C, C, B, A.$$

Látható, hogy a középső elem a C betű lesz. Tehát a minta mediánja C érdemjegy.

Ha a minta elemeinek száma páros szám, például:

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant x_4 \leqslant x_5 \leqslant x_6,$$

akkor a mediánjának az x_3 vagy az x_4 elemei közül bármelyiket tekinthetjük, vagyis az adott sor két középső elemei közül az egyiket.

Például a fenti 9 diák jegyéhez hozzáadunk még egy E érdemjegyet, akkor a következő sorozatot kapjuk:

$$F, F, E, D, \mathbf{D}, \mathbf{C}, C, C, B, A.$$

Látható, hogy a sorozat két középső eleme a D és C. Tehát az adott minta mediánja a D és C lesz.

Figyeljetek arra, hogy az adott példában a medián meghatározásánál a mintaelemek nem számok voltak.

Ha a vizsgált adatok számok, akkor páros elemszám esetén a növekvő sorrendben lévő minta mediánjának tekinthetjük a két középső elem számtani közepét. Ha például a minta négy számot tartalmaz:

$$1, 2, 3, 7,$$

akkor e minta mediánjának a $\frac{2+3}{2} = 2{,}5$ -t tekintjük.

Megvizsgáljuk a mintának még egy jellemzőjét. Az adott minta **móduszának** azt az elemét nevezzük, amely leggyakrabban fordul elő benne. Ha több ilyen adat is van, akkor ezek közül mindegyik módusza lesz az adott mintának. Ha például a minta hat számból áll: 1, 2, 2, 3, 3, 3, akkor a 3 lesz ennek a mintának a módusza.

A következő táblázat az 1993–2018 évek közötti nemzetközi matematikaverseny éremtáblázatának ukrajnai diákok által elért eredményeit tartalmazza:

Aranyérmek száma	Ezüstérmek száma	Bronzérmek száma	Érem nélküliek száma
38	59	44	15

Az 59-es szám azt mutatja, hogy az ukrajnai versenyzők leggyakrabban ezüstérmet szereztek. Az ezüstérmek száma lesz a fenti adatok módusza.

1. Mit nevezünk a minta terjedelmének?
2. Mit nevezünk a minta középértékének?
3. Magyarázzátok meg, mi lesz a minta mediánja!
4. Mit nevezünk a minta móduszának?

GYAKORLATOK

15.1.° Írjátok fel azoknak a diákoknak a nevét, akiket a tanító a legutóbbi matematikaórán a házi feladatból feleltetett! Mi az alapsokaság és a minta abban a statisztikai kutatásban, amely a házi feladat ellenőrzésének eredményeit tartalmazza?

15.2.° A számítógépes program, amely a statisztikai vizsgálatot mutatja be, valamilyen egész számot ad meg –128 tól 128-ig. Ötször futtatva ezt a programot, a gép a következő eredményeket adta meg: 62, –15, 31, 103, –22. Az adott statisztikai vizsgálatban mi az alapsokaság? Mi a minta? Határozd meg a minta terjedelmét!

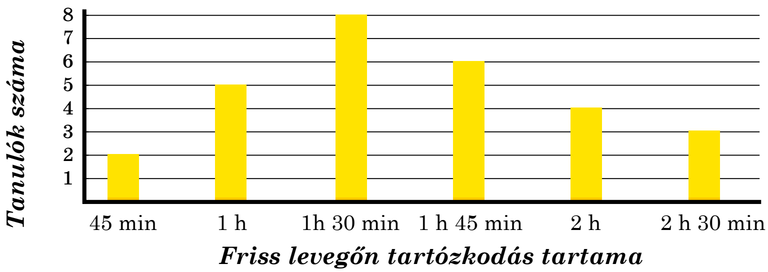
15.3.° Az iskolában megkérdezték a diákokat kedvenc tantárgyukról. Milyen statisztikai jellemzőt (terjedelem, középérték, medián, módusz) lehet meghatározni az összegyűjtött adatok alapján?

15.4.° A könnyűipari cég felkérésére kutatást végeztek, amelynek eredménye a ruhák méretének nemzetközi szabványa (XS, S, M, L, XL, XXL, XXXL). Milyen statisztikai jellemzőt (terjedelem, középérték, medián, módusz) lehet meghatározni az összegyűjtött adatok alapján?

15.5.° Adott a következő minta: 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 11, 12. Határozzátok meg az adott minta terjedelmét, középértékét, mediánját, móduszát!

15.6.° Adott a következő minta: 2, 2, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 9. Határozzátok meg az adott minta terjedelmét, középértékét, mediánját, móduszát!

15.7.° A 11. osztályos tanulók között felmérést végeztek, megkérdezve, hogy naponta hány órát töltenek friss levegőn? A felmérés eredményét diagramban adták meg, amely a 15.5. ábrán látható. Határozzátok meg az adott minta terjedelmét, középértékét, mediánját, móduszát!



15.5. ábra

15.8.• Határozzátok meg a következő minta középértékét és mediánját: 1, 3, 2, 4, 5, 2, 3, 4, 1, 6!

15.9.• Felhasználva néhány város januári középhőmérsékleteinek táblázatát, számítsátok ki a minta terjedelmét, számtani középértékét, mediánját és móduszát!

Város	Hőmérséklet, °C	Város	Hőmérséklet, °C
Amszterdam	3	Moszkva	–10
Athén	8	Nairobi	27
Buenos Aires	23	New York	0
Hongkong	24	Rio de Janeiro	30
Jeruzsálem	8	Róma	8
Kijev	–6	Szingapúr	27
Montreal	–11	Tokió	3

15.10.• Alkalmazva a napraforgómag hozamának táblázatát, számítsátok ki a minta terjedelmét, számtani középértékét, mediánját és móduszát!

Év	Terméshozam, q/ha	Év	Terméshozam, q/ha
2006	14	2012	17
2007	12	2013	22
2008	15	2014	19
2009	15	2015	22
2010	15	2016	22
2011	18	2017	20

15.11.• Ukrajna futball-bajnokságában a 2017–2018-as években a Sahtar csapata Ukrajna bajnoka lett, 32 meccset játszott, kétszer 5 gólt lőtt, 3-szor 4 gólt, 9-szer 3 gólt, 8-szor 2 gólt, 6 -szor 1 gólt és 4 meccsen egyetlen 1 gólt sem lőtt. Számítsátok ki a Sahtar egy meccsen lőtt góljainak átlagát!

15.12.• A diák a félév alatt 45 jegyet kapott, amelyek között 7 ötös, 22 négyes és 16 hármas volt. Számítsátok ki a diák jegyeinek átlagát!

15.13.•• Az iskolások külső független tesztelésén matematikából a 2018-as évben az egyik tesztfeladat a következő volt:

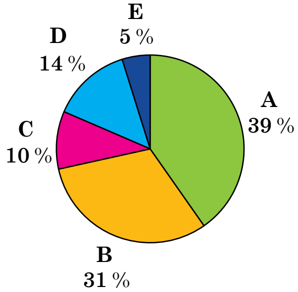
Határozzátok meg az $y = \dfrac{x+1}{x-2}$ függvény értelmezési tartományát!

A	B	C
$(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$

D	E
$(-\infty; -1) \cup (-1; 2) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

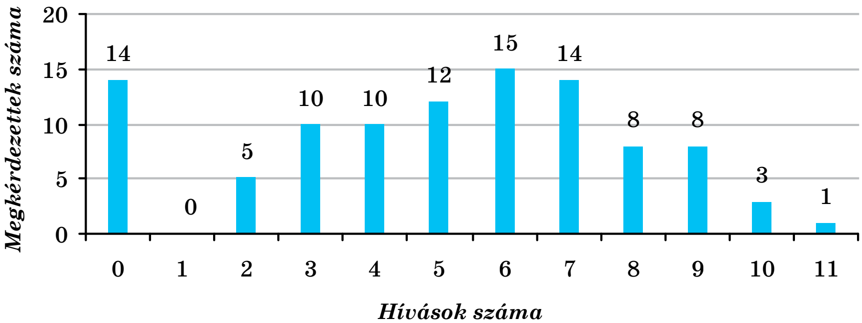
»

A diagramon (15.6. ábra) azoknak a tanulóknak a száma látható, akik megoldották ezt a feladatot. Határozzátok meg a tanulók eredményeinek móduszát! A helyes válaszért 1 pont jár, a helytelen válaszért pedig 0 pont. Számítsátok ki a szerzett pontszámok átlagos középértékét és a mediánját, amelyet a teszten részt vevő diákok szereztek az adott feladatra!



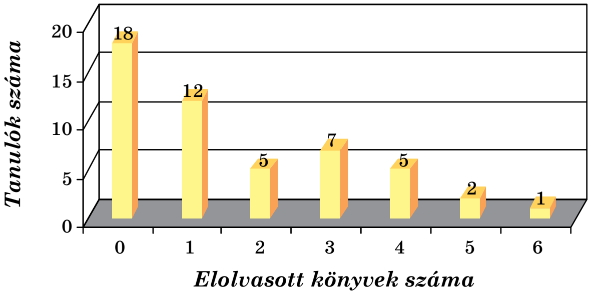
15.6. ábra

15.14.•• A telefontársaság meg akarja ismerni az előfizetők napi telefonhívásainak számát. 100 ember adatait a diagramon (15.7. ábra) ábrázolták. Számítsátok ki az adott minta terjedelmét, átlagos középértékét, mediánját és móduszát!



15.7. ábra

15.15.•• A 15.8. ábrán lévő diagramon azon könyvek számának adatai vannak ábrázolva, melyeket az 50 megkérdezett iskolás elolvasott egy hónap alatt. Számítsátok ki az adott minta terjedelmét, az átlagos középértékét, mediánját és móduszát!



15.8. ábra

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

15.16. Számítsátok ki a kifejezések értékeit:

1) $\sqrt[6]{\left(8-\sqrt{7}\right)^6}+\sqrt[4]{\left(2-\sqrt{7}\right)^4}$;

2) $\sqrt[8]{\left(\sqrt{5}-6\right)^8}+\sqrt[7]{\left(\sqrt{5}-3\right)^7}$!

15.17. Mivel lesz egyenlő a kifejezés értéke:

1) $\log_{27}\log_8\sqrt[5]{32}$;

2) $36^{\frac{1}{3}\log_6 64-3\log_6 2}$;

3) $\dfrac{25^{-\frac{2}{5}}\cdot 5}{125^{\frac{1}{15}}}$;

4) $\dfrac{\sqrt[3]{3\sqrt[5]{3}}}{\sqrt[5]{9}}$?

15.18. Határozzátok meg a $\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$ értékét, ha $\cos\alpha=-0{,}8$ és $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$!

3. SZÁMÚ FELADAT. *ELLENŐRIZD MAGAD TESZTELÉSSEL!*

1. Hány olyan 10-zel osztható hatjegyű számot lehet képezni, amelyeknek a számjegyei a következők lesznek: 0, 1, 2, 3, 4, 5?
A) 36; B) 60; C) 24; D) 120.

2. Hány háromjegyű páros szám írható fel a következő számjegyek segítségével: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?
A) 288; B) 405; C) 360; D) 720.

3. A könnyűatlétikai szakkörben 30 fiú és 10 lány vesz részt. Hány olyan 7 tagú csapat állítható össze, amely öt fiúból és két lányból áll?
A) $C_{30}^{5} \cdot C_{10}^{2}$; C) $C_{30}^{10} \cdot C_{5}^{2}$;
B) $C_{30}^{5} + C_{10}^{2}$; D) $C_{30}^{10} + C_{5}^{2}$.

4. 6 szál virágunk van. Hányféleképpen készíthető 3 szálból vagy 5 szálból álló csokor?
A) $C_{6}^{3} \cdot C_{6}^{5}$; C) $A_{6}^{3} \cdot A_{6}^{5}$;
B) $C_{6}^{3} + C_{6}^{5}$; D) $A_{6}^{3} + A_{6}^{5}$.

5. A dobozban 15 golyó van: 10 kék és 5 zöld. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a véletlenül kiválasztott golyó sárga lesz?
A) 1; B) 0,5; C) 0; D) –1.

6. A dobozban 10 fehér és 5 piros golyó van. Mennyi az a legkevesebb számú golyó, amelyeket, ha véletlenszerűen kiválasztunk a dobozból, annak valószínűsége, hogy 2 biztosan fehér lesz közülük, 1-gyel lesz egyenlő?
A) 5 golyó; B) 6 golyó; C) 7 golyó; D) 10 golyó.

7. Legyen A esemény valószínűsége $P(A)$. Milyen esetben lesz A biztos esemény?
A) $P(A) = 0$; C) $P(A) > 0{,}99$;
B) $P(A) > 0$; D) $P(A) = 1$.

8. Annak valószínűsége, hogy ismert sportcipőmárkából selejtes terméket vásárolunk: 0,023. Hány selejtes termék lesz 1000 pár ilyen sportcipő között?
A) kevesebb, mint 23; C) egyenlő 23-mal;
B) nagyobb, mint 23; D) nem adható meg a válasz.

9. Az előfizető a telefonálás során elfelejtette a telefonszám második számjegyét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első próbálkozásra fel tudja hívni az adott személyt?
A) 0,01; B) 0,1; C) 0,5; D) 1.

10. Az osztályba 18 lány és 12 fiú jár. Véletlenszerűen kiválasztanak egy személyt az iskolai gyűlésre. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott tanuló fiú lesz?

A) $\frac{2}{3}$; B) $\frac{1}{2}$; C) $\frac{3}{5}$; D) $\frac{2}{5}$.

11. 20 kártyára felírták a természetes számokat 1-től 20-ig. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a véletlenszerűen kiválasztott kártya nem osztható sem 4-gyel, sem 5-tel?

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{1}{5}$; C) $\frac{11}{20}$; D) $\frac{3}{5}$.

12. 5 kártyára felírták a természetes számokat 1-től 5-ig. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen kiválasztott két kártyán lévő számjegyek szorzata páratlan szám lesz?

A) 0,2; B) 0,3; C) 0,5; D) 0,25.

13. Mennyi lesz a mediánja a következő mintának: 2, 2, 3, 4, 5, 6, 13?

A) 5; B) 4; C) 3; D) 2.

14. Mennyi lesz a mediánja a következő mintának: 10, 16, 11, 12, 14, 15, 14, 15, 12, 14, 10?

A) 13; B) 14; C) 12; D) 12,5.

15. A 2001-es népszámlálási adatai alapján Ukrajna lakosságának összetételét a következőképpen lehet jellemezni:

Életkor	A lakosság létszáma, ezer főben
0–9	4533,3
10–19	7308,1
20–29	6891,6
30–39	6621,2
40–49	7298,7
50–59	5245,3
60–69	5522,2
70–79	3740,0
80 és idősebb	1060,8

Melyik életkori csoport határozza meg Ukrajna lakossága életkori összetételének móduszát 2001-ben?

A) 0–9; B) 10–19; C) 40–49; D) 80 és idősebb.

16. A 11. osztály 25 tanulójának a matematikateszt javítása után a hibáik számaiból eloszlási táblázatot készítettek:

Hibák száma	0	1	2	3	4
Tanulók száma	5	4	6	8	2

Határozzátok meg a minta számtani átlagát!

A) 2,5; B) 1,88; C) 2; D) 1,92.

17. A 16. feladat feltétele alapján határozzátok meg az adott minta móduszát!

A) 0; B) 8; C) 3; D) 4.

18. A pénzérme 20-szori feldobása során egymás után 20-szor fejet dobtak. Mennyi annak valószínűsége, hogy a következő dobás is fej lesz?

A) 0,5; B) $\frac{1}{21}$; C) $\frac{1}{2^{21}}$; D) 0.

A 3. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Permutációk

Az n elem permutációinak számát P_n-nel jelöljük.
Bármilyen természetes n esetére teljesül a $P_n = n!$.

Variáció

Az n elem k-ad osztályú variációinak számát A_n^k-val jelöljük.
Bármilyen természetes n és k számra, ahol $k \leqslant n$, igaz lesz a következő képlet: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Kombináció

Az n elem k-ad osztályú kombinációinak számát C_n^k-val jelöljük.
Bármilyen természetes n és k számra, ahol $k \leqslant n$, igaz lesz a következő képlet: $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

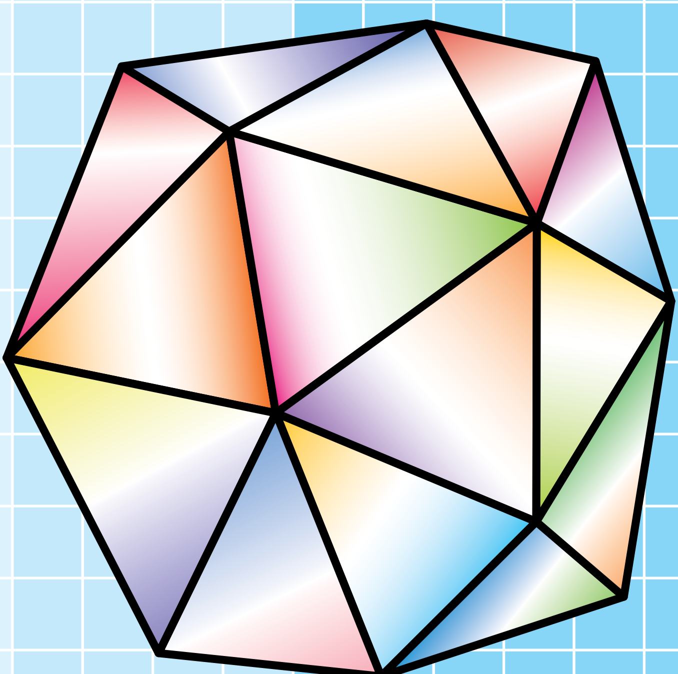
A véletlen esemény valószínűségének klasszikus meghatározása

Az A esemény P valószínűsége a következő képlettel meghatározható: $P(A) = \frac{m}{n}$, ahol n – az egyenlő lehetőségű esetek száma, amelyek a kísérlet során előfordulhatnak, m – a kedvező esetek száma, melyeknél az A esemény bekövetkezhet.

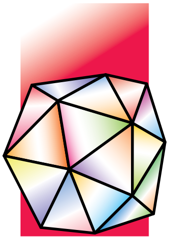
A matematikai statisztika alapjai

A számadatokból álló minta terjedelmének a legnagyobb és a legkisebb adat különbségét nevezzük.
A számadatokból álló $x_1, x_2, \ldots, x_n$ minta számtani közepének nevezzük a következő számot: $\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.
A páratlan számú minta mediánjának nevezzük a növekvő sorrendben leírt mintaelemek középső elemét.
A páros számú minta mediánjának nevezzük a növekvő sorrendben leírt mintaelemek középső két eleme közül bármelyiket vagy a két középső számtani közepét (ha a vizsgált adatok számok).
A minta móduszának nevezzük azt az elemet, amely leggyakrabban fordul elő a mintában.

2. fejezet
Mértan



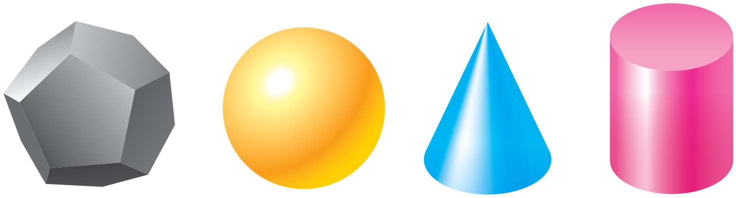
4.§. SOKLAPOK



Ebben a paragrafusban pontosítjátok és bővítitek majd a soklapokról szerzett eddigi ismereteiteket. Új ismeretet szereztek a hasábokról, a gúlákról és ezeknek különböző alakjairól.

16. Hasáb

A 16.1. ábrán az általatok ismert térbeli testek láthatók. Mindegyik alakzat, melyeknek végesek a méretei, és a felületekből, valamint a tér bizonyos részéből áll, amelyet ezek a felületek határolnak.



16.1. ábra

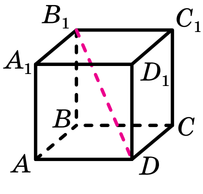
A soklap, a gömb, a kúp, a henger olyan testek, amelyeket **geometriai testeknek** vagy egyszerűen csak **testeknek** nevezünk.

A térben nem minden alakzat lesz test. Például az egyenes, a sík, a lapszög ezek nem lesznek testek. Ezek az alakzatok nem végesek. A test szigorú meghatározása nem tartozik a tananyag keretei közzé.

Meghatározás. **Soklapnak (poliédernek) nevezzük azt a testet, amelynek felülete véges számú soklap lesz.**

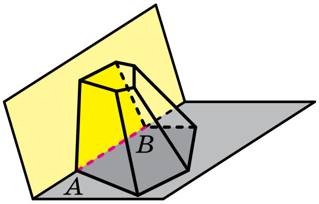
A soklapok következő elemeivel már találkoztatok: él és csúcs, ezeket már ismeritek.

A soklap két lapját **szomszédos** lapoknak nevezzük, ha ezeknek a lapoknak van közös élük. Például, az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka $A_1B_1C_1D_1$ és az A_1B_1BA lapok szomszédosak, mert az A_1B_1 élük közös (16.2. ábra).

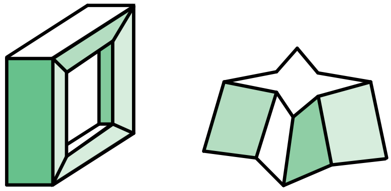


16.2. ábra

Legyen az M pont a soklap egyik csúcsa. A soklap lapjának azt a szögét, amelynek M **a csúcsnál lévő szöge, élszögnek** nevezzük. Például a 16.2. ábrán DAB szög a kocka A csúcsánál lévő élszöge lesz.



16.3. ábra



16.4. ábra

A soklap AB élnél található **lapszögének** a poliéder két szomszédos lapja közötti szöget nevezzük, ha ezeknek a lapoknak AB a közös élük (16.3. ábra).

Azt a szakaszt, amely a poliéder két, nem egy lapjára illeszkedő csúcsait köti össze, a poliéder **átlójának** nevezzük. Például a DB_1 szakasz az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka átlója lesz (16.2 ábra).

A soklapok lehetnek domborúak és homorúak.

Meghatározás. A sokszöget domborúnak (konvexnek) nevezzük, ha mindegyik lapja síkjához viszonyítva az egyik oldalán helyezkedik el.

A kocka és a tetraéder a domború soklapok példái. A 16.4. ábrán homorú (konkáv) soklapok láthatók.

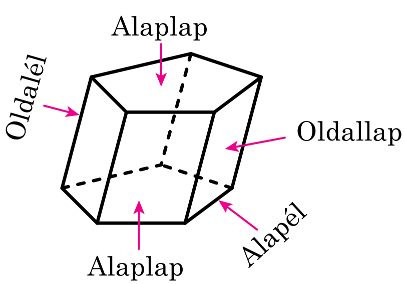
A domború poliéder minden lapja domború sokszög lesz.

A **poliéder felszínének** nevezzük összes lapja területeinek összegét.

Részletesen megvizsgáljuk a számotokra már jól ismert poliédert – a hasábot.

Meghatározás. Azt a poliédert, amelynek két lapja egybevágó sokszög, és párhuzamos síkokban fekszik, a többi n lap pedig paralelogramma, n-szögű hasábnak nevezzük.

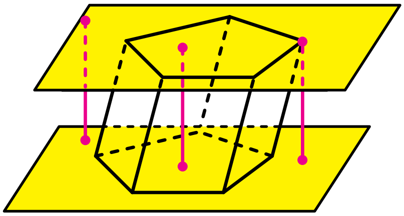
Azokat a paralelogrammákat, amelyek a meghatározásban szerepelnek, a hasáb oldallapjainak nevezzük, az egybevágó n szögeket pedig a hasáb alapjainak, az alaplapok éleit – a hasáb alapéleinek, azokat az éleket, amelyek nem illeszkednek az alapokra – a hasáb oldaléleinek nevezzük (16.5. ábra).



16.5. ábra

Mivel a hasáb szomszédos oldallapjai paralelogrammák, amelyeknek vannak közös éleik, ezért *a hasáb oldalélei egymással egyenlők és párhuzamosak*.

A **hasáb magasságának** nevezzük azt a merőlegest, amelyet az egyik alapja bármely pontjából bocsátunk a másik alapjára (16.6. ábra). A hasáb magasságának hossza egyenlő az alaplap síkjai közötti távolsággal.



16.6. ábra

Meghatározás. A hasábot egyenesnek nevezzük, ha oldalélei merőlegesek az alaplapok síkjaira.

Például a téglatest az egyenes hasáb egyik esete.

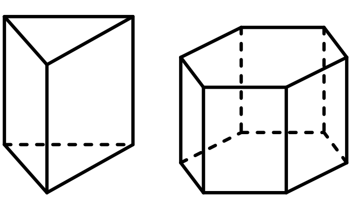
Az egyenes hasáb mindegyik oldaléle a hasáb magassága is. Az egyenes hasáb minden oldallapja téglalap.

Ha a hasáb nem egyenes, akkor **ferdének** nevezzük.

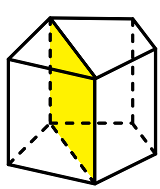
Meghatározás. A hasábot szabályosnak nevezzük, ha egyenes és az alaplapja szabályos sokszög.

Például a kocka a szabályos négyoldalú hasáb egyedi esete.

A 16.7. ábrán szabályos háromoldalú és hatoldalú hasáb van ábrázolva.



16.7. ábra



16.8. ábra

Vizsgáljunk meg egy domború n-szögű ($n > 3$) hasábot. A hasáb síkkal való metszete, amely két nem egy laphoz tartozó oldalélt tartalmaz, és a hasáb alapját az átlói mentén metszi (16.8. ábra). Az ilyen metszetet a **hasáb átlómetszetének** nevezzük.

Bármilyen hasáb átlómetszete paralelogramma, az egyenes hasábé pedig téglalap.

A **hasáb oldalfelszínének** nevezzük összes oldallapja területeinek az összegét. A **hasáb felszínének (**úgy is mondják, hogy a **hasáb teljes felszínének)** összes lapja területeinek az összegét nevezzük.

Teljesülni fog a következő egyenlőség:

$$\boxed{\boldsymbol{S_f = S_o + 2S_a},}$$

ahol S_f — a hasáb felszínének területe, S_o— a hasáb oldalfelszínének területe, S_a— a hasáb alapjának területe.

16.1. tétel. ***Az egyenes hasáb oldalfelszínének területe egyenlő alaplapja kerületének és a hasáb oldalélének szorzatával.***

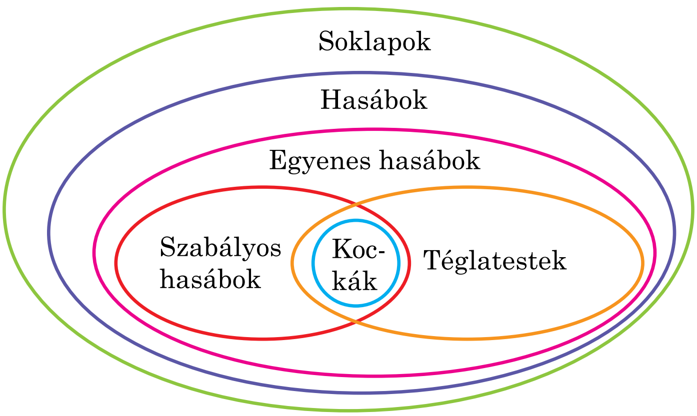
Bizonyítás. Az egyenes hasáb mindegyik oldallapja téglalap, amelynek egyik oldala az alapéle, a másik pedig a hasáb oldaléle. Legyen $a_1, a_2, ..., a_n$ – a hasáb alapéleinek hossza, b – az oldalélének a hossza. Ekkor $S_a = a_1b + a_2b + ... + a_nb = (a_1 + a_2 + ... + a_n)b$. Mivel a zárójelben lévő összeg a hasáb alaplapjának kerülete, ezzel a tételt bebizonyítottuk. ◄

A 16.1. tétel eredményét érdemes képlet alakjában felírni:

$$\boxed{\boldsymbol{S_o = P_a \cdot b},}$$

ahol P_a – a hasáb alapjának kerülete, b – az oldalél hossza.

A soklapok közötti összefügést, amelyekkel ebben a pontban ismerkedünk meg, a 16.9. ábra mutatja be.



16.9. ábra

1. Mit nevezünk soklapnak?
2. A soklap mely lapjait nevezzük szomszédosoknak?
3. Mit nevezünk a soklap lapszögének?
4. Milyen soklapot nevezünk domborúnak?
5. Mit nevezünk hasábnak?
6. Mit nevezünk a hasáb magasságának?
7. Mit nevezünk egyenes hasábnak? ferde hasábnak?
8. Milyen hasábot nevezünk szabályosnak?
9. Mit nevezünk a hasábátló metszetének?
10. Mit nevezünk a hasáb teljes felszínének? a hasáb oldalfelszínének?
11. Mivel egyenlő az egyenes hasáb oldalfelszíne?

GYAKORLATOK

16.1.° A hasábnak mennyi a legkisebb lapszáma? Az ilyen hasábnak hány: 1) csúcsa; 2) éle; 3) oldaléle van?

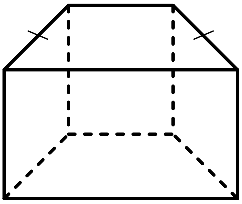
16.2.° A hasábnak 12 lapja van. Milyen sokszög az alapja?

16.3.° Milyen hasáb oldaléle és magassága párhuzamos?

16.4.° Igaz e a következő állítás:

1) az egyenes hasáb oldaléle merőleges az alaplap bármely átlójára;
2) ha a hasáb minden éle egyelő, akkor szabályos;
3) ha az egyenes hasáb minden éle egyenlő, akkor szabályos?

16.5.° Az egyenes hasáb alapja egyenlő szárú trapéz, amelynek egyik szöge 110° (16.10. ábra). Határozzátok meg a hasáb oldaléleinél lévő lapszögek mértékeit!



16.10. ábra

16.6.° A szabályos négyoldalú hasáb alapéle 3 cm, magassága $3\sqrt{6}$ cm. Határozzátok meg a hasáb átlóit!

16.7.° A szabályos háromoldalú hasáb alapéleinek hossza 5 cm, az oldallap átlója 13 cm. Határozzátok meg a trapéz magasságát!

16.8.° Határozzátok meg az olyan egyenes hasáb oldalfelszínét, amelynek magassága 6 cm, és az alapja paralelogramma, és ennek oldalhosszai 2 cm és 3 cm!

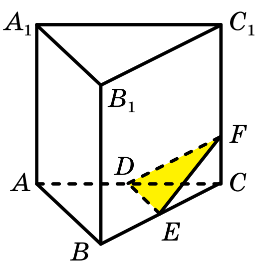
16.9.° Határozzátok meg az olyan szabályos hétoldalú hasáb alapéleit, amelynek magassága 10 cm, az oldalfelszíne pedig 420 cm^2!

16.10.° Határozzátok meg az olyan szabályos négyoldalú hasáb teljes felszínét, amelynek alapéle a, a magassága H!

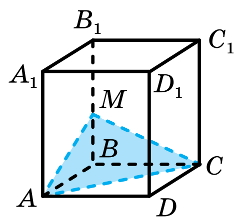
16.11.° Határozzátok meg a szabályos háromoldalú hasáb teljes felszínét, ha az alapéle a, a magassága H!

16.12.° A ferde hasáb oldaléle és alaplapja közötti szög 30°, magassága 10 cm! Határozzátok meg a hasáb oldalélét!

16.13.• Az $ABCA_1B_1C_1$ szabályos hasáb AC és BC éleinek felezőpontjai a D és E pontok (16.11. ábra). A DE egyenesre illeszkedő sík az ABC síkkal 30°-os szöget alkot, és a CC_1 élt az F pontban metszi. Határozzátok meg a metszet területét, ha a hasáb alapéle 12 cm!



16.11. ábra



16.12. ábra

16.14.• Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ szabályos hasáb alapjának AC átlóján át síkot fektettek, amely az ABC síkkal 45°-os szöget alkot, és a BB_1 élt az M pontban metszi (16.12. ábra). Határozzátok meg a keletkezett metszet területét, ha az alapéle 8 cm!

16.15.• A szabályos négyoldalú hasáb alapéle a, a gúla átlói az oldallappal 30°-os szöget zárnak be. Határozzátok meg:

1) a hasáb magasságát;

2) a hasáb átlója és az alaplap közötti szöget!

16.16.• Határozzátok meg annak a szabályos hatoldalú gúlának az átlóit, melynek minden éle a!

16.17.• Az egyenes hasáb alapja rombusz, amelynek oldala a és hegyesszöge α. A hasáb nagyobbik átlója az alaplap síkjához β szög alatt hajlik. Határozzátok meg a hasáb magasságát!

16.18.• Az egyenes hasáb alapja rombusz, amelynek átlói 10 cm-rel és 16 cm-rel egyenlők. Határozzátok meg a hasáb alapélét, ha magassága 4 cm!

16.19.• Az egyenes háromoldalú hasáb alapélei 5 cm, 12 cm és 13 cm, a teljes felszíne 270 cm^2! Határozzátok meg a hasáb magasságát!

16.20.• A szabályos négyoldalú hasáb oldalfelszíne 96 cm^2, teljes felszíne – 128 cm^2. Határozzátok meg a hasáb magasságát!

16.21.• Határozzátok meg a szabályos négyoldalú hasáb oldalfelszínét, amelynek átlója 12 cm és az alaplap síkjához 30°-os szög alatt hajlik!

16.22.• A szabályos négyoldalú hasáb átlója 5 cm, az oldallap átlója 4 cm. Határozzátok meg a hasáb oldalfelszínét!

16.23.•• Az ABC derékszögű háromszög ($ACB\angle = 90°$) az alapja az $ABCA_1B_1C_1$ hasábnak. A CC_1 egyenesen át síkot fektettek, amely merőleges az AB egyenessel és az AB élt D pontban metszi. Határozzátok meg a keletkezett metszet területét, ha $AD = 18$ cm, $BD = 2$ cm, és a hasáb magassága 8 cm!

16.24.•• Az ABC derékszögű háromszög ($ACB\angle = 90°$) az alapja az $ABCA_1B_1C_1$ hasábnak. A CM szakasz az ABC háromszög oldalfelezője. A hasáb magassága egyenlő a háromszög átfogójával. Határozzátok meg annak a metszetnek a területét, amely a CC_1 és CM egyeneseket tartalmazza, ha $AC = 30$ cm, $BC = 40$ cm!

16.25.•• Az $ABCA_1B_1C_1$ szabályos hasábnak minden éle a. Határozzátok meg:

1) az A, B és C_1 pontokra illeszkedő metszet területét;

2) az adott metszet síkja és az alaplap síkja közötti szöget!

16.26.•• Az $ABCA_1B_1C_1$ egyenes hasábnak az alapja derékszögű háromszög ($ACB\angle = 90°$). Az AC egyenest tartalmazó sík az alaplap síkjával β szöget alkot, és a BB_1 élt a D pontban metszi. Határozzátok meg a keletkezett metszet területét, ha $BAC\angle = \alpha$, $BD = a$!

16.27.•• Az egyenes hasáb alapja rombusz, amelynek hegyesszöge α, és a rombusz nagyobbik átlója d. A rombusz alsó alapjának kisebbik átlóján és a felső alap hegyesszögének csúcsán át síkot fektettek, amely a hasáb alsó alaplapjával β szöget alkot. Határozzátok meg:

1) a hasáb magasságát;

2) a keletkezett metszet területét!

16.28.•• Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ egyenes hasábnak az alapja $ABCD$ egyenlő szárú trapéz, amelynek alapjai BC és AD, ezek megfelelően 11 cm és 21 cm-rel lesznek egyenlők, az oldaléle pedig 13 cm. A hasáb átlómetszetének területe 180 cm^2. Határozzátok meg a hasáb oldalfelszínét!

16.29.•• A szabályos hatoldalú hasáb oldallapjának átlója 10 cm, az oldalfelszíne pedig 288 cm^2. Határozzátok meg a hasáb alapélét és magasságát!

16.30.* A szabályos négyoldalú hasáb magassága h. Két szomszédos oldallapjában meghúzták a közös csúcsból kiinduló átlókat. Határozzátok meg a metszet területét, amelyet ezen a két átlón keresztül fektettek, ha a köztük lévő szög α!

16.31.* A szabályos háromoldalú hasáb magassága h. Két oldallapjában meghúzták a közös csúcsból kiinduló átlókat, amelyek közötti szög α. Határozzátok meg a metszet területét, amelyet ezen a két átlón keresztül fektettek!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

16.32. Az egyenlő szárú tompaszögű háromszög alapja 18 cm, a köré írt kör sugara 15 cm. Határozzátok meg a háromszög szárait!

16.33. A rombusz nagyobbik átlója d, a hegyesszöge pedig α. Határozzátok meg:

1) a rombusz oldalát;
2) a rombusz kisebbik átlóját;
3) a rombusz területét;
4) a rombuszba írt körvonal sugarát!

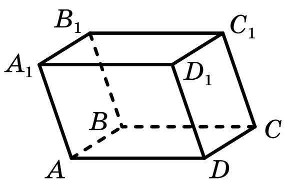
17. Paralelepipedon

Meghatározás. Paralelepipedonnak nevezzük azt a hasábot, amelynek alapjai paralelogrammák.

A 17.1. ábrán az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon látható.

A paralelepipedon bármelyik lapja paralelogramma.

A paralelepipedon két nemszomszédos lapját a **paralelepipedon szemben fekvő lapjainak** nevezzük. Például a 17.1. ábrán az AA_1B_1B és DD_1C_1C lapjai szemben fekvő lapok.

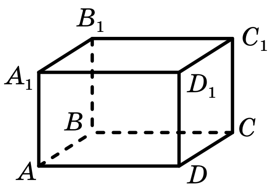


17.1. ábra

Mivel az $AA_1 \parallel DD_1$ és $A_1B_1 \parallel D_1C_1$ (17.1. ábra), ezért a síkok párhuzamosságának ismertetőjele alapján $AA_1B_1 \parallel DD_1C_1$. Hasonlóan gondolkozva bebizonyítható, hogy *a paralelepipedon bármilyen két szemben fekvő lapja párhuzamos síkokra illeszkedik*.

A paralelepidont **egyenesnek** mondjuk, ha oldaléle merőleges az alaplap síkjára. Az egyenes paralelepipedon minden oldallapja téglalap, az alapjai pedig paralelogrammák.

Az egyenes paralelepipedont **derékszögűnek** (téglatestnek) nevezzük, ha az alapjai téglalapok.



17.2. ábra

A 17.2. ábrán az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ derékszögű paralelepipedon látható.

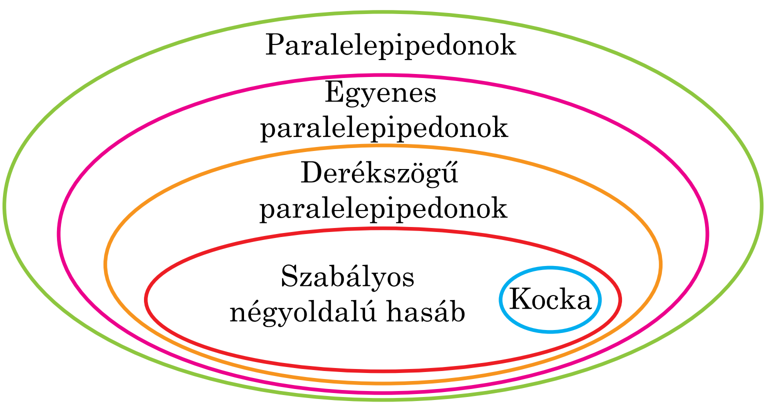
A derékszögű paralelepipedon minden lapja téglalap.

A szabályos négyoldalú hasáb a derékszögű paralelepipedon egyik részesete lesz.

A paralelepipedon egy csúcsból kiinduló éleinek hosszait a **paralelepipedon lineáris méreteinek** nevezzük. A 17.2. ábrán az AB, AD és az AA_1 szakaszok hosszai lesznek az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ derékszögű paralelepipedon lineáris méretei.

A derékszögű paralelepipedont kockának nevezzük, ha lineáris méretei egyenlők. A kocka minden lapja négyzet.

A paralelepipedon és különböző típusai közötti összefüggést a 17.3. ábrán lévő séma mutatja be.



17.3. ábra

17.1. tétel. ***A derékszögű paralelepipedon bármelyik átlójának négyzete lineáris méretei négyzeteinek az összegével egyenlő.***

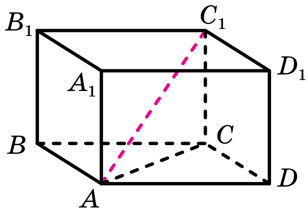
Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ derékszögű paralelepipedon AC_1 átlóját (17.4. ábra).

Bebizonyítjuk, hogy $AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$.

Mivel az ABC háromszög derékszögű ($ABC\angle = 90°$), ezért felírható, hogy: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Ha $BC = AD$, akkor

$$AC^2 = AB^2 + AD^2. \qquad (1)$$

Az adott paralelepipedon derékszögű, ezért $C_1C \perp ABC$. Tehát, az ACC_1 háromszög derékszögű ($ACC_1\angle = 90°$). Ekkor az $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$. Mivel $CC_1 = AA_1$, ezért $AC_1^2 = AC^2 + AA_1^2$.



17.4. ábra

Figyelembe véve az (1) egyenlőséget, fel lehet írni, hogy

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2.$$

A bizonyítás a három többi átlóra is hasonlóképpen történik. ◀

A 17.1 tételből következik, hogy a **derékszögű paralelepipedon átlói egyenlők**.

1. Mit nevezünk paralelepipedonnak?
2. A paralelepipedon mely lapjai lesznek szemköztiek?
3. Milyen paralelepidont nevezünk egyenesnek?
4. Milyen paralelepidont nevezünk derékszögűnek?
5. Mit nevezünk a paralelepipedon lineáris méreteinek?
6. Milyen derékszögű paralelepipedont nevezünk kockának?
7. Fogalmazzátok meg a derékszögű paralelepipedon átlójának négyzetéről szóló tételt!

GYAKORLATOK

17.1.° Tekinthetjük-e a következő állítást a kocka meghatározásának: „Kockának nevezzük azt a szabályos négyoldalú hasábot, amelynek magassága alapélével egyenlő”?

17.2.° Bizonyítsátok be, hogy az egyenes paralelepipedonban az átlómetszet síkja merőleges az alaplap síkjára!

17.3.° A derékszögű paralelepipedon alapéleinek hossza 5 cm és 12 cm, átlója az alaplap síkjához 60° szög alatt hajlik. Határozzátok meg a paralelepipedon magasságát!

17.4.° A derékszögű paralelepipedon alapéleinek hossza 7 cm és 24 cm, magassága 4 cm. Határozzátok meg az átlómetszetének a területét!

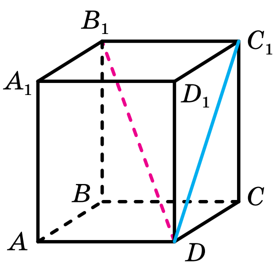
17.5.° Határozzátok meg a derékszögű paralelepipedon testátlóját, ha lineáris méretei 2 cm, 3 cm és 6 cm!

17.6.° Határozzátok meg a téglatest lineáris méreteit, ha az arányuk 1 : 2 : 2, a testátlója pedig 6 cm!

17.7.° A kocka éle a. Mivel egyenlő a testátlója?

17.8.° A kocka felszíne 216 cm^2. Határozzátok meg átlómetszetének a területét!

17.9.• Adott egy $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest (17.5. ábra), $AB = 5$ cm, $AD = 7$ cm, $AA_1 = 12$ cm. Határozzátok meg a következő szöget:
1) a DC_1 egyenes és a BCC_1 sík között;
2) a B_1D egyenes és az ABB_1 sík között!



17.5. ábra

17.10.• Adott az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatest (17.5. ábra), $AB = 5$ cm, $AD = 7$ cm, $AA_1 = 12$ cm. Határozzátok meg a következő szöget:
1) a DC_1 egyenes és a $A_1B_1C_1$ sík között;
2) a B_1D egyenes és az ABC sík között!

17.11.• Négy egyforma kockából, amelyeknek az élei 1 cm, téglatestet raktak össze. Mivel egyenlő ennek a téglatestnek a teljes felszíne?

17.12.• Az egyenes paralelepipedon alapja rombusz, amelynek hegyesszöge α és kisebbik testátlója d. A paralelepipedon nagyobbik testátlója az alaplap síkjához β szög alatt hajlik. Határozzátok meg a paralelepipedon oldalfelszínét!

17.13.• Az egyenes paralelepipedon alapja rombusz, amelynek oldala 6 cm és szöge 60°. A paralelepipedon kisebbik testátlója egyenlő alapjának nagyobbik átlójával. Határozzátok meg a paralelepipedon oldalfelszínét!

17.14.•• Az egyenes paralelepipedon alapélei $2\sqrt{2}$ cm és 4 cm, alapjának egyik szöge 45°. A paralelepipedon nagyobbik testátlója 7 cm. Határozzátok meg a paralelepipedon oldalfelszínét!

17.15.•• Az egyenes paralelepipedon alapjának oldalai 2 cm és $2\sqrt{3}$ cm, és alapjának egyik szöge 30°. Az alapja kisebbik átlóját tartalmazó átlómetszet területe 8 cm^2. Határozzátok meg a paralelepipedon teljes felszínét!

17.16.•• Bizonyítsátok be, hogy amikor az egyenes paralelepipedon átlói egyenlők, akkor az ilyen paralelepipedon derékszögű lesz!

17.17.•• Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ paralelepipedon $ABCD$ alapja négyzet. Az A_1 csúcsa egyenlő távolságra van az $ABCD$ alap minden csúcsától. Határozzátok meg a paralelepipedon magasságát, ha az alapéle 8 cm, az oldaléle pedig 6 cm!

17.18.•• Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ferde paralelepipedon $ABCD$ alapja négyzet, az AA_1B_1B és a CC_1D_1D oldallapjai merőlegesek az alaplap síkjára. Határozzátok meg az AA_1D_1D lap területét, ha a paralelepipedon minden éle 8 cm!

17.19.* Az egyenes paralelepipedon alapja rombusz, átlómetszeteinek területe S_1 és S_2. Határozzátok meg a paralelepipedon oldalfelszínét!

17.20.* Az egyenes paralelepipedon alapja rombusz, amelynek területe S, átlómetszeteinek területe pedig S_1 és S_2. Határozzátok meg a paralelepipedon oldalélét!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

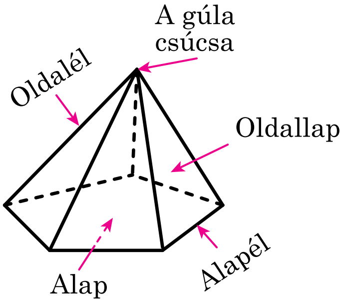
17.21. Határozzátok meg az egyenlő szárú trapéz területét, amelynek alapjai 23 cm és 17 cm, átlója pedig 25 cm!

17.22. A derékszögű trapéz kisebbik szára 10 cm, egyik szöge 45°. Határozzátok meg ennek a trapéznak a területét, ha kör írható bele!

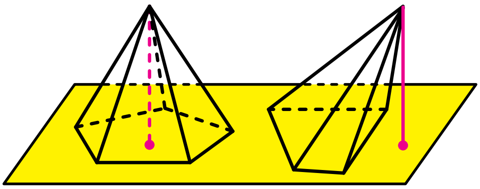
18. A gúla

Meghatározás. Azt a soklapot, amelynek egy lapja *n*-szög, a többi pedig olyan háromszög, amelyeknek közös pontjuk van, *n*-oldalú gúlának nevezzük.

A közös csúccsal rendelkező háromszögeket a gúla oldallapjainak nevezzük, a közös csúcsot a gúla csúcsának, a meghatározásban szereplő n-szöget pedig a gúla alapjának, ennek oldalait a gúla alapéleinek, azokat az éleket, amelyek nem az alapra illeszkednek, a gúla oldaléleinek nevezzük (18.1. ábra).



18.1. ábra

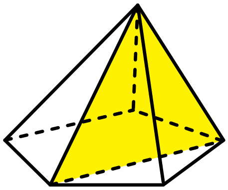


18.2. ábra

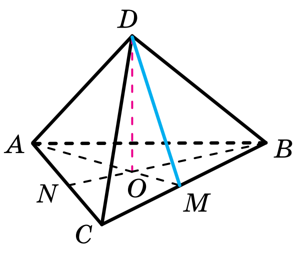
A **gúla magasságának** azt a merőlegest nevezzük, amelyet az alaplap síkjára a gúla csúcsából bocsátunk (18.2. ábra).

Megvizsgálunk egy n oldalú gúlát ($n > 3$). A gúla síkkal való metszete, amely két nem egy lapon fekvő oldalélére illeszkedik, a gúla alapját egy átlójában metszi (18.3. ábra). Az ilyen metszetet **átlómetszetnek** nevezzük.

A gúla átlómetszete háromszög lesz.



18.3. ábra

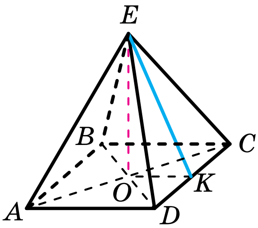


18.4. ábra

Meghatározás. A gúlát szabályosnak nevezzük, ha az alapja szabályos sokszög és magasságának talppontja e sokszög középpontja.

A 18.4. ábrán egy szabályos $ABCD$ gúla látható, amelynek alapja az ABC háromszög. Az ABC háromszög egyenlő oldalú. D csúcsának vetülete az ABC háromszög síkjára a háromszög középpontja – az O pont. Ennek a pontnak a meghatározásához a 18.4. ábrán az ABC háromszög AM és a BN oldalfelezőit húzták meg.

A 18.5. ábrán egy szabályos *ABCDE* szabályos négyoldalú gúla látható. Az *ABCD* négyszög négyzet, az *O* pont a középpontja, az *EO* szakasz a gúla magassága. Mivel a négyzet középpontja egybeesik átlóinak metszéspontjával, ezért ezt a következtetést vonhatjuk le: a szabályos négyoldalú gúla csúcsának vetülete az alaplap síkjára – az alapját képező négyzet átlóinak metszéspontja.



18.5. ábra

A szabályos háromoldalú gúlát, amelynek minden lapja egybevágó, **szabályos tetraédernek** nevezzük.

Vizsgáljuk meg a szabályos gúla néhány tulajdonságát!

A szabályos gúla minden oldaléle egyenlő, a szabályos gúla minden oldallapja egybevágó egyenlő szárú háromszög (bizonyítsátok be ezt önállóan).

A **szabályos gúla apotémájának**, a gúla csúcsából bocsátott oldallapmagasságát nevezzük.

A 18.4. ábrán a *DM* szakasz látható, ahol az *M* pont a *BC* él felezőpontja. Mivel a *BCD* háromszög egyenlő szárú, az alapja *BC*, ezért a *DM* szakasz a magassága. Tehát a *DM* szakasz az *ABCD* szabályos gúla apotémája.

A 18.5. ábrán az *EK* szakasz, ahol a *K* pont a *DC* él felezőpontja, az *ABCDE* szabályos négyoldalú gúla apotémája.

A szabályos gúla apotémái egymással egyenlők (bizonyítsátok be ezt önállóan).

A **gúla oldalfelszínének** nevezzük összes oldallapja területeinek összegét. A **gúla felszíne** (úgy is mondják, hogy a **gúla teljes felszíne**) összes lapja területeinek az összege.

Szemmel látható, hogy teljesül a következő egyenlőség:

$$S_{\text{tf}} = S_{\text{o}} + S_{\text{a}},$$

ahol, S_{tf} – a gúla teljes felszíne,S_{o} – a gúla oldalfelszíne, S_{a} – a gúla alapterülete.

18.1. tétel. ***A szabályos gúla oldalfelszíne egyenlő alapja kerületének és apotémájának a félszorzatával.***

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg a szabályos n-szögű gúlát, amelynek alapéle a, és apotémája d. Ekkor az oldallap területe $\frac{1}{2}ad.$ Az n-oldalú gúla összes oldallapja egybevágó háromszögek, ezért az oldalfelszíne

$\left(\frac{1}{2}ad\right)\cdot n$, vagyis $S_l=\left(\frac{1}{2}ad\right)\cdot n=\frac{1}{2}(an)\cdot d$. Az an szorzat egyenlő az alaplap kerületével, és ezzel a tételt be is bizonyítottuk. ◄

A 18.1. tétel eredményét érdemes képletben megadni;

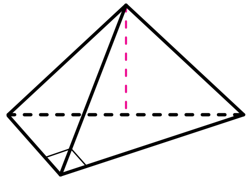
$$\boxed{S_o=\frac{1}{2}P_a\cdot d,}$$

ahol P_a – a gúla alapjának kerülete, d – a szabályos gúla apotémája.

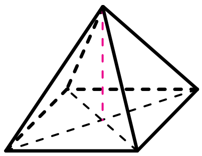
Bebizonyítható, hogy teljesülnek a következő állítások.

1) *Ha a gúla oldalélei egyenlő vagy egyenlő szögben hajlanak az alaplaphoz, akkor a gúla csúcsának vetülete az alaplap síkjára az alapot alkotó sokszög köré írt körvonalának a középpontja lesz.*

Ha például a gúla oldalélei egyenlők, és az alapja derékszögű háromszög, akkor csúcsának vetülete az alaplap síkjára az átfogó felezőpontja lesz (18.6. ábra).



18.6. ábra



18.7. ábra

2) *Ha a domború gúla alapéleinél lévő lapszögei egyenlők, akkor a gúla csúcsának vetülete az alaplap síkjára az alapot alkotó sokszög beírt körvonalának középpontja lesz.*

Ha például a gúla alapja rombusz és az alapéleknél lévő lapszögei egyenlők, akkor a gúla csúcsának az alaplap síkjára való vetülete a rombusz átlónak metszéspontja (18.7. ábra).

3) *Ha a domború gúla alapéleinél lévő lapszögei egyenlők* α*-val, akkor a gúla* S_a *oldalfelszíne a következő képlettel számítható ki:*

$$S_o=\frac{S_a}{\cos\alpha},$$

ahol S_a *– a gúla alapjának területe.*

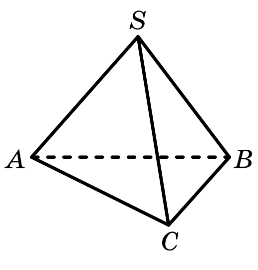
1. Mit nevezünk gúlának?
2. Mit nevezünk a gúla magasságának?
3. Mit nevezünk a gúla átlómetszetének?
4. Milyen gúlát nevezünk szabályosnak?
5. Mit nevezünk a szabályos gúla apotémájának?
6. Mit nevezünk a gúla felszínének? a gúla oldalfelszínének?
7. Mivel egyenlő a szabályos gúla oldalfelszíne?

GYAKORLATOK

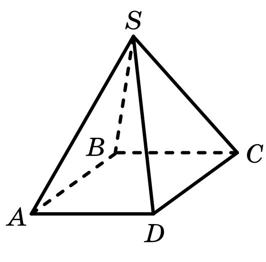
18.1.° Az n-oldalú gúlának hány
1) csúcsa; 2) lapja; 3) éle van?

18.2.° A gúlának legkevesebb hány lapja lehet?

18.3.° A 18.8. ábrán az $ABCS$ szabályos háromoldalú gúla látható. Rajzoljátok át a füzetetekbe, és ábrázoljátok még:
1) a gúla magasságát;
2) az SA éle és alaplapja közötti szögét;
3) a BC élnél lévő lapszögének élszögét!



18.8. ábra



18.9. ábra

18.4.° A 18.9. ábrán az $ABCD$ szabályos négyoldalú gúla látható. Rajzoljátok át a füzetetekbe, és ábrázoljátok még:
1) a gúla magasságát;
2) az SC éle és az alaplapja közötti szögét;
3) az AD élnél lévő lapszögének élszögét!

18.5.° A szabályos háromoldalú gúla alapéle 12 cm, oldaléle alaplapja síkjához 60°-os szögben hajlik. Határozzátok meg a gúla magasságát!

18.6.° A szabályos négyoldalú gúla magassága 8 cm, oldaléle alaplapja síkjához 45°-os szögben hajlik. Határozzátok meg a gúla alapélének hosszát!

18.7.° A szabályos négyoldalú gúla alapéle 6 cm, a gúla magassága 4 cm. Határozzátok meg:
1) a gúla apotémáját;
2) az alapélnél lévő lapszögét!

18.8.° A szabályos négyoldalú gúla apotémája 2 cm, alapéle 6 cm. Határozzátok meg:
1) a gúla magasságát;
2) alapélnél lévő lapszögét!

18.9.° A szabályos hétoldalú gúla alapéle 10 cm, apotémája 20 cm. Határozzátok meg a gúla oldalfelszínét!

18.10.° A szabályos nyolcoldalú gúla csúcsnál lévő élszöge 30°, oldaléle 2 cm. Határozzátok meg a gúla oldalfelszínét!

18.11.° A szabályos ötoldalú gúla oldalfelszíne 300 cm^2, apotémája 15 cm. Határozzátok meg a gúla alapélét!

18.12.° A szabályos négyoldalú gúla mindegyik éle 10 cm. Határozzátok meg a gúla teljes felszínét!

18.13.° A szabályos háromoldalú gúla mindegyik éle 4 cm. Határozzátok meg a gúla teljes felszínét!

18.14.• Az $MABCD$ gúla alapja $ABCD$ paralelogramma, amelynek BD átlója 4 cm. Az alaplap átlójának metszéspontja a gúla magasságára illeszkedik, MA oldaléle 8 cm, amely az alaplap síkjával 45°-os szöget zár be. Határozzátok meg a gúla MD élét!

18.15.• A gúla alapja rombusz, amelynek oldala 13 cm, egyik átlója 24 cm. A gúla magasságának talppontja az alaplap átlóinak metszéspontja. Határozzátok meg a gúla oldaléleit, ha magassága 16 cm!

18.16.• A szabályos hatoldalú gúla oldaléle b, az alaplaphoz β szögben hajlik. Határozzátok meg a gúla átlómetszetének területét, amely az alap nagyobbik átlójára illeszkedik!

18.17.• A szabályos négyoldalú gúla alapéle a, oldaléle alaplapjának síkjához α szögben hajlik. Határozzátok meg átlómetszetének a területét!

18.18.$^{\bullet}$ Bizonyítsátok be, hogy a szabályos gúlában:

1) az oldalélek egyenlő szögben hajlanak az alaplap síkjához;

2) az alaplap éleinél lévő lapszögek egyenlők!

18.19.$^{\bullet}$ A szabályos háromoldalú gúla alapéle a, az alapélnél lévő lapszög α. Határozzátok meg a gúla oldalfelszínét!

18.20.$^{\bullet}$ A szabályos négyoldalú gúla alapjának átlója d, az alapélénél lévő lapszög α. Határozzátok meg a gúla oldalfelszínét!

18.21.$^{\bullet}$ A szabályos négyoldalú gúla apotémája 6 cm, ami az alaplap síkjával 60°-os szöget zár be. Határozzátok meg a gúla oldalfelszínét!

18.22.$^{\bullet}$ A szabályos négyoldalú gúla magassága 5 cm, és az alapélnél lévő lapszög mértéke 45°. Határozzátok meg a gúla oldalfelszínét!

18.23.$^{\bullet\bullet}$ Az $MABC$ gúla AB, AM és MC éleinek megfelelő felezőpontjai a D, E és F pontok, $AB = 8$ cm, $AM = 12$ cm.

1) Szerkesszétek meg a gúla D, E és F pontjaira illeszkedő metszetét!

2) Bizonyítsátok be, hogy a metszet téglalap!

3) Szerkesszétek meg a metszet területét!

18.24.$^{\bullet\bullet}$ Szerkesszétek meg a szabályos háromoldalú gúla és egy sík metszetét, amely magasságának talppontjára illeszkedik, és párhuzamos a kitérő éleivel! Határozzátok meg ennek a metszetnek a kerületét, ha a gúla alapéle 9 cm, oldaléle pedig 12 cm!

18.25.$^{\bullet\bullet}$ A gúla alapja derékszögű háromszög, amelynek átfogója 32 cm. A gúla magassága 12 cm. Határozzátok meg a gúla oldaléleinek hosszát, ha az alaplaphoz egyenlő szögben hajlanak!

18.26.$^{\bullet\bullet}$ A gúla alapja téglalap, amelynek oldalai 6 cm és 8 cm, mindegyik oldaléle az alaplap síkjával 60°-os szöget zár be. Határozzátok meg a gúla magasságát!

18.27.$^{\bullet\bullet}$ A gúla alapja rombusz, amelynek oldala 8 cm, egyik szöge 30°. Mindegyik alapélénél lévő lapszöge 45°. Határozzátok meg:

1) a gúla oldalfelszínét;

2) a gúla magasságát!

18.28.•• A gúla alapja háromszög, amelynek oldalai 5 cm, 12 cm és 13 cm, mindegyik alapélénél lévő lapszöge 30°. Határozzátok meg:
1**)** a gúla oldalfelszínét;
2**)** a gúla magasságát!

18.29.•• A gúla alapja egyenlő szárú trapéz, amelynek alapjai 4 cm és 16 cm, mindegyik alapélénél lévő lapszöge 60°. Határozzátok meg:
1**)** a gúla oldalfelszínét;
2**)** a gúla magasságát!

18.30.•• A gúla alapja téglalap, amelynek oldalai 4 cm és 12 cm. Két oldallapjának síkja merőleges az alaplap síkjára. A nagyobbik alapélt tartalmazó oldallap az alaplap síkjával 45°-os szöget zár be. Határozzátok meg:
1**)** a gúla magasságát;
2**)** a gúla oldalfelszínét!

18.31.•• A gúla alapja négyzet, amelynek oldala 12 cm. Két oldallapjának síkja merőleges az alaplap síkjára. Határozzátok meg a gúla teljes felszínét, ha a magassága 5 cm!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

18.32. Az $ABCD$ trapéz AB és CD szárainak folytatásai az M pontban metszik egymást, $CD : CM = 3 : 5$, és a BC szakasz a trapéz kisebbik alapja. A trapéz alapjainak összege 26 cm. Határozzátok meg az AD szakasz hosszát!

18.33. Az $ABCD$ trapéz alapjai BC és AD szakaszok, átlói az O pontban metszik egymást. Határozzátok meg a BOC és AOD háromszögek területeinek arányát, ha $BC = 3$ cm, $AD = 9$ cm!

UKRAJNA SZÉPSÉGE ÉS ESZE

Roxolana, Szolomia Kruselnicka, Leszja Ukrajna – a múlt egész világon ismert ukrán hölgyei.

A mai ukrán lányok nem csak a politikában és a művészetekben a legjobbak, hanem a matematikai versenyeken is. A lányok számára szervezett legnívósabb európai matematikai versenyen (EGMO) a következő ukrán iskolások háromszor lettek az elsők: Szofija Dubova (2014), Olga Sevcsenko (2017) és Alina Harbuzova (2018). Megoldották az összes versenyfeladatot. Az ukrán lányok a mai napig az egyetlenek Európában, akik háromszor nyerték meg a csapatversenyt. Ezen eredmények alapján az európai versenybizottság a 2019-es EGMO verseny házigazdájának Kijevet jelölte ki. Meg vagyunk arról is győződve, hogy versenyzőink újra a dobogó tetején fognak állni.

Ukrajna csapata az első EGMO versenyen
(Cambridge, Nagy-Britannia, 2012)
A csapat tagjai (*balról jobbra*): Olena Haritonova (ezüst); Julija Kravcsenko (ezüst); Marija Pavljuk (ezüst); Jaroszlava Szergyuk (ezüst)

4. SZÁMÚ FELADAT. *ELLENŐRIZD MAGAD TESZTELÉSSEL!*

1. Számítsátok ki a hasáb oldalfelszínét, ha alapja paralelogramma, amelynek oldalai 8 cm és 22 cm, magassága 15 cm!

A) 900 cm^2; B) 450 cm^2; C) 600 cm^2; D) 2640 cm^2.

2. Mivel egyenlő a szabályos négyoldalú hasáb magassága, ha alapéle $9\sqrt{2}$ cm, és a gúla átlója az alaplap síkjához 30° szög alatt hajlik?

A) $9\sqrt{3}$ cm; B) $9\sqrt{2}$ cm; C) $6\sqrt{3}$ cm; D) $6\sqrt{2}$ cm.

3. Az egyenes hasáb alapja egyenlő szárú háromszög, amelynek szára 6 cm és a csúcsnál lévő szöge 120°. Az egyenlő szárú háromszög alapját tartalmazó oldallapjának átlója az alaplap síkjához 60°-os szögben hajlik. Határozzátok meg a gúla magasságát!

A) 9 cm; B) 18 cm; C) 12 cm; D) $6\sqrt{3}$ cm.

4. Határozzátok meg a szabályos négyoldalú gúla oldallapjának átlóját, ha alapéle 6 cm, a hasáb testátlója 10 cm!

A) 4 cm; B) $2\sqrt{2}$ cm; C) 8 cm; D) $4\sqrt{3}$ cm.

5. Számítsátok ki a szabályos háromoldalú hasáb oldalfelszínét, ha oldallapjai négyzetek és ezeknek az átlóinak hossza 8 cm!

A) 32 cm^2; B) 96 cm^2; C) 64 cm^2; D) 192 cm^2.

6. Az egyenes hasáb alapja rombusz, melynek átlói 10 cm és 24 cm. A hasáb kisebbik átlója 26 cm. Számítsátok ki az oldalfelszínét!

A) 312 cm^2; B) 624 cm^2; C) 2496 cm^2; D) 1248 cm^2.

7. A téglatest átlója $\sqrt{29}$ cm, és két lineáris mérete 2 cm és 3 cm. Határozzátok meg a téglatest harmadik lineáris méretét!

A) 2 cm; B) $\sqrt{15}$ cm; C) 4 cm; D) $3\sqrt{2}$ cm.

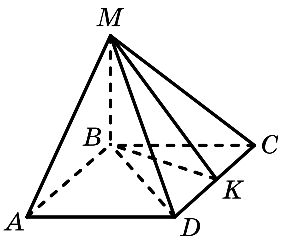
8. Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ téglatestről ismert, hogy $AD = 24$ cm, $CD = 5$ cm, $AA_1 = 10$ cm. Mivel egyenlő az A_1B_1CD négyszög területe?

A) 100 cm^2; B) 120 cm^2; C) 125 cm^2; D) 130 cm^2.

9. Számítsátok ki a szabályos hatoldalú gúla oldalfelszínét, amelynek alapélei 8 cm, apotémája 12 cm!

A) 288 cm^2; B) 576 cm^2; C) 144 cm^2; D) 192 cm^2.

10. Az ábrán látható $MABCD$ gúla alapja négyzet, az MB oldalél merőleges a gúla alaplapjának síkjára, a K pont a CD szakasz felezőpontja. Nevezd meg a CD élnél lévő lapszög élszögét!



A) $MAB\angle$; C) $MKB\angle$;
B) $MDB\angle$; D) $MCB\angle$.

11. A szabályos négyoldalú gúla magassága 12 cm, apotémája 15 cm. Számítsátok ki a gúla oldalfelszínét!

A) 540 cm^2; B) 270 cm^2; C) 1080 cm^2; D) 720 cm^2.

12. A szabályos háromoldalú gúla alapéle 6 cm, magassága $\sqrt{22}$ cm. Határozzátok meg a gúla oldalfelszínét!

A) 90 cm^2; B) 45 cm^2; C) 60 cm^2; D) 30 cm^2.

13. A szabályos négyoldalú gúla alapéle a, átlómetszete derékszögű háromszög. Határozzátok meg a gúla magasságát!

A) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$; B) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; C) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; D) $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

14. A szabályos négyoldalú gúla alapélénél lévő lapszög mértéke α. A magasság felezőpontját az apotéma felezőpontjával összekötő szakasz a. Határozzátok meg a gúla magasságát!

A) $2a\sin\alpha$; B) $2a\cos\alpha$; C) $2a\,\mathrm{tg}\,\alpha$; D) $\dfrac{2a}{\mathrm{tg}\,\alpha}$.

15. A szabályos háromoldalú gúla alapéle 8 cm, az oldallap síkja az alaplappal 30°-os szöget zár be. Határozzátok meg a gúla oldalfelszínét!

A) 32 cm^2; B) 64 cm^2; C) $32\sqrt{3}$ cm^2; D) $64\sqrt{3}$ cm^2.

16. A szabályos négyoldalú gúla oldaléle 8 cm, az alaplap síkjához 60°-os szögben hajlik. Határozzátok meg a gúla apotémáját!

A) 4 cm; B) $2\sqrt{14}$ cm; C) $4\sqrt{7}$ cm; D) $4\sqrt{2}$ cm.

17. A gúla alapja rombusz, amelynek oldala a és az egyik szöge α. Az alapélnél lévő lapszögek mértéke β. Határozzátok meg a gúla oldalfelszínét!

A) $\dfrac{a^2\sin\alpha}{\cos\beta}$; B) $\dfrac{a^2\sin\alpha}{2\cos\beta}$; C) $a^2\sin\alpha\cos\beta$; D) $\dfrac{1}{2}a^2\sin\alpha\cos\beta$.

18. A gúla alapja derékszögű háromszög, amelynek befogója b, és ezzel a befogóval szemközti szöge β. A gúla oldalélei az alaplap síkjával γ szöget alkotnak. Határozzátok meg a gúla magasságát!

A) $\dfrac{b\,\mathrm{tg}\,\gamma}{2\cos\beta}$ B) $\dfrac{b\,\mathrm{tg}\,\gamma}{2\sin\beta}$; C) $\dfrac{1}{2}b\cos\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma$; D) $\dfrac{1}{2}b\sin\beta\,\mathrm{tg}\,\gamma$.

A 4. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Soklap

Soklapnak nevezzük azt a testet, amelynek felszíne véges számú sokszögből áll.

A soklapot domborúnak nevezzük, ha mindegyik lapja a síkjához viszonyítva az egyik oldalán helyezkedik el.

Hasáb

Az n oldalú hasábnak nevezzük azt a soklapot, amelynek két lapja egybevágó n-szög, és ezek párhuzamos síkokra illeszkednek, a többi n-lap pedig paralelogramma.

A hasábot egyenesnek nevezzük, ha oldalélei merőlegesek alaplapjának síkjára.

A hasábot szabályosnak nevezzük, ha egyenes, és az alapja szabályos sokszög.

A hasáb magasságának azt a merőlegest nevezzük, amelyet az egyik alaplap bármely pontjából bocsátunk a másik alaplap síkjára.

Az egyenes hasáb oldalfelszíne

Az egyenes hasáb oldalfelszínének alaplapja kerületének és oldalélének a szorzatát nevezzük.

Paralelepipedon

Paralelepipedonnak nevezzük azt a hasábot, amelynek alapjai paralelogrammák.

A paralelepipedont egyenesnek mondjuk, ha oldalélei merőlegesek az alaplap síkjára.

Az egyenes paralelepipedont derékszögűnek (téglatestnek) nevezzük, ha alapja téglalap.

A derékszögű paralelepidedon egy csúcsból kiinduló éleit a derékszögű paralelepipedon lineáris méreteinek nevezzük.

A derékszögű paralelepidedont kockának nevezzük, ha a lineáris méretei egyenlők.

A derékszögű paralelepipedon tulajdonságai

A derékszögű paralelepipedon bármely átlójának négyzete lineáris méretei négyzeteinek az összegével egyenlő.

A gúla

Azt a soklapot, amelynek egyik lapja n-szög, a többi lapja pedig közös csúccsal rendelkező háromszögek, n oldalú gúlának nevezzük.

A gúla magasságának nevezzük a gúla csúcsából az alaplapra bocsátott merőlegest.

A gúlát szabályosnak nevezzük, ha alapja szabályos sokszög és magasságának talppontja ennek a sokszögnek a középpontja.

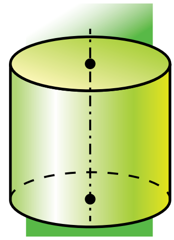
A szabályos sokszög minden oldaléle egyenlő egymással, minden oldallapja egybevágó egyenlőszárú háromszög.

A szabályos gúla apotémájának nevezzük a gúla csúcsából bocsátott magasságát.

A gúla oldalfelszíne

A gúla oldalfelszínének nevezzük összes oldallapja területeinek az összegét.

A szabályos gúla oldalfelszíne alaplapja kerületének és apotémájának a félszorzatával egyenlő.



5.§. FORGÁSTESTEK

Ebben a paragrafusban részletesebben megismerkedtek a már ismert testekkel – a hengerrel, kúppal, gömbbel, és megismeritek a tulajdonságaikat is.

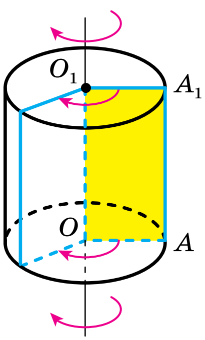
19. A henger

Képzeljük el, hogy az OO_1A_1A téglalapot megforgatják OO_1 oldala körül **(**19.1. ábra**)**. A forgatás során keletkezik egy olyan test, amelyet **hengernek** nevezünk. Az O és O_1 középpontú körlapokat, amelyek az OA és az O_1A_1 oldalak forgatása során keletkeznek, a **henger alapjainak** nevezzük, azt az alakzatot pedig, amely az A_1A oldal forgatása során keletkezik, a **henger oldalfelszínének** mondjuk. Azok a szakaszok, amelyek a henger oldalfelszínét képezik, a **henger alkotói (**19.2. ábra**)**.

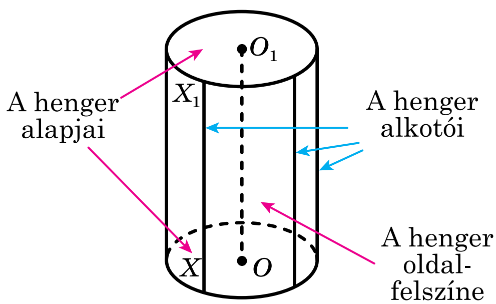
Természetesen a henger összes alkotója egyenlő egymással, és merőleges az alaplap síkjára.

A **henger magasságának** azt a merőlegest nevezzük, amelyet egyik alapjának bármely pontjából bocsátunk a másik alapjának a síkjára. A henger magassága egyenlő az alkotójával.

Azt az egyenest, amely a henger alapjai középpontjaira illeszkedik, a **henger tengelyének** nevezzük. A 19.2. ábrán az OO_1 egyenes a henger tengelye.



19.1. ábra

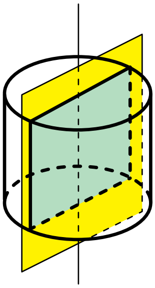


19.2. ábra

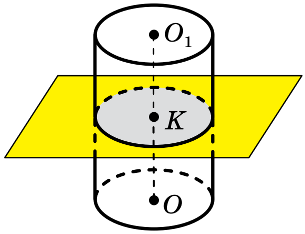
Forgástestnek nevezzük azt a testet, amelyet valamilyen síkbeli alakzat forgatása által kapunk.

A henger a forgástestek egyik példája.

Ha a hengert egy síkkal metsszük a tengelyén át, akkor a metszet téglalap lesz, amelynek két oldala a henger alapjának átmérője, a másik két oldala pedig a henger alkotója (19.3. ábra). Az ilyen metszetet a **henger tengelymetszetének** nevezzük.



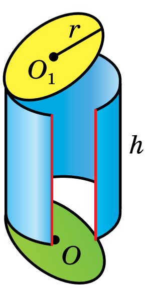
19.3. ábra



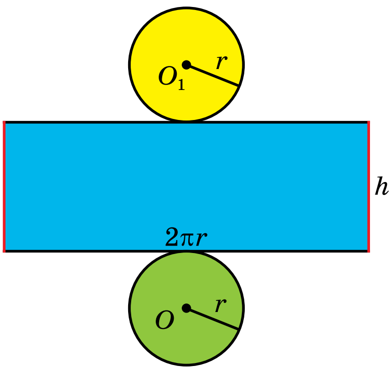
19.4. ábra

A hengert a lapjával párhuzamos síkkal metsszük (19.4. ábra). A hengernek az alapjával párhuzamos síkmetszete (vagy a tengelyére merőleges síkmetszet) körlap, amely egybevágó az alaplapjával.

Képzeljük el, hogy a hengert szétvágjuk alaplapjának körvonala és egy alkotója mentén (19.5. ábra), majd **síkban** kiterítjük. A kapott alakzatot a **henger síkba terített palástjának** vagy egyszerűen a **henger palástjának** nevezzük. Ez két körlapból áll, amelyek a henger alapjaival egyenlők, és egy téglalapból, amit a henger kiterített oldalfelszínének nevezzük (19.6. ábra).



19.5. ábra



19.6. ábra

Ha a henger alkotója h, alapjának sugara r, akkor a henger kiterített oldalfelszínének az oldalai h-val és $2\pi r$-rel egyenlőek.

A henger oldalfelszínének a henger kiterített oldalfelszínét tekintjük. Tehát

$$\boxed{S_o = 2\pi rh,}$$

ahol S_o – a henger oldalfelszínének területe, r – a henger alapjának sugara, h – a henger magasságának hossza.

A henger teljes felszínének nevezzük oldalfelszíne területének és két alaplapja területeinek az összegét. Tehát

$$\boxed{S_{tf} = S_o + 2S_a,}$$

ahol S_{tf} – a henger teljes felszínének területe, S_a – a henger alaplapjának területe.

A henger alapjának területe πr^2. Így a következő képletet kapjuk:

$$\boxed{S_{tf} = 2\pi rh + 2\pi r^2}$$

A 10. osztályos mértanból már tudjátok, hogy a kör párhuzamos vetülete ellipszis. Így, amikor a hengert ábrázoljuk, az alapjának ellipszist kell rajzolni. A gyakorlatban az ellipszis ábrázolásához érdemes egyedi vonalzót használni (19.7. ábra).

19.7. ábra

1. Milyen testet nevezünk hengernek?
2. Írjátok le, mit nevezünk a henger oldalfelszínének!
3. Mit nevezünk a henger alapjainak? tengelyének? magasságának?
4. Milyen testet nevezünk forgástestnek?
5. Mit nevezünk a henger tengelymetszetének?
6. Milyen alakzatokból áll a henger kiterített felszíne?
7. Milyen képlettel számítható ki a henger oldalfelszíne?
8. Milyen képlettel számítható ki a henger teljes felszíne?

GYAKORLATOK

19.1.° A henger magassága 6 cm, alaplapjának sugara 5 cm. Határozzátok meg a tengely metszetének területét!

19.2.° A henger tengelymetszetének területe 128 cm^2. Határozzátok meg a henger magasságát, ha az alaplapjának sugara 4 cm!

19.3.° A henger tengelymetszetének átlója d, az alaplap síkjával α szöget zár be. Határozzátok meg:
1) a henger magasságát; 2) a henger alaplapjának területét!

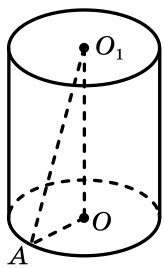
19.4.° A henger alaplapjának területe 49π cm^2, a tengelymetszet átlója a henger alkotójával 30°-os szöget zár be. Határozzátok meg a henger magasságát!

19.5.° Mivel egyenlő a henger oldalfelszíne, ha alapjának sugara 2 cm, magassága 9 cm?

19.6.° Az 1 cm és 3 cm-es oldalú téglalapot a nagyobbik oldala körül forgatják. Határozzátok meg:
1) a keletkezett henger tengelymetszetének átlóját;
2) a keletkezett henger teljes felszínét!

19.7.° A 8 cm-es oldalú négyzetet az egyik oldala körül forgatják. Határozzátok meg:
1) a keletkezett henger tengelymetszetének területét;
2) a keletkezett henger teljes felszínét!

19.8.° Az O és O_1 pontok a henger alsó és felső alapjának megfelelő középpontjai (19.8. ábra). Az A pont az alaplapot határoló körvonal bármilyen pontja. Az O_1A szakasz hossza 6 cm, az alaplap síkjával 60°-os szöget alkot. Határozzátok meg a henger oldalfelszínét!



19.8. ábra

19.9.° A henger magasága 5 cm, alaplapjának átmérője 24 cm. Határozzátok meg az egyik alaplap középpontja és a másik alap körvonalának pontja közötti távolságot!

19.10.• A henger kiterített oldalfelszínének átlója d, a kiterített rész egyik oldalával α szöget alkot. Határozzátok meg a henger oldalfelszínét!

19.11.• A négyzet, amelynek átlója 4π cm, egy henger oldalfelszínének kiterített hálója. Határozzátok meg a henger alapterületét!

19.12.• Hogyan változik, növekszik vagy csökken, és hányszorosára a henger oldalfelszíne, ha:

1) az alaplap sugarát k-szorosára növeljük;

2) a henger magasságát k-szorosára csökkentjük;

3) a henger magasságát k-szorosára növeljük, és az alaplap sugarát k-szorosan csökkentjük?

Milyen függvény adja meg a henger oldalfelszínének függését:

1) az alaplapjának sugarától; 2) a henger magasságától?

19.13.• A henger alsó alaplapján egy húr van meghúzva, amely ennek a körnek a középpontjából 120°-os szögben, a felső alaplap középpontjából pedig 60°-os szögben látható. Határozzátok meg a henger oldalfelszínét, ha az adott húr hossza 6 cm!

19.14.• A henger alsó alaplapján egy húr van meghúzva, amely ennek a körnek a középpontjából 90°-os szögben, a felső alaplap középpontjából pedig 60°-os szögben látható. Határozzátok meg a henger oldalfelszínét, ha alaplapjának sugara 8 cm!

19.15.•• A henger alsó alaplapján egy húr van meghúzva, amely ennek a körnek a középpontjából α szögben látható. A felső alaplap középpontját és ennek a húrnak az egyik végpontját összekötő szakasz az alaplap síkjához β szögben hajlik. Határozzátok meg a henger oldalfelszínét, ha az alsó alaplap középpontja az adott húrtól a távolságra lesz!

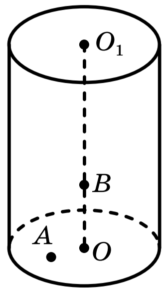
19.16.•• A henger alsó alaplapján egy húr van meghúzva, amely ennek a körnek a középpontjából β szögben látható. A felső alaplap középpontját és ennek a húrnak a felezőpontját összekötő szakasz hossza m, az alaplap síkjával α szöget alkot. Határozzátok meg a henger oldalfelszínét!

19.17.•• A henger alapkörének sugara 10 cm, magassága 12 cm, a tengelyével párhuzamosan metszetet szerkesztettek, amely négyzet. Határozzátok meg a henger tengelye és a metszet közötti távolságot!

19.18.•• A henger tengelyével párhuzamosan metszetet szerkesztettek, amely az alaplap körvonalából ívet metsz ki, amelynek fokmértéke α $(0° < \alpha < 180°)$. A szakasz, amely a henger felső alaplapjának középpontját az alsó alaplap körvonalának egy pontjával köti össze, az alaplap síkjával β szöget zár be, az alaplap sugara R. Határozzátok meg a metszet területét!

19.19.•• A henger tengelyével párhuzamosan metszetet szerkesztettek, amely a tengelytől $\sqrt{3}$ cm-re helyezkedik el, és az alaplap körvonalából 120°-os ívet metsz ki. Határozzátok meg a metszet területét, ha átlója 10 cm-rel egyenlő!

19.20.* Az O és O_1 pontok a henger alsó és felső alapjainak megfelelő középpontjai, az A pont az alsó alapjára illeszkedik (19.9. ábra). Az OO_1 szakaszon felvettek egy B pontot úgy, hogy az AB egyenes metszi a henger oldalfelszínét. Szerkesszétek meg az AB egyenes és a henger oldalfelszínének metszéspontját!



19.9. ábra

19.21.* A henger alapjának sugara 9 cm. Az OO_1 szakasz felezőpontjából, ahol az O és az O_1 pontok a henger alsó és felső alapjainak megfelelő felezőpontjai, félegyenest húztak, amely az alaplap síkját olyan pontban metszi, ami az alap középpontjától 12 cm-re van. Ez a félegyenes a henger alkotóját az alsó alaplaptól 2 cm-re lévő pontban metszi. Határozzátok meg a henger magasságát!

19.22.* A henger magassága 20 cm. A henger alkotójának felezőpontján át egyenest fektettek, amely az alaplapok középpontjait összekötő szakaszt az alsó alaplaptól 6 cm-re lévő pontban metszi, az alaplapot viszont egy másik pontban fogja metszeni, amely 15 cm-re van az alsó alaplap középpontjától. Határozzátok meg a henger alapjának sugarát!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

19.23. Az egyenlő szárú háromszög alapjára bocsátott magassága h, az oldalai közötti szög α. Határozzátok meg az adott háromszögbe írt kör középpontját!

19.24. A trapéz alapjai 6 cm és 27 cm, egyik szára 13 cm. Határozzátok meg az adott trapézba írt körvonal középpontját!

19.25. A szabályos hatoldalú hasáb alapéle 6 cm, oldalfelszíne 288 cm^2. Határozzátok meg a hasáb nagyobbik átlóját!

20. A kúp

Képzeljük el, hogy az AOB derékszögű háromszöget, melynek O a derékszöge, megforgatjuk az AO oldala körül (20.1. ábra). A forgatás során test keletkezik, amelyet **kúpnak** nevezünk. Az O középpontú körlapot, amelyet az OB oldal forgatása során kapunk, a **kúp alapjának**, az AB oldal forgása által keletkezett alakzatot a **kúp oldalfelszínének** nevezzük. A kúp oldalfelszínét alkotó szakaszokat a **kúp alkotóinak** nevezzük (20.2. ábra).

A kúp összes alkotója egyenlő, és az alaplappal ugyanolyan szöget zár be.

Összes alkotójának közös végpontját a **kúp csúcsának** nevezzük. A 20.1. ábrán az A pont a kúp csúcsa.

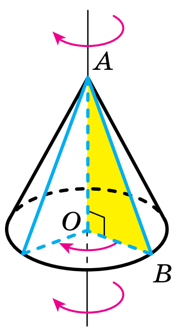
A kúp csúcsára és az alaplap középpontjára illeszkedő egyenest a **kúp tengelyének** nevezzük. A 20.1. ábrán az AO egyenes a kúp tengelye.

A **kúp magasságának** azt a merőlegest mondjuk, amelyet a kúp csúcsából az alaplap síkjára bocsátunk. A magasság talppontja az alaplap középpontja. A kúp magassága a tengelyén fekszik. A 20.1. ábrán az AO szakasz a kúp magassága.

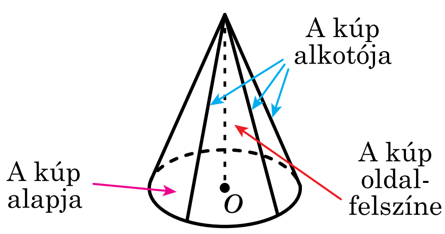
A kúp, a hengerhez hasonlóan, forgástest.

Ha a kúpot a tengelyére illeszkedő síkkal metsszük, akkor a metszet egyenlő szárú háromszög, amelynek szárai a kúp alkotói, alapja pedig a kúp alapjának átmérője (20.3. ábra). Az ilyen metszetet a **kúp tengelymetszetének** nevezzük.

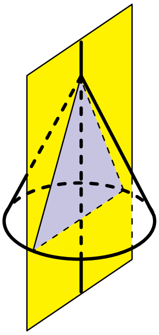
Képzeljük el, hogy a kúpot alapjának köre és valamely alkotója mentén szétvágjuk (20.4. ábra), majd egy síkba kiterítjük. A kapott alakzatot a **kúp kiterített palástjának** nevezzük (20.5. ábra). Ez az alappal



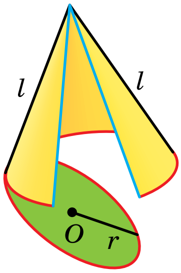
20.1. ábra



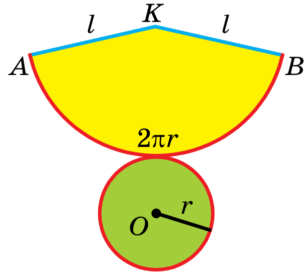
20.2. ábra



20.3. ábra



20.4. ábra



20.5. ábra

egyenlő körlapból és egy körcikkből áll, ami a **kúp oldalfelszínének kiterített palástja**.

Ha a kúp alkotója l, alaplapjának sugara r, akkor a körcikk sugara l-lel egyenlő, és a körív hossza $2\pi r$. Legyen az ABK szög fokmértéke α (20.5. ábra). Ekkor az AB ív hossza $\frac{\pi l\alpha}{180}$. Innen $2\pi r = \frac{\pi l\alpha}{180}$. Ebből következik:

$$\alpha = \frac{360r}{l}. \qquad (1)$$

A kúp S_o oldalfelszíne területének nevezzük a kiterített oldalfelszínének területét. Ebből következik, hogy $S_o = \frac{\pi l^2\alpha}{360}$. Az (1) egyenlőséget figyelembe véve kapjuk: $S_o = \frac{\pi l^2}{360}\cdot\frac{360r}{l} = \pi r\boldsymbol{l}$.

Tehát a kúp oldalfelszínét a következő képlettel számíthatjuk ki:

$$\boxed{\boldsymbol{S_o = \pi r l},}$$

ahol r – a kúp alapjának sugara, l – a kúp alkotója.

A **kúp teljes felszínének** nevezzük oldalfelszínének és alapja területének az összegét. Innen:

$$\boxed{\boldsymbol{S_{tf} = S_o + S_a},}$$

ahol S_{tf} – a kúp teljes felszíne, S_a – a kúp alapjának területe.

A kúp alapjának területe πr^2. Így a következő képletet kapjuk:

$$\boxed{\boldsymbol{S_{tf} = \pi r l + \pi r^2}}$$

1. Milyen testet nevezünk kúpnak?
2. Írjátok le, mit nevezünk a kúp oldalfelszínének!
3. Mit nevezünk a kúp alapjának? tengelyének? magasságának?
4. Mit nevezünk a kúp tengelymetszetének?
5. Milyen alakzatokból áll a kúp kiterített felszíne?
6. Mit tekintenek a kúp oldalfelszín-területének?
7. Milyen képlettel számítható ki a kúp oldalfelszíne?
8. Milyen képlettel számítható ki a kúp teljes felszíne?

GYAKORLATOK

20.1.° A kúp magassága 4 cm, alkotója 6 cm. Határozzátok meg a kúp alapjának sugarát!

20.2.° A kúp alapjának sugara 5 cm, alkotója 13 cm. Határozzátok meg a kúp magasságát!

20.3.° Határozzátok meg a kúp alapjának sugarát és magasságát, ha az alkotója 18 cm, a tengelymetszete szabályos háromszög!

20.4.° A kúp alapjának sugara 2 cm, tengelymetszete egyenlőszárú háromszög. Határozzátok meg a kúp magasságát és alkotóját!

20.5.° A kúp alapjának sugara 9 cm, az alkotója és alaplapja közötti szög 30°. Határozzátok meg:

1) a kúp oldalfelszínét;
2) a tengelymetszetének területét!

20.6.° A kúp alapjának sugara 6 cm, magasága 8 cm. Határozzátok meg:

1) a kúp oldalfelszínét;
2) a kúp teljes felszínét!

20.7.° A kúp magassága H, az alkotója és alaplapja közötti szög α. Határozzátok meg:

1) a tengelymetszetének területét;
2) a kúp oldalfelszínét!

20.8.° A kúp alkotója l, tengelymetszetének a csúcsnál lévő szöge α. Határozzátok meg:

1) a tengelymetszetének területét;
2) a kúp oldalfelszínét!

20.9.° A derékszögű háromszög átfogója 8 cm, egyik szöge 30°. Ezt a háromszöget a nagyobbik befogója mentén megforgattuk. Határozzátok meg a keletkezett kúp oldalfelszínét!

20.10.° Határozzátok meg a kúp tengelymetszetének területét, amelyet olyan derékszögű háromszög forgatásával kapunk, amelynek átfogója 17 cm, befogója 15 cm, ha a forgatást a másik befogó körül végezzük!

20.11.• A kúp alapjának sugara 15 cm, az alaplap középpontja és az alkotó közötti távolság 12 cm. Határozzátok meg a kúp alkotójának hosszát és magasságát!

20.12.• A kúp magassága $4\sqrt{5}$ cm, az alaplap középpontja és az alkotó közötti távolsága 6 cm. Határozzátok meg a kúp teljes felszínét!

20.13.• A kúp alapjában egy a hosszúságú húrt húztak, amely egy α ($0° < \alpha < 180°$) fokmértékű ív végpontjait köti össze. A kúp alkotója az alaplap síkjával β szöget zár be. Határozzátok meg a kúp magasságát!

20.14.• A kúp alapjában egy húrt húztak, amely egy α ($0° < \alpha < 180°$) fokmértékű ív végpontjait köti össze. A kúp alkotója a magassággal β szöget zár be, a hossza m. Határozd meg az adott húr hosszát!

20.15.• Az 5 cm és 12 cm befogójú derékszögű háromszöget az átfogóját tartalmazó egyenes mentén megforgatták. Határozzátok meg a keletkezett forgástest felszínét!

20.16.•• A kúp két alkotóján keresztül fektetett sík az alaplapot egy olyan húrban metszi, amely egy β ($0° < \beta < 180°$) fokmértékű ív végpontjait köti össze. Határozzátok meg a keletkezett metszet területét, ha a kúp magassága H, és a metszet síkja az alaplappal α szöget zár be!

20.17.•• A kúp két alkotója közötti szög 60°, rajtuk keresztül síkot fektettek. A sík az alaplapot olyan húrban metszi, amely egy 8 cm hosszú, 90° fokmértékű ív végpontjait köti össze. Határozzátok meg a kúp oldalfelszínét!

20.18.•• Az egyenlő szárú hegyesszögű háromszög alapja a, az alapnál lévő szöge α. Ez egy olyan egyenes mentén forog, amely az egyik szárát tartalmazza. Határozzátok meg a keletkezett forgástest felszínét!

20.19.•• Az egyenlő szárú háromszög alapja a, az alappal szemközti szöge α. Ez egy olyan egyenes mentén forog, amely az alapját tartalmazza. Határozzátok meg a keletkezett forgástest felszínét!

20.20.•• A derékszögű trapéz alapjai 6 cm és 9 cm, magassága 4 cm. Ez egy olyan egyenes mentén forog, amely a nagyobbik alapját tartalmazza. Határozzátok meg a keletkezett forgástest felszínét!

20.21.•• A derékszögű trapéz alapjai 3 cm és 4 cm, hegyesszöge 45°. Ez egy olyan egyenes mentén forog, amely a kisebbik alapját tartalmazza. Határozzátok meg a keletkezett forgástest felszínét!

20.22.•• A rombusz oldala 10 cm, hegyesszöge 60°. Ez egy olyan egyenes mentén forog, amely az egyik oldalát tartalmazza. Határozzátok meg a keletkezett forgástest felszínét!

20.23.•• Az egyenlő szárú trapéz alapjai 10 cm és 26 cm, a szára egyenlő a kisebbik alapjával. Ez egy olyan egyenes mentén forog, amely a nagyobbik alapját tartalmazza. Határozzátok meg a keletkezett forgástest felszínét!

20.24.•• A kúp oldalfelszínének kiterített hálója körcikk, amelynek sugara 12 cm, ívének fokmértéke 240°. Határozzátok meg a kúp alapjának sugarát!

20.25.•• A kúp oldalfelszínének kiterített hálója körcikk, amelynek sugara 5 cm. Határozzátok meg a körcikk középponti szögét, ha a kúp magassága 4 cm!

20.26.•• A kúp két alkotóján át síkot fektettek, amely a kúp alaplapjával α szöget alkot. A kúp alaplapja és a metszet közötti távolság a, a kúp alkotója az alaplap síkjával β szöget alkot. Határozzátok meg a kúp alapjának sugarát!

20.27.•• Az MO szakasz a kúp magassága, az MA és MB szakaszok az alkotói, $MO = 4\sqrt{2}$ cm. Az O pont és az AB egyenes közötti távolság 2 cm. Határozzátok meg az O pont és az AMB sík közötti távolságot!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

20.28. Az AD és CE szakaszok az ABC háromszög oldalfelezői. Határozzátok meg az AC oldal hosszát, ha $AB = 8\sqrt{5}$ cm, $BC = 6\sqrt{5}$ cm és $AD \perp CE$!

20.29. Az egyenlő szárú trapéz területe $32\sqrt{3}$ cm^2, hegyesszöge 60°. Határozzátok meg a trapéz szárát, ha ismeretes, hogy a trapézba kör írható!

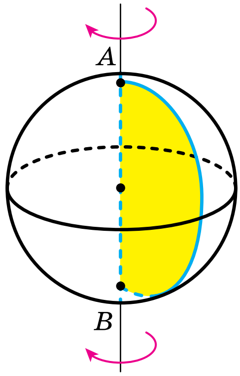
20.30. A gúla alapja egyenlő szárú háromszög, amelynek az alapjánál lévő szöge 30°, a szára pedig 12 cm. A gúla mindegyik oldaléle az alappal 60°-os szöget zár be. Határozzátok meg a gúla magasságát!

21. A gömb és a gömbfelület

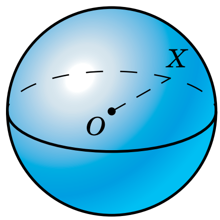
Az előző pontokban két forgástesttel ismerkedtetek meg: a hengerrel és a kúppal. Van még egy forgástest, a gömb.

A 2.1. ábrán olyan test látható, amelyet félkör forgatásával kaphatunk, ha a forgástengely az AB átmérő lesz. Az ilyen testet **gömbnek** nevezzük.

Az AB átmérője körül forgatva a körvonalat olyan felületet kapunk, amelyet **gömbfelszínnek** nevezünk (21.1. ábra). A gömbfelszín az adott gömb felszíne.



21.1. ábra



21.2. ábra

Az AB szakasz felezőpontját a gömbfelszín középpontjának nevezzük. Bármelyik szakaszt, amely a gömbfelszín egy pontját a gömbfelszín középpontjával köti össze, a **gömbfelszín sugarána**k nevezzük. Ennek a szakasznak a hosszát a gömb sugarának is nevezik. A 21.2. ábrán az OX szakasz a **gömb sugara**.

Bebizonyítható, hogy *a gömbfelszín minden sugara egymással egyenlő*.

Más szóval, *a gömbfelszín minden pontja egyenlő távolságra van a gömb középpontjától.*

Azt a szakaszt, amely a gömbfelszín két pontját köti össze és a gömb középpontja is illeszkedik rá, a **gömbfelszín átmérőjének** nevezzük. Ha a gömbfelszín sugara r, akkor az átmérője $2r$.

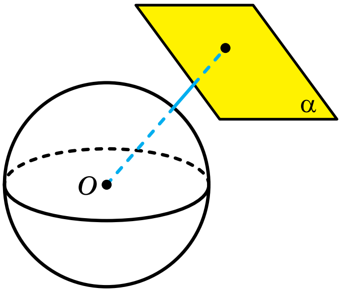
A gömb középpontja, sugara és átmérője annak a gömbfelszínnek a középpontja, sugara és átmérője, amely az adott gömbnek a felszíne lesz.

Bebizonyítható, hogy *a gömb bármely pontja és a gömb középpontja közötti távolság nem nagyobb a sugaránál*.

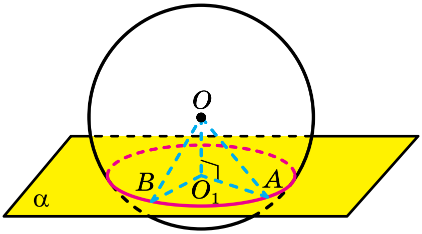
A síkmértanból már ismeritek a kör és az egyenes kölcsönös helyzetét. Megvizsgáljuk a gömbfelszín és a sík kölcsönös helyzetét.

Legyen az adott gömbfelszín sugara r, az O pont a középpontja, az α sík és az O pont közötti távolság d.

I. eset. Legyen $d > r$. Ebben az esetben a *gömbfelszínnek és a síknak nincs közös pontja* (21.3. ábra).

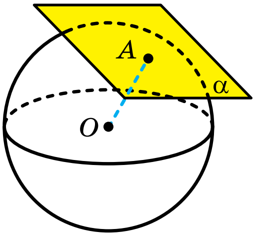


21.3. ábra



21.4. ábra

II. eset. Legyen $d < r$. Ebben az esetben *a gömbfelszín és a sík metszete körvonal* (21.4. ábra).



21.5. ábra

Erre az állításra hivatkozva levonható a következtetés: ha a gömb középpontja és a sík közötti távolság kisebb a kör sugaránál, akkor a gömb és a sík metszete kör.

Ha a sík a gömb középpontjára illeszkedik, akkor az így keletkezett metszetet a **gömb nagy körének** nevezzük.

III. eset. Legyen $d = r$. Ebben az esetben a *sík és a gömbfelszín metszete csak egy közös pont* (21.5. ábra).

Meghatározás. Azt a síkot, amelynek a gömbfelszínnel csak egy közös pontja van, a gömbfelszín érintősíkjának nevezzük.

Ezt a közös pontot **érintési pontnak** nevezzük. A 21.5. ábrán az A az érintési pont.

Ezáltal igaz a következő tétel.

21.1. tétel. ***A gömbfelszín érintősíkja merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra.***

1. Mit nevezünk gömbfelszínnek? gömbnek?

2. Magyarázzátok meg, milyen pontot nevezünk a gömbfelszín középpontjának?

3. Mit nevezünk a gömbfelszín sugarának? a gömb sugarának?
4. Mit nevezünk a gömbfelszín átmérőjének? a gömb átmérőjének?
5. Mivel egyenlő a gömbfelszín sugara, ha a sugara r-rel egyenlő?
6. Mi lesz a gömbfelszín és sík metszete, ha a gömbfelszín középpontja és a sík közötti távolság kisebb a gömbfelszín sugaránál?
7. Mit nevezünk a gömb sugarának?
8. Mit nevezünk a gömb érintősíkjának?
9. Milyen tulajdonsággal rendelkezik az a sugár, amelynek az egyik végpontja az érintősík és a gömbfelszín közös pontja lesz!

GYAKORLATOK

21.1.° Hozzatok fel olyan példákat a mindennapi életben használt és a természetben található tárgyakról, amelyek gömbfelszín (gömb) alakúak?

21.2.° A gömb sugara $\sqrt{5}$ cm. A gömbhöz tartozik-e az a pont, amely a gömb középpontjától:
1) 2 cm-re van; 2) 2,3 cm-re van?

21.3.° A C és D pontok egy O középpontú 8 cm-es sugarú gömbfelszínre illeszkednek. Határozzátok meg a CD távolságot, ha a COD szög derékszög!

21.4.° Az O középpontú gömbfelszínen jelölték az A és B pontokat úgy, hogy $AB = 18$ cm. Határozzátok meg a gömb sugarát, ha az O pont és az AB egyenes közötti távolság 12 cm!

21.5.° Adott egy 6 cm sugarú gömbfelszín és egy α sík. Milyennek kell lennie a gömbfelszín középpontja és az α sík közötti távolságnak, hogy:
1) a gömbfelszínnek és a síknak ne legyenek közös pontjai;
2) a gömbfelszínnek és a síknak csak egy közös pontja legyen;
3) a gömbfelszínnek és a síknak a metszete egy körvonal legyen;
4) a gömbfelszínnek és a síknak a metszete a lehető leghosszabb körvonal legyen?

21.6.° A gömbfelszín átmérője 20 cm, középpontjának távolsága az α síktól 12 cm-rel egyenlő. Vannak-e közös pontjai az α síknak és a gömbfelszínnek?

21.7.° Hány olyan sík fektethető, amelyek egy adott pontra illeszkednek, és érintik a gömbfelszínt, ha:
1) a pont az adott gömbfelszínre illeszkedik;
2) a pont a gömbfelszínen kívül helyezkedik el?

21.8.° 1) Melyik a Föld leghosszabb szélességi köre?

2) Határozzátok meg a Föld egyenlítőjének hosszát, ha a Föld sugarát 6 400 km-nek tekintjük. Az eredményt ezer kilométerekre kerekítsétek!

3) Számítsátok ki az utat, amit a településetek tesz meg egy nap alatt a Föld forgásának következtében!

21.9.° A gömb sugara 5 cm. Határozzátok meg nagykörének a területét!

21.10.° Bizonyítsátok be, hogy amikor az α sík az O_1 középpontú körvonalban metszi az O középpontú gömbfelszínt, akkor $OO_1 \perp \alpha$!

21.11.° A gömbfelszínt olyan sík metszi, amely a gömbfelszín középpontjától 6 cm távolságra van. A metszésvonal hossza 16π cm. Határozzátok meg a gömbfelszín sugarát!

21.12.• A 13 cm sugarú gömb metszete körlap, amelynek területe 25π cm^2. Határozzátok meg a gömb középpontja és a metsző sík közötti távolságot!

21.13.• Az R sugarú gömb átmérőjének végpontján egy síkot fektettek, amely ezzel az átmérővel α szöget alkot, $\alpha \neq 90°$. Határozzátok meg a keletkezett metszet területét!

21.14.• Határozzátok meg a gömbfelület és a sík metszésvonalának hosszát, ha a sík a középponttól 2 cm távolságra van, és a gömb sugara, amelynek egyik végpontja erre a metszésvonalra illeszkedik, az adott síkkal 30°-os szöget zár be!

21.15.• A téglalap csúcsai olyan gömbfelszínre illeszkednek, amelynek sugara 26 cm. Határozzátok meg a gömbfelszín középpontja és a téglalap síkja közötti távolságot, ha a téglalap oldalai 12 cm és 16 cm!

21.16.• A gömbfelszínen A, B és C pontok vannak jelölve, $AB = BC = 15$ cm, $ABC\angle = 120°$. Határozzátok meg a gömb középpontja és az ABC sík közötti távolságot, ha a gömb sugara 17 cm!

21.17.• Az 1 cm, $\sqrt{3}$ cm és 2 cm oldalú háromszög csúcsai a gömbfelszínre illeszkednek. Határozzátok meg a gömb sugarát, ha a középpontja és a háromszög síkja között a távolság $4\sqrt{3}$ cm!

21.18.• Két közös középpontú gömb sugara 7 cm és 9 cm. Az α sík érinti a kisebbik gömböt. Határozzátok meg a nagyobbik gömb és az α sík metszetének területét!

21.19.•• A gömbfelszín sugara 40 cm. Az A pont a gömbfelszínt érintő síkra illeszkedik, és az érintési ponttól 9 cm-re van. Határozzátok meg a gömbfelszínnek az A ponthoz legközelebb lévő pontja és az A pont közötti távolságot!

21.20.•• A 112 cm sugarú gömbfelszín M pontjában egy érintősíkot szerkesztettek. Ezen a síkon jelöltek egy K pontot, amelynek a gömbfelszín legközelebbi pontjához a távolsága 225 cm. Határozzátok meg az M és K pontok közötti távolságot!

21.21.* A gömbnek és az egymásra merőleges síkoknak közös a húrjuk, melynek hossza 12 cm. Határozzátok meg a gömbök sugarait, ha metszeteik területei 64π cm^2 és 100π cm^2!

21.22.* A gömbnek és az egymásra merőleges síkoknak közös a húrjuk. A távolság a gömb középpontja és az egyik sík között 4 cm, a másik síktól 5 cm. Határozzátok meg ezen metszetek közös húrjának hosszát, ha a gömb sugara $5\sqrt{2}$ cm!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

21.23. Határozzátok meg a körvonal hosszát, amely az egyenlő szárú trapéz köré van írva, ha a trapéz alapjai 6 cm és 8 cm, magassága pedig 7 cm!

21.24. Az egyenlő szárú háromszög alapra bocsátott magassága 32 cm, beírt körének sugara 12 cm. Határozzátok meg a háromszög köré írt kör sugarát!

21.25. A szabályos négyoldalú gúla alapéle a, két szomszédos lapjának apotémái közötti szög 60°. Határozzátok meg a gúla oldalfelszínét!

5. SZÁMÚ FELADAT. *ELLENŐRIZD MAGAD TESZTELÉSSEL!*

1. Számítsátok ki a henger oldalfelszínét, amelynek tengelymetszete 8 cm oldalú négyzet!
A) 32π cm^2; B) 64π cm^2; C) 128π cm^2; D) 256π cm^2.

2. A henger magassága 8 cm, alapjának sugara 5 cm. A henger tengelyétől 4 cm-re vele párhuzamosan egy síkot fektettek. Határozzátok meg a keletkezett metszet területét!
A) 40 cm^2; B) 24 cm^2; C) 48 cm^2; D) 64 cm^2.

3. A henger magassága 6 cm, oldalfelszíne 24π cm^2. Mivel egyenlő alapjának a területe?
A) 4π cm^2; B) 4 cm^2; C) 3π cm^2; D) 6π cm^2.

4. A henger alsó alapjának húrja ennek az alapnak a középpontjából α szögben látható. Az a szakasz, amely a felső alaplap középpontját az adott húr felezőpontjával köti össze, az alaplap síkjához β szögben hajlik. Határozzátok meg a henger oldalfelszínét, ha az alaplap sugara r!

A) $2\pi r^2 \cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$; C) $2\pi r^2 \sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$;

B) $2\pi r^2 \cos\alpha\operatorname{tg}\beta$; D) $2\pi r^2 \sin\alpha\operatorname{tg}\beta$.

5. A kúp alkotója az alaplap síkjával 60° szöget zár be, a kúp magassága $9\sqrt{3}$ cm. Mivel lesz egyenlő a kúp alkotójának a hossza?

A) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm; B) $18\sqrt{3}$ cm; C) 13,5 cm; D) 18 cm.

6. A kúp alapjának sugara 12 cm, tengelymetszetének csúcsnál lévő szöge 120°. Határozzátok meg a kúp magasságát!

A) $6\sqrt{3}$ cm; B) $8\sqrt{3}$ cm; C) $12\sqrt{3}$ cm; D) $4\sqrt{3}$ cm.

7. Számítsátok ki a kúp oldalfelszínét, ha alaplapjának átmérője 12 cm, alkotója 17 cm!

A) 102π cm^2; B) 204π cm^2; C) 34π cm^2; D) 68π cm^2.

8. A kúp oldalfelszíne 240π cm^2. Mivel egyenlő a kúp magassága, ha alaplapjának sugara 12 cm?

A) 12 cm; B) 16 cm; C) 20 cm; D) 2 cm.

9. A henger alaplapjának sugara 8 cm, a tengelyével párhuzamosan síkot fektettek, amely az alaplapot egy húrban metszi, és ez egy 120°-os ívet fog át. Határozzátok meg a metszet területét, ha annak átlója 16 cm!

A) 64 cm^2; B) $64\sqrt{3}$ cm^2; C) 16 cm^2; D) $16\sqrt{3}$ cm^2.

10. A kúp alapjában egy húrt fektettek, amely az alaplap középpontjából α szögben látszik, a kúp csúcsából pedig β szög alatt. Határozzátok meg a kúp oldalfelszínét, ha alaplapjának sugara r!

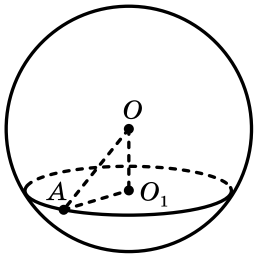
A) $\pi r^2 \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$; C) $\dfrac{\pi r^2 \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$;

B) $\pi r^2 \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$; D) $\dfrac{\pi r^2 \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$.

11. A derékszögű háromszög befogója 6 cm, a mellett lévő szög 30°. Határozzátok meg annak a kúpnak az oldalfelszínét, amely e háromszög adott befogója körüli forgatásával keletkezik!

A) $24\neq\sqrt{3}$ cm^2; B) $12\neq\sqrt{3}$ cm^2; C) 24π cm^2; D) 12π cm^2.

12. Az ábrán látható O középpontú gömbben a középponttól 12 cm-re egy metszet van szerkesztve, amelynek középpontja O_1. Határozzátok meg a gömb sugarát, ha a metszet sugara 9 cm!



A) 10 cm; C) 15 cm;
B) 12 cm; D) 21 cm.

13. A gömb sugarának végpontján át egy metszetet szerkesztettek, amely 45°-os szöget zár be vele. Határozzátok meg a gömb sugarát, ha a metszet területe 36π cm^2!

A) $6\sqrt{2}$ cm; C) $12\sqrt{2}$ cm;
B) 6 cm; D) 12 cm.

14. A derékszögű háromszög átfogója c, egyik hegyesszöge α. Határozzátok meg annak a kúpnak az oldalfelszínét, amelyet a háromszög adott szöggel szemközti befogója körül való forgatása által kapunk!

A) $\dfrac{\pi c^2}{\sin\alpha}$; B) $\pi c^2 \sin\alpha$; C) $\pi c^2 \cos\alpha$; D) $\dfrac{\pi c^2}{\cos\alpha}$.

15. A kúp két alkotóján át, amelyek között a szög 45°, metszetet szerkesztettek. Határozzátok meg a metszet területét, ha a kúp magassága h és az alkotóval 30°-os szöget zár be!

A) $\dfrac{h^2\sqrt{6}}{6}$; B) $\dfrac{h^2\sqrt{2}}{6}$; C) $\dfrac{2h^2\sqrt{2}}{3}$; D) $\dfrac{h^2\sqrt{2}}{3}$.

16. Az α sík az A pontban érinti az O középpontú gömböt. A B pont az α síkra illeszkedik, és a gömb középpontjától 10 cm távolságra van. Határozzátok meg az AB szakasz hosszát, ha a gömb sugara 6 cm!

A) 8 cm; B) 6 cm; C) $2\sqrt{34}$ cm; D) 2 cm.

17. A henger kiterített oldalfelszínének átlója $4\pi\sqrt{5}$ cm, alapjának sugara 2 cm. Határozzátok meg a henger magasságát!

A) 9π cm; B) 8π cm; C) 9 cm; D) 8 cm.

18. Az egyik henger oldalfelszíne 28 cm^2. Mivel egyenlő a másik henger oldalfelszíne, ha az adott hengerek alapjainak sugarai egyenlők, és a második henger magassága 2-szer kisebb, mint az első hengeré!

A) 14 cm^2; B) 7 cm^2; C) 56 cm^2; D) nem megállapítható.

AZ 5. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

A henger oldalfelszíne

A henger S_o oldalfelszínének a henger kiterített oldalfelszíne területét nevezzük.

$S_o = 2\pi rh,$ ahol S_o – a henger oldalfelszíne, r – a henger alapjának sugara, h – a henger magasságának hossza.

A henger teljes felszíne

$S_{tf} = S_o + 2S_a$, ahol S_{tf} – a henger teljes felszíne, S_a – a henger alapjának területe.

$S_{tf} = 2\pi rh + 2\pi r^2$.

A kúp oldalfelszíne

A kúp S_{o} oldalfelszínének nevezzük a kúp kiterített oldalfelszínének területét.

$S_o = \pi rl,$ ahol S_o – a kúp oldalfelszíne, r – a kúp alapjának sugara, l – a kúp alkotójának hossza.

A kúp teljes felszíne

$S_{tf} = S_o + S_a$, ahol S_{tf} – a kúp teljes felszíne, S_a – a kúp alapjának területe.

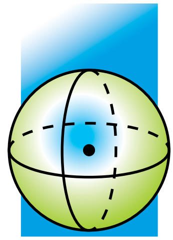
$S_{tf} = \pi rl + \pi r^2$.

A gömbfelszín és a sík kölcsönös helyzete

Ha a gömbfelszín középpontja és a sík közötti távolság kisebb a gömbfelszín sugaránál, akkor a gömbfelszínnek és a síknak a metszete körvonal.

Azt a síkot, amelynek a gömbfelszínnel csak egy közös pontja van, a gömbfelszín érintősíkjának nevezzük. Ezt a közös pontot érintési pontnak nevezzük. Ebben az esetben a gömb középpontja és a sík közötti távolság a gömb sugarával egyenlő.

A gömb érintősíkja merőleges arra a sugárra, melynek a végpontja az érintési pont lesz.



6.§. A TESTEK TÉRFOGATAI. A GÖMB FELSZÍNE

Ebben a paragrafusban részletesebben megismerkedtek a már ismert térfogat fogalmával, megtanuljátok a soklapok és a forgástestek térfogatának meghatározására szolgáló képleteket. Megismerkedtek a gömbfelszín meghatározásának módszereivel.

22. A testek térfogata. A hasáb és a gúla térfogatának képletei

Az olyan mennyiséggel, mint a térfogat, gyakran találkoztatok a hétköznapi életben: az üdítődoboz térfogata, az üvegedény térfogata, az elfogyasztott vízmennyiség térfogata vagy az üzemanyag mennyisége a mérőeszközön (22.1. ábra). A térfogat fogalmával már az 5. osztályban megismerkedtetek. Ezenkívül ezt a fogalmat már sokszor alkalmaztátok, például a fizika- és a kémiaórákon is.

22.1. ábra

A síkmértan elsajátítása során gyakran találkoztatok már olyan mértani mennyiséggel, mint a terület fogalma. A térmértanban a test térfogata hasonló a síkmértani alakzat területének fogalmához. Észrevenni ezt a hasonlóságot nem nehéz, ha összehasonlítjuk a sokszög területének a 8. osztályban tanult meghatározásával.

Meghatározás. **A *test térfogatának* nevezzük azt a pozitív mennyiséget, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:**

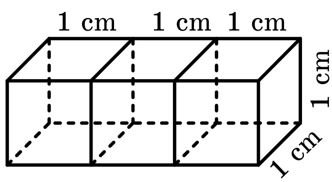
1) **az egybevágó testek térfogatai egyenlők;**
2) **ha a test több más testből áll, akkor térfogata egyenlő e testek térfogatainak összegével;**
3) **a térfogat egységén az egységkockát értjük, vagyis olyan kockát, amelynek élei a hosszmértékegységgel egyenlőek.**

A testek térfogatának tanulmányozását a sokszögekkel kezdjük.

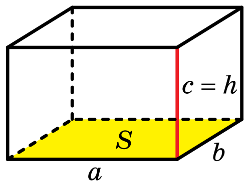
A soklap térfogatának megmérése azt jelenti, hogy összehasonlítjuk a térfogatát az egységkocka térfogatával. Ennek eredményeként megkapjuk a soklap térfogatának számbeli értékét. Ez a szám azt adja meg, hogy az adott test térfogata hányszorosa az egységkocka térfogatának.

Megmutatjuk, hogy a meghatározás alapján, hogyan számítható ki például az 1 cm, 1 cm és 3 cm élekkel rendelkező téglatest térfogata (22.2. ábra).

Az ilyen téglatest feldarabolható három 1 cm-es élű kockára. A térfogat 2. tulajdonsága alapján az adott téglatest térfogata egyenlő három 1 cm élű kocka térfogatával (röviden így írjuk fel: 3 cm^3).



22.2. ábra



22.3. ábra

A testek térfogatának kiszámítása során érdemes képleteket alkalmaznunk, amelyek lehetővé teszik a térfogatuk elemeik alapján történő meghatározását.

Ha például *a téglatest lineáris méretei a, b és c, akkor a V térfogat a következő képlettel számítható ki:*

$$\boxed{V = abc}$$

Az ab szorzat a téglatest alapjának S területe lesz, a c él pedig a h magassága (22.3. ábra). Így a téglatest térfogatának képletét átírhatjuk igy is:

$$\boxed{V = Sh}$$

Ezt a képletet alkalmazhatjuk a hasáb térfogatának kiszámítására is.

22.1. tétel. A h magasságú és S alapterületű hasáb V térfogata a következő képlettel számítható ki:

$$\boxed{V = Sh}$$

A testek térfogatának meghatározása bonyolult feladat. Ezért is tekintették az ókori Görögországban a gúla térfogatának meghatározására szolgáló képletet az antik tudomány legfontosabb eredményének.

22.2. tétel. A h magasságú és S alapterületű gúla V térfogata a következő képlettel számítható ki:

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Sh}$$

Feladat. Az $MABCD$ négyoldalú gúla alapja $ABCD$ téglalap. Az AMB oldallapja merőleges az alaplap síkjára. Határozzátok meg a gúla térfogatát, ha $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm, $MA = MB = 13$ cm!

Megoldás. Meghúzzuk az AMB háromszög (22.4. ábra) MK magasságát. Mivel $AMB \perp ABC$, ezért $MK \perp ABC$. Tehát MK az adott gúla magassága.

Mivel $MA = MB$, ezért az MK szakasz az AMB háromszög oldalfelezője. Ebből következik, hogy $AK = KB = 5$ cm.

Az MKA derékszögű háromszögben:

$$MK = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ (cm)}.$$

Az $ABCD$ téglalap területe 120 cm^2.

Most már meg tudjuk határozni a gúla V térfogatát:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot MK = \frac{1}{3} \cdot 120 \cdot 12 = 480 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Felelet: 480 cm^3. ◄

1. Mit nevezünk a test térfogatának?
2. Mit jelent megmérni a soklap térfogatát?
3. Milyen képlettel határozható meg a téglatest térfogata?
4. Milyen képlettel határozható meg a hasáb térfogata?
5. Milyen képlettel határozható meg a gúla térfogata?

GYAKORLATOK

22.1.° Mivel egyenlő annak a hasábnak a térfogata, amelynek alapterülete 12 cm^2, a magassága 5 cm?

22.2.° Határozd meg a kocka térfogatát, ha átlója $2\sqrt{3}$ cm!

22.3.° Hogyan változik meg a kocka térfogata, ha minden élét 3-szorosára növeljük?

22.4.° Határozzátok meg a szabályos háromoldalú hasáb térfogatát, ha minden éle a-val egyenlő!

22.5.° Határozzátok meg a szabályos hatoldalú hasáb térfogatát, ha minden éle a-val egyenlő!

22.6.° Határozzátok meg a szabályos négyoldalú hasáb térfogatát, amelynek alapéle a, és átlója az alaplaphoz α szögben hajlik!

22.7.° A szabályos háromoldalú hasáb magassága h, oldallapjának átlója pedig az alaplap síkjával α szöget zár be. Határozzátok meg a hasáb térfogatát!

22.8.° A téglatest élei arányosak a 2, 3 és 6 számokkal, átlója 14 cm. Határozzátok meg a téglatest térfogatát!

22.9.° A téglatest lineáris méretei 4 cm, 6 cm és 9 cm. Határozzátok meg annak a kockának az élét, amelynek térfogata egyenlő az adott téglatest térfogatával!

22.10.° A vasúti töltés keresztmetszete trapéz alakú, alsó alapja 15 m, felső alapja 8 m, magassága 3,2 m. Hány köbméter földre van szükség 1 km vasúti töltés megépítéséhez?

22.11.° Az üzemcsarnokban, amely téglatest alakú, a munkás dolgozik. Ahhoz, hogy megfeleljen az egészségügyi követelményeknek, mindegyik munkásra számítva b m^3 levegőnek kell lennie. Milyen h magasságúnak kell lennie az üzemcsarnoknak, ha padlójának területe S m^2?

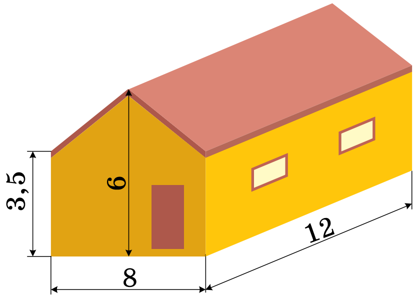
22.12.° Határozzátok meg a fészer térfogatát (22.5. ábra), ha hossza 12 m, szélessége 8 m, a fal magassága 3,5 m, a tetőgerinc magassága 6 m (a fal vastagságát figyelmen kívül kell hagyni)!

22.13.° Határozzátok meg a gúla térfogatát:

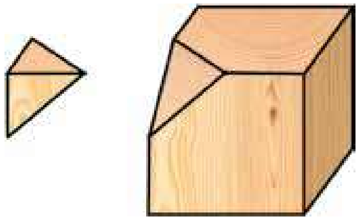
1) ha az alapja négyzet, amelynek oldala 2 cm, a gúla magassága 2 cm;

2) ha az alapja rombusz, amelynek átlói 2 cm és 3 cm, a gúla magassága 10 cm;

3) az alapja háromszög, amelynek oldala 6 cm és 9 cm, a köztük lévő szög 30°, a gúla magassága pedig 12 cm!



22.5. ábra



22.6. ábra

22.14.° Határozzátok meg a gúla magasságát, ha térfogata 20 cm^3, alapterülete pedig 15 cm^2!

22.15.° A gúla alapja téglalap, amelynek oldalhosszaránya 2 : 3 , a gúla magassága 5 cm, térfogata 90 cm^3. Határozzátok meg a gúla alapjának kerületét!

22.16.° Hogyan változik meg a gúla térfogata, ha mindegyik alapélének hosszát 3-szorosára, magasságát pedig 4-szeresére növeljük?

22.17.° A szabályos hatoldalú gúla alapéle 5 cm, oldaléle pedig 13 cm. Határozzátok meg a gúla térfogatát!

22.18.° A szabályos négyoldalú gúla alapéle 4 cm, az alapélénél lévő lapszög 60°. Határozzátok meg a gúla térfogatát!

22.19.° A fából készült kockát, amelynek éle 12 cm, két részre vágták: egy háromoldalú gúlára és egy hétlapú testre (22.6. ábra). Határozzátok meg a hétlapú test térfogatát, ha a metszősík a kocka egy csúcsból induló három felezőpontjára illeszkedik!

22.20.° A szabályos háromoldalú gúla alapéle 6 cm, az oldaléle az alaplap síkjával 45°-os szöget zár be. Határozzátok meg a gúla térfogatát!

22.21.• Az egyenes hasáb alapja rombusz, amelynek oldala 8 cm, szöge pedig 60°. A hasáb kisebbik átlója 17 cm. Határozzátok meg a gúla térfogatát!

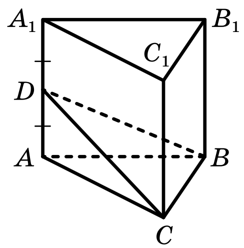
22.22.• A téglatest átlója 12 cm és az alaplap síkjával 30°-os szöget zár be. Alaplapjának átlója az egyik oldalával 60°-os szöget zár be. Határozzátok meg a téglatest térfogatát!

22.23.• Az egyenes hasáb alapja egyenlő szárú trapéz, amelynek alapjai 5 cm és 11 cm, az átlója 10 cm. A hasáb átlója 26 cm. Határozzátok meg a hasáb térfogatát!

22.24.• A ferde hasáb alapja paralelogramma, melynek oldalai 3 cm és 8 cm, szöge pedig 30°. Az oldaléle 12 cm és az alaplappal 45°-os szöget zár be. Határozzátok meg a hasáb térfogatát!

22.25.• A ferde hasáb alapja háromszög, amelynek oldalai $4\sqrt{3}$ cm és 5 cm, a köztük lévő szög 120°. Az oldaléle 20 cm és a hasáb magasságával 60°-os szöget zár be. Határozzátok meg a hasáb térfogatát!

22.26.• A 22.7. ábrán látható $ABCA_1B_1C_1$ egyenes hasáb térfogata V. A D pont az AA_1 él felezőpontja. Határozzátok meg az $ABCD$ gúla térfogatát!



22.7. ábra

22.27.• Határozzátok meg a szabályos négyoldalú gúla térfogatát, ha oldaléle b, és az alaplap síkjával α szöget zár be!

22.28.• Határozzátok meg a szabályos a élű tetraéder térfogatát!

22.29.• Határozzátok meg a szabályos háromoldalú gúla térfogatát, amelynek oldaléle b, és az alaplap síkjával α szöget zár be!

22.30.•• A szabályos négyoldalú hasáb átlója d, és az oldaléllel α szöget zár be. Határozzátok meg a hasáb térfogatát!

22.31.•• A téglatest átlója d, és az alaplap síkjával α szöget, az oldallap síkjával pedig β szöget zár be. Határozzátok meg a téglatest térfogatát!

22.32.•• Határozzátok meg az $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ szabályos hatoldalú hasáb térfogatát, ha az A_1D és A_1E átlói megfelelően 13 cm és 12 cm!

22.33.•• Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ egyenes hasáb alapja $ABCD$ rombusz. Adott, hogy $BAD\angle = \alpha$, $AC = d$. A BD egyenesre és a C_1 pontra síkot fektettek, amely az alaplappal β szöget zár be. Határozzátok meg a hasáb térfogatát!

22.34.•• Az $ABCA_1B_1C_1$ egyenes hasáb alapja az ABC háromszög. Adva van: $ACB\angle = 90°$, $ABC\angle = \beta$, $AB = c$. Az A_1BC sík az alaplap síkjával α szöget alkot. Határozzátok meg a hasáb térfogatát!

22.35.•• Az $ABCA_1B_1C_1$ ferde hasáb alapja az ABC egyenlő oldalú háromszög, amelynek oldala a. Az A_1 csúcs egyenlő távolságra van az ABC háromszög csúcsaitól, az AA_1 él az alaplap síkjával α szöget alkot. Határozzátok meg a hasáb térfogatát!

**22.36.•• ** Az $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ferde hasáb alapja $ABCD$ négyzet, melynek oldala a, a ferde hasáb oldaléle $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. A hasáb A_1 csúcsa egyenlő távolságra van az $ABCD$ négyzet csúcsaitól. Határozzátok meg a hasáb térfogatát!

22.37.•• A gúla alapja háromszög, amelynek oldalai $3\sqrt{10}$ cm, $3\sqrt{10}$ cm és 6 cm. A gúla mindegyik oldaléle 13 cm. Határozzátok meg a gúla térfogatát!

22.38.•• A gúla alapja 24 cm és 18 cm oldalú téglalap, és mindegyik oldaléle 25 cm. Határozzátok meg a gúla térfogatát!

22.39.•• A gúla alapja derékszögű háromszög, amelynek befogója a, és a mellette lévő szög α. Mindegyik oldaléle az alaplap síkjához β szögben hajlik. Határozzátok meg a gúla térfogatát!

22.40.•• A gúla alapja egyenlőszárú háromszög, amelynek a szára b. Az alaplap szárai közötti szög β. Mindegyik oldaléle az alaplap síkjához α szögben hajlik. Határozzátok meg a gúla térfogatát!

22.41.•• A gúla alapja rombusz, amelynek oldala a, egyik szöge α. A gúla alapjainál lévő lapszögek β-val egyenlők. Határozzátok meg a gúla térfogatát!

22.42.•• A gúla alapja trapéz, amelynek párhuzamos oldalai 4 cm és 10 cm. A gúla alapéleinél lévő lapszögek 45°-osak, a gúla magassága $2\sqrt{5}$ cm. Határozzátok meg a gúla térfogatát!

22.43.•• A gúla alapja háromszög, amelynek oldalai 6 cm, 25 cm és 29 cm. A gúla alapéleinél lévő lapszögek 60°-osak. Határozzátok meg a gúla térfogatát!

22.44.•• A gúla alapja egyenlő oldalú háromszög, amelynek oldala a. Két oldallapja merőleges az alapra, a harmadik pedig az alaplap síkjához 60°-os szögben hajlik. Határozzátok meg a gúla térfogatát!

22.45.•• A gúla alapja egyenlő oldalú háromszög, amelynek oldala a. Az egyik oldallapja merőleges az alapra, a másik kettő pedig az alaplap síkjához 45°-os szögben hajlik. Határozzátok meg a gúla térfogatát!

22.46.•• Az $ABCDM$ gúla alapja az $ABCD$ négyzet. Az AMB oldallap merőleges az alaplap síkjára, $MA = MB$, az M pont a CD egyenestől 10 cm-re van. Határozzátok meg a gúla térfogatát, ha magassága 8 cm!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

22.47. A paralelogramma magasságai 8 cm és 12 cm, a köztük lévő szög 60°. Határozzátok meg a paralelogramma területét!

22.48. A derékszögű trapéz nagyobbik átlója a tompaszög csúcsából bocsátott magasságot 9 cm és 15 cm-es szakaszokra osztja, a trapéz nagyobbik szára egyenlő a kisebbik alapjával. Határozzátok meg a trapéz területét!

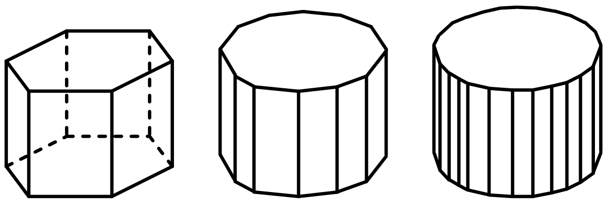
22.49. Adottak az $\vec{m}(3; -2; p)$ és $\vec{n}(-9; 6; -12)$ vektorok.

1) A p mely értéke mellett lesznek az $\vec{m}$ és $\vec{n}$ vektorok kollineárisak?

2) A p mely értéke mellett lesz az $\vec{m}$ vektor merőleges a z tengelyre?

23. Forgástestek térfogata. A gömb felszíne

A 23.1. ábrán 6 oldalú, 12 oldalú és 24 oldalú szabályos hasábok láthatók, mindegyik alapterület S-sel egyenlő, magasságuk h. Akkor mindegyik hasáb térfogata Sh lesz.



23.1. ábra

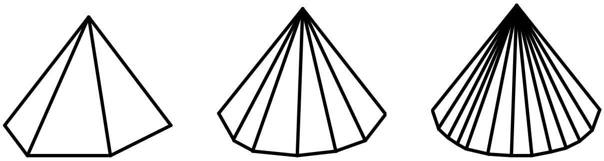
Figyeljük meg, hogy minél több az alapélek száma, annál jobban hasonlít a hasáb a hengerre. Ezek alapján igaz lesz a következő tétel.

23.1. tétel. Az S alapterületű és h magasságú henger V térfogata a következő képlettel határozható meg:

$$\boxed{V = Sh}$$

Ha a henger alapjának sugara r, akkor a képletet a következőképpen írhatjuk át

$$\boldsymbol{V = \pi r^2 h}$$



23.2. ábra

A 23.2. ábrán egy 6 oldalú, 12 oldalú és egy 24 oldalú szabályos gúla látható, amelyek mindegyikének alapterülete S, magassága h. Ekkor mindegyik gúla térfogata: $\frac{1}{3}Sh$.

Figyeljétek meg, hogy minél több a gúla alapjának oldalszáma, annál jobban fog a gúla kúpra hasonlítani. Ebből a gondolatmenetből kiindulva a következő tételt kapjuk.

23.2. tétel. ***Az S alapterületű és h magasságú kúp V térfogatát a következő képlettel számíthatjuk ki:***

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}Sh}$$

Ha a kúp alapja r sugarú kör, az adott képletet ilyen alakban is felírhatjuk:

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

A hengertől és a kúptól eltérően a gömb nem „közelíthető meg" szabályos soklappal, ezért a gömb térfogatának meghatározása másképpen történik. A gömb térfogatának és felszínének meghatározására szolgáló képleteket először a híres ógörög matematikus, Archimédesz vezette le.

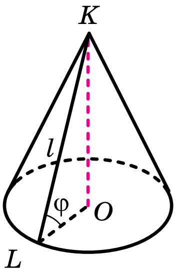
23.3. tétel. ***Az R sugarú gömb V térfogata a következő képlettel számítható ki:***

$$\boldsymbol{V = \frac{4}{3}\pi R^3,}$$

míg az R sugarú gömb S felszíne a következő képlettel határozható meg:

$$\boldsymbol{S = 4\pi R^2}$$

Feladat. Határozzátok meg annak a kúpnak a térfogatát, amelynek alkotója l, és ez az alaplap síkjával φ szöget alkot!



23.3. ábra

Megoldás. A 23.3. ábrán egy kúp látható, amelynek alkotója KL, a hossza l és az alaplap síkjával φ szöget zár be. Legyen az O pont a kúp alapjának középpontja. A KLO derékszögű háromszögben meghatározzuk az alaplap r sugarát és a kúp h magasságát. A következőt kapjuk:

$$r = l\cos\varphi,$$
$$h = l\sin\varphi.$$

A $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ képletet alkalmazva meghatározzuk a kúp térfogatát:

$$V = \frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2\varphi \sin\varphi.$$

Felelet: $\frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2\varphi \sin\varphi$. ◄

1. Milyen képlettel számítható ki a henger térfogata?
2. Milyen képlettel számítható ki a kúp térfogata?
3. Milyen képlettel számítható ki a gömb térfogata?
4. Milyen képlettel számítható ki a gömb felszíne?

GYAKORLATOK

23.1.° Határozzátok meg a henger térfogatát, amelynek alaplapsugara 4 cm, magassága 5 cm!

23.2.° Határozzátok meg a henger magasságát, amelynek térfogata 98π cm^3, alapjának sugara 7 cm!

23.3.° Határozzátok meg a henger alaplapjának sugarát, amelynek térfogata 252π cm^3, magassága 7 cm!

23.4.° Határozzátok meg annak a testnek a térfogatát, amelyet az a és b oldalú téglalap forgatásával kapnak, ha a forgatást a b oldalegyenese körül végzik!

23.5.° A henger magassága H, tengelymetszete pedig négyzet. Határozzátok meg a henger térfogatát!

23.6.° A henger tengelymetszetének átlója 20 cm, ami az alaplap síkjával 30°-os szöget zár be. Határozzátok meg a henger térfogatát!

23.7.° A henger alakú edényt vízzel töltötték meg, majd egy fémtárgyat helyeztek bele. A tárgyat teljesen ellepte a víz. Ekkor a víz szintje az edényben 14 cm-rel felemelkedett, de nem érte el az edény tetejét. Határozzátok meg a fémtárgy térfogatát, ha az edény belső átmérője 20 cm!

23.8.° Határozzátok meg a kúp térfogatát, ha alaplapjának sugara 6 cm, magassága 5 cm!

23.9.° Határozzátok meg a kúp magasságát, ha térfogata 24π cm^3, alaplapjának sugara 3 cm!

23.10.° A kúp térfogata 50π cm^3, a magassága 6 cm. Határozzátok meg a kúp alapjának sugarát!

23.11.° Egy kúp alakú homokkupac alapjának sugara 2,1 m, alkotója 3,5 m. Hány tonna homok van a kupacban, ha 1 m^3 homok tömege 3 t? Az eredményt egyesekre kerekítsétek!

23.12.° A kúp tengelymetszete egyenlő oldalú háromszög, alapjának sugara R. Határozzátok meg a kúp térfogatát!

23.13.° Határozzátok meg a kúp térfogatát, amelynek magassága 4 cm, alkotója és az alaplap közötti szög 30°!

23.14.° A derékszögű háromszög átfogója 10 cm, egyik szöge 60°. Határozzátok meg annak a testnek a térfogatát, amelyet e háromszög forgatása által kapunk, ha a forgatást az adott szög melletti befogóját tartalmazó egyenes mentén végezzük!

23.15.° A derékszögű háromszög átfogója 13 cm, egyik befogója 5 cm. Határozzátok meg annak a testnek a térfogatát, amelyet a háromszög forgatása által kapunk, ha a forgatást az adott befogóját tartalmazó egyenes mentén végezzük!

23.16.° Határozzátok meg a gömb térfogatát, amelynek sugara 3 cm!

23.17.° Bizonyítsátok be, hogy két gömb térfogata úgy aránylik egymáshoz, mint sugaraik köbei!

23.18.° Hányszorosára kell növelni a gömb sugarát, hogy a térfogata 5-szörösére növekedjen?

23.19.° Két gömb térfogata úgy aránylik egymáshoz, mint 8 : 125. Határozzátok meg sugaraik arányát!

23.20.° A gömbfelszín sugara 5 cm. Mivel egyenlő a területe?

23.21.° Határozzátok meg a gömbfelszín sugarát, ha a területe 256π cm^2!

23.22.° A gömb sugarát 7-szeresére növelték. Hogyan változik meg felszínének a területe?

23.23.° Hogyan kell megváltoztatni a gömb sugarát, hogy felszínének területe harmadára csökkenjen?

23.24.° Két gömb térfogatainak aránya 27 : 125. Hogyan aránylanak egymáshoz a gömbök felszínei?

23.25.• A 10 mm átmérőjű alumíniumvezeték súlya 16,3 kg. Az alumínium sűrűsége 2600 kg/m^3. Hány méter hosszú a vezeték? Az eredményt egyesekre kerekítsétek!

23.26.• Az ólomcső falának vastagsága 4 mm, belső átmérője 33 mm. Az ólom sűrűsége 11 400 kg/m^3. Hány kilogramm a cső tömege, ha hossza 15 m? Az eredményt egyesekre kerekítsétek!

23.27.• A henger alsó lapjában húr van húzva, ívének fokmértéke α, $0° < \alpha < 180°$. A szakasz, amely a felső alaplap középpontját az adott húr felezőpontjával köti össze, az alaplap síkjával β szöget alkot. Határozzátok meg a henger térfogatát, ha magassága m!

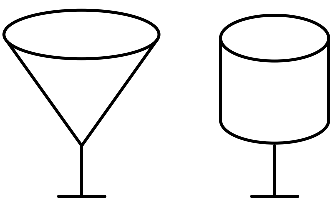
23.28.• A henger alsó alapjában húr van húzva, amely ennek a körlapnak a középpontjából 90°-os szögben látszik, a felső alap középpontjából pedig 60°-os szögben. Határozzátok meg a henger térfogatát, ha alaplapjának sugara R!

23.29.• A kúp tengelymetszetének csúcsánál lévő szöge α, alaplapjának középpontja és alkotója közötti távolság m. Határozzátok meg a kúp térfogatát!

23.30.• A kúp alapjában lévő húr hossza a, ívének fokmértéke α, $0° < \alpha < 180°$. A kúp alkotója és alaplapja közötti szög β. Határozzátok meg a kúp térfogatát!

23.31.• A kúp alapjában lévő húr olyan ív végpontjait köti össze, amelynek fokmértéke 60°. A kúp csúcsát a húr felezőpontjával összekötő szakasz az alaplap síkjával 60°-os szöget zár be. A kúp magassága $\sqrt{3}$ cm. Határozzátok meg a kúp térfogatát!

23.32.• A kúp alakú, tele edényből a vizet olyan henger alakú edénybe öntötték át, amelynek magassága 8 cm és alapjának átmérője 12 cm (23.4. ábra). A henger alapjának átmérője 8 cm. Milyen legyen a henger alakú edény legkisebb magassága, hogy ne folyjon ki belőle víz?



23.4. ábra

23.33.• A szénakazal henger alakú, teteje kúp alakú. Alapjának sugara 2,5 m, magassága 4 m, henger alakú résznek magassága 2,2 m. A széna sűrűsége 30 kg/m^3. Hány tonna széna van egy ilyen kazalban? Az eredményt tizedekre kerekítsétek!

23.34.• Egy 15 cm sugarú, gömb alakú golyót beolvasztották, és a kapott fémolvadékból 3 cm sugarú gömböket öntöttek. Hány gömböt öntöttek? Az olvasztás során keletkező fémveszteség elhanyagolható.

23.35.• Három fémgolyót, amelyek sugarai 3 cm, 4 cm és 5 cm beolvasztották, és az olvadékból egy golyót öntöttek. Milyen lesz a kapott golyó sugara? Az olvasztás során keletkező fémveszteség elhanyagolható.

23.36.• A gömb nagykörlapjának területe S-sel egyenlő. Határozzátok meg az adott gömb felszínét!

23.37.• A sík a gömb középpontjától 7 cm-re helyezkedik el, felszínét körvonalban metszi, amelynek hossza 6π cm. Határozzátok meg a gömbfelszín területét!

23.38.• A gömb síkmetszetének területe 24π cm^2, a metsző sík távolsága a gömb középpontjától 4 cm. Határozzátok meg a gömbfelszín területét!

23.39.• Hány méter hosszú 1 m széles szövetre van szükség egy olyan léggömb elkészítéséhez, amelynek sugara 2 m, ha részeinek összevarrásánál 10% a szövetveszteség? Az eredményt tizedekre kerekítsétek!

23.40.• Milyen esetben kell több nyersanyag: ha egy 6 cm átmérőjű gömböt kell nikkelezni, vagy ha 8 darab 1 cm átmérőjű gömböt nikkelezünk be?

23.41.•• A henger tengelyével párhuzamosan metszetet szerkesztettek, a metszet síkjának távolsága a henger tengelyétől 12 cm. A metszet átlója $10\sqrt{5}$ cm, a henger alapjának sugara 13 cm. Határozzátok meg a henger térfogatát!

23.42.•• A henger tengelyével párhuzamos sík alaplapjának köréből egy körívet vág le, amelynek a fokmértéke α, 0° < α < 180°. A kapott metszet átlója a henger tengelyével β szöget zár be, és d távolságra van tőle. Határozzátok meg a henger térfogatát!

23.43.•• Határozzátok meg annak a testnek a térfogatát, amelyet egy 10 cm, 17 cm és 21 cm oldalú háromszög forgatása által kapnak, ha a forgatást a leghosszabb oldal körül végzik!

23.44.•• Az 1 cm és 25 cm alapú egyenlő szárú trapézt a nagyobbik alapját tartalmazó egyenes körül forgatják. Határozzátok meg a kapott forgástest térfogatát, ha tudjuk, hogy az adott trapézba kör írható!

23.45.•• Határozzátok meg annak a testnek a térfogatát, amelyet egy derékszögű háromszög forgatásával kapunk, ha a forgatást a háromszög átfogóját tartalmazó egyenes körül végezzük, és adott a háromszög befogója és a mellette lévő β szög!

23.46.•• A gömb középpontjának egyik oldalán lévő két párhuzamos metszet területe 400π cm^2 és 49π cm^2. Határozzátok meg a gömb felszínét, ha a metszeteket tartalmazó síkok közötti távolság 9 cm!

23.47.•• A gömb középpontjának különböző oldalain lévő két párhuzamos metszet területe 9π cm^2 és 25π cm^2. Határozzátok meg a gömb felszínét, ha a metszeteket tartalmazó síkok közötti távolság 8 cm!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

23.48. A körbe egy $ABCD$ négyszöget írtak. Az A szög 3-szor nagyobb, mint a C szög, a B szög pedig 5-ször kisebb, mint az A. Határozzátok meg a D szöget!

23.49. Az MKE egyenlő szárú háromszögben $(MK = KE)$ az E szög szögfelezője az MK oldalt a C pontban metszi. Határozzátok meg az MKE háromszög szögeit, ha $KCE\angle = 126°$!

23.50. Az $\vec{a}\,(2; m+1; m+5)$ vektor hossza $2\sqrt{3}$. Kollineáris-e az $\vec{a}$ vektor a $\vec{b}\,(-1; m+4; m+2)$ vektorral?

6. SZÁMÚ FELADAT. *ELLENŐRIZD MAGAD TESZTELÉSSEL!*

1. A kocka élét harmadára csökkentették. Hányszorosan csökkent a térfogata?

A) 3-szorosan; B) 6-szorosan; C) 9-szorosan; D) 27-szeresen.

2. A kocka lapjának átlója a. Mivel egyenlő a kocka térfogata?

A) $\frac{a^3}{8}$; B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$; C) $\frac{a^3}{9}$; D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$.

3. Számítsátok ki a szabályos háromoldalú hasáb térfogatát, amelynek alapéle 20 cm, magassága 9 cm!

A) $300\sqrt{3}$ cm^3; B) 300 cm^3; C) 900 cm^3; D) $900\sqrt{3}$ cm^3.

4. Számítsátok ki a hasáb térfogatát, amelynek alapja 6 cm és 4 cm-es oldalú és 45°-os szögű paralelogramma, a hasáb magassága $7\sqrt{2}$ cm!

A) 168 cm^3; B) 84 cm^3; C) 56 cm^3; D) 70 cm^3.

5. Az egyenes hasáb alapja derékszögű háromszög, amelynek átfogója c, szöge 30°. Az adott szöggel szemközti befogót tartalmazó oldallap átlója az alaplap síkjával 60°-os szöget alkot. Határozzátok meg a hasáb térfogatát!

A) $\frac{3c^3}{16}$; B) $\frac{3c^3}{8}$; C) $\frac{3c^3\sqrt{3}}{16}$; D) $\frac{3c^3\sqrt{3}}{8}$.

6. Számítsátok ki a gúla térfogatát, ha az alapja rombusz, amelynek 10 cm és 18 cm az átlói, a gúla magassága pedig 20 cm!

A) 1800 cm^3; B) 600 cm^3; C) 1200 cm^3; D) 300 cm^3.

7. A szabályos négyoldalú gúla alapéle a, átlómetszete egyenlő oldalú háromszög. Határozzátok meg a gúla térfogatát!

A) $\frac{a^3}{3}$; B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$; C) $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$; D) $\frac{a^3}{6}$.

8. A gúla alapja téglalap, amelynek oldalai 6 cm és 8 cm. Mindegyik oldaléle az alaplap síkjával 60°-os szöget alkot. Határozzátok meg a térfogatát!

A) $240\sqrt{3}$ cm^3; B) 160 cm^3; C) 80 cm^3; D) $80\sqrt{3}$ cm^3.

9. A gúla alapja 39 cm, 39 cm és 30 cm oldalú háromszög. Az alapélénél lévő lapszög 45°. Határozzátok meg a térfogatát!

A) 900 cm^3; B) 600 cm^3; C) 1800 cm^3; D) 1200 cm^3.

10. Számítsátok ki a henger térfogatát, amelynek tengelymetszete 8 cm oldalú négyzet!

A) 64π cm^3; B) 96π cm^3; C) 128π cm^3; D) 512π cm^3.

11. Mivel egyenlő a henger alapjának sugara, melynek térfogata 36π cm^3, magassága 4 cm?

A) 9 cm; B) 3 cm; C) 6 cm; D) $2\sqrt{3}$ cm.

12. A kúp magassága 9 cm, térfogata 6π cm^3. Mivel egyenlő a kúp alapjának területe?

A) 2 cm^2; B) 2π cm^2; C) 3π cm^2; D) 6 cm^2.

13. A henger és a kúp alapjainak sugarai egyenlők, a henger magassága 8 cm, a kúp magassága 6 cm. Határozzátok meg a henger és a kúp térfogatainak az arányát!

A) 4 : 3; B) 1 : 1; C) 4 : 1; D) 3 : 1.

14. A kúp teljes felszíne 200π cm^2, alkotója 17 cm. Határozzátok meg a kúp térfogatát!

A) 960π cm^3; B) 320π cm^3; C) 480π cm^3; D) 120π cm^3.

15. A kúp alapjában egy 12 cm-es húrt húztak, amely az alaplap középpontjából 120°-os szögben látszik. Határozzátok meg a kúp térfogatát, ha alkotója 8 cm!

A) $64\pi\sqrt{3}$ cm^3; B) $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}$ cm^3; C) 192π cm^3; D) 64π cm^3.

16. Számítsátok ki a 3 cm sugarú gömb térfogatát!

A) 36π cm^3; B) 9π cm^3; C) 108π cm^3; D) 54π cm^3.

17. Határozzátok meg két gömbfelszín arányát, ha sugarai 5 cm és 10 cm!

A) 1 : 5; B) 1 : 2; C) 1 : 8; D) 1 : 4.

18. Mivel elegyenlő a gömbfelszín sugara, ha területe 100π cm^2?

A) 100 cm; B) 50 cm; C) 5 cm; D) 20 cm.

A 6. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

A test térfogata

A test térfogatának azt a pozitív számot nevezzük, amely a következő tulajdonsággal rendelkezik:

1) egybevágó testeknek a térfogatai egyenlők;
2) ha a test több más testből áll, akkor a térfogata egyenlő ezen testek térfogatainak az összegével;
3) a térfogat egysége az egységkocka térfogata, vagyis olyan kocka térfogata, amelynek méretei a hosszegységek.

A hasáb térfogata

$V = Sh$, ahol V – a hasáb térfogata, S – a hasáb alapterülete, h – a hasáb magassága.

A gúla térfogata

$V = \frac{1}{3}Sh$, ahol V – a hasáb térfogata, S – a hasáb alapterülete, h – a hasáb magassága.

A henger térfogata

$V = \pi r^2 h$, ahol V – a henger térfogata, r – a henger alapjának sugara, h – a henger magassága.

A kúp térfogata

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, ahol V – a kúp térfogata, r – a kúp alapjának sugara, h – a kúp magassága.

A gömb térfogata

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, ahol V – a gömb térfogata, R – a gömb sugara.

A gömb felszíne

$S = 4\pi R^2 h$, ahol S – a gömb felszíne, R – a gömb sugara.

7.§. A MATEMATIKA ÖSSZEFOGLALÓ ISMÉTLÉSE

24. Feladatok az algebra összefoglaló ismétléséhez

A természetes számok oszthatósága. Oszthatósági szabályok

24.1. A 24, 75, 83, 378, 573, 898 számok közül melyek oszthatók: **1)** 2-vel; **2)** 3-mal?

24.2. A 28, 85, 108, 135, 240, 396 számok közül melyek oszthatók: **1)** 5-tel; **2)** 9-cel?

24.3. Határozzátok meg a következő számok legnagyobb közös osztóját: **1)** 24 és 42; **2)** 18 és 30; **3)** 128 és 192; **4)** 328 és 624!

24.4. Határozzátok meg a következő számok legkisebb közös többszörösét: **1)** 16 és 32; **2)** 9 és 14; **3)** 18 és 12; **4)** 16 és 24!

24.5. A 400* felírásban a csillagot helyettesítsétek olyan számjeggyel, hogy a kapott szám a **1)** 2; **2)** 5; **3)** 9; **4)** 3 többszöröse legyen! Vizsgáljátok meg az összes esetet!

24.6. Két kétjegyű szám osztásakor az eredmény 9, és a maradék 8. Mivel egyenlő az osztandó?

24.7. Marika a 40. számú lakásban él egy ötszintes házban. Minden lépcsőházban mindegyik szinten 3 lakás van, sorszámaik növekvő sorrendben vannak feltüntetve: az első – balra van, a második középen, a harmadik pedig jobbra.
1) Milyen a sorszáma Marika lépcsőházának?
2) Hányadik szinten lakik Marika?
3) Hol van a lakása: balra, középen vagy jobbra?

24.8. Milyen szám lesz az osztója bármilyen természetes számnak?

24.9. A következő számok közül melyik osztható 3-mal, de nem osztódik 2-vel: 4 025, 7 540, 2 754, 6 225?

24.10. Hány kétjegyű szám létezik, amely többszöröse az **1)** 5-nek; **2)** 9-nek; **3)** 7-nek?

24.11. A könyveket egyenlően szét lehet osztani 12 polcra vagy 8 polcra. Hány könyv van, ha a könyvek száma több mint 100, de kevesebb, mint 140?

24.12. Az almákat 12 csomagba vagy 16 csomagba rakhatjuk szét. Hány almánk van, ha ismeretes, hogy 80-nál több, de 120-nál kevesebb?

24.13. Melyik legkisebb természetes számot kell hozzáadni a 826 számhoz, hogy a kapott összeg osztható legyen 3-mal és 10-zel is?

24.14. A kertben almafák és meggyfák nőnek, almafából 3-szor több van, mint meggyfából. Melyik számmal lehet egyenlő a kert összes fáinak a száma?

1) 18; 2) 20; 3) 21; 4) 25.

24.15. Mivel egyenlő az $(5n + 8) - (5 - 2n)$ kifejezés 7-tel való osztásának maradéka, ha n – bármilyen természetes szám?

24.16. Minden csokorban 3 piros és 4 fehér szegfűnek kell lennie. Menynyi az a legnagyobb csokorszám, amit 36 szál piros és 45 szál fehér szegfűből készíthetünk?

24.17. Melyik egy és ugyanazt a számjegyet kell mindegyik csillag helyére tenni a **25** felírásban, hogy a kapott szám 6 többszöröse legyen?

Racionális számok és a velük való műveletek

24.18. Írjátok fel csökkenő sorrendben a következő számokat:

1) $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{13}{15}$; 2) $\frac{11}{16}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{5}{12}$!

24.19. Határozzátok meg az összes olyan c természetes számot, amelyekre teljesül a következő egyenlőtlenség:

1) $\frac{6}{11} < \frac{c}{11} < 1$; 2) $\frac{2}{9} < \frac{c}{18} < \frac{5}{6}$!

24.20. Határozzátok meg az összes olyan x természetes számot, amelyekre teljesül a következő egyenlőtlenség: $\frac{x}{9} < \frac{22}{45}$!

24.21. Hány olyan tört létezik:

1) amelynek a nevezője 24, és amelyek nagyobbak, mint $\frac{3}{8}$, de kisebbek, mint $\frac{2}{3}$;

2) amelynek a nevezője 18, és amelyek nagyobbak, mint $\frac{7}{9}$, de kisebbek, mint 1;

3) amelynek a nevezője 28, és amelyek nagyobbak, mint $\frac{3}{7}$, de kisebbek, mint $\frac{4}{7}$?

24.22. Két város közötti távolságot a személygépkocsi 5 óra alatt teszi meg, a tehergépkocsi pedig 8 óra alatt. Melyik gépkocsi tesz meg nagyobb távolságot: a személygépkocsi 3 óra alatt, vagy a tehergépkocsi 5 óra alatt?

24.23. Hány olyan valódi tört létezik, amelynek nevezője 12?

24.24. Hány olyan áltört létezik, amelynek nevezője 10?

24.25. Melyik intervallumba fog esni a $\frac{10}{15}$ **:** szám:

1) (0; 0,25); 2) (0,25; 0,5); 3) (0,5; 0,75); 4) (0,75; 1)?

24.26. Számítsátok ki a kifejezések értékeit:

1) $\frac{9}{11}-\frac{3}{7}$; 4) $\frac{3}{16}+\frac{7}{24}-\frac{5}{8}$; 7) $4\frac{7}{30}-1\frac{11}{20}$;

2) $\frac{11}{16}-\frac{9}{32}$; 5) $2\frac{3}{4}+6\frac{7}{10}$; 8) $\frac{5}{7}-0{,}6$;

3) $\frac{14}{15}-\frac{9}{10}$; 6) $5\frac{2}{9}-2\frac{5}{7}$; 9) $0{,}35+\frac{8}{15}$!

24.27. Számítsátok ki a kifejezések értékeit:

1) $1\frac{3}{25}\cdot 2\frac{1}{7}-1\frac{8}{9}\cdot\frac{27}{170}$; 4) $(-5{,}16+5{,}02)\cdot(2{,}5-4)$;

2) $\left(9-2\frac{1}{7}\cdot 3\frac{1}{9}\right)\cdot\frac{27}{35}$; 5) $\frac{5}{32}:\frac{5}{12}-3\frac{1}{4}:1\frac{2}{11}$;

3) $\left(5\frac{1}{16}-1\frac{1}{8}\right)\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{14}\right)$; 6) $\left(7-1\frac{5}{9}:\frac{7}{24}\right):\left(-\frac{25}{36}\right)$!

24.28. A következő törtek közül melyik nem alakítható véges tizedes törté:

1) $\frac{11}{16}$; 2) $\frac{24}{600}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{18}{125}$?

24.29. Az egyik traktoros a mezőt 12 óra alatt veti be, a másik 8 óra alatt. A mező hányad részét vetik be együtt dolgozva 3 óra alatt?

24.30. Az üzletben 540 kg gyümölcs van, ennek $\frac{4}{9}$-e alma, a maradék pedig körte. Hány kilogramm körte van ebben az üzletben?

24.31. Három nap alatt 105 számítógépre telepítettek antivírus programot. Az első napon a komputerek $\frac{3}{7}$-ére, a második napon a maradék $\frac{7}{12}$-ére. Hány számítógépre telepítették fel a programot a harmadik napon?

24.32. A $27\frac{1}{2}$ kg cukrot szét kell mérni $\frac{3}{4}$ kg-os csomagokba. Hány darab teljes csomag cukrot kapnak?

24.33. Legkevesebb hány darab 0,3 l-es üveg szükséges 4 l méz szétöntéséhez?

24.34. Az egyik szobafestő a matematika szaktantermet 48 óra alatt festette ki, a másik 96 óra alatt. Hány óra alatt festik ki a szaktantermet, ha együtt dolgoznak?

24.35. Két munkás együtt dolgozva egy munkát 6 óra alatt végez el. Az egyik, ha egyedül dolgozik, ezt a munkát 10 óra alatt fejezi be. Hány óra alatt végzi el a munkát a második munkás egyedül?

Arányos mennyiségek. Százalékszámítás

24.36. A kislány a nála lévő pénzért 18 egyforma füzetet tud venni. Hány füzetet tudna vásárolni, ha: 1**)** a füzet ára 2-szeresére csökkenne; 2**)** a füzet 1,5-szeresére drágulna?

24.37. 12 m selyemből 8 egyforma blúzt varrtak. Hány blúzt lehet varrni 18 méter selyemből?

24.38. Hat egyforma markológép együtt dolgozva 18 óra alatt vájt ki egy gödröt. Hány óra alatt váj ki 4 markológép együtt két gödröt?

24.39. Tudott, hogy 50 kg lisztből 70 kg kenyér süthető. Hány kilogramm kenyér készíthető 150 kg lisztből? Hány kilogramm liszt szükséges 14 kg kenyér sütéséhez?

24.40. Uborkával a kert $\frac{1}{3}$-da van bevetve, paradicsommal a 30%-a. Melyik zöldségből, uborkából vagy paradicsomból van nagyobb terület beültetve a kertben?

24.41. A megvett füzetek 20%-a négyzetrácsos, a többi vonalas. Hányszor több vonalas füzet van, mint négyzetrácsos?

24.42. Az ötvözet 9%-a cink. Hány kilogramm cink van 270 kg ötvözetben?

24.43. Az áru árát először 50%-kal felemelték, majd 50%-kal csökkentették. Emelkedett vagy csökkent az áru ára az eredeti árhoz képest?

24.44. Az áru árát először 20%-kal csökkentették, majd 30%-kal felemelték. Hogyan, és hány százalékkal változott az eredetihez képest a kétszeres árváltozás után az áru ára?

24.45. A betétes 60 000 hrivnyát tett be két különböző számlára. Az elsőre a bank évi 5% kamatot fizet, a másikra évi 7%-ot. Egy év múlva az 5%-os kamatra betett összeg 1200 hrivnyával többet kamatozott, mint a 7%-os betét. Hány hrivnyát tett be a banki ügyfél mindegyik számlára?

24.46. Összekevertek 50 százalékos és 20 százalékos sóoldatokat, és 600 g 30 százalékos oldatot kaptak. Hány gramm oldatot kevertek össze mindkét fajtából?

24.47. Hány kilogramm 30 százalékos és hány kilogramm 40 százalékos rézöntvényt kell összeolvasztani, hogy 50 kg 36 százalékos öntvényt kapjunk?

24.48. Az első napon a turista 16 km-t tett meg, ami a tervezett útvonalának 40%-a. Határozzátok meg az útvonal hosszát!

24.49. Az öntvény 70% vasat tartalmaz. Mennyi öntvényt kell venni, hogy 84 t vasat kapjunk?

24.50. A moziteremben 480 ülőhely van. A filmet 408 néző nézte végig. A helyek hány százaléka volt foglalt?

24.51. A 200 g 10%-os sóoldathoz 300 g vizet öntöttek. Hány százalékos a sótartalma a kapott oldatnak?

24.52. Az áru ára 1600 hrn-ról 1640 hrn-ra emelkedett. Hány százalékkal nőtt az áru ára?

24.53. Az áru ára 3 200 hrn-ról 2 560 hrn-ra csökkent. Hány százalékkal csökkent az áru ára?

24.54. A betétes a bankba betett 60 000 hrn-t évi 10%-os kamatra. Mennyi pénz lesz a számláján 2 év múlva?

Racionális kifejezések

24.55. Az x_1 és x_2 valamilyen értékei mellett teljesülnek a következő egyenlőségek: $x_1 - x_2 = 7$, $x_1x_2 = 4$. Határozzátok meg ugyanezen x_1 és x_2 értékekre a következő kifejezések értékeit:

1) $x_1x_2^2 - x_1^2x_2$; 2) $x_1^2 + x_2^2$; 3) $(x_1 + x_2)^2$!

24.56. Egyszerűsítsétek a törtet:

1) $\frac{3a}{12b}$; 2) $\frac{8xy}{4xz}$; 3) $\frac{20m^2}{15m^3}$; 4) $\frac{3a^2bc}{21abc^4}$; 5) $\frac{36m^5n^4}{24m^2n^7}$; 6) $\frac{39p^6q^9}{65p^9q^6}$!

24.57. Egyszerűsítsétek a törtet:

1) $\frac{4a+12b}{4a}$; 4) $\frac{6y^2-3y}{4-8y}$; 7) $\frac{7a^2+7a+7}{14a^3-14}$;

2) $\frac{7x-14y}{3x-6y}$; 5) $\frac{4p^2+28pq+49q^2}{49q^2-4p^2}$; 8) $\frac{x^2-7x}{x^2-9x+14}$;

3) $\frac{x^2-25}{2x+10}$; 6) $\frac{a^3-27}{9a-27}$; 9) $\frac{x^2-64}{32+4x-x^2}$!

24.58. Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $\frac{2a+5b}{ab}-\frac{2a-b}{ab}$;

2) $\frac{x^2+8x}{4-x^2}-\frac{4x-4}{4-x^2}$;

3) $\frac{5x+6}{5-x}+\frac{3x+16}{x-5}$;

4) $\frac{36-10x}{(x-6)^2}-\frac{2x-x^2}{(6-x)^2}$!

24.59. Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $\frac{4n+5m}{m}-\frac{6n^2+5m^2}{mn}$;

2) $\frac{a+2}{3a-3}+\frac{3-a}{5a-5}$;

3) $\frac{x-5}{x+5}-\frac{x-1}{x-5}$;

4) $\frac{4b}{3b-24}+\frac{3b}{16-2b}$;

5) $\frac{4}{m^2-36}-\frac{2}{m^2-6m}$;

6) $8-\frac{3a+8c}{c}$;

7) $\frac{m+1}{m-1}-\frac{m^2+1}{m^2-1}$;

8) $\frac{b^2}{2ab+a^2+b^2}+\frac{a-b}{a+b}$;

9) $\frac{3a}{9a^2-1}-\frac{a+2}{3a^2+a}$!

24.60. Végezzétek el a szorzást:

1) $\frac{a^3}{b^4}\cdot\frac{b^2}{a^3}$;

2) $\frac{4m^2}{k^6}\cdot\frac{mk^6}{16}$;

3) $\frac{a}{7b}\cdot 7a$;

4) $20x^{16}\cdot\frac{y^4}{5x^4}$;

5) $\frac{17x^4}{y^8}\cdot\frac{y^6}{34x^7}$;

6) $\frac{8k^9}{9mp}\cdot\frac{81m^2}{56k^6p^2}$!

24.61. Határozzátok meg a hányados értékét:

1) $\frac{14}{a^2}:\frac{28}{a^6}$;

2) $\frac{b^5}{6}:\frac{b^3}{48}$;

3) $\frac{45}{m^8}:\frac{36}{m^7n^2}$;

4) $\frac{6x^7}{y^8}:(36x^7y^2)$;

5) $35m^4:\frac{21m^3}{n^2}$;

6) $\frac{16a^3b^8}{33c^5}:\left(-\frac{12a^2}{55c^6}\right)$!

24.62. Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $\frac{4x+4y}{x^6}\cdot\frac{x^3}{x+y}$;

2) $\frac{24b}{b^2-16}\cdot\frac{b-4}{3b}$;

3) $\frac{8}{m^2-25n^2}\cdot(m-5n)$;

4) $\frac{3c+6}{9c^2-6c+1}\cdot\frac{3c-1}{c+2}$;

5) $\frac{a^2-4a+4}{a+2}:(a-2)$;

6) $(p^2-36k^2):\frac{p+6k}{p}$!

24.63. Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $\left(\frac{m}{m-2}-1\right):\frac{6m}{mn-2n}$;

2) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\frac{a+b}{2ab}$;

3) $\dfrac{6x}{x+2}-\dfrac{x-6}{3x+6}\cdot\dfrac{72}{x^2-6x}$;

4) $\left(a-\dfrac{15a-25}{a+5}\right):\dfrac{a^2-5a}{a+5}$;

5) $\left(\dfrac{m+1}{m-1}-\dfrac{m-1}{m+1}\right):\dfrac{4m}{1-m^2}$;

6) $\left(\dfrac{2a-6}{a^2-4a+4}-\dfrac{a-4}{a^2-2a}\right):\dfrac{a^2-8}{a^3-4a}$!

Algebrai egyenletek. Algebrai egyenletrendszerek

24.64. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\dfrac{x+2}{x^2-4}=0$;

2) $\dfrac{x^2-4}{x+2}=0$;

3) $\dfrac{x+2}{x+2}=1$;

4) $\dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}=0$;

5) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}=0$;

6) $\dfrac{10-4x}{x+9}+\dfrac{6x+8}{x+9}=0$!

24.65. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\dfrac{2x-1}{2x+1}-\dfrac{2x+1}{2x-1}=\dfrac{4}{1-4x^2}$;

2) $\dfrac{x^2+8x}{x+10}=\dfrac{20}{x+10}$;

3) $\dfrac{x^2-4}{x+1}=\dfrac{3x}{x+1}$;

4) $\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{8}{x^2-4}$!

24.66. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $x^4-10x^2+24=0$; 2) $x^4-3x^2-70=0$!

24.67. A b mely értékénél lesz egy megoldása az egyenletnek:

1) $2x^2+8x-b=0$; 2) $5x^2-bx+20=0$?

24.68. Oldjátok meg az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases}2x+y=1,\\7x-3y=23;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}3x-5y=6,\\6x+5y=-3;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}6x+7y=38,\\3x-4y=4!\end{cases}$

24.69. Az $y=kx+b$ egyenes az $M(3;\,3)$ és $E(1;\,7)$ pontokra illeszkedik. Írjátok fel az egyenes egyenletét!

24.70. Oldjátok meg az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases}x+y=1,\\xy=-20;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+3y=1,\\x^2+2xy-y^2=-1;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x^2+xy-5y=-3,\\4x-y=3!\end{cases}$

24.71. Oldjátok meg grafikusan az egyenletrendszert:

1) $\begin{cases}y-x=0,\\2x+y=-6;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=-1,\\2x+2y=-3;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x^2-y=6,\\x+y=6;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}xy=8,\\x+y=-6!\end{cases}$

24.72. Állapítsátok meg grafikusan az egyenletrendszer megoldásainak számát:

1) $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\y+x=3;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^2-y=1,\\x^2+y=4x!\end{cases}$

Számegyenlőtlenségek és tulajdonságaik. Lineáris és másodfokú egyenlőtlenségek és ezek rendszerei

24.73. Adva van: $-4 < x < 2$. Értékeljétek a kifejezést: 1) $3x - 1$; $8 - 5x$!

24.74. Adva van: $2 < x < 6$ és $3 < y < 4$. Értékeljétek a kifejezést:

1) $x + y$; 2) $x - y$; 3) xy; 4) $\frac{x}{y}$; 5) $5x + 2y$; 6) $3x - 4y$!

24.75. Értékeljétek a trapéz középvonalának hosszát, amelynek alapjai x cm és y cm, ha $8 < x < 12$, $7 < y < 14$!

24.76. Határozzátok meg az egyenlőtlenség megoldásának halmazát:

1) $(x+2)^2 \geqslant 0$; 3) $(x+2)^2 > 0$; 5) $0x < -5$; 7) $0x < 5$;
2) $(x+2)^2 \leqslant 0$; 4) $(x+2)^2 < 0$; 6) $0x \geqslant -5$; 8) $0x \geqslant 5$!

24.77. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $8x + 4 \leqslant 30 - 5x$; 3) $0{,}3(8 - 3y) \leqslant 3{,}2 - 0{,}8(y - 7)$;
2) $9 - 4x < 6x - 25$; 4) $\frac{x+4}{3} - \frac{x+2}{6} \leqslant 4$!

24.78. Határozzátok meg az egyenlőtlenség legnagyobb egész megoldását:

1) $3x + 9 > 5x - 7$; 2) $14x^2 - (2x - 3)(7x + 4) \leqslant 14$!

24.79. Határozzátok meg az egyenlőtlenség legkisebb egész megoldását:

1) $x - 5 < 3x + 8$; 2) $18x^2 - (3x - 2)(6x + 5) \leqslant 20$!

24.80. Az a mely értékeinél:

1) nincs megoldása az $x^2 + x - a = 0$ egyenletnek;
2) legalább egy valós gyöke van a $2x^2 - 16x + 5a = 0$ egyenletnek?

24.81. Oldjátok meg az egyenlőtlenség-rendszereket:

1) $\begin{cases} 7x - 1 \geqslant 5x - 3, \\ 3x + 6 \geqslant 8x - 14; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x(x - 3) - x(2 + 3x) < 4, \\ 6x^2 - (2x - 3)(3x + 4) < 17; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 0{,}6(x - 6) \leqslant x + 2, \\ 4x + 7 > 2(x + 6{,}5); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{5x - 10}{6} > \frac{2x + 1}{3}, \\ \frac{3x + 1}{2} - 4x > 5 - \frac{3x - 2}{4}! \end{cases}$

24.82. Határozzátok meg az egyenlőtlenség-rendszerek egész megoldásait:

1) $\begin{cases} 6x - 7 < 3x + 17, \\ 8 - 2x > 14 - 5x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x + 20 \geqslant x + 5, \\ 2x + 2 \geqslant 4x - 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 5x - 1 > 2x + 4, \\ 6x - 5 \leqslant 13 - x! \end{cases}$

24.83. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $x^2 - 6x - 7 < 0$; 6) $2x^2 - 3x + 1 > 0$;
2) $x^2 + 2x - 48 \geqslant 0$; 7) $4x^2 - 16x \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 6x - 5 > 0$; 8) $4x^2 - 49 > 0$;
4) $-x^2 - 4x - 3 < 0$; 9) $2x^2 - x + 1 > 0$;
5) $3x^2 - 7x + 4 \leqslant 0$; 10) $3x^2 - 4x + 2 \leqslant 0$!

24.84. Hány egész megoldása van a következő egyenlőtlenségnek:
1) $20+8x-x^2>0$; 2) $4x^2-17x+4\leqslant 0$?

Hatványok és gyökök

24.85. Mivel egyenlő a kifejezés értéke:
1) $5^{-2}+5^{-1}$; 2) $6^{-2}-12^{-1}$; 3) $0{,}08^0+0{,}9^0$; 4) $(4\cdot 2^{-3}-10^{-1})^{-1}$?

24.86. Adjátok meg tört alakban a kifejezést:
1) $a^{-3}+a^{-4}$; 3) $(a^{-1}-b^{-1})\cdot(a-b)^{-2}$;
2) $mn^{-5}+m^{-5}n$; 4) $(x^{-4}+y^{-4})\cdot(x^4+y^4)^{-1}$!

24.87. Határozzátok meg a kifejezés értékét:
1) $\dfrac{3^{12}\cdot 27^3}{9^9}$; 3) $100^{-2}:1000^{-6}\cdot 0{,}01^8$; 5) $\dfrac{(-36)^{-3}\cdot 6^7}{216^{-5}\cdot(-6)^{18}}$;
2) $\left(5\dfrac{1}{3}\right)^8\cdot\left(\dfrac{3}{16}\right)^7$; 4) $(0{,}2^{-3})^{-2}:25^{-4}$; 6) $\dfrac{6^{-14}}{81^{-3}\cdot 16^{-4}}$!

24.88. Számítsátok ki a kifejezések értékeit:
1) $-3\sqrt{0{,}16}+0{,}8$; 4) $\left(3\sqrt{8}\right)^2+\left(8\sqrt{3}\right)^2$;
2) $\dfrac{1}{9}\cdot\left(\sqrt{18}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{28}\right)^2$; 5) $0{,}2\sqrt[3]{1000}-\dfrac{2}{3}\sqrt[4]{81}$;
3) $50\cdot\left(-\dfrac{1}{5}\sqrt{3}\right)^2$; 6) $\sqrt[7]{-128}+3\left(\sqrt[9]{9}\right)^9-4\sqrt[3]{216}$!

24.89. A változó mely értékeinél van értelme a kifejezésnek:
1) $\sqrt{3-a}$; 3) $\sqrt{a^4+1}$; 5) $\sqrt[9]{a-8}$;
2) $\sqrt{a^2}$; 4) $\sqrt[8]{x+4}$; 6) $\sqrt[6]{-x^2}$?

24.90. Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $x^2=7$; 3) $x^7=9$; 5) $x^4=16$;
2) $x^2=-16$; 4) $x^5=-2$; 6) $x^6=5$!

24.91. Határozzátok meg a kifejezés értékét:
1) $\sqrt{0{,}1}\cdot\sqrt{0{,}4}$; 3) $\sqrt[4]{125}\cdot\sqrt[4]{5}$; 5) $\dfrac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{250}}$;
2) $\dfrac{\sqrt{180}}{\sqrt{5}}$; 4) $\sqrt[9]{2^7\cdot 7^4}\cdot\sqrt[9]{7^5\cdot 2^{20}}$; 6) $\sqrt[5]{\sqrt{17}-7}\cdot\sqrt[5]{\sqrt{17}+7}$!

24.92. Egyszerűsítsétek a kifejezést:
1) $\sqrt{9x^8y^{10}}$, ha $y\geqslant 0$; 3) $\sqrt[7]{k^7}$;
2) $\sqrt{0{,}64x^6y^2}$, ha $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$; 4) $\sqrt[3]{0{,}008p^{24}n^{30}}$!

24.93. Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $\sqrt[8]{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^8}$; 3) $\sqrt{\left(\sqrt{23}-7\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{23}-3\right)^2}$;

2) $\sqrt[4]{\left(\sqrt{5}-6\right)^4}$; 4) $\sqrt[6]{\left(5-4\sqrt{2}\right)^6}+\sqrt[5]{\left(5-4\sqrt{2}\right)^5}$!

24.94. Vigyétek ki a tényezőt a gyökjel elé:

1) $\sqrt{18a^8}$; 3) $\sqrt[3]{-m^{10}}$; 5) $\sqrt[4]{-81a^{11}}$;

2) $\sqrt[4]{x^9}$; 4) $\sqrt[6]{a^{10}b^9}$, ha $a \leqslant 0$; 6) $\sqrt[10]{-p^{31}q^{24}}$!

24.95. Egyszerűsítsétek a kifejezést (a változók nem negatív értékeket vesznek fel):

1) $\sqrt[4]{b\sqrt[5]{b^4}}$; 2) $\sqrt[3]{c\sqrt[7]{c^2}}$; 3) $\sqrt[6]{a^2\sqrt[5]{a^2}}$!

24.96. Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $\sqrt{45}-\sqrt{125}+\sqrt{405}$; 3) $\left(5-\sqrt{7}\right)\left(3+2\sqrt{7}\right)$;

2) $\left(\sqrt{99}-\sqrt{44}\right)\sqrt{11}$; 4) $\left(\sqrt{14}-\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{14}+\sqrt{11}\right)$!

24.97. Egyszerűsítsétek a törtet:

1) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}$; 2) $\dfrac{a-3\sqrt{a}}{a-9}$; 3) $\dfrac{7-\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$; 4) $\dfrac{\sqrt[3]{x}-4}{\sqrt[6]{x}-2}$!

24.98. Hasonlítsátok össze:

1) $\sqrt{39}$ és $2\sqrt{10}$; 3) 4 és $\sqrt[3]{65}$; 5) $\sqrt[4]{6}$ és $\sqrt[8]{35}$;

2) $0{,}3\sqrt{3\frac{1}{3}}$ és $\sqrt{0{,}4}$; 4) $3\sqrt[3]{3}$ és $2\sqrt[3]{10}$; 6) $\sqrt[6]{7}$ és $\sqrt[4]{3}$!

24.99. Számítsátok ki a kifejezések értékeit:

1) $5^{3,6}\cdot 5^{-1,2}\cdot 5^{1,6}$; 3) $\left(7^{-\frac{4}{11}}\right)^{\frac{11}{20}}\cdot 49^{1,1}$;

2) $(3^{-0,8})^7 : 3^{-2,6}$; 4) $81^{-2,25}\cdot 9^{3,5}\cdot 27^{\frac{2}{3}}$!

24.100. Egyszerűsítsétek a törtet:

1) $\dfrac{x-8x^{\frac{3}{7}}}{x^{\frac{4}{7}}-8}$; 3) $\dfrac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a-b}$; 5) $\dfrac{a-2a^{0,5}b^{0,5}+b}{ab^{0,5}-a^{0,5}b}$;

2) $\dfrac{5y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{5}{6}}+y^{\frac{2}{3}}}$; 4) $\dfrac{m^{1,5}-n^{1,5}}{m+m^{0,5}n^{0,5}+n}$; 6) $\dfrac{8a+1}{4a^{\frac{2}{3}}-1}$!

Irracionális egyenletek

24.101. Hány gyöke van az egyenletnek:

1) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x-3}=0$; 2) $\sqrt{x-4}\cdot\sqrt[3]{x-1}\cdot\sqrt[4]{6-x}=0$?

24.102. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\sqrt{3x-3}=\sqrt{4x^2-6x-1}$;
2) $\sqrt{x^2+x-4}=\sqrt{-2x}$;
3) $\sqrt{x+7}=x+5$;
4) $\sqrt{12+x-2x^2}=2-x$;
5) $\sqrt{x+5}-\sqrt{8-x}=1$;
6) $\sqrt{3x-6}+\sqrt{x-4}=4$!

24.103. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}+2=0$;
2) $2\sqrt[3]{x}+5\sqrt[6]{x}-3=0$;
3) $\sqrt[3]{4-4x+x^2}-\sqrt[3]{2-x}-2=0$;
4) $\sqrt{\dfrac{3x}{x-1}}-2\sqrt{\dfrac{x-1}{3x}}=1$!

Függvények és tulajdonságaik

24.104. Határozzátok meg a függvények értelmezési tartományát:

1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{6-x}}$;
2) $f(x)=\dfrac{7x+14}{x^2-7x}$;
3) $f(x)=\sqrt[6]{x+6}+\sqrt[8]{4-x}$;
4) $f(x)=\sqrt{x-7}+\dfrac{x+2}{x-8}$;
5) $f(x)=\sqrt{x-5}+\sqrt{5-x}$;
6) $f(x)=\sqrt{x^2+4x-21}-\dfrac{6}{x^2-49}$!

24.105. A 24.1. ábrán egy pont van ábrázolva, amelyre az $y=f(x)$ függvény illeszkedik. Az adott függvények közül válaszátok ki ezt a függvényt!

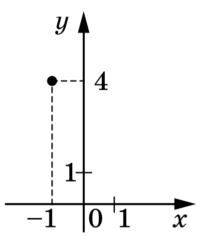
1) $f(x)=x^{-4}$; 2) $f(x)=\dfrac{4}{x}$; 3) $f(x)=\sqrt{17+x}$; 4) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-1}$!

24.106. Szerkesszétek meg az adott függvényt, és a felhasználásával állapítsátok meg az előjeltartási intervallumát, növekedési és fogyási intervallumait:

1) $y=2-x^2$; 2) $y=(x+4)^2$; 3) $y=8-2x-x^2$; 4) $y=x^2-2x+3$.

24.107. Határozzátok meg a függvény értelmezési tartományát, és szerkesszétek meg a grafikonját:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-8x+16}{4-x}$; 2) $f(x)=\dfrac{4x-16}{x^2-4x}$!



24.1. ábra

24.108. Adva van: $f(-4)=-2$. Határozzátok meg az $f(4)$ értékét, ha az f függvény: 1) páros; 2) páratlan!

24.109. Páros vagy páratlan-e a függvény:

1) $f(x)=6x^3-7x^5$;
2) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-1}$;
3) $f(x)=\sqrt{6-x^2}$;
4) $f(x)=x^2+x-3$;
5) $f(x)=\dfrac{1}{x^3-2x}$;
6) $f(x)=(x+5)(x-1)-4x$?

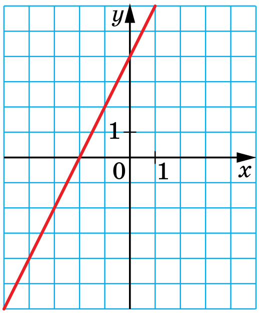
24.110. Adjátok meg az egyenes arányosság képletét, ha adott, hogy a grafikonja az $M(3; -7)$ pontra illeszkedik!

24.111. Határozzátok meg a b értékét, ha ismeretes, hogy az $y = -\frac{1}{6}x + b$ függvény grafikonja illeszkedik az $M(12; 5)$ pontra!

24.112. Határozzátok meg k értékét, ha ismeretes, hogy az $y = kx - 10$ függvény grafikonja illeszkedik az $M(-4; 2)$ pontra!

24.113. Az $y = kx + b$ függvény grafikonja összes pontjának –5-tel egyenlők az ordinátái. Határozzátok meg k és b értékeit!

24.114. Adjátok meg a lineáris függvény képletét, amelynek grafikonja a 24.2. ábrán látható!



24.2. ábra

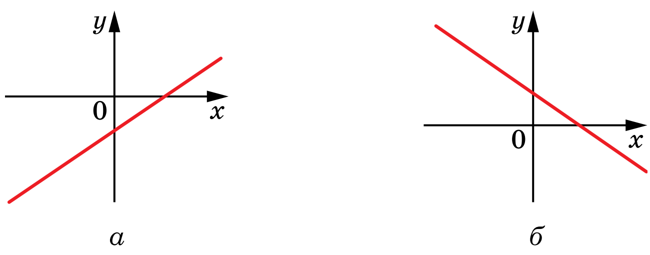
24.115. Határozzátok meg k értékét, amelynél az $y = \frac{k}{x}$ függvény grafikonja illeszkedik a következő pontra: 1) $A(-5; 8)$; 2) $B\left(\frac{1}{3}; -6\right)$!

24.116. A p és q mely értékeinél illeszkedik az $y = x^2 + px + q$ függvény grafikonja az $A(-1; 4)$ és $B(-2; 3)$ pontokra?

24.117. Határozzátok meg az $y = x^6$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét a következő intervallumon: 1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-2; 2]$!

24.118. Határozzátok meg az $y = x^{-3}$ függvény legnagyobb és legkisebb értékét a következő intervallumon: 1) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) $[-2; -1]$!

24.119. A 24.3. ábrán az $y = kx + b$ lineáris függvény grafikonja látható. Állapítsátok meg, melyik a helyes állítás:
1) $k > 0$, $b > 0$; 2) $k > 0$, $b < 0$; 3) $k < 0$, $b > 0$; 4) $k < 0$, $b < 0$!



24.3. ábra

Sorozatok

24.120. Határozzátok meg az (x_n) számtani sorozat különbségét, ha:
1) $x_1 = 17$, $x_9 = -7$; 2) $x_5 = -3$, $x_{14} = 42$!

24.121. Határozzátok meg az (y_n) számtani sorozat első tagját, ha:
1) $y_{10} = -19$, $d = -2$; 2) $y_5 = 13$, $y_{16} = 46$!

24.122. Határozzátok meg a (z_n) számtani sorozat tagjának sorszámát, amely 3,2-vel egyenlő, ha $z_1 = 9{,}2$ és $d = -0{,}6$!

24.123. Tagja-e a (b_n) számtani sorozatnak a 24, ha $b_1 = 8$ és $d = 3$? Ha igen, akkor nevezzétek meg a sorszámát is!

24.124. Adott a 4,9; 4,5; 4,1; … számtani sorozat. Hányadik tagtól kezdve lesznek negatívak a sorozat tagjai?

24.125. Az m mely értékénél lesznek a $3m - 1$, $m^2 + 1$ és $m + 3$ kifejezések számtani sorozat egymást követő tagjai? Határozzátok meg a sorozat tagjait!

24.126. Az (a_n) számtani sorozat n-edik tagjának képlete: $a_n = 0{,}2n + 5$. Határozzátok meg a sorozat első huszonhat tagjának összegét!

24.127. Határozzátok meg az (a_n) számtani sorozat első tíz tagjának összegét, ha:
1) $a_1 = 6$, $a_{14} = 45$; 2) $a_6 = 34$, $a_{14} = -54$!

24.128. Határozzátok meg az összes természetes szám összegét, amelyek 11-nek a többszörösei, és nem nagyobbak 341-nél!

24.129. Határozzátok meg az összes természetes szám összegét, amelyek 9-nek a többszörösei, és nem nagyobbak 156-nál!

24.130. Határozzátok meg az összes kétjegyű szám összegét, amelyek többszörösei a 8-nak!

24.131. Határozzátok meg a (b_n) mértani sorozat hányadosát, ha:
1) $b_1 = 108$, $b_4 = 32$; 2) $b_2 = 6$, $b_4 = 30$!

24.132. Határozzátok meg a (c_n) mértani sorozat első tagját, ha $c_4 = 40$, $c_7 = -320$!

24.133. A 192 a $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, 3, ... mértani sorozat tagja. Határozzátok meg ennek a tagnak a sorszámát!

24.134. Milyen három számot kell a 48 és a 243 közé tenni, hogy azok az adott számokkal mértani sorozatot alkossanak?

24.135. Határozzátok meg a (b_n) mértani sorozat első négy tagjának összegét, ha:
1) $b_4 = 280$, $q = 5$; 2) $b_1 = \sqrt{2}$, $b_5 = 4\sqrt{2}$, $q < 0$!

Trigonometrikus függvények

24.136. Az a mely értékeinél lehetséges a következő egyenlőség: $\cos x = a - 2$?

24.137. Határozzátok meg a kifejezés legnagyobb és legkisebb értékét:

1) $1 - 4\cos\alpha$; 2) $6 + \sin^2\alpha$!

24.138. Hasonlítsátok össze:

1) tg 140° és tg(–140°); 3) $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$ és $\cos\frac{5\pi}{7}$;

2) cos 50° és sin 350°; 4) cos 5 és sin 4!

24.139. Páros vagy páratlan e a következő képlettel megadott függvény:

1) $f(x) = 2x + \sin x$; 3) $f(x) = \operatorname{tg} x + x^2$;

2) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x^2 - 1}$; 4) $f(x) = \frac{(2-x)\cos x}{2-x}$?

24. 140. Számítsátok ki az α argumentumú trigonometrikus függvények értékét, ha:

1) $\cos\alpha = -\frac{2}{7}$ és $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{2}$ és $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$!

24.141. Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} + \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi}$; 2) $\sin^4\alpha - \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$!

24.142. Bizonyítsátok be az azonosságot:

1) $\frac{\sin(45° + \alpha) - \cos(45° + \alpha)}{\sin(45° + \alpha) + \cos(45° + \alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$;

2) $\frac{\sin(\alpha - \beta) + 2\sin\beta\cos\alpha}{\cos(\alpha - \beta) - 2\sin\alpha\sin\beta} = \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$!

24.143. Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos(\pi - \alpha) + \cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)\sin(2\pi - \alpha)$;

2) $\frac{\sin(180° - \alpha)\cos(180° + \alpha)\operatorname{tg}(180° - \alpha)}{\sin(270° - \alpha)\operatorname{tg}(180° + \alpha)\cos(90° + \alpha)}$!

24.144. Egyszerűsítsétek a kifejezést:

1) $\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}$; 2) $\frac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha} + \frac{\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha}$!

24.145. Bizonyítsátok be az azonosságot:

1) $\operatorname{tg} 2\alpha(1 + \cos 4\alpha) - \sin 4\alpha = 0$; 2) $\frac{1 - \cos\alpha + \sin\alpha}{1 + \cos\alpha + \sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$!

Trigonometrikus egyenletek

24.146. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $\sin 5x = -\frac{1}{2}$;
2) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$;
3) $\cos\frac{x}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;
5) $\operatorname{tg} 7x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;
6) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{8}\right) = 1$!

24.147. Határozzátok meg az egyenlet legnagyobb negatív gyökét:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}!$$

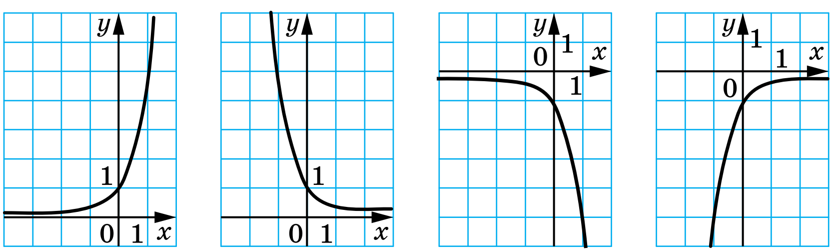
24.148. Hány gyöke van a $\operatorname{tg} 3x = \sqrt{3}$ egyenletnek a $[0; \pi]$ intervallumon?

24.149. Oldjátok meg az egyenletet:

1) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$;
2) $\sin^2 3x + 3\cos 3x = 3$;
3) $\cos 2x - 3\sin x = 2$;
4) $\cos 8x - 5\cos 4x - 2 = 0$;
5) $\frac{3}{\cos^2 x} + 5\operatorname{tg} x - 11 = 0$;
6) $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$!

Exponenciális függvény. Exponenciális egyenletek és egyenlőtlenségek

24.150. A 24.4. *a–d* ábrák egyikén az $y = 0{,}2^{-x}$ függvény grafikonja látható. Nevezd meg ezt az ábrát!



a *b* *c* *d*

24.4. ábra

24.151. Milyen lesz az $f(x) = 9^x + 2$ függvény értékkészlete?

24.152. Ismeretes, hogy $0{,}7^m > 0{,}7^n$. Hasonlítsátok össze az m és n számokat!

24.153. Az adott függvények közül melyik nem növekvő?

1) $y = e^x$; 2) $y = \pi^x$; 3) $y = \left(\frac{e}{2}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$?

24.154. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $8^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{4}$;

2) $0{,}75^{x+1} = \frac{16}{9}$;

3) $\sqrt{125^{x-1}} = \sqrt[3]{25^{2-x}}$;

4) $\left(\frac{6}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^x = \frac{125}{216}$;

5) $2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^x = 90^{3x-7}$;

6) $8 \cdot 7^{2x^2-x} - 7 \cdot 8^{2x^2-x} = 0$!

24.155. Határozzátok meg az egyenlőtlenség megoldásának halmazát:

1) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2-x} > 9^{2x-1}$;

2) $1 < 10^{x+1} \leqslant 100\,000$;

3) $1{,}3^{x^2-4x+2} \leqslant 1{,}69$;

4) $0{,}4^{x^2+2x+2} \leqslant 0{,}16$!

24.156. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $3^x - 2 \cdot 3^{x-2} = 7$;

2) $2^{x+1} + 2^{x-3} = 68$;

3) $7^x - \left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 6$;

4) $4^{\frac{x}{2}} + 2^{x-5} - 2^{x-7} = 262$!

24.157. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $4^x - 3 \cdot 4^{x-2} > 13$;

2) $5^{x+1} + 5^{x-2} < 630$;

3) $0{,}5^{x+3} - 0{,}5^{x+2} + 0{,}5^{x+1} < 0{,}375$;

4) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} > 17$!

24.158. Oldjátok meg az egyenleteket:

1) $4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$;

2) $9^x + 3^x - 6 = 0$;

3) $49^x + 2 \cdot 7^x - 35 = 0$;

4) $9 - 2^x = 2^{3-x}$;

5) $(0{,}2)^{2x-2} - 126 \cdot (0{,}2)^x + 5 = 0$;

6) $\frac{5}{3^{x-1}} - \frac{2}{3^x - 1} = 4$!

24.159. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $25^x - 2 \cdot 5^x - 15 > 0$;

2) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 \leqslant 0$;

3) $3^{x+2} - 28 \cdot 3^{0,5x} + 3 \geqslant 0$;

4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 27 \leqslant 0$!

Logaritmusfüggvény. Logaritmusos egyenletek és egyenlőtlenségek

24.160. Számítsátok ki:

1) $2^{1-\log_2 7}$;

2) $5^{3\log_5 2}$;

3) $4^{\frac{1}{2}\log_2 3 + \log_2 5}$;

4) $\log_4 \log_{14} 196 + \log_5 \sqrt{5}$;

5) $\lg 20 + \lg 50$;

6) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{27}$!

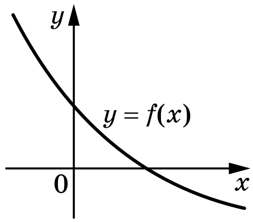
24.161. Az adott függvények közül melyiknek lesz az értelmezési tartománya a valós számok halmaza:

1) $y = \lg(x+1)$; 2) $y = \lg(x^2 - 1)$; 3) $y = \lg(x^2 + 1)$; 4) $y = \lg x^2$?

24.162. Határozzátok meg a függvény értelmezési tartományát:
1) $y = \lg \lg x$; 2) $y = \log_{x-2}(x^2 + x + 3)$!

24.163. A 24.5. ábrán az $y = f(x)$ függvény grafikonja látható, amely a valós számok halmazán van értelmezve. Hány gyöke van az $f(x) = \log_4 x$ egyenletnek?

24.164. Szerkesszétek meg a függvény grafikonját:
1) $y = 5^{\log_5 (x-1)}$; 3) $y = e^{\ln(4-x^2)}$!
2) $y = 10^{\lg \sin x}$;



24.5. ábra

24.165. Hasonlítsátok össze az m és n számok értékeit, ha:
1) $\log_{\frac{1}{2}} m < \log_{\frac{1}{2}} n$; 2) $\log_{1,5} m < \log_{1,5} n$!

24.166. Hasonlítsátok össze a logaritmus alapját eggyel, ha:
1) $\log_a 7 < \log_a 6$; 2) $\log_a 5 > 0$!

24.167. Hasonlítsátok össze nullával a következő számot:
1) $\log_2 \frac{1}{5}$; 2) $\log_3 4$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} 0,6$; 4) $\log_{\frac{1}{6}} 10$!

24.168. Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $\log_{0,2}(x^2 + 4x) = -1$; 4) $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$;
2) $\lg x = 3 - \lg 20$; 5) $\lg(5x + 2) = \frac{1}{2}\lg 36 + \lg 2$;
3) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5,5$; 6) $\log_9(4x - 6) = \log_9(2x - 4)$!

24.169. Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $\lg(2x - 1) + \lg(x + 5) = \lg 13$;
2) $\log_3(2x - 7) + \log_3(x - 1) = 2 + \log_3 2$;
3) $\log_{0,5}(4 - x) + \log_{0,5}(x - 1) = -1$;
4) $\log_7(-x) + \log_7(1 - x) = \log_7(x + 3)$!

24.170. Oldjátok meg az egyenleteket:
1) $3\log_3^2 x + 7\log_3 x - 6 = 0$; 3) $\frac{2}{\lg x + 2} - \frac{1}{\lg x - 4} = 1$;
2) $\ln^2 x - 4\ln x - 21 = 0$; 4) $\log_9 x + \log_x 9 = 2,5$!

24.171. Határozzátok meg az egyenlőtlenség megoldásának halmazát:
1) $\log_7(2x - 1) < 2$; 5) $\log_6(x + 1) < \log_6(2x + 5)$;
2) $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 3) > 1$; 6) $\log_2(2x - 3) > \log_2(3x - 5)$;
3) $\log_4(x + 1) < -\frac{1}{2}$; 7) $\ln(x^2 - 3) > \ln(3x - 7)$;
4) $\log_{0,2}(x^2 + 4x) \geqslant -1$; 8) $\log_{0,7}(3x - 1) < \log_{0,7}(3 - x)$!

24.172. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $\log_2 x + \log_2(x+1) \leqslant 1$; 2) $\log_{\frac{1}{6}} x + \log_{\frac{1}{6}}(x-1) \geqslant \log_{\frac{1}{6}}(x+3)$!

24.173. Oldjátok meg az egyenlőtlenségeket:

1) $\lg^2 x - \lg x \geqslant 0$;

2) $\ln^2 x + \ln x \leqslant 0$;

3) $3\log_8^2 x + 2\log_8 x - 5 \geqslant 0$!

Derivált és alkalmazása

24.174. Határozzátok meg a függvény deriváltját:

1) $y = x^6 + 2x^4 + \dfrac{4}{x^2} - 1$;

2) $y = \dfrac{1}{2x^3} + \dfrac{4}{x}$;

3) $y = (x^2 + x + 1)(x^2 - 4x + 1)$;

4) $y = (3 - 2x)\sqrt{x}$;

5) $y = 2^x \cos x$;

6) $y = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 1}$!

24.175. Számítsátok ki a függvény deriváltjának értékét az x_0 pontban:

1) $f(x) = \dfrac{3x^2}{1 - x}$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{4 - \sin x}$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = \cos x - \sin\dfrac{\pi}{3}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

4) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$!

24.176. Az anyagi pont a koordinátaegyenesen az $s(t) = 3t^2 - 12t + 18$ törvény szerint mozog (a t időt másodpercben, az s elmozdulást méterben mérjük). Az elindulás után hány másodperc múlva fog megállni?

24.177. Állítsátok fel az adott függvény x_0 pontbéli érintőjének egyenletét:

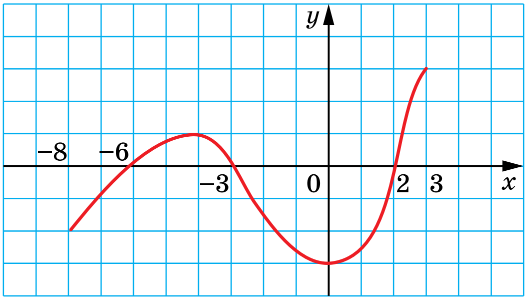
1) $f(x) = \dfrac{2}{x}$, $x_0 = -2$; 2) $f(x) = \sin x \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$!

24.178. Az $f(x) = 5 + 7x - 4x^2$ függvényhez érintő van húzva, melynek iránytényezője –9. Határozzátok meg az érintési pont koordinátáit!

24.179. Határozzátok meg az $y = x^2 - 3x + 2$ parabolának azt a pontját, amelyben az érintő párhuzamos az $y = 6 - x$ egyenessel!

24.180. Állítsátok fel az $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x$ függvény érintőjének egyenletét, amely párhuzamos az $y = 5x - 8$ egyenletű egyenessel!

24.181. Az $y = f(x)$ függvény értelmezve van a $[-8; 3]$ intervallumon, és deriválható az értelmezési tartományának minden pontjában. A 24.6. ábrán az $y = f'(x)$ deriváltfüggvény grafikonja látható. Nevezzétek meg:
1) az $y = f(x)$ függvény növekedési és fogyási intervallumait;
2) az $y = f(x)$ függvény minimum és maximum pontjait!



24.6. ábra

24.182. Határozzátok meg a függvény növekedési és fogyási intervallumait, valamint az extrémumpontjait:

1) $f(x) = -8x^3 - x^2 + 2x$;
2) $f(x) = x^3 + 2x - 10$;
3) $f(x) = \frac{x}{4} + \frac{4}{x}$;
4) $f(x) = \frac{5 - 2x}{x^2 - 4}$;
5) $f(x) = \frac{x}{e} - e^x$;
6) $f(x) = x^2 - 8 \ln x$!

24.183. Határozzátok meg a függvény legnagyobb és legkisebb értékét:
1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$ a $[-2; 0]$ intervallumon;
2) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ a $[0; 4]$ intervallumon;
3) $f(x) = \cos x - \sin x$ a $[0; 2\pi]$ intervallumon;
4) $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ a $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ intervallumon!

24.184. Végezzétek el a függvény teljes vizsgálatát, és szerkesszétek meg a grafikonját:
1) $f(x) = x^3 - 9x$;
2) $f(x) = 6x^2 - 2x^3$!

Integrál és alkalmazása

24.185. Határozzátok meg a következő függvény primitívjének általános alakját:

1) $f(x) = x - \frac{2}{x^5}$ a $(-\infty; 0)$ intervallumon;

2) $f(x) = \frac{3}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ a $(0; +\infty)$ intervallumon!

24.186. Az f függvénynek határozzátok meg az adott I intervallumon az F primitívjét, amelynek grafikonja illeszkedik az adott M pontra:
1) $f(x) = 2x + 4$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(2; 1)$;
2) $f(x) = 4x^3 - 2x + 3$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(1; 8)$!

24.187. Számítsátok ki az integrált:
1) $\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$;
2) $\int_{-2}^{1} (x^2 - 2x + 4)dx$;
3) $\int_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right)dx$;
4) $\int_0^{\pi} (6\cos x - 3\sin x)dx$!

24.188. Számítsátok ki a következő vonalakkal határolt alakzat területét:
1) $y = 2 - x^2$, $y = 0$;
2) $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;
3) $y = -x^2 + 4$, $x + y = 4$;
4) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5 - x$!

A valószínűségszámítás és a matematikai statisztika alapjai

24.189. Az étkezdében 3 első fogás, 6 második fogás és 4 harmadik fogás van. Hányféleképpen lehet ezekből elkészíteni egy ebédet?

24.190. Hányféleképpen lehet felrakni a polcra 8 különböző könyvet?

24.191. Hányféleképpen lehet 32 tanuló közül kiválasztani 3-at az iskolai konferenciára?

24.192. A zenekarban 16 hegedűs és 12 csellós van. Hányféleképpen lehet közülük kiválasztani egy triót, hogy abban 2 hegedűs és egy csellós legyen?

24.193. Hány ötjegyű szám képezhető a 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből, amelyekben minden számjegy különböző, és a kapott számnak 5-tel oszthatónak kell lennie?

24.194. A dobozban 12 zöld és 18 kék golyó van. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen kiválasztott golyó: 1) zöld; 2) kék; piros; 4) zöld vagy kék legyen?

24.195. A lottósorsoláson kisorsolnak 6 gépkocsit, 18 motorkerékpárt és 42 kerékpárt. Összesen 3000 lottószelvényt bocsátottak ki. Mennyi annak a valószínűsége, hogyha egy sorsjegyet vásárolunk, akkor: 1) motorkerékpárt nyerünk; 2) valamilyen nyereményt kapunk; 3) nem nyerünk egyetlen díjat sem?

24.196. Az 1-től 16-ig terjedő természetes számok közül a tanuló véletlenszerűen kiválaszt egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám a 16 osztója lesz?

24.197. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a véletlenszerűen kiválasztott kétjegyű szám 12-vel osztható lesz?

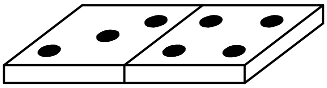
24.198. Egy dobozban 3 fehér és 4 kék golyó van. Legkevesebb hány golyót kell véletlenszerűen kivenni, hogy annak a valószínűsége, hogy a kivett golyók között legalább egy kék golyó lesz, 1-gyel legyen egyenlő?

24.199. Négy kártya az 1, 2, 3 és 4 számokkal van számozva. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két véletlenül kiválasztott kártya sorszáma 3 többszöröse lesz?

24.200. A dobozban piros és sárga golyók vannak. Hány piros golyó van a dobozban, ha annak valószínűsége, hogy piros golyót fognak belőle húzni $\frac{3}{8}$, sárgából pedig 20 darab van benne?

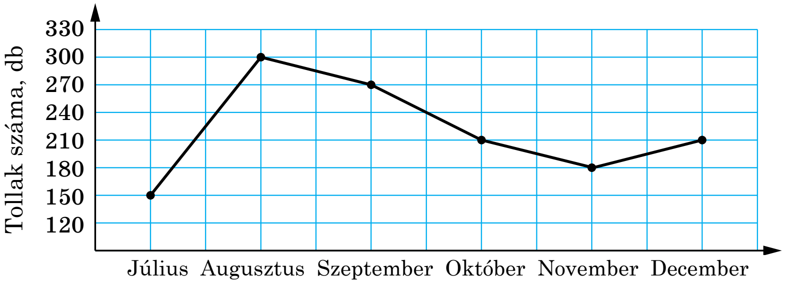
24.201. 30 kártyára felírták a természetes számokat 1-től 30-ig. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a véletlenül kihúzott kártyán a szám 3-mal osztható, de 2-vel nem?

24.202. 28 darab dominó közül véletlenül húztak egyet, és kiszámították a rajta lévő pontok számának összegét (a 24.7. ábrán egy olyan dominó van, amelyen a pontok számának összege 7). Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott dominón a pontok számának összege:
1) 4; 2) 7; 3) 10; 4) 12; 5) 15?



24.7. ábra

24.203. A 24.8. ábrán lévő grafikonon az írószeres üzletben 6 hónap alatt eladott tollak száma látható. Átlagosan hány tollat adtak el egy hónap alatt?

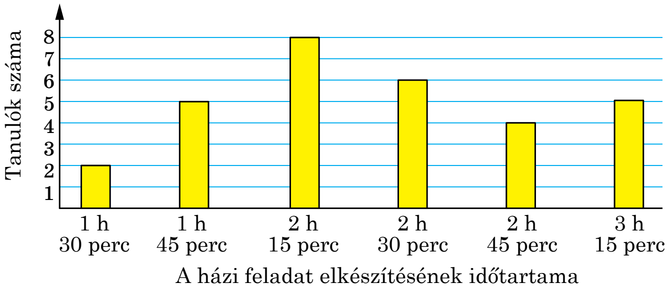


24.8. ábra

24. 204. A 7, 10, y, 14 minta átlaga 11. Mivel egyenlő y?

24.205. Határozzátok meg a következő alapsokaság átlagát, móduszát, mediánját és terjedelmét:
1) 5, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 14, 15, 22;
2) 5, 12, 12, 14, 14, 8, 12!

24.206. A 11. osztályos tanulók között felmérést végeztek, hogy mennyi időt töltenek a házi feladat elkészítésével. A felmérés eredményét oszlopdiagramon ábrázolták, amely a 24.9. ábrán látható. Határozzátok meg az adott felmérés móduszát és átlagát!



24.9. ábra

24.207. A 11. osztályban az ukrán nyelv tollbamondás eredményeit táblázatba foglalták, amelyben az egy személy által elkövetett hibák számát tüntették fel:

Hibák száma	0	1	2	3	4
Tanulók száma	5	4	6	8	2

Határozzátok meg a minta móduszát és átlagát, készítsetek oszlopdiagramot az adatok alapján!

25. A mértan ismétlésére szolgáló feladatok

Háromszögek

25.1. Határozzátok meg a derékszögű háromszög kerületét, amelynek átfogója 7 cm-rel nagyobb az egyik befogójánál, a másik befogó pedig 21 cm!

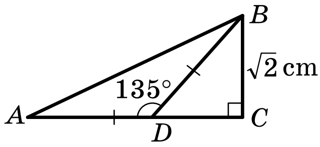
25.2. A derékszögű háromszög egyik befogója 15 cm, az átfogóra bocsátott oldalfelező 8,5 cm. Számítsátok ki az adott háromszög területét!

25.3. Az egyenlő szárú háromszög magassága az egyik szárát 1 cm-es és 12 cm-es szakaszokra osztja, az alapnál lévő szögétől kezdve a számolást. Határozzátok meg az adott háromszög alapját!

25.4. Az ABC háromszög AD magassága a BC oldalt BD és CD szakaszokra osztja úgy, hogy $BD = 15$ cm, $CD = 5$ cm. Határozzátok meg az AC oldalát, ha $B\angle = 30°$!

25.5. A pontból az egyenesre két ferde van húzva, amelyek vetületei 5 cm és 9 cm. Határozzátok meg az adott pont és az egyenes közötti távolságot, ha az egyik ferde 2 cm-rel hosszabb, mint a másik!

25.6. Határozzátok meg a 25.1. ábrán lévő ABC háromszög területét!



25.1. ábra

25.7. Az egyenlő szárú tompaszögű háromszög magassága, amelyet az alapra húztak, 8 cm-rel egyenlő, és a köré írt körvonal sugara 13 cm. Határozzátok meg a háromszög szárát!

25.8. Az α hegyesszögű derékszögű háromszög átfogóra húzott magassága h. Határozzátok meg ennek a háromszögnek az átfogóját!

25.9. A derékszögű háromszögbe írt körvonal érintési pontja az átfogót 8 cm-es és 12 cm-es szakaszokra osztja. Határozzátok meg a háromszög kerületét!

25.10. Az $ABCD$ trapéz AB és CD szárainak meghosszabbításai az O pontban metszik egymást. Határozzátok meg az AB oldalát, ha $AO = 18$ cm, $BC : AD = 5 : 9$!

25.11. Az $ABCD$ trapéz AB és CD szárainak meghosszabbításai az F pontban metszik egymást. $AB : BF = 3 : 7$, AD – a trapéz nagyobbik alapja. A trapéz alapjainak különbsége 6 cm. Határozzátok meg az AD alapjának hosszát!

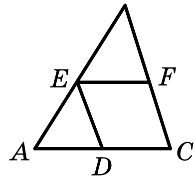
25.12. Az egyik egyenlőszárú háromszög szárai közötti szög egyenlő a másik egyenlő szárú háromszög szárszögével. Az első háromszög alapja és az alapjára bocsátott magassága megfelelően 30 cm és 8 cm, a másik háromszög szára 51 cm. Mivel egyenlő a második háromszög kerülete?

25.13. Az ABC háromszög BC oldalán jelöltek egy K pontot úgy, hogy $CAK\angle = ABC\angle$, $BK = 12$ cm, $KC = 4$ cm. Határozzátok meg az AC oldalát!

25.14. Az $ABCD$ trapéz $(AD \parallel BC)$ átlói az O pontban metszik egymást, $BO : OD = 3 : 4$, $BC = 18$ cm. Határozzátok meg a trapéz AD alapját!

25.15. Az $ABCD$ trapéz $(BC \parallel AD)$ átlói az O pontban metszik egymást, $AO : OC = 7 : 3$, $BD = 40$ cm. Határozzátok meg az OD szakasz hosszát!

25.16. Az ABC háromszögbe egy $CDEF$ rombusz van írva úgy, hogy ahogy a 25.2. ábrán látható. Határozzátok meg a háromszög BC oldalát, ha $AC = 15$ cm, a rombusz oldala 10 cm!

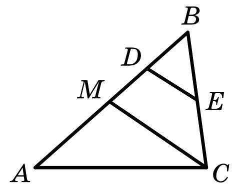


25.2. ábra

25.17. Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja az M pont, a K pont pedig az AC oldal felezőpontja. Az AMK háromszög területe 12 cm^2. Mivel egyenlő a $BMKC$ négyszög területe?

25.18. Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja a D pont, az E pont pedig a BC oldal felezőpontja. Az $ADEC$ háromszög területe 27 cm^2. Mivel egyenlő az ABC háromszög területe?

25.19. Az ABC háromszög oldalfelezője a CM szakasz, lásd a 25.3. ábrát, a DE szakasz az MBC háromszög középvonala. Mivel egyenlő az $MDEC$ négyszög területe, ha az ABC háromszög területe 48 cm^2?



25.3. ábra

25.20. Az ABC háromszög AC oldalával párhuzamos egyenes az AB oldalt az M pontban, a BC-t pedig a K pontban metszi. Határozzátok meg az ABC háromszög területét, ha $BM = 3$ cm, $AM = 4$ cm, az $AMKC$ négyszög területe 80 cm^2!

25.21. Az egyenlő szárú háromszög szárának felezőpontja az alapjától 9 cm távolságra van. Határozzátok meg oldalfelezőinek metszéspontja és alapja közötti távolságot!

25.22. Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja AC, oldalfelezőinek metszéspontja a B csúcsától 6 cm-re van. Határozzátok meg szárai felezőpontjainak a távolságát az alaptól!

25.23. Az ABC egyenlő szárú háromszögbe ($AB = BC$) írt körvonal sugara 12 cm, a körnek a középpontja a háromszög B csúcsától 20 cm távolságra van. Határozzátok meg az adott háromszög kerületét!

25.24. Az egyenlő szárú háromszögbe írt körvonalnak a szárát érintő pontja 8 : 9 arányban osztja ezt a szárat, az alapnál lévő csúcstól kezdve a számolást. Határozzátok meg a háromszög területét, ha a beírt kör sugara 16 cm!

25.25. A háromszög két oldala közötti szög 60°, ezeknek az oldalaknak az aránya 5 : 8, a harmadik oldala 21 cm. Határozzátok meg a háromszög ismeretlen oldalait!

25.26. A háromszög két oldalának összege 16 cm, a köztük lévő szög 120°. Határozzátok meg közülük a kisebbik oldalt, ha a háromszög harmadik oldala 14 cm!

25.27. Határozzátok meg az ABC háromszög A szögét, ha $BC = 7$ cm, $AC = 3$ cm, $AB = 8$ cm!

25.28. Határozzátok meg a körlap területét, amely egy 7 cm, 8 cm és 9 cm oldalú háromszög köré van írva!

25. 29. A háromszög oldalai 6 cm, 25 cm és 29 cm. Határozzátok meg az adott háromszögbe írt körvonal sugarát!

Négyszögek. Szabályos négyszögek

25.30. A paralelogramma tompaszögéből bocsátott magassága 6 cm és a paralelogramma oldalát felezi. Határozzátok meg a paralelogramma kisebbik átlóját, ha a hegyesszöge 30°!

25.31. A paralelogramma tompaszögének szögfelezője az oldalát 3 : 7 arányban osztja a hegyesszögétől számítva, ami 45°-os. Számítsátok ki a paralelogramma területét, ha a kerülete 52 cm!

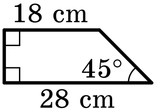
25.32. Az $ABCD$ téglalap szögfelezője az AB oldalt az M pontban metszi, $BM = 5$ cm, $AD = 3$ cm. Határozzátok meg a paralelogramma kerületét!

25.33. Számítsátok ki a rombusz területét, ha egyik átlója 16 cm, az oldala pedig 10 cm!

25.34. A rombusz nagyobbik átlója c, tompaszöge α. Határozzátok meg a rombusz kerületét!

25.35. Határozzátok meg az egyenlő szárú trapéz magasságát, amelynek alapjai 23 cm és 17 cm, az átlója pedig 25 cm!

25.36. Határozzátok meg a 25.4. ábrán látható trapéz területét!



25.4. ábra

25.37. A kör köré írt egyenlő szárú trapéz szára a, az egyik szöge 60°. Határozzátok meg a trapéz területét!

25.38. A derékszögű trapéz nagyobbik szára 16 cm, hegyesszöge 30°. Határozzátok meg a trapéz területét, ha kör írható bele!

25.39. Az egyenlő szárú trapéz alapjai 1 cm és 17 cm, átlója a tompaszögét felezi. Határozzátok meg a trapéz területét!

25.40. Az egyenlő szárú trapéz alapjai 15 cm és 33 cm, átlója a hegyesszögét felezi. Határozzátok meg a trapéz területét!

25.41. Az egyenlő szárú trapézba körvonal van írva, szárának érintési pontja a szárat 8 cm-es és 18 cm-es szakaszokra osztja. Határozzátok meg a trapéz területét!

25.42. A derékszögű trapézba körvonal van írva, nagyobbik szárának érintési pontja a szárat 8 cm-es és 50 cm-es szakaszokra osztja. Határozzátok meg a trapéz kerületét!

25.43. Mivel egyenlő a körbe írt $ABCD$ négyszög BAD szöge, ha $ACD\angle = 37°$, $ADB\angle = 43°$?

25.44. Az $ABCD$ négyszög BD átlója a négyszög köré írt körvonal átmérője, az M pont átlóinak metszéspontja, $ABD\angle = 32°$, $CBD\angle = 64°$. Határozzátok meg a BMC szöget!

25.45. Hogyan aránylik a körbe írt szabályos háromszög oldala az ugyanezen kör köré írt szabályos háromszög oldalához?

25.46. Hogyan aránylik a körbe írt szabályos hatszög oldala az ugyanezen kör köré írt szabályos hatszög oldalához?

25.47. Két egymást metsző körvonal közös húrja az egyik körbe írt szabályos háromszög oldala, és a másik körbe írt négyzet oldala is. A húr hossza a. Határozzátok meg a körvonalak középpontjai közötti távolságot, ha ezek a húr különböző oldalain lesznek!

Körvonal és körlap

25.48. Határozzátok meg a kör ívének fokmértékét, amelynek hossza π cm, ha a kör sugara 12 cm-rel egyenlő!

25.49. A körív hossza 2π cm, fokmértéke 60°. Határozzátok meg a körvonal sugarát!

25.50. Az AB szakasz a kör átmérője, $AB = 24$ cm. Az A pont a körvonal érintőjétől 4 cm távolságra van. Határozzátok meg a B pont távolságát az érintőtől!

25.51. A körvonal egyik pontjából az átmérőjére bocsátott merőleges az átmérőt két szakaszra osztja, amelyek hosszai között a különbség 21 cm. Határozzátok meg a körvonal hosszát, ha a merőleges hossza 10 cm!

25.52. Két körvonal, amelyek középpontjai O_1 és O_2, külsőleg érintik egymást a C pontban. A C pontra illeszkedő egyenes az O_1 középpontú kört az A pontban, a másik kört a B pontban metszi. Az AC húr 12 cm-rel egyenlő, a BC pedig 18 cm-rel. Határozzátok meg a körök sugarait, ha $O_1O_2 = 20$ cm!

25.53. Egy 60°-os szögbe két kört írtak, amelyek külsőleg érintik egymást. Határozzátok meg a nagyobbik kör sugarát, ha a kisebbik kör sugara 6 cm!

Descartes-féle koordináták

25.54. A C pont az AB szakasz felezőpontja: $A(-4; 3)$, $C(2; 1)$. Határozzátok meg a B pont koordinátáit!

25.55. Az ABC háromszög csúcsai: $A(-3; 1)$, $B(2; -2)$ és $C(-4; 6)$. Határozzátok meg az ABC háromszög AM oldalfelezőjét!

25.56. Az $ABCD$ négyszög paralelogramma, $B(4; 1)$, $C(-1; 1)$, $D(-2; -2)$. Határozzátok meg az A csúcs koordinátáit!

25.57. Határozzátok meg annak a pontnak a koordinátáit, amely az ordinátatengelyre illeszkedik, és egyenlő távolságra van a $C(3; 2)$ és $D(1; -6)$ pontoktól!

25.58. A körvonal a következő egyenlettel van megadva: $(x+4)^2+(y-1)^2=12$. Hogyan helyezkedik el az $A(-2; 3)$ pont ehhez a körvonalhoz viszonyítva?

25.59. Írjátok fel annak a körnek az egyenletét, amelynek átmérője az MK szakasz, ha $M(-3; 4)$, $K(5; 10)$!

25.60. Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az $A(-1; 4)$ és $B(-3; -2)$ pontok illeszkednek!

25.61. Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre az $A\left(\sqrt{3}; 5\right)$ pont illeszkedik, és az abszcisszatengely pozitív irányával 60°-os szöget zár be!

25.62. Írjátok fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyre a $P(2; -5)$ pont illeszkedik, és párhuzamos az $y=-0{,}5x+9$ egyenessel!

25.63. Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyszög rombusz, ha $A(-1; 5)$, $B(4; 6)$, $C(3; 1)$ és a $D(-2; 0)$ pontok a csúcsai!

25.64. Bizonyítsátok be, hogy az $ABCD$ négyszög téglalap, ha az $A(2; -2)$, $B(1; 2)$, $C(-3; 1)$ és $D(-2; -3)$ pontok a csúcsai!

25.65. Határozzátok meg az $M(4; -5; 6)$ pont és az xz sík közötti távolságot!

25.66. Határozzátok meg az $A(4; -2; 1)$ pont és a koordináta-rendszer kezdőpontja közötti távolságot!

25.67. Határozzátok meg az $A(2; -3; -4)$ és a $B(-6; -3; 2)$ pontok közötti távolságot!

25.68. Az $A(-4; 2; -6)$ és a $B(-14; -10; 2)$ pontok szimmetrikusak a C ponthoz viszonyítva. Határozzátok meg a C pont koordinátáit!

25.69. Határozzátok meg annak a pontnak a koordinátáit, amely szimmetrikus az $M(-1; 2; 3)$ ponttal az xy síkhoz viszonyítva!

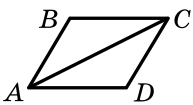
Vektorok

25.70. Adottak az $\vec{a}(3; -1)$ és $\vec{b}(1; -2)$ vektorok. Határozzátok meg az $\vec{m}$ vektor koordinátáit, ha $\vec{m}=3\vec{a}-2\vec{b}$!

25.71. Adva van: $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. Határozzátok meg a $|\vec{c}|$-t, ha $\vec{a}(-1; 1)$, és $\vec{b}(-2; 3)$!

25.72. Számítsátok ki az $(\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + \vec{b})$ skaláris szorzatot, ha $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$, $(\vec{a}, \vec{b})\angle = 135°$!

25.73. Adottak az $M(4; -2)$, $N(1; 1)$ és $P(3; 3)$ pontok. Határozzátok meg az $\overrightarrow{MN}$ és $\overrightarrow{MP}$ vektorok skaláris szorzatát!



25.5. ábra

25.74. A 25.5. ábrán az $ABCD$ rombusz látható, amelyben $AB = 2$ cm, $ABC\angle = 120°$. Határozzátok meg az $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{AC}$ vektorok skaláris szorzatát!

25.75. Az $ABCDEF$ szabályos hatszög oldala 1. Számítsátok ki a következő skaláris szorzatot:
1) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD}$!

25.76. Határozzátok meg az $\vec{a}(-1; -1)$ és $\vec{b}(2; 0)$ vektorok közötti szöget!

25.77. Az $ABCD$ paralelogramma CD oldalán felvettek egy M pontot úgy, hogy $CM : MD = 2 : 3$. Fejezzétek ki az $\overrightarrow{AM}$ vektort az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok által, ahol $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$!

25.78. Az $ABCD$ paralelogramma BC és CD oldalain megfelelően felvettek egy E és F pontot úgy, hogy $BE : EC = 3 : 4$, $CF : FD = 1 : 3$. Fejezzétek ki az $\overrightarrow{EF}$ vektort az $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ és $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ vektorok által!

25.79. Határozzátok meg az $\overrightarrow{AB}$ vektor abszolút értékét, ha $A(-2; 8; 7)$, $B(-6; 5; 6)$!

25.80. Az m mely értékénél lesznek az $\vec{a}(5; m+1; -3)$ és $\vec{b}(-10; 4; 6)$ vektorok kollineárisak?

25.81. Az n mely értékénél lesznek az $\vec{a}(3; 2; 6)$ és $\vec{b}(-8; 3; n)$ vektorok merőlegesek?

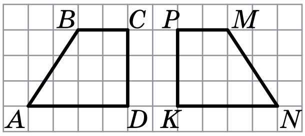
25.82. Határozzátok meg az $\vec{a}(-1; 1; 0)$ és $\vec{b}(1; 0; -1)$ vektorok közötti szöget!

Geometriai transzformációk

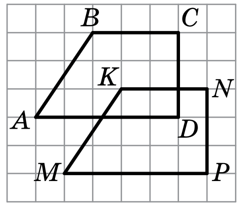
25.83. Hány olyan párhuzamos eltolás létezik, amelynél az egyenes képe: 1) ugyanaz az egyenes lesz; 2) vele párhuzamos egyenes lesz?

25.84. Írjátok fel annak a körnek az egyenletét, amely az $x^2 + y^2 = 4$ körvonal képe lesz az $\vec{a}(2; -3)$ vektorú párhuzamos eltolásnál!

25.85. Nevezd meg azt a mozgatást, amelynél a 25.6 ábrán lévő *ABCD* négyszög képe *MNKP* négyszög lesz!



25.6. ábra



25.7. ábra

25.86. Nevezd meg azt a mozgatást, amelynél a 25.7. ábrán lévő *ABCD* négyszög képe *MKNP* négyszög lesz!

25.87. Az $\vec{a}$ vektorral történő párhuzamos eltolásnál az $A(-3; 7)$ pont képe a $B(2; 3)$ pont lesz. Milyen koordinátái lesznek a $C(1; -5)$ pont képének az $\vec{a}$ vektorral történő párhuzamos eltolásnál?

25.88. Az $\vec{a}$ vektorral történő párhuzamos eltolásnál az $A(-5; 6)$ pont képe a $B(2; -1)$ pont lesz. Az $\vec{a}$ vektorral történő párhuzamos eltolásnál milyen koordinátájú pontnak lesz a képe a $D(10; -3)$ pont?

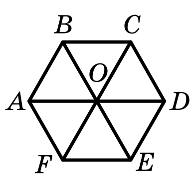
25.89. Milyen pont lesz a képe az $A(-4; 6)$ pontnak a koordináta-rendszer kezdőpontja körüli szimmetriánál?

25.90. Milyen koordinátái lesznek annak a pontnak, amely szimmetrikus az $A(2; -4)$ ponttal az $M(3; -1)$ ponthoz viszonyítva?

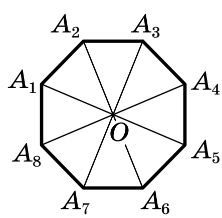
25.91. Milyen koordinátái lesznek annak a pontnak, amely szimmetrikus az $A(-2; 5)$ ponttal:
1) az abszcisszatengelyhez; 2) az ordinátatengelyhez viszonyítva?

25.92. Hány szimmetriatengelye lesz annak a téglalapnak, amely nem négyzet?

25.93. Az *ABCDEF* hatszög középpontja az *O* pont lesz, amint a 25.8. ábrán látható. Nevezzétek meg *CD* oldalának képét az *O* pont körüli, az óramutató járásával megegyező 120°-os elforgatásnál!



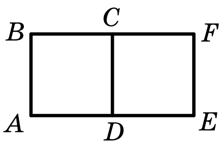
25.8. ábra



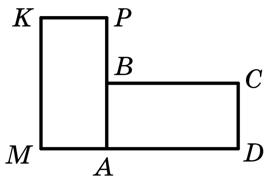
25.9. ábra

25.94. Az O pont a 25.9. ábrán látható szabályos nyolcszög középpontja. Nevezzétek meg az A_3A_4 oldalának képét az O pont körüli, az óramutató járásával ellenkező irányú 135°-os elforgatásnál!

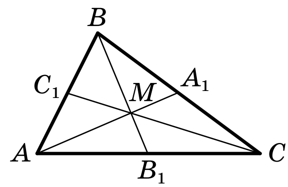
25.95. A 25.10. ábrán a $CDEF$ négyzet látható, amely az $ABCD$ négyzet képe az óramutató járásával megegyező 90°-os elforgatás után. Milyen pont lesz az elforgatás középpontja?



25.10. ábra



25.11. ábra



25.12. ábra

25.96. A 25.11. ábrán az $AMKP$ téglalap látható, amely az $ABCD$ téglalap képe az óramutató járásával ellentétes irányú 90°-os elforgatásnál. Melyik pont lesz az elforgatás középpontja?

25.97. A 25.12. ábrán látható ABC háromszög oldalfelezőinek metszéspontja az M pont. Határozzátok meg a homotécia arányossági tényezőjét: 1) amelynek középpontja az M pont, és amelynél a C_1 pont a C pont képe; 2) amelynek középpontja a B pont, és amelynél az M pont a B_1 pont képe.

25.98. Az $A_1(-1; 4)$ pont az $A(2; -8)$ pontnak a képe annál a homotéciánál, melynek középpontja a koordináta-rendszer kezdőpontja lesz. Mivel egyenlő a homotécia arányossági tényezője?

Soklapok

25.99. A téglatest alapjának élei 6 cm és 8 cm, testátlója az alaplap síkjához 60°-os szögben hajlik. Határozzátok meg a téglatest oldalélét!

25.100. Az egyenes hasáb alapja derékszögű háromszög, amelynek befogói 5 cm és 12 cm. Határozzátok meg a hasáb oldalfelszínét, ha oldaléle 10 cm!

25.101. A szabályos háromoldalú hasáb alapéle 8 cm, oldallapjának átlója 17 cm. Határozzátok meg a hasáb oldalfelszínét!

25.102. A szabályos négyoldalú hasáb átlója 25 cm, oldallapjának átlója 20 cm. Határozzátok meg a hasáb magasságát!

25.103. Az egyenes háromoldalú hasáb alapélei úgy aránylanak egymáshoz, mint 15 : 10 : 9. Határozzátok meg az alapéleit, ha az oldalfelszíne 816 cm^2, és a hasáb oldaléle 12 cm!

25.104. Az $ABCA_1B_1C_1$ egyenes hasáb magassága 12 cm, $AC = BC$, $AB = 8$ cm, a BB_1C_1C oldallapjának átlója 13 cm. Határozzátok meg az AB egyenesre és a C_1 pontra illeszkedő metszet területét!

25.105. A szabályos hatoldalú hasáb alapéle a, a hasáb legnagyobb átlója az alaplap síkjával α szöget zár be. Határozzátok meg a hasáb oldalfelszínét!

25.106. Adott az $ABCA_1B_1C_1$ egyenes hasáb. Az ABC és az A_1BC sík közötti szög β-val egyenlő. Határozzátok meg a hasáb magasságát, ha $BC = a$, $ACB\angle = 90°$, $BAC\angle = \alpha$!

25.107. Az egyenes paralelepipedon alapja rombusz, aminek az oldala a, hegyesszöge α. A paralelepipedon kisebbik átlója az alaplap síkjával β szöget alkot. Határozzátok meg a paralelepipedon teljes felszínét!

25.108. A szabályos háromoldalú gúla alapéle $\sqrt{3}$ cm, magassága $2\sqrt{2}$ cm. Határozzátok meg a gúla oldalélét!

25.109. A szabályos négyoldalú gúla alapéle 6 cm, oldaléle 5 cm. Határozzátok meg a gúla oldalfelszínét!

25.110. A gúla alapja téglalap, amelynek egyik oldala a. Az oldal és a téglalap átlója közötti szög α. A gúla minden oldaléle az alaplap síkjával β szöget zár be. Határozzátok meg a gúla magasságát!

25.111. A gúla alapja rombusz, amelynek átlói 40 cm-rel és 30 cm-rel egyenlők, a gúla magassága 5 cm. Határozzátok meg a gúla teljes felszínét, ha az alapéleinél lévő lapszögek egyenlők!

25.112. Az $ABCD$ gúla alapja ABC derékszögű háromszög ($ACB\angle = 90°$). Az ABD és az ACD síkok merőlegesek az alaplap síkjára. Határozzátok meg a gúla oldalfelszínét, ha $AB = 26$ cm, $BC = 10$ cm, $AD = 18$ cm!

Forgástestek

25.113. Határozzátok meg a henger teljes felszínét, amelynek magassága 12 cm, alapjának sugara pedig 5 cm!

25.114. A henger tengelymetszete négyzet, amelynek oldala 8 cm. Határozzátok meg a henger oldalfelszínét!

25.115. Hogyan változik – növekszik vagy csökken –, és hányszorosan a henger oldalfelszíne, ha:

1) az alaplapjának sugarát 3-szorosára növeljük, a magasságát pedig 4-szeresére;
2) az alapjának sugarát 2-szeresen csökkentjük, a magasságát pedig 6-szorosára növeljük?

25.116. A hengerbe egy metszetet szerkesztettünk, amely párhuzamos a tengelyével, és 3 cm-re van tőle. A metszet átlója 16 cm és az alaplap síkjával 60°-os szöget alkot. Határozzátok meg a henger alapjának sugarát!

25.117. A hengerbe egy metszetet szerkesztettünk, amely párhuzamos a tengelyével, ez az alaplap köréből egy ívet metsz ki, amelynek fokmértéke α $(0° < \alpha < 180°)$. A metszet átlója az alaplap síkjával β szöget alkot. Határozzátok meg a metszet területét, ha a henger alapjának sugara R.

25.118. A henger alkotóján át két metszetet szerkesztettek, mindegyik párhuzamos a henger tengelyével. Ezeknek a metszeteknek a síkjai merőlegesek egymásra. Határozzátok meg a henger tengelymetszetének területét, ha az egyik metszet területe 30 cm^2, a másiké pedig 40 cm^2!

25.119. A kúp alapjának átmérője 6 cm, magassága 4 cm. Határozzátok meg a henger alkotóját!

25.120. A kúp alkotója m, alkotója és magassága közötti szöge α. Határozzátok meg a kúp oldalfelszínét!

25.121. A kúp alkotója 25 cm, magassága 24 cm. Határozzátok meg a kúp oldalfelszínét!

25.122. A kúp alapjának sugarát és magasságát 2-szeresére növelték. Hányszorosára növekszik a kúp oldalfelszíne?

25.123. A kúp alapjának sugarát 6-szorosára növelték, alkotóját pedig 3-szorosára csökkentették. Hogyan változik meg a kúp oldalfelszíne – csökken vagy növekszik –, és hányszorosan?

25.124. A kúp csúcsán és alaplapjának húrján keresztül, amely 60°-os ívet köt össze, síkot fektettek, ami az alaplappal 30°-os szöget alkot. Határozzátok meg a keletkezett metszett területét, ha a kúp alapjának sugara 4 cm!

25.125. A kúp tengelymetszete derékszögű háromszög. A kúp alapjának sugara R. Határozzátok meg a kúp tengelymetszetének területét!

25.126. A kúp alapjában húzott húr, amelynek hossza a, az alaplap középpontjából α szög alatt látszik. A kúp alkotója és alaplapja közötti szög β. Határozzátok meg a kúp magasságát!

25.127. A gömbfelszínt egy sík metszi, amely a gömb középpontjától 24 cm-re van. Határozzátok meg a gömbfelszín sugarát, ha a keletkezett metszet hossza $\frac{3}{5}$-e lesz azon metszet hosszának, amely a gömb középpontjára illeszkedő sík, és a gömbfelszín metszete alkot!

25.128. A derékszögű háromszög csúcsai egy $3\sqrt{5}$ cm sugarú gömbfelszínre illeszkednek. Határozzátok meg a gömbfelszín középpontja és a háromszög síkja közötti távolságot, ha a háromszög befogói 8 cm és 15 cm!

A testek térfogatai. A gömb felszíne

25.129. A téglatest alapja négyzet. A téglatest átlója 8 cm, az oldallappal 30°-os szöget zár be. Határozzátok meg a téglatest térfogatát!

25.130. A szabályos hatoldalú hasáb oldallapjai négyzetek, a nagyobbik átlója d-vel egyenlő. Határozzátok meg a hasáb térfogatát!

25.131. Az egyenes hasáb alapja egyenlő szárú trapéz, amelynek alapjai 4 cm és 10 cm, a szára 5 cm. A hasáb oldaléle 10 cm. Határozzátok meg a hasáb térfogatát!

25.132. A szabályos négyoldalú hasáb átlója 13 cm, oldallapjának átlója 12 cm. Határozzátok meg a hasáb térfogatát!

25.133. Az egyenes hasáb alapja egyenlő szárú háromszög, amelynek az alapjánál lévő szöge 30°. Annak az oldallapjának az átlója, amely tartalmazza alapjának a szárát, 8 cm, és ez az átló az alaplap síkjához 60°-os szögben hajlik. Határozzátok meg a hasáb térfogatát!

25.134. Az egyenes hasáb alapja rombusz, amelynek átlói 5 cm és 12 cm. A hasáb kisebbik átlója 13 cm. Számítsátok ki a hasáb térfogatát!

25.135. Határozzátok meg a szabályos négyoldalú gúla térfogatát, amelynek alapéle 6 cm, és átlómetszetei egyenlő oldalú háromszögek!

25.136. A szabályos négyoldalú gúla magassága 12 cm, apotémája 15 cm. Számítsátok ki a gúla térfogatát!

25.137. A szabályos háromoldalú gúla alapéle $16\sqrt{3}$ cm, apotémája 17 cm. Számítsátok ki a gúla térfogatát!

25.138. A szabályos háromoldalú gúla alapéle 6 cm, az alapélénél lévő lapszög mértéke 30°. Határozzátok meg a gúla térfogatát!

25.139. A henger tengelyével párhuzamosan metszetet szerkesztettek, amely 4 cm oldalú négyzet lesz, és az alaplap köréből egy 90°-os ívet metsz le. Határozzátok meg a henger térfogatát!

25.140. A henger alsó alaplapjának húrja az alaplap középpontjából α szögben látszik. Az a szakasz, amely a felső alap középpontját az adott húr felezőpontjával köti össze, az alaplaphoz β szögben hajlik! Határozzátok meg a henger térfogatát, ha alkotója m!

25.141. A kúp térfogata 96π cm^3, alaplapjának sugara 6 cm. Határozzátok meg a kúp oldalfelszínét!

25.142. A kúp alapjában egy $2\sqrt{2}$ cm hosszú húr van húzva, amely az alaplap középpontjától 1 cm távolságra található. Határozzátok meg a kúp térfogatát, ha alkotója az alaplap síkjához 60°-os szögben hajlik!

25.143. A kúp magassága 12 cm, tengelymetszetének a csúcsánál lévő szöge 120°-os. Határozzátok meg a kúp térfogatát!

25.144. A gömb középpontjától 12 cm-re síkot fektettek. A keletkezett metszet területe 64π cm^2. Határozzátok meg a gömb felszínét!

25.145. A gömbfelszín és a sík metszetének hossza 4π, és a metsző sík a gömb középpontjától $\sqrt{5}$ cm távolságra van. Határozzátok meg a gömb térfogatát!

Barátunk, a számítógép

Ebben a tanévben rendszerezitek és tökéletesítitek az ismereteiteket, amelyek lehetővé teszik számotokra a számítógép alkalmazását a matematika elsajátításában. Önállóan határozzátok meg, milyen technikai feladatokat tudtok végrehajtani a számítógépen hogyan kell szemléletesen ismertetni a tananyagot. Ajánljuk algoritmusok készítését a feladatok megoldásához, és programokat ezek megvalósításához olyan programozási nyelven, amelyet ismertek. A következőkben olyan feladatok találhatók, amelyek megfelelnek a tanult témáknak. Ezek a feladatok azonban nem merítik ki a számítógép adta lehetőségeket, amelyeket az iskolai matematika keretén belül a számítógép alkalmazása biztosít.

Számítógép segítségével megoldható 11. osztályos matematika feladatok

1. ponthoz. ***Exponenciális függvények és tulajdonságaik***

Hozzatok fel példákat a fizikából, biológiából, kémiából és más tantárgyakból olyan folyamatokra, amelyek leírhatók exponenciális függvénnyel. Ezeket a folyamatokat illusztráljátok táblázatszerkesztő program segítségével; szerkesszétek meg a grafikonjait!

Van-e a számítógép *Számológép* programjának standart változatában az általatok tanult programozási nyelven olyan lehetőség, hogy kiszámítható legyen az a^x?

2. ponthoz. ***Exponenciális egyenletek***

A valós kitevőjű hatvány fogalmát alkalmazva írjatok algoritmust az $a^x = b$ egyenlet megoldásához megadott $a > 0$ és $b > 0$ esetére! Akkor tekinthetitek a megoldást helyesnek, ha az a^x 0,01-nél kevesebbel különbözik a b-től.

3. ponthoz. ***Exponenciális egyenlőtlenségek***

A valós kitevőjű hatvány fogalmát alkalmazva írjatok algoritmust az $a^x > b$ egyenlet megoldásához megadott $a > 0$ és b esetére! Vizsgáljátok meg az $a^x \geqslant b$, $a^x < b$, $a^x \leqslant b$ eseteket is!

4. ponthoz. ***Logaritmus és tulajdonságai***

Keressetek meg a számítógép *Számológép* standard programjában az általatok tanult programozási nyelven olyan lehetőséget, amellyel kiszámítható a logaritmus értéke! Milyen alappal számítható ki a logaritmus értéke? Hogyan alkalmazhatók ezek a kellékek bármilyen alapú logaritmus értékének meghatározására?

5. ponthoz. ***Logaritmusfüggvény és tulajdonságai***

Készítsetek a táblázatkezelő program segítségével egyforma alapú exponenciális és logaritmusfüggvény értéktáblázatot, ha az alap nagyobb, mint egy; ha kisebb mint 1! Egy képernyőre szerkesszétek meg ezeknek a függvényeknek a grafikonjait! A függvények milyen tulajdonságait mutatják be a kapott grafikonok?

8. ponthoz. ***Az exponenciális és a logaritmusfüggvény tulajdonságai***

Hogyan adják meg az *e* számot a számítógép *Számológép* standart programjában az általatok tanult programozási nyelvben? Vannak-e olyan módszerek, amelyekkel kiszámítható a természetes logaritmus?

9. ponthoz. ***Primitív***

A függvény grafikonjának szerkesztésére szolgáló eszközök alkalmazásával állítsatok össze algoritmust a lineáris függvény primitívjének megszerkesztésére!

11. ponthoz. ***A görbevonalú trapéz területe. Határozott integrál***

Feltételezzük, hogy van egy alprogramotok, amely kiszámolja valamely függvény értékét az adott pontban. Hogyan kell ezzel kiszámítani az adott függvény határozott integrálját a megadott intervallumon?

Ezzel a módszerrel számítsatok ki néhány integrált az ebben a paragrafusban megoldott példák közül, és hasonlítsátok össze a kapott eredményeket!

12. ponthoz. ***A szorzási és összeadási szabály a kombinatorikában***

Milyen módszerekkel lehet a számítógép *Számológép* standart programjával az általatok tanult programozási nyelven kiszámítani a szám faktoriálisát? Készítsetek a táblázatkezelő program segítségével táblázatot az első néhány szám faktoriálisának meghatározására!

13. ponthoz. ***Permutációk. Variációk. Kombinációk***

Feltételezzük, hogy van egy alprogramotok, amely kiszámolja a szám faktoriálisát. Felhasználva ezt az alprogramot, készítsetek olyan algoritmust, amely kiszámol egy adott számú permutációt, variációt és kombinációt!

14. ponthoz. ***A véletlen esemény valószínűségének klasszikus meghatározása***

Ismerkedjetek meg a véletlenszám-generátorral! Az általatok tanult programozási nyelven határozzátok meg azt a módszert, amellyel véletlen szám kapható!

15. ponthoz. ***A matematikai statisztika alapjai***

A véletlenszám-generátor felhasználásával készítsetek véletlen számok halmazát! Ezekkel a számokkal töltsetek fel egy táblázatot! Határozzátok meg a kapott számok terjedelmét, átlagát, móduszát és mediánját!

16. ponthoz. ***Hasáb***

Szerkesszetek a grafikus szerkesztőprogram segítségével egyenes hasábot, ferde hasábot, hasáb magasságát, hasáb átlómetszetét! Szerkesszétek meg a hasáb vetületét arra a síkra, amely az alapjával párhuzamos, és arra a síkra, amely párhuzamos a magasságával!

17. ponthoz. ***Paralelepipedon***

Szerkesszetek a grafikus szerkesztőprogram segítségével paralelepipedont, téglatestet! Ennek a testnek és a párhuzamos vetítésnek milyen tulajdonságait kell figyelembe venni, hogy megfelelő képet kapjunk?

18. ponthoz. ***Gúla***

Szerkesszetek a grafikus szerkesztőprogram segítségével különböző gúlákat! Szerkesszétek meg a gúlák magasságait, az alapélnél lévő lapszöget!

19. ponthoz. ***Henger***

Írjatok programot, amely kiszámítja a henger oldalfelszínét, teljes felszínét, ha adott az alaplap sugara és a henger magassága.

20. ponthoz. ***Kúp***

Írjatok programot, amely kiszámítja a kúp oldalfelszínét, teljes felszínét, ha adott az alaplap sugara és a kúp magassága!

21. ponthoz. ***Gömb és gömbfelszín***

Írjatok programot, amely az adott gömbsugár és a gömbközéppont síktól való távolsága alapján meghatározza:

- a gömb és a sík kölcsönös helyzetét;
- a gömb és a sík metszetének területét;
- a gömbfelszín és a sík metszésvonalának hosszát!

22. ponthoz. ***A testek térfogatai. A hasáb és a gúla térfogatainak képletei***

Írjatok programot, amely meghatározza a következő testek térfogatait:

1) szabályos n oldalú hasáb, ha adott a alapéle és h magassága;

2) szabályos n oldalú gúla, ha adott a alapéle és h magassága!

A 23. ponthoz. ***A forgástestek térfogatai. A gömb felszíne***

Írjatok programot, amely meghatározza:

1) a forgástestek (kúp, henger, gömb) térfogatait;

2) a gömb felszínét!

A *Word* és az *Excel* diagramszerkesztőivel készítsetek oszlopdiagramot! Válasszatok térhatású diagram formát a mértani testek (hasáb, kúp) ábrázolására! A mértani testekről elsajátított tananyag felhasználásával állapítsátok meg, melyik test adja meg a diagram adatairól a legmegfelelőbb ábrázolást.

Feleletek és útmutatások

1.12. 1) $-6a^{\sqrt{5}}-13$; 2) $\dfrac{2a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}}+b^{\sqrt{2}}}$. **1.13.** 1) $4^{\frac{1}{\pi}}ab$; 2) $\dfrac{1}{a^{2\sqrt{5}}}$. **1.14.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem; 4) nem. **1.15.** 36. **1.16.** [–2; 4]. **1.18.** 3) $(-4;+\infty)$; 4) $[1;+\infty)$. **1.19.** 1) $(-\infty;+\infty)$; 2) $[0;+\infty)$. **1.20.** $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. **1.22.** Nincsenek gyökei; 2) végtelen sok gyöke van; 3) 2 gyöke van. **1.23.** 1) 1 gyöke van; 2) végtelen sok gyöke van; 3) 2 gyöke van. **1.24.** *Útmutatás.* Határozzátok meg az adott függvény értelmezési tartományát! **1.25.** 1) 4; $\frac{1}{4}$; 2) 1; –1. **1.26.** 1) 6; $\frac{1}{6}$; 2) 6; $5\frac{1}{5}$. **1.29.** 2) $33\cdot 2^{x-4}$; 3) $13\cdot 3^{x-1}$; 4) $5\cdot 2^{x+1}$; 5) $-29\cdot 6^{x-1}$; 6) $12\cdot 9^{x}$. **1.30.** 1) $(-\infty;-2)\cup(-2;4)\cup(4;+\infty)$; 2) [0; 16]. **1.31.** 1) $(-\infty;16]$; 2) $[3;+\infty)$; 3) (–1; 1).

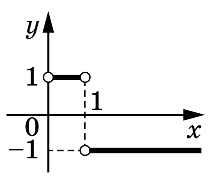
2.3. 1) 1; 2) 3; 3) 3; 4) 1; 5) 3; 6) 2. **2.4.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 3. **2.5.** 1) 1; 2; 2) 2; 3) 1; 4) 2. **2.6.** 1) 1; 2) –1; 2. **2.7.** 3) $-\frac{1}{3}$; 4) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **2.8.** 3) $(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; 4) 6,5. **2.9.** 1) 5; 2) 2; 3) 1; 4) 3. **2.10.** 1) 1; 2) 2; 3) 2; 4) $\frac{3}{2}$. **2.11.** 1) –1; 1; 2) 2; 3) 1; 4) 1. **2.12.** 1) –1; 1; 2) –1; 3) 0; 4) 2. **2.13.** 1) $\frac{4}{3}$; 2) 3; 3) 0; $\frac{1}{2}$; 4) 2. **2.14.** 1) 4; 2) 0; $\frac{1}{3}$; 3) 2. **2.15.** 1) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 2) 1. **2.16.** –1; 2. **2.17.** 2. **2.18.** 0. **2.19.** 1) 0; 1; 2) 0; –1; 3) –1; 4) 0. **2.20.** 1) 0; 1; 2) 0; 2. **2.21.** $[-3;2)\cup(2;7]$. **2.22.** $\frac{1}{2}$.

3.4. 5) $(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$; 6) $\left[-3;\frac{1}{3}\right]$; 7) $(-\infty;0)$; 8) [–1; 2]. **3.5.** 3) $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$; 4) $(-\infty;-2]\cup\left[\frac{1}{5};+\infty\right)$; 5) $(-1;+\infty)$. **3.6.** 1) 5; 2) 3; 3) 4. **3.7.** 1) –5; 2) 7. **3.9.** 1) $(-\infty;-2]$; 2) $(-\infty;4]$. **3.10.** 1) $(-1;+\infty)$; 2) $(-\infty;2)$; 3) $(5;+\infty)$; 4) $(-\infty;-1]$; 5) $(-\infty;0]$; 6) $(-\infty;1)$. **3.11.** 1) $(-\infty;2)$; 2) $[0;+\infty)$; 3) $(3;+\infty)$; 4) $(1;+\infty)$. **3.12.** 1) $(2;+\infty)$; 2) $(-\infty;1)$; 3) [0; 1]; 4) $(-\infty;-3]\cup[-2;+\infty)$; 5) $(-\infty;1]$; 6) $[1;+\infty)$. **3.13.** 1) $(-\infty;0]$; 2) $[6;+\infty)$; 3) $(-\infty;-1)\cup(0;+\infty)$; 4) [0; 2]. **3.14.** 1) $(-\infty;2)\cup(2;3]$; 2) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3};2\right]$. **3.15.** 1) $(2;+\infty)$; 2) (–3; 1); 3) $(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$; 4) {0}. **3.16.** 1) $(1;+\infty)$; 2) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$. **3.17.** [0; 1]. **3.18.** [0; 4]. **3.19.** 1) (0; 1); 2) $(-\infty;-1]\cup(0;+\infty)$. **3.20.** 1) $\left(0;\frac{1}{2}\right)$; 2) $(-\infty;0)\cup(0;1]$. **3.21.** 1,5. **3.22.** 1.

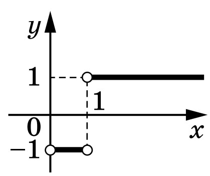
4.17. 1) –3; 2) –1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$. **4.18.** 1) 1; 2) –1; 3) –1. **4.19.** 2) 4; 3) 60; 4) 180. **4.20.** 1) 72; 2) 10. **4.21.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) –3; 3) 2; 4) 4. **4.22.** 1) –5; 2) –2; 3) 6; 4) 9. **4.23.** 2) 144; 3) 64; 4) 1; 5) 0; 6) 48. **4.24.** 1) 9; 2) 10; 4) 2. **4.25.** 0. **4.26.** lg 2.

Útmutatás. Minden logaritmust alakítsunk át 10-es alapúvá! **4.27.** $\frac{5}{2}$. **4.30.** $\frac{a+3b}{a-b}$. **4.31.** 1) $x_{\max} = -2$, $x_{\min} = 2$; 2) $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = -\frac{7}{9}$.

5.17. 2) $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; 4) $(-\infty; 9) \cup (9; 10)$. **5.18.** 2) $(-3; -2) \cup (-2; +\infty)$; 3) $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **5.19.** 1) 2; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$. **5.20.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 3. **5.21.** 1) 1 gyök; 2) 1 gyök; 3) 1 gyök. **5.22.** 1) 1 gyök; 2) 1 gyök. **5.23.** 1) $2 < \log_3 10 < 3$; 2) $2 < \log_2 5 < 3$; 3) $-2 < \log_{\frac{1}{3}} 7 < -1$; 4) $-1 < \log_{0,1} 2 < 0$. **5.24.** 1) $4 < \log_2 29 < 5$; 2) $-4 < \log_{\frac{1}{2}} 9 < -3$. **5.25.** 1) $\log_4 5 > \log_5 4$; 2) $\log_{1,5} 1{,}3 < \log_{1,3} 1{,}5$; 3) $\log_{0,7} 0{,}8 < \log_{0,8} 0{,}7$. **5.27.** 1) Minden valós szám, kivéve a $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 2) minden $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ alakú szám; 3) $\left(-2; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup$ $\cup \left(\sqrt{3}; 2\right)$; 4) $(3; 4) \cup (4; 6]$; 5) $(-2; -1) \cup (-1; 3)$; 6) $(-\infty; 1) \cup (3; 6) \cup (6; 7)$; 7) $(0; 2) \cup (2; 3)$; 8) $(-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (0; +\infty)$. **5.28.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) minden valós szám, kivéve a $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) minden $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ alakú szám; 4) $(-8; -2) \cup (-2; -1)$; 5) $(0; 7) \cup (7; 8)$; 6) $(-1; 1) \cup (1; 2)$. **5.29.** 1) Lásd az ábrát; 2) lásd az ábrát. **5.30.** 1) 7; 2) nincs gyöke; 3) 1; 4) 15; 5) $(-1)^k \arcsin\frac{1}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 6) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.



5.29. (1.) feladathoz

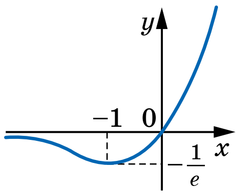


5.29. (2.) feladathoz

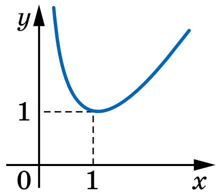
6.5. 1) 16; 2) 64; 3) 27; 4) 6; 5) 6; 6) 512. **6.6.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) 5; 3) 10^{10}. **6.7.** 1) –2; 6; 2) 5; 3) nincsenek gyökei; 4) –2. **6.8.** 1) –2; 2) nincsenek gyökei. **6.9.** 1) 4; 2) 2; 3; 3) 5; 4) 4. **6.10.** 1) 1; 2) 2; 3) $\frac{3}{4}$; 4) –1. **6.11.** 1) 2; $\frac{1}{16}$; 2) 9; $\frac{1}{3}$; 3) 25; $\sqrt{5}$; 4) 8; $10^7 - 2$. **6.12.** 1) –8; $-\frac{1}{2}$; 2) 343; $\frac{1}{49}$; 3) 27; $\sqrt[3]{3}$; 4) $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **6.13.** 1) 1; 2) –1; 3) 0; 4) 6. **6.14.** 1) 0; 13; 2) –2. **6.15.** 1) 4; 2) 7. **6.16.** 1) 3; 2) 8. **6.17.** 1) 3; 4; 2) 1; 3) 4; 4) 3. **6.18.** 1) 4; 2) 3. **6.20.** 1) Növekvő a [–2; 1] intervallumon, $x_{\max} = 1$, $x_{\min} = -2$; 2) növekvő a $(-\infty; -3)$ és a $(-3; 0]$ intervallumokon, $x_{\max} = 0$; 3) növekvő a [–1; 5] intervallumon, $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 5$. **6.21.** $y = -8x + 18$.

7.5. 1) 21; 2) 26. **7.6.** 1) 0; 2) 0; 1; 2; 3; 4; 5. **7.7.** 1) $(1; +\infty)$; 2) (0; 1); 3) $(3; +\infty)$; 4) $(-3; -2) \cup (3; +\infty)$; 5) $(-\infty; -3] \cup [4; 9)$; 6) $\left(-\frac{11}{10}; 4\right] \cup [5; +\infty)$. **7.8.** 1) $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$; 2) $\left(\frac{5}{7}; \frac{3}{2}\right)$; 3) $[5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -4] \cup [3; 5)$. **7.9.** 1) $[-1; 1) \cup (3; 5]$; 2) $(-2; -1) \cup (0; 1)$; 3) $(-6; -5) \cup (-5; -4)$; 4) $[-1; 0) \cup (3; 4]$; 5) (3; 6]; 6) (1; 3]. **7.10.** 1) (2; 3); 2) $[1; 2) \cup (4; 5]$; 3) $[-4; -3) \cup (0; 1]$; 4) $[0; 1) \cup (1; 2]$; 5) (–3; –1); 6) (4; 5]. **7.11.** 1) $(5; +\infty)$; 2) $(1; +\infty)$; 3) (0; 4); 4) (5; 7]; 5) $\left(-1; -\frac{3}{5}\right]$; 6) $\left(-\infty; -\frac{7}{5}\right]$. **7.12.** 1) [–1; 0); 2) (1; 2]; 3) $[11; +\infty)$; 4) $\left[\frac{14}{3}; +\infty\right)$. **7.13.** 1) $\left[\frac{1}{5}; 5\right]$; 2) $\left(0; \frac{1}{9}\right] \cup [9; +\infty)$; 3) (0,0001; 10); 4) $\left[\frac{1}{16}; 256\right]$; 5) $(0; 4] \cup [8; +\infty)$; 6) $\left(0; \frac{1}{81}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. **7.14.** 1) $\left(0; \frac{1}{8}\right] \cup [8; +\infty)$; 2) $(0; 0{,}1] \cup [1000; +\infty)$; 3) (0,5; 4); 4) [0,04; 5]. **7.15.** 1; –20. **7.16.** (1; –2) i $\left(-\frac{1}{3}; \frac{14}{27}\right)$. **7.17.** $y = -x + 2$.

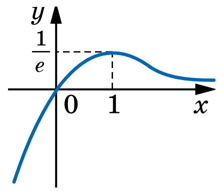
8.9. 1) $y = x + 1$; 2) $y = 2x + 1$; 3) $y = (2 + 2\ln 2)x - 2\ln 2$; 4) $y = 4x - 1$. **8.10.** 1) $y = x - 1$; 2) $y = 2x + 1$. **8.11.** 1) $y = 2$; 2) $y = -1$. **8.12.** $y = -1600$. **8.13.** 1) $y = ex$; 2) $y = x + 1 + \ln 5$. **8.14.** 1) Növekvő a $[0; +\infty)$ intervallumon és csökkenő a $(-\infty; 0]$ intervallumon, $x_{\min} = 0$; 2) növekvő a $\left[0; \frac{2}{\ln 2}\right]$ intervallumon, csökkenő a $(-\infty; 0]$ és a $\left[\frac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$ az intervallumokon, $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = \frac{2}{\ln 2}$; 3) növekvő a $[3; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $(-\infty; 2]$ és $(2; 3]$ intervallumokon, $x_{\min} = 3$; 4) növekvő a $(-\infty; 1]$ intervallumon, csökkenő az $[1; +\infty)$ intervallumon, $x_{\max} = 1$; 5) növekvő az $\left[e^{-\frac{1}{3}}; +\infty\right)$ intervallumon, csökkenő a $\left(0; e^{-\frac{1}{3}}\right]$ intervallumon, $x_{\min} = e^{-\frac{1}{3}}$; 6) növekvő a $(0; 1]$ intervallumon, csökkenő az $[1; +\infty)$ intervallumon, $x_{\max} = 1$; 7) növekvő a $(0; +\infty)$ intervallumon; 8) növekvő az $[e; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $(0; 1)$ és az $(1; e]$ intervallumokon $x_{\min} = e$. **8.15.** 1) Növekvő a $\left(-\infty; \frac{3}{\ln 3}\right]$ intervallumon, csökkenő a $\left[\frac{3}{\ln 3}; +\infty\right)$ intervallumon, $x_{\max} = \frac{3}{\ln 3}$; 2) növekvő a $(-\infty; -2]$ intervallumon, csökkenő a $[-2; +\infty)$ intervallumon, $x_{\max} = -2$; 3) növekvő az $[1; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $(0; 1]$ intervallumon, $x_{\min} = 1$; 4) növekvő a $(0; e]$ intervallumon, csökkenő az $[e; +\infty)$ intervallumon, $x_{\max} = e$; 5) növekvő az $[1; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $(0; 1]$ intervallumon, $x_{\min} = 1$; 6) növekvő a $(0; e^2]$ intervallumon, csökkenő az $[e^2; +\infty)$ intervallumon, $x_{\max} = e^2$. **8.16.** $e + 1$; $\frac{1}{e} - 1$. **8.17.** $\frac{1}{e^2}$; 0.



8.18. (1.) feladathoz



8.18. (2.) feladathoz



8.19 feladathoz

8.18. 1) Lásd az ábrát; 2) lásd az ábrát. **8.19.** Lásd az ábrát. **8.20.** 1) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; 2) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **8.21.** 1) (4; 4); 2) (4; –4).

9.6. 1) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{10}{3}$; 2) $y=-\cos x-2$; 3) $y=e^x-7$. **9.7.** 1) $y=\frac{x^4}{4}+1$; 2) $y=\sin x+2$; 3) $y=\frac{3^x}{\ln 3}$. **9.8.** 1) $y=-\frac{1}{x}-6$; 2) $y=\operatorname{tg} x+2\sqrt{3}$; 3) $y=\ln(-x)+4$; 4) $y=-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{3}$. **9.9.** 1) $y=2\sqrt{x}+2$; 2) $y=\ln x-1$; 3) $y=x^2-24$. **9.13.** 1) (2; 2,12]; 2) [0,68; 0,7). **9.14.** 1) tg 2α; 2) 2.

10.3. 1) $F(x)=x-x^2+8$; 2) $F(x)=x^3-2x^2+5$; 3) $F(x)=4x+\frac{1}{x}-4$; 4) $f(x)=\frac{(3x-2)^3}{9}-\frac{1}{9}$. **10.4.** 1) $F(x)=3x-3x^2+6$; 2) $F(x)=x^4-2x^3+x+5$; 3) $F(x)=x^2-2\sqrt{x}-2$; 4) $F(x)=-2\cos x$. **10.5.** $F(x)=x^4+2x^2-3$, a primitívnek még egy zérushelye van, amely 1 lesz. **10.6.** $F(x)=\frac{x^3}{3}-12x+27$. **10.7.** F_2. **10.8.** F_2. **10.9.** $s(t)=\frac{t^3}{3}+t^2-3t$. **10.10.** $s(t)=2t^3+t-47$ vagy $s(t)=2t^3+t-67$. **10.11.** $F(x)=-x^2+5x-\frac{17}{4}$. **10.12.** $F(x)=\frac{x^2}{2}+x-3{,}5$. **10.13.** 1) πn, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 2) $\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; 3) πn, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **10.14.** 1) $(-\infty;-2{,}5)\cup(0;2{,}5]$; 2) $[-2;1)$.

11.5. 1) $4\frac{2}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 4; 4) $7\frac{1}{3}$; 5) $\frac{1}{2}\ln 8$; 6) $1\frac{1}{3}$. **11.6.** 1) $1\frac{1}{3}$; 2) $7\frac{1}{3}$; 3) $8\ln 2$. **11.8.** 4) 70; 5) 39; 6) $1{,}5-0{,}5e^2$. **11.9.** 2) –45; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $1\frac{3}{4}$. **11.10.** 1) $10\frac{2}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) e^2-1; 4) $4\ln 4-3$; 5) $12-4\ln 4$; 6) $10\frac{2}{3}$; 7) $1\frac{1}{3}$; 8) 4,5; 9) 4,5; 10) $\frac{1}{3}$; 11) $\frac{1}{12}$; 12) 1; 13) $24-7\ln 7$; 14) $\sqrt{2}-1$. **11.11.** 1) $4\frac{1}{4}$; 2) $\frac{2}{3}$; 3) $1\frac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) $2\frac{2}{3}$; 6) $6-3\ln 3$; 7) 1; 8) $12-5\ln 5$. **11.12.** 1) $(0;1)\cup(3;+\infty)$; 2) $(\log_{0,2}6;+\infty)$. **11.13.** $(1;+\infty)$. **11.14.** 3; –3. **11.15.** 2; –2. **11.16.** 1) –1,5; 2) 1; 3) 1. **11.17.** 6.

12.1. $4\cdot 3$. **12.2.** $5\cdot 5$, $5\cdot 4$. **12.3.** $3\cdot 6\cdot 5$. **12.4.** 5!. **12.5.** 6^4. **12.6.** 5^3. **12.7.** 1) $3\cdot 2$; 2) $3\cdot 3$. **12.8.** Amikor Anti veszi el az almát. **12.9.** $3\cdot 2+4\cdot 3$.

12.10. $3\cdot 6+3\cdot 5+6\cdot 5$. **12.11.** 1) 4!; 2) 3!. **12.12.** $5\cdot 6^3$. **12.13.** $4\cdot 5^2$. **12.14.** $9\cdot 10^6$. **12.15.** 2^4. **12.16.** 6^3. **12.17.** $6\cdot 7\cdot 4$. **12.18.** $6\cdot 7\cdot 3$. **12.19.** *I. módszer.* $4\cdot 4!$; *II. módszer.* $5!-4!$. **12.20.** $4!\cdot 2$. **12.21.** $9\cdot 10^3\cdot 2$. **12.22.** $9\cdot 10^4\cdot 4$. **12.23.** $4\cdot 3\cdot 2+5\cdot 2+6\cdot 4$. **12.24.** $5^7+4\cdot 5^6$. **12.25.** 1) 4,1; 2) 1; 3) 2; 4) 83; 5) 1; 6) 4. **12.26.** 3.

13.1. 7!. **13.2.** 20!. **13.3.** 5!. **13.4.** A_{11}^2. **13.5.** A_{15}^3. **13.6.** A_{12}^6. **13.7.** A_{16}^3. **13.8.** A_{32}^2. **13.9.** C_{29}^5. **13.10.** C_n^4. **13.11.** C_{10}^3. **13.12.** $A_3^2\cdot A_5^4$. **13.13.** $C_7^2\cdot C_{13}^3$. **13.14.** $C_{12}^3\cdot C_{88}^7$. **13.15.** $7\cdot C_{12}^2+12\cdot C_7^2$. **13.16.** *I. módszer.* $C_9^3+15\cdot C_9^2+9\cdot C_{15}^2$; *II. módszer.* $C_{24}^3-C_{15}^3$. **13.17.** 40 %.

14.1. Nem. **14.2.** Igen. **14.3.** 1) 0; 2) 1. **14.4.** 1) 0; 2) 1. **14.6.** 3) $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{2}{3}$. **14.9.** 5) $\frac{8}{17}$; 6) $\frac{7}{17}$. **14.11.** 1) $\frac{b}{a+b+c}$; 3) $\frac{a+b}{a+b+c}$. **14.12.** 2) $\frac{m+k}{n+m+k}$. **14.13.** $\frac{5}{33}$. **14.14.** $\frac{1}{494}$. **14.15.** $\frac{C_{12}^5}{C_{27}^8}$. **14.16.** $\frac{C_{15}^3}{C_{1000}^3}$. **14.17.** 1) 18; 2) 3. **14.18.** 2) 8. **14.19.** 2 év.

15.3. Módusz. **15.4.** Medián és módusz. **15.11.** 2,21875 ≈ 2,2 labda egy játékra. **15.12.** 3,8. **15.17.** 1) 6; 2) 3. **15.18.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 1; 4) 1. **15.19.** –0,96.

16.13. 18 cm². **16.14.** $32\sqrt{2}$ cm². **16.15.** 1) $a\sqrt{2}$; 2) 45°. **16.16.** $2a$, $a\sqrt{5}$. **16.17.** $2a\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **16.18.** 9 cm. **16.19.** 7 cm. **16.20.** 6 cm. **16.21.** $72\sqrt{6}$ cm². **16.22.** $12\sqrt{7}$ cm². **16.23.** 48 cm². **16.24.** 1250 cm². **16.25.** 1) $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$; 2) $\arcsin\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **16.26.** $\frac{a^2}{2\cos\beta\operatorname{tg}^2\beta\operatorname{tg}\alpha}$ **16.27.** 1) $\frac{1}{2}d\operatorname{tg}\beta$; 2) $\frac{d^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{4\cos\beta}$. **16.28.** 522 cm². **16.29.** 6 cm, 8 cm vagy 8 cm, 6 cm. **16.30.** $\frac{1}{2}h^2\operatorname{tg}\alpha$. **16.31.** $\frac{h^2\sin\alpha}{2\left(1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}$. **16.32.** $3\sqrt{10}$ cm.

17.5. 7 cm. **17.6.** 2 cm, 4 cm, 4 cm. **17.7.** $a\sqrt{3}$. **17.8.** $36\sqrt{2}$ cm². **17.9.** 1) $\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{7}{13}$. **17.10.** 1) $\operatorname{arctg}\frac{12}{5}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{6\sqrt{74}}{37}$. **17.11.** 18 cm² vagy 16 cm². **17.12.** $\frac{2d^2\operatorname{tg}\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **17.13.** $144\sqrt{2}$ cm². **17.14.** $12\left(\sqrt{2}+2\right)$ cm². **17.15.** $4\left(5\sqrt{3}+4\right)$ cm². **17.17.** 2 cm. **17.18.** 64 cm². **17.19.** $2\sqrt{S_1^2+S_2^2}$. **17.20.** $\sqrt{\frac{S_1S_2}{2S}}$. **17.21.** 300 cm². **17.22.** $50\left(\sqrt{2}+1\right)$ cm².

18.12. $100\left(\sqrt{3}+1\right)$ cm². **18.13.** $16\sqrt{3}$ cm². **18.14.** 6 cm. **18.15.** 20 cm, $\sqrt{281}$ cm, 20 cm, $\sqrt{281}$ cm. **18.16.** $\frac{1}{2}b^2\sin 2\beta$. **18.17.** $\frac{1}{2}a^2\operatorname{tg}\alpha$. **18.19.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$. **18.20.** $\frac{d^2}{2\cos\alpha}$. **18.21.** 72 cm². **18.22.** $75\sqrt{6}$ cm². **18.23.** 3) 24 cm². **18.24.** 20 cm.

18.25. 20 cm. **18.26.** $5\sqrt{3}$ cm. **18.27.** 1) $32\sqrt{2}$ cm^2; 2) 2 cm. **18.28.** 1) $20\sqrt{3}$ cm^2; 2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm. **18.29.** 1) 160 cm^2; 2) $4\sqrt{3}$ cm. **18.30.** 1) 4 cm; 2) $\left(32+8\sqrt{10}+24\sqrt{2}\right)$ cm^2. **18.31.** 360 cm^2. **18.32.** 16 cm. **18.33.** 1 : 9.

19.8. $18\pi\sqrt{3}$ cm^2. **19.9.** 13 cm. **19.10.** $\frac{1}{2}d^2\sin 2\alpha$. **19.11.** 2π cm^2. **19.13.** $24\pi\sqrt{2}$ cm^2. **19.14.** 128π cm^2. **19.15.** $\frac{2\pi a^2 \operatorname{tg}\beta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **19.16.** $\frac{\pi m^2 \sin 2\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}$. **19.17.** 8 cm. **19.18.** $2R^2\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **19.19.** 48 cm^2. **19.20.** *Útmutatás*. Szerkesszétek meg a hengernek azt a tengelymetszetét, amelyre az A pont illeszkedik. **19.21.** 16 cm. **19.22.** 10 cm. **19.23.** $h\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)$. **19.24.** 6 cm. **19.25.** $4\sqrt{13}$ cm.

20.7. 1) $\frac{H^2}{\operatorname{tg}\alpha}$; 2) $\frac{\pi H^2}{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}$. **20.8.** 1) $\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$; 2) $\pi a^2\sin\frac{\alpha}{2}$. **20.11.** 25 cm, 20 cm. **20.12.** 160π cm^2. **20.13.** $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **20.14.** $2m\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta$. **20.15.** $\frac{1020\pi}{13}$ cm^2. **20.16.** $\frac{H^2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}$. **20.17.** $32\pi\sqrt{2}$ cm^2. **20.18.** $\frac{1}{2}\pi a^2\operatorname{tg}\alpha(2\cos\alpha+1)$. **20.19.** $\frac{\pi a^2}{2\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **20.20.** 84π cm^2. **20.21.** $\pi\left(9+\sqrt{2}\right)$ cm^2. **20.22.** $200\pi\sqrt{3}$ cm^2. **20.23.** 240π cm^2. **20.24.** 8 cm. **20.25.** 216°. **20.26.** $\frac{a}{\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}$. **20.27.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ cm. **20.28.** 10 cm. **20.29.** 8 cm. **20.30.** $12\sqrt{3}$ cm.

21.13. $\pi R^2\cos^2\alpha$. **21.14.** $4\pi\sqrt{3}$ cm. **21.15.** 24 cm. **21.16.** 8 cm. **21.17.** 7 cm. **21.18.** 32π cm^2. **21.19.** 1 cm. **21.20.** 15 cm. **21.21.** $8\sqrt{2}$ cm. **21.22.** 6 cm. **21.23.** 10π cm. **21.24.** 25 cm. **21.25.** $a^2\sqrt{2}$.

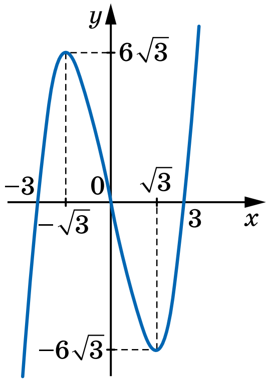
22.2. 8 cm^3. **22.5.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. **22.7.** $\frac{h^3\sqrt{3}}{4\operatorname{tg}^2\alpha}$. **22.8.** 288 cm^3. **22.9.** 6 cm. **22.10.** 36 800 m^3. **22.11.** $h=\frac{ab}{S}$. **22.12.** 456 m^3. **22.18.** $\frac{32\sqrt{3}}{3}$ cm^3. **22.19.** 1692 cm^3. **22.20.** 18 cm^3. **22.21.** $480\sqrt{3}$ cm^3. **22.22.** $162\sqrt{3}$ cm^3. **22.23.** 1152 cm^3. **22.26.** $\frac{V}{6}$. **22.27.** $\frac{2}{3}b^3\sin^2\alpha\cos\alpha$. **22.28.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **22.29.** $\frac{\sqrt{3}}{4}b^3\sin\alpha\cos^2\alpha$. **22.30.** $d^3\sin^2\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$. **22.31.** $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$. **22.32.** $\frac{225\sqrt{23}}{2}$ cm^3. **22.33.** $\frac{1}{4}d^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **22.34.** $\frac{1}{4}c^3\sin 2\beta\sin\beta\operatorname{tg}\alpha$. **22.35.** $\frac{1}{4}a^3\operatorname{tg}\alpha$. **22.36.** $\frac{a^3}{2}$. **22.37.** 108 cm^3. **22.38.** 2880 cm^3. **22.39.** $\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{12\cos\alpha}$. **22.40.** $\frac{1}{6}b^3\sin\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$. **22.41.** $\frac{1}{6}a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\beta$. **22.42.** $\frac{280}{3}$ cm^3. **22.43.** $40\sqrt{3}$ cm^3. **22.44.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. **22.45.** $\frac{a^3}{16}$.

22.46. 96 cm^3. **22.47.** $64\sqrt{3}\text{ cm}^2$. **22.48.** 936 cm^2. **22.49.** 1) $p=4$; 2) $p=0$.

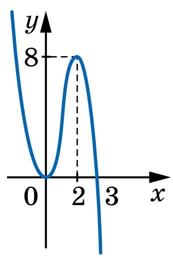
23.4. $\pi a^2 b$. **23.5.** $\frac{\pi H^3}{4}$. **23.6.** $750\pi\text{ cm}^3$. **23.11.** 39 t. **23.12.** $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$. **23.13.** $64\pi\text{ cm}^3$. **23.14.** $125\pi\text{ cm}^3$. **23.15.** $240\pi\text{ cm}^3$. **23.24.** 9 : 25. **23.25.** 80 m. **23.26.** 77 kg. **23.27.** $\frac{\pi m^3}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\beta}$. **23.28.** πR^3. **23.29.** $\frac{\pi m^3}{3\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **23.30.** $\frac{\pi a^3\operatorname{tg}\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}$. **23.31.** $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}\text{ cm}^3$. **23.32.** 6 cm. **23.33.** 1,6 t. **23.34.** 125 golyó. **23.35.** 6 cm. **23.37.** $232\pi\text{ cm}^2$. **23.38.** $160\pi\text{ cm}^2$. **23.39.** 55,3 m. **23.41.** $3380\pi\text{ cm}^3$. **23.42.** $\frac{2\pi d^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}$. **23.43.** $448\pi\text{ cm}^3$. **23.44.** $225\pi\text{ cm}^3$. **23.45.** $\frac{1}{3}\pi a^3\sin\beta\operatorname{tg}\beta$. **23.46.** $2500\pi\text{ cm}^2$. **23.47.** $136\pi\text{ cm}^2$. **23.48.** 153°. **23.49.** 36°, 36°, 108°. **23.50.** Igen.

24.13. 14. **24.14.** 20. **24.15.** 3. **24.16.** 11 csokor. **24.17.** 4. **24.21.** 1) 6; 2) 3; 3) 3. **24.32.** 36 csomag. **24.33.** 14 üveg. **24.34.** 32 óra. **24.35.** 15 óra. **24.36.** 1) 36 füzet; 2) 12 füzet. **24.38.** 54 óra. **24.43.** 25%-kal csökken **24.45.** 45 000 hrn, 15 000 hrn. **24.46.** 200 g, 400 g. **24.47.** 20 kg, 30 kg. **24.51.** 4%. **24.54.** 72 600 hrn. **24.65.** 1) Nincsenek gyökei; 2) 2; 3) 4; 4) 1,5. **24.68.** 1) (2; –3); 2) $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$; 3) (4; 2); 4) (8; –9). **24.70.** 2) (–2; 1); 3) (1; 1), (3,6; 11,4). **24.77.** 4) $(-\infty; 18]$. **24.80.** 1) $a<-\frac{1}{4}$; 2) $a\leqslant 6{,}4$. **24.81.** 3) $\left(-\frac{4}{11}; 5\right)$; 4) $\varnothing$. **24.84.** 1) 11; 2) 4. **24.87.** 5) $-\frac{1}{36}$; 6) $\frac{4}{9}$. **24.101.** 1) 1 gyöke van; 2) 2 gyöke van. **24.102.** 2) –4; 4) –1; 5) 4; 6) 5. **24.103.** 1) 1; 16; 2) $\frac{1}{64}$; 4) 4. **24.104.** 3) [–6; 4]; 4) $[7; 8)\cup(8; +\infty)$; 5) {5}; 6) $(-\infty; -7)\cup[3; 7)\cup(7; +\infty)$. **24.116.** $p=4$, $q=7$. **24.119.** *a*) $k>0$, $b<0$; *b*) $k<0$, $b>0$. **24.125.** Ha $m=0$ akkor: –1, 1, 3; ha $m=2$ akkor: 5, 5, 5. **24.129.** 1377. **24.130.** 616. **24.136.** $1\leqslant a\leqslant 3$. **24.137.** 1) 5; –3; 2) 7; 6. **24.144.** 1) $\frac{1}{4}\sin\alpha$; 2) $4\cos 4\alpha$. **24.147.** $-\frac{3\pi}{2}$. **24.148.** 3 gyöke van. **24.149.** 4) $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$; 5) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $-\operatorname{arctg}\frac{8}{3}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **24.155.** 2) (–1; 4]; 3) [0; 4]; 4) $(-\infty; -2]\cup[0; +\infty)$. **24.156.** 1) 2; 2) 5; 3) 1; 4) 8. **24.157.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 3)$; 3) $(0; +\infty)$; 4) $(2; +\infty)$. **24.158.** 1) 4; 2) $\log_3 2$; 3) $\log_7 5$; 4) 0; 3; 5) –1; 2; 6) 1; $\log_3\frac{5}{4}$. **24.159.** 1) $(1; +\infty)$; 2) [–2; 1]; 3) $(-\infty; -2]\cup[1; +\infty)$; 4) $[-2; +\infty)$. **24.162.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $(2; 3)\cup(3; +\infty)$. **24.168.** 2) 50; 3) 27; 6) nincsenek gyökei. **24.169.** 1) 1,5; 2) 5,5; 3) 2; 3; 4) –1. **24.170.** 1) $\frac{1}{27}$; $\sqrt[3]{9}$; 2) e^7; $\frac{1}{e^3}$; 3) 10; 100; 4) 81; 3. **24.171.** 4) $[-5; -4)\cup(0; 1]$; 7) $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$; 8) (1; 3). **24.172.** 1) (0; 1];

2) (1; 3]. **24.173.** 1) $(0; 1]\cup[10; +\infty)$; 2) $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$; 3) $\left(0; \frac{1}{32}\right]\cup[8; +\infty)$. **24.177.** 1) $y=-\frac{1}{2}x-2$; 2) $y=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{4}$. **24.178.** (2; 3). **24.179.** (1; 0). **24.180.** $y=5x$ és $y=5x-27$. **24.182.** 1) Növekszik a $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right]$ intervallumon, csökkenő a $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$ és $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$ intervallumokon, $x_{max}=\frac{1}{4}$, $x_{min}=-\frac{1}{3}$; 2) növekvő az $\mathbb{R}$ halmazon; 3) növekvő a $(-\infty; -4]$ és $[-4; +\infty)$ intervallumokon, csökkenő a $[-4; 0)$ és a $(0; 4]$ intervallumokon, $x_{max}=-4$, $x_{min}=4$; 4) növekvő a $(-\infty; -2)$, $(-2; 1]$ és $[4; +\infty)$ intervallumokon, csökkenő az $[1; 2)$ és $(2; 4]$ intervallumokon, $x_{max}=1$, $x_{min}=4$; 5) növekvő a $(-\infty; -1]$ intervallumon, csökkenő a $[-1; +\infty)$ intervallumon, $x_{max}=-1$; 6) növekvő a $[2; +\infty)$ intervallumon, csökkenő a $(0; 2]$ intervallumon, $x_{min}=2$. **24.183.** 1) 1; –6; 2) $\frac{3}{5}$; –1; 3) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 4) $\frac{4}{5}$; –1. **24.184.** 1) Lásd az ábrát; 2) lásd az ábrát.



24.184. (1.) feladathoz



24.184. (2.) feladathoz

24.185. 2) $\sqrt{x}-\frac{1}{x^3}+C$. **24.186.** 1) $F(x)=x^2+4x-11$; 2) $F(x)=x^4-x^2+3x+5$. **24.187.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) 18; 3) $4\ln 3-4$; 4) –6. **24.188.** 1) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; 2) ln 3; 3) $\frac{1}{6}$; 4) 4,5. **24.189.** 72. **24.190.** 8!. **24.191.** C_{32}^3. **24.192.** $12C_{16}^2$. **24.193.** 4!. **24.204.** 13. **24.206.** 2 óra 15 perc, 2 óra 24 perc.

25.1. 84 cm. **25.2.** 60 cm^2. **25.3.** $\sqrt{26}$ cm. **25.4.** 10 cm. **25.5.** 12 cm. **25.6.** $\left(\sqrt{2}+1\right)$ cm^2. **25.7.** $4\sqrt{13}$ cm. **25.8.** $\frac{2h}{\sin 2\alpha}$. **25.9.** 48 cm. **25.10.** 8 cm. **25.11.** 20 cm. **25.12.** 192 cm. **25.13.** 8 cm. **25.14.** 24 cm. **25.15.** 28 cm. **25.16.** 30 cm. **25.17.** 36 cm^2. **25.18.** 36 cm^2. **25.19.** 18 cm^2. **25.20.** 98 cm^2. **25.21.** 6 cm. **25.22.** 4,5 cm. **25.23.** 128 cm. **25.24.** $\frac{4000}{3}$ cm^2. **25.25.** 15 cm, 24 cm. **25.26.** 6 cm. **25.27.** 60°. **25.28.** $\frac{441\pi}{20}$ cm^2. **25.29.** 2 cm. **25.30.** 12 cm. **25.31.** $60\sqrt{2}$ cm^2. **25.32.** 22 cm. **25.33.** 96 cm^2. **25.34.** $\frac{2c}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **25.35.** 15 cm. **25.36.** 230 cm^2. **25.37.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **25.38.** 96 cm^2. **25.39.** 135 cm^2. **25.40.** 288 cm^2. **25.41.** 624 cm^2. **25.42.** 196 cm. **25.43.** 100°. **25.44.** 58°. **25.45.** 1 : 2. **25.46.** $\sqrt{3}:2$. **25.47.** $\frac{a\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}$. **25.48.** 15°. **25.49.** 6 cm. **25.50.** 20 cm. **25.51.** 29π cm. **25.52.** 8 cm, 12 cm. **25.53.** 18 cm. **25.55.** $\sqrt{5}$. **25.56.** A (3; –2). **25.57.** (0; –1,5). **25.59.** $(x-1)^2+(y-7)^2=25$. **25.60.** $y=3x+7$. **25.61.** $y=x\sqrt{3}+2$. **25.62.** $y=-0{,}5x-4$. **25.67.** 10. **25.70.** $\vec{m}(7;1)$. **25.71.** $\sqrt{65}$. **25.72.** 1. **25.73.** 18. **25.74.** 6. **25.75.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1. **25.76.** 135°. **25.77.** $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\vec{a}+\vec{b}$. **25.78.** $\overrightarrow{EF}=\frac{4}{7}\vec{b}-\frac{1}{4}\vec{a}$. **25.82.** 120°. **25.87.** (6; –9). **25.88.** (3; 4). **25.99.** $10\sqrt{3}$ cm. **25.100.** 300 cm^2. **25.101.** 360 cm^2. **25.102.** $5\sqrt{7}$ cm. **25.103.** 30 cm, 20 cm, 18 cm. **25.104.** $12\sqrt{17}$ cm^2. **25.105.** $12a^2\operatorname{tg}\alpha$. **25.106.** $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$. **25.107.** $2a^2\left(4\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta+\sin\alpha\right)$. **25.108.** 3 cm. **25.110.** $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2\cos\alpha}$. **25.111.** 1250 cm^2. **25.112.** 600 cm^2. **25.116.** 5 cm. **25.117.** $4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$. **25.118.** 50 cm^2. **25.121.** 350π cm^2. **25.124.** 8 cm^2. **25.125.** R^2. **25.126.** $\frac{\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. **25.127.** 30 cm. **25.128.** 6 cm. **25.129.** $64\sqrt{2}$ cm^3. **25.130.** $\frac{3d^3\sqrt{15}}{50}$. **25.132.** $25\sqrt{119}$ cm^3. **25.133.** 48 cm^3. **25.135.** $36\sqrt{6}$ cm^3. **25.138.** $3\sqrt{3}$ cm^3. **25.139.** 32π cm^3. **25.140.** $\frac{\pi m^3}{\operatorname{tg}^2\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. **25.141.** 60π cm^2. **25.142.** 3π cm^3. **25.144.** 832π cm^2.

Az *Ellenőrizd magad teszteléssel!* feladatainak eredményei

A feladat sorszáma	A feladat sorszáma																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	D	B	B	D	B	A	C	B	D	B	C	C	A	C	C	A	C	B
2	B	D	B	D	D	B	A	B	B	A	A	C	B	B	D	C	C	A
3	D	C	A	B	C	C	D	D	B	D	D	B	B	B	B	D	C	A
4	A	C	B	C	B	D	C	D	A	D	A	C	A	C	A	B	A	C
5	B	C	A	A	D	D	A	B	B	D	C	C	A	C	D	A	B	A
6	D	B	D	A	A	B	C	D	C	C	B	B	C	B	D	A	D	C

Tárgymutató

Matematikai kifejezések szótára

Alapsokaság – Генера́льна суку́пність
Biztos esemény – Поді́я достові́рна
Domború sokszög – Многогра́нник опу́клий
Egyforma lehetőségű eredmények – Результа́ти рівноможли́ві
Elhelyezkedés – Розмі́щення
Exponenciális egyenlet – Показнико́ве рівня́ння
Exponenciális egyenlőtlenség – Показнико́ва не́рівність
Exponenciális függvény – Показнико́ва фу́нкція
Faktoriális – Факторіа́л
Forgástest – Ті́ло оберта́ння
Gömb érintősíkja – Доти́чна площина́ до сфе́ри
Gömb nagy körlapja – Вели́кий круг ку́лі
Gúla átlómetszete – Діагона́льний пере́різ пірамі́ди
Hányados logaritmusa – Логари́фм ча́стки
Hasáb átlómetszete – Діагона́льний пере́різ при́зми
Határozatlan integrál – Неви́значений інтегра́л
Határozott integrál – Ви́значений інтегра́л
Hatvány logaritmusa – Логари́фм сте́пеня
Hatványkitevő – Експоне́нта
Henger alkotója – Тві́рна цилі́ндра
Henger kiterített rácsa a síkra – Розго́ртка цилі́ндра на площи́ну
Kedvező eredmények – Результа́т сприя́тливий
Kombináció – Комбіна́ція
Kombinatorika – Комбінато́рика
Kúp alkotója – Тві́рна ко́нуса
Kúp kiterített rácsa a síkra – Розго́ртка ко́нуса на площи́ну
Legegyszerűbb logaritmusos egyenletek – Рівня́ння найпрості́ше логарифмі́чне
Lehetetlen esemény – Поді́я неможли́ва
Logaritmus alapazonossága – Основна́ логарифмі́чна тото́жність
Logaritmusfüggvény – Логарифмі́чна фу́нкція
Logaritmusos egyenlet – Логарифмі́чне рівня́ння
Logaritmusos egyenlőtlenség – Логарифмі́чна нерівність
Minta – Ви́бірка
Minta átlaga – Сере́днє зна́чення ви́бірки
Minta mediánja – Медіа́на ви́бірки
Minta módusza – Мо́да ви́бірки
Minta terjedelme – Ро́змах ви́бірки
Összegzési szabály – Пра́вило су́ми
Permutáció – Перестано́вка
Pozitív szám valós kitevőjű hatványa – Сте́пінь дода́тного числа́ з ді́йсним показнико́м
Primitív függvény – Перві́сна фу́нкція
Primitív függvény általános alakja – Зага́льний ви́гляд перві́сних фу́нкцій
Reprezentatív minta – Ви́бірка репрезентати́вна
Soklap csúcsnál lévő lapszöge – Двогра́нний пло́ский кут многогра́нника при верши́ні
Soklap élnél lévő lapszöge – Двогра́нний кут многогра́нника при ребрі́
Statisztika – Стати́стика
Szabályos gúla apotémája – Апофе́ма пра́вильної пірамі́ди
Szám logaritmusa – Логари́фм числа́
Szorzási szabály – Пра́вило добу́тку
Szorzat logaritmusa – Логари́фм добу́тку
Tízes alapú logaritmus – Логари́фм десятко́вий
Valószínű esemény – Поді́я вірогі́дна
Véletlen esemény – Випадко́ва поді́я
Valószínűség klasszikus meghatározása – Класи́чне ви́значення ймові́рності

TARTALOM

2. fejezet. **MÉRTAN**

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
НОМІРОВСЬКИЙ Дмитро Анатолійович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
та ін.

МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ ТА ГЕОМЕТРІЯ

РІВЕНЬ СТАНДАРТУ

Підручник для 11 класу з навчанням угорською мовою закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за державні кошти. Продаж заборонено

Переклад з української мови

Перекладач *Поллої Дезидер Федорович*

Угорською мовою

Редактор *А. А. Варга*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Коректор *Г. М. Тирканич*

Формат 60×90/16. Ум. друк. арк. 13,00. Обл.-вид. арк. 12,28.
Тираж 887 пр. Зам. № 1927

Державне підприємство „Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ”
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи серія ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua; e-mail: office@svit.gov.ua; svit_vydav@ukr.net

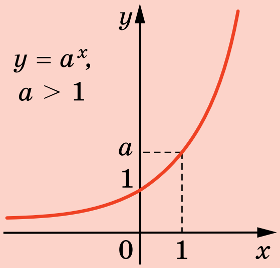
Друк ТОВ „РІК-У”
88000, м. Ужгород, вул. Гагаріна, 36
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи серія ДК № 5040 від 21.01.2016

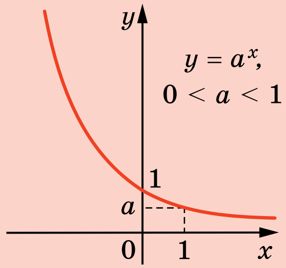
1. előzék

Szerelmem Ukrajna és a matematika – ezek a szavak vannak felvésve Mihajlo Pilipovics Kravcsuk (1892–1942) gránit síremlékére.

Reméljük, hogy a kimagasló ukrán matematikus hazaszeretetről árulkodó szavai biztos útmutatóul szolgálnak számotokra a szakmai tudás megszerzésében.

Exponenciális függvény grafikonja





A logaritmusok tulajdonságai

$$a^{\log_a b} = b,$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1,$$

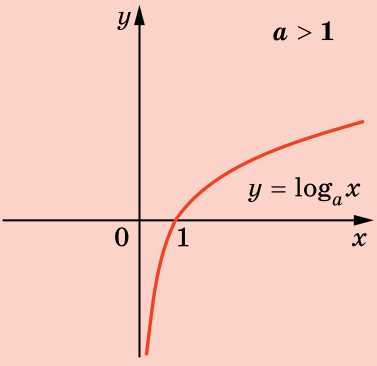
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y,$$

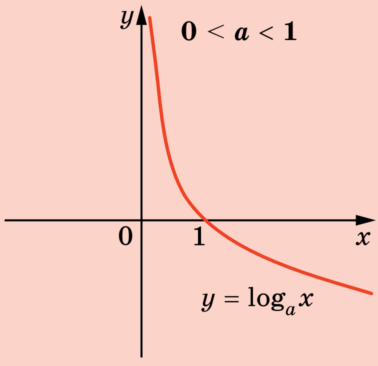
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x, \quad \log_{a^\beta} x = \frac{1}{\beta} \log_a x,$$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Logaritmusfüggvény grafikonja





3. előzék

Egyes primitív függvények táblázata

f függvény	f primitív függvény
k (állandó)	kx
$x^n,\ n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x \rvert$
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$

f függvény	f primitív függvény
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
e^x	e^x

Az integrálás szabályai

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

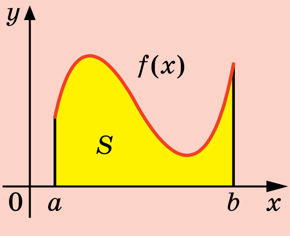
$$\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx,$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

Newton–Leibniz-képlet

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

A görbe vonalú trapéz területe



$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

Permutáció	Variáció	Kombináció
$P_n = n!$	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$

4. előzék

Képletek mértani testek felszínterületeinek és térfogatainak számításához

A henger oldalfelszínének területe

$S_o = 2\pi rh$, ahol S_o – a henger oldalfelszínének területe, r – a henger alapjának sugara, h – a henger magassága

A henger teljes felszínének területe

$S_n = S_o + 2S_{al}$, ahol S_n – a henger teljes felszínének területe,
S_{al} – a henger alapjának területe
$S_n = 2\pi rh + 2\pi r^2$

A kúp oldalfelszínének területe

$S_o = \pi rl$, ahol r – a kúp alapjának sugara, l – a kúp alkotójának hossza

A kúp teljes felszínének területe

$S_n = S_o + S_{al}$, ahol S_n – a kúp teljes felszínének területe,
S_{al} – a kúp alapjának területe
$S_n = \pi rl + \pi r^2$

A hasáb térfogata

$V = Sh$, ahol V – a hasáb térfogata, S – a hasáb alapjának területe, h – a hasáb magassága

A gúla térfogata

$V = \frac{1}{3}Sh$, ahol V – a gúla térfogata, S – a gúla alapjának területe, h – a gúla magassága

A henger területe

$V = \pi r^2 h$, ahol V – a henger térfogata, r – a henger alapjának sugara, h – a henger magassága

A kúp térfogata

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, ahol V – a kúp térfogata, r – a kúp alapjának sugara, h – a kúp magassága

A gömb térfogata

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$, ahol V – a gömb térfogata, R – a gömb sugara

A gömbfelszín területe

$S = 4\pi R^2$, ahol S – a gömbfelszín területe, R – a gömb sugara