



Г. П. БЕВЗ, В. Г. БЕВЗ,
Н. Г. ВЛАДІМІРОВА

ГЕОМЕТРІЯ



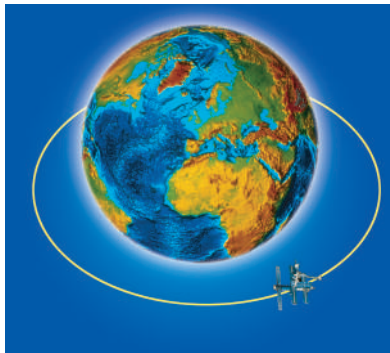
7



Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова

ГЕОМЕТРІЯ

**Підручник для 7 класу
загальноосвітніх навчальних закладів**



*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

Київ
«Генеза»
2015

УДК 514(075.3)
ББК 22.151я721
Б36

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(Наказ Міністерства освіти і науки України від 20.07.2015 № 777)

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Бевз Г.П.

Б36 Геометрія: Підруч. для 7-го кл. загальноосвіт.
навч. закл. / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова.
— Київ : Генеза, 2015. — 192 с.

ISBN 978-966-11-0671-9.

УДК 514(075.3)
ББК 22.151я721

ISBN 978-966-11-0671-9

© Бевз Г.П., Бевз В.Г.,
Владімірова Н.Г., 2015
© Видавництво «Генеза»,
оригінал-макет, 2015

Юні друзі!

Запрошуємо вас у світ Геометрії. Цей світ дивний: щедрий, досконалий, тісно пов'язаний зі світами Праці, Розуму, Мистецтва.

Геометрія виникла як наука про вимірювання землі. Їх назва походить від грецьких слів *geo* — «земля» і *metreo* — «міряю». Єгипетські й грецькі землеміри ще 3000 років тому вимірювали відстані, кути, визначали площі земельних ділянок. Застосовували знання з геометрії будівельники, мореплавці, астрономи, військові, митці.

Геометрія потрібна інженерам, архітекторам, конструкторам, художникам, креслярам, столярам, слюсарям, токарям, кравцям та багатьом іншим фахівцям.

Вивчати *систематичний курс геометрії*, розвивати логічне мислення і просторову уяву допоможе вам цей підручник.

У кожному параграфі підручника є теорія й задачі. Читаючи теорію, основну увагу звертайте на слова, надруковані *курсивом* і **жирним шрифтом**. *Курсивом* виділено геометричні терміни, назви понять. Потрібно вміти пояснювати їх зміст, наводити відповідні приклади. **Жирним шрифтом** надруковано важливі геометричні твердження. Їх треба розуміти, вміти доводити і застосовувати для розв'язування задач. Закінчення доведення теореми позначено значком ▲.

У кожному параграфі підручника виокремлено рубрику «Для допитливих». Вона містить додатковий навчальний і пізнавальний матеріал та допоможе вам зацікавитися геометрією. В основному тексті підручника такий матеріал виділено *.

Щоб перевірити, як ви зрозуміли і запам'ятали новий теоретичний матеріал, спробуйте відповісти на запитання і виконати завдання рубрики «Запитання і завдання для самоконтролю», яка є в кожному параграфі й повторюється після розділів.

Щоб опанувати курс геометрії, треба навчитися розв'язувати задачі. У деяких задачах жирним шрифтом виділено важливі твердження, їх потрібно запам'ятати. З різними способами розв'язування задач ознайомить рубрика «Виконаємо разом». Радимо розглянути задачі цієї рубрики, перш ніж виконувати домашнє завдання. Номери завдань, рекомендовані для домашньої роботи, виділено кольором.

Добре підготуватися до тематичного оцінювання ви зможете, розв'язуючи завдання рубрик «Самостійна робота», «Тестові завдання» і «Типові задачі для контрольної роботи».

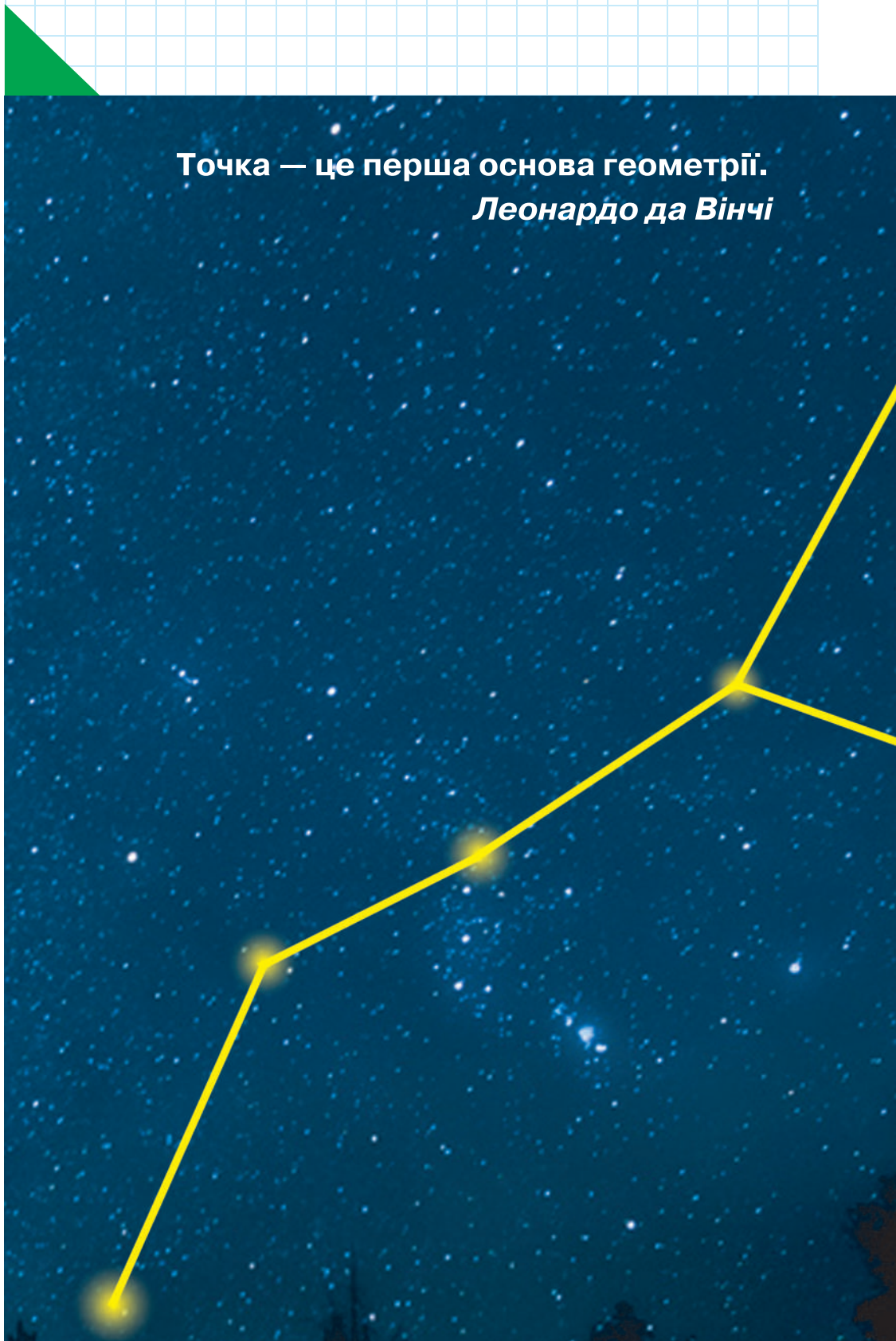
Наприкінці підручника вміщено рубрики «Задачі підвищеної складності» та «Завдання для позакласної роботи». Їх пропонуємо тим учням, які люблять математику.

У величезному саду Геометрії кожний може підібрати собі букет за смаком. Беріть і ви — що кому подобається.

Усім бажаємо успіхів!

Автори

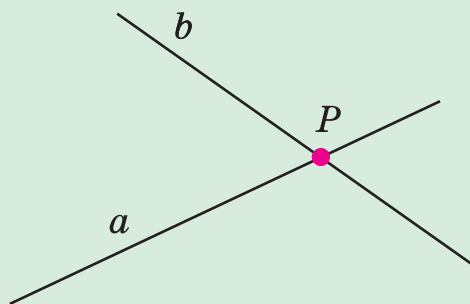
Точка — це перша основа геометрії.
Леонардо да Вінчі



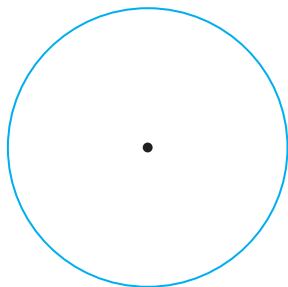
НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

У цьому розділі ви повторите і поглибите свої знання про найпростіші й найважливіші геометричні фігури: **точки, прямі, відрізки, кути.**

Дізнаєтеся, як вимірюють відрізки і кути, ознайомитеся з найуживанішими креслярськими і вимірювальними інструментами.



§ 1. ТОЧКИ І ПРЯМІ



Мал. 1

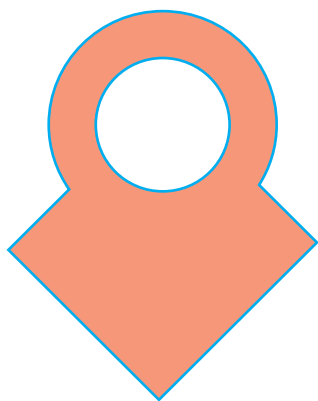
Геометрія — це наука про геометричні фігури та їх властивості. Найпростіша геометрична фігура — *точка*. Кожна інша геометрична фігура складається з точок. Наприклад, *коло* — це фігура, що складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (мал. 1). *Відрізок* також складається з точок. Будь-яка множина точок є геометричною фігурою. Частина геометричної фігури чи об'єднання кількох фігур — теж геометрична фігура (мал. 2).

Однією з геометричних фігур є *площина*. Уявлення про частину площини дає поверхня стола, стелі, підлоги. У геометрії площина вважається необмеженою, ідеально рівною і гладкою.

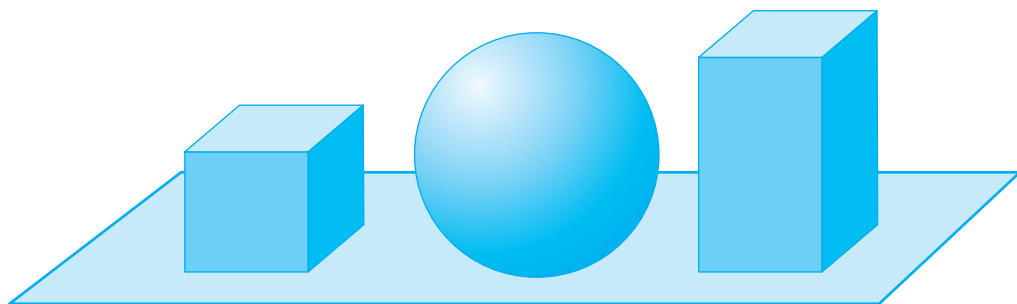
Фігури, які можна розмістити в одній площині, називають *плоскими*. Усі названі вище геометричні фігури — плоскі. А от куб, куля, прямокутний паралелепіпед — *неплоскі фігури* (мал. 3). Частину геометрії, у якій вивчають плоскі фігури, називають *планіметрією* (від латинського слова «планум» — площина).

Ми починаємо вивчати планіметрію.

Насамперед розглянемо, як можуть бути розташовані на площині точки і прямі.



Мал. 2



Мал. 3

Ви вже знаєте, як за допомогою лінійки проводять прямі (мал. 4).

Пряма в геометрії — ідеально рівна і нескінченна в обидва боки. Як і кожна інша фігура, пряма складається з точок. Якщо точка A лежить на прямій a , говорять, що пряма a проходить через точку A . Символічно за-

писують це так: $A \in a$. Якщо точка B не лежить на прямій a , пишуть: $B \notin a$ (мал. 5).



Мал. 4

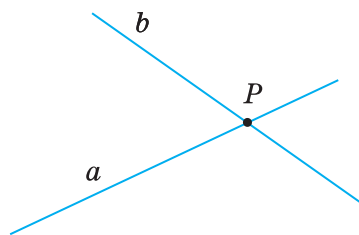
Хоч би яка була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.

Через одну точку можна провести безліч прямих. На малюнку 6 зображено прямі a і b , які проходять через точку P . Це їх спільна точка. Інших спільних точок прями a і b не мають.



Мал. 5

Якщо дві прямі мають тільки одну спільну точку, говорять, що вони *перетинаються в цій точці*. Прямі a і b перетинаються в точці P .

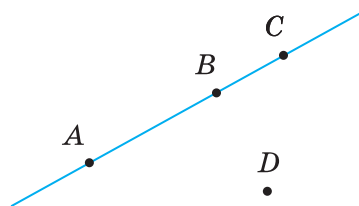


Мал. 6

Якщо прямій належать точки A і B , говорять, що ця пряма *проходить через точки A і B* . Позначають її так: AB .

Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і тільки одну.

Чи можна провести пряму через три точки? Не завжди. Якщо точки A , B і C розміщені, як показано на малюнку 7, через них можна провести пряму.



Мал. 7


А через точки A , B і D — не можна.

Говорять, що *точки A , B і D не лежать на одній прямій*.

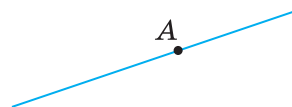
Точки A , B , C лежать на одній прямій, причому точка B лежить між точками A і C .

Із трьох різних точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.

Якщо точка B лежить між точками A і C , говорять, що точки A і C лежать по різні боки від точки B , а точки A і B — по один бік від точки C .

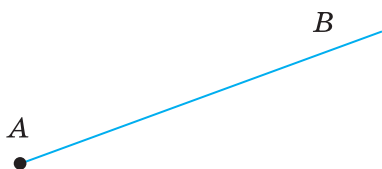
Надруковані вище жирним шрифтом три речення, позначені знаком , — це *основні властивості розміщення точок на прямій*.

Будь-яка точка A прямої ділить цю пряму на дві частини (мал. 8). Кожну із частин прямої разом із точкою A називають *променем*, який виходить із точки A . Точку A називають

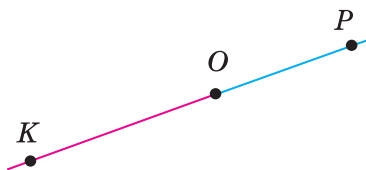


Мал. 8

початком променя. Якщо говорять «промінь AB », то мають на увазі промінь з початком у точці A (мал. 9).



Мал. 9



Мал. 10

Два промені, які мають спільний початок і доповнюють один одного до прямої, називають *доповняльними*. На малюнку 10 зображено промінь OK — доповняльний для променя OP і промінь OP — доповняльний для OK .

Для допитливих

Геометрія — частина математики (мал. 11).

Геометрична наука є багата за змістом і методами дослідження. До неї входять: елементарна геометрія, вища геометрія, неевклідові геометрії та ін. У школі вивчають тільки *елементарну геометрію*.

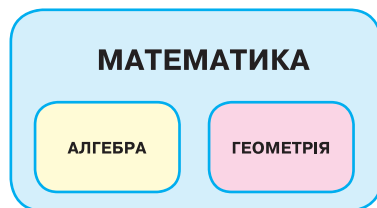
Геометрія тісно пов'язана з багатьма іншими науками, насамперед із фізикою. Проте фізика займається вивченням матеріальних тіл (які мають масу, температуру, колір тощо), а в геометрії абстрагуються від усього матеріального.

Абстрагуватися — означає подумки відриватися від конкретних об'єктів, які нас оточують.

Абстрагуючись від матеріальних речей, ми уявно створюємо *ідеальні об'єкти* зі схожими властивостями. Кінець голки, натягнута струна — це матеріальні об'єкти. Вони мають певну товщину, довжину, масу. Абстрагуючись від таких фізичних властивостей, людська уява створила абстрактні геометричні поняття: *точка, пряма*.

У природі абстрактної прямої немає, але це поняття існує в людській уяві. І дуже важливе поняття, бо всі властивості прямої і її частин, виявлені в геометрії, переносяться на мільйони і мільярди всіх натягнутих струн, прямолінійних рейок, труб, стрічок тощо.

Не існує в природі і геометричної *площини* — без товщини, ідеально рівної і гладкої, нескінченної в кожному її напрямі. Але для науки це ідеальне поняття дуже важливе, бо властивості, установлені в геометрії для площини і її частин, можна переносити на властивості мільярдів конкретних шибок, стін та інших предметів, які мають плоскі поверхні.

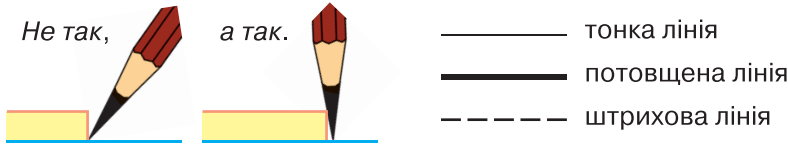


Мал. 11

Кресліть красиво

Проводячи відрізок, вістрям олівця не слід торкатися нижнього ребра лінійки, а треба трохи відступити від нього.

Геометричний відрізок не має товщини. Але щоб зробити малюнок зрозумілішим і красивішим, креслярі іноді зображують його потовщеною лінією, іноді — штриховою лінією або й іншим кольором:



Запитання і завдання для самоконтролю

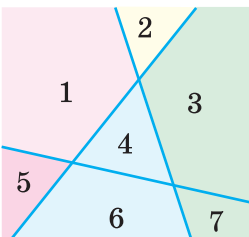
1. Що таке геометрія? Що таке планіметрія?
2. Наведіть приклади плоских і неплоских фігур.
3. Що означають записи: $A \in a$, $B \notin b$?
4. Опишіть поняття: *точка, пряма, площина*.
5. Наведіть приклади матеріальних об'єктів, моделями яких є точка, пряма, площина.
6. Сформулюйте основні властивості розміщення точок на прямій.
7. Що означає вислів «точка B лежить між точками A і C »?
8. Що таке промінь? Як позначають промені?
9. Які промені називають доповняльними?

Виконаємо разом

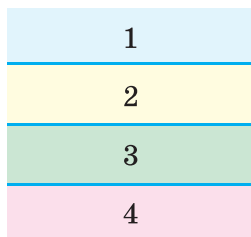
На скільки частин можуть розбивати площину три її прямі?

▼ Якщо прямі розташовані, як показано на малюнку 12, то вони розбивають площину на 7 частин. Якщо вони розташовані, як показано на малюнку 13 (а—в), то вони розбивають площину на 4 або 6 частин.

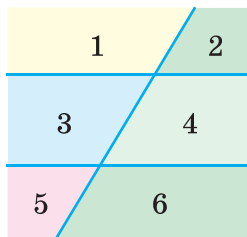
Отже, три прямі розбивають площину, якій вони належать, на 4, 6 або 7 частин. ▲



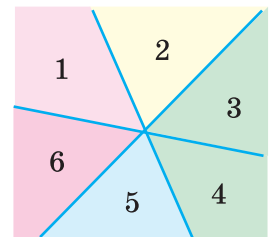
Мал. 12



Мал. 13, а



Мал. 13, б

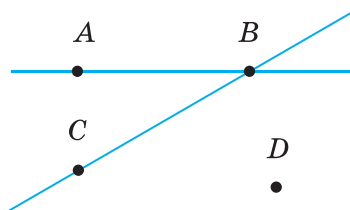


Мал. 13, в

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

1. Чи через кожні дві точки можна провести пряму? Чи існують дві точки, через які можна провести пряму?
2. Чи через кожні три точки можна провести пряму? Чи існують три точки, через які можна провести пряму?
3. Провідміняйте слово: а) *точка*; б) *пряма*; в) *площина*.
4. Опишіть, як взаємно розташовані точки і прямі на малюнку 14.
5. На скільки частин пряму ділить її точка? А дві точки?
6. Чи можна вважати доповняльними промені PK і KP (див. мал. 10)? А промені OP і KP ? Чому?



Мал. 14

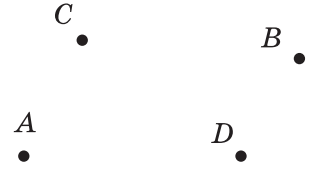
А

7. Позначте в зошиті точки A і B та проведіть через них пряму. Назвіть цю пряму.
8. Проведіть пряму. Позначте кілька точок, які належать цій прямій, і кілька точок, які їй не належать.
9. Дано точку A . Проведіть через неї три прямі. Чи можна через точку A провести десять прямих? А мільйон прямих?
10. Пряма a і точки A, B такі, що $A \in a$ і $B \notin a$. Зобразіть це на малюнку.
11. Прямі k і p перетинаються в точці X . Зобразіть це на малюнку. Чи правильно, що $X \in k$ і $X \in p$?
12. Пряма AB перетинає пряму AC в точці A , а пряму BC — у точці B . Чи належить точка C прямій AB ?
13. Позначте точки K, P і T так, щоб через них можна було провести пряму. Як можна назвати цю пряму?
14. Позначте на прямій точки A, B і C так, щоб точки A і B лежали по один бік від точки C , а точки A і C — по один бік від точки B .
15. Дано пряму a . Позначте точки A, B і C так, щоб прямі AB і a перетинались у точці C , яка лежить між точками A і B .
16. Прямі a і b перетинаються в точці P . Скільки променів утворилось?
17. На скільки частин площину ділить її пряма? А дві прямі? Зобразіть усі випадки.

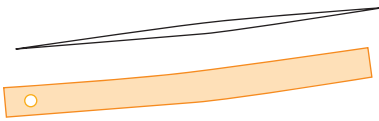
Б

18. Позначте точки A, B, C і D так, щоб прямі AB і CD перетинались, а промені AB і CD не перетинались.

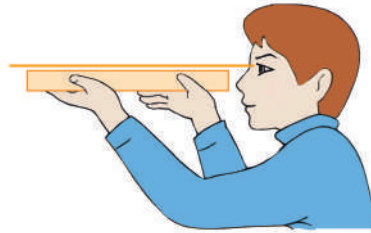
19. Чи можна розмістити точки A , B , C і D так, щоб промені AB і CD перетинались, а промені AC і BD не перетинались?
20. Накресліть три прями AB , BC і AC . На скільки частин розбивають площину ці прями?
- 21*. Позначте чотири точки так, щоб жодні три з них не лежали на одній прямій (мал. 15). Скільки існує прямих, які проходять через будь-які дві із цих точок? На скільки частин розбивають ці прями площину?
22. Учень провів спочатку одну пряму, а потім, перевернувши лінійку, — іншу й одержав лінії, що перетинаються у двох точках (мал. 16). Що можна сказати про його лінійку? Чому?
23. Щоб перевірити лінійку, дивляться вповдовж її ребра (мал. 17). Що бачать, якщо лінійка викривлена?



Мал. 15



Мал. 16



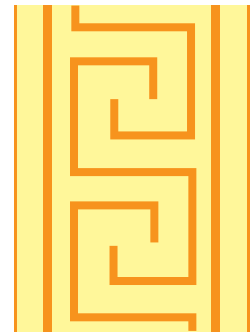
Мал. 17

Практичне завдання

24. Покажіть, як, перегнувши аркуш паперу, можна одержати «лінійку» для проведення прямих.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

25. Назвіть і зобразіть геометричні фігури, які ви розглядали в попередніх класах.
26. Накресліть відрізок завдовжки 4 см і відрізок, удвічі довший.
27. Накресліть кути: гострий, прямий, тупий, розгорнутий. Зафарбуйте їх внутрішні області.
28. Знайдіть периметр трикутника, сторони якого дорівнюють 5 см, 7 см і 8,5 см.
29. Знайдіть периметр квадрата, якщо він більший за довжину однієї сторони на 6 см.
30. Перемалюйте в зошит частину давньогрецького орнаменту (мал. 18). Зробіть стрічку з ним удвічі довшою.



Мал. 18

§ 2. ВІДРІЗКИ І ЇХ ДОВЖИНИ

Дві точки прямої розділяють цю пряму на три частини: два промені і відрізок. *Відрізком* називають частину прямої, обмежену двома її точками.

Відрізком AB називають частину прямої, яка складається з точок A і B та всіх точок, що лежать між ними.

Точки A і B називають *кінцями відрізка* AB . Усі інші точки цього відрізка — його *внутрішні точки*.

На малюнку 19 зображено відрізок AB . Точки A і B — його кінці, а будь-яка точка, що лежить між точками A і B , — внутрішня точка відрізка AB .

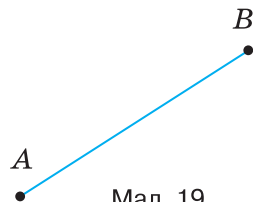
Два відрізки *перетинаються*, якщо вони мають тільки одну спільну внутрішню точку.

Щоб виміряти відрізки, треба мати *одиничний відрізок* (одиницю виміру). Відрізок, зображений на малюнку 20, вважатимемо одиничним. Його довжина дорівнює 1 см. Узагалі, за одиничний можна прийняти довільний відрізок.

Якщо на відрізку AB одиничний відрізок відкладається рівно 3 рази, то це означає, що довжина відрізка AB дорівнює 3 см (мал. 21).

Якщо на відрізку EP одиничний відрізок відкладається два рази з остачею, а в остачі десята частина одиничного відрізка відкладається 7 разів, то довжина відрізка EP дорівнює 2,7 см. Пишуть: $AB = 3$ см, $EP = 2,7$ см.

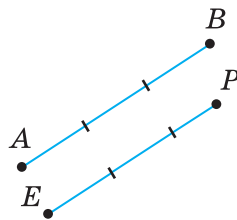
За одиничний відрізок можна брати відрізок завдовжки 1 м, 1 км, 1 фут, 1 дюйм тощо.



Мал. 19



Мал. 20



Мал. 21

Кожний відрізок має певну довжину.

Два відрізки називають *рівними*, якщо рівні їх довжини.

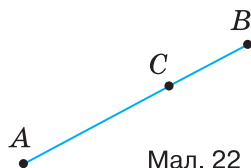
Із двох відрізків *більшим* вважають той, довжина якого більша.

У сантиметрах вимірюють порівняно невеликі відрізки. Більші відрізки вимірюють у дециметрах, метрах, кілометрах; менші — у міліметрах. Нагадаємо, що

$$1 \text{ км} = 1000 \text{ м}, 1 \text{ м} = 10 \text{ дм} = 100 \text{ см} = 1000 \text{ мм}.$$


Довжину відрізка називають також *відстанню* між його кінцями. Якщо $XU = 18$ см, то це означає, що *відстань між точками* X і U дорівнює 18 см. Відстань між X і U завжди дорівнює відстані між U і X .

Якщо точка C відрізка AB розбиває його на дві частини, довжини яких дорівнюють, наприклад, 2 см і 1,2 см, то довжина відрізка AB дорівнює 3,2 см (мал. 22).



Мал. 22

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які його розбиває будь-яка його внутрішня точка.

У двох вищевиділених реченнях, позначених знаком , сформульовано основні властивості вимірювання відрізків.

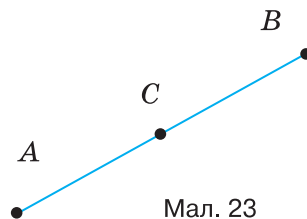
Серединю відрізка називають його внутрішню точку, яка розбиває цей відрізок на дві рівні частини.

Якщо точка C — середина відрізка AB , то $AC = CB$ (мал. 23).

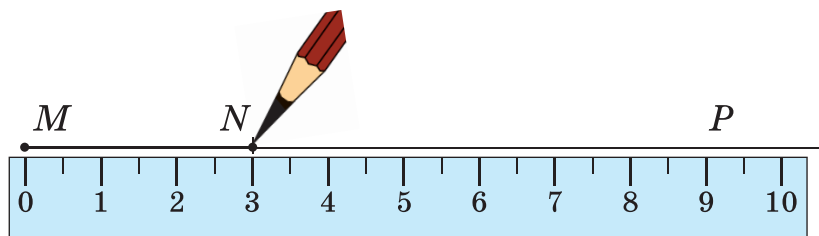
Якщо точка C не належить відріzkу AB , то сума довжин відрізків AC і CB більша від AB .

Отже, для будь-яких трьох точок A , B і C завжди $AB + BC \geq AC$.

Вимірювати довжини відрізків доводиться багатьом фахівцям. Креслярі вимірюють відрізки масштабними лінійками, столяри — складними метрами, кравці — клейончастими сантиметрами, будівельники — рулетками (мал. 24).



На малюнку 25 зображено відкладання відрізка MN завдовжки 3 см на промені MP за допомогою лінійки.

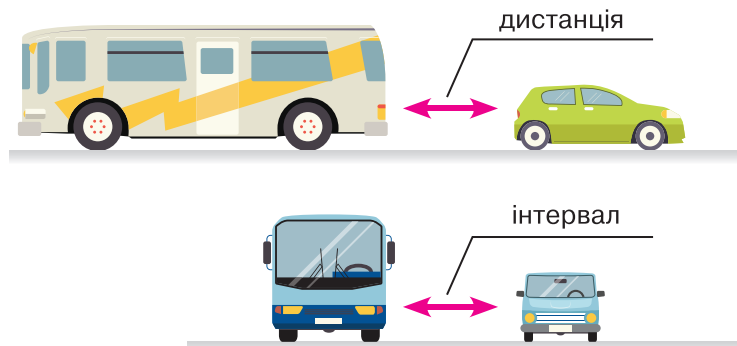


Основна властивість відкладання відрізків.

На будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок даної довжини, і тільки один.

Для допитливих

На практиці для різних відстаней існують різні назви: довжина, ширина, висота, глибина, дистанція, інтервал (мал. 26).



Мал. 26

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке відрізок? Що таке кінці відрізка?
2. Що таке відстань між двома точками?
3. Що означає вислів «два відрізки перетинаються»?
4. Сформулюйте основні властивості вимірювання відрізків.
5. Які відрізки називають рівними?
6. Що таке середина відрізка?
7. Яка нерівність виконується для будь-яких трьох точок?

Виконаємо разом

1. Промінь — частина прямої. Чи правильно говорити, що промінь коротший за пряму?

✎ Пряма і промінь не мають довжин, тому порівнювати їх довжини немає сенсу.

Отже, говорити, що промінь коротший за пряму, — неправильно. ▲

2. Точки K , P і T лежать на одній прямій. Знайдіть відстань між точками P і T , якщо $KP = 1,7$ м, $KT = 4,8$ м. Скільки розв'язків має задача?

✎ Позначимо точки K і T так, щоб $KT = 4,8$ м. Точка P прямої KT віддалена від точки K на $1,7$ м. Можливі два варіанти (мал. 27):

а) точка K лежить між точками P і T : $PT = 1,7$ м + $4,8$ м = $6,5$ м;

б) точка P лежить між точками K і T : $PT = 4,8$ м - $1,7$ м = $3,1$ м.

Отже, задача має два розв'язки: $6,5$ м; $3,1$ м. ▲



Мал. 27

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

31. Знайдіть довжину відрізка AB , якщо точка C — його середина і $CB = 5$ дм.
32. Знайдіть довжину відрізка, який довший за свою половину на 35 см.
33. Точка C ділить відрізок AB у відношенні 1 : 2. Знайдіть:
 - 1) CB , якщо AC дорівнює: 1 см; 3 дм; 10 км;
 - 2) AB , якщо AC дорівнює: 2 см; 5 дм; 30 м;
 - 3) AB , якщо CB дорівнює: 2 см; 6 м; 12 км.
34. Знайдіть довжину відрізка, якщо точки K і P ділять його на три рівні частини і $KP = 7$ см.
35. Точки A і B лежать по різні боки від прямої a . Чи перетинає відрізок AB пряму a ?
36. Точки K і P лежать по один бік від прямої c . Чи перетинає відрізок KP пряму c ? А пряма c перетинає пряму KP ?
37. Точка A лежить між точками B і C . Чи є точка B внутрішньою точкою відрізка AC ?

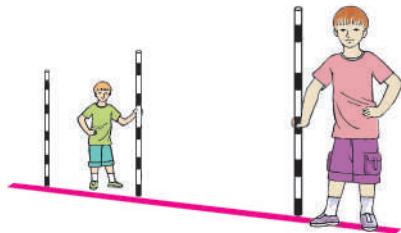
А

38. Позначте на прямій точки A і B . Який відрізок утворився? Зобразіть його середину.
39. Позначте точки A , B , C і D так, щоб ніякі три з них не лежали на одній прямій. Побудуйте відрізки AB , AC , AD , BC , BD , CD .
40. Позначте на прямій точки A , B , C і D так, щоб відрізки AC і BD не мали спільних точок і щоб точки C і B лежали між точками A і D . Знайдіть спільну частину відрізків AB і CD .
41. Прямі AB і CD перетинаються, C — внутрішня точка відрізка AB . Чи перетинаються відрізки AB і CD ?
42. Відрізок AB перетинає пряму a , а відрізок BC не перетинає її, причому $C \notin a$. Чи перетинає пряму a відрізок AC ?
43. Накресліть відрізки AB , AC , AD , CB , CD , BD так, щоб точка C лежала між точками A і B , а точка B — між C і D . Скільки спільних точок мають відрізки AC і BD , AC і CB , AB і CD ?
44. Точка X лежить між точками A і B . Знайдіть довжину відрізка AB , якщо:
 - а) $AX = 2,5$ см, $XB = 3,4$ см;
 - б) $AX = 5,3$ м, $XB = 4,2$ м;
 - в) $AX = 2\frac{1}{3}$ дм, $XB = 6\frac{2}{3}$ дм.

45. Точка M лежить між точками K і P . Знайдіть відстань між точками M і P , якщо:
- $KP = 0,9$ дм, $KM = 0,3$ дм;
 - $KP = 2,6$ дм, $KM = 1,4$ дм;
 - $KP = 2 \frac{5}{6}$ дм, $KM = \frac{1}{6}$ дм.
46. Точка C лежить між точками A і B . $AC = 5$ см, відстань BC — на 3 см більша. Знайдіть AB .
47. Чи лежать точки A , B і C на одній прямій, якщо:
- $AB = 2,5$ см, $BC = 3,8$ см, $AC = 1,3$ см;
 - $AB = 1,9$ дм, $BC = 2,9$ дм, $AC = 4,9$ дм?
48. Точки A , B , C і K лежать на одній прямій. $AB = BC = CK$. Знайдіть CK , якщо $AC = 12$ см.
49. Чи можна розмістити точки A , B і C так, щоб виконувалися рівності:
- $AB = 2,3$ см, $BC = 3,5$ см, $AC = 6,3$ см;
 - $AB = 5,1$ см, $BC = 3,5$ см, $AC = 6,8$ см;
 - $AB = 3,1$ см, $BC = 7,2$ см, $AC = 10,3$ см?

Б

50. Чи може відрізок BC лежати на промені AB , якщо:
- $AB = 9,2$ см, $BC = 3,8$ см, $AC = 13$ см;
 - $AB = 9,2$ см, $BC = 3,8$ см, $AC = 5,4$ см;
 - $AB = 9,2$ см, $BC = 13,8$ см, $AC = 4,6$ см?
51. На відрізку XU завдовжки 4,8 дм лежить точка C . Знайдіть відстані XC і CU , якщо:
- $XC - CU = 1,3$ дм;
 - $CU = 2XC$;
 - $XC : CU = 1 : 5$.
52. Точки A , B і C лежать на одній прямій, $AB = 10$ дм, $BC = 3$ дм. Знайдіть AC . Розгляньте всі можливі варіанти.
53. Точки A , B , C і D лежать на одній прямій, B — середина AC , $BC = 7$ м, $CD = 10$ м. Знайдіть AD .
54. Точки A , B , C і D лежать на одній прямій. Знайдіть CD , якщо $AB = 10$ см, $AC = 3$ см, $BD = 4$ см. Розгляньте всі можливі варіанти.
55. Поясніть, як *провішують* прямі за допомогою віх (мал. 28).



Мал. 28

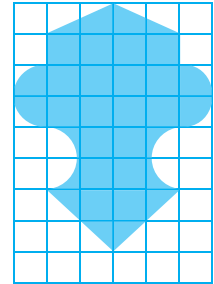
56. Дано відрізок AB . Побудуйте відрізок KP :
- утричі довший за AB ;
 - удвічі коротший від AB ;
 - якщо $KP = 2,5 AB$.
57. Як за допомогою півметрової лінійки побудувати двометровий відрізок?

Практичне завдання

58. Виміряйте довжину й ширину своєї парти.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

59. Перемалуйте в зошит фігуру, зображену на малюнку 29. Знайдіть її площу, прийнявши площу однієї клітинки за $0,25 \text{ см}^2$.
60. Накресліть коло радіуса 4 см. Поділіть його на 4 рівні дуги і знайдіть довжину однієї з них.
61. На скільки частин можуть поділити площину два кола, розташовані на ній?
62. Знайдіть довжину ребра куба, якщо сума довжин усіх його ребер дорівнює 6 м.



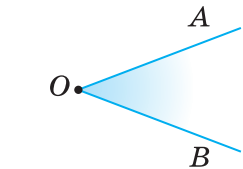
Мал. 29

§ 3. КУТИ І ЇХ МІРИ

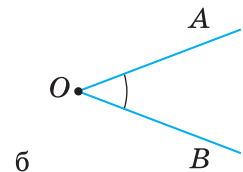
Два промені, що мають спільний початок, розбивають площину на дві частини.

Частину площини, обмежену двома променями із спільним початком, називають *кутом*.

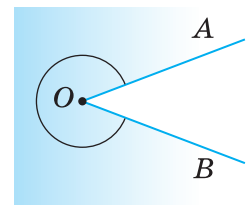
Промені, що обмежують кут, називають *сторонами кута*, а їх спільний початок — *вершиною кута* (мал. 30, а). Такий кут називають кутом AOB , або кутом BOA , або кутом O і записують відповідно: $\angle AOB$, або $\angle BOA$, або $\angle O$. Усі точки кута, які не належать його сторонам, утворюють *внутрішню область* цього кута. Внутрішню область кута на малюнку 30, а зафарбовано. Іноді внутрішню область кута позначають дугою, іноді — ніяк не позначають, а тільки уявляють. На малюнках 30, б і 30, в зображено кути з вершиною O і сторонами OA і OB .



а



б

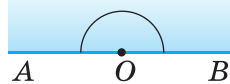


в

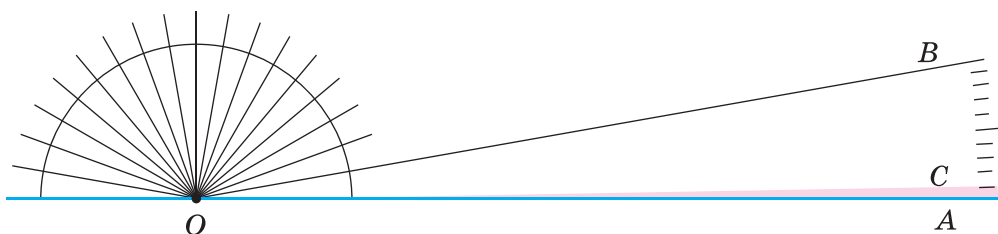
Мал. 30

Кут, сторони якого — доповняльні промені, називають *розгорнутим кутом* (мал. 31).

Щоб вимірювати кути, треба мати одиницю виміру. За таку одиницю приймають кут в 1 градус (скорочено: 1°). У розгорнутому куті він уміщується 180 разів. Уявімо півколо, поділене на 18 рівних дуг (мал. 32). Коли з його центра O через усі точки поділу і кінці півкола провести промені, вони поділять розгорнутий кут на 18 кутів по 10° . Один із таких кутів ($\angle AOB$) ділимо на 10 рівних частин. Міра кута AOC дорівнює 1° .



Мал. 31



Мал. 32

Кожний кут має певну міру.

Міра розгорнутого кута дорівнює 180° .

Міру кута позначають так само, як і кут. Наприклад, якщо міра кута ABC дорівнює 60 градусів, пишуть: $\angle ABC = 60^\circ$. Дуже малі кути вимірюють у мінутах і секундах.

Мінutoю називають $\frac{1}{60}$ частину градуса, а *секундою* — $\frac{1}{60}$ частину мінути.

Записують: $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$.

Кути в зошиті та на класній дошці вимірюють *транспортом* (мал. 33), а на місцевості — *астролябією* (мал. 34, а), *теодолітом* (мал. 34, б) чи іншими кутомірними приладами.



Мал. 33



а



б

Мал. 34

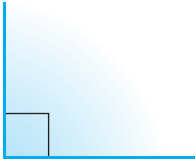
Два кути називають *рівними*, якщо їх міри рівні.

Із двох кутів більшим вважають той, міра якого більша.

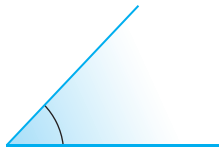
Кут називають *прямим*, якщо його міра дорівнює 90° , *гострим* — якщо він менший від прямого, *тупим* — якщо він більший за прямий, але менший від розгорнутого (мал. 35).

Прямі кути на малюнках частіше позначають не дугами, а квадратами (див. мал. 35).

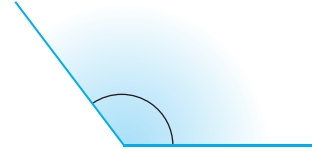
Кути, більші від розгорнутого (див. мал. 30, в), поки що не розглядаватимемо.



прямий кут



гострий кут



тупий кут

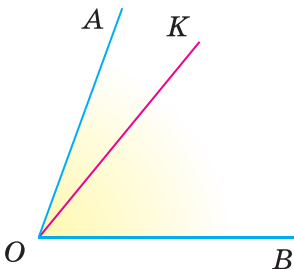
Мал. 35

Промінь, який виходить з вершини кута і лежить у його внутрішній області, називають *внутрішнім променем кута*. Внутрішній промінь розбиває даний кут на два менші кути. Наприклад, внутрішній промінь OK кута AOB розбиває цей кут на кути AOK і KOB (мал. 36). При цьому $\angle AOK + \angle KOB = \angle AOB$. Говорять, що кут AOB дорівнює сумі кутів AOK і KOB .

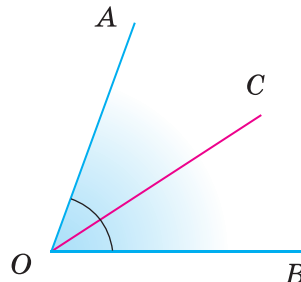
Міра кута дорівнює сумі мір кутів, на які даний кут розбивається його внутрішнім променем.

У двох вищевиділених реченнях, позначених знаком 📌, сформульовано *основні властивості вимірювання кутів*.

Внутрішній промінь, який розбиває кут на два рівні кути, називають *бісектрисою* цього кута. На малюнку 37 промінь OC — бісектриса кута AOB .

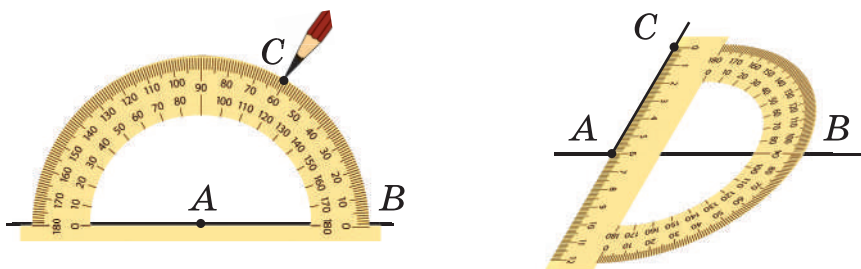


Мал. 36



Мал. 37

За допомогою транспортира можна вимірювати кути і відкладати кути заданої міри від будь-якого променя. Поступовий процес відкладання кута SAB , що дорівнює 60° , від променя AB показано на малюнку 38.



Мал. 38

Основна властивість відкладання кутів.

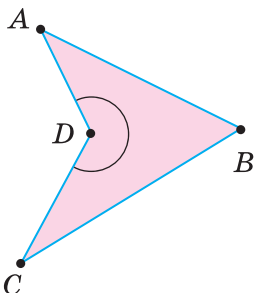
Від будь-якого променя з одного боку від нього можна відкласти кут заданої міри, і тільки один.

Для допитливих

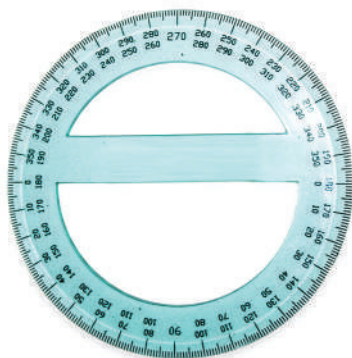
Кутом часто називають також фігуру, складену з двох променів, що мають спільний початок. Таким чином, кутом називають і деяку лінію. Але поділити такий кут на два чи більше рівних кутів не можливо. То ж коли говорять про додавання, віднімання чи ділення кутів, то кут розглядають разом з його внутрішньою областю.

Хоча далі ми розглядатимемо здебільшого кути, менші від розгорнутого, слід пам'ятати, що кути бувають і більші за розгорнутий. Вони мають більше 180° . Таким, наприклад, є кут D чотирикутника $ABCD$ (мал. 39). Існують і спеціальні транспортири, якими вимірюють кути, більші за розгорнутий (мал. 40). Зазвичай у геометрії розглядають кути, не більші за 360° . Поняття кута застосовують часто також для характеристики поворотів. Наприклад, велосипедне колесо можна повернути на 100° , можна на 300° . А коли колесо зробило півтора оберти? Уважають, що воно повернулося на 360° і ще на 180° , а разом — на 540° .

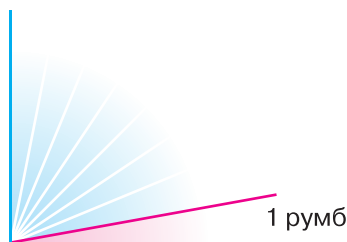
Крім градусів, минут і секунд, є й інші міри кутів. Моряки вимірюють кути в *румбах*. Румбом називають восьму частину прямого кута. $1 \text{ румб} = 11,25^\circ$ (мал. 41). Науковці найчастіше вимірюють кути в *радіанах*. Що це таке, дізнаєтесь у старших класах.



Мал. 39



Мал. 40



Мал. 41

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Яку фігуру називають кутом? Як позначають кути?
2. Який кут називають:
а) гострим; б) тупим; в) прямим; г) розгорнутим?
3. Якими приладами і в яких одиницях вимірюють кути?
4. Що таке внутрішня область кута і внутрішній промінь кута?
5. Що таке бісектриса кута?
6. Які кути називають рівними?
7. Сформулюйте основні властивості вимірювання кутів.
8. Сформулюйте основну властивість вимірювання кутів.

Виконаємо разом

1. Знайдіть міру кута AOB , якщо промені OC і OK ділять його на три рівні кути і $\angle COK = 40^\circ$.

✓ Кут COK — третя частина кута AOB .

Тому $\angle AOB = 40^\circ \cdot 3 = 120^\circ$.

Отже, $\angle AOB = 120^\circ$. ▲

✓ 2. Знайдіть міри кутів, утворених стрілками годинника: о 3-й годині; о 5-й годині (мал. 42).

На циферблаті годинника півколо відповідає 6 годинам. Тому одній годині відповідає $1/6$ частина розгорнутого кута, тобто 30° . Коли на годиннику 3-тя година, кут між годинною і хвилинною стрілками дорівнює $30^\circ \cdot 3 = 90^\circ$. Коли на годиннику 5-та година, кут між його стрілками дорівнює $30^\circ \cdot 5 = 150^\circ$.

Отже, ці кути — 90° і 150° . ▲

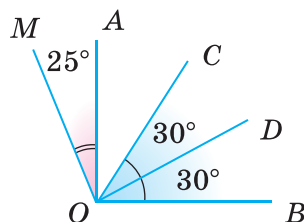


Мал. 42

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

63. Скільки мінут мають 2° ? А півтора градуса?
64. 1) Назвіть усі кути, які є на малюнку 43. Які з них гострі, прямі, тупі?
2) Нехай $\angle MOA = 25^\circ$, $\angle COD = \angle DOB = 30^\circ$, $\angle AOB$ — прямий. Знайдіть $\angle MOB$ і $\angle AOC$.
3) Порівняйте кути MOC і AOD , AOD і COB .



Мал. 43

65. Знайдіть кут між променями, які ділять прямий кут на 3 рівні частини.
66. Промені, проведені із центра кола, ділять його на 4 рівні частини. Знайдіть кут між двома сусідніми променями.

А

67. Накресліть гострий кут. Позначте буквами його вершину і сторони. Заштрихуйте його внутрішню область.
68. Накресліть тупий кут. Позначте його сторони буквами, а внутрішню область — дугою.
69. Накресліть розгорнутий кут KPT . Назвіть його вершину і сторони. Позначте внутрішню область кута дугою.
70. Позначте три точки A , B і C , що не лежать на одній прямій. Побудуйте кут ABC . Чи може цей кут бути розгорнутим?
71. Користуючись транспортиром, побудуйте кути, міри яких дорівнюють 50° , 90° , 120° . Проведіть бісектриси побудованих кутів.
72. Побудуйте на око кути, міри яких дорівнюють 30° , 45° , 60° , і проведіть їх бісектриси. Перевірте точність побудови транспортиром.
73. Виразіть у градусах і мінутах міри кутів: $135'$; $5000'$.
74. Виразіть у мінутах: $6^\circ 15'$; 2° ; $11,5^\circ$.
75. Виконайте дії: а) $5^\circ 48' + 7^\circ 35'$; б) $32^\circ 17' - 8^\circ 45'$.
76. Виконайте дії: а) $33^\circ 33' + 15^\circ 15'$; б) $145^\circ 54' - 41^\circ 41'$.
в) $123^\circ 45' + 54^\circ 32'$; г) $44^\circ 14' - 14^\circ 44'$.
77. Заповніть таблицю, у якій A — міра даного кута, B — міра кута між його стороною і бісектрисою.

A	10°		60°		100°	180°
B		50°		45°		

78. Знайдіть міру кута AOB , якщо OC — його внутрішній промінь і $\angle AOC = 60^\circ$, $\angle COB = 30^\circ$.
79. Чи є промінь PM внутрішнім променем кута KPT , якщо $\angle KPT = 70^\circ$, $\angle KPM = 80^\circ$? А якщо $\angle KPM = 20^\circ$?

Б

80. На який кут повертається хвилинка стрілка годинника протягом 20 хв; 30 хв?
81. На який кут повертається годинна стрілка годинника протягом 0,5 год; п'яти хвилин?
82. Знайдіть кут MOB , якщо $\angle AOM = 25^\circ$ і $\angle AOM : \angle MOB = 4 : 5$.
83. Знайдіть кут AOB , якщо $\angle AOM = 30^\circ$, $\angle MOB = 60^\circ$ і всі ці кути розташовані в одній площині.
84. Дано кути AOB і MOB однієї площини, що містять відповідно 120° і 60° . Знайдіть міру кута AOM . Розгляньте два випадки.
85. Накресліть кут AOB і його внутрішні промені OK і OM так, щоб $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle AOK = 40^\circ$, $\angle MOB = 30^\circ$. Знайдіть $\angle KOM$.

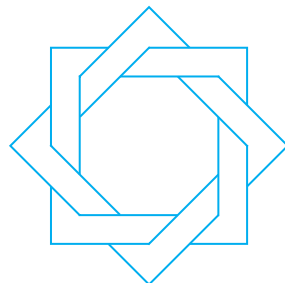
86. OM — бісектриса кута AOB , OK — бісектриса кута AOM . У скільки разів $\angle KOM$ менший від $\angle AOB$?
87. OM — бісектриса прямого кута AOB . OK і OP — бісектриси кутів AOM і MOB . Знайдіть міру кута KOP .
88. $\angle AOM = 30^\circ$, а $\angle BOM$ — на 20° більший. Знайдіть $\angle AOB$. Розгляньте всі можливі варіанти.
89. OM і OK — внутрішні промені кута AOB , OK — бісектриса кута MOB , $\angle AOB = 150^\circ$, $\angle KOB$ — на 40° менший від $\angle MOB$. Знайдіть $\angle AOM$ і $\angle MOK$.

Практичне завдання

90. а) Виріжте з паперу гострий, прямий і тупий кути. Виміряйте їх транспортером.
 б) Перегинаючи аркуші паперу, зробіть моделі кутів, міри яких дорівнюють 180° , 90° , 45° , 30° , 60° .

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

91. Площа квадрата дорівнює 16 см^2 . Знайдіть його периметр.
92. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 40 см^2 , а одна із сторін — 5 см .
93. Чи на одній прямій розташовані точки A , B і C , якщо:
 а) $AB = 5 \text{ дм}$, $BC = 7 \text{ дм}$, $AC = 10 \text{ дм}$;
 б) $AB = 35 \text{ см}$, $BC = 45 \text{ см}$, $AC = 1 \text{ дм}$;
 в) $AB = \frac{3}{4}$ дюйма, $BC = \frac{2}{3}$ дюйма,
 $AC = \frac{1}{12}$ дюйма?
94. Як знайти площу прямокутного трикутника, сторони якого дорівнюють 3 см , 4 см і 5 см ?
95. Перемалюйте в зошит фігуру, зображену на малюнку 44. Розфарбуйте її двома кольорами.



Мал. 44



Геометрія навколо нас



НСК «Олімпійський» у м. Київ

ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

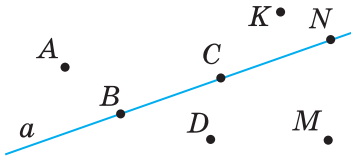
А

Б

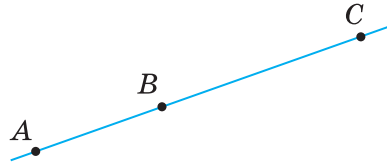
1

Які з точок:

- а) належать прямій a ;
 б) не належать прямій a ?

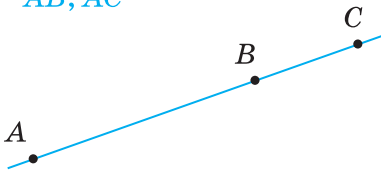


$$\frac{AC = 10, AB : BC = 2 : 3.}{AB, BC}$$

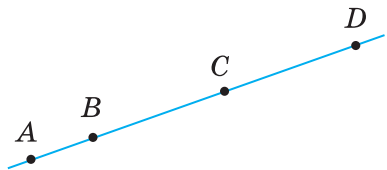


2

$$\frac{AB = \frac{2}{3}AC, BC = 5.}{AB, AC}$$



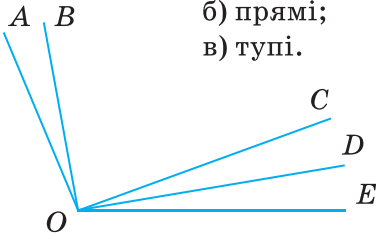
$$\frac{AD = 20, BC = CD = 2AB.}{AB, BC, CD, BD}$$



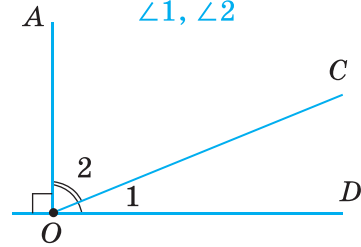
3

Запишіть кути:

- а) гострі;
 б) прямі;
 в) тупі.



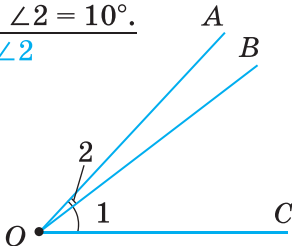
$$\frac{\angle 2 = 2 \angle 1.}{\angle 1, \angle 2}$$



4

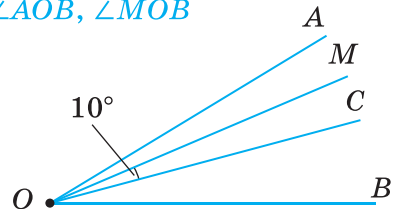
$$\frac{\angle AOC = 50^\circ;}{\angle 1 - \angle 2 = 10^\circ.}$$

$$\angle 1, \angle 2$$



$$\frac{OC \text{ — бісектриса } \angle AOB,}{\angle AOM = \angle MOC.}$$

$$\angle AOB, \angle MOB$$



ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

Б

5

$$\frac{PK = 12 \text{ см.}}{AB}$$



$$\begin{aligned} AB &= 15 \text{ см,} \\ AD &= 9 \text{ см,} \\ BC &= 12 \text{ см.} \end{aligned}$$

$$\frac{\text{Довести: } CD = BD$$



6

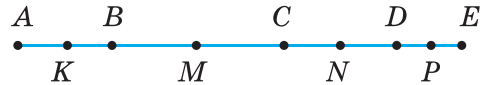
$$\begin{aligned} MP : PN &= 2 : 5, \\ PN - MP &= 12 \text{ см.} \end{aligned}$$

$$\frac{MN$$



$$\begin{aligned} K, M, N, P &\text{ — середини відрізків} \\ AB, BC, CD, DE &\text{ відповідно;} \\ AE &= 20 \text{ см; } MN = 4 \text{ см.} \end{aligned}$$

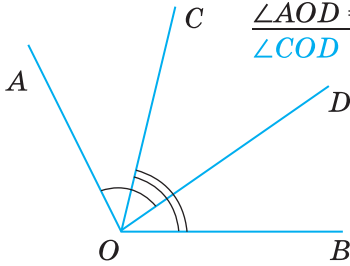
$$\frac{KP$$



7

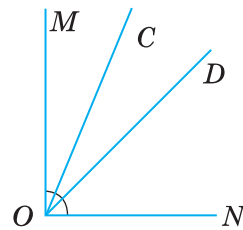
$$\begin{aligned} \angle AOB &= 130^\circ, \\ \angle COB &= 85^\circ, \\ \angle AOD &= 80^\circ. \end{aligned}$$

$$\frac{\angle COD$$



$$\begin{aligned} \angle MON &= 90^\circ, \\ OD &\text{ — бісектриса } \angle MON, \\ OC &\text{ — бісектриса } \angle MOD. \end{aligned}$$

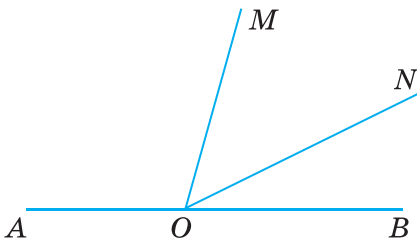
$$\frac{\angle CON$$



8

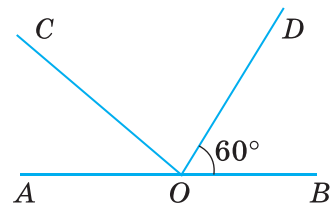
$$\begin{aligned} \angle MON : \angle MOB &= 5 : 8, \\ \angle AON &= 150^\circ. \end{aligned}$$

$$\frac{\angle AOM : \angle MON$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \angle AOC &= \frac{1}{3} \angle COD, \\ \angle BOD &= 60^\circ. \end{aligned}$$

$$\frac{\angle AOC; \angle COD$$



Самостійна робота 1**Варіант 1**

- 1°. C — внутрішня точка відрізка AB . $AC = 6$ см, відрізок BC на 2 см менший від AC . Знайдіть довжину відрізка AB .
- 2°. $\angle AOB = 130^\circ$, OC — його бісектриса. Знайдіть $\angle BOC$.
- 3°. Точки A , B і C лежать на одній прямій. $AB = 9$ см, $BC = 4$ см. Знайдіть довжину відрізка AC . Розгляньте два варіанти.
- 4°. Промінь OC ділить $\angle AOB$ на два кути так, що один із них у 3 рази більший за інший. Знайдіть $\angle AOC$ і $\angle BOC$, якщо $\angle AOB = 80^\circ$.

Варіант 2

- 1°. C — внутрішня точка відрізка AB . $BC = 4$ см, відрізок AC у 2 рази більший за BC . Знайдіть довжину відрізка AB .
- 2°. OC — бісектриса кута AOB , $\angle AOC = 50^\circ$. Знайдіть $\angle AOB$.
- 3°. Точки M , N і K лежать на одній прямій. $MN = 6$ см, $NK = 10$ см. Знайдіть довжину відрізка MK . Розгляньте два варіанти.
- 4°. Промінь OC ділить $\angle AOB$ на два кути так, що один із них на 20° більший за інший. Знайдіть $\angle AOC$ і $\angle BOC$, якщо $\angle AOB = 70^\circ$.

Варіант 3

- 1°. C — внутрішня точка відрізка AB . $AC = 4$ см, відрізок BC на 3 см більший за AC . Знайдіть довжину відрізка AB .
- 2°. $\angle AOB = 60^\circ$, OC — його бісектриса. Знайдіть $\angle AOC$.
- 3°. Точки E , F і P лежать на одній прямій. $EF = 7$ см, $FP = 3$ см. Знайдіть довжину відрізка EP . Розгляньте два варіанти.
- 4°. Промінь OC ділить $\angle AOB$ на два кути так, що $\angle AOC : \angle BOC = 2 : 3$. Знайдіть $\angle AOC$ і $\angle BOC$, якщо $\angle AOB = 100^\circ$.

Варіант 4

- 1°. C — внутрішня точка відрізка AB . $AC = 9$ см, відрізок BC у 3 рази менший від AC . Знайдіть довжину відрізка AB .
- 2°. OC — бісектриса кута AOB . $\angle BOC = 40^\circ$. Знайдіть $\angle AOB$.
- 3°. Точки K , P і T лежать на одній прямій. $KP = 12$ см, $PT = 5$ см. Знайдіть довжину відрізка KT . Розгляньте два варіанти.
- 4°. Промінь OC ділить $\angle AOB$ на два кути так, що один із них на 30° менший від іншого. Знайдіть $\angle AOC$ і $\angle BOC$, якщо $\angle AOB = 120^\circ$.

Тестові завдання

1

1. Прямі a і b перетинаються в точці O . Якій прямій належить точка O ?	а) a ; б) b ; в) a і b ; г) не належить жодній.
2. На скільки частин ділять площину дві прямі, що перетинаються?	а) на 2; б) на 3; в) на 4; г) на 6.
3. Яка з трьох точок лежить між двома іншими, якщо $XU = 3$, $YZ = 7$, $XZ = 4$?	а) X ; б) Y ; в) Z ; г) жодна.
4. M — середина відрізка AB , $AM = 7$ см. Знайдіть довжину відрізка AB .	а) 14 см; б) 21 см; в) 3,5 см; г) 7 см.
5. K — внутрішня точка відрізка AB , $AK = 3$ см, $AB = 10$ см. Знайдіть довжину відрізка KB .	а) 13 см; б) 7 см; в) 30 см; г) 8 см.
6. Знайдіть міру кута, якщо його бісектриса утворює зі стороною кут 20° .	а) 20° ; б) 10° ; в) 30° ; г) 40° .
7. $\angle AOB = 110^\circ$, OM — його внутрішній промінь, $\angle BOM = 60^\circ$. Знайдіть $\angle AOM$.	а) 50° ; б) 170° ; в) 90° ; г) 70° .
8. OM — внутрішній промінь кута AOB , $\angle AOM = 40^\circ$, $\angle BOM$ — на 10° більший. Знайдіть $\angle AOB$.	а) 70° ; б) 50° ; в) 90° ; г) 44.
9. Точки A , B і C лежать на одній прямій. $AB = 5$ см, $BC = 12$ см. Знайдіть AC .	а) 17 см; б) 7 см; в) 17 см або 7 см; г) 18 см або 8 см.
10. $\angle AOB = 50^\circ$, $\angle BOC = 20^\circ$. Знайдіть $\angle AOC$.	а) 70° ; б) 30° або 70° ; в) 30° ; г) 70° або 40° .

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке геометрія?
2. Що таке планіметрія?
3. Наведіть приклади плоских і неплоских фігур.
4. Опишіть поняття *точка*.
5. Опишіть поняття *пряма*.
6. Опишіть поняття *площина*.
7. Наведіть приклади матеріальних об'єктів, моделями яких є: точка; пряма; площина.
8. Що означають записи $A \in a$, $A \notin b$?
9. Що означає вислів «точка B лежить між точками A і C »?
10. Сформулюйте основні властивості розміщення точок на прямій.
11. Що таке промінь?
12. Як позначають промені?
13. Які промені називають доповняльними?
14. Що таке відрізок?
15. Що таке кінці відрізка?
16. У яких одиницях вимірюють відрізки?
17. Сформулюйте основні властивості вимірювання відрізків.
18. Що таке середина відрізка?
19. Яка нерівність виконується для будь-яких трьох точок?
20. Що таке відстань між двома точками?
21. Яку фігуру називають кутом?
22. Як позначають кути?
23. Який кут називають гострим?
24. Який кут називають тупим?
25. Який кут називають прямим?
26. Який кут називають розгорнутим?
27. У яких одиницях вимірюють кути?
28. Що таке внутрішня область кута?
29. Що таке внутрішній промінь кута?
30. Сформулюйте основні властивості вимірювання кутів.
31. Що таке бісектриса кута?
32. Які кути називають рівними?

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 1

Геометрія — наука про геометричні фігури і їх властивості. Найпростіша геометрична фігура — *точка*. Кожна інша геометрична фігура складається з точок, тобто є деякою множиною точок. Інші фігури — *пряма*, *площина*. Їх зміст розкривають не означеннями, а описуючи їх основні властивості.

Якщо точка A лежить на прямій a , говорять, що пряма a проходить через точку A і записують: $A \in a$. Якщо точка B не лежить на прямій a , пишуть: $B \notin a$.

Фігури, які можна розмістити в одній площині, називають *плоскими фігурами*. Частину геометрії, у якій досліджують фігури тільки однієї площини, називають *планіметрією*.

Основні властивості розміщення точок на прямій

- Хоч би яка була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.
- Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і тільки одну.
- Із трьох різних точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.

Частини прямої — *відрізок* і *промінь*. Відрізок AB — це частина прямої, що містить точки A , B і всі точки, що лежать між ними. Кожному відрізку ставиться у відповідність його довжина. Довжина відрізка — відстань між його кінцями. Відстані й довжини вимірюють метрами, сантиметрами, міліметрами, кілометрами, футами, дюймами та іншими одиничними відрізками.

Основні властивості вимірювання відрізків

- Кожний відрізок має певну довжину.
- Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які його розбиває будь-яка внутрішня точка.

Частину площини, обмежену двома променями із спільним початком, називають *кутом*. Кути бувають гострі, прямі, тупі, розгорнуті і більші за розгорнуті. *Міри кутів* визначають у градусах, мінутах, секундах, румбах та деяких інших кутових одиницях виміру.

Основні властивості вимірювання кутів

- Кожний кут має певну міру.
- Міра кута дорівнює сумі мір кутів, на які даний кут розбивається його внутрішнім променем.

Основні властивості відкладання відрізків і кутів

- На будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок даної довжини, і тільки один.
- Від будь-якого променя з одного боку від нього можна відкласти кут заданої міри, і тільки один.

Бісектриса кута — внутрішній промінь, який розбиває даний кут на два рівні кути.

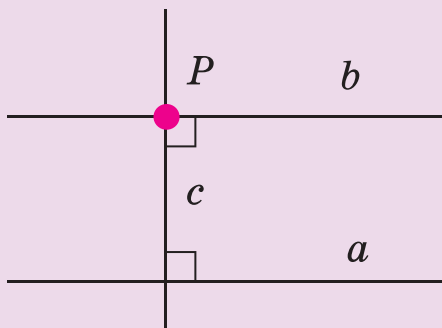
An aerial photograph of a rural landscape. The foreground is dominated by a large, rectangular field of young green plants, likely a vineyard or orchard, with distinct rows. A dirt road or path runs horizontally across the middle ground, separating the foreground field from a larger, more varied agricultural area. In the background, there are rolling hills, more fields, and a small cluster of buildings, possibly a farmstead or a small village. The sky is clear and blue. The overall scene is a typical representation of a rural agricultural setting.

Геометрія Евкліда є лише першим кроком до вивчення форм реального простору.

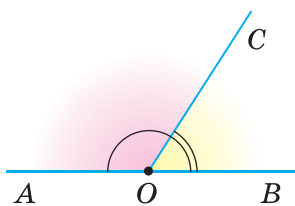
О. Смогоржевський

ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

У цьому розділі підручника ви розширите і поглибите свої знання про прямі і промені однієї площини, ознайомитеся з дуже важливими поняттями: **суміжні кути, вертикальні кути, перпендикулярні прямі, паралельні прямі** тощо, а також із важливими загальноматематичними поняттями: **аксіома, теорема, наслідок, доведення, ознака, означення.**



§ 4. СУМІЖНІ І ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ



Мал. 45

Два кути, на які розбивається розгорнутий кут його внутрішнім променем, називають *суміжними*.

Одна сторона в суміжних кутів спільна, а дві інші — доповняльні промені. Якщо точки A , O , B лежать на одній прямій, а C — довільна точка, яка не належить прямій AB , то кути AOC і COB — суміжні (мал. 45).

Властивість суміжних кутів сформулюємо у вигляді *теореми*.

У математиці теоремою називають кожне твердження, істинність якого обґрунтовується за допомогою логічних міркувань. Ланцюжок таких міркувань називають *доведенням*¹.

У нашому підручнику теореми надруковано жирним шрифтом і пронумеровано.

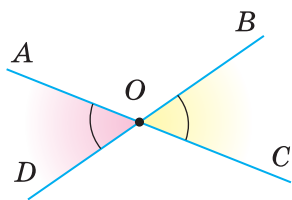
Теорема 1. Сума мір двох суміжних кутів дорівнює 180° .

Доведення. Об'єднання двох суміжних кутів є розгорнутим кутом. Міра розгорнутого кута дорівнює 180° . Отже, хоч би якими були суміжні кути, сума їх мір дорівнює 180° . ▲

Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного є доповняльними променями сторін другого.

Наприклад, якщо прямі AC і BD перетинаються в точці O , то кути AOD і BOC — вертикальні (мал. 46). Кожний із них суміжний із кутом AOB . Кути AOB і COD також вертикальні.

Теорема 2. Вертикальні кути рівні.



Мал. 46

Доведення. Нехай AOD і BOC — довільні вертикальні кути (мал. 46). Кожний із них суміжний із кутом AOB . За теоремою про суміжні кути:

$$\angle AOD + \angle AOB = 180^\circ \text{ і } \angle BOC + \angle AOB = 180^\circ,$$

$$\angle AOD = 180^\circ - \angle AOB \text{ і } \angle BOC = 180^\circ - \angle AOB.$$

Праві частини цих рівностей однакові, тому

$$\angle AOD = \angle BOC. \text{ А це й треба було довести. } \blacktriangle$$

¹ Детальні відомості про теореми, їх структуру та види прочитайте на с. 57 (§ 8).

Для допитливих

1. Слово *суміжні* вживають не тільки щодо кутів. *Суміжний* — той, що має спільну межу, прилеглий до чогось, сусідній. Можна говорити про суміжні кімнати, суміжні поля тощо. Стосовно кутів це поняття має особливий зміст.

Не будь-які два кути зі спільною межею називають суміжними. Наприклад, зображені на малюнку 47 кути AOB і BOC мають спільну сторону OB , але не є суміжними кутами.

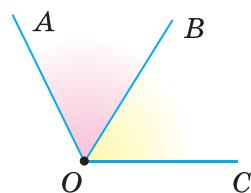
Суміжні кути — це два кути, які перебувають у певному відношенні.

Один кут не може бути суміжним. Якщо говоримо, що якийсь кут суміжний, то обов'язково маємо закінчити думку: суміжний з яким кутом? Відношення суміжності кутів має таку властивість: **якщо кут A суміжний з кутом B , то і кут B суміжний з кутом A .**

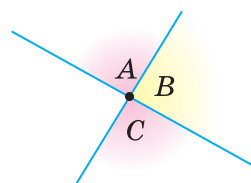
Нехай кут A суміжний з кутом B , а кут B суміжний з кутом C . Що можна сказати про кути A і C ? Вони або вертикальні, або кут C — той самий кут A (мал. 48).

2. Слово *вертикальні* також стосується не тільки кутів. Здебільшого вертикально розміщеним вважають продовгуватий предмет, розташований у напрямі виска (перпендикулярно до горизонту).

Завжди правильна властивість: **якщо кут A вертикальний з кутом C , то і кут C вертикальний з кутом A .**



Мал. 47



Мал. 48

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які кути називають суміжними?
2. Сформулюйте і доведіть властивість суміжних кутів.
3. Які кути називають вертикальними?
4. Сформулюйте і доведіть властивість вертикальних кутів.

Виконаємо разом

1. Знайдіть міри суміжних кутів, якщо один із них на 50° більший, ніж інший.

✓ Нехай міра меншого із суміжних кутів дорівнює x , тоді міра більшого кута — $x + 50^\circ$. За властивістю суміжних кутів $x + x + 50^\circ = 180^\circ$, звідси $x = 65^\circ$, а $x + 50^\circ = 115^\circ$. Отже, це кути 65° і 115° . ▲

2. Один із чотирьох кутів, які утворилися при перетині двох прямих, удвічі більший від іншого (йдеться про кути, менші від розгорнутого). Знайдіть міру кожного з утворених кутів.

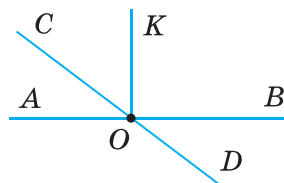
✓ При перетині двох прямих утворюються вертикальні і суміжні кути. Оскільки вертикальні кути рівні, то вони умову задачі не задовольня-

ють. Робимо висновок: один із суміжних кутів удвічі більший за інший, їх міри — x і $2x$. За властивістю суміжних кутів $x + 2x = 180^\circ$, звідси $x = 60^\circ$, а $2x = 120^\circ$. Відповідні їм вертикальні кути також дорівнюють 60° і 120° . Отже, це кути — $60^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 120^\circ$. ▲

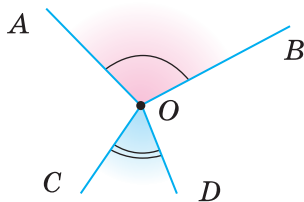
ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

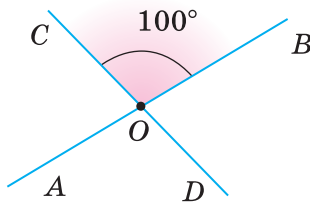
96. Назвіть пари суміжних кутів, зображених на малюнку 49.
97. Чи можна вважати суміжними кути KOB і KOA , зображені на малюнку 49? А кути AOC і AOD ?
98. Дано гострий кут A . Чи може бути гострим суміжний з ним кут? А прямим?
99. Дано тупий кут. Яким є суміжний з ним кут?
100. Сума кутів A і B дорівнює 180° . Чи суміжні вони?
101. Розгорнутий кут двома внутрішніми променями розбито на три менші кути. Чи можна їх уважати суміжними кутами?
102. Чи вертикальні кути AOB і COD , зображені на малюнку 50?
103. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 100° . Знайдіть міри трьох інших кутів (мал. 51).



Мал. 49



Мал. 50



Мал. 51

А

104. Міра одного з двох суміжних кутів дорівнює 50° . Знайдіть міру іншого кута. Побудуйте ці кути.
105. Дано кут, міра якого дорівнює 160° . Знайдіть міру суміжного з ним кута. Побудуйте ці кути. Зафарбуйте їх різними кольорами.
106. Знайдіть міру кута, суміжного з кутом ABC , якщо:
- а) $\angle ABC = 34^\circ$; б) $\angle ABC = 111^\circ$;
в) $\angle ABC = 13^\circ 13'$; г) $\angle ABC = 135^\circ 47'$.
107. Доведіть, що якщо суміжні кути рівні, то вони прямі.

- 108.** Знайдіть міри суміжних кутів, якщо один із них:
а) на 30° більший за інший;
б) у два рази менший від іншого.
- 109.** Знайдіть міри суміжних кутів, які відносяться як:
а) $4 : 5$; б) $3 : 2$.
- 110.** Накресліть кут, що має 45° . Побудуйте вертикальний з ним кут.
- 111.** Сума мір двох вертикальних кутів дорівнює 120° . Знайдіть міру кожного із цих кутів.
- 112.** Знайдіть міри кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо міра одного з них дорівнює:
а) 50° ; б) 110° ; в) n° .
- 113.** Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її.

Даний кут	10°	50°	60°	90°	120°	170°
Вертикальний з ним кут						
Суміжний з ним кут						

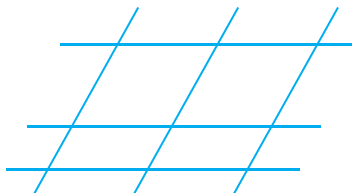
- 114.** Перемалюйте в зошит малюнок 46 і подану нижче таблицю. Скориставшись малюнком, заповніть таблицю.

$\angle AOD$	66°					$50^\circ 5'$		
$\angle AOB$		135°			177°			
$\angle BOC$				39°			$33^\circ 33'$	
$\angle DOC$			97°					$99^\circ 9'$

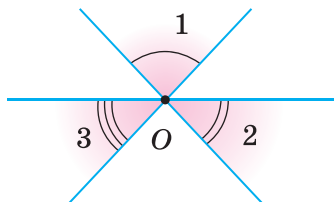
Б

- 115.** Чи можуть кути, що утворилися при перетині двох прямих, бути пропорційними числам:
а) 2, 3, 4 і 5;
б) 5, 5, 5 і 8;
в) 2, 3, 2 і 3;
г) 1, 4, 1 і 4?
- 116.** Накресліть куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Чи можна вважати суміжними його кути ABB_1 і $B_1 BC$? Чому? Чому дорівнює міра кута, суміжного з кутом ABB_1 ?
- 117.** Намалюйте три прямі так, щоб вони перетиналися в одній точці. Скільки пар вертикальних кутів утворилося?

118. Скільки пар вертикальних кутів і скільки пар суміжних кутів зображено на малюнку 52?
119. На малюнку 53 зображено три прямі, які перетинаються в точці O . Доведіть, що $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$.

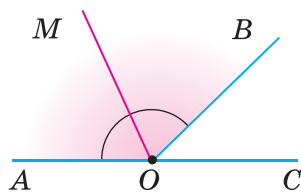


Мал. 52



Мал. 53

120. Знайдіть міри кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо:
- один із них на 50° більший за інший;
 - один із них дорівнює половині іншого;
 - сума мір двох із цих кутів дорівнює 100° .
121. Кут AOB має 180° . Промінь OM ділить його на два кути, один з яких більший за інший на 20° . Знайдіть міри цих двох кутів, а також кут між їх бісектрисами.
122. Кути AOB і BOC — суміжні, OM — бісектриса кута BOC . Знайдіть $\angle AOB$, якщо:
- $\angle MOC = 30^\circ$;
 - $\angle MOC = 45^\circ$;
 - $\angle MOC = 60^\circ$.
123. Доведіть, що кути, суміжні з рівними кутами, рівні.
124. Знайдіть міру кута, якщо сума двох суміжних з ним кутів дорівнює 100° .
125. Кути AOB і BOC — суміжні. OM — бісектриса кута AOB (мал. 54). Знайдіть $\angle MOB$, якщо:
- $\angle AOB - \angle BOC = 40^\circ$;
 - $\angle AOB : \angle BOC = 5$;
 - $\angle AOB : \angle BOC = 5 : 4$;
 - $\angle BOC$ становить $\frac{2}{5} \angle AOB$.



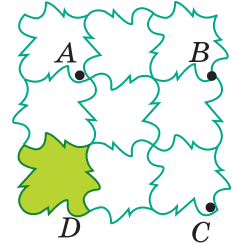
Мал. 54

Практичне завдання

126. Перегинаючи аркуш паперу, утворіть пару суміжних кутів і пару вертикальних кутів.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

127. Ребра двох кубів відносяться як $1 : 2$. Як відносяться їх об'єми? А площі поверхонь?
128. Позначте на координатній площині точки $A(1; -1)$, $B(1; 3)$, $C(5; 3)$ і $D(5; -1)$ та сполучіть їх послідовно відрізками. Як називається утворена фігура $ABCD$? Які з її сторін паралельні, а які — перпендикулярні?
129. Круг радіуса 3 см поділіть радіусами на 6 рівних секторів. Знайдіть площу одного такого сектора. На скільки вона менша від площі всього круга?
130. Фігура, зображена на малюнку 55, складається з 9 рівних листків. Знайдіть площу одного листка, якщо A, B, C, D — вершини квадрата з площею S .



Геометрія навколо нас

Мал. 55



Королівський музей в Онтаріо

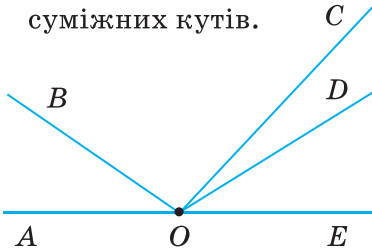
ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

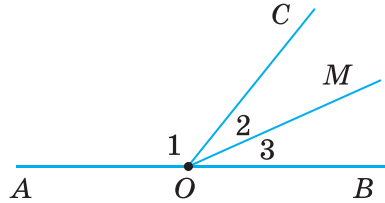
Б

1

Знайдіть пари суміжних кутів.

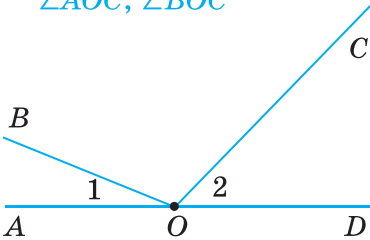


$$\frac{\angle 1 = 120^\circ, \angle 2 = \angle 3.}{\angle 2, \angle AOM}$$

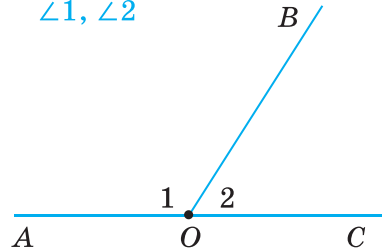


2

$$\frac{\angle 1 = 30^\circ, \angle 2 = 45^\circ.}{\angle AOC, \angle BOC}$$

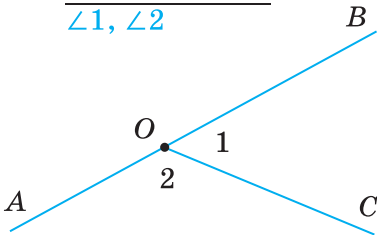


$$\frac{\angle 1 = 2\angle 2.}{\angle 1, \angle 2}$$

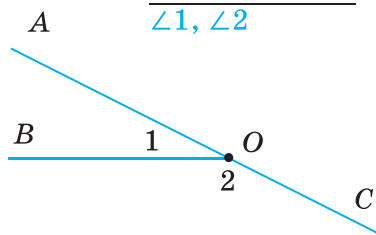


3

$$\frac{\angle 2 - \angle 1 = 40^\circ.}{\angle 1, \angle 2}$$

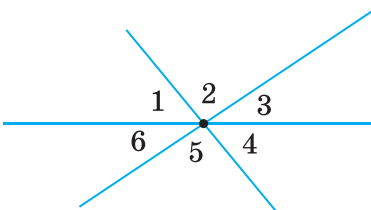


$$\frac{\angle 1 : \angle 2 = 2 : 7.}{\angle 1, \angle 2}$$

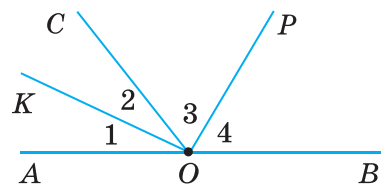


4

$$\frac{\angle 1 = 60^\circ, \angle 3 = 40^\circ.}{\angle 2, \angle 4, \angle 5, \angle 6}$$

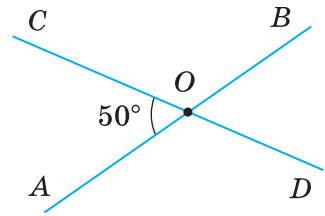


$$\frac{\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4.}{\text{Довести: } \angle KOP = 90^\circ.}$$



§ 5. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ І ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

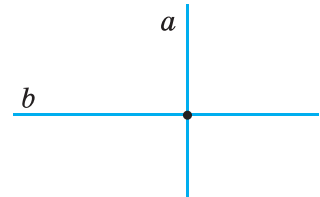
Пригадайте, як можуть розташовуватися на площині дві прямі. Якщо вони перетинаються, то утворюють чотири кути — дві пари вертикальних кутів. Тут і далі йдеться про кути, менші від розгорнутого. Менший із цих кутів вважають *кутом між даними прямими*. Наприклад, на малюнку 56 прямі AB і CD перетинаються під кутом 50° . Говорять також, що кут між прямими AB і CD дорівнює 50° .



Мал. 56

Якщо дві прямі, перетинаючись, утворюють чотири прямих кути, говорять, що вони перетинаються під прямим кутом.

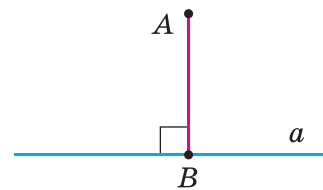
Дві прямі, які перетинаються під прямим кутом, називають *перпендикулярними прямими*. Прямі a і b на малюнку 57 перпендикулярні одна до одної. Коротко пишуть: $a \perp b$, або $b \perp a$.



Мал. 57

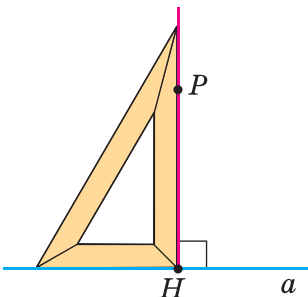
Відрізки або *промені* називають *перпендикулярними*, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

Якщо відрізок AB лежить на прямій, перпендикулярній до прямої a , говорять, що *відрізок AB перпендикулярний до прямої a* . Якщо при цьому точка B належить прямій a , то відрізок AB називають *перпендикуляром*, проведеним з точки A до прямої a (мал. 58). Точку B називають *основою перпендикуляра*, а довжину перпендикуляра AB — *відстанню від точки A до прямої a* .

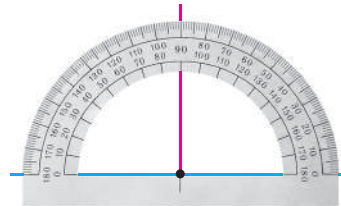


Мал. 58

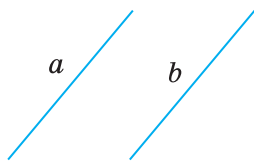
Через довільну точку P завжди можна провести пряму, перпендикулярну до даної прямої a . Це можна зробити, користуючись косинцем (мал. 59) або транспортиром (мал. 60).



Мал. 59



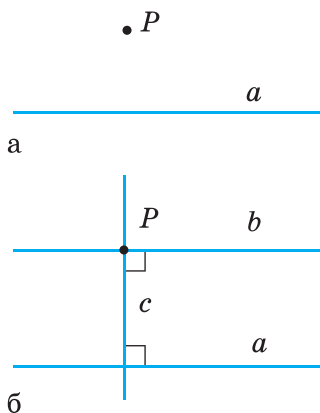
Мал. 60



Мал. 61



Мал. 62



Мал. 63

Згодом дізнаєтесь, як можна виконати таку побудову за допомогою лінійки і циркуля. Можна довести, що існує тільки одна пряма, яка перпендикулярна до даної прямої і проходить через дану точку.

Не кожні дві прямі перетинаються. Особливої уваги заслуговують прямі, які не перетинаються і лежать в одній площині.

Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються. Якщо прямі a і b паралельні, пишуть: $a \parallel b$ (мал. 61).

Уявлення про паралельні прямі дають лінії в зошиті, лінії нотного стану (мал. 62), протилежні ребра бруска.

Два *відрізки* або *промені* називають паралельними, якщо вони лежать на паралельних прямих. Наприклад, якщо $ABCD$ — прямокутник, то $AB \parallel DC$ і $BC \parallel AD$.

Через будь-яку точку P , яка не лежить на прямій a , можна провести пряму, паралельну прямій a (мал. 63, а). Для цього можна через точку P провести пряму c , перпендикулярну до прямої a , а потім — пряму b , перпендикулярну до прямої c (мал. 63. б). За такої побудови завжди $b \parallel a$. Можна скористатися також лінійкою і косинцем.

Як проводити паралельні прямі, користуючись лінійкою і циркулем, дізнаєтесь пізніше.

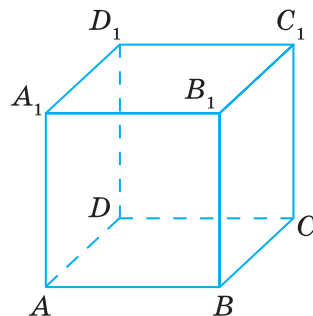
Для допитливих

1. Можна довести (спробуйте!), що дві прямі однієї площини, які перпендикулярні до третьої прямої, — паралельні. Тобто, якщо $a \perp c$, $b \perp c$, то $a \parallel b$.

Але якщо прямі a і b не належать одній площині, то таке твердження неправильне. Наприклад, якщо $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, то $AB \perp BB_1$ і $B_1 C_1 \perp BB_1$, але прямі AB і $B_1 C_1$ не паралельні (мал. 64).

2. Слово *паралельні* походить від грецького слова «параллелос», яке означає: ті, що йдуть поруч. Якщо говорять, що якась пряма паралельна, то обов'язково слід сказати, якій саме прямій вона паралельна.

Отже, паралельність прямих — це своєрідне відношення між двома прямими. *Відношення паралельності прямих* має таку властивість: якщо $a \parallel b$, то і $b \parallel a$. Іншими відношеннями є перпендикулярність прямих, рівність кутів тощо. Знаки цих відношень: \parallel , \perp , $=$.



Мал. 64

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке *кут між прямими*?
2. Сформулюйте означення перпендикулярних прямих.
3. Які відрізки називають перпендикулярними?
4. Які дві прямі називають паралельними?
5. Які відрізки називають паралельними?
6. За допомогою яких креслярських інструментів можна провести пряму, перпендикулярну до даної прямої? Як це роблять?
7. Як можна провести пряму, паралельну даній прямій?

Виконаємо разом

1. Доведіть, що бісектриси суміжних кутів перпендикулярні.

▼ Нехай $\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні кути. OK і OP — їх бісектриси (мал. 65). $\angle KOP = \angle KOB + \angle BOP$. Оскільки OK і OP — бісектриси, то $\angle KOB = \frac{1}{2} \angle AOB$, $\angle BOP = \frac{1}{2} \angle BOC$.

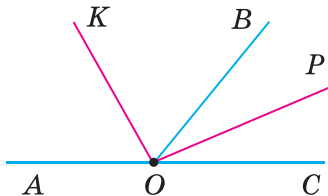
$$\text{Тоді } \angle KOP = \frac{1}{2} \angle AOB + \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} (\angle AOB + \angle BOC) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Отже, $OK \perp OP$. ▲

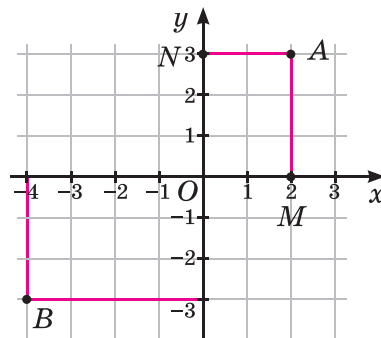
2. Позначте на координатній площині точки $A(2; 3)$ і $B(-4; -3)$. Знайдіть відстань від цих точок до осей координат, якщо довжина одиничного відрізка дорівнює 1 см.

▼ З точок A і B опустимо перпендикуляри на осі координат (мал. 66). Довжина відрізка AM — відстань від точки A до осі Ox , а довжина відрізка AN — відстань від точки A до осі Oy . З малюнка видно, що $AM = 3$ см, а $AN = 2$ см.

Аналогічно встановлюємо, що відстань від точки B до осей координат дорівнює 3 см і 4 см. ▲



Мал. 65



Мал. 66

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

131. Наведіть приклади матеріальних моделей:

- а) перпендикулярних прямих;
б) паралельних прямих.

132. Які з прямих, зображених на малюнку 67:

- а) перпендикулярні;
б) паралельні?

133. Скориставшись малюнком 68, укажіть:

1) через яку точку пройде пряма, що:

а) перпендикулярна до прямої a і проходить через точку A ;

б) перпендикулярна до прямої a і проходить через точку D ;

в) паралельна прямій a і проходить через точку F ;

г) паралельна прямій a і проходить через точку K .

2) Яке з тверджень правильне:

а) $AB \perp a$;

б) $BM \perp a$;

в) $KP \perp a$;

г) $FK \parallel a$;

ґ) $BC \parallel a$;

д) $KP \parallel a$?

134. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямокутний паралелепіпед (мал. 69).

1) Назвіть відрізки:

а) паралельні відрізку AA_1 ;

б) паралельні відрізку AD ;

в) перпендикулярні до відрізка AA_1 ;

г) перпендикулярні до відрізка AD .

2) Яке з тверджень правильне:

а) $AA_1 \perp AD$;

б) $B_1 C_1 \perp A_1 B_1$;

в) $DC \perp AB$;

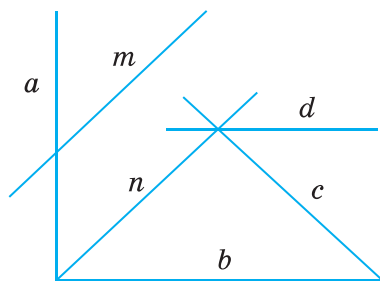
г) $D_1 B \perp DB$;

ґ) $CD \parallel C_1 D_1$;

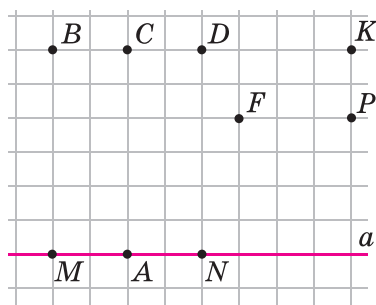
д) $A_1 D_1 \parallel AD$;

е) $DD_1 \parallel A_1 D_1$;

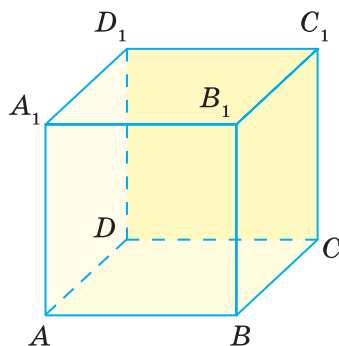
є) $CD \parallel AB$?



Мал. 67



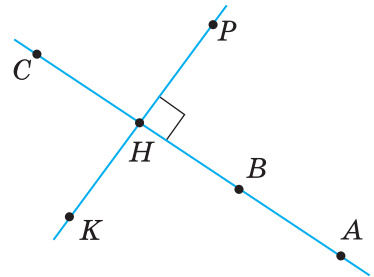
Мал. 68



Мал. 69

А

135. Проведіть пряму a і позначте точки M і N такі, що $M \in a$, $N \notin a$. Користуючись клітинками зошита, проведіть через точки M і N прямі, перпендикулярні до прямої a .
136. Точки M і N лежать по різні боки від прямої a . Користуючись клітинками зошита, проведіть через точки M і N прямі, паралельні прямій a .
137. Точка A не лежить на прямій c . Скільки прямих, перпендикулярних до прямої c , можна провести через точку A ? Чому?
138. Точка K не лежить на прямій a . Користуючись косинцем, побудуйте перпендикуляр, проведений із точки K до прямої a .
139. Назвіть десять пар перпендикулярних відрізків, що є на малюнку 70. Чи є перпендикулярами до прямої KP відрізки AH , BH , CH , AB , BC ?
140. Відомо, що $a \parallel b$. Чи правильно, що $b \parallel a$?
141. Промені AB і CD не перетинаються. Чи можна стверджувати, що вони паралельні?
142. Використовуючи малюнок 67 та символи \perp і \parallel , заповніть пропуски:
а) $a \dots b$; б) $m \dots n$; в) $n \dots c$; г) $a \dots d$; г) $m \dots c$; д) $b \dots d$.
143. Перпендикулярні прямі AB та CD перетинаються в точці O . OM — бісектриса кута COB . Знайдіть $\angle AOM$ і $\angle MOD$.
144. Позначте на координатній площині точки $A(-3; 4)$, $B(1; 8)$, $C(4; 5)$ і $D(-2; -1)$. Перевірте, чи перпендикулярні прямі AD і DC , AB і BC . Чи паралельні прямі AB і CD , AD і BC ?
145. Позначте на координатній площині точки $A(-3; -1)$ і $B(2; 4)$. Через ці точки проведіть прямі, перпендикулярні до прямої AB . Знайдіть координати точок перетину побудованих прямих з осями координат. Чи паралельні побудовані прямі?
146. За допомогою транспортира побудуйте $\angle AOB = 30^\circ$. Позначте точку M таку, що $M \in OA$ і $OM = 4$ см. Із точки M опустіть перпендикуляр на пряму OB . Виміряйте відстань від точки M до OB .
147. За допомогою транспортира побудуйте $\angle AOB = 130^\circ$. Позначте точку M таку, що $M \in OA$. Із точки M опустіть перпендикуляр на пряму OB . Чи лежатиме основа перпендикуляра на промені OB ? А на прямій OB ?
148. $\angle AOB = 90^\circ$, M — внутрішня точка кута AOB . Через точку M проведіть прямі, паралельні сторонам кута. Переконайтеся, що побудовані прямі — перпендикулярні.



Мал. 70

149. $\angle AOB = 90^\circ$, M — довільна точка бісектриси кута AOB . Виміряйте відстані від точки M до променів OB і OA . Порівняйте ці відстані.

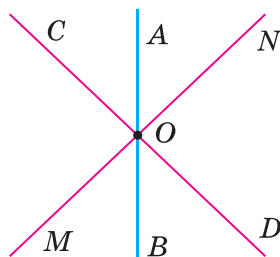
Б

150. $\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні кути. OM — внутрішній промінь кута AOB , $OM \perp AC$. Чому дорівнює $\angle MOB$, якщо:

- а) $\angle BOC = 40^\circ$; б) $\angle AOB - \angle BOC = 30^\circ$;
в) $\angle AOB : \angle BOC = 3 : 2$; г) $\angle BOC = \frac{1}{3} \angle AOB$?

151. Три прямі AB , CD і MN перетинаються в точці O (мал. 71). Доведіть, що $CD \perp MN$, якщо:

- а) $\angle AOM = 130^\circ$, $\angle COB = 140^\circ$;
б) $\angle COM = \angle AOC + \angle MOB$;
в) $\angle AOM = 135^\circ$, OB — бісектриса кута MOD .



Мал. 71

152. $\angle AOB = 90^\circ$. Побудуйте точку M , яка лежить у внутрішній області кута AOB на відстані 2 см від кожної сторони кута.

153. Побудуйте перпендикулярні прямі a , c і точку M , яка лежить на відстані 3 см від прямої a і на відстані 1 см від прямої c .

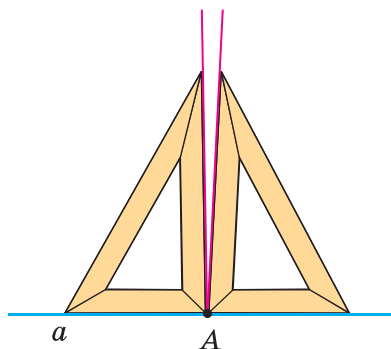
154. За допомогою транспортира побудуйте $\angle AOB = 80^\circ$ і проведіть його бісектрису OM . Через довільну точку K цієї бісектриси проведіть прямі, перпендикулярні до сторін кута. Виміряйте відстані від точки K до сторін кута і порівняйте їх.

155. Розв'яжіть попередню задачу, якщо $\angle AOB$ дорівнює: 60° ; 90° ; 130° . Сформулюйте припущення про відстань від точок бісектриси кута до сторін цього кута.

156. За допомогою транспортира побудуйте $\angle AOB = 60^\circ$ і проведіть його бісектрису OM . Через довільну точку K цієї бісектриси проведіть пряму EF , перпендикулярну до OM . Порівняйте довжини відрізків OE і OF , якщо $E \in OA$, $F \in OB$.

157. Розв'яжіть попередню задачу, якщо $\angle AOB$ дорівнює: 80° ; 90° ; 120° . Сформулюйте припущення про властивість прямої, перпендикулярної до бісектриси кута.

158. Прикладаючи косинець то одним, то іншим боком, учень провів через точку A два перпендикуляри до прямої a (мал. 72). Що можна сказати про такий косинець?



Мал. 72

Практичне завдання

159. Підготуйте презентацію на тему:

- а) «Паралельні прямі навколо нас»; б) «Перпендикулярні прямі навколо нас».

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

160. Позначте на прямій a точки A, B, C, D і M так, щоб точка B лежала між точками A і D , точка M — між A і B , а точка C — між B і D .
161. Чи належить точка K відрізку AB , якщо $AK = 3$ см, $BK = 5$ см, $AB = 7$ см?
162. Знайдіть міри суміжних кутів, якщо вони пропорційні числам:
а) 1 і 2; б) 1 і 4; в) 4 і 5; г) $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{3}$.
163. Периметр чотирикутника дорівнює P . Знайдіть довжини його сторін, якщо вони пропорційні числам:
а) 1, 2, 3 і 4; б) 3, 5, 3 і 7; в) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ і 1.

§ 6. ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

Важливу роль у дослідженні паралельності прямих відіграють поняття січної та деяких пар кутів.

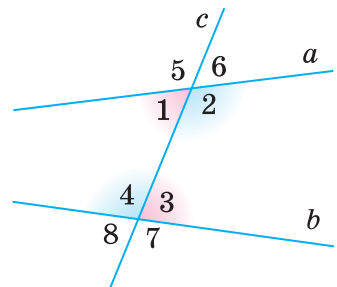
Нехай a і b — дві довільні прямі площини. Прямую c , що їх перетинає, називають *січною* прямих a і b (мал. 73).

Прямі a і b з їх січною c утворюють 8 кутів. На малюнку 73 їх пронумеровано.

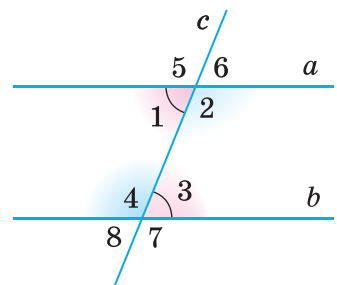
Деякі пари цих кутів мають спеціальні назви:
внутрішні різносторонні кути: 1 і 3, 2 і 4;
внутрішні односторонні кути: 1 і 4, 2 і 3;
відповідні кути: 1 і 8, 2 і 7, 3 і 6, 4 і 5.

Зверніть увагу! Якщо два які-небудь внутрішні різносторонні кути рівні, то рівні також внутрішні різносторонні кути іншої пари (мал. 74). Якщо, наприклад, $\angle 1 = \angle 3$, то $\angle 2 = \angle 4$, бо кути, суміжні з рівними, — також рівні.

Випадок, коли внутрішні різносторонні кути рівні, заслуговує на особливу увагу, тому що саме за цієї умови прямі a і b паралельні.



Мал. 73

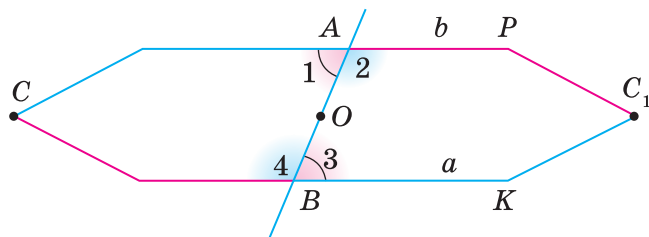


Мал. 74

Теорема 3 (ознака паралельності прямих).

Дві прями паралельні, якщо із січною вони утворюють рівні внутрішні різносторонні кути.

Доведення. Нехай січна AB перетинає прями a і b так, що утворені при цьому внутрішні різносторонні кути 1 і 3 дорівнюють один одному. Тоді, як показано вище, кути 2 і 4 також рівні. Припустимо, що за такої умови прями a і b перетинаються в якійсь віддаленій точці C . У результаті утвориться трикутник ABC (на малюнку 75 його схематично зображено у вигляді п'ятикутника). Уявимо, що цей трикутник повернуто навколо точки O — середини відрізка AB — так, щоб відрізок OA зайняв положення OB . Тоді, оскільки $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 4$, промінь AC суміститься з променем BK , а промінь BC — з променем AP . Оскільки промені AC і BC (за припущенням) мають спільну точку C , то промені BK і AP також мають якусь спільну точку C_1 . А це означає, що через дві точки C і C_1 проведено дві різні прями. Такого не може бути.



Мал. 75

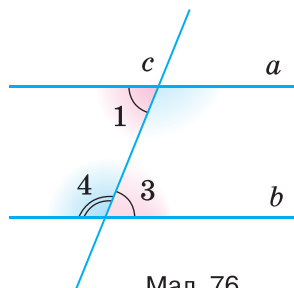
Отже, якщо $\angle 1 = \angle 3$, то прями a і b не можуть перетинатися. А оскільки вони лежать в одній площині і не перетинаються, то вони паралельні: $a \parallel b$. Це й треба було довести. ▲

Зверніть увагу на спосіб доведення теореми 3. Щоб довести, що прями a і b паралельні, ми показували, що вони не можуть перетинатися. Тобто припускали супротивне тому, що треба було довести. Такий спосіб міркувань називають *методом доведення від супротивного*.

На основі доведеної теореми 3 неважко довести й інші ознаки паралельності прямих.

Теорема 4. Дві прями паралельні, якщо при перетині із січною вони утворюють внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює 180° .

Доведення. Нехай, наприклад, на малюнку 76 сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і 4 дорівнює 180° . Сума суміжних кутів 3 і 4 також дорівнює 180° . Тому $\angle 1 = \angle 3$. Це — внутрішні різносторонні кути. Якщо вони рівні, то прями a і b паралельні. ▲



Мал. 76

Теорема 5. Дві прямі паралельні, якщо, перетинаючись із січною, вони утворюють рівні відповідні кути.

Доведення. Нехай січна c перетинає прямі a і b так, що утворені при цьому відповідні кути 1 і 8 рівні (мал. 77). Кути 8 і 3 рівні, бо вертикальні. Тому якщо $\angle 1 = \angle 8$, $\angle 8 = \angle 3$, то і $\angle 1 = \angle 3$, звідси випливає, що $a \parallel b$. \blacktriangle

Заслуговує на увагу такий наслідок із теореми 3.

Наслідок. Дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

Адже якщо кожна з прямих a і b перпендикулярна до прямої c , то утворені при цьому внутрішні різносторонні кути рівні, бо вони дорівнюють 90° кожний (мал. 78). Отже, прямі a і b — паралельні.

Для допитливих

1. Кути 5 і 7 (а також 6 і 8) називають *зовнішніми різносторонніми*, а 5 і 8 (а також 6 і 7) — *зовнішніми односторонніми* кутами (мал. 79). Використовуючи ці поняття, спробуйте сформулювати і довести ще дві ознаки паралельності прямих.

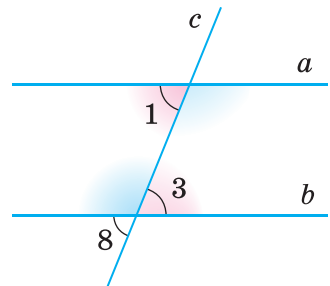
2. З'ясуємо сутність методу доведення від супротивного.

Якщо твердження A заперечує твердження B , то такі два твердження називають *суперечливими*, або *супротивними* одне одному. Із двох взаємно суперечливих тверджень завжди одне правильне, а інше — хибне. Тому якщо переконаємося, що твердження A і B суперечать одне одному і, наприклад, що B — неправильне, то можемо бути певні, що твердження A — правильне.

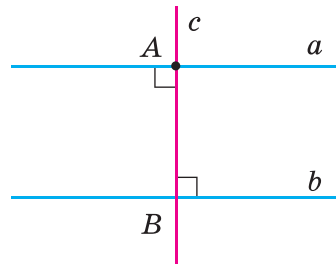
Не слід плутати твердження *супротивні* з *протилежними*. Наприклад, якщо йдеться про числові вирази і натуральні числа, то твердження «вираз A — додатний» і «вираз A — від'ємний» або «число n — просте» і «число n — складене» — протилежні, але не супротивні, адже кожне з них може бути неправильним. А от твердження «вираз A — додатний» і «вираз A — недодатний» або «число n — просте» і «число n — непросте» — взаємно суперечливі. *Непросте* — означає складене або дорівнює 1; *недодатне* — від'ємне або дорівнює нулю.

Доводячи методом від супротивного, спростовувати треба не протилежне твердження, а супротивне даному.

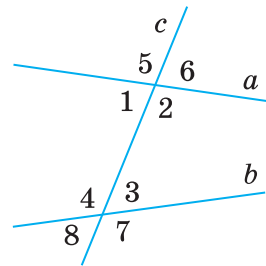
Спростувати що-небудь — означає показати, що воно неправильне.



Мал. 77



Мал. 78



Мал. 79

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення паралельних прямих.
2. Що таке січна двох прямих?
3. Які кути називають внутрішніми різносторонніми? А внутрішніми односторонніми? Покажіть на малюнку.
4. Які кути називають відповідними? Покажіть на малюнку.
5. Сформулюйте і доведіть ознаки паралельності прямих.

Виконаємо разом

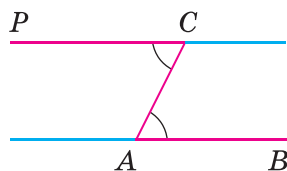
1. Як побудувати паралельні прямі, користуючись лише лінійкою і транспортиром?

✎ Накреслимо довільний промінь AB і відкладемо рівні кути BAC і ACP , як показано на малюнку 80. Прямі AB і CP — паралельні, адже кути BAC і ACP — внутрішні різносторонні, а за побудовою вони рівні. ▲

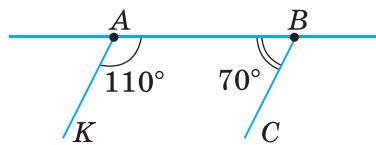
2. Через кінці відрізка AB з одного боку від прямої AB проведено промені AK і BC так, що $\angle KAB = 110^\circ$, а $\angle ABC = 70^\circ$. Чи паралельні ці промені?

✎ Пряму AB можна вважати січною прямих AK і BC (мал. 81).

Кути KAB і ABC — внутрішні односторонні. Оскільки їх сума $110^\circ + 70^\circ$ дорівнює 180° , то прямі AK і BC — паралельні (теорема 4). Тому і промені AK і BC — паралельні. ▲



Мал. 80



Мал. 81

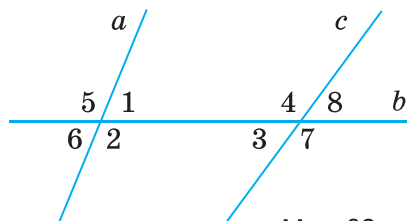
ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

164. Скільки кутів утворюється при перетині двох прямих третьою?

165. Розгляньте малюнок 82 і назвіть пари кутів:

- а) внутрішніх різносторонніх;
- б) внутрішніх односторонніх;
- в) зовнішніх різносторонніх;
- г) зовнішніх односторонніх;
- г) відповідних;
- д) суміжних;
- е) вертикальних.

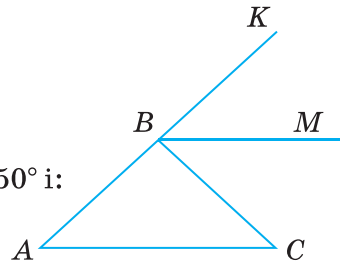


Мал. 82

166. Скориставшись малюнком 82, знайдіть суми мір кутів:
 а) 1, 2, 3 і 4; б) 1, 3, 5 і 7; в) 1, 4, 5 і 8; г) 5, 6, 7 і 8.
167. Чи паралельні прямі a і c на малюнку 82, якщо:
 а) $\angle 6 = \angle 8$; б) $\angle 7 = 101^\circ$ і $\angle 5 = 101^\circ$;
 в) $\angle 5 + \angle 8 = 180^\circ$; г) $\angle 1 + \angle 7 = 180^\circ$?
168. Як розташовані прямі a і b , якщо $a \perp c$, $b \perp c$ і всі вони лежать в одній площині?
169. Як можуть бути розміщені в просторі прямі a і b , якщо $a \perp c$ і $b \perp c$?

А

170. Запишіть назви пар кутів, зображених на малюнку 82:
 а) $\angle 1$ і $\angle 5$; б) $\angle 7$ і $\angle 2$; г) $\angle 2$ і $\angle 3$;
 б) $\angle 6$ і $\angle 3$; г) $\angle 3$ і $\angle 1$; д) $\angle 8$ і $\angle 5$.
171. Відомо, що $\angle 1 = 87^\circ$, $\angle 3 = 78^\circ$ (див. мал. 82). Обчисліть міри кутів 2, 4, 5, 6, 7, 8.
172. Скориставшись малюнком 82, обчисліть:
 а) міри кутів 1, 2, 3, 4, 5, 8, якщо $\angle 7 = 100^\circ$, $\angle 6 = 90^\circ$;
 б) $\angle 1 + \angle 4$ і $\angle 2 + \angle 3$, якщо $\angle 5 + \angle 8 = 170^\circ$;
 в) $\angle 4 - \angle 5$, якщо $\angle 4 - \angle 2 = 10^\circ$.
173. Чи паралельні прямі a і c (див. мал. 82), якщо:
 а) $\angle 1 = 50^\circ$, $\angle 7 = 130^\circ$;
 б) $\angle 6 = 65^\circ$; $\angle 8 = 65^\circ$;
 в) $\angle 1 + \angle 7 = 180^\circ$;
 г) $\angle 2 = 140^\circ$, $\angle 3$ на 80° менший від $\angle 2$?
174. BM — бісектриса кута KBC (мал. 83).
 Чи паралельні прямі AC і BM , якщо $\angle A = 50^\circ$ і:
 а) $\angle CBM = 50^\circ$;
 б) $\angle ABM = 130^\circ$;
 в) $\angle BCA = \angle KBM$;
 г) $\angle ABM$ на 50° більший за $\angle CAB$?

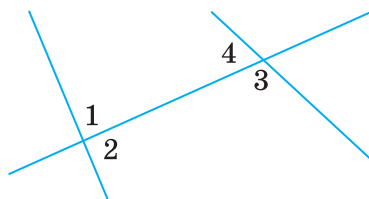


Мал. 83

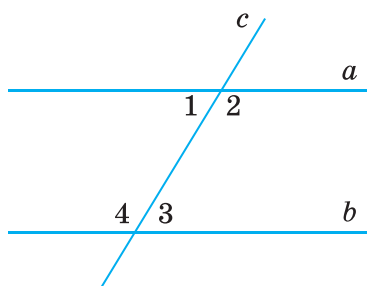
175. Пряма KP перетинає пряму AB в точці K , а пряму CD — у точці P . Чи паралельні прямі AB і CD , якщо $\angle AKP = 90^\circ$ і $\angle KPC = 90^\circ$?
176. Пряма KP перетинає пряму AB в точці K , а пряму CD — у точці P так, що точки B і D лежать по один бік від прямої KP . Чи паралельні прямі AB і CD , якщо $\angle BKP = 89^\circ 39'$ і $\angle KPD = 90^\circ 21'$?
177. Через кінці відрізка AB з одного боку від нього проведено промені AP і BC . Чи паралельні ці промені, якщо:
 а) $\angle PAB = 105^\circ$, а $\angle ABC = 75^\circ$;
 б) $\angle PAB = 93^\circ$, а $\angle ABC = 87^\circ$?
178. Доведіть, що протилежні сторони прямокутника лежать на паралельних прямих.

Б

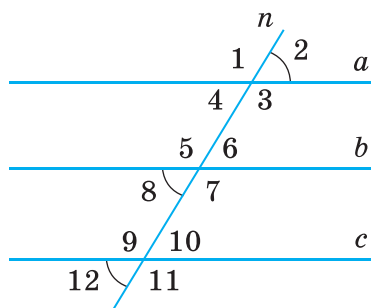
179. Прямі a і b із січною c утворюють рівні гострі кути. Чи впливає із цього, що $a \parallel b$?
180. Знайдіть міри кутів 1 і 2, зображених на малюнку 84, якщо $\angle 1 + \angle 4 = 160^\circ$ і:
- $\angle 4$ на 20° менший від $\angle 1$;
 - $\angle 2$ у 2 рази більший за $\angle 1$;
 - $\angle 4 : \angle 2 = 2 : 3$;
 - $\angle 4$ становить 60 % кута 2.
181. Чи паралельні прямі a і b , зображені на малюнку 85, якщо:
- $\angle 4 - \angle 1 = 30^\circ$ і $\angle 3 = 75^\circ$;
 - $\angle 1 = 60^\circ$ і $\angle 2 : \angle 3 = 2 : 1$?
182. Установіть взаємне розташування прямих a , b і c , зображених на малюнку 86, якщо:
- $\angle 3 = \angle 5 = \angle 9$;
 - $\angle 2 = \angle 8$ і $\angle 7 = \angle 9$;
 - $\angle 12 = \angle 8$ і $\angle 6 + \angle 3 = 180^\circ$.
183. Січна n перетинає прямі a , b і c так, що кути, позначені на малюнку 86 числами 2, 8 і 12, дорівнюють один одному. Доведіть, що прямі a , b і c попарно паралельні.
184. У зображеному на малюнку 87 шестикутнику $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 5$ і $\angle 3 = \angle 6$. Доведіть, що кожна сторона даного шестикутника паралельна протилежній стороні.
185. Чи паралельні прямі a і b , c і d , якщо: $\angle 1 = 60^\circ$, $\angle 2$ — удвічі більший, а $\angle 2 - \angle 3 = 60^\circ$ (мал. 88)?
186. Як можна побудувати паралельні прямі, користуючись косинцем?
187. Користуючись двома однаковими косинцями, паралельні прямі можна проводити, як показано на малюнку 89. Обґрунтуйте таку побудову.
188. Закінчіть речення: «Щоб дізнатися, чи паралельні дані прямі, треба провести їх січну і виміряти відповідні кути. Якщо...»



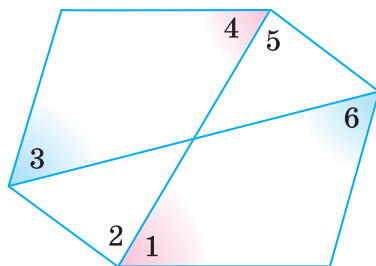
Мал. 84



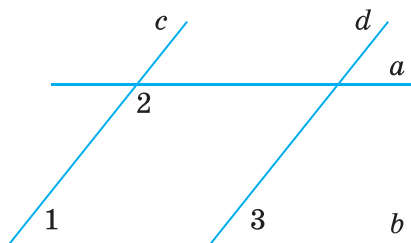
Мал. 85



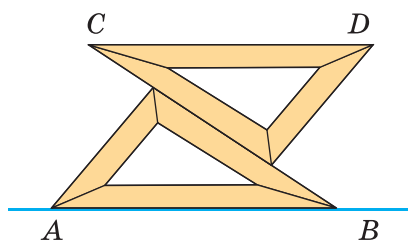
Мал. 86



Мал. 87



Мал. 88



Мал. 89

Практичне завдання

189. Зробіть модель для ілюстрації доведення теореми 3.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

190. Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 15 см і 18 см. У скільки разів зменшиться периметр трикутника, якщо кожен його сторону зменшити на 5 см?
191. Точки K , L і M лежать на одній прямій. $KL = 7$ см, $LM = 3$ см. Знайдіть KM . Розгляньте всі можливі варіанти.
192. Прямі AB і CD перетинаються в точці O , OM — бісектриса кута AOC . Знайдіть міри кутів MOB і MOD , якщо $\angle COB = 70^\circ$.
193. Один із двох кутів, утворених при перетині двох прямих, на 90° більший за інший. У скільки разів він більший за інший кут?

§ 7. ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ

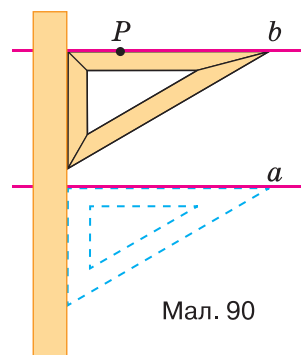
ЗАДАЧА

Дано пряму a і точку P , що не належить цій прямій. Проведіть через точку P пряму, паралельну прямій a .

▼ За допомогою лінійки і косинця побудову можна виконати, як показано на малюнку 90. ▲

Чи можна через точку P провести дві різні прямі, паралельні прямій a ?

Геометри здавна вважали істинним таке твердження:



Мал. 90

Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Давньогрецький геометр Евклід це твердження прийняв без доведення. Його назвали *аксіомою Евкліда*, тому що всі твердження, які приймають без доведення, називають *аксіомами*. (Детальніше про аксіоми і теореми — у наступному параграфі.)

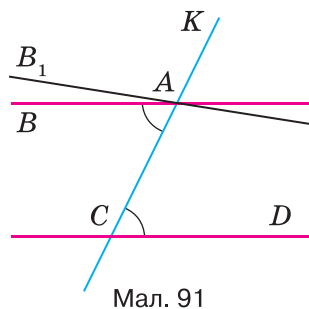
Геометрію, у якій визнається правильною аксіома Евкліда, називають *евклідовою геометрією*. Ви вивчаєте евклідову геометрію.

Теорема 6 (обернена до теореми 3).

Якщо прямі паралельні, то внутрішні різносторонні кути, утворені ними із січною, — рівні.

Доведення. Нехай прямі AB і CD — паралельні, а KC — їх січна, яка проходить через точку A (мал. 91). Доведемо, що $\angle CAB = \angle ACD$.

Припустимо, що $\angle CAB \neq \angle ACD$. Проведемо пряму AB_1 так, щоб виконувалась рівність $\angle CAB_1 = \angle ACD$. За ознакою паралельності прямих $AB_1 \parallel CD$, а за умовою $AB \parallel CD$. Виходить, що через точку A проведено дві різні прямі, паралельні прямій CD . Це суперечить аксіомі Евкліда. Отже, зроблене вище припущення призводить до суперечності. Тому $\angle CAB = \angle ACD$. ▲

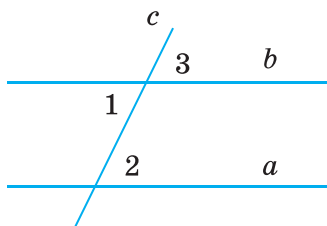


Наслідок 1. Якщо прямі паралельні, то відповідні кути, утворені цими прямими із січною, — рівні.

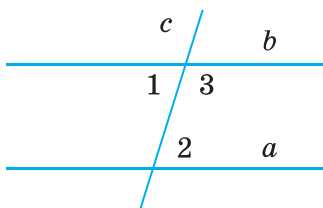
Доведення. Якщо $a \parallel b$, то за теоремою 6: $\angle 1 = \angle 2$ (мал. 92, а). $\angle 1$ і $\angle 3$ — вертикальні, тому $\angle 1 = \angle 3$. Оскільки $\angle 2 = \angle 1$, а $\angle 1 = \angle 3$, то $\angle 2 = \angle 3$. ▲

Наслідок 2. Якщо прямі паралельні, то сума внутрішніх односторонніх кутів, утворених цими прямими з січною, дорівнює 180° .

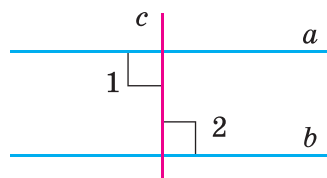
Доведіть самостійно, скориставшись малюнком 92, б.



Мал. 92, а



Мал. 92, б



Мал. 92, в

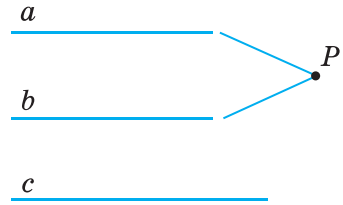
Наслідок 3. Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до іншої прямої.

Справді, якщо $c \perp a$ і $a \parallel b$, то $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$, тобто $c \perp b$ (мал. 92, в).

Теорема 7. Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.

Доведення. Нехай кожна з прямих a і b паралельна прямій c . Доведемо, що $a \parallel b$.

Припустимо, що прямі a і b не паралельні, а перетинаються в деякій точці P (мал. 93). Виходить, що через точку P проходять дві різні прямі a і b , паралельні прямій c . Це суперечить аксіомі Евкліда. Отже, прямі a і b не можуть перетинатися. Тоді вони паралельні. \blacktriangle



Мал. 93

Зверніть увагу! Доведення теореми правильне і для випадку, коли пряма c лежить між прямими a і b .

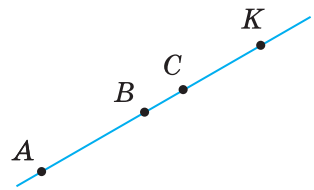
Для допитливих

1. Останню теорему називають теоремою про *транзитивність паралельності прямих* (лат. *transitivus* — перехідний), бо вона стверджує, що паралельність двох пар паралельних прямих переходить на третю пару:

якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Щоб це твердження виконувалося завжди, домовилися вважати, що кожна пряма паралельна сама собі, тобто $a \parallel a$. Адже якщо $a \parallel b$ і $b \parallel a$, то $a \parallel a$.

2. Відрізки однієї прямої також вважають паралельними. Наприклад, якщо A, B, C і K — точки однієї прямої, то кожний з відрізків AB, AC, AK, BC, BK, CK паралельний будь-якому з них (мал. 94). У доцільності такої домовленості ви переконаєтеся згодом, вивчаючи паралельне перенесення, паралельне проектування тощо. А в сьомому класі основна увага звертатиметься на паралельність відрізків і променів, що не лежать на одній прямій.



Мал. 94

3. Є геометрії, у яких аксіома Евкліда не вважається правильною. Їх називають *неевклідовими геометріями*. Такою, наприклад, є геометрія Лобачевського (див. с. 182).

Подане на с. 51 формулювання аксіоми Евкліда насправді належить грецькому математику Проклу Діадоху (V ст. н.е.), який сформулював її майже на 1000 років пізніше. Евклід же формулював цю аксіому інакше: «Якщо пряма, що падає на дві прямі, утворює внутрішні і по одну сторону кути, менші від двох прямих, то необмежено продовжені ці прямі зустрінуться з тієї сторони, де кути менші від двох прямих».

Запитання і завдання для самоконтролю

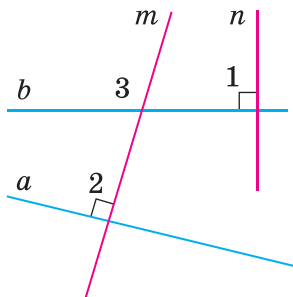
1. Сформулюйте аксіому Евкліда про паралельність прямих.
2. Сформулюйте і доведіть теорему про внутрішні рівносторонні кути при паралельних прямих та січній.
3. Сформулюйте і доведіть властивості відповідних і внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих і січніх.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про дві прямі, паралельні третій.

Виконаємо разом

1. Доведіть, що прямі, перпендикулярні до непаралельних прямих, перетинаються.

▼ Нехай прямі a і b перетинаються, а прямі m і n — перпендикулярні до них: $m \perp a$, $n \perp b$ (мал. 95).

Тоді $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$. Припустимо, що $m \parallel n$, тобто $\angle 1 = \angle 3$. Тоді й $\angle 2 = \angle 3$, а звідси випливає, що $a \parallel b$. Це суперечить умові задачі. Отже, прямі m і n не можуть бути паралельними. Тоді вони перетинаються. ▲

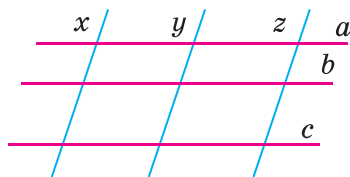


Мал. 95

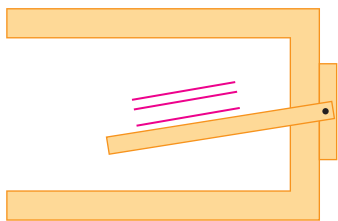
ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

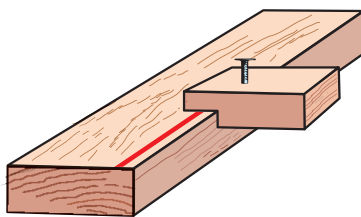
194. Скільки пар паралельних прямих є на малюнку 96? А скільки пар непаралельних прямих?
195. Кут між прямими a і x дорівнює 70° (мал. 96). Знайдіть кут між прямими для кожної пари прямих, що є на малюнку.
196. Поясніть, як можна проводити паралельні прямі, користуючись рейшиною (мал. 97).
197. На малюнку 98 зображено саморобний рейсмус. Як таким рейсмусом можна проводити на бруску прямі, паралельні його ребрам?



Мал. 96



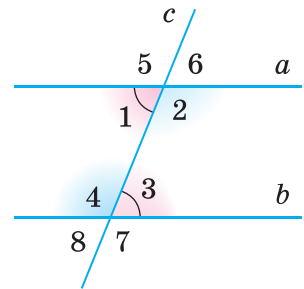
Мал. 97



Мал. 98

А

198. Міра одного з кутів, утворених двома паралельними прямими з їх січною, дорівнює 35° . Знайдіть міри інших кутів.
199. На стороні кута ABC взято точку A . Через неї проведено пряму, паралельну стороні BC . Знайдіть міри кутів при вершині A , якщо $\angle ABC = 50^\circ$.
200. У прямокутнику $ABCD$ $\angle BAC$ на 20° більший за $\angle DAC$. Знайдіть $\angle ACB$ і $\angle ACD$.
201. Знайдіть міри всіх кутів, зображених на малюнку 99, якщо $a \parallel b$:
- $\angle 1 = 60^\circ$;
 - $\angle 5 + \angle 7 = 250^\circ$;
 - $\angle 2 - \angle 1 = 50^\circ$;
 - $\angle 4 - \angle 6 = 20^\circ$.



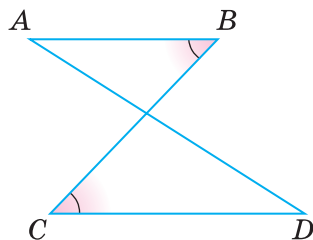
Мал. 99

202. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й іншу пряму.
203. Прямі a і b не паралельні прямій c . Чи впливає із цього, що прямі a і b не паралельні?
204. Доведіть, що бісектриси двох відповідних кутів при паралельних прямих — паралельні.
205. Доведіть, що коли одна січна з двома прямими утворює рівні відповідні кути, то й кожна інша січна із цими прямими утворює рівні відповідні кути.
206. Кут між однією з двох паралельних прямих і їх січною дорівнює 80° . Під яким кутом бісектриса цього кута перетинає іншу пряму?
207. На сторонах AB і BC трикутника ABC взято точки K і P так, що $KP \parallel AC$. Знайдіть кути чотирикутника $AKPC$, якщо $\angle BKP = 60^\circ$, $\angle BPK = 80^\circ$.

Б

208. Якщо пряма із січною утворюють нерівні відповідні кути, то вони перетинаються. Доведіть це.
209. Промені AB , AC і KP — різні й такі, що $AB \parallel KP$, $AC \parallel KP$. Знайдіть міру кута BAC .
210. Skorиставшись малюнком 99, на якому $\angle 1 = \angle 3$, обчисліть міри кутів 3 і 4, якщо:
- $\angle 4 - \angle 1 = 50^\circ$;
 - $\angle 4$ в 3 рази більший за $\angle 6$.

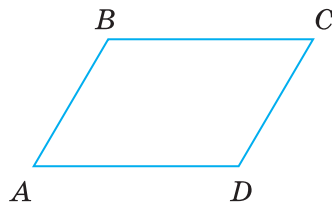
211. Сторони AD і BC замкненої ламаної $ABCD$ перетинаються і $\angle B = \angle C$ (мал. 100). Доведіть, що $\angle A = \angle D$.



Мал. 100

212. Кожна сторона чотирикутника $ABCD$ паралельна протилежній стороні (мал. 101). Доведіть, що:

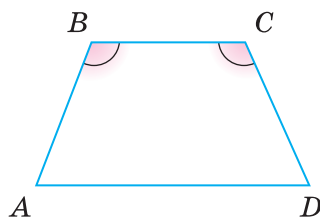
- $\angle A + \angle B = 180^\circ$;
- $\angle B + \angle C = 180^\circ$;
- $\angle A = \angle C$;
- $\angle B = \angle D$.



Мал. 101

213. У чотирикутнику $ABCD$ $BC \parallel AD$ і $\angle B = \angle C$ (мал. 102). Доведіть, що:

- $\angle A = \angle D$;
- $\angle A + \angle C = 180^\circ$.



Мал. 102

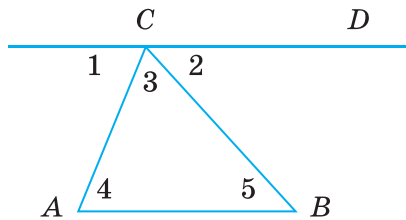
214. Через точку, яка не лежить на прямій a , проведено три прямі. Доведіть, що принаймні дві з них перетинають пряму a .

215. Доведіть, що два кути з відповідно паралельними сторонами рівні або сума їх мір дорівнює 180° .

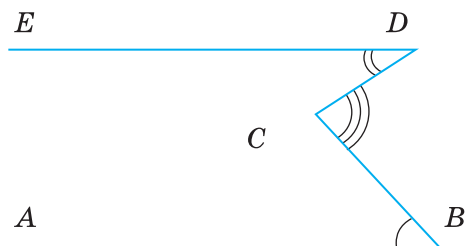
216. На малюнку 103 $\angle 1 = 70^\circ$, $\angle 2 = 50^\circ$ і $AB \parallel CD$. Знайдіть міри кутів 3, 4 і 5.

217. На малюнку 104 $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle CDE = 36^\circ$, $AB \parallel DE$. Знайдіть $\angle BCD$.

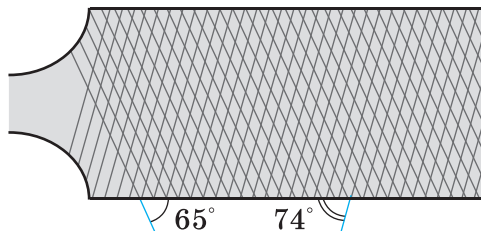
218. Одна насічка напилка утворює з його ребром кут 65° , а інша — 74° (мал. 105). Знайдіть міру гострого кута між двома різними насічками.



Мал. 103



Мал. 104



Мал. 105

Практичне завдання

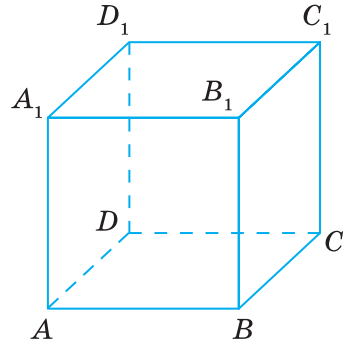
219. Виміряйте потрібні кути (мал. 106) і встановіть, чи є паралельними червоні та сині лінії, які визначають елементи схеми для вишивання українського рушника.



Мал. 106

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

220. Знайдіть діаметр кола, якщо він довший за радіус:
а) на 3 см; б) на 3,5 м.
221. Чому дорівнює довжина кола, діаметр якого дорівнює:
а) 10 см; б) 0,1 м?
222. Скільки спільних точок можуть мати:
а) пряма і коло;
б) пряма і круг;
в) коло і коло?
223. Перемалуйте в зошит фігуру з малюнка 107. Як називають таку фігуру? Назвіть її вершини, ребра, грані.
224. Скільки різних пар паралельних ребер має куб?



Мал. 107

§ 8. ТЕОРЕМИ І АКсіОМИ

Ви вже маєте уявлення про теореми. *Теорема* — це твердження, в істинності якого переконуються за допомогою логічних міркувань, доведень.

Умову теореми записують після слова «дано», а висновок — після слова «довести».

Наприклад, теорему про вертикальні кути (мал. 108) можна оформити так.

Дано: $\angle AOD$, $\angle BOC$ — вертикальні кути.

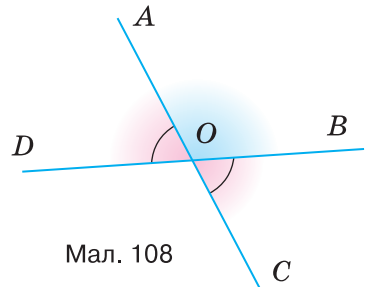
Довести: $\angle AOD = \angle BOC$.

Доведення.

$\angle AOD = 180^\circ - \angle AOB$ ($\angle AOD$ і $\angle AOB$ — суміжні),

$\angle BOC = 180^\circ - \angle AOB$ ($\angle BOC$ і $\angle AOB$ — суміжні).

Отже, $\angle AOD = \angle BOC$.



Мал. 108

Зазвичай теорема містить *умову* (те, що дано) і *висновок* (що вимагається довести). Щоб виокремити умову і висновок теореми, її зручно подати у формі «Якщо..., то...». Наприклад: «Якщо кути вертикальні, то вони — рівні». Тут слова перед комою виражають умову теореми, а після коми — висновок.

Помінявши умову і висновок теореми місцями, одержимо нове твердження (істинне або хибне). Якщо одержане таким способом твердження істинне, його називають *теоремою, оберненою до даної*. Наведемо приклад.

1. «Якщо кути вертикальні, то вони — рівні» — дана теорема. «Якщо кути рівні, то вони — вертикальні» — обернене твердження. Оскільки це твердження хибне, то воно не є теоремою.

2. «Якщо відповідні кути рівні, то прямі — паралельні» — дана теорема. «Якщо прямі паралельні, то відповідні кути — рівні» — теорема, обернена до даної.

Найважливіші теореми, у яких зазначається, *за яких умов* правильні ті чи інші твердження, називають *ознаками*. Наприклад, розглядають ознаки рівності трикутників, ознаки паралельності прямих, ознаки подільності чисел.

Доводячи теорему, показують, що вона випливає з інших істинних тверджень. Однак на початку вивчення геометрії ще ніяких «інших істинних тверджень» немає. Тому кілька перших тверджень зазвичай приймають без доведень. Їх називають *аксіомами*.

Деякі аксіоми ви вже знаєте. Сформулюємо їх ще раз.

- Хоч би яка була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать.
- Через будь-які дві різні точки можна провести пряму, і тільки одну.
- Із трьох різних точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.
- Кожний відрізок має певну довжину.
- Кожний кут має певну міру.
- Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Від теорем і аксіом слід відрізняти *означення*, у яких розкривається зміст поняття. Наприклад: «Відрізком називається частина прямої, обмежена двома її точками» — означення відрізка; «Гострим кутом називається кут, менший від прямого» — означення гострого кута.

В означеннях, аксіомах і теоремах — основний зміст геометрії, їх треба знати, але формулювати (правильно!) можна і своїми словами. Наприклад, означення відрізка можна формулювати й так: «Відрізок — це частина прямої, обмежена двома її точками» або так: «Частину прямої, обмежену двома її точками, називають відрізком».

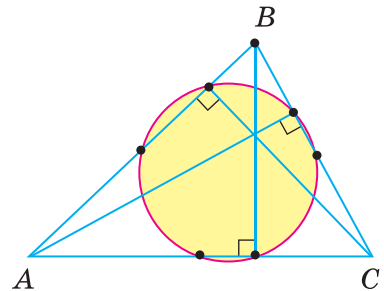
Для допитливих

1. Слово *аксіома* — грецького походження. Спочатку це слово означало: повага, авторитет, незаперечність. Згодом словом «аксіома» стали називати твердження, яке приймається без обґрунтування.

2. Слово *теорема* також грецького походження. Спочатку теоремою називали видовище, театральну виставу. Першим геометрам доведені ними теореми здавалися досить несподіваними, дивними, мов цікаві видовища. І справді дивно: з небагатьох примітивних тверджень, які приймають без доведень, шляхом самих міркувань, людина може отримати мільйони неочевидних наслідків. Навіть таких, які в природі не спостерігають. І таких, про існування яких не здогадувався жоден мислитель.

3. Щоб і ви зрозуміли, яке задоволення відчували перші геометри, відкриваючи і доводячи нові властивості геометричних фігур за допомогою самих лише міркувань, спробуйте відповісти на одне з таких запитань.

Подивіться на малюнок 109. На ньому виділено 6 точок: середини сторін трикутника ABC і основи його висот. Здається, усі ці точки лежать на одному колі. Чи справді це так? Чи в кожному трикутнику? Хто перший виявляв подібні закономірності й обґрунтовував їх, той відчував велике задоволення, немов мандрівник, який перший прийшов туди, де жодна людина ще не була, або спортсмен, який побив світовий рекорд.



Мал. 109

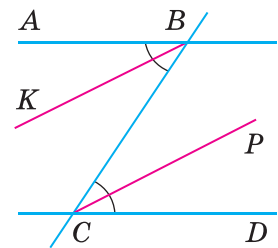
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке теорема? Наведіть приклади теорем.
2. Що таке аксіома? Наведіть приклади аксіом.
3. Що таке означення? Наведіть приклади означень.
4. Яке твердження називають теоремою, оберненою до даної?
5. Що таке ознака?

Виконаємо разом

1. Бісектриси внутрішніх різносторонніх кутів, утворених січною з двома паралельними прямими, паралельні одна одній. Доведіть. Сформулюйте обернене твердження.

▼ Нехай BC — січна прямих AB і CD , кути ABC і BCD — внутрішні різносторонні, а BK і CP — їх бісектриси (мал. 110). Покажемо, що коли $AB \parallel CD$, то $BK \parallel CP$.



Мал. 110

Якщо $AB \parallel CD$, то $\angle ABC = \angle BCD$ (як внутрішні різносторонні при паралельних прямих). Половини рівних кутів — рівні, тому $\angle KBC = \angle BCP$. Ці кути — внутрішні різносторонні для прямих KB і CP та січної BC . Оскільки ці кути рівні, то прямі KB і CP — паралельні.

А це й треба було довести.

Обернене твердження: «якщо бісектриси внутрішніх різносторонніх кутів, утворених двома прямими з їх січною, — паралельні, то паралельні й дані прямі». ▲

2. Два промені називають *співнаправленими*, якщо один із них є частиною другого або якщо вони паралельні й розміщені по один бік від прямої, що проходить через їх початки. Наведіть приклади.

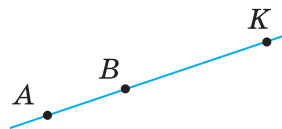
▼ Наприклад, промені AK і BK (мал. 111), а також промені AK і BT (мал. 112). ▲

3. Доведіть, що кути із співнаправленими сторонами рівні.

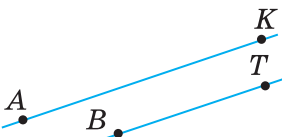
▼ Доведемо, що коли промені BA і PK , BC і PT — співнаправлені, то кути 1 і 2 — рівні.

Якщо дані кути розміщені, як показано на малюнку 113, то $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 3 = \angle 2$. Отже, $\angle 1 = \angle 2$.

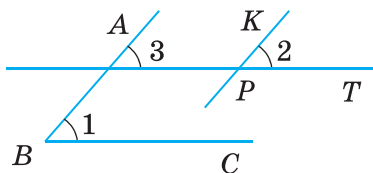
Якщо дані кути розміщені, як показано на малюнку 114, то промінь PT становить частину променя BC . У цьому випадку $\angle 1 = \angle 2$ як відповідні кути при паралельних прямих BA і PK . ▲



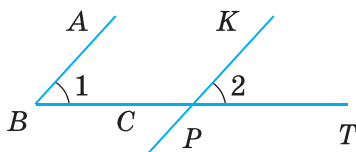
Мал. 111



Мал. 112



Мал. 113



Мал. 114

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

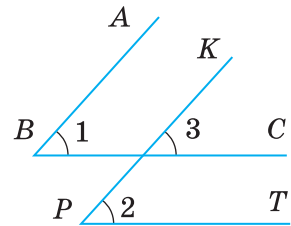
Виконайте усно

225. Сформулюйте означення: а) вертикальних кутів; б) суміжних кутів.
226. Сформулюйте аксіоми про розміщення точок на прямій.
227. Сформулюйте аксіоми про вимірювання відрізків.
228. Сформулюйте аксіому Евкліда про паралельність прямих.
229. Чи через кожні три точки можна провести пряму? Чи існують три точки, через які можна провести пряму?

230. Чи існують 4 точки, через які можна провести пряму?
231. Сформулюйте ознаку подільності натуральних чисел на 3. Як її можна сформулювати інакше?
232. Яке з тверджень правильне:
 а) «Якщо кожне з двох натуральних чисел ділиться на 10, то і їх сума ділиться на 10»;
 б) «Якщо сума двох натуральних чисел ділиться на 10, то кожне з них ділиться на 10»?

А

233. Сформулюйте теорему про суміжні кути. Подайте її у формі «Якщо..., то...». Зазначте її умову і висновок.
234. Сформулюйте теорему про дві прямі, паралельні третій. Запишіть її за допомогою математичних символів.
235. Які з даних тверджень — істинні:
 а) «Якщо кути рівні, то вони вертикальні»;
 б) «Якщо кути не вертикальні, то вони не рівні»;
 в) «Якщо кути не рівні, то вони не вертикальні»?
236. Сформулюйте твердження, обернене до теореми 1. Чи можна вважати його теоремою? Чому?
237. Сформулюйте твердження, обернене до теореми 5. Чи є воно теоремою?
238. Дивлячись на малюнок 115, учень міркує: «Якщо $AB \parallel PK$ і $BC \parallel PT$, то $\angle 1 = \angle 3 = \angle 2$. Отже, кути з відповідно паралельними сторонами — рівні». Чи правильно він міркує? Розгляньте інші можливі варіанти.



Мал. 115

239. Чи можна вважати правильними такі означення:
 а) «Бісектрисою кута називають пряму, яка ділить цей кут навпіл»;
 б) «Бісектрисою кута називають промінь, який ділить цей кут на рівні частини»?
240. Прочитайте перші три абзаци § 3 «Кути і їх міри». Чи є в них означення? Сформулюйте одне з них.

Б

241. Сформулюйте означення паралельних прямих. Чи можна слова «на площині» опустити? Чому?
242. Яке з тверджень правильне:
 а) «Якщо кожне з трьох натуральних чисел ділиться на 5, то їх сума також ділиться на 5»;

б) «Якщо сума трьох натуральних чисел ділиться на 5, то кожне з них ділиться на 5»?

243. Доведіть, що кут між бісектрисами двох вертикальних кутів — розгорнутий. Сформулюйте і доведіть аналогічне твердження про бісектриси двох суміжних кутів.

244. Сформулюйте словами і доведіть твердження:

а) якщо $a \parallel b$ і $b \parallel c$, то $a \parallel c$;

б) якщо $a \perp b$ і $b \perp c$, то $a \parallel c$.

Чи правильні ці твердження, якщо прямі a , b і c не лежать в одній площині?

245. Доведіть, що:

а) якщо кут A дорівнює куту B , а кут B дорівнює куту C , то кути A і C дорівнюють один одному;

б) якщо відрізок AB дорівнює відрізку KP , а відрізок KP дорівнює відрізку MT , то відрізок AB дорівнює відрізку MT .

246. Чи правильні твердження:

а) «якщо кут A суміжний з кутом B , а кут B суміжний з кутом C , то кути A і C — суміжні»;

б) «якщо кут A вертикальний з кутом B , а кут B вертикальний з кутом C , то кути A і C — вертикальні»;

в) «якщо прямі a і c лежать в одній площині і прямі c і n лежать в одній площині, то прямі a і n також лежать в одній площині»?

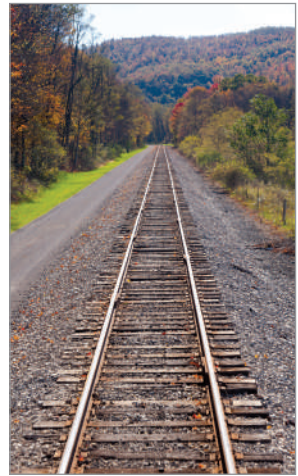
247. Паралельні залізничні рейки, промені сонця та багато інших моделей прямих на фотографіях і картинах часто зображають у вигляді непаралельних прямих (мал. 116). Наведіть приклади зображень, на яких непаралельні прямі мають вигляд паралельних.

248. Доведіть, що січна, перетинаючи паралельні прямі, утворює з ними:

а) рівні зовнішні різносторонні кути;

б) зовнішні односторонні кути, які в сумі становлять 180° .

249. Доведіть, що кути з відповідно перпендикулярними сторонами рівні або в сумі становлять 180° .

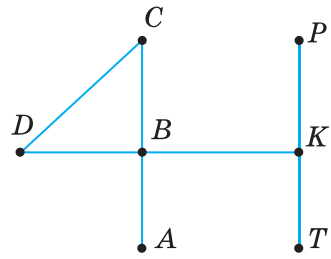


Мал. 116

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

250. Скільки існує точок на прямій, які лежать між даними її точками A і B ?

251. На які частини ділять пряму дві її точки?
 252. Скільки різних відрізків зображено на малюнку 117? Назвіть їх.
 253. Скількома різними ламаними можна сполучити дві дані точки K і P ? А скількома відрізками? Скількома дугами кіл?
 254. Дюйм — це 2,5 см. Скільки квадратних сантиметрів має квадратний дюйм?



Мал. 117



Геометрія навколо нас



Московський міст у м. Києві



Майдан Незалежності в м. Києві



Плавальний басейн у м. Ізмірі (Туреччина)



На околицях м. Києва

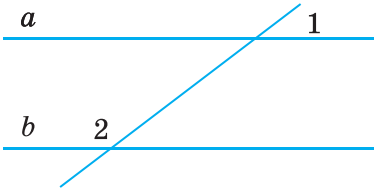
ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

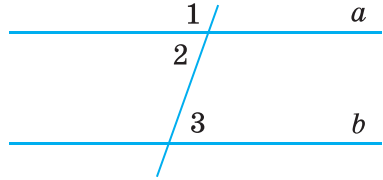
Б

1

$\angle 1 = 50^\circ, \angle 2 = 130^\circ.$
Довести: $a \parallel b.$

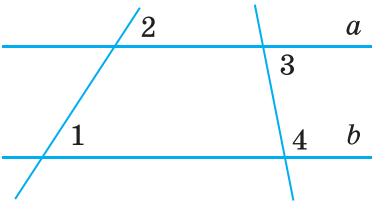


$\angle 1 : \angle 2 = 3 : 2, \angle 3 = 72^\circ.$
Довести: $a \parallel b.$

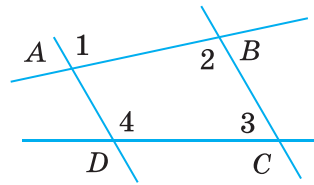


2

$\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = 80^\circ.$
 $\angle 4$

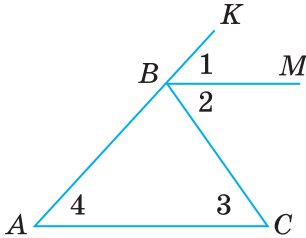


$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ.$
Довести: $\angle 1 = \angle 2.$

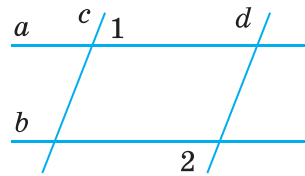


3

$\angle 2 = \angle 3.$
Довести: $\angle 1 = \angle 4.$

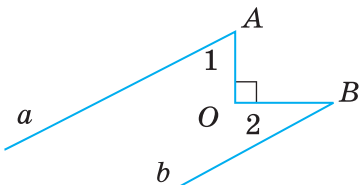


$a \parallel b, \angle 1 = \angle 2.$
Довести: $c \parallel d.$

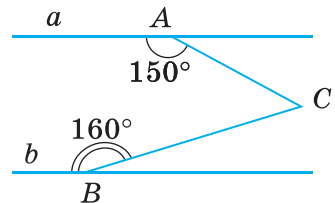


4

$a \parallel b, \angle 1 = 60^\circ.$
 $\angle 2$



$a \parallel b.$
 $\angle C$



Самостійна робота 2**Варіант 1**

- 1°. Відрізки AB і KP перетинаються у внутрішній точці O так, що $\angle AOK = 50^\circ$. Знайдіть міри кутів AOP , BOP і BOK .
- 2°. Один із двох суміжних кутів більший за інший на 18° . Знайдіть ці кути.
- 3°. Через кінці відрізка AB з одного боку від прямої AB проведіть промені AK і BC так, щоб $\angle KAB = 107^\circ$, а $\angle ABC = 73^\circ$. Чи паралельні ці промені? Чому?

Варіант 2

- 1°. Відрізки MN і KT перетинаються у внутрішній точці X так, що $\angle MXX = 65^\circ$. Знайдіть міри кутів MXT , TXN і KXN .
- 2°. Знайдіть міри двох суміжних кутів, якщо один із них утричі більший за інший.
- 3°. Через кінці відрізка AB з одного боку від прямої AB проведіть промені AM і BC так, щоб $\angle MAB = 102^\circ$, а $\angle ABC = 77^\circ$. Чи паралельні ці промені? Чому?

Варіант 3

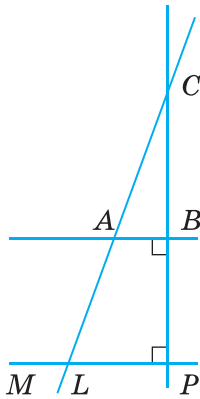
- 1°. Відрізки AC і MP перетинаються у внутрішній точці O так, що $\angle MOC = 48^\circ$. Знайдіть міри кутів AOP , AOM і POC .
- 2°. Знайдіть міри двох суміжних кутів, якщо один із них на 26° більший за інший.
- 3°. Через кінці відрізка KP з одного боку від прямої KP проведіть промені KA і PB так, щоб $\angle AKP = 97^\circ$, а $\angle KPB = 83^\circ$. Чи паралельні ці промені? Чому?

Варіант 4

- 1°. Відрізки AB і CD перетинаються у внутрішній точці M так, що $\angle AMC = 35^\circ$. Знайдіть міри кутів AMD , CMB і BMD .
- 2°. Знайдіть міри двох суміжних кутів, якщо один із них на 15° менший від іншого.
- 3°. Через кінці відрізка AB з одного боку від прямої AB проведіть промені AK і BM так, щоб $\angle KAB = 58^\circ$, а $\angle ABM = 123^\circ$. Чи паралельні ці промені? Чому?

Тестові завдання 2

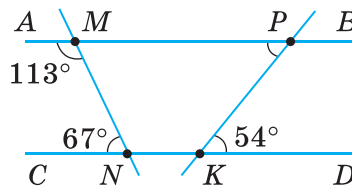
1.	Яку міру має кут, суміжний із кутом 100° ?	а) 100° ; б) 80° ; в) 8° ; г) 50° .
2.	Яким є кут, суміжний із тупим кутом?	а) тупим; б) прямим; в) гострим; г) розгорнутим.
3.	$\angle AOP$ і $\angle BOC$ — вертикальні кути. Який знак слід поставити замість * в записі: $\angle AOP * \angle BOC$?	а) $<$; б) $=$; в) $>$; г) \geq .
4.	Сума трьох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 280° . Знайдіть міру четвертого кута.	а) 100° ; б) 80° ; в) 90° ; г) 70° .
Для виконання завдань 5–10 скористайтеся малюнком 118.		
5.	Який знак слід поставити замість * в записі: $CB * LP$?	а) \parallel ; б) $=$; в) \in ; г) \perp .
6.	Які з прямих паралельні?	а) BP і LC ; б) CP і AB ; в) AB і LP ; г) CB і LP .
7.	Яким є кут $\angle ABC$?	а) гострим; б) тупим; в) прямим; г) розгорнутим.
8.	$\angle ALM = 130^\circ$. Знайдіть $\angle LAB$.	а) 50° ; б) 80° ; в) 130° ; г) 120° .
9.	Знайдіть $\angle CAB$, якщо $\angle MLA = 145^\circ$.	а) 145° ; б) 45° ; в) 25° ; г) 35° .
10.	Відстань від точки C до прямої MP дорівнює 12 см. Знайдіть відстань від точки C до прямої AB , якщо $CB = BP$.	а) 12 см; б) 4 см; в) 6 см; г) 24 см.



Мал. 118

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

- 1°. Точки A , B і C лежать на одній прямій, $AB = 7,3$ см, $BC = 3,7$ см. Знайдіть довжину відрізка AC . Розгляньте два варіанти.
- 2°. Внутрішній промінь OK кута AOB розбиває його на кути AOK і KOB . Знайдіть міру кута:
 - а) AOB , якщо $\angle AOK = 30^\circ$, $\angle KOB = 40^\circ$;
 - б) KOB , якщо $\angle AOB = 79^\circ$, $\angle KOA = 53^\circ$;
 - в) KOA , якщо він на 20° менший від кута KOB і $\angle AOB = 80^\circ$.
- 3°. Накресліть $\angle ABC = 120^\circ$. Проведіть його бісектрису BM і бісектрису BK кута MBC . Знайдіть міри кутів KBC і ABK .
- 4°. Знайдіть міри чотирьох кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо один із них дорівнює 45° .
- 5°. Знайдіть міри суміжних кутів, якщо один із них:
 - а) на 25° більший за інший;
 - б) у 3 рази менший від іншого.
- 6°. За допомогою малюнка 119 установіть:
 - а) чи паралельні прямі AB і CD ;
 - б) міру кута KPM .



Мал. 119

- 7°. Дві паралельні прямі перетинає третя пряма так, що сума двох із восьми утворених кутів дорівнює 240° . Знайдіть міри всіх утворених кутів.
- 8°. Відрізки AB і KP перетинаються в точці O . Доведіть, що якщо $\angle AKO = \angle OPB$, то $\angle KAO = \angle OBP$.
- 9°. Прямі AB і KP перетинаються в точці O . OM — бісектриса кута AOP . Знайдіть міру кута KOM , якщо $\angle AOK - \angle AOM = 36^\circ$.
- 10°. Доведіть, що бісектриси внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих — перпендикулярні.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які кути називають суміжними?
2. Сформулюйте і доведіть властивість суміжних кутів.
3. Які кути називають вертикальними?
4. Сформулюйте і доведіть властивість вертикальних кутів.
5. Що таке кут між прямими?
6. Сформулюйте означення перпендикулярних прямих.
7. Які відрізки називають перпендикулярними?
8. Які дві прямі називають паралельними?
9. Які відрізки називають паралельними?
10. За допомогою яких креслярських інструментів можна провести пряму, перпендикулярну до даної прямої? Як це роблять?
11. Як можна провести пряму, паралельну даній прямій?
12. Що таке січна двох прямих?
13. Які кути називають внутрішніми різносторонніми?
14. Які кути називають внутрішніми односторонніми?
15. Які кути називають відповідними? Покажіть на малюнку.
16. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямих.
17. Сформулюйте аксіому Евкліда про паралельність прямих.
18. Що ви знаєте про Евкліда, про його «Основи»?
19. Сформулюйте і доведіть теорему про внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих.
20. Сформулюйте і доведіть властивості відповідних і внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих і січній.
21. Сформулюйте і доведіть теорему про дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої.
22. Що означає слово *транзитивний*? Сформулюйте теорему про транзитивність паралельності прямих.
23. Що таке теорема? Наведіть приклади теорем.
24. Що таке аксіома? Наведіть приклади аксіом.
25. Що таке означення? Наведіть приклади означень.
26. Яке твердження називають теоремою, оберненою до даної?
27. Що таке ознака?

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 2

Два кути, на які розгорнутий кут розбивається його внутрішнім променем, називають *суміжними*. Сума мір двох суміжних кутів дорівнює 180° .

Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого. Вертикальні кути — рівні.

Якщо дві прямі перетинаються, вони утворюють чотири кути (дві пари вертикальних кутів). Менший із них — кут між даними прямими.

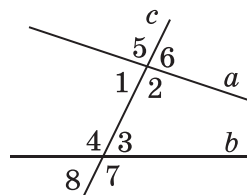
Дві прямі називають *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом. Якщо прямі a і b перпендикулярні, пишуть: $a \perp b$. Відрізки чи промені називають перпендикулярними, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються. Якщо прямі a і b паралельні, пишуть: $a \parallel b$. Два відрізки або промені називають паралельними, якщо вони лежать на паралельних прямих.

Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Пряму, яка перетинає дві інші прямі, називають її *січною*. З двома даними прямими вона утворює 8 кутів. Деякі пари цих кутів мають окремі назви:

- 1 і 3, 2 і 4 — внутрішні різносторонні;
- 1 і 4, 2 і 3 — внутрішні односторонні;
- 1 і 8, 2 і 7, 3 і 6, 4 і 5 — відповідні;
- 5 і 7, 6 і 8 — зовнішні різносторонні;
- 5 і 8, 6 і 7 — зовнішні односторонні.



Ознаки паралельності прямих

- Дві прямі паралельні, якщо із січною вони утворюють рівні внутрішні різносторонні кути, або рівні відповідні кути, або такі внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює 180° .
- Дві прямі, паралельні третій, паралельні одна одній.
- Дві прямі, перпендикулярні до третьої, — паралельні.

Властивості паралельних прямих

- Січна з двома паралельними прямими утворює рівні внутрішні різносторонні кути; рівні відповідні кути; такі внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює 180° .
- Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до іншої.

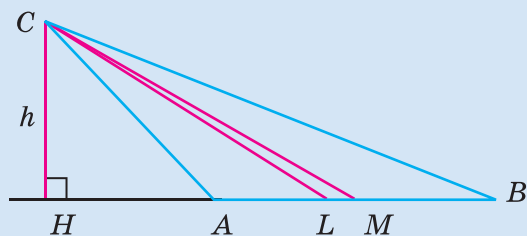
Основна ідея, якою пройнята вся
математика, — це ідея рівності.

Г. Спенсер

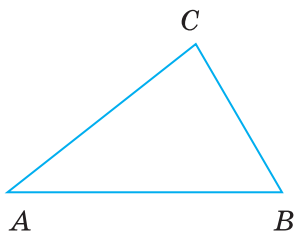


ТРИКУТНИКИ

У цьому розділі ви розширите свої знання про трикутники, здобуті в попередніх класах, і дізнаєтеся про багато інших властивостей цих фігур. Основне в розділі — три **ознаки рівності трикутників**. Вони часто використовуються в геометрії. Тому від того, чи добре ви вивчите ці ознаки, залежить, як ви засвоїте наступні розділи підручника.



§ 9. ТРИКУТНИК І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ



Мал. 120



Мал. 121

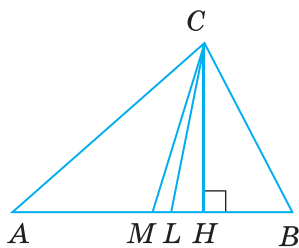
Якщо три точки, які не лежать на одній прямій, сполучити відрізками, матимемо *трикутник*. На малюнку 120 зображено трикутник ABC (пишуть: $\triangle ABC$). Точки A , B і C — *вершини* цього трикутника, відрізки AB , BC і CA — його *сторони*. Кожний трикутник має три вершини і три сторони.

Багато різних моделей трикутників можна розглядати в підйомних кранах, заводських конструкціях, різних архітектурних спорудах (мал. 121).

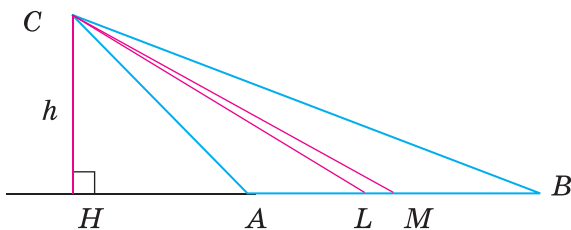
Суму довжин усіх сторін трикутника називають його *периметром*. Периметр трикутника ABC позначають так: $P_{\triangle ABC}$.

Кожна сторона трикутника коротша за суму двох інших його сторін (див. с. 13).

Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою його протилежної сторони, — *медіана трикутника*. Відрізок бісектриси кута трикутника, проведений від його вершини до протилежної сторони, — *бісектриса трикутника*. Перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, на якій лежить його протилежна сторона, — *висота трикутника*. На малюнку 122 (а, б) зображено $\triangle ABC$, у якому з вершини C проведено: медіану CM , бісектрису CL і висоту CH .



а



Мал. 122

б

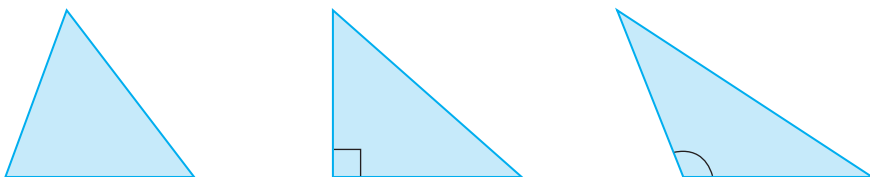
Кожний трикутник має три медіани, три бісектриси і три висоти.

Трикутник розбиває площину на дві області: внутрішню й зовнішню. Фігуру, яка складається з трикутника і його внутрішньої області, також називають *трикутником*.

Кутами трикутника ABC називають кути BAC , ABC і ACB . Їх позначають і так: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Кожний трикутник має три кути.

У трикутнику ABC кут C називають протилежним стороні AB , а кути A і B — прилеглими до сторони AB . Сторону AB називають протилежною куту C , а сторони AC і BC — прилеглими до кута C .

Якщо трикутник має прямий або тупий кут, його називають відповідно *прямокутним* або *тупокутним* трикутником. Трикутник, усі кути якого гострі, називають *гострокутним*. На малюнку 123 зображено гострокутний, прямокутний і тупокутний трикутники. Їх внутрішні області зафарбовано.



Мал. 123

Для допитливих

1. Словом *трикутник* геометри називають два різні поняття: і замкнену ламану з трьох ланок, і внутрішню частину площини, обмежену такою ламаною.

Так само *стороною трикутника* іноді називають відрізок, іноді — довжину цього відрізка; *висотою трикутника* — і певний відрізок, і його довжину.

Так роблять для зручності. Щоб кожного разу не говорити, наприклад, «довжина висоти трикутника дорівнює 5 см», домовилися говорити простіше: «висота трикутника дорівнює 5 см».

2. Кожний багатокутник можна розрізати на кілька трикутників. Тому трикутники в геометрії відіграють таку важливу роль, як атоми у фізиці, як цеглини в будинку. Існує навіть окрема частина геометрії — досить цікава і багата за змістом: *геометрія трикутника*.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке трикутник?
2. Назвіть елементи трикутника.
3. Які види трикутників ви знаєте? Сформулюйте їх означення.
4. Що таке бісектриса, медіана і висота трикутника?
5. Чим відрізняється бісектриса трикутника від бісектриси кута?

Виконаємо разом

✓ **1.** Середнє арифметичне всіх сторін трикутника дорівнює m . Знайдіть периметр трикутника.

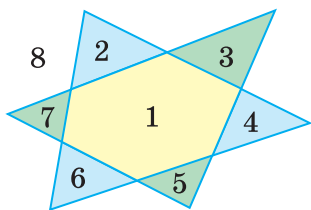
Якщо a, b, c — сторони трикутника, а P — його периметр,

$$\text{то } \frac{a+b+c}{3} = m, \text{ або } \frac{P}{3} = m, \text{ звідси } P = 3m.$$

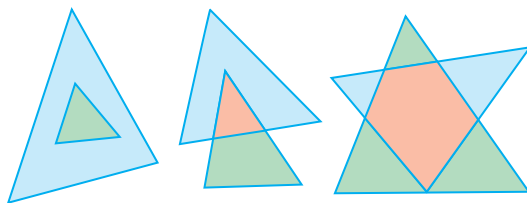
Отже, $P = 3m$. ▲

2. На скільки частин можуть розбити площину два її трикутники?

▼ Якщо два трикутники розташовані в одній площині, то вони можуть розбивати її щонайбільше на 8 частин (мал. 124). Уявно переміщаючи один із двох даних трикутників так, щоб спочатку один з утворених їх перерізом трикутник перетворився в точку, потім — другий і т. д., переконаємось, що два трикутники можуть розбивати площину на 3, 4, 5, 6, 7, 8 частин (мал. 125). Тільки якщо два трикутники рівні і суміщені один з одним, то вони розбивають площину на 2 частини. ▲



Мал. 124



Мал. 125

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

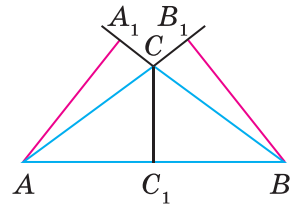
Виконайте усно

255. Чи можуть дві сторони трикутника бути перпендикулярними до його третьої сторони?
256. Скільки висот трикутника можуть лежати зовні нього?
257. Чи може висота трикутника збігатися з його стороною?
258. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо:
- $AB = 6$ см, $BC = 3$ см, $AC = 7$ см;
 - $AB = 2,2$ дм, $BC = 8,5$ дм, $AC = 8,8$ дм.
259. Чи існує трикутник зі сторонами 3 см, 4 см і 8 см?

А

260. Накресліть будь-який трикутник. Позначте його вершини буквами K , P і T . Назвіть сторони і кути трикутника. Виміряйте сторони побудованого трикутника та знайдіть його периметр.
261. Накресліть гострокутний трикутник ABC . Проведіть з його вершини A медіану, бісектрису і висоту.
262. Побудуйте довільний трикутник. Проведіть його медіани і висоти.
263. Сторони трикутника дорівнюють 3,8 см, 4,5 см і 7,5 см. Знайдіть його периметр.
264. Периметр трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть сторону квадрата, периметр якого вдвічі більший за периметр трикутника.
265. AM і BN — медіани трикутника ABC , $AN = 5$ см, $BM = 7$ см. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $AB = 15$ см.

266. Чи правильно, що на малюнку 126 відрізки AA_1 , BB_1 , CC_1 — висоти трикутника ABC ?
267. Побудуйте прямокутний і тупокутний трикутники. Проведіть їх висоти.
268. Скільки різних трикутників зображено на малюнку 127 (а, б)?
269. Периметр трикутника ABC дорівнює 26 см. Знайдіть його невідомі сторони, якщо $AC = 10$ см і:
- а) $BC = 3AB$; б) $AB : BC = 3 : 5$; в) $AB = BC$;
г) $BC - AB = 6$ см; г) $AC = 0,5 AB + 6$.



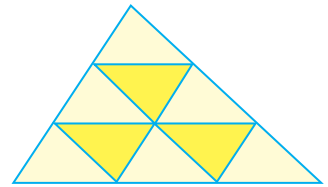
Мал. 126



Мал. 127, а

Б

270. Чи кожний трикутник можна розрізати на 2 трикутники? А на довільне число n трикутників? Якими способами можна розрізати довільний трикутник на 3 менші трикутники? А на 4 трикутники?
271. M і N — середини сторін AB і BC трикутника ABC . Периметр трикутника MBN у 2 рази менший від периметра трикутника ABC . Знайдіть MN , якщо $AC = 10$ см.
272. Знайдіть сторони трикутника, якщо одна з них більша за іншу вдвічі, від третьої — у півтора разу і друга сторона менша від третьої на 2 см.
273. Знайдіть периметр трикутника, якщо він більший від першої сторони на 7 м, від другої — на 8 м, а від третьої — на 9 м.
274. Середнє арифметичне всіх сторін трикутника дорівнює 10 дм. Знайдіть периметр трикутника.
275. BM — медіана трикутника ABC і $BM = MC$. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо периметр трикутника ABM дорівнює 16 см, $BC = 8$ см.
276. Трикутник із периметром 22 см поділено медіаною на два трикутники з периметрами 12 см і 16 см. Знайдіть довжину медіани.
277. Сторони трикутника пропорційні числам 4, 5 і 8. Знайдіть периметр трикутника, якщо найбільша його сторона більша за найменшу на 24 см.
278. Трикутник ділить площину на дві частини: обмежену й необмежену. На скільки частин можуть ділити площину розташовані на ній трикутник і пряма? А трикутник і коло?
279. Знайдіть висоту BH трикутника ABC , якщо периметри трикутників ABC , ABH і BHC дорівнюють відповідно 26 см, 14 см і 18 см.



Мал. 127, б

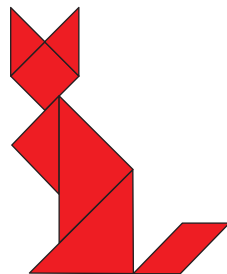
280. BM — медіана трикутника ABC , а периметри трикутників ABM і BMC — рівні. Доведіть, що $AB = BC$.
281. На сторонах AB і BC трикутника ABC взято точки M і K так, що $MK \parallel AC$. Доведіть, що кути трикутника MVK дорівнюють відповідно кутам трикутника ABC .

Практичне завдання

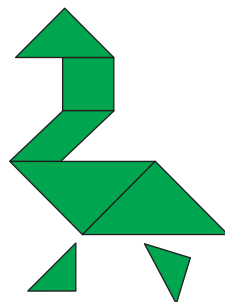
282. а) Розріжте квадрат на 2, 3, 4, 5 трикутників;
б) перемалюйте малюнок 127, а на картон і розріжте на 7 частин. Складіть із них кілька цікавих фігур, наприклад, як на малюнках 128 і 129. Як називається така гра?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

283. Пригадайте, як визначити площу прямокутника. А квадрата?
284. Скільки квадратних метрів містить 1 км^2 , 1 га , 1 ар ?
285. Чи правильно, що з двох будь-яких рівних прямокутних трикутників можна скласти один прямокутник?
286. Як знайти площу прямокутного трикутника?
287. Поле прямокутної форми має площу 20 га , а одна його сторона — завдовжки півкілометра. Знайдіть довжину іншої сторони поля.
288. Сума кутів AOB і BOC дорівнює 100° . Знайдіть кут між їх бісектрисами, якщо промінь OB для кута AOC — внутрішній.



Мал. 128



Мал. 129

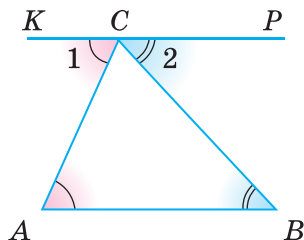
§ 10. СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА

Теорема 8. Сума кутів трикутника дорівнює 180° .

Доведення. Нехай ABC — довільний трикутник (мал. 130). Через його вершину C проведемо пряму KP , паралельну стороні AB .

Утворені кути ACK і BCP позначимо цифрами 1 і 2. Тоді $\angle A = \angle 1$, $\angle B = \angle 2$ як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AB і KP та січних AC і BC . Кути 1, 2 і C в сумі дорівнюють розгорнутому куту, тобто 180° . Тому:

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle C = 180^\circ.$$



Мал. 130

Отже, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. ▲

Зверніть увагу! У доведеній теоремі 8 йдеться про суму мір кутів трикутника. Але для спрощення формулювань замість «міра кута» часто вживають слово «кут».

Наслідок. Трикутник не може мати двох прямих або двох тупих кутів. У кожному трикутнику принаймні два кути — гострі.

Іноді крім кутів трикутника (внутрішніх) розглядають також його зовнішні кути. *Зовнішнім кутом трикутника* називають кут, утворений стороною трикутника і продовженням його іншої сторони. Наприклад, зовнішнім кутом трикутника ABC при вершині A є кут KAC (мал. 131).

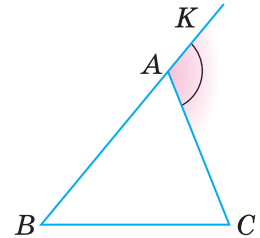
Теорема 9. Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів трикутника, не суміжних із ним.

Доведення. Нехай $\angle KAC$ — зовнішній кут трикутника ABC (див. мал. 131). Тоді:

$\angle KAC = 180^\circ - \angle BAC$ (згідно з теоремою про суміжні кути);

$\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle BAC$ (згідно з теоремою про суму кутів трикутника).

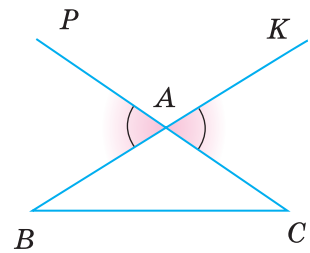
Отже, $\angle KAC = \angle B + \angle C$. ▲



Мал. 131

Наслідок. Зовнішній кут трикутника більший за кожний внутрішній кут, не суміжний із ним.

Зверніть увагу! При кожній вершині трикутника можна побудувати два зовнішні кути, продовживши одну чи іншу його сторону. Наприклад, кожний із кутів KAC і PAB — зовнішній кут трикутника ABC при вершині A (мал. 132). Такі два зовнішні кути — вертикальні, тому дорівнюють один одному.

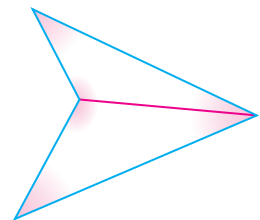


Мал. 132

Для допитливих

Теорему про суму кутів трикутника можна узагальнити і поширити на довільні багатокутники.

Кожний чотирикутник можна розрізати на два трикутники, сполучивши його протилежні вершини відрізком. (Якщо один із кутів чотирикутника більший від розгорнутого, то саме його вершину слід сполучити з протилежною, як на малюнку 133.) Сума всіх кутів чотирикутника дорівнює сумі всіх



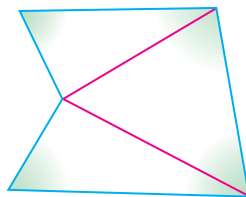
Мал. 133

кутів двох утворених трикутників, тобто $180^\circ \cdot 2$. Отже, сума кутів будь-якого чотирикутника дорівнює 360° .

Довільний п'ятикутник можна розрізати на чотирикутник і трикутник або на 3 трикутники (мал. 134).

Отже, сума кутів п'ятикутника дорівнює $180^\circ \cdot 3$, тобто 540° .

Спробуйте написати формулу, за якою можна обчислити суму кутів довільного n -кутника.



Мал. 134

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте та доведіть теорему про суму кутів трикутника.
2. Що таке зовнішній кут трикутника?
3. Сформулюйте та доведіть теорему про зовнішній кут трикутника.
4. Чи правильно, що зовнішній кут трикутника більший за кожний внутрішній кут, не суміжний із ним?
5. Чому дорівнює сума кутів чотирикутника?

Виконаємо разом

1. Чому дорівнює сума зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній вершині?

▼ Нехай ABC — довільний трикутник. Позначимо його зовнішні кути цифрами 1, 2 і 3 (мал. 135).

Перший спосіб:

Згідно з теоремою про зовнішній кут трикутника $\angle 1 = \angle B + \angle C$, $\angle 2 = \angle A + \angle B$, $\angle 3 = \angle A + \angle C$.

Додавши окремо ліві й праві частини цих рівностей, матимемо:

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2(\angle A + \angle B + \angle C) = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

Другий спосіб:

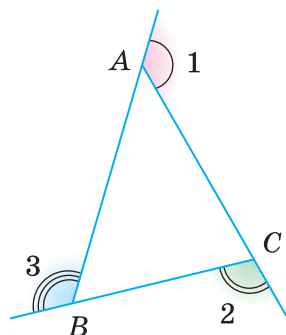
$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ - \angle A + 180^\circ - \angle C + 180^\circ - \angle B = 540^\circ - (\angle A + \angle C + \angle B) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ.$$

Отже, сума зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360° . ▲

2. Доведіть, що в кожному трикутнику є кут, не більший за 60° , і кут, не менший від 60° .

▼ Якби кожний кут трикутника був менший від 60° , то сума всіх його кутів становила б менше 180° , а це неможливо. Якби кожний кут трикутника був більший за 60° , то сума всіх його кутів була б більшою за 180° , що також неможливо.

Отже, у кожному трикутнику є кут, не більший за 60° , і кут, не менший від 60° . ▲



Мал. 135

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

289. Сума двох кутів трикутника дорівнює 80° . Знайдіть третій кут.
 290. Два кути трикутника дорівнюють 30° кожний. Знайдіть третій кут.
 291. Чи існує трикутник з кутами: 60° , 70° і 80° ?
 292. Два кути трикутника дорівнюють 20° і 80° . Знайдіть третій кут.
 293. Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо один із них дорівнює 30° .

А

294. Знайдіть кути трикутника, якщо вони пропорційні числам:
 а) 2, 3 і 5; б) 1, 5 і 6; в) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$.
 295. Доведіть, що сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90° .
 296. Заповніть порожні клітинки таблиці про кути трикутника ABC .

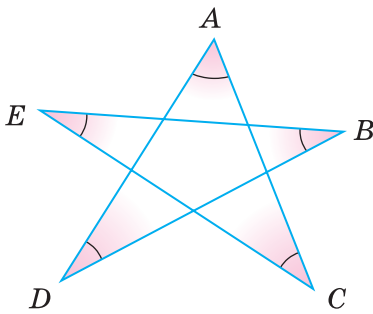
$\angle A$	30°	20°		83°	95°		54°
$\angle B$	70°		45°		35°	47°	
$\angle C$		100°	45°	17°		67°	54°

297. Знайдіть кути трикутника, якщо один із них:
 а) дорівнює другому і менший від третього на 30° ;
 б) більший за другий на 20° , а за третій — на 40° ;
 в) більший за другий у 2 рази, а за третій — на 10° .
 298. У трикутнику ABC кути A і B дорівнюють 65° кожний. Знайдіть зовнішній кут трикутника при вершині C .
 299. Чи може кожний зовнішній кут трикутника дорівнювати 100° ?
 300. Кути трикутника пропорційні числам 1, 2 і 3. Доведіть, що цей трикутник прямокутний.

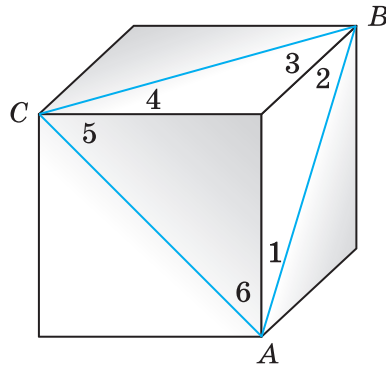
Б

301. Знайдіть кути трикутника ABC , якщо $\angle A + \angle B = 100^\circ$ і $\angle B + \angle C = 120^\circ$.
 302. $\angle ABC = 30^\circ$. Під яким кутом пряма AC перетинає промінь BC , якщо промінь BA вона перетинає під кутом 45° ?
 303. CH і CL — висота і бісектриса трикутника ABC , $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Знайдіть $\angle HCL$.
 304. CL — бісектриса трикутника ABC , $\angle A = 80^\circ$, $\angle B = 40^\circ$. Знайдіть:
 а) $\angle CLA$; б) кут, під яким перетинаються бісектриси кутів A і B .

- 305.** CH — висота трикутника ABC . Знайдіть $\angle ACH$ і $\angle BCH$, якщо:
- $\angle A = 30^\circ$ і $\angle B = 60^\circ$;
 - $\angle A = 30^\circ$ і $\angle B = 120^\circ$.
- 306.** Знайдіть міри зовнішніх кутів трикутника ABC , якщо:
- $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 50^\circ$;
 - $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 40^\circ$;
 - $\angle A + \angle B = 100^\circ$, $\angle B + \angle C = 130^\circ$;
 - $\angle A + \angle C = 95^\circ$, $\angle B + \angle C = 135^\circ$.
- 307.** Кути A і B трикутника ABC — рівні. Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута трикутника ABC при вершині C паралельна стороні AB .
- 308.** Знайдіть суму кутів A , B , C , D та E п'ятикутної зірки (мал. 136).
- 309.** Трикутник ABC розташований на поверхні куба, як показано на малюнку 137. Знайдіть суму кутів, позначених на малюнку цифрами.

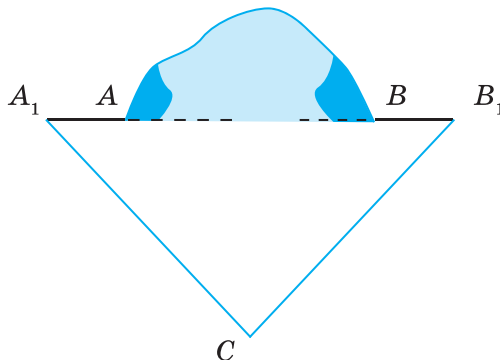


Мал. 136



Мал. 137

- 310.** Прямолінійний тунель AB пробивають із двох боків гори (мал. 138). Чи правильно вибрано напрямки A_1A і B_1B , якщо вимірювання показали, що $\angle A = 50^\circ 10'$, $\angle B = 48^\circ 20'$ і $\angle C = 80^\circ 5'$?



Мал. 138

Практичне завдання

311. Накресліть довільний трикутник і проведіть усі його бісектриси. Що ви помітили? Чи можна стверджувати, що всі три бісектриси трикутника проходять через одну точку? А всі три медіани трикутника?

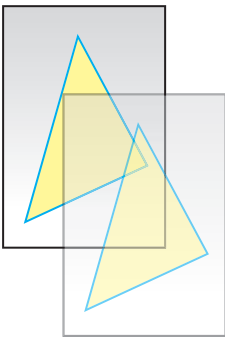
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 312.** Відрізок, довжина якого дорівнює a , поділено на два нерівні відрізки. Знайдіть відстань між серединами утворених відрізків.
- 313.** Один із суміжних кутів на 20° більший за інший. У скільки разів перший кут більший за другий?
- 314.** Периметр квадрата дорівнює 4 дм. Чи можна з нього вирізати трикутник, периметр якого дорівнює 3 дм?
- 315.** Чи існує трикутник, периметр якого в 1000 разів більший за одну з його сторін? А за одну з висот?
- 316.** Січна c з паралельними прямими a і b утворює внутрішні односторонні кути, що відносяться як 2 : 3. Як відносяться кути, утворені бісектрисами цих кутів і січною c ?

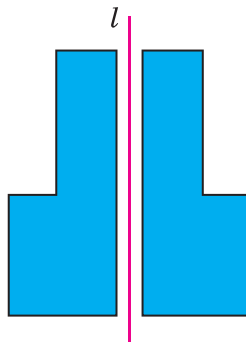
§ 11. ПРО РІВНІСТЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

На малюнку 139 зображено два трикутники. Уявіть, що один із них накреслений на папері, а інший — на прозорій плівці. Переміщаючи плівку, другий трикутник можна сумістити з першим. Кажуть: якщо дані трикутники можна сумістити накладанням, то вони — *рівні*. Рівними один одному бувають не тільки трикутники, а й відрізки, кути, кола та інші фігури.

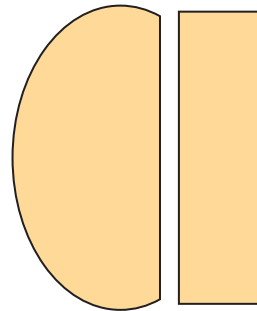
Зображені на малюнку 140 фігури також рівні, бо їх можна сумістити, перегнувши аркуш паперу по прямій l . А фігури, зображені на малюнку 141, — нерівні, їх не можна сумістити.



Мал. 139



Мал. 140



Мал. 141

Цій загальній трактовці рівності геометричних фігур не суперечить поняття рівності відрізків (с. 12) і кутів (с. 18), бо якщо відрізки (кути) мають рівні довжини (міри), то їх можна сумістити накладанням.

Для позначення рівних фігур використовують знак рівності « = ». Наприклад, $AB = KP$, $\angle A = \angle B$, $\triangle ABC = \triangle KPT$.

Якщо кожна з двох фігур дорівнює третій, то перша і друга фігури також рівні.

З рівними фігурами часто доводиться мати справу багатьом фахівцям. У формі рівних прямокутників випускають листи жерсті, фанери, скла, облицювальні плитки, паркетини тощо. Рівні всі аркуші паперу з однієї пачки, відповідні деталі двох машин однієї марки.

Щоб з'ясувати, чи рівні дві фігури, можна спробувати їх сумістити. Але на практиці це не завжди можна зробити. Наприклад, таким способом не можна з'ясувати, чи рівні дві земельні ділянки. Тому доводиться шукати інші способи, виявляти ознаки рівності тих чи інших фігур. Наприклад, якщо радіуси двох кіл рівні, то рівні й самі кола. Це — ознака рівності кіл. У наступному параграфі ми розглянемо ознаки рівності трикутників.

Зверніть увагу! Трикутник з вершинами A , B і C можна позначати по-різному: $\triangle ABC$, $\triangle BCA$, $\triangle CAB$, $\triangle BAC$ і т. д. Однак для зручності домовимося, що коли пишуть $\triangle ABC = \triangle KPT$, то розуміють, що $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle P$, $\angle C = \angle T$, $AB = KP$, $AC = KT$, $BC = PT$.

Для допитливих

Слово «рівність» у математиці й інших науках вживається досить часто. Говорять, зокрема, про рівність чисел, рівність виразів, рівність значень величин. Рівність геометричних фігур — це *відношення*. Воно має такі властивості:

- 1) кожна фігура дорівнює сама собі;
- 2) якщо фігура A дорівнює фігурі B , то й фігура B дорівнює фігурі A ;
- 3) якщо фігура A дорівнює фігурі B , а фігура B дорівнює фігурі C , то фігури A і C — також рівні.

Нерідко з рівності одних фігур чи величин впливає рівність інших, але не завжди. Наприклад, якщо трикутники рівні, то і їхні периметри рівні. Але якщо периметри двох трикутників рівні, то це ще не означає, що рівні й самі трикутники. Так само: якщо трикутники рівні, то і їхні площі рівні. Але якщо площі двох трикутників рівні, це ще не означає, що й трикутники рівні.

Досить часто для обґрунтування рівності тих чи інших фігур треба обґрунтувати рівність деяких трикутників. Ось чому питання про рівність трикутників у геометрії дуже важливе: більшість теорем шкільної геометрії доводять, користуючись ознаками рівності трикутників.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які фігури називають рівними?
2. Яким знаком позначають рівність фігур?
3. Наведіть приклади предметів довкілля, що мають форму рівних геометричних фігур.

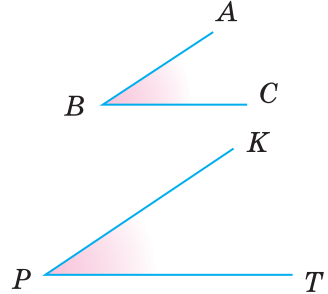
4. Сформулюйте ознаку рівності двох кіл.
5. Сформулюйте властивості відношення рівності фігур.

Виконаємо разом

1. Чи рівні кути, зображені на малюнку 142?
 ▼ Сторони кута — промені. Хоч на малюнку вони зображені нерівними відрізками, але слід уявляти їх нескінченними променями. Оскільки кожний із цих кутів дорівнює 35° (перевірте), то вони — рівні. ▲

2. Доведіть, що трикутники не можуть бути рівними, якщо не рівні їх найбільші кути.

▼ Нехай у трикутниках ABC і KPT $\angle A > \angle B > \angle C$, $\angle K > \angle P > \angle T$. Якби дані трикутники були рівні, їх можна було б сумістити. Тоді найбільший кут A трикутника ABC сумістився б із найбільшим кутом K трикутника KPT . Це неможливо, оскільки $\angle A \neq \angle K$. Отже, дані трикутники не можуть бути рівними. ▲

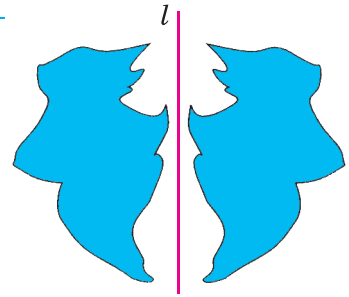


Мал. 142

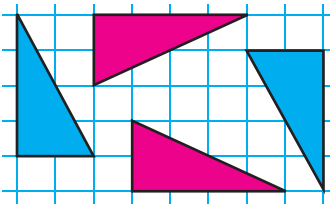
ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

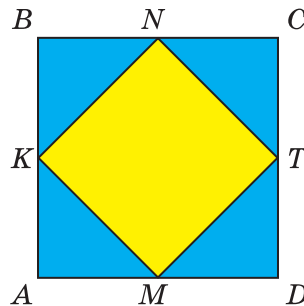
317. Чи рівні дві фігури на малюнку 143?
318. Чи правильно, що коли даний трикутник прямокутний чи тупокутний, то й рівний йому трикутник також відповідно прямокутний чи тупокутний?
319. Чи рівні трикутники, зображені на малюнку 144?
320. Середини сторін квадрата $ABCD$ поспідовно сполучили відрізками так, що утворилося 4 трикутники (мал 145). Чи правильно, що кожний із цих трикутників дорівнює іншому?



Мал. 143

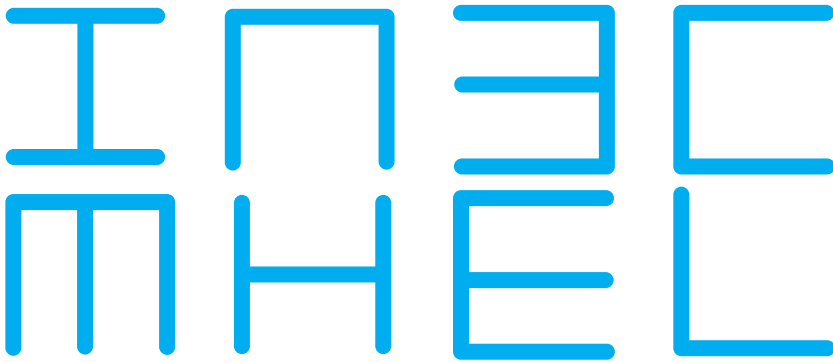


Мал. 144



Мал. 145

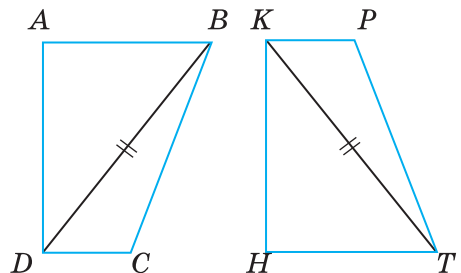
321. Чи рівні як геометричні фігури символи:
 а) O і 0 ;
 б) $< i >$;
 в) $= i \parallel$;
 г) Γ і L ?
322. Чи можуть бути рівними прямокутний і тупокутний трикутники? А прямокутний і гострокутний?
323. Трикутники ABC і KPT — рівні. Чи рівні їх периметри?
324. Периметри трикутників ABC і KPT — рівні. Чи рівні трикутники?
325. Один із двох суміжних кутів можна сумістити з іншим. Які це кути?
326. Які з фігур, зображених на малюнку 146, — рівні?



Мал. 146

А

327. Чи можуть бути рівними трикутники, найменші сторони яких не рівні?
328. Пряма, яка проходить через центр кола, розбиває його на два півкола. Чи рівні вони? Як можна одне півколо сумістити з іншим?
329. Знайдіть периметр трикутника KPT , якщо $\Delta KPT = \Delta ABC$, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см і $AC = 5$ см.
330. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ наклали один на одний так, що сумістилися вершини A і A_1 , B і B_1 , C і C_1 . Чи сумістяться сторони AB і A_1B_1 , AC і A_1C_1 , BC і B_1C_1 ? А медіани AM і A_1M_1 ?
331. Фігури $ABCD$ і $HTPK$ — рівні (мал. 147). Знайдіть кут T і відстань KT , якщо $BD = 3,8$ см і $\angle B = 70^\circ$.

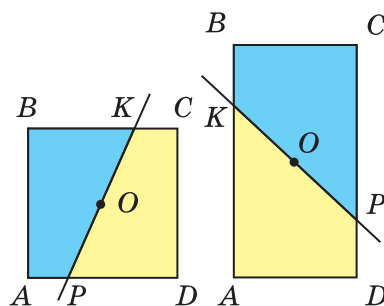


Мал. 147

332. Знайдіть кути трикутника ABC , якщо $\triangle ABC = \triangle KPT$, $\angle K = 60^\circ$ і $\angle P = 60^\circ$.
333. Сторони AB і PT — не рівні. Чи можуть бути рівними трикутники ABC і KPT ?

Б

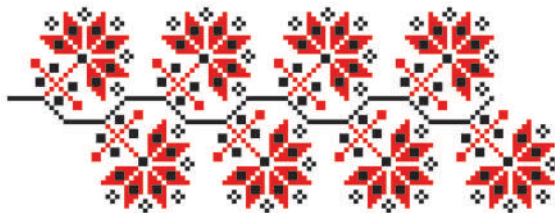
334. Кути ABC і KPT — рівні. Скількома способами один із них можна сумістити з іншим?
335. $\triangle ABC$ — тупокутний, а кути трикутника $A_1B_1C_1$ пропорційні числам 5, 6 і 7. Чи можуть бути рівними ці трикутники?
336. $\triangle ABC = \triangle MNK$, $\angle N = 2\angle A$. Знайдіть кути трикутників, якщо $\angle C = 60^\circ$.
337. $\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні, $\angle BOC - \angle AOB = 30^\circ$. $\angle MKP$ і $\angle PKN$ — суміжні, $\angle MKP : \angle PKN = 7 : 5$. Укажіть пари рівних кутів, якщо вони є.
338. Периметри прямокутників $ABCD$ і $MNPК$ дорівнюють 28 см кожний. Побудуйте ці прямокутники так, щоб:
а) вони були рівними; б) вони не були рівними.
339. Одна зі сторін прямокутника $ABCD$ на 3 см більша за іншу, а його периметр дорівнює 34 см. Площа прямокутника $MNPК$ дорівнює 70 см^2 . Чи можуть бути рівними ці прямокутники? А якщо площа прямокутника $MNPК$ дорівнює 72 см^2 ?
340. На координатній площині дано точки $A(1; 4)$, $B(2; 7)$, $C(2; 4)$, $D(2; 1)$, $K(4; 1)$. Чи рівні трикутники ABC і ADC ? А трикутники ABC і CDK ?
341. Прямокутники $ABCD$ і $KPTM$ дорівнюють один одному і $AB = KP = 10$ см. Знайдіть KM , якщо $AC = 26$ см і периметр трикутника KPT дорівнює 60 см.
342. Точки A, B, C, D, E ділять коло із центром O на 5 рівних дуг. Чи рівні відрізки AB і EA ? А трикутники OBC і OAE ?
343. Чи правильно, що кожна пряма, проведена через центр O квадрата або прямокутника (мал. 148), поділяє його на дві рівні фігури?



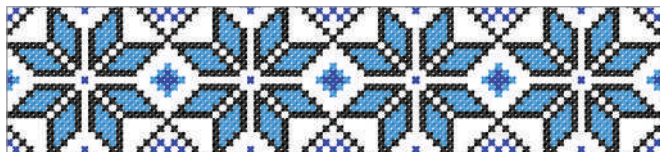
Мал. 148

Практичне завдання

344. В основу багатьох українських вишивок і орнаментів покладено рівні ромби різного кольору (мал. 149 і 150). Створіть орнамент із рівних: а) квадратів; б) трикутників; в) відрізків.



Мал. 149



Мал. 150

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

345. Накресліть круг із діаметром 6 см. Чому дорівнюють його площа і довжина кола, яке його обмежує?
346. Накресліть круг радіуса 3 см. Поділіть його на 5 рівних секторів. Зафарбуйте один сектор і знайдіть його площу.
347. На скільки частин можуть розбити площину два кола? А три кола?
348. Скільки гектарів містить круг, діаметр якого дорівнює 1 км?
349. У трикутнику ABC $\angle A = 70^\circ$, а $\angle B$ — на 20° більший за $\angle C$. Під яким кутом перетинаються бісектриси кутів B і C ?
350. У трикутнику ABC всі кути рівні. Доведіть, що бісектриси будь-яких двох із них перетинаються під рівними кутами.

§ 12. ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Якщо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ дорівнюють один одному, то їх можна сумістити. При цьому якщо сумістяться вершини A і A_1 , B і B_1 , C і C_1 , то сумістяться й сторони: AB з A_1B_1 , BC з B_1C_1 , CA з C_1A_1 , і кути: $\angle A$ з $\angle A_1$, $\angle B$ з $\angle B_1$, $\angle C$ з $\angle C_1$. Отже, якщо $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, то $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

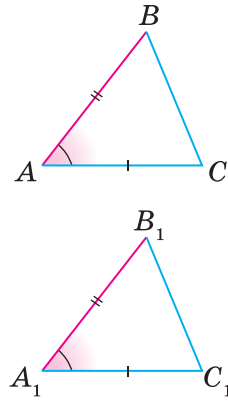
Щоб з'ясувати, що два трикутники рівні, не обов'язково їх суміщати. Простіше скористатися ознаками рівності трикутників.

Теорема 10 (перша ознака рівності трикутників).

Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники — рівні.

Доведення*. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два трикутники, у яких $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ і $\angle A = \angle A_1$ (мал. 151). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Накладемо $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ так, щоб вершина A_1 сумістилася з вершиною A , вершина B_1 — з вершиною B , а сторона A_1C_1 накладалася на промінь AC . Це зробити можна, бо згідно з умовою $A_1B_1 = AB$ і $\angle A_1 = \angle A$. Оскільки $A_1C_1 = AC$, то при такому накладанні точка C_1 суміститься з точкою C . У результаті всі вершини трикутника $A_1B_1C_1$ сумістяться з відповідними вершинами трикутника ABC . Отже, $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$. ▲



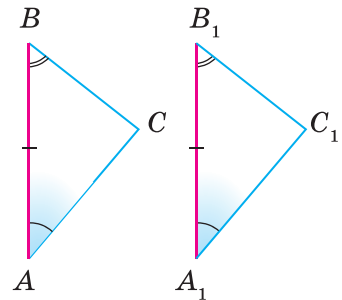
Мал. 151

Теорема 11 (друга ознака рівності трикутників).

Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні й прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники — рівні.

Доведення*. Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ — два трикутники, у яких $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$ (мал. 152). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Накладемо $\triangle A_1B_1C_1$ на $\triangle ABC$ так, щоб вершина A_1 сумістилася з вершиною A , вершина B_1 — з вершиною B , а сторона A_1C_1 накладалася на промінь AC . Це зробити можна, бо $AB = A_1B_1$ і $\angle A = \angle A_1$. Оскільки $\angle B = \angle B_1$, то сторона B_1C_1 накладеться на промінь BC . Отже, при такому накладанні промінь A_1C_1 суміститься з променем AC , а промінь B_1C_1 — з променем BC . Точка C_1 , у якій перетинаються промені A_1C_1 і B_1C_1 , суміститься з точкою C — точкою перетину променів AC і BC . Як бачимо, трикутник $A_1B_1C_1$ можна сумістити з трикутником ABC , а це означає, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. ▲



Мал. 152

Для допитливих

Існують ще й інші ознаки рівності трикутників (див. теорему 18).

На ознаки рівності трикутників згодом доведеться посилалися часто. Щоб не сплутати, яку з них названо першою, яку — другою і т. д., їх краще розрізняти за змістом, говорити про **ознаку рівності трикутників**:

- 1) за двома сторонами і кутом між ними;
- 2) за стороною і двома прилеглими кутами;
- 3) за трьома сторонами (її доведемо пізніше).

Ці ознаки рівності трикутників називають загальними ознаками, бо вони правильні для будь-яких трикутників. Крім них, існують ще ознаки рівності прямокутних трикутників, рівнобедрених трикутників тощо.

Два рівносторонні трикутники рівні, якщо сторона одного з них дорівнює стороні іншого.

Спробуйте довести цю ознаку, користуючись загальними ознаками.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте першу ознаку рівності трикутників.
2. Сформулюйте другу ознаку рівності трикутників.
- 3*. Доведіть ознаку рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними.
- 4*. Доведіть ознаку рівності трикутників за стороною і прилеглими до неї кутами.

Виконаємо разом

1. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = DO$ і $CO = BO$. Доведіть, що $AC = DB$.

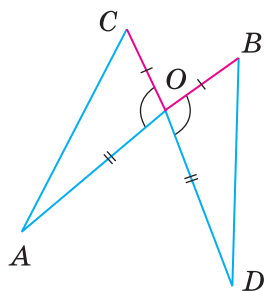
▼ Розглянемо трикутники ACO і DBO (мал. 153). Їх кути при вершині O — вертикальні, отже, рівні. Відповідні сторони також рівні: $AO = DO$, $CO = BO$. Згідно з першою ознакою рівності трикутників $\triangle ACO = \triangle DBO$. Сторони AC і DB цих трикутників відповідні, бо лежать проти рівних кутів при вершині O .

Отже, $AC = DB$. ▲

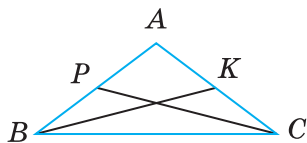
2. Дві сторони трикутника дорівнюють одна одній. Доведіть, що медіани, проведені до цих сторін, також рівні.

▼ Нехай у трикутнику ABC $AB = AC$, а BK і CP — медіани (мал. 154).

$AP = AK$ як половини рівних сторін. $\triangle ABK = \triangle ACP$, бо $AB = AC$, $AK = AP$ і $\angle A$ — спільний. Отже, $BK = CP$. ▲



Мал. 153



Мал. 154

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

351. Учні побудували в зошитах трикутники за двома сторонами 3 см і 5 см та кутом 60° між ними. Чи рівні ці трикутники?
352. Учні побудували в зошитах трикутники за стороною 5 см і прилеглими до неї кутами 30° і 70° . Чи рівні ці трикутники?

А

353. Користуючись малюнком 155, доведіть:

- а) якщо $AB = AD$ і $\angle 1 = \angle 2$, то $\triangle ABC = \triangle ADC$;
 б) якщо $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle B = \angle D$, то $\triangle ABC = \triangle ADC$.

354. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = OB$ і $CO = OD$. Доведіть, що $\triangle AOC = \triangle BOD$.

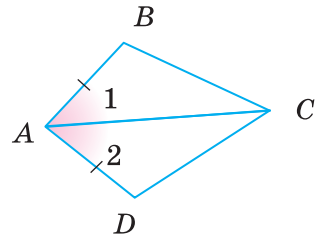
355. Відрізки KP і EF перетинаються в точці M так, що $KM = MP$ і $EM = MF$. Знайдіть відстань між точками K і E , якщо $PF = 12$ см.

356. На малюнку 156 $AB = CD$, $AB \parallel CD$. Доведіть, що $\triangle AOB = \triangle COD$.

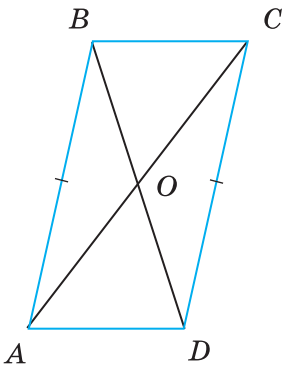
357. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, якщо $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ і $\angle B = \angle B_1$.

358. Нехай AM — медіана трикутника ABC і $MK = MA$ (мал. 157). Доведіть, що $\triangle ACM = \triangle KBM$.

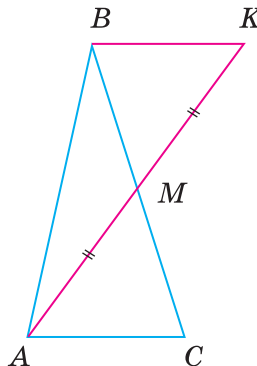
359. У чотирикутнику $ABCD$ $AB \parallel CD$ і $BC \parallel AD$ (мал. 158). Доведіть, що $\angle B = \angle D$.



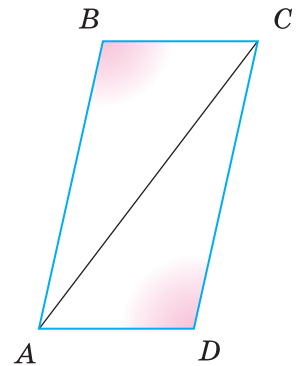
Мал. 155



Мал. 156



Мал. 157



Мал. 158

360. На бісектрисі кута A позначено точку D , на сторонах цього кута — точки B і C такі, що $\angle BDA = \angle ADC$. Доведіть, що $BD = CD$.

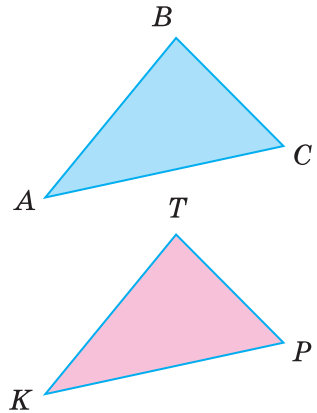
361. У рівносторонньому трикутнику ABC проведіть бісектрису AL і доведіть, що:

- а) $BL = LC$;
 б) $AL \perp BC$.

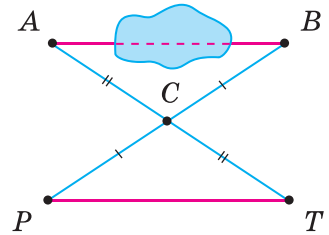
362. У чотирикутнику $ABCD$ $AB \parallel CD$ і $BC \parallel AD$. Проведіть відрізок BD і доведіть, що:

- а) $AB = CD$;
 б) $BC = AD$;
 в) $\angle A = \angle C$.

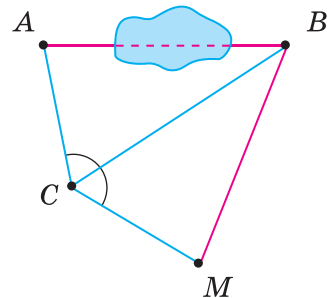
363. Чи дорівнюють один одному трикутники, зображені на малюнку 159?
364. Щоб виміряти на місцевості відстань між пунктами A і B , між якими не можна пройти (мал. 160), вибирають таку точку C , від якої можна пройти до A і до B . Потім на прямих AC і BC відкладають відрізки $CT = AC$ і $CP = BC$. Відстань PT дорівнює AB . Чому?
365. Попередню задачу можна розв'язати іншим способом (мал. 161). Відкладають $\angle BCM = \angle BCA$ і $CM = CA$. Тоді $AB = MB$. Поясніть, чому це так.
366. Через кінці відрізка AB проведено паралельні прямі AC і BD , а через середину O відрізка AB — пряму, яка перетинає прямі AC і BD в точках C і D . Знайдіть відстань між точками A і C , якщо $BD = 8$ см.
367. Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $OA = OC$. Доведіть, що $\angle ABC = \angle ADC$ і $\angle BAD = \angle BCD$.
368. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O , яка є серединою кожного з них. Доведіть, що $AC \parallel BD$.



Мал. 159



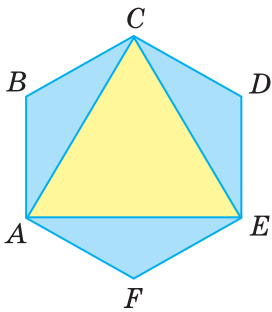
Мал. 160



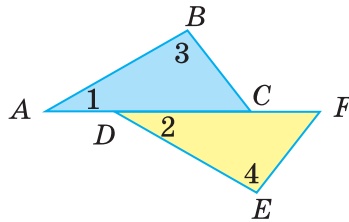
Мал. 161

Б

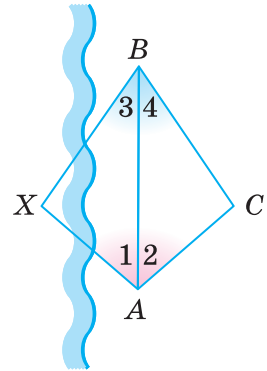
369. Доведіть, що медіани рівних трикутників, проведені до рівних сторін, — рівні.
370. Доведіть, що в рівних трикутниках рівні, відповідні:
- а) бісектриси; б) висоти.
371. Усі сторони шестикутника $ABCDEF$ рівні, і всі його кути рівні (мал. 162). Доведіть, що трикутник ACE — рівносторонній.
372. На малюнку 163 $AD = CF$, $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DEF$.
373. Бісектриса AL трикутника ABC перпендикулярна до сторони BC . Доведіть, що $AB = AC$.
374. Щоб знайти відстань між пунктами A та X (мал. 164), на березі річки позначили точки B і C так, щоб виконувались рівності $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$. Шукана відстань AX дорівнює відстані AC . Чому?



Мал. 162



Мал. 163



Мал. 164

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

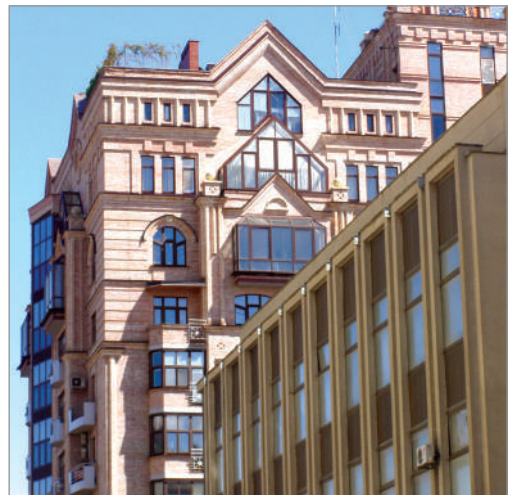
375. Один із двох кутів на 40° більший за інший. Знайдіть ці кути, якщо суміжні з ними кути відносяться як $7 : 5$.
376. Чи має трикутник рівні сторони, якщо дві його сторони відносяться як $5 : 4$, третя — на 1 см більша за їх півсуму, а периметр трикутника дорівнює 28 см?
377. Чому дорівнює кут між бісектрисами внутрішнього і зовнішнього кутів трикутника, взятих при одній вершині?
378. Скількома способами можна розрізати прямокутник на два рівні прямокутники? А на дві рівні фігури?
379. Як два рівні квадрати розрізати на рівні частини і скласти з них один квадрат?



Геометрія навколо нас



Площа у Франції



м. Київ

Самостійна робота 3**Варіант 1**

- 1°. Накресліть гострокутний трикутник і проведіть його медіани.
- 2°. Два кути трикутника дорівнюють 35° і 68° . Знайдіть третій кут.
- 3°. Периметр трикутника дорівнює 35 см. Знайдіть довжини його сторін, якщо одна з них довша за другу на 3 см і коротша від третьої на 5 см.
- 4°. У трикутнику ABC сторони AB і BC — рівні, а BH — бісектриса. Доведіть, що $\triangle ABH = \triangle CBH$.

Варіант 2

- 1°. Накресліть прямокутний трикутник і проведіть його бісектриси.
- 2°. Два кути трикутника дорівнюють 110° і 57° . Знайдіть третій кут.
- 3°. Периметр трикутника дорівнює 50 м. Знайдіть довжини сторін трикутника, якщо одна з них довша за другу на 8 м, а за третю — на 5 м.
- 4°. У трикутнику KPT висота PM є водночас і бісектрисою. Доведіть, що $\triangle KPM = \triangle TPM$.

Варіант 3

- 1°. Накресліть тупокутний трикутник і проведіть його медіани.
- 2°. Два кути трикутника дорівнюють 87° і 56° . Знайдіть третій кут.
- 3°. Периметр трикутника дорівнює 62 см. Знайдіть довжини його сторін, якщо одна з них довша за другу в 2 рази, а за третю — на 8 см.
- 4°. У трикутнику ABC кути A і C — рівні, а BM — висота. Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle CBM$.

Варіант 4

- 1°. Накресліть довільний трикутник і проведіть усі його висоти.
- 2°. Два кути трикутника дорівнюють 130° і 25° . Знайдіть третій кут.
- 3°. Периметр трикутника дорівнює 85 м. Знайдіть довжини його сторін, якщо одна з них коротша від другої у 2 рази, а від третьої — на 1 м.
- 4°. У трикутнику KPT висота PH є водночас і медіаною. Доведіть, що $\triangle KPH = \triangle TPH$.

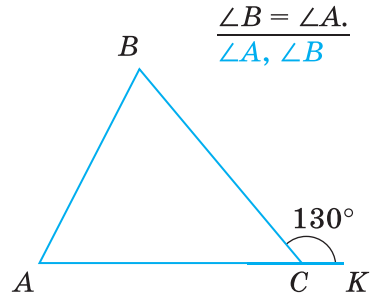
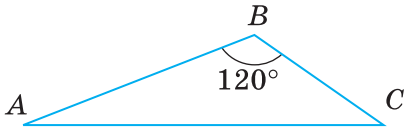
ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

Б

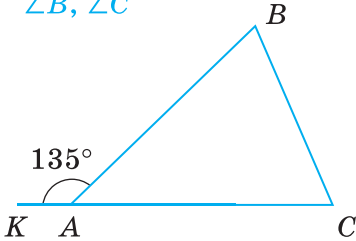
1

$$\frac{\angle A = \frac{2}{3} \angle C}{\angle A, \angle C}$$

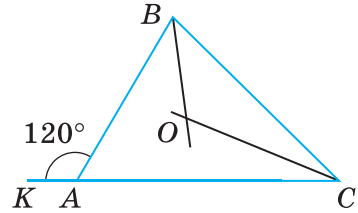


2

$$\frac{\angle B : \angle C = 4 : 5}{\angle B, \angle C}$$

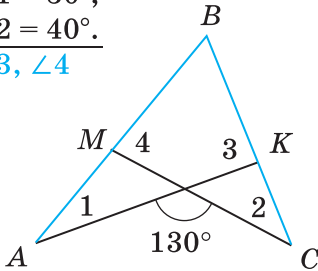


$$\frac{BO, CO - \text{бісектриси.}}{\angle BOC}$$

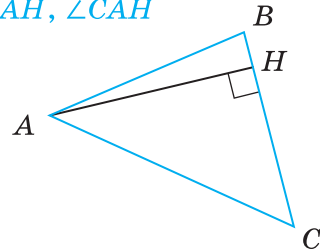


3

$$\frac{\angle 1 = 30^\circ, \angle 2 = 40^\circ}{\angle 3, \angle 4}$$

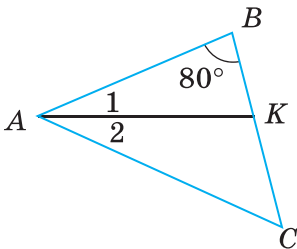


$$\frac{\angle CAB = \angle C = 50^\circ}{\angle BAH, \angle CAH}$$

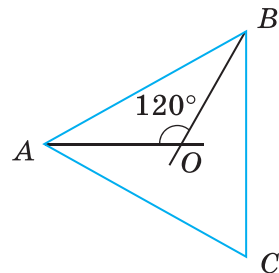


4

$$\frac{\angle A = \angle C, \angle 1 = \angle 2}{\angle AKC}$$



$$\frac{AO, BO - \text{бісектриси.}}{\angle C}$$



Запитання і завдання для самоконтролю

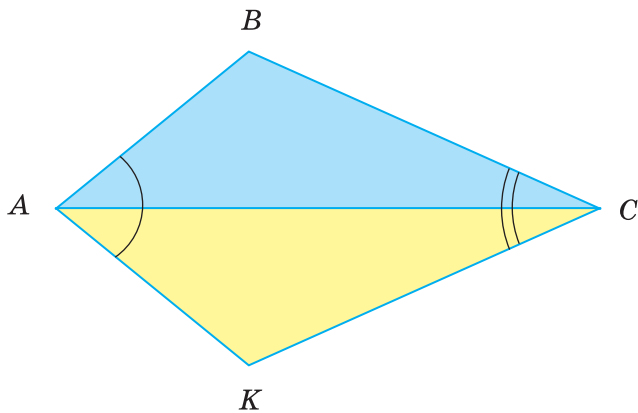
1. Що таке трикутник?
2. Назвіть елементи трикутника.
3. Наведіть приклади предметів довкілля, що мають форму рівних геометричних фігур.
4. Якими бувають трикутники?
5. Сформулюйте означення прямокутного трикутника.
6. Сформулюйте означення тупокутного трикутника.
7. Сформулюйте означення гострокутного трикутника.
8. Що таке висота трикутника?
9. Сформулюйте означення медіани трикутника.
10. Що таке бісектриса трикутника?
11. Чим відрізняється бісектриса трикутника від бісектриси кута?
12. Сформулюйте теорему про суму кутів трикутника.
13. Доведіть теорему про суму кутів трикутника.
14. Що таке зовнішній кут трикутника?
15. Сформулюйте теорему про зовнішній кут трикутника.
16. Доведіть теорему про зовнішній кут трикутника.
17. Чи правильно, що зовнішній кут трикутника більший за кожний внутрішній кут, не суміжний із ним?
18. Чому дорівнює сума кутів чотирикутника?
19. Які фігури називають рівними?
20. Яким знаком відношення позначають рівність фігур?
21. Наведіть приклади предметів довкілля, що мають форму рівних геометричних фігур.
22. Сформулюйте властивості рівності фігур.
23. Які трикутники називають рівними?
24. Сформулюйте ознаку рівності двох кіл.
25. Сформулюйте першу ознаку рівності трикутників.
26. Сформулюйте другу ознаку рівності трикутників.
27. Сформулюйте і доведіть ознаку рівності рівносторонніх трикутників.
28. Доведіть ознаку рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними.
29. Доведіть ознаку рівності трикутників за стороною і прилеглими до неї кутами.

Тестові завдання 3

1. Один із кутів трикутника дорівнює 40° , а другий — на 20° більший. Третій кут трикутника дорівнює:	а) 100° ; б) 80° ; в) 60° ; г) 120° .
2. Зовнішні кути трикутника дорівнюють 100° і 120° . Знайдіть внутрішній кут при третій вершині.	а) 60° ; б) 90° ; в) 40° ; г) 80° .
3. Кути трикутника пропорційні числам 2, 3 і 5. Знайдіть найменший кут трикутника.	а) 30° ; б) 54° ; в) 28° ; г) 36° .
4. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Який знак слід поставити замість * в записі: $\angle A * \angle A_1$?	а) $<$; б) $=$; в) $>$; г) \neq .
5. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Який знак слід поставити замість * в записі: $AB * A_1B_1$?	а) $<$; б) $>$; в) $=$; г) \neq .
6. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 5$ см, $AC = 7$ см. Знайдіть BC , якщо $P_{\triangle A_1B_1C_1} = 21$ см.	а) 11 см; б) 19 см; в) 10 см; г) 9 см.
7. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Знайдіть $\angle C_1$.	а) 50° ; б) 90° ; в) 30° ; г) 70° .
Для виконання завдань 8–10 скористайтесь умовою: відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = BO$ і $CO = DO$.	
8. Який трикутник дорівнює трикутнику AOC ?	а) $\triangle AOD$; б) $\triangle BOD$; в) $\triangle COB$; г) $\triangle CBD$.
9. Якому куту дорівнює кут OAC ?	а) $\angle ODB$; б) $\angle OBD$; в) $\angle BOD$; г) $\angle AOD$.
10. Яке з тверджень — хибне?	а) $AC = BD$; б) $AC \parallel BD$; в) $AB \parallel CD$; г) $AO = OB$.

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

- 1°. Намалюйте довільний трикутник і проведіть до його більшої сторони медіану, бісектрису і висоту.
- 2°. Два кути трикутника дорівнюють 95° і 43° . Знайдіть міру третього кута трикутника.
- 3°. Знайдіть кути трикутника ABC , якщо він дорівнює трикутнику KPT , у якого $\angle K = 70^\circ$, $\angle P = 50^\circ$.
- 4°. Знайдіть периметр трикутника KLM , якщо $\triangle KLM = \triangle ABC$ і $AB = 5$ см, $BC = 3$ см, $AC = 4$ см.
- 5°. BK — висота трикутника ABC . Знайдіть AC , якщо $AK = 5$ см, $KC = 11$ см, $\angle A = 120^\circ$.
- 6°. Відрізки AB і KP перетинаються в точці O так, що $OA = OB$, $OK = OP$. Доведіть, що $\triangle AOP = \triangle BOK$.
- 7°. Зображені на малюнку 165 трикутники ABC і AKC такі, що $\angle BAC = \angle KAC$ і $\angle BCA = \angle KCA$. Доведіть, що $AB = AK$.



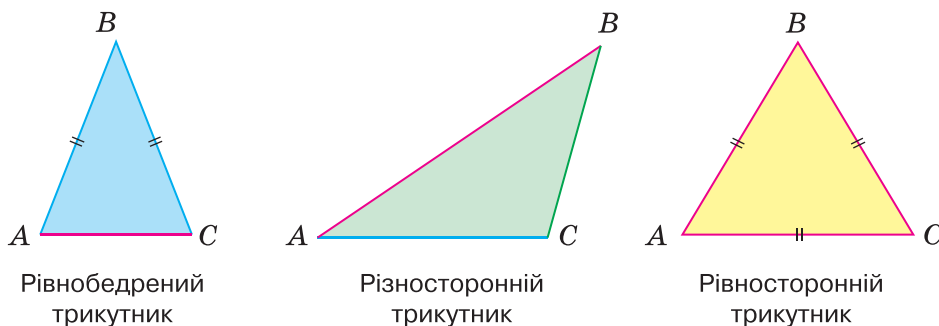
Мал. 165

- 8°. Знайдіть кути трикутника, якщо його зовнішні кути пропорційні числам 3, 7 і 8.
- 9°. У трикутнику ABC проведено висоти AP і BH . Доведіть, що $AP = BH$, якщо $PC = HC$.
- 10°. У трикутнику ABC проведено медіани AP і BH . Доведіть, що $\triangle APC = \triangle BHC$, якщо $AC = BC$.

§ 13. РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК

Трикутник називають *рівнобедреним*, якщо в нього дві сторони рівні. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними сторонами*, а третю його сторону — *основою*.

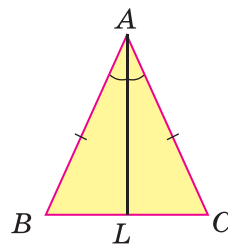
Трикутник, який не є рівнобедреним, називають *різностороннім*. Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають *рівностороннім*. Рівносторонній трикутник є окремим видом рівнобедреного трикутника (мал. 166).



Мал. 166

Теорема 12. У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.

Доведення. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з основою BC (мал. 167). Проведемо бісектрису AL , яка розіб'є його на трикутники ABL і ACL . Оскільки $AB = AC$, AL — спільна сторона, $\angle BAL = \angle CAL$, то за двома сторонами й кутом між ними $\triangle ABL = \triangle ACL$. Із рівності цих трикутників випливає, що $\angle B = \angle C$, тобто кути при основі трикутника ABC — рівні. \blacktriangle



Мал. 167

Теорема 13. У рівнобедреному трикутнику бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.

Доведення. Нехай ABC — рівнобедрений трикутник з основою BC (мал. 167). Проведемо бісектрису AL , яка розіб'є його на трикутники ABL і ACL . Оскільки $AB = AC$, AL — спільна сторона, $\angle BAL = \angle CAL$, то за двома сторонами й кутом між ними $\triangle ABL = \triangle ACL$. Із рівності цих трикутників випливає, що:

а) $BL = CL$, тобто AL — медіана трикутника ABC ;

б) $\angle ALB = \angle ALC = 90^\circ$, тобто AL — висота трикутника ABC . \blacktriangle

Для того щоб з усіх трикутників можна було відшукати рівнобедрені, використовують **ознаки рівнобедреного трикутника**, наведені в теоремах 14–17.

Теорема 14. Якщо в трикутнику два кути рівні, то він — рівнобедрений.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC $\angle B = \angle C$ (див. мал. 168). Доведемо, що $AB = AC$. Проведемо бісектрису AL . Вона розбиває даний трикутник на два: $\triangle ABL$ і $\triangle ACL$. У них $\angle B = \angle C$ і $\angle BAL = \angle CAL$, тому $\angle ALB = \angle ALC$. За стороною AL і прилеглими до неї кутами $\triangle BAL = \triangle CAL$. Отже, $AB = AC$. \blacktriangle

Із теорем 12 і 14 випливає такий наслідок.

Наслідок. У трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути, а проти рівних кутів — рівні сторони.

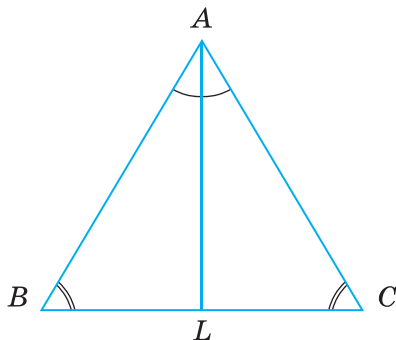
Теорема 15. Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник — рівнобедрений.

Доведення. Нехай у $\triangle ABC$ відрізок AL — медіана і висота (див. мал. 168). Доведемо, що цей трикутник — рівнобедрений.

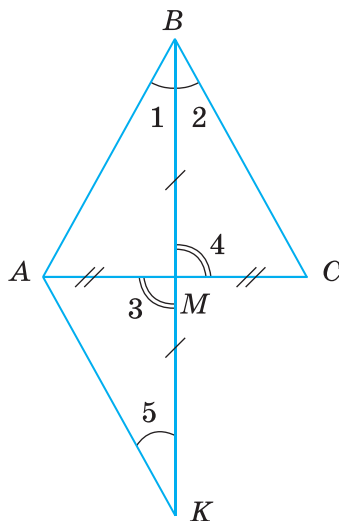
Розглянемо $\triangle ABL$ і $\triangle ACL$.

Якщо AL — медіана, то $BL = CL$. Якщо AL — висота, то $\angle ALB = \angle ALC = 90^\circ$. AL — спільна сторона цих трикутників. Тоді $\triangle ABL = \triangle ACL$ за двома сторонами й кутом між ними.

Із рівності цих трикутників випливає, що $AB = AC$. Отже, $\triangle ABC$ — рівнобедрений. \blacktriangle



Мал. 168



Мал. 169

Теорема 16. Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник — рівнобедрений.

Доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 17. Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник — рівнобедрений.

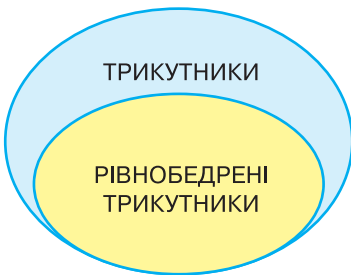
Доведення. Нехай BM — медіана і бісектриса трикутника ABC (мал.169), тобто $AM = MC$ і $\angle 1 = \angle 2$. Доведемо, що $\triangle ABC$ — рівнобедрений.

На промені BM відкладемо відрізок MK , який дорівнює відрізку BM . Розглянемо трикутники AMK і $СMB$. Ці трикутники рівні за двома сторонами й кутом між ними, бо $AM = CM$ за умовою, $MK = MB$ за побудовою, $\angle 3 = \angle 4$ як вертикальні. Із рівності цих трикутників випливає, що $AK = CB$ і $\angle 5 = \angle 2$. А оскільки $\angle 2 = \angle 1$, то $\angle 5 = \angle 1$. Значить, $\triangle KAB$ — рівнобедрений, тобто $AK = AB$. Але за доведеним $AK = CB$. Тоді $AB = CB$. Отже, $\triangle ABC$ — рівнобедрений. \blacktriangle

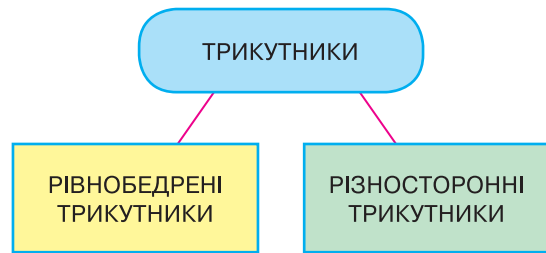
Для допитливих

Як співвідносяться між собою *трикутники* і *рівнобедрені трикутники*? Рівнобедрені трикутники становлять тільки частину всіх трикутників. Говорять, що поняття *трикутники* ширше, ніж поняття *рівнобедрені трикутники*. Такі співвідношення прийнято зображати наочно діаграмами Ейлера (мал. 170).

Трикутники, які не є рівнобедреними, називають *різносторонніми* трикутниками. Отже, загальне поняття *трикутники* можна розбити на два класи: рівнобедрені трикутники і різносторонні трикутники (мал. 171). Рівносторонні трикутники — окремий вид рівнобедрених трикутників.



Мал. 170



Мал. 171

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Який трикутник називають рівнобедреним?
2. Як називають сторони рівнобедреного трикутника?
3. Сформулюйте і доведіть властивості рівнобедреного трикутника.
4. Сформулюйте і доведіть ознаки рівнобедреного трикутника.
5. Який трикутник називають рівностороннім?
6. Як співвідносяться поняття *трикутники* і *рівнобедрені трикутники*?

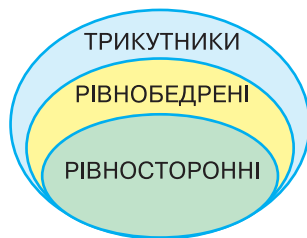
Виконаємо разом

1. Дві сторони рівнобедреного трикутника мають довжини 2 см і 6 см. Знайдіть довжину третьої його сторони.

✓ Основа даного трикутника не може дорівнювати 6 см, бо $2\text{ см} + 2\text{ см} < 6\text{ см}$. Отже, йдеться про трикутник з основою 2 см і бічними сторонами по 6 см. ▲

2. Покажіть на діаграмі співвідношення між поняттями: трикутники, рівнобедрені трикутники і рівносторонні трикутники.

✓ Рівносторонній трикутник є водночас і рівнобедреним трикутником. Отже, співвідношення між названими видами трикутників можна зобразити, як на малюнку 172. ▲



Мал. 172

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

380. Доведіть, що кут при основі рівнобедреного трикутника не може бути прямим.
381. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120° . Знайдіть кут при основі.
382. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при його вершині дорівнює куту при основі.
383. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 70° . Знайдіть кут при вершині.
384. Сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 5 см і 10 см. Яка з них — основа?
385. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, якщо його основа дорівнює 10 см, а бічна сторона — 20 см.

А

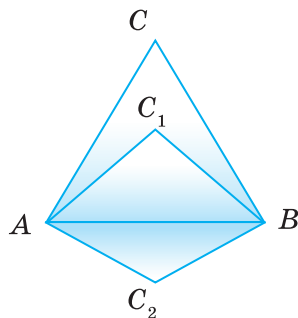
386. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 15 см, а бічна сторона — 26 см. Знайдіть периметр трикутника.
387. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а бічна сторона — 5 см. Знайдіть основу.
388. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо: а) кут при вершині трикутника дорівнює 80° ; б) кут при основі трикутника дорівнює 30° .
389. Знайдіть: а) периметр рівнобедреного трикутника з основою a і бічною стороною b ; б) основу рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює $2p$, а бічна сторона — b ; в) бічну сторону рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює $2p$, а основа — a .

- 390.** Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо:
- а) один із них на 30° більший за інший;
 - б) один із них удвічі більший за інший.
- Розгляньте два варіанти.
- 391.** Доведіть, що якщо який-небудь кут рівнобедреного трикутника дорівнює 60° , то цей трикутник рівносторонній.
- 392.** Доведіть, що в рівносторонньому трикутнику всі кути — рівні.
- 393.** Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 80° . Знайдіть кут між:
- а) основою і бісектрисою, проведеною до бічної сторони;
 - б) бічною стороною і бісектрисою, проведеною до неї;
 - в) основою і висотою, проведеною до бічної сторони.
- 394.** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 50 см. Знайдіть його сторони, якщо вони пропорційні числам:
- а) 1, 2 і 2;
 - б) 3, 3 і 4.
- 395.** Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 30° . Знайдіть кут між висотами, проведеними до бічних сторін.
- 396.** O — точка перетину бісектрис AL і CP рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$). Доведіть, що $\triangle AOC$ — рівнобедрений. Знайдіть $\angle AOC$, якщо $\angle B = 40^\circ$.
- 397.** M — точка перетину медіан AF і CK рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$). Доведіть, що $AF = CK$ і $AM = MC$.
- 398.** У трикутнику ABC $AB = BC$, $\angle B = 36^\circ$, AK — бісектриса. Доведіть, що $BK = KA = AC$.

Б

- 399.** У трикутнику ABC медіана BD є його висотою. Знайдіть довжину BD , якщо периметри трикутників ABD і ABC дорівнюють відповідно 40 см і 50 см.
- 400.** Доведіть, що в кожному рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені до бічних сторін, — рівні.
- 401.** Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці M так, що $AM = MD$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle DCB$.
- 402.** Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо одна з них менша від периметра на 30 см, а друга — на 40 см.
- 403.** Доведіть, що сума двох нерівних кутів рівнобедреного трикутника перевищує 90° .
- 404.** Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо:
- а) сума двох із них дорівнює 60° ;
 - б) сума двох із них дорівнює 150° ;

- в) один з його зовнішніх кутів дорівнює 15° ;
 г) один з його зовнішніх кутів дорівнює 115° .
405. Сформулюйте і доведіть ознаки рівності рівнобедрених трикутників:
 а) за основою і прилеглим кутом;
 б) за основою і протилежним кутом;
 в) за бічною стороною і кутом при основі.
406. Пряма, перпендикулярна до бісектриси кута B , перетинає його сторони в точках A і C . Визначте вид трикутника ABC та знайдіть його кути, якщо: а) $\angle B = 80^\circ$; б) $\angle B = 60^\circ$.
407. На стороні BC трикутника ABC взято точку M так, що $\angle BAM = 60^\circ$, $\angle AMC = 120^\circ$. Знайдіть периметр трикутника ABM , якщо $AM = a$. Доведіть, що $AM \perp BL$, де BL — бісектриса трикутника ABC .
408. Доведіть, що в рівносторонньому трикутнику:
 а) всі медіани рівні;
 б) всі висоти рівні;
 в) всі бісектриси рівні.
409. Покажіть, що рівносторонній трикутник можна розрізати на 4 рівні рівносторонні трикутники.
410. Як можна розрізати рівносторонній трикутник на три рівні рівнобедрені трикутники?
411. Як розташовані вершини всіх рівнобедрених трикутників, що мають спільну основу (мал. 173)?
412. Приклавши один до одного два рівнобедрені трикутники, кожен з яких має кут 100° , утворили чотирикутник. Визначте кути чотирикутника.



Мал. 173

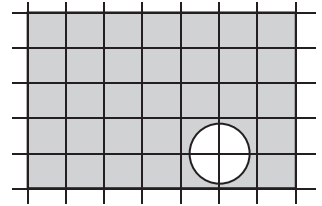
Практичне завдання

413. Виріжте з паперу гострокутний, прямокутний і тупокутний рівнобедрені трикутники. Перегинаючи їх по бісектрисі кута при вершині, повторіть доведення теорем 12 та 13.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

414. Знайдіть міру кута, якщо його бісектриса зі стороною утворює кут 48° .
415. Знайдіть міри двох суміжних кутів, якщо вони відносяться як:
 а) $1 : 2$; б) $2 : 3$.
416. Знайдіть периметр прямокутника, якщо одна з його сторін дорівнює 5 см, а площа — 20 см^2 .

417. Середнє арифметичне всіх сторін трикутника дорівнює 10 дм. Чому дорівнює його периметр?
418. Перемалюйте в зошит фігуру, що на малюнку 174, і проведіть пряму так, щоб вона розрізала зафарбовану фігуру на дві частини з рівними площами.



Мал. 174

§ 14. ТРЕТЯ ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

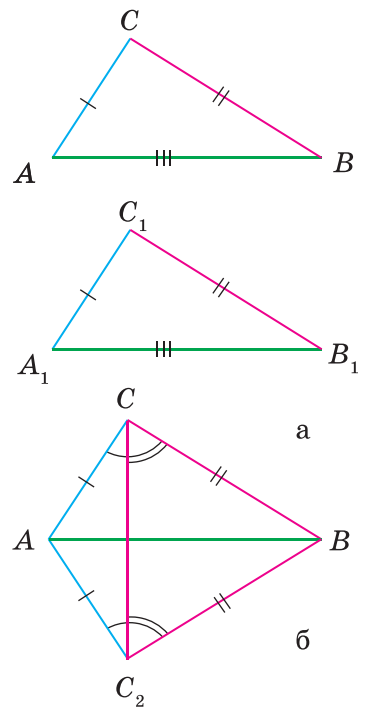
Вам уже відомі дві ознаки рівності трикутників. Знаючи властивості рівнобедреного трикутника, можна довести ще одну ознаку.

Теорема 18 (третя ознака рівності трикутників).
Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники — рівні.

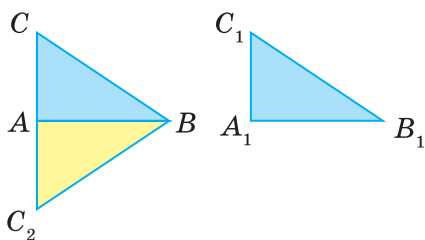
Доведення*. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ і $BC = B_1C_1$ (мал. 175, а). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Прикладемо трикутник $A_1B_1C_1$ до трикутника ABC так, щоб вершина A_1 сумістилася з вершиною A , B_1 — з B , а C_1 і C виявилися по різні боки від прямої AB . Тоді $\triangle A_1B_1C_1$ займе положення трикутника ABC_2 (мал. 175, б). Провівши відрізок CC_2 , одержимо рівнобедрені трикутники SAC_2 і SBC_2 , бо $AC = AC_2$ і $BC = BC_2$. У цих трикутниках кути при основах рівні: $\angle ACC_2 = \angle AC_2C$, $\angle BCC_2 = \angle BC_2C$. Отже, рівні також кути ACB і AC_2B . Тому за двома сторонами й кутом між ними $\triangle ABC = \triangle ABC_2$. За побудовою $\triangle ABC_2 = \triangle A_1B_1C_1$. Таким чином, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, що й треба було довести.

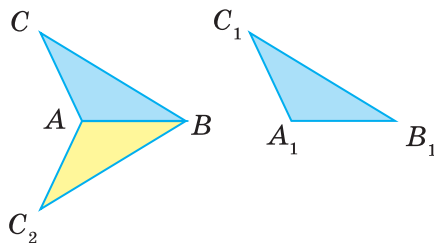
Зверніть увагу! Ми розглянули випадок, коли відрізки AB і CC_2 перетинаються. Для випадків, коли ці відрізки не перетинаються, доведення теореми треба дещо змінити. Пропонуємо розглянути ці випадки самостійно, скориставшись малюнками 176 і 177.



Мал. 175

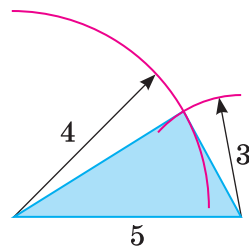


Мал. 176



Мал. 177

Третя ознака рівності трикутників стверджує, що трьома сторонами трикутник визначається однозначно. Уявімо, що кожний семикласник побудував у зошиті трикутник, сторони якого дорівнюють, наприклад, 3 см, 4 см і 5 см. Один спочатку відклав найбільший відрізок, а з його кінців проводив дуги радіусів 3 см і 4 см (мал. 178). Другий спочатку відклав найменший із даних відрізків і т. д. Хоч будували вони різними способами, у результаті всі одержали рівні трикутники.



Мал. 178

Пригадавши й дві інші ознаки рівності трикутників, можна зробити такий висновок.

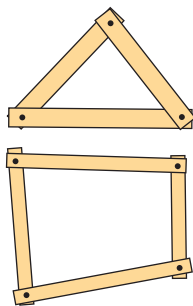
Трикутник однозначно визначається (задається):

- 1) двома сторонами й кутом між ними;
- 2) стороною і двома прилеглими кутами;
- 3) трьома сторонами.

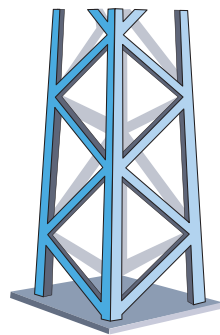
Зверніть увагу! У пункті 2 йдеться про кути, сума яких менша від 180° , а в пункті 3 — про три відрізки, кожний з яких менший від суми двох інших.

Для допитливих

Третя ознака рівності трикутників засвідчує, що трикутник — *фігура жорстка*. Щоб краще зрозуміти, про що йдеться, уявіть збиті цвяхами з окремих планок трикутник і чотирикутник (мал. 179). Такий чотирикутник неважко деформувати: змінити кути, не змінюючи довжин сторін. Трикутник так деформувати не можна. Три сторони трикутника однозначно визначають його кути! Так само, знаючи дві сторони трикутника й кут між ними, можна однозначно визначити третю сторону і два інші кути; знаючи сторону і два прилеглі



Мал. 179



Мал. 180

кути, можна визначити дві інші його сторони і т. д. Як це робити, дізнаєтеся в старших класах.

Знаючи, що з усіх багатокутників тільки трикутник — фігура жорстка, ажурні конструкції виготовляють так, щоб вони мали якомога більше трикутників (мал. 180).

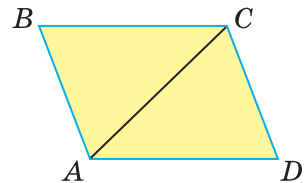
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте третю ознаку рівності трикутників.
2. Сформулюйте першу і другу ознаки рівності трикутників.
3. Як ви розумієте вислів «трикутник визначається трьома його сторонами»?
4. Якими елементами визначається трикутник?
5. Як слід розуміти, що «трикутник — фігура жорстка»?

Виконаємо разом

1. Доведіть, що якщо в чотирикутнику протилежні сторони рівні, то і протилежні кути — рівні.

✎ Нехай у чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$ і $BC = AD$ (мал. 181). Проведемо відрізок AC . У результаті утворюються два трикутники: ABC і CDA . Вони рівні за трьома сторонами, бо $AB = CD$ і $BC = AD$, а сторона AC у них спільна. Отже, $\triangle ABC = \triangle CDA$. А в рівних трикутниках проти рівних сторін лежать рівні кути. Тому $\angle B = \angle D$.

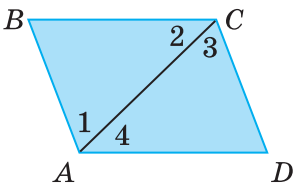


Мал. 181

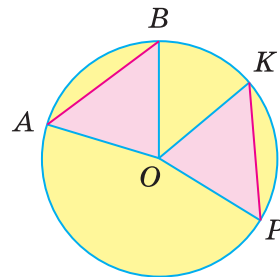
Рівність кутів BAD і BCD можна довести двома способами: або показати, що кожний із них складається з двох рівних кутів: $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 4$ (мал. 182), або — провівши відрізок BD . ▲

2. На колі із центром O позначено точки A, B, K і P такі, що $AB = KP$ (мал. 183). Доведіть, що $\triangle AOB = \triangle KOP$.

✎ Провівши в дані точки радіуси, одержимо трикутники AOB і KOP . Вони рівні за трьома сторонами, бо $AB = KP$ за умовою і $OA = OB = OK = OP$ (як радіуси). Отже, $\triangle AOB = \triangle KOP$. ▲



Мал. 182



Мал. 183

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

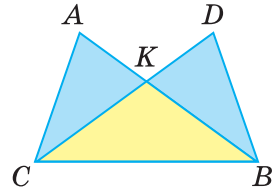
419. $\triangle ABC = \triangle KPT$. Знайдіть периметр трикутника KPT , якщо:

- а) кожна сторона трикутника ABC дорівнює 5 см;
 б) $AB = BC = 3$ дм, $AC = 4$ дм;

420. На малюнку 184 $AB = DC$ і $AC = DB$.

Доведіть, що:

- а) $\angle A = \angle D$;
 б) $BK = CK$;
 в) $\angle ACK = \angle DBK$.



Мал. 184

А

421. Точка O рівновіддалена від вершин A , B і C рівностороннього трикутника. Доведіть, що:

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC;$$

$$\angle OAB = \angle OBC = \angle OCA.$$

422. Два рівні різносторонні трикутники ABC і KPT можна сумістити тільки одним способом. Два рівні рівнобедрені трикутники — двома способами, суміщаючи сторону AB із KP або із TP . Скількома способами можна сумістити два рівні рівносторонні трикутники?

423. Якщо відрізки AO і OB рівні, а точка X рівновіддалена від точок A і B , то точка X лежить на прямій, яка ділить $\angle AOB$ навпіл. Доведіть.

424. Якщо M — довільна точка висоти BH трикутника ABC , у якому $AB = BC$, то : а) $MA = MC$; б) $\triangle ABM = \triangle CBM$; в) $\triangle AMH = \triangle CMH$. Доведіть.

425. Прикладаючи два рівні трикутники з кутами 30° і 70° рівними сторонами, можна утворити кілька різних чотирикутників. Зобразіть їх на малюнку. Визначте кути утворених чотирикутників.

426. Доведіть, що якщо основа і бічна сторона одного рівнобедреного трикутника дорівнюють відповідно основі і бічній стороні іншого рівнобедреного трикутника, то такі трикутники рівні.

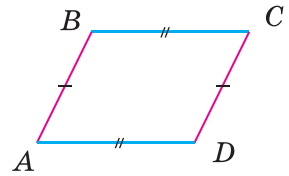
427. Доведіть, що якщо сторона одного рівностороннього трикутника дорівнює стороні іншого рівностороннього трикутника, то такі трикутники рівні.

428. На колі із центром O позначено точки A , B і C так, що $AB = BC = CA$. Доведіть, що:

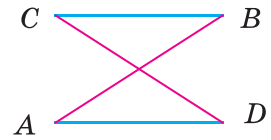
- а) $\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle OCA$;
 б) $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$;
 в) $\angle OAB = \angle OBC = \angle OCA = 30^\circ$.

Б

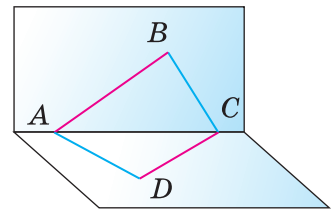
- 429.** На колі із центром O позначено точки A , B і C так, що $AB = BC = CA$, а AM — діаметр. Доведіть, що:
- $BM = CM$;
 - $\angle OBM = \angle OCM$.
- 430.** Доведіть рівність двох трикутників за двома даними сторонами й медіаною, проведеною до однієї з них.
- 431.** Замкнена ламана $ABCD$ така, що $AB = CD$ і $AD = BC$. Доведіть, що $\angle A = \angle C$ і $\angle B = \angle D$. Розгляньте два випадки (мал. 185, 186).
- 432.** Спробуйте узагальнити задачу 431 на випадок, коли дана ламана не лежить в одній площині (мал. 187).
- 433.** Рівнобедрені трикутники APC і ABC мають спільну основу AC . Пряма PB перетинає її в точці O . Доведіть, що:
- $\angle PAB = \angle PCB$;
 - $AO = OC$;
 - $AC \perp BP$.
- Розгляньте випадки, коли точки P і B лежать по одну і по різні боки від AC .
- 434.** Чи з будь-яких чотирьох рівних трикутників можна скласти один трикутник? Покажіть на малюнку.
- 435.** Рівносторонніми трикутниками, мов паркетинами, можна замостити всю площину (мал. 188). Чи можна замостити площину рівними нерівносторонніми трикутниками? Якщо можна — покажіть на малюнку.



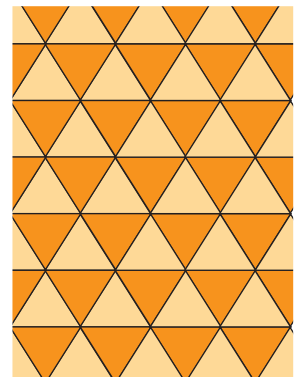
Мал. 185



Мал. 186



Мал. 187



Мал. 188

Практичне завдання

- 436.** Спробуйте скласти 4 рівні трикутники за допомогою восьми цілих сірників. А чи можна скласти 4 рівні трикутники за допомогою шести цілих сірників?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

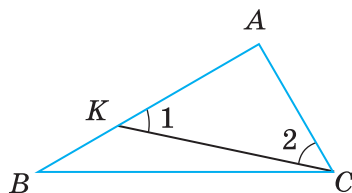
437. Знайдіть кути трикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3 і 4.
 438. Знайдіть середнє арифметичне кутів трикутника.
 439. Середнє арифметичне сторін трикутника дорівнює 20 см. Знайдіть його периметр.
 440. Півпериметр трикутника дорівнює p . Знайдіть середнє арифметичне його сторін.
 441. Доведіть, що сума кутів чотирикутника дорівнює 360° . Знайдіть середнє арифметичне його кутів.

§ 15. НЕРІВНОСТІ ТРИКУТНИКА

Ви вже знаєте, що кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін. Щоб довести це твердження як теорему, спочатку розглянемо іншу теорему.

Теорема 19. У кожному трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута — більша сторона.

Доведення. 1) Нехай у трикутнику ABC сторона AB більша за AC . Покажемо, що кут C більший за кут B (мал. 189). Відкладемо на стороні AB відрізок AK , що дорівнює AC . Оскільки відкладений відрізок коротший від AB , то точка K лежить між точками A і B , а $\angle ACK$ є частиною кута ACB . Кути AKC і ACK рівні, тобто $\angle 1 = \angle 2$, бо $\triangle KAC$ — рівнобедрений. $\angle 1$ більший за $\angle B$, бо є зовнішнім для трикутника BKC . Тоді, весь кут C більший за $\angle 2$, а $\angle 2$ більший за $\angle B$. Цим доведено, що якщо в трикутнику $AB > AC$, то $\angle C > \angle B$.



Мал. 189

2) Нехай у трикутнику ABC кут C більший за кут B .

Доведемо, що тоді $AB > AC$.

Сторони AB і AC не можуть дорівнювати одна одній, бо інакше даний трикутник був би рівнобедреним і один з його кутів при основі не міг би бути більшим за інший.

Не може сторона AB бути і меншою за сторону AC , бо тоді $\angle C$ був би меншим за $\angle B$. А оскільки сторона AB не дорівнює стороні AC і не менша від AC , то вона більша за AC . ▲

Теорема 20. Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.

Доведення. Розглянемо довільний $\triangle ABC$ і покажемо, що $AB < BC + CA$ (мал. 190).

Для доведення відкладемо на продовженні сторони AC відрізок CP , що дорівнює стороні BC , і розглянемо трикутник ABP . Кут CBP і CPB — рівні, бо $CB = CP$. Кут ABP — більший за $\angle P$.

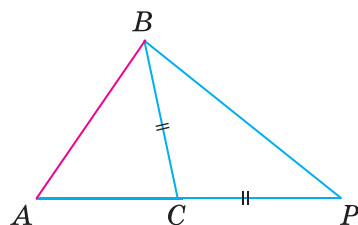
А оскільки проти більшого кута лежить більша сторона, то $AB < AP$. Врахувавши, що $AP = AC + CP = AC + CB$, маємо:
 $AB < AC + CB$.

Так само можна показати, що $BC < CA + AB$, $AC < CB + BA$. \blacktriangle

З доведеної теореми випливає таке твердження.

Якщо точки A, B, C не лежать на одній прямій, то правильні нерівності: $AB < BC + CA$, $BC < CA + AB$, $AC < CB + BA$.

Кожну із цих трьох нерівностей називають *нерівністю трикутника*.



Мал. 190

Для допитливих

Якщо точки A, B, C лежать на одній прямій, то одна з наведених вище нерівностей перетворюється в рівність, а дві інші залишаються правильними. Наприклад, якщо точка C лежить між точками A і B (мал. 191), то правильні такі співвідношення:

$$AB = BC + CA, BC < CA + AB, CA < AB + BC.$$

Враховуючи все сказане вище, можна зробити такий висновок.

Хоч би як були розташовані три точки A, B і C , завжди: $AB \leq BC + CA$, $BC \leq CA + AB$, $CA \leq AB + BC$.

Із трьох відстаней між будь-якими трьома точками кожна не перевищує суми двох інших.



Мал. 191

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте і доведіть теорему про залежність між сторонами і кутами трикутника.
2. Сформулюйте і доведіть теорему про нерівності трикутника.
3. Сформулюйте нерівності трикутника XYZ .
4. Що означає вислів «точка B лежить між точками A і C »?
5. Як пов'язані між собою відстані між точками A, B і C , якщо точка B лежить між точками A і C ?
6. Сформулюйте властивості відстаней між довільними точками A, B і C .

Виконаємо разом

1. Доведіть, що відрізок, який сполучає вершину рівнобедреного трикутника з довільною внутрішньою точкою основи, коротший за бічну сторону трикутника.

▼ Нехай AC — основа довільного рівнобедреного трикутника ABC , а K — довільна внутрішня точка його основи (мал. 192). Покажемо, що $BK < AB$.

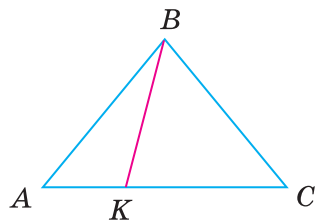
Кут AKB — зовнішній у трикутнику KBC , тому $\angle AKB > \angle C$. Оскільки $\angle C = \angle A$, то $\angle AKB > \angle A$. Отже, у $\triangle ABK$ сторона BK лежить проти кута, який менший від кута, проти якого лежить сторона AB . Тому $BK < AB$. ▲

2. Пряма KP , що перетинає $\triangle ABC$, паралельна стороні AC (мал. 193).

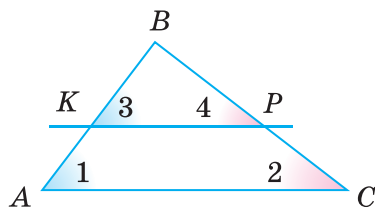
Яка зі сторін AB чи BC даного трикутника більша, якщо $BK < BP$?

▼ Пронумеруємо деякі кути, як показано на малюнку 193. Відповідні кути при паралельних прямих і січній рівні, тому $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 4$. Оскільки в трикутнику BKP $BK < BP$, то $\angle 4 < \angle 3$, тоді і $\angle 2 < \angle 1$.

Отже, $AB < BC$. ▲



Мал. 192



Мал. 193

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

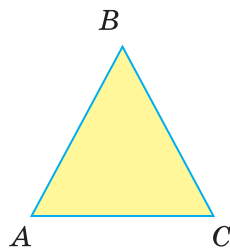
Виконайте усно

442. Дивлячись на малюнок 194, порівняйте сторони AB і BC трикутника ABC , якщо:

- 1) $\angle A < \angle C$; 4) $\angle A \leq \angle C$;
- 2) $\angle A > \angle C$; 5) $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 70^\circ$;
- 3) $\angle A = \angle C$; 6) $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 40^\circ$.

443. Доведіть, що коли кожену сторону рівнобедреного трикутника збільшити, наприклад, на 1 м, то утворений трикутник також буде рівнобедреним.

444. Чи можна кожний кут трикутника збільшити, наприклад, на 10° ?



Мал. 194

А

445. Яка зі сторін трикутника ABC — найбільша, а яка — найменша, якщо:

- 1) $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 60^\circ$;
- 2) $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 100^\circ$;
- 3) $\angle B = 75^\circ$, $\angle C = 90^\circ$?

446. Який кут трикутника ABC — найбільший, а який — найменший, якщо:
- 1) $AB = 3$ м, $BC = 4$ м, $AC = 5$ м;
 - 2) $AB - BC = 2$ м, $BC - AC = 1$ м?
447. Чи може основа рівнобедреного трикутника бути вдвічі довшою за бічну сторону? А вдвічі коротшою?
448. Чи може кожний кут трикутника бути меншим від 60° ?
449. Чи існує трикутник, кожний кут якого більший за 60° ?
450. Доведіть, що висота трикутника не довша за медіану, проведену з тієї самої вершини.

Б

451. Чи може одна сторона трикутника дорівнювати половині його периметра?
452. Доведіть, що кожна сторона трикутника менша від його півпериметра.
453. Чи може сума двох сторін трикутника дорівнювати його півпериметру?
454. Доведіть, що кожна сторона трикутника довша за піврізницю інших його сторін.
455. Чи існує трикутник, одна сторона якого дорівнює різниці двох інших?
456. У трикутнику ABC сторони AB і AC дорівнюють відповідно 5 см і 8 см. Якою завдовжки може бути сторона BC ?
457. Доведіть, що кожна сторона чотирикутника коротша від суми трьох інших його сторін.
458. Дві сторони трикутника дорівнюють 98 см і 28 см. Яким може бути периметр цього трикутника?
459. Сума двох рівних сторін трикутника становить 0,6 периметра. Чи правильно, що кут між рівними сторонами більший за 60° ?

Практичне завдання

460. Для оздоблення серветки квадратної форми досить 140 см мережива (мал. 195). Господиня вирішила розрізати серветку на два рівні трикутники й обшити дві трикутні серветки по периметру. Чи вистачить їй 210 см мережива?



Мал. 195

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

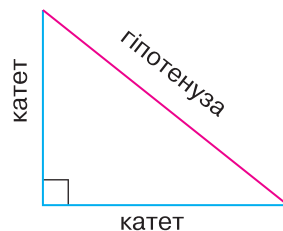
461. Сума двох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 200° . Знайдіть міри двох інших кутів.

462. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC бісектриси кутів A і C перетинаються в точці O . Доведіть, що трикутник AOC також рівнобедрений.
463. Доведіть, що якщо бісектриса зовнішнього кута трикутника паралельна стороні трикутника, то такий трикутник рівнобедрений.
464. Доведіть, що пряма, паралельна будь-якій стороні рівнобедреного трикутника, відтинає від нього рівнобедрений трикутник.

§ 16. ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК

Трикутник називають *прямокутним*, якщо один із його кутів — прямий. Сума двох інших його кутів дорівнює 90° , бо $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Сторона прямокутного трикутника, що лежить проти прямого кута, — це *гіпотенуза*, дві інші його сторони — *катети* (мал. 196). На малюнку прямий кут іноді позначають квадратиком. У кожному прямокутному трикутнику гіпотенуза більша від кожного катета.



Мал. 196

Згодом нам будуть потрібні ознаки рівності прямокутних трикутників. З першої і другої ознак рівності трикутників (див. § 12) безпосередньо впливають такі ознаки.

Два прямокутні трикутники рівні, якщо:

- 1) катети одного з них дорівнюють відповідно катетам іншого;
- 2) катет і прилеглий гострий кут одного трикутника дорівнюють відповідно катету і прилеглому гострому куту іншого;
- 3) гіпотенуза і прилеглий кут одного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі й прилеглому куту іншого.

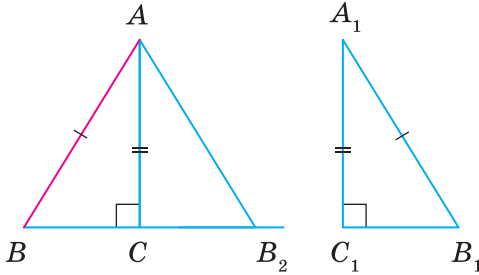
Ще одна ознака рівності прямокутних трикутників потребує доведення.

Теорема 21. Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету й гіпотенузі іншого, то такі трикутники — рівні.

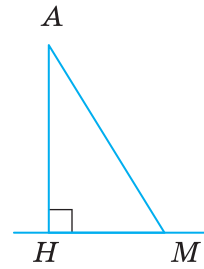
Доведення*. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ кути C і C_1 — прямі й $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (мал. 197). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Прикладемо $\triangle A_1B_1C_1$ до трикутника ABC так, щоб вершина A_1 сумістилась із вершиною A , C_1 — із C , а $\triangle A_1B_1C_1$ зайняв положення трикутника AB_2C . Оскільки кути C і C_1 прямі, то точки B , C і B_2 розмістяться на одній прямій. $\triangle ABB_2$ — рівнобедрений, $\angle B = \angle B_2 = \angle B_1$. Тоді $\angle BAC = \angle B_2AC = \angle A_1$. Отже, у даних трикутниках між відповідно рівними сторонами

$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ лежать рівні кути A і A_1 . За першою ознакою рівності трикутників $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. ▲



Мал. 197



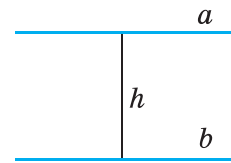
Мал. 198

Уведемо ще кілька важливих понять, пов'язаних з прямокутним трикутником. Якщо $АНМ$ — прямокутний трикутник із прямим кутом $Н$, то його катет $АН$ — *перпендикуляр*, проведений з точки A на пряму $НМ$ (мал. 198).

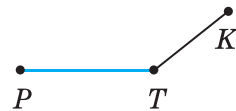
Гіпотенузу $АМ$ називають також *похилою*, проведеною з точки A до прямої $НМ$, а катет $НМ$ — *проекцією* цієї похилої на пряму $НМ$.

Довжину перпендикуляра $АН$ називають також *відстанню від точки A до прямої $НМ$* .

Узагалі, відстань між двома геометричними фігурами — це відстань між їх найближчими точками (якщо такі точки існують). Наприклад, відстань між двома паралельними прямими дорівнює довжині перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї прямої на іншу (мал. 199). А відстань від точки K до відрізка PT , зображених на малюнку 200, дорівнює довжині відрізка KT .



Мал. 199



Мал. 200

Розглянемо деякі властивості прямокутних трикутників.

Теорема 22. У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за катет.

Доведення*. У кожному трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона (див. теорема 19). Оскільки гіпотенуза лежить проти прямого кута, а катет — проти гострого, і прямий кут більший за гострий, то гіпотенуза — більша за катет.

Наслідок. Якщо з однієї точки, яка не лежить на прямій, до цієї прямої проведено перпендикуляр і похилу, то:
1) перпендикуляр менший від похилої;
2) проекція похилої менша від похилої.

Ще одну дуже цікаву властивість прямокутних трикутників наведено в рубриці «Виконаємо разом».

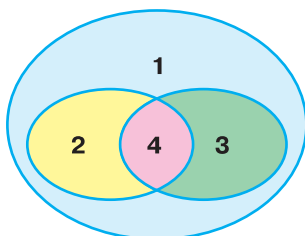
Для допитливих

Прямокутні трикутники становлять тільки частину всіх трикутників. Якщо трикутник не має прямого кута, його називають *непрямокутним* трикутником. Отже, залежно від того, має трикутник прямий кут чи не має, усі трикутники можна поділити на два класи. Схематично цей поділ можна зобразити малюнком 201.

Якщо катети прямокутного трикутника рівні, то він водночас є і рівнобедреним трикутником. Співвідношення між такими видами трикутників можна зобразити, як показано на малюнку 202.



Мал. 201



Мал. 202

- 1 — ТРИКУТНИКИ
- 2 — РІВНОБЕДРЕНІ
- 3 — ПРЯМОКУТНІ
- 4 — ПРЯМОКУТНІ РІВНОБЕДРЕНІ

Прямокутні трикутники в геометрії відіграють важливу роль, бо будь-який трикутник можна розрізати на два прямокутні трикутники, а для кожного прямокутного трикутника справджується славнозвісна теорема Піфагора: **квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів**. Докладніше про теорему Піфагора і про застосування властивостей прямокутних трикутників ви дізнаєтесь у 8 класі.

Запитання і завдання для самоконтролю

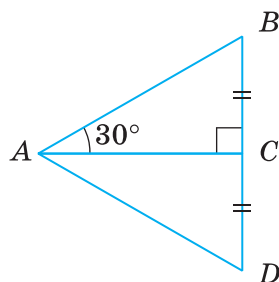
1. Сформулюйте означення прямокутного трикутника.
2. Як називають сторони прямокутного трикутника?
3. Сформулюйте і доведіть ознаки рівності прямокутних трикутників.
4. Що таке перпендикуляр, похила і проекція похилої?
5. Що таке відстань від точки до прямої?
6. Що таке відстань між фігурами?
7. Сформулюйте та доведіть властивості прямокутних трикутників.

Виконаємо разом

Катет прямокутного трикутника, який лежить проти кута 30° , дорівнює половині гіпотенузи. Доведіть.

▼ Нехай у $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$ і $\angle A = 30^\circ$ (мал. 203). Доведемо, що $BC = 0,5 AB$.

На прямій BC відкладемо відрізок CD , що дорівнює стороні CB , і проведемо відрізок AD . За двома катетами $\triangle BCA = \triangle DCA$. Оскільки $\angle BAD = 60^\circ$, то $\angle B = \angle D = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$. Отже, усі кути трикутника ABD дорівнюють 60° кожний. Таку властивість має тільки рівносторонній трикутник. Оскільки $BD = AB$ і $BC = CD$, то $BC = 0,5 AB$. ▲



Мал. 203

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

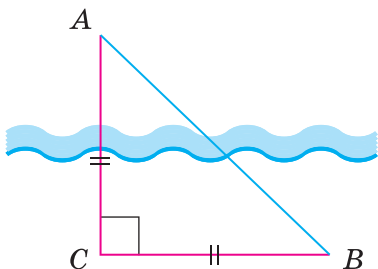
Виконайте усно

465. Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо один із них дорівнює: а) 30° ; б) 45° ; в) 70° .
466. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо один із них більший за інший: а) удвічі; б) у 9 разів; в) на 30° .
467. Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 3 м, 4 м і 5 м. Яка з них — гіпотенуза?
468. Знайдіть кути рівнобедреного прямокутного трикутника.

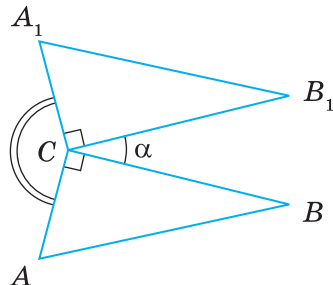
А

469. Один із гострих кутів прямокутного трикутника на 10° більший за інший. Знайдіть ці кути.
470. Кути трикутника пропорційні числам 3, 5 і 8. Доведіть, що цей трикутник прямокутний.
471. Один із кутів трикутника на 30° більший за другий і на 30° менший від третього. Знайдіть кути цього трикутника.
472. Доведіть, що бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника перетинаються під кутом 45° .
473. Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо його висота, проведена з вершини прямого кута, утворює з катетом кут 50° .
474. З точки D , яка лежить на бісектрисі кута B , на сторони кута проведено перпендикуляри DA і DC . Доведіть, що $DA = DC$.
475. Точка B лежить на внутрішньому промені кута A ; BK і BM — рівні перпендикуляри до сторін кута. Доведіть, що AB — бісектриса кута A .
476. Пряма m перетинає відрізок AB в його середині O . Доведіть, що точки A і B рівновіддалені від прямої m .
477. Якщо катет і протилежний кут одного трикутника дорівнюють відповідно катету й протилежному куту іншого, то такі трикутники — рівні. Доведіть.
478. У $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 32$ см. Знайдіть AC .

479. За малюнком 204 поясніть, як можна знайти ширину річки на основі властивостей прямокутного рівнобедреного трикутника.
480. Прямокутні трикутники ABC і A_1B_1C розташовані, як показано на малюнку 205. Знайдіть міру кута ACA_1 , якщо $\angle BCB_1 = \alpha$ (грецька літера «альфа»).



Мал. 204



Мал. 205

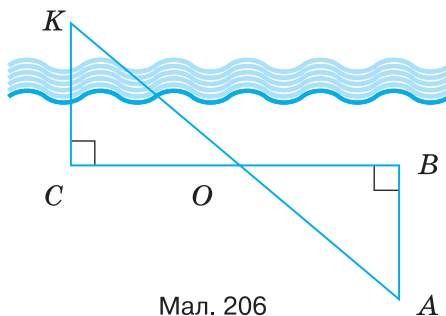
Б

481. Сформулюйте і доведіть твердження, обернене до сформульованого в задачі, розв'язаній на с. 114.
482. У трикутнику ABC $AB = 18$ см, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. Знайдіть:
- відстань від точки A до прямої CB ;
 - проекцію похилої AB на пряму AC .
483. У трикутнику ABC $\angle A = \angle B = 45^\circ$, $AB = 19$ см. Знайдіть:
- відстань від точки C до прямої AB ;
 - проекцію відрізка AC на пряму AB .
484. Знайдіть відстань між паралельними прямими, якщо від січної, яка перетинає їх під кутом 30° , прямі відтинають відрізок завдовжки 54 см.
485. Знайдіть кути прямокутного трикутника, якщо бісектриси двох його кутів перетинаються під кутом 70° .
486. Чи можуть бісектриси двох кутів прямокутного трикутника перетинатися під кутом 40° ?
487. Знаючи, що всі сторони квадрата рівні, а всі кути прямі, доведіть, що квадрат $ABCD$ відрізками AC і BD розбивається на 4 рівні прямокутні рівнобедрені трикутники.
488. Побудуйте на координатній площині трикутники з вершинами $A(0; 1)$, $B(2; 3)$, $C(0; 3)$ і з вершинами $K(1; 0)$, $P(3; 0)$, $T(3; 1)$. Чи рівні ці трикутники?
489. Медіана якого трикутника розбиває його на два менші трикутники, рівні між собою? Укажіть вид утворених трикутників.

490. CM — висота прямокутного рівнобедреного трикутника ABC , проведена до гіпотенузи. Знайдіть AB , якщо $CM = m$.
491. Гіпотенуза AB прямокутного трикутника ABC дорівнює 20 см, $\angle B = 30^\circ$, CK — висота. Знайдіть AK .

Практичне завдання

492. Розгляньте малюнок 206. У такий спосіб давньогрецький учений Фалес Мілетський запропонував вимірювати відстань KC до корабля, який знаходився в морі.



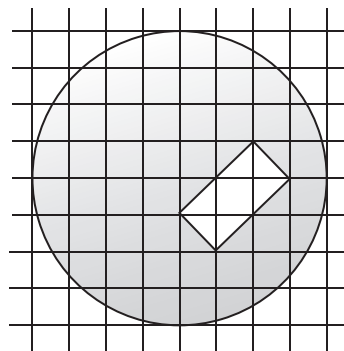
Мал. 206

Робилося це так. Нехай у точці K знаходиться корабель, а в точці C — спостерігач. Від пункту спостереження C намічали напрямок на корабель K і до цього напрямку на березі з точки C відкладали перпендикулярний напрямок, на якому будували довільний відрізок CB і знаходили його середину O . У точці B намічався напрямок в сторону суші, перпендикулярний до напрямку CB . Спостерігач ішов у напрямку BA , дивлячись на корабель. Як тільки корабель і пункт O опинялися на одній прямій, спостерігач фіксував точку A , і тоді відстань KC дорівнювала відстані AB , яку можна було знайти безпосереднім вимірюванням.

Спробуйте й ви визначити відстань до недоступного об'єкта таким способом.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

493. $\triangle ABC = \triangle MNK$, $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 80^\circ$. Знайдіть кути трикутника MNK .
494. Чи існує трикутник, кути якого дорівнюють 91° , 52° і 44° ?
495. Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = CO$, а кути трикутника AOD — пропорційні числам 2, 3 і 5. Знайдіть кути трикутника COB .
496. Перемалюйте в зошит фігуру, зображену на малюнку 207, і проведіть пряму так, щоб вона розрізала зафарбовану фігуру на дві частини рівних площ.



Мал. 207

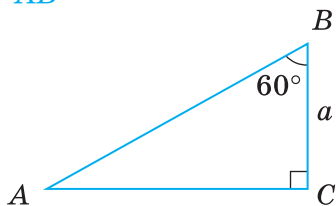
ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

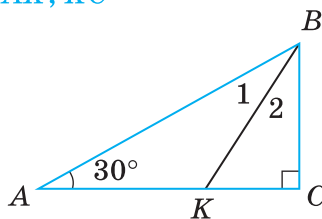
Б

1

$$\frac{BC = a.}{AB}$$

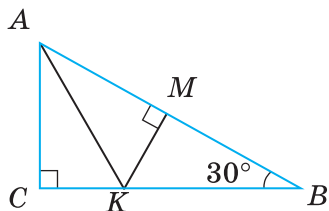


$$\frac{\angle 1 = \angle 2, BK = 10.}{AK, KC}$$

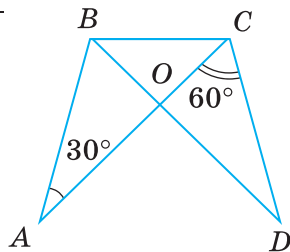


2

$$\frac{AK = KB = 8.}{CB, KM}$$

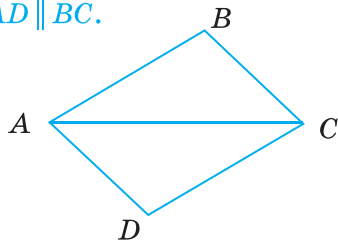


$$\frac{AB = CD,}{AC = BD.} \angle AOD$$

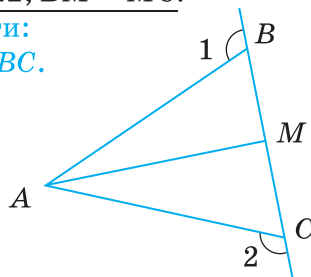


3

$$\frac{AB = CD, AD = BC.}{\text{Довести: } AD \parallel BC.}$$

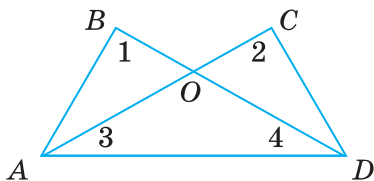


$$\frac{\angle 1 = \angle 2, BM = MC.}{\text{Довести: } AM \perp BC.}$$

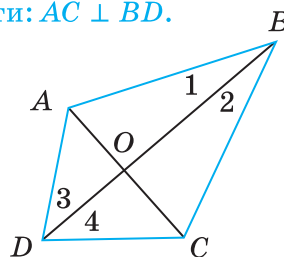


4

$$\frac{\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4.}{\text{Довести: } \triangle ABO = \triangle DCO.}$$



$$\frac{\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4.}{\text{Довести: } AC \perp BD.}$$



Самостійна робота 4**Варіант 1**

- 1°. Сформулюйте означення рівнобедреного трикутника.
- 2°. $\triangle ABC$ — прямокутний ($\angle C = 90^\circ$). Знайдіть $\angle A$, якщо $\angle B = 70^\circ$.
- 3°. Точки K і P — середини бічних сторін AB і AC рівнобедреного трикутника ABC . Доведіть, що $\triangle AKC = \triangle APB$.
- 4°. Знайдіть кути трикутника, якщо один із них удвічі більший за другий і на 40° менший від третього.

Варіант 2

- 1°. Сформулюйте означення прямокутного трикутника.
- 2°. $\triangle ABC$ — рівнобедрений ($AB = BC$). Знайдіть $\angle A$, якщо $\angle B = 70^\circ$.
- 3°. Точки K і P — середини бічних сторін AB і AC рівнобедреного трикутника ABC . Доведіть, що $\triangle KBC = \triangle PCB$.
- 4°. Знайдіть кути трикутника, якщо один із них удвічі менший від другого і на 12° більший за третій.

Варіант 3

- 1°. Сформулюйте властивість кутів рівнобедреного трикутника.
- 2°. $\triangle ABC$ — прямокутний ($\angle C = 90^\circ$) і рівнобедрений. Знайдіть $\angle B$.
- 3°. Точки K і M лежать на основі AC рівнобедреного трикутника ABC , $\angle VKA = \angle BMC$. Доведіть, що $BK = BM$.
- 4°. Знайдіть кути трикутника, якщо один із них утричі більший за другий і на 40° менший від третього.

Варіант 4

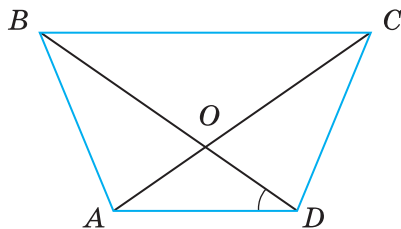
- 1°. Сформулюйте одну з ознак рівності прямокутних трикутників.
- 2°. $\triangle ABC$ — рівнобедрений ($AB = BC$). Знайдіть $\angle B$, якщо $\angle C = 50^\circ$.
- 3°. Точки K і M лежать на основі AC рівнобедреного трикутника ABC , $\angle VKA = \angle BMC$. Доведіть, що $AK = CM$.
- 4°. Знайдіть кути трикутника, якщо один із них утричі менший від другого і на 5° більший за третій.

Тестові завдання 4

1. Периметр рівнобедреного трикутника з основою 6 см і бічною стороною 5 см дорівнює:	а) 17 см; б) 16 см; в) 11 см; г) 30 см.
2. Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 100° . Обчисліть інші кути трикутника.	а) 100° і 60° ; б) 80° і 80° ; в) 40° і 40° ; г) 100° і 160° .
3. Кут при вершині B рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) дорівнює 80° . Обчисліть кут між бічною стороною і медіаною, проведеною з вершини B .	а) 50° ; б) 40° ; в) 60° ; г) 25° .
4. Кут при основі рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює:	а) 45° ; б) 60° ; в) 30° ; г) 90° .
5. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 20 см, один із його кутів — 30° . Довжина меншого катета дорівнює:	а) 20 см; б) 5 см; в) 10 см; г) 15 см.
6. Кути трикутника пропорційні числам 4, 5 і 9. Даний трикутник:	а) гострокутний; б) прямокутний; в) тупокутний; г) рівнобедрений.
7. Діагональ AC прямокутника $ABCD$ розбиває його на два трикутники. Яке з тверджень — хибне?	а) $\triangle ABC = \triangle CDA$; б) $\angle BAC = \angle ACD$; в) $\angle ACB = \angle ACD$; г) $\angle ABC = \angle ADC$.
8. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 5 см, а прилеглий кут — 60° . Гіпотенуза трикутника дорівнює:	а) 10 см; б) 5 см; в) 2,5 см; г) 20 см.
9. У трикутнику ABC $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$. Який знак слід поставити замість * в записі: $AB * BC$?	а) $<$; б) $=$; в) \leq ; г) $>$.
10. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 60° , а сума найменшої і найбільшої його сторін — 6 см. Знайдіть довжину гіпотенузи.	а) 7 см; б) 2 см; в) 4 см; г) 1 см.

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

- 1°. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 112 см, а основа — 34 см. Знайдіть бічну сторону.
- 2°. Знайдіть:
 - а) кути рівнобедреного прямокутного трикутника;
 - б) зовнішні кути цього трикутника.
- 3°. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 17 см, а периметр — 51 см.
- 4°. Трикутники ABC і KPH рівносторонні й $AB = KP$. Знайдіть:
 - а) KH , якщо $BC = 5$ см;
 - б) периметри $\triangle ABC$ і $\triangle KPH$.
- 5°. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо його кут при вершині втричі більший за кут при основі.
- 6°. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 73 см. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо його бічна сторона на 7 см менша від основи.
- 7°. Кути трикутника ABC пропорційні числам 1, 2 і 3. Знайдіть:
 - а) кути $\triangle ABC$;
 - б) вид трикутника ABC ;
 - в) найбільшу сторону трикутника ABC , якщо найменша його сторона дорівнює 4 см.
- 8°. Доведіть, що два прямокутні трикутники рівні, якщо катет і протилежний кут одного відповідно дорівнюють катету і протилежному куту іншого.
- 9°. За малюнком 208 знайдіть міру кута COD , якщо $AB = CD$, $BD = AC$, $\angle BDA = 35^\circ$.
- 10°. BM і B_1M_1 — медіани трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ відповідно. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BM = B_1M_1$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



Мал. 208

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Який трикутник називають рівнобедреним?
2. Як називають сторони рівнобедреного трикутника?
3. Сформулюйте властивість рівнобедреного трикутника про кути при основі.
4. Сформулюйте властивість бісектриси рівнобедреного трикутника.
5. Сформулюйте ознаки рівнобедреного трикутника.
6. Який трикутник називають різностороннім?
7. Який трикутник називають рівностороннім?
8. Як співвідносяться поняття *трикутники* і *рівнобедрені трикутники*?
9. Сформулюйте першу ознаку рівності трикутників.
10. Сформулюйте другу ознаку рівності трикутників.
11. Сформулюйте третю ознаку рівності трикутників.
12. Як ви розумієте вислів «трикутник визначається трьома його сторонами»?
13. Якими елементами визначається трикутник?
14. Як слід розуміти, що «трикутник — фігура жорстка»?
15. Сформулюйте означення прямокутного трикутника.
16. Як називають сторони прямокутного трикутника?
17. Сформулюйте і доведіть ознаки рівності прямокутних трикутників.
18. Сформулюйте і доведіть властивості прямокутних трикутників.
19. Сформулюйте властивість катета прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30° .
20. Що таке перпендикуляр, похила і проекція похилої?
21. Що таке відстань від точки до прямої?
22. Що таке відстань між фігурами?
23. Сформулюйте і доведіть теорему про залежність між сторонами і кутами трикутника.
24. Сформулюйте і доведіть теорему про нерівність трикутника.
25. Сформулюйте нерівності трикутника XYZ .
26. Що означає вислів «точка B лежить між точками A і C »?
27. Як пов'язані між собою відстані між точками A , B і C , якщо точка B лежить між точками A і C ?
28. Сформулюйте властивості відстаней між довільними точками A , B і C .

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 3

Трикутник — геометрична фігура, яка складається з трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки. Кожний трикутник має три сторони, три вершини і три кути. Сума довжин сторін трикутника — його *периметр*.

Сума кутів трикутника дорівнює 180° .

Важливу роль у геометрії відіграють ознаки рівності трикутників. Дві фігури називаються рівними, якщо їх можна сумістити. Якщо $\triangle ABC = \triangle KPT$, то $AB = KP$, $BC = PT$, $CA = TK$, $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle P$, $\angle C = \angle T$.

Ознаки рівності трикутників

Два трикутники рівні, якщо:

- дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника (I);
- якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні й прилеглим до неї кутам іншого (II);
- якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам іншого (III).

Трикутник називають *рівнобедреним*, якщо він має дві рівні сторони. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними сторонами*, а третю сторону — його *основою*.

У рівнобедреному трикутнику кути при основі — рівні, а бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою.

Якщо трикутник має два рівні кути, то він — *рівнобедрений*.

Якщо всі сторони трикутника рівні, його називають *рівностороннім* трикутником. Кожний кут рівностороннього трикутника дорівнює 60° .

Залежно від кутів трикутники поділяють на *гострокутні*, *прямокутні* й *тупокутні*.

Сторону прямокутного трикутника, яка лежить проти прямого кута, називають *гіпотенузою*, а дві інші — *катетами*.

Катет прямокутного трикутника, який лежить проти кута 30° , дорівнює половині гіпотенузи.

Кожна сторона трикутника менша за суму двох інших його сторін і більша за їх різницю. Хоч би які були три точки площини A , B і C , завжди $AB + BC \geq AC$.

У кожному трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута — більша сторона.

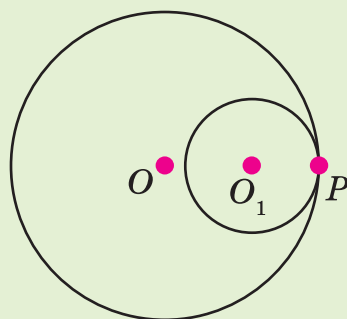
Круг — перша найпростіша і
найдосконаліша фігура.

Прокл



КОЛО І КРУГ

У цьому розділі ви розширите та поглибите свої знання про коло і круг, набуті в попередніх класах, дізнаєтеся про взаємне розміщення на площині прямої і кола, двох кіл; про властивості **дотичної до кола, дотичних кіл**; про **кола, вписані у трикутник й описані навколо трикутника**. А ще зрозумієте, що таке **геометричне місце точок**.



§ 17. КОЛО І КРУГ

Коло — це фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. Цю точку називають *центром кола*.

Відрізок, який сполучає будь-яку точку кола з його центром, називають *радіусом*. Відрізок, який сполучає дві довільні точки кола, називають *хордою* кола. Хорду, яка проходить через центр кола, називають *діаметром* (мал. 209). Кожний діаметр кола складається з двох радіусів, тому його довжина вдвічі більша за довжину радіуса. Якщо хорда не проходить через центр кола, її довжина менша від довжини діаметра. (Чому?)

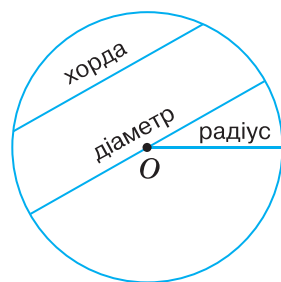
Коло на папері зображають за допомогою циркуля. Вважають, що з даного центра на площині можна описати тільки одне коло даного радіуса (мал. 210).

Пряма і коло можуть мати дві спільні точки (мал. 211, а), одну спільну точку (мал. 211, б) або не мати жодної (мал. 211, в).

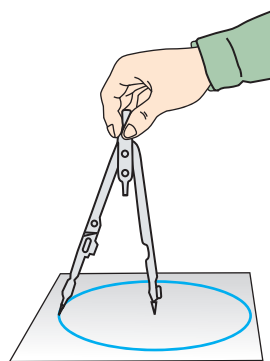
Пряму, яка має з колом дві спільні точки, називають *січною*.

Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку, називають *дотичною* до кола. Їх спільну точку називають *точкою дотику*. (Йдеться про фігури однієї площини.) Точка дотику лежить на колі, тому дотична віддалена від центра кола на відстань, що дорівнює довжині радіуса. Оскільки всі інші точки дотичної лежать поза колом, відстані від них до центра кола більші за довжину радіуса. Із цього випливає таке твердження.

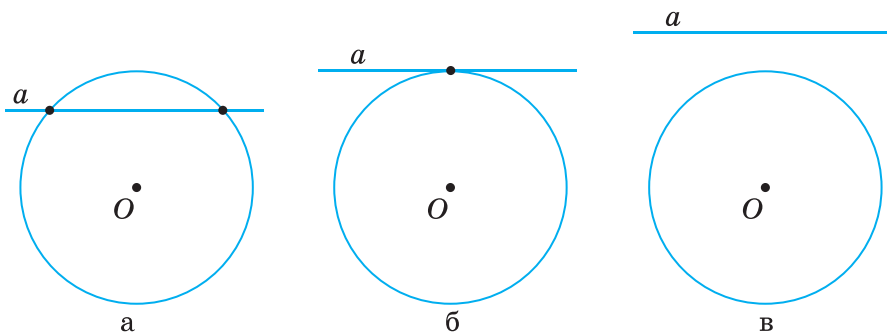
Дотична до кола перпендикулярна до його радіуса, проведеного в точку дотику.



Мал. 209

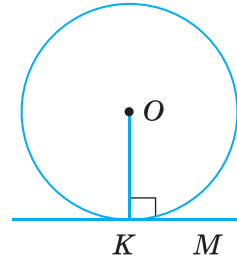


Мал. 210



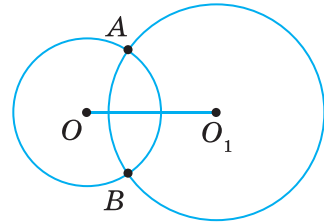
Мал. 211

Щоб через дану на колі точку K провести дотичну до цього кола, треба провести радіус OK , а потім — пряму KM , перпендикулярну до цього радіуса (мал. 212).



Мал. 212

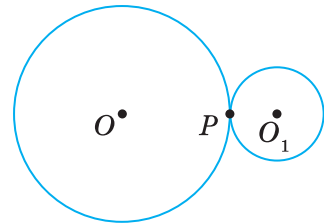
Якщо два різні кола мають дві спільні точки, то говорять, що дані кола *перетинаються* в цих точках. Точки перетину двох кіл лежать по різні боки від прямої, яка проходить через центри цих кіл. На малюнку 213 зображено кола із центрами O і O_1 що перетинаються в точках A і B .



Мал. 213

Якщо два кола мають тільки одну спільну точку, говорять, що вони *дотикаються* в цій точці. Дотик двох кіл може бути зовнішнім (мал. 214) або внутрішнім (мал. 215). В обох випадках точка дотику і центри кіл лежать на одній прямій.

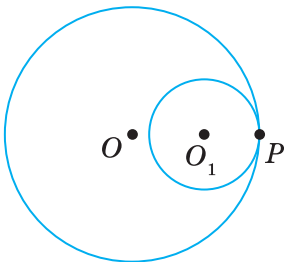
Два кола однієї площини, які мають спільний центр, називають *концентричними колами* (мал. 216).



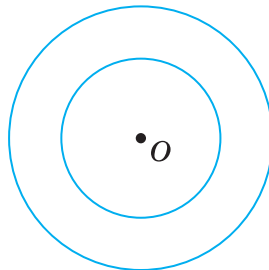
Мал. 214

Зазвичай кола креслять, користуючись циркулем. Але іноді зручніше це робити за допомогою спеціальних шаблонів з вирізаними кругами різних радіусів.

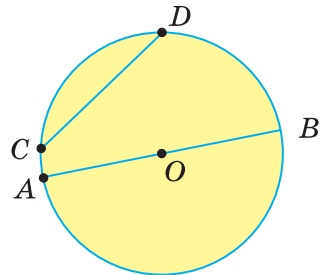
Коло ділить площину на дві частини (області). Об'єднання кола з його внутрішньою областю називають *кругом*. Межа круга — коло. *Центром, радіусом, діаметром, хордою круга* називають відповідно центр, радіус, діаметр, хорду кола, що є межею даного круга (мал. 217).



Мал. 215



Мал. 216

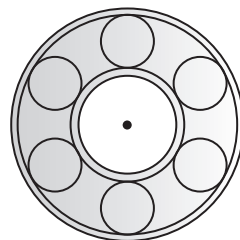


Мал. 217

Форму кола має обруч, форму круга — дно відра, видимий диск Сонця тощо. Колесо на рейці — матеріальна модель кола, що дотикається до прямої. На схематичному зображенні підшипника (мал. 218) є кілька дотичних кіл.

Як вам відомо з попередніх класів, довжину C кола і площу S круга виражають через радіус r такими формулами:

$$C = 2\pi r, \quad S = \pi r^2.$$



Мал. 218

Строгі доведення цих формул розглядатимуться в старших класах.

Для допитливих

Слово «коло» — давньоукраїнське. Воно має один корінь із словами «колода», «колоти», «колотити», «сколоти». Сколотами називали праукраїнців, які жили на землях сучасної України за скіфів і ще раніше. А ще слово коло в українській мові прийменником, як і навколо, довкола. Якщо до забитого в землю кілка (кола) прив'язували тварину, то вона ходила довкола, навколо.

Раніше круг також називали колом, наприклад, співали: «Ой зійди, зійди, ясен місяцю, як млинове коло». Хоч і повний місяць, і камінь у млині мають форму круга, а не кола. Нерідко коло називали також колесом; дехто вважає, що перші колеса навчилися робити майстрові люди в наших краях.

У геометрії коло відіграє важливу роль. Існує навіть окрема частина геометрії — геометрія кіл, у якій досліджуються важливі й цікаві властивості геометричних фігур, пов'язаних із колом.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що таке коло; центр кола; радіус; діаметр; хорда?
2. Що таке круг? Чим відрізняється круг від кола?
3. Скільки спільних точок можуть мати: а) пряма і коло; б) два кола?
4. Сформулюйте означення дотичної до кола. Яку властивість має дотична до кола?
5. Які кола називають дотичними? Що таке точка дотику?
6. Як можуть дотикатися два кола?
7. Які кола називають концентричними?
8. Як обчислюють довжину кола; площу круга?

Виконаємо разом

1. Доведіть, що точки дотику кола до сторін кута рівновіддалені від його вершини.

▼ Нехай коло із центром O дотикається до сторін кута A в точках B і C (мал. 219). Доведемо, що $AB = AC$.

Радіуси OB і OC , проведені в точки дотику, перпендикулярні до відповідних дотичних і рівні. Тому прямокутні трикутники ABO і ACO рівні за гіпотенузою і катетом.

Отже, $AB = AC$. ▲

2. Доведіть, що діаметр кола, проведений через середину хорди, відмінної від діаметра, перпендикулярний до хорди.

▼ Нехай AB — хорда кола, яка не проходить через центр O кола, а KP — діаметр кола, який проходить через середину M хорди AB (мал. 220). Трикутник OAB рівнобедрений, бо $OA = OB$. А медіана OM рівнобедреного трикутника, проведена до його основи, є також висотою трикутника. Тому $OM \perp AB$, а отже, і $KP \perp AB$. ▲

3. Знайдіть площу кільця, обмеженого двома концентричними колами радіусів r і r_1 (мал. 221).

▼ Площа S кільця дорівнює різниці площ кругів радіусів r і r_1 :

$$S = \pi r^2 - \pi r_1^2 = \pi (r^2 - r_1^2). \quad \blacktriangle$$

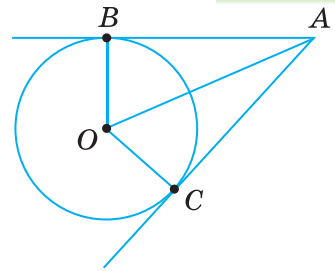
ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

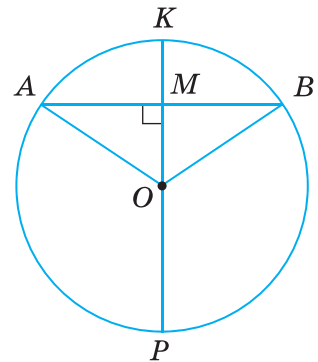
497. Скільки різних кіл можна провести через:
а) одну точку; б) дві точки; в) три точки?
498. Скільки спільних точок можуть мати:
а) коло і пряма; б) два кола;
в) коло і трикутник; г) коло і площина?
499. Дано коло із центром O . Скільки спільних точок має коло з:
а) прямою OA ; б) променем OM ?
500. Скільки різних дотичних до даного кола можна провести через дану точку, що лежить:
а) на колі; б) поза колом; в) усередині кола?
501. Скільки пар дотичних кіл є на малюнку 218? А скільки пар концентричних кіл?

А

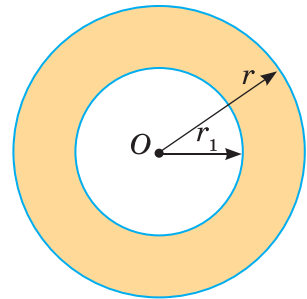
502. Накресліть коло. Проведіть його радіус, діаметр, хорду.
503. Доведіть, що діаметр — найбільша з хорд даного кола.



Мал. 219



Мал. 220

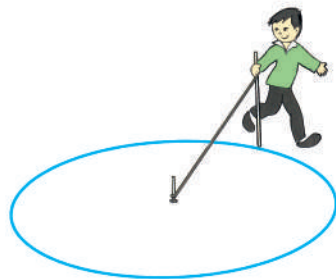


Мал. 221

504. Дано коло і відрізок, менший від діаметра. Проведіть хорду, довжина якої дорівнює довжині даного відрізка.
505. Знайдіть відстань між центрами кіл радіусів 5 м і 7 м, які дотикаються:
а) зовнішнім способом; б) внутрішнім способом.
506. Чи мають спільні точки два кола, радіуси яких дорівнюють 3 см і 4 см, якщо відстань між їх центрами дорівнює 5 см?
507. AB і CD — рівні хорди кола із центром O . Доведіть, що $\triangle ABO = \triangle CDO$.
508. Кола із центрами O і O_1 перетинаються в точках A і B . Доведіть, що:
1) $\triangle OAO_1 = \triangle BOO_1$; 2) $\triangle OAB$ і $\triangle O_1AB$ — рівнобедрені.
509. Кола із центрами O і O_1 перетинаються в точках A і B , причому кожне з них проходить через центр іншого. Знайдіть $\angle AOB$ і $\angle OAO_1$.

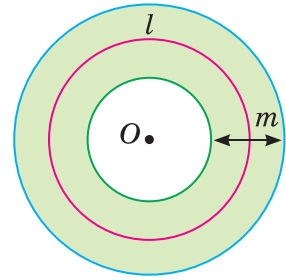
Б

510. Кожне з трьох кіл проходить через центри двох інших. Доведіть, що їх центри — вершини рівностороннього трикутника.
511. Доведіть, що **рівні хорди кола рівновіддалені від центра**.
- 512*. Як побудувати дотичну до даного кола:
а) паралельну даній прямій;
б) перпендикулярну до даної прямої?
513. Садівник описує коло для клумби за допомогою кілочків і мотузки (мал. 222). Чому описана таким способом фігура — коло? Чи вийде коло, якщо мотузка намотуватиметься на кілочок?
514. Знайдіть радіуси двох дотичних кіл, якщо вони відносяться як 1 : 3, а відстань між центрами кіл дорівнює 16 см. Розгляньте два випадки.
515. З точки A до кола із центром O проведено дотичні AB і AC . Доведіть, що AO — бісектриса кута BAC .
516. З точки A до кола із центром O проведено дві дотичні, кут між якими дорівнює 60° . Знайдіть радіус кола, якщо $OA = 10$ см.
517. З точки A до кола проведено дві дотичні. Знайдіть кут між ними, якщо відстань від точки A до точки дотику дорівнює радіусу кола.
518. Коло дотикається до сторін кута A в точках B і C так, що $AB = AC$. Знайдіть міру кута A .
519. Три рівні кола із центрами O_1, O_2, O_3 попарно дотикаються одне до одного в точках K, P і T . Доведіть, що:
1) $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1$; 2) $KP = PT = TK$.



Мал. 222

520. Із центра кола провели три промені, які розбили дане коло на три дуги, довжина кожної з яких дорівнює 3 см. Знайдіть кути між цими променями і радіус кола.
521. Доведіть, що площа кільця, обмеженого двома концентричними колами радіусів r і r_1 , дорівнює середньому арифметичному довжин цих кіл l , помноженому на різницю їх радіусів m , тобто $S = lm$ (мал. 223).



Мал. 223

Практичне завдання

522. Підготуйте презентацію на тему:
а) «Коло навколо нас»; б) «Круг навколо нас».

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

523. Відрізок завдовжки a поділено на 3 рівні частини. Яку частину довжини a становить відстань між серединами першої і третьої частин?
524. Знайдіть довжину бісектриси трикутника з периметром 40 см, якщо вона розбиває його на два трикутники з периметрами 20 см і 30 см.
525. Знайдіть площу квадрата $ABCD$, якщо $AC = 10$ см.

§ 18. ГЕОМЕТРИЧНЕ МІСЦЕ ТОЧОК

Геометричним місцем точок (ГМТ) називають фігуру, яка складається з усіх точок, що мають певну властивість.

Розглянемо кілька геометричних місць точок площини.

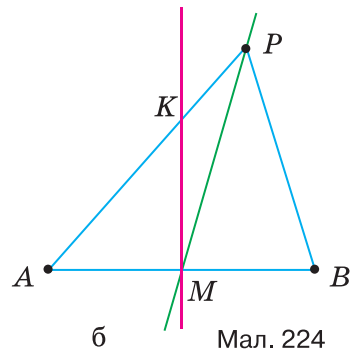
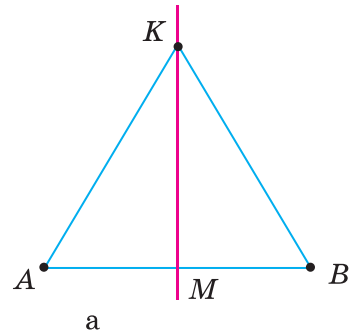
Коло — геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки.

Круг радіуса r — геометричне місце точок, відстані від яких до даної точки не перевищують r .

ЗАДАЧА 1

Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців даного відрізка.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай дано відрізок AB . Його середина M рівновіддалена від точок A і B (мал. 224, а). Проведемо пряму MK , перпендикулярну до AB . Кожна її точка K , відмінна від M , також рівновіддалена від точок A і B , бо $\triangle KAM = \triangle KBM$. Отже, $KA = KB$.



Мал. 224

Якщо ж точка P не лежить на прямій MK , вона не може бути рівновіддаленою від A і B (мал. 224, б). Справді, з припущення, що $PA = PB$, випливає перпендикулярність прямих PM і AB , бо медіана PM рівнобедреного трикутника PAB є його висотою. Тоді сума двох прямих кутів PMB і KMA не дорівнювала б 180° . Цього не може бути. Отже, поза прямою MK не існує точки, рівновіддаленої від точок A і B .

Таким чином, кожна точка прямої MK рівновіддалена від точок A і B , а точка, яка не лежить на прямій MK , не може бути рівновіддаленою від точок A і B .

Пряму, яка проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього, називають *серединним перпендикуляром* до даного відрізка. З попередніх міркувань випливає таке твердження.

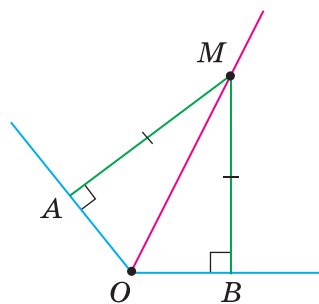
Геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є його серединний перпендикуляр.

ЗАДАЧА 2

Знайдіть геометричне місце точок, які лежать усередині кута і рівновіддалені від його сторін.

1. Нехай M — точка кута, рівновіддалена від його сторін OA і OB (мал. 225). Перпендикуляри MA і MB , опущені з точки M на сторони кута, рівні. Тому $\triangle MOA = \triangle MOB$ за катетом і гіпотенузою. Отже, $\angle AOM = \angle BOM$, тобто точка M належить бісектрисі даного кута AOB .

2. Якщо M — довільна точка бісектриси кута AOB , а MA і MB — перпендикуляри на OA і OB (див. мал. 225), то $\triangle OAM = \triangle OBM$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Тому $MA = MB$, тобто точка M рівновіддалена від сторін даного кута.



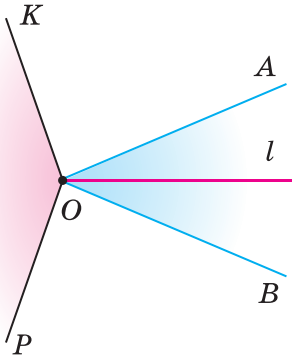
Мал. 225

Геометричним місцем точок кута, рівновіддалених від його сторін, є бісектриса цього кута.

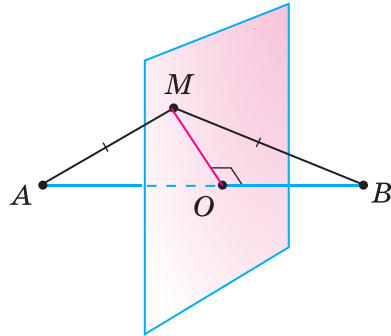
Зверніть увагу! Тут мають на увазі кути, менші від розгорнутого.

Для допитливих

Чи правильно говорити, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута, є бісектриса цього кута? Ні. Коли в планіметрії говорять про геометричне місце точок, не уточнюючи, про які саме точки йдеться, то мають на увазі точки площини, якій належить дана фігура. За такої умови геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута, є об'єднання бісектриси l даного кута і всіх точок деякого іншого кута, показаного на малюнку 226. Адже кожна точка кута KOP також рівновіддалена від сторін даного кута AOB . Йдеться про кути, менші від розгорнутого.



Мал. 226



Мал. 227

Говорячи, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр до цього відрізка, мають на увазі, що йдеться про геометричне місце точок площини, у якій лежить відрізок. А геометричним місцем точок простору, рівновіддалених від кінців відрізка, є деяка площина (мал. 227). Подумайте, як розташована ця площина відносно даного відрізка.

Геометричні місця точок простору розглядають у старших класах.

Запитання і завдання для самоконтролю

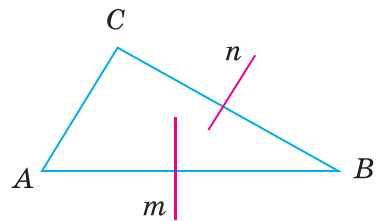
1. Що таке геометричне місце точок? Наведіть приклади.
2. Що таке серединний перпендикуляр до даного відрізка?
3. Що є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка?
4. Що є геометричним місцем точок кута, рівновіддалених від його сторін?

Виконаємо разом

Доведіть, що серединні перпендикуляри двох сторін трикутника перетинаються.

▼ Нехай n і m — серединні перпендикуляри до сторін BC і AB трикутника ABC (мал. 228). Доведемо, що вони не можуть бути паралельними один одному. Доводитимемо від супротивного. Припустимо, що $n \parallel m$. Тоді пряма, перпендикулярна до n , має бути перпендикулярною і до m . Отже,

$BC \perp n$ і $BC \perp m$. Але за умовою і $AB \perp m$. А дві прямі, перпендикулярні до третьої прямої, — паралельні. Отже, із припущення, що $n \parallel m$, випливає паралельність сторін AB і BC трикутника. Цього не може бути. Тому прямі n і m не можуть бути паралельними. Отже, вони перетинаються. ▲

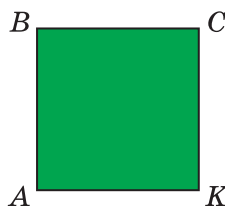


Мал. 228

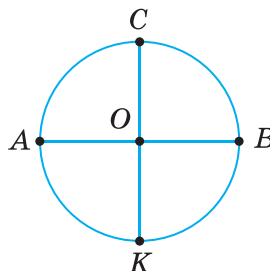
ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

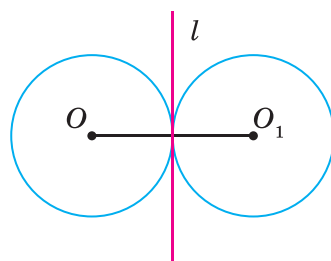
526. Чи правильно, що кожна точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута?
527. Чи правильно, що бісектриса кута є геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін цього кута?
528. Чим є геометричне місце точок, які лежать на відстані 2 м від деякої точки?
529. Чим є геометричне місце точок, рівновіддалених від двох паралельних прямих?
530. $ABCK$ — квадрат (мал. 229). Чим є геометричне місце точок, рівновіддалених від точок A і C ? А від точок B і K ?
531. AB і CK — перпендикулярні діаметри одного кола (мал. 230). Чим є серединний перпендикуляр до діаметра AB ?
532. Серединний перпендикуляр до відрізка AB проходить через точку C . Чи правильно, що трикутник ABC рівнобедрений?
533. Два рівні кола із центрами O і O_1 дотикаються зовнішнім способом (мал. 231). Чи правильно, що їх спільна дотична, проведена через точку дотику, є серединним перпендикуляром до відрізка OO_1 ?



Мал. 229



Мал. 230



Мал. 231

А

534. Дано точки A і B . Побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від A і B .
535. Дано прямий кут. Побудуйте геометричне місце точок, які лежать усередині цього кута і рівновіддалені від його сторін.
536. Побудуйте геометричне місце точок, які віддалені від даної точки на дану відстань a .
537. Чим є геометричне місце точок, які лежать на даній відстані від даної прямої? Виконайте відповідний малюнок.
538. Дано дві паралельні прямі. Побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від цих прямих.
539. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, що проходять через дві дані точки.

540. Знайдіть геометричне місце центрів рівних кіл, які дотикаються до даної прямої.
541. Знайдіть геометричне місце центрів рівних кіл, які проходять через дану точку.
542. Дано гострий кут. Побудуйте геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до сторін цього кута.

Б

543. Знайдіть геометричне місце центрів кіл радіуса $2r$, які дотикаються до кола радіуса: а) r ; б) $3r$.
544. Дано коло радіуса 6 см. Чим є ГМТ, які ділять усі його діаметри у відношенні $1 : 2$?
545. Чим є геометричне місце вершин прямих кутів, обидві сторони яких дотикаються до даного кола?
546. Дано дві паралельні прямі a і b . Побудуйте ГМТ, які лежать між даними прямими і відстані від яких до a і b відносяться як $1 : 2$.
547. Дано дві паралельні прямі. Чим є ГМТ, відстані від яких до даних прямих відносяться як $2 : 3$?
548. Дано відрізок AB завдовжки 10 см. Чим є ГМТ, які віддалені від одного з кінців на 6 см, а від іншого — на 8 см?
549. Дано прямокутник зі сторонами 3 см і 5 см. Чим є ГМТ, які віддалені від якої-небудь із його найближчих сторін на 1 см і лежать:
а) в його внутрішній області; б) поза прямокутником?
550. Доведіть, що точка перетину двох бісектрис трикутника рівновіддалена від усіх сторін трикутника.

Практичне завдання

551. Виріжте із цупкого паперу квадрат. Перегніть його так, щоб утворилося геометричне місце точок квадрата, рівновіддалених від: а) двох сусідніх вершин; б) протилежних вершин; в) усіх вершин квадрата. Виготовте модель, на якій визначено геометричне місце точок простору, рівновіддалених від усіх вершин квадрата.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

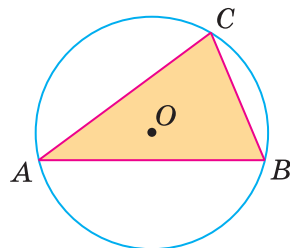
552. Знайдіть міру кута, який у 3 рази більший за суміжний із ним кут.
553. У якому трикутнику бісектриси кутів перетинаються під кутом 45° ?
554. Висота рівнобедреного прямокутного трикутника, опущена на гіпотенузу, дорівнює 7 см. Знайдіть гіпотенузу цього трикутника.
555. Знайдіть міри двох рівних тупих кутів, у яких одна сторона — спільна, а дві інші — перпендикулярні.

§ 19. КОЛО І ТРИКУТНИК

Коло і трикутник можуть не мати спільних точок або мати 1, 2, 3, 4, 5, 6 спільних точок (відповідні малюнки виконайте самостійно). Заслуговують на увагу випадки, коли коло проходить через усі три вершини трикутника або коли воно дотикається до всіх сторін трикутника. Розглянемо такі випадки детальніше.

1. Описане коло.

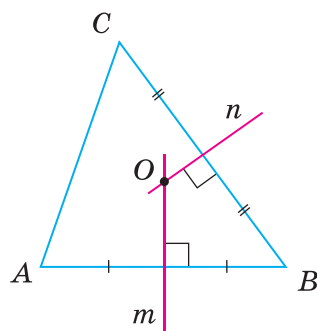
Коло називають *описаним навколо трикутника*, якщо воно проходить через усі вершини трикутника (мал. 232).



Мал. 232

Теорема 23. Навколо кожного трикутника можна описати лише одне коло. Його центром є точка перетину серединних перпендикулярів до двох сторін трикутника.

Доведення*. Нехай ABC — довільний трикутник (мал. 233). Знайдемо точку, рівновіддалену від вершин A , B і C . Геометричне місце точок, рівновіддалених від точок A і B , — серединний перпендикуляр m до відрізка AB ; геометричне місце точок, рівновіддалених від точок B і C , — серединний перпендикуляр n до відрізка BC . Ці два серединні перпендикуляри не можуть бути паралельними, вони перетинаються в деякій точці O . А вона рівновіддалена від точок A , B і C . Отже, $OA = OB = OC$, тому O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC .



Мал. 233

Для кожного відрізка AB існує серединний перпендикуляр m , і лише один, а для BC — серединний перпендикуляр n , і тільки один. Точка їх перетину завжди існує, і вона — тільки одна. Отже, навколо кожного трикутника можна описати коло, і тільки одне. ▲

Наслідки. 1. Серединні перпендикуляри до всіх трьох сторін довільного трикутника проходять через одну й ту саму точку.

2. Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести коло, і тільки одне.

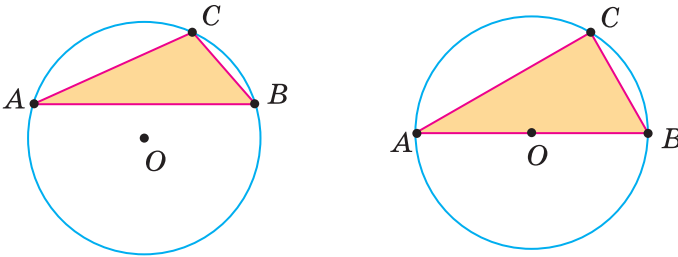
Із доведеної теореми випливає спосіб побудови кола, описаного навколо трикутника. Щоб описати навколо трикутника ABC коло, досить:

1) побудувати серединні перпендикуляри до двох сторін даного трикутника;

2) визначити точку O , у якій ці серединні перпендикуляри перетинаються;

3) із центра O провести коло радіуса OA .

Центр кола, описаного навколо трикутника, може лежати у внутрішній області даного трикутника (див. мал. 232), або зовнішній його області, або на його стороні (мал. 234).



Мал. 234

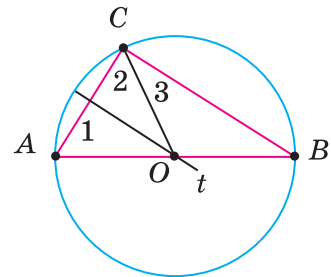
Теорема 24. Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина його гіпотенузи.

Доведення. Нехай ABC — довільний трикутник із прямим кутом C , t — серединний перпендикуляр катета AC і t перетинає гіпотенузу AB в точці O (мал. 235).

Оскільки точка O лежить на серединному перпендикулярі до відрізка AC , то $OA = OC$ і $\angle 1 = \angle 2$.

Тоді $\angle B = 90^\circ - \angle 1$ і $\angle 3 = 90^\circ - \angle 1$, тобто $\angle B = \angle 3$ і $OB = OC$.

$OA = OC = OB$, тобто точка O — середина гіпотенузи AB , рівновіддалена від усіх вершин трикутника. Отже, коло із центром O і радіусом OA проходить через усі вершини даного трикутника. ▲

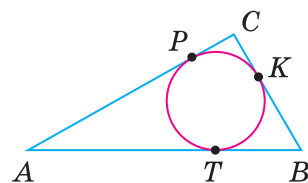


Мал. 235

Наслідок. Діаметр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює його гіпотенузі.

2. Вписане коло.

Коло називають *вписаним у трикутник*, якщо воно дотикається до всіх сторін трикутника (мал. 236). Центр кола, вписаного в трикутник, лежить у внутрішній області цього трикутника.

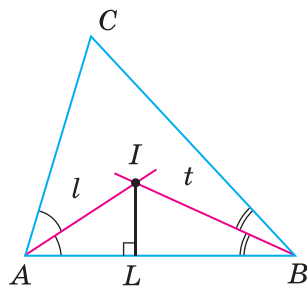


Мал. 236

Теорема 25*. У кожному трикутнику можна вписати лише одне коло. Його центром є точка перетину двох бісектрис трикутника.

Доведення. Нехай ABC — довільний трикутник. Визначимо точку, рівновіддалену від усіх його сторін (мал. 237). Геометричне місце точок, які лежать всередині кута A і рівновіддалені від сторін AB і AC , — бісектриса l кута A . Геометричне місце точок, які рівновіддалені від сторін AB і BC та лежать всередині кута B , — бісектриса t кута B . Ці дві бісектриси обов'язково перетинаються (доведіть це!).

Точка I , у якій перетинаються бісектриси l і t , рівновіддалена від усіх трьох сторін даного трикутника. Отже, точка I — центр кола, вписаного в трикутник ABC . ▲



Мал. 237

Наслідок. У кожному трикутнику всі три бісектриси перетинаються в одній точці.

Із доведеної теореми випливає спосіб побудови кола, вписаного в трикутник. Щоб у даний трикутник вписати коло, досить:

- 1) провести дві його бісектриси;
- 2) із точки їх перетину I опустити перпендикуляр IL на довільну сторону трикутника;
- 3) із центра I описати коло радіуса IL . Воно дотикатиметься до кожної сторони трикутника, а отже, буде вписаним у даний трикутник.

Для допитливих

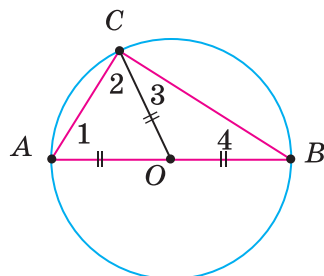
Для розв'язування задач корисно знати й таку властивість прямокутного трикутника, вписаного в коло.

Теорема 26. Із будь-якої точки кола його діаметр, що не виходить з цієї точки, видно під прямим кутом.

Доведення. Нехай AB — довільний діаметр кола із центром O , а C — довільна точка кола, відмінна від A і B (мал. 238). Покажемо, що $\angle ACB = 90^\circ$. Оскільки $OA = OB = OC$, то $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$. Тоді $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$, звідси $\angle C = \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ : 2 = 90^\circ$. ▲

Іноді говорять:

Геометричним місцем точок площини, з яких відрізок AB видно під прямим кутом, є коло діаметра AB .



Мал. 238

Насправді, цьому GMT точки A і B не належать. Докладніше про це дізнаєтесь у старших класах.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Яке коло називають описаним навколо трикутника?
2. Яке коло називають вписаним у трикутник?
3. Чи навколо кожного трикутника можна описати коло?
4. Чи в кожний трикутник можна вписати коло?
5. Де лежить центр кола, вписаного в трикутник?
6. Де лежить центр кола, описаного навколо трикутника? А навколо прямокутного трикутника?

Виконаємо разом

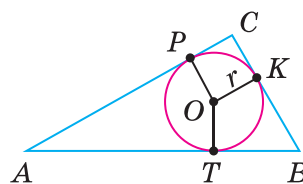
1. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника з гіпотенузою 6 см.

✓ Діаметр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є його гіпотенузою. Радіус цього кола вдвічі менший, тобто дорівнює 3 см. ▲

2. Доведіть, що діаметр кола, вписаного в прямокутний трикутник з катетами a і b та гіпотенузою c , дорівнює $a + b - c$.

✓ Нехай у трикутнику ABC кут C — прямий, а K, P, T — точки дотику вписаного в трикутник кола (мал. 239).

Оскільки $AP = AT$ і $BK = BT$, то $AC + BC - AB = PC + CK = 2r$,
або $2r = a + b - c$. ▲



Мал. 239

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

556. Скільки спільних точок можуть мати коло і пряма?
557. Скільки спільних точок можуть мати круг і пряма?
558. Скільки спільних точок мають трикутник і описане навколо нього коло?
559. Скільки спільних точок можуть мати трикутник і коло?
560. Чи через будь-які 4 точки можна провести коло?
561. Чи можна в коло діаметра 1 м вписати трикутник з периметром 8 м? А трикутник з периметром 8 см?

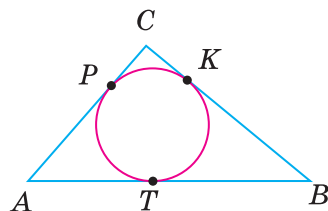
А

562. Накресліть довільний трикутник і опишіть навколо нього коло.
563. Накресліть довільний трикутник і впишіть у нього коло.

564. Кожна з хорд AB і BC дорівнює радіусу кола. Знайдіть кути трикутника ABC .
565. Скільки різних кіл можна провести через: а) одну точку; б) дві точки; в) три точки, що не лежать на одній прямій? Доведіть, що не існує кола, яке б проходило через три точки однієї прямої.
566. Чому два різні кола не можуть мати три спільні точки?
567. Накресліть прямокутний трикутник і опишіть навколо нього коло. Виконайте потрібні вимірювання та обчислення і порівняйте довжину кола та периметр вписаного в нього трикутника.
568. Накресліть рівносторонній трикутник. Побудуйте коло, вписане в цей трикутник і описане навколо нього. Де лежать центри цих кіл?
569. Чи можуть дотикатися два кола: вписане в трикутник і описане навколо того самого трикутника?
570. Трикутник зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см — прямокутний. Чому дорівнює радіус описаного навколо нього кола? А вписаного?
571. Покажіть на малюнку, що центр кола, описаного навколо трикутника, може лежати в його внутрішній області, або на його стороні, або поза трикутником.
572. Навколо рівностороннього трикутника описано коло. Під яким кутом із центра цього кола видно сторону трикутника?
573. У рівносторонній трикутник вписано коло. Під яким кутом із центра цього кола видно сторону трикутника?

Б

574. Центр кола O , вписаного в рівносторонній трикутник ABC , сполучено відрізками з вершинами трикутника. Доведіть, що трикутники OAB , OBC і OCA дорівнюють один одному. Знайдіть кути цих трикутників.
575. Доведіть, що одна з медіан (яка?) розбиває прямокутний трикутник на два рівнобедрені трикутники.
576. Будь-який трикутник, сторони якого пропорційні числам 3, 4 і 5, — прямокутний. Знайдіть радіус і довжину кола: а) описаного навколо трикутника зі сторонами 15 м, 20 м і 25 м; б) вписаного у трикутник зі сторонами 15 м, 12 м і 9 м.
577. Одне коло вписане в рівносторонній трикутник, друге — описане навколо того самого трикутника. Доведіть, що:
- 1) центри цих кіл збігаються;
 - 2) радіуси цих кіл відносяться як 1 : 2.
578. Вписане в трикутник ABC коло дотикається до його сторін у точках K , P і T (мал. 240). Доведіть, що:



Мал. 240

- 1) $AP + CK + BT = AT + BK + CP$,
2) $BK = 0,5 (AB + BC - AC)$.
579. Трикутник зі сторонами 26 см, 24 см і 10 см — прямокутний. Знайдіть радіус і площу круга: а) вписаного в цей трикутник; б) описаного навколо цього трикутника.
580. Знайдіть периметр прямокутного трикутника, описаного навколо кола радіуса r , якщо його гіпотенуза дорівнює c .
581. Вписане в прямокутний трикутник ABC коло дотикається до катетів AC і CB в точках P і K . Знайдіть довжину ламаної $KBAP$, якщо $AB = 17$ см.
582. На сторонах кута B , що дорівнює 120° , відкладено відрізки $BA = BC = 4$ см. Проведіть коло через точки A, B, C і знайдіть його радіус.

Практичне завдання

583*. Побудуйте зовнівписане коло трикутника — коло, яке дотикається до однієї зі сторін трикутника (зовні) і до продовження двох інших його сторін. Де лежить центр такого кола? Скільки зовнівписаних кіл можна побудувати для кожного трикутника? Чи належать вершини заданого трикутника відрізкам, що сполучають центри зовнівписаних кіл? Яку фігуру утворюють відрізки, що сполучають усі центри зовнівписаних кіл? Чи може цією фігурою бути тупокутний трикутник? А прямокутний?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

584. Скільки прямих можна провести через дві різні точки?
585. Знайдіть площу прямокутника, периметр якого дорівнює 200 м, а одна сторона в півтора рази більша за іншу.
586. $\triangle ABC = \triangle MNK$. Сторони трикутника ABC відносяться як $2 : 3 : 4$. Знайдіть сторони трикутника MNK , якщо його периметр дорівнює 45 см.
587. $\triangle ABC = \triangle MNK$, $AC = 17$ см, $MN - NK = 5$ см. Знайдіть сторони трикутника ABC , якщо $P_{\triangle ABC} = 38$ см.
588. Сторони трикутника пропорційні числам 7, 5 і 8. Знайдіть периметр трикутника, якщо:
- сума найменшої і найбільшої його сторін дорівнює 39 см;
 - різниця найбільшої і найменшої його сторін дорівнює 9 см;
 - найменша його сторона на 12 см менша від півпериметра;
 - найбільша його сторона менша від суми двох інших сторін на 8 см.

§ 20*. ГЕОМЕТРИЧНІ ПОБУДОВИ

Користуючись лінійкою і циркулем, можна виконувати багато *геометричних побудов*, тобто креслити геометричні фігури. За допомогою лінійки (без поділок) можна побудувати: довільну пряму, промінь, відрізок, пряму, що проходить через задані одну чи дві точки. За допомогою циркуля можна побудувати коло чи дугу заданого радіуса з даного центра, відкласти від початку даного променя відрізок даної довжини.

Розглянемо спочатку, як розв'язувати найпростіші задачі на побудову.

ЗАДАЧА 1

Побудуйте трикутник із даними сторонами.

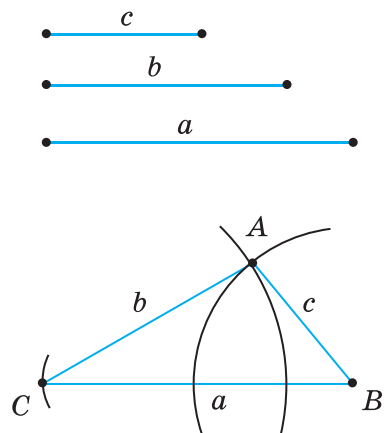
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай дано три відрізки: a , b і c (мал. 241). Треба побудувати трикутник, сторони якого дорівнювали б цим відрізкам. За допомогою лінійки проводимо довільну пряму, позначаємо на ній довільну точку B і відкладаємо циркулем на цій самій прямій відрізок $BC = a$. Розхилом циркуля, що дорівнює c , описуємо дугу кола із центром B . З того самого боку від прямої CB описуємо дугу кола радіуса b із центром C . Точку перетину A цих дуг сполучаємо відрізками з точками C і B . Трикутник ABC — той, який треба було побудувати, бо його сторони BC , AC і AB дорівнюють даним відрізкам.

Зверніть увагу! Якщо побудовані дуги не перетинаються, трикутник побудувати не можна. Це буває тоді, коли один із даних відрізків більший за суму двох інших або дорівнює цій сумі.

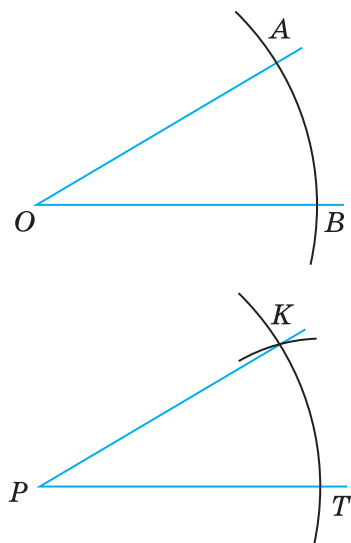
ЗАДАЧА 2

Побудуйте кут, що дорівнює даному куту.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай дано кут AOB і потрібно побудувати кут KPT , який дорівнює куту AOB (мал. 242). Будуємо промінь PT і дуги рівних радіусів із центрами O і P . Нехай одна із цих дуг перетинає сторони кута AOB в точках A і B , а друга — промінь PT в точці T . Далі розхилом циркуля, який дорівнює AB , описуємо третю дугу із центром T . Якщо вона



Мал. 241



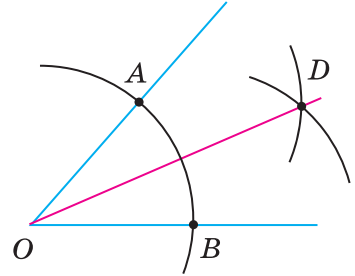
Мал. 242

перетинає другу дугу в точці K , проводимо промінь PK . Кут KPT — той, який вимагалось побудувати. Адже трикутники KPT і AOB рівні (за трьома сторонами), тому $\angle KPT = \angle AOB$.

ЗАДАЧА 3

Побудуйте бісектрису даного кута.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай AOB (мал. 243) — даний кут. Довільним розхилом циркуля опишемо дугу із центром O . Нехай A і B — точки перетину цієї дуги з променями OA і OB . Із центрів A і B опишемо дуги такими самими радіусами. Якщо D — точка перетину цих дуг, то промінь OD — бісектриса кута AOB . Справді, $\triangle AOD = \triangle BOD$ за трьома сторонами. Тому $\angle AOD = \angle DOB$.



Мал. 243

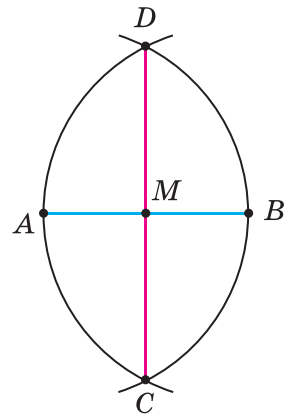
ЗАДАЧА 4

Поділіть даний відрізок навпіл.

РОЗВ'ЯЗАННЯ. Нехай AB — даний відрізок (мал. 244). З точок A і B радіусом AB описуємо дуги. Вони перетнуться в деяких точках C і D .

Пряма CD точкою M ділить даний відрізок навпіл.

Справді, $\triangle ACD = \triangle BCD$ за трьома сторонами, тому $\angle ACM = \angle BCM$. За першою ознакою рівності трикутників $\triangle ACM = \triangle BCM$. Отже, $AM = BM$.

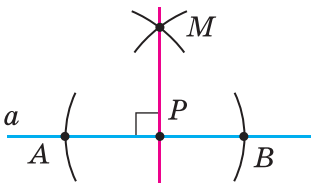


Мал. 244

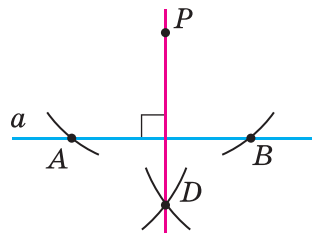
ЗАДАЧА 5

Через дану точку P проведіть пряму, перпендикулярну до даної прямої a .

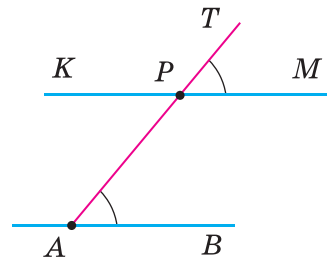
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Залежно від того, лежить чи не лежить точка P на прямій a , задачу можна розв'язувати, як показано на малюнках 245 і 246. Опишіть і обґрунтуйте ці побудови самостійно.



Мал. 245



Мал. 246



Мал. 247

ЗАДАЧА 6

Через точку P , що не лежить на прямій AB , проведіть пряму, паралельну прямій AB .

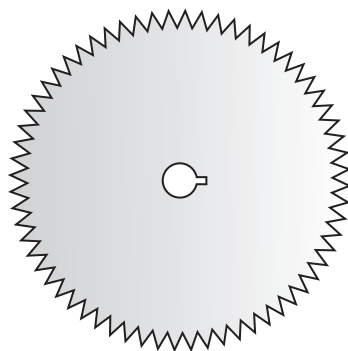
РОЗВ'ЯЗАННЯ. Через точку P і довільну точку A прямої AB проводимо пряму AT (мал. 247). Будуємо кут TPM , що дорівнює куту PAB , так, щоб ці кути стали відповідними при прямих PM , AB і січній AP . Побудована таким способом пряма PM задовольняє задачу, бо вона проходить через дану точку P і паралельна прямій AB , оскільки $\angle TPM = \angle PAB$.

Для допитливих

Геометричними побудовами часто доводиться займатися багатьом людям. Ще в доісторичні часи майстри, які робили колеса до колісниць, уміли ділити коло на кілька рівних частин. Тепер виконувати такі побудови доводиться фахівцям, які проектують чи виготовляють шестерні, дискові пилки (мал. 248), турбіни та різні роторні механізми. Як би ви поділили коло, наприклад, на 5, 6 чи 7 рівних частин?

Основні креслярські інструменти — лінійка і циркуль — майстровим людям були відомі ще кілька тисячоліть тому. Слово *лінійка* походить від слова «лінія», яке латинською мовою спочатку означало «льняна нитка». І слово *циркуль* — латинського походження. Спочатку слово «циркульюс» означало коло, круг, обвід.

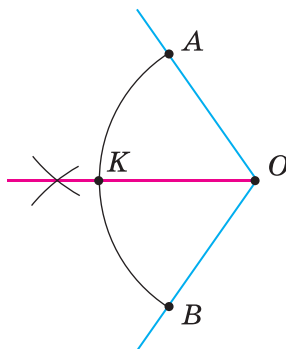
У Стародавній Греції лінійку і циркуль визнавали єдиними приладами геометричних побудов. Задачу на побудову вважали розв'язаною, якщо в ній усі побудови виконувалися тільки за допомогою лінійки та циркуля. Тепер фахівці, виконуючи ті чи інші побудови, використовують косинець, транспортир, рейсмус, рейсшину та інші креслярські засоби.



Мал. 248

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Поясніть, як побудувати трикутник за трьома даними сторонами.
2. Як побудувати кут, що дорівнює даному?
3. Як побудувати бісектрису даного кута?
4. Як поділити даний відрізок навпіл?
5. Як через дану точку провести пряму, перпендикулярну до даної прямої?
6. Як через дану точку провести пряму, паралельну даній прямій?



Мал. 249

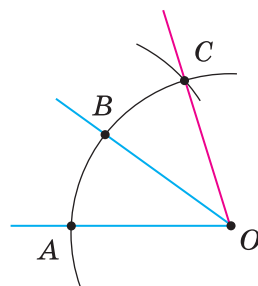
Виконаємо разом

1. Поділіть дану дугу кола на дві рівні частини.

✓ Нехай дано дугу AB кола із центром O (мал. 249). Уявімо кут AOB і проведемо його бісектрису OK . Трикутники AOK і BOK рівні, тому й дуги AK і BK дорівнюють одна одній. ▲

2. Побудуйте кут, більший від даного удвічі.

✓ Нехай AOB — даний кут (мал. 250). Опишемо дугу кола із центром O . Нехай вона перетне сторони даного кута в точках A і B . З точки B , як із центра, зробимо засічку $BC = BA$ і проведемо промінь OC . Кут AOC удвічі більший за $\angle AOB$, бо $\angle AOB = \angle BOC$. ▲



Мал. 250

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

Виконайте усно

589. Чи правильне твердження: «Щоб поділити кут на дві рівні частини, треба провести його бісектрису»?

А

590. Поділіть даний кут на 4 рівні частини.

591. Побудуйте прямий кут.

592. Побудуйте кут, міра якого: а) 45° ; б) $22,5^\circ$; в) 60° ; г) 30° .

593. Побудуйте кут, утричі більший за даний гострий кут.

594. Поділіть даний відрізок на 4 рівні частини.

595. Як поділити навпіл відрізок, довжина якого в кілька разів більша за найбільший розхил циркуля?

596. Побудуйте відрізок, який у два рази більший за даний.

597. Побудуйте відрізок, у 3 рази більший за даний відрізок.

598. Поділіть дану дугу кола на чотири рівні частини.

599. Побудуйте трикутник, рівний даному трикутнику.

600. Побудуйте рівносторонній трикутник за даною його стороною.

601. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і бічною стороною.

602. Побудуйте прямокутний трикутник за двома катетами.

603. Побудуйте трикутник за двома сторонами і кутом між ними.

604. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і кутом при вершині.

605. Побудуйте трикутник за стороною і прилеглими кутами.

606. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і кутом при основі.

Б

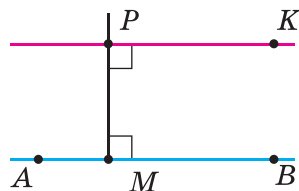
607. Побудуйте трикутник зі сторонами 3 см, 4 см і 5 см.

608. Побудуйте трикутник і проведіть його медіани.

609. Дано трикутник. Побудуйте його бісектриси.

610. Дано трикутник. Побудуйте його висоти. Розгляньте всі можливі варіанти.

611. Щоб через дану точку P провести пряму, паралельну AB , можна спочатку провести $PM \perp AB$, а потім $PK \perp PM$ (мал. 251). Обґрунтуйте цю побудову.



Мал. 251

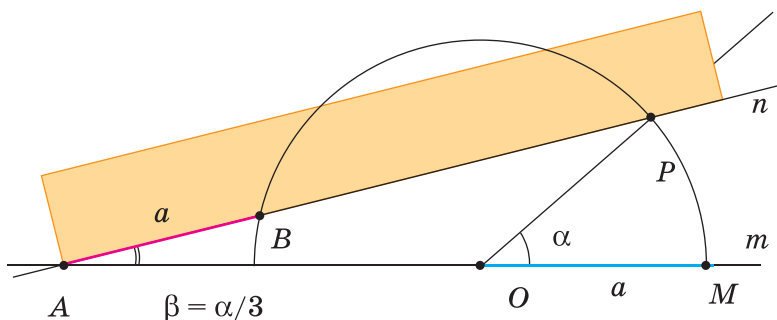
612. Через дану точку проведіть пряму, яка перетинає дану пряму під даним кутом.

613. *Історична задача (Стародавня Греція, V ст. до н.е.).* За допомогою циркуля та лінійки поділити даний довільний кут на три рівні частини.

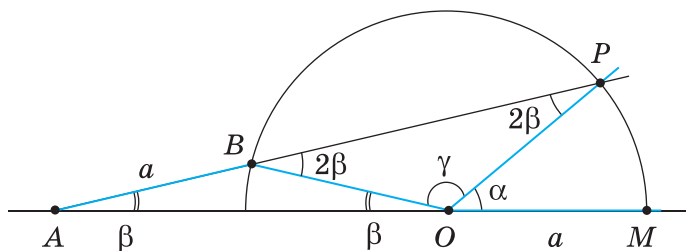
Архімед розв'язував цю задачу за допомогою «вставки».

Нехай α — даний кут. Опишемо з вершини кута коло радіуса a , де a — відстань між позначками на лінійці (мал. 252, а). Через точку P проведемо пряму так, щоб довжина відрізка між точками B і A дорівнювала a . Одержимо $\angle OAB = \beta$.

Скориставшись малюнком 252, б, доведіть, що за цих умов $\alpha = 3\beta$.



Мал. 252, а



Мал. 252, б

Практичне завдання

614. Побудуйте квадрат. Поділіть його кут на три рівні частини двома способами: а) методом Архімеда за допомогою вставки; б) за допомогою циркуля та лінійки без поділок.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

615. Доведіть, що кожна сторона квадрата $ABCD$ з прямою AC утворює кути по 45° .
616. Визначте вид трикутника, у якому сума двох кутів менша від третього.
617. Під яким кутом перетинаються дві медіани рівностороннього трикутника?

§ 21*. ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

З геометричними побудовами мають справу різні фахівці. Геометричні побудови виконують креслярі, архітектори, конструктори, топографи, геодезисти, штурмани. Геометричні фігури будують також: слюсар — на жерсті, столяр — на дошці, кравець — на тканині, садівник — на землі.

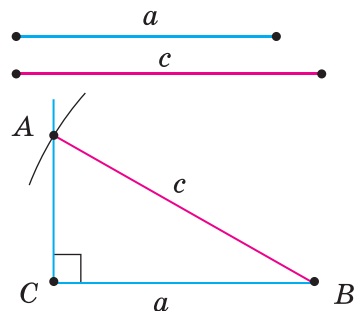
У задачі на побудову вимагається побудувати геометричну фігуру, яка повинна задовольняти певні умови. У геометрії побудови виконують найчастіше за допомогою лінійки і циркуля. Домовимось, що, коли в задачі не говориться, якими інструментами треба виконувати побудови, маються на увазі тільки лінійка (без поділок) і циркуль.

Складніші задачі на побудову часто розв'язують *методом геометричних місць*. Нехай, наприклад, у задачі треба знайти точку X , що задовольняє дві умови. Якщо першу умову задовольняють точки фігури K , а другу — точки фігури P , то точка X має належати кожній із цих фігур. Тобто X — точка перетину фігур K і P .

ЗАДАЧА 1

Побудуйте прямокутний трикутник за даним катетом a і гіпотенузою c (мал. 253).

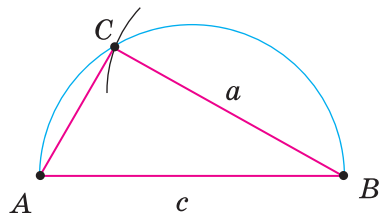
РОЗВ'ЯЗАННЯ. *Перший спосіб.* Будуємо прямий кут ACB . На його стороні відкладаємо відрізок $CB = a$. Точки C і B — дві вершини трикутника, який треба побудувати. Третя вершина має лежати, по-перше, на промені CA , по-друге, на відстані c від точки B , тобто на колі радіуса c із центром B . Якщо це коло перетинає промінь CA в точці A , то трикутник ABC — той, який треба було побудувати. Адже його кут C — прямий, $BC = a$, $BA = c$.



Мал. 253

Другий спосіб (мал. 254). Відкладаємо відрізок $AB = c$ і проводимо коло діаметра AB — ГМТ, з яких AB видно під прямим кутом. Далі будуємо коло радіуса a із центром B — ГМТ, віддалених від точки B на відстань a . Якщо два ГМТ перетинаються в точці C , то трикутник ABC — той, який вимагалось побудувати. Два розглянуті кола можуть перетинатися ще в одній точці — C_1 . Але трикутники ABC і ABC_1 рівні, тому вважаються одним розв'язком.

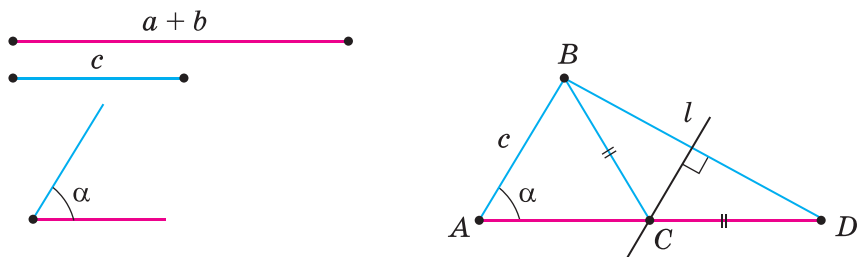
Складові частини розв'язання задачі на побудову — *аналіз, побудова, доведення і дослідження*. В аналізі шукається спосіб розв'язування задачі, у побудові — виконується побудова, у доведенні — обґрунтовується правильність виконаної побудови, у дослідженні — з'ясовується, скільки розв'язків має задача.



Мал. 254

ЗАДАЧА 2

Побудуйте трикутник за даною стороною, прилеглим до неї кутом і сумою двох інших сторін (мал. 255).



Мал. 255

РОЗВ'ЯЗАННЯ.

Аналіз. Припустимо, що потрібний трикутник ABC побудовано. Його сторона $AB = c$ і $\angle A = \alpha$ — дані. Дано також відрізок, який дорівнює сумі сторін a і b . За даними відрізками c і $a + b$ та кутом A між ними можна побудувати $\triangle ABD$. Вершиною C шуканого трикутника буде така точка відрізка AD , для якої $CD = CB$. Отже, точка C повинна лежати і на серединному перпендикулярі відрізка BD .

Побудова. За двома даними відрізками і кутом між ними будуємо $\triangle ABD$, після чого проводимо серединний перпендикуляр l до відрізка BD . Нехай пряма l перетинає відрізок AD в точці C . Проводимо відрізок CB . Трикутник ABC — той, який вимагалось побудувати.

Доведення. У трикутнику ABC $AB = c$ і $\angle A = \alpha$ за побудовою. $AC + CB = AC + CD = a + b$. Отже, $\triangle ABC$ задовольняє всі умови задачі.

Д о с л і д ж е н н я. Задача має розв'язок тільки за умови, що $a + b > c$.
Зверніть увагу! Якщо задача нескладна і спосіб її розв'язування відомий, аналіз можна не описувати. А в розв'язанні не обов'язково виділяти аналіз, побудову, доведення і дослідження.

Для допитливих

У математиці найчастіше мають справу із задачами: на обчислення, на доведення, на побудову, на перетворення і на дослідження. Геометричними задачами на побудову активно цікавилися античні геометри. Допускаючи тільки *класичні побудови* (які виконуються лише лінійкою і циркулем), вони досліджували, які з побудов можна виконати, а які не можна. Зокрема, з'ясовували:

- 1) чи можна будь-який кут поділити на три рівні частини;
- 2) чи можна побудувати квадрат, площа якого дорівнювала б площі даного круга;
- 3) чи можна побудувати ребро такого куба, об'єм якого був би у 2 рази більший за об'єм даного куба.

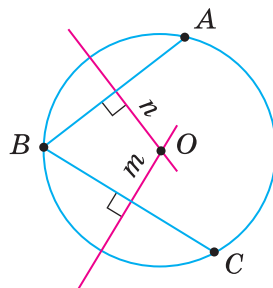
Багато століть видатні геометри намагалися розв'язати ці задачі і не змогли. Ці *три класичні задачі* давнини дістали спеціальні назви: 1) *трисекція кута*; 2) *квадратура круга*; 3) *подвоєння куба*. Останню задачу називають ще *делоською задачею*, пов'язуючи її з давньогрецькою легендою, за якою оракул бога Аполлона погодився врятувати жителів острова Делос від чуми, якщо кубічний жертвник у делоському храмі замінять жертвником такої самої форми, але вдвічі більшого об'єму. І майже через 2000 років учені переконалися, що жодну із цих трьох задач за допомогою лише лінійки і циркуля розв'язати не можна.

Тепер фахівці, яким доводиться виконувати геометричні побудови, користуються не тільки лінійкою і циркулем. Багато побудов виконують на комп'ютері за допомогою спеціального програмного забезпечення.

З погляду класичних методів такі побудови *наближені*. Але для практичних потреб точність, яку забезпечують наближені методи, цілком достатня.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Якими інструментами найчастіше виконують побудови в геометрії?
2. Назвіть складові частини розв'язання задачі на побудову.
3. Що таке *трисекція кута*, *квадратура круга*, *подвоєння куба*?



Мал. 256

Виконаємо разом

1. Знайдіть центр даного кола.
- ▼ Позначимо на даному колі три довільні точки A , B і C (мал. 256).

Проведемо хорди AB , BC і побудуємо їх серединні перпендикуляри n і m .

Точка O , у якій перетинаються прямі n і m , — центр даного кола.

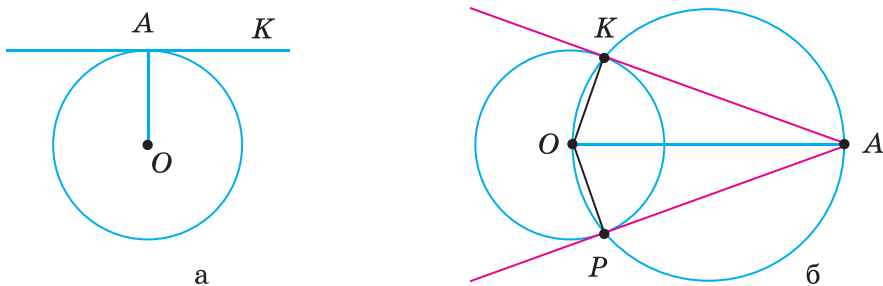
Адже $OA = OB = OC$. ▲

2. Через дану точку проведіть дотичну до даного кола.

▼ Якщо дана точка A лежить на колі із центром O (мал. 257, а), проводимо промінь OA , а потім — пряму AK , перпендикулярну до OA . Пряма AK — дотична, яку треба було побудувати.

Якщо точка A лежить поза даним колом із центром O (мал. 257, б), то на діаметрі OA описуємо коло. Воно перетнеться з даним колом у двох точках K і P . Прямі AK і AP — шукані дотичні, бо $AK \perp OK$ і $AP \perp OP$ (із точок K і P допоміжного кола його діаметр OA видно під прямими кутами AKO і APO). У цьому випадку задача має два розв'язки.

Якщо точка A лежить усередині кола, задача не має розв'язку, бо дотичну провести не можна. ▲



Мал. 257

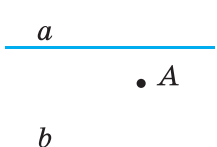
ЗАДАЧІ І ВПРАВИ

А

618. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і висотою, проведеною до основи.
619. Побудуйте прямокутний трикутник:
- 1) за гіпотенузою і гострим кутом;
 - 2) за гіпотенузою і катетом;
 - 3) за катетом і прилеглим до нього гострим кутом;
 - 4) за катетом і протилежним кутом.
620. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.
621. Побудуйте трикутник за двома сторонами і висотою, проведеною:
- 1) до однієї з них;
 - 2) до третьої сторони.

- 622.** Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник:
 1) за даним катетом;
 2) за гіпотенузою;
 3) за медіаною, проведеною до гіпотенузи.
- 623.** Знайдіть на даній прямій точку, яка лежить на даній відстані від іншої даної прямої.
- 624.** Знайдіть на даній прямій точку, яка лежить на однакових відстанях від двох даних точок.
- 625.** Побудуйте коло, яке дотикається до сторін даного кута, причому до однієї з них — у даній точці.
- 626.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом описаного кола.
- 627.** Побудуйте трикутник за двома сторонами і радіусом описаного кола.
- 628.** Побудуйте трикутник за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, і радіусом описаного кола.
- 629.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за радіусом описаного кола і основою.

Б

- 630.** Побудуйте прямокутний трикутник за радіусом описаного кола і гострим кутом. 
- 631.** Дано паралельні прямі a , b і точку A між ними (мал. 258). Побудуйте коло, що проходить через точку A і дотикається до прямих a і b .
- 632.** Побудуйте рівносторонній трикутник за радіусом описаного кола. Мал. 258
- 633.** Як побудувати спільну дотичну:
 а) до двох кіл, радіуси яких однакові;
 б) до двох кіл, радіуси яких різні?
- 634.** Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і висотою, проведеною з вершини прямого кута.
- 635.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і сумою двох інших сторін.
- 636.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом вписаного кола.
- 637.** Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і радіусом вписаного кола.
- 638.** Побудуйте геометричне місце точок, з яких даний відрізок a видно під кутом 90° .
- 639.** Побудуйте прямокутний трикутник за даними медіаною і висотою, проведеними до гіпотенузи.

640. Покажіть, як можна наближено поділити:

- коло на 7 рівних частин;
- довільний кут на 3 рівні частини;
- довільну дугу кола на 5 рівних частин.

Практичне завдання

641. Побудуйте коло радіуса 5 см і впишіть у нього рівносторонній трикутник ABC . За допомогою циркуля і лінійки поділіть кожную з дуг AB , BC і AC навпіл точками K , L і M відповідно. З'єднайте послідовно точки, щоб утворився шестикутник $AKBLCM$. Виміряйте його сторони і порівняйте з радіусом кола.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

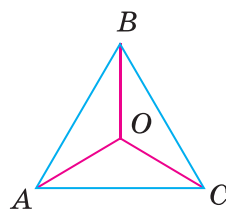
642. Висота рівностороннього трикутника дорівнює h , а радіуси вписаного й описаного кола r і R відповідно. Доведіть, що $r + R = h$.

643. З вершини B трикутника ABC проведено висоту BH і медіану BM . $AH = 3$ см, $AC = 10$ см. Знайдіть HM , якщо:

- $\angle A$ — гострий;
- $\angle A$ — тупий.

644. Доведіть, що бісектриси двох вертикальних кутів лежать на одній прямій.

645. Точку, рівновіддалену від усіх вершин рівностороннього трикутника, сполучили з його вершинами (мал. 259). Доведіть, що три утворені трикутники рівні. Чи буде правильним твердження задачі, якщо точка O лежить поза площиною трикутника?



Мал. 259

646. Радіуси двох кіл — 3 см і 5 см. Чи перетинаються кола, якщо відстань між їх центрами дорівнює: а) 1 см; б) 3 см; в) 8 см; г) 10 см?



Геометрія навколо нас



Поштова площа у м. Києві



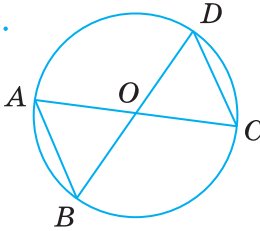
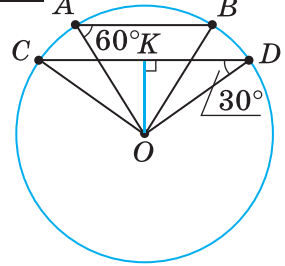
Торговий центр на Бесарабці у м. Києві

ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

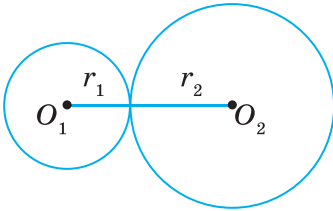
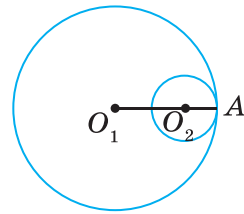
А

Б

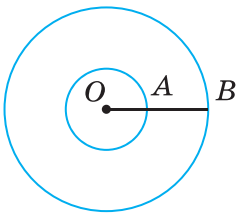
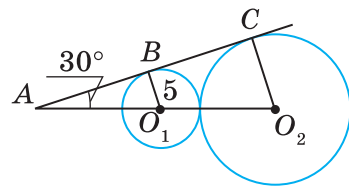
1

 AC, BD — діаметри.Довести:
 $AB \parallel CD$. $AB = 8, \angle A = 60^\circ,$ $\angle D = 30^\circ.$ OK

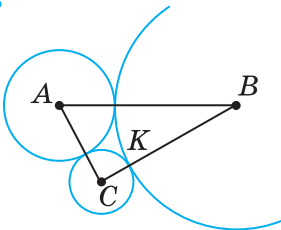
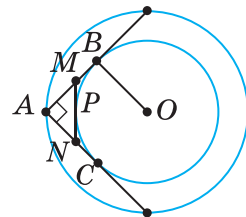
2

 $r_1 : r_2 = 2 : 3, O_1O_2 = 15.$
 r_1, r_2  $O_1A = 3O_2A, O_1O_2 = 10.$ O_1A, O_2A 

3

 $OB = 2,5OA,$ $AB = 18.$ AO, OB  BC — спільна дотична. CO_2 

4

 $CK = 2, KB = 7,$ $P_{\triangle ABC} = 24.$ AB  B, P, C — точки дотику, $P_{\triangle AMN} = 12.$ OB 

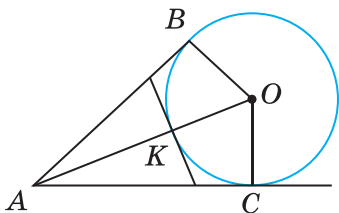
ЗАДАЧІ ЗА ГОТОВИМИ МАЛЮНКАМИ

А

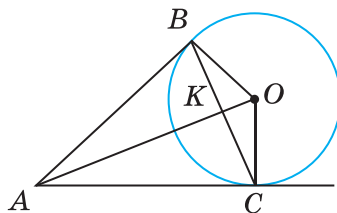
Б

5

$$\frac{\angle A = 60^\circ, OB = 5.}{AK}$$

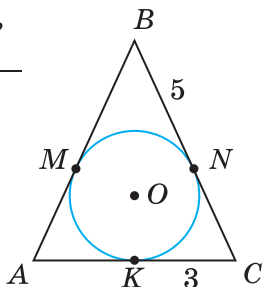


$$\frac{\angle BAC = 60^\circ, OB = 6.}{AK}$$



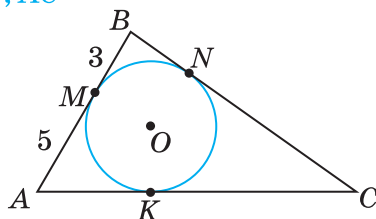
6

$$\frac{AB = BC, BN = 5, KC = 3.}{P_{\triangle ABC}}$$



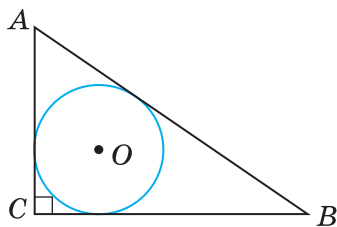
$$\frac{MB = 3, AM = 5, P_{\triangle ABC} = 30.}{BC, AC}$$

BC, AC



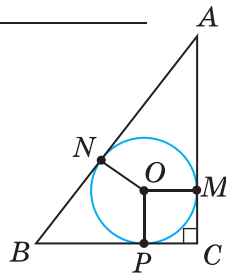
7

$$\frac{AB = 25, AC = 7, BC = 24.}{r}$$



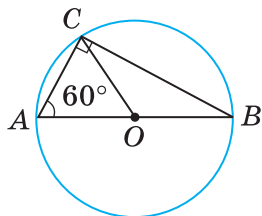
$$\frac{AN : NB = 3 : 2, ON = 4, P_{\triangle ABC} = 48.}{AB, BC, AC}$$

AB, BC, AC



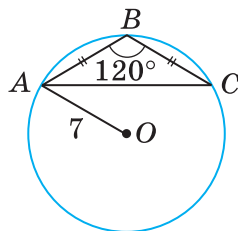
8

$$\frac{AC = 10.}{AO}$$



$$\frac{OA = 7, \angle B = 120^\circ, AB = BC.}{AB}$$

AB



Самостійна робота 5**Варіант 1**

- 1°. Знайдіть довжину чверті кола радіуса 10 см.
- 2°. Коло, вписане у трикутник, дотикається до його сторін AB , BC й AC в точках M , H і K відповідно. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $AK = 4$ см, $HC = 5$ см, $MB = 2$ см.
- 3°. Сформулюйте означення серединного перпендикуляра до відрізка.

Варіант 2

- 1°. Знайдіть площу чверті круга радіуса 20 см.
- 2°. Коло, вписане у трикутник, дотикається до його сторін AB , BC й AC в точках M , H і K відповідно. Знайдіть MB , якщо периметр трикутника ABC дорівнює 34 см, $AK = 6$ см, $HC = 8$ см.
- 3°. Сформулюйте означення дотичної до кола.

Варіант 3

- 1°. Радіус вписаного в прямокутний трикутник кола дорівнює 5 см. На скільки сума його катетів більша за гіпотенузу?
- 2°. Коло, вписане у трикутник, дотикається до його сторін AB , BC й AC в точках M , H і K відповідно. Знайдіть периметр трикутника ABC , якщо $BH = 3$ см, $KC = 4$ см, $AM = 6$ см.
- 3°. Сформулюйте означення кола, описаного навколо трикутника.

Варіант 4

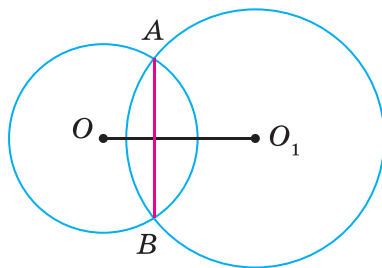
- 1°. Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює r .
- 2°. Коло, вписане у трикутник, дотикається до його сторін AB , BC й AC в точках M , H і K відповідно. Знайдіть HC , якщо периметр трикутника ABC дорівнює 24 см, $BA = 3$ см, $AK = 4$ см.
- 3°. Сформулюйте означення кола, вписаного в трикутник.

Тестові завдання **5**

1. Діаметр кола дорівнює 6 см. Довжина кола дорівнює:	а) 6л см; б) 3л см; в) 9л см; г) 36л см.
2. Центр кола, вписаного в трикутник, є точкою перетину його:	а) бісектрис; б) медіан; в) висот; г) серединних перпендикулярів.
3. Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, лежить на середині:	а) медіани; б) катета; в) гіпотенузи; г) бісектриси.
4. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть радіус описаного кола.	а) 10 см; б) 6 см; в) 4 см; г) 12 см.
5. Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см. Знайдіть радіус вписаного кола.	а) 4 см; б) 8 см; в) 12 см; г) 2 см.
6. Із точки A до кола проведено дотичні AB й AC (B і C — точки дотику). Яке з тверджень правильне?	а) $AB = AC$; б) $AB < AC$; в) $AB > AC$; г) $AB \neq AC$.
7. Кола радіусів 3 см і 7 см дотикаються зовні. Знайдіть відстань між центрами цих кіл.	а) 2 см; б) 4 см; в) 10 см; г) 5 см.
8. Знайдіть ширину кільця, утвореного концентричними колами радіусів 3 см і 5 см.	а) 8 см; б) 2 см; в) 4 см; г) 4л см.
9. З точки A до кола із центром O проведено дотичну AB (B — точка дотику). Тоді $\angle ABO$:	а) гострий; б) прямий; в) тупий; г) розгорнутий.
10. Геометричним місцем точок площини, рівновіддалених від даної точки, є:	а) коло; б) квадрат; в) круг; г) куб.

ТИПОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

- 1°. Накресліть коло діаметра 5 см. Чому дорівнює його радіус?
- 2°. Чи мають спільні точки два кола, якщо їх радіуси дорівнюють 2 см і 5 см, а відстань між їх центрами становить 8 см?
- 3°. Знайдіть геометричне місце точок, які лежать на відстані 1 см від кола радіуса 5 см із центром у точці O .
- 4°. Навколо трикутника ABC з кутами $\angle A = 30^\circ$ і $\angle B = 60^\circ$ описано коло. Знайдіть його радіус, якщо $AB = 10$ см.
- 5°. Кут між двома радіусами кола дорівнює 130° . Знайдіть кут між дотичними, проведеними через кінці цих радіусів.
- 6°. Два кола мають зовнішній дотик, а відстань між їх центрами дорівнює 16 см. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо вони відносяться як 3 : 5.
- 7°. З точки A до кола із центром O проведемо дотичні AM і AN (M і N — точки дотику). K — точка перетину відрізків MN і AO . Знайдіть AK і KO , якщо $OM = 8$ см і $\angle MON = 120^\circ$.
- 8°. Центр кола, описаного навколо трикутника, належить його висоті. Доведіть, що трикутник рівнобедрений.
- 9°. Доведіть, що коли два кола із центрами O і O_1 перетинаються в точках A і B , то $AB \perp OO_1$ (мал. 260).



Мал. 260

- 10°. У прямокутний трикутник з кутом 30° вписано коло, яке дотикається до сторін трикутника в точках M , P та E . Знайдіть кути трикутника MPE .

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ 4

Коло — фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. *Круг* — частина площини, обмежена колом. Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку і лежить у площині кола, називають *дотичною* до кола. *Хорда* кола — відрізок, кінці якого належать даному колу. Найбільша хорда кола — його *діаметр*.

Діаметр кола, проведений через середину хорди, відмінної від діаметра, перпендикулярний до неї.

Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.

Точки дотику кола до сторін кута рівновіддалені від його вершини.

Коло, яке проходить через усі вершини трикутника, називають *описаним* навколо даного трикутника. Коло, яке дотикається до всіх сторін трикутника, — *вписане* в даний трикутник. Навколо будь-якого трикутника можна описати коло і в будь-який трикутник можна вписати коло.

Центром кола, вписаного в трикутник, є точка перетину бісектрис трикутника.

Центр кола, описаного навколо трикутника, — точка перетину серединних перпендикулярів до сторін даного трикутника.

Серединний перпендикуляр до відрізка — пряма, яка перпендикулярна до даного відрізка і проходить через його середину.

Діаметр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює його гіпотенузі.

Діаметр кола, вписаного в прямокутний трикутник з катетами a і b та гіпотенузою c , дорівнює $a + b - c$.

Геометричне місце точок — це множина точок, які мають певну властивість.

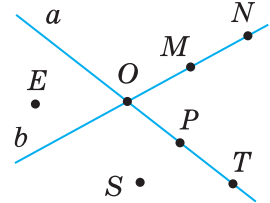
Геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр цього відрізка. Йдеться про фігури однієї площини.

Геометричне місце точок кута, рівновіддалених від його сторін, — бісектриса цього кута.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

До § 1

647. Користуючись малюнком 261, укажіть:
- у якій точці перетинаються прямі a і b ;
 - які точки належать прямій a , прямій b ;
 - які точки не належать жодній з прямих a і b ;
 - чи належить точка O прямій a , прямій b .



Мал. 261

648. Точки A , B і C лежать на прямій a . Точки M , N і K не лежать на прямій a . Зобразіть це на малюнку.
649. $M \in a$, $N \notin a$, $K \notin a$, причому N і K лежать по різні боки від прямої a . Зобразіть це на малюнку.
650. На прямій a дано точки A і B . Зобразіть точки M і N так, щоб точка M лежала між точками A і B , а точка B — між точками M і N .
651. Зобразіть на малюнку:
- три прямі, які перетинаються в одній точці;
 - три прямі, дві з яких не перетинаються;
 - три прямі, які попарно перетинаються у трьох точках.
- На скільки частин у кожному випадку прямі розбивають площину?

До § 2

652. M — внутрішня точка відрізка AB . Знайдіть довжину відрізка AB , якщо $BM = 5$ см і:
- відрізок AM на 2 см більший за відрізок BM ;
 - відрізок AM у 3 рази більший за відрізок BM ;
 - $AM : BM = 3 : 2$;
 - $AB = 3 AM$.
653. Точки A , B і C лежать на одній прямій, причому відрізок AB у 3 рази менший від відрізка BC . Знайдіть відрізки AB і BC , якщо $AC = 8$ см. Скільки розв'язків має задача?
654. Точки A , B , C і D лежать на одній прямій, причому $AB = 2$ см, $BC = 4$ см, $CD = 7$ см. Чому дорівнює відрізок AD ? Розгляньте всі можливі варіанти.
655. Точка C — середина відрізка AB , точка D — середина відрізка AC . Знайдіть відношення $AD : AB$, $AD : BC$, $BC : DC$.
656. Точка C — середина відрізка AB , точка D — середина відрізка CB . Знайдіть довжину відрізка AB , якщо:
- $CD = 2$ см;
 - $BC - CD = 3$ см;
 - $AC - DC = 4$ см.

657. M — внутрішня точка відрізка AB . K і P — середини відрізків AM і MB відповідно. Знайдіть довжину відрізка KP , якщо $AB = 10$ см.
658. Точка M — середина відрізка AB , а точка K ділить відрізок AM у відношенні $AK : KM = 1 : 2$. Знайдіть довжину відрізка MK , якщо:
а) $AB = 12$ см; б) $BM = 9$ см; в) $MB - AK = 10$ см.
659. На прямій a лежать точки A , B і C , причому $AB = 12$ см, $AC + CB = 15$ см. Знайдіть довжини відрізків AC і BC .
660. Точки A , B і C лежать на одній прямій. $BC = 6$ см, $AB + AC = 10$ см. Знайдіть довжини відрізків AB і AC .
661. $AB = 10$ см. Точка C — середина відрізка AB . На прямій AB знайдіть усі точки D , такі що: $DA + DB + DC = 12$ см. Зобразіть ці точки на малюнку.
662. Точки A і B лежать по різні боки від прямої a , $M \in a$. $AM = 10$ см, $BM = 15$ см, $AB = 23$ см. Чи є точка M точкою перетину прямих AB й a ?
663. Є лінійка з поділками 0, 3 см і 7 см. Як за допомогою цієї лінійки побудувати відрізок завдовжки 4 см; 11 см?

До § 3

664. OM — внутрішній промінь кута AOB . Знайдіть $\angle AOM$ і $\angle BOM$, якщо $\angle AOB = 80^\circ$ і:
а) $\angle AOM$ у 3 рази менший від $\angle MOB$;
б) $\angle BOM$ на 20° більший за $\angle AOM$;
в) $\angle AOM : \angle BOM = 1 : 3$;
г) $\angle BOM = \angle AOM$.
665. Прямий кут розбили двома внутрішніми променями на кути, один з яких на 20° більший за другий і на 20° менший від третього. Знайдіть ці кути.
666. OC — бісектриса кута AOB , OM — бісектриса кута AOC . Знайдіть $\angle AOB$, якщо $\angle MOC = 20^\circ$.
667. $\angle AOB = 80^\circ$, $\angle BOC = 20^\circ$, OM — бісектриса кута AOC . Знайдіть $\angle MOC$. Розгляньте всі можливі варіанти.
668. OC — бісектриса кута AOB , OM — внутрішній промінь кута AOC . Знайдіть $\angle AOM$ і $\angle AOB$, якщо $\angle MOC = 60^\circ$ і $\angle AOM : \angle MOC = 1 : 3$.
669. Розгорнутий кут поділено променем на два кути так, що половина одного з них дорівнює третині іншого. Знайдіть ці кути.
670. OC — бісектриса кута AOB , M — внутрішня точка кута AOC . Доведіть, що $\angle MOC$ дорівнює піврізниці кутів BOM і AOM .
671. OC — бісектриса кута AOB , OA — бісектриса кута MOC . Доведіть, що $\angle MOC$ дорівнює півсумі кутів AOM і BOM .
672. Є косинець із кутом 50° . Як за його допомогою побудувати кут: 100° ; 80° ; 160° ?

До § 4

673. $\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні кути. Визначте $\angle AOB$, якщо:
- $\angle BOC = 50^\circ$;
 - $\angle BOC$ більший за $\angle AOB$ на 20° ;
 - $\angle BOC$ менший від $\angle AOB$ у 4 рази;
 - $\angle AOB : \angle BOC = 3 : 2$;
 - $\angle AOB - \angle BOC = 30^\circ$.
674. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює $35^\circ 25'$. Обчисліть інші кути.
675. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, у 2 рази більший за інший. Визначте міри утворених кутів.
676. Прямі AB і CD перетинаються в точці O , причому $\angle AOC = 130^\circ$. Знайдіть кут між бісектрисами кутів:
- $\angle COB$ і $\angle BOD$;
 - $\angle COB$ і $\angle AOD$.
677. Прямі AB і CD перетинаються в точці O . Доведіть, що бісектриси кутів BOC і AOC перпендикулярні.
678. Прямі AB і CD перетинаються в точці O . OE — бісектриса кута BOD , $\angle DOE = 55^\circ$. Знайдіть $\angle AOC$ і $\angle COB$.
679. $\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні кути, OE — бісектриса кута BOC , $\angle EOC = 45^\circ$. Доведіть, що $OB \perp AC$.
680. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, у 9 разів менший від суми трьох інших кутів. Знайдіть ці кути.
681. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, у 4 рази більший за суму двох суміжних із ним кутів. Знайдіть ці кути.

До § 5

682. За допомогою транспортира побудуйте $\angle AOB$, який дорівнює 70° . M — внутрішня точка кута AOB . Через точку M проведіть прямі, перпендикулярні до сторін кута.
683. За допомогою транспортира побудуйте $\angle AOB$, який дорівнює 120° . M — внутрішня точка кута AOB . Через точку M проведіть прямі, паралельні сторонам кута.
684. Площа квадрата $ABCD$ дорівнює 16 см^2 . Знайдіть відстань від точки A до сторін BC і CD .
685. Периметр прямокутника $ABCD$ дорівнює 20 см . AB менша від BC на 2 см . Побудуйте даний прямокутник і знайдіть відстань від точки A до сторін BC і CD .
686. $\angle AOB$ і $\angle BOC$ — суміжні кути. Чи перпендикулярні промені OM і ON (M — внутрішня точка кута AOB , N — внутрішня точка кута BOC), якщо:

- а) $\angle BOC = 50^\circ$, ON — бісектриса кута BOC , $\angle AOM = 70^\circ$;
 б) $\angle AOB : \angle BOC = 2 : 1$, $\angle MOB = \frac{1}{3} \angle AOB$, $\angle CON = 10^\circ$;
 в) $\angle AOB - \angle BOC = 20^\circ$, $\angle MOB = \angle NOC = 40^\circ$;
 г) $\angle BOC = \frac{2}{3} \angle AOB$, $\angle NOC : \angle NOB = 1 : 2$, $\angle AOM - \angle BOM = 24^\circ$?

До § 6

687. Чи паралельні прямі a і b (мал. 262), якщо:

- а) $\angle 1 = 40^\circ$, $\angle 2 = 140^\circ$;
 б) $\angle 1$ у 3 рази менший від $\angle 2$, а $\angle 2$ на 90° більший за $\angle 1$;
 в) $\angle 1 : \angle 2 = 1 : 4$, а $\angle 1$ на 108° менший від $\angle 2$?

688. BM — бісектриса кута ABC (мал. 263).

Чи паралельні прямі a і b , якщо:

- а) $\angle 1 = 160^\circ$, $\angle ABM = 80^\circ$;
 б) $\angle CBM = 50^\circ$, $\angle 1 = 120^\circ$;
 в) $\angle ABM$ у 2 рази менший від $\angle 1$?

689. Запишіть пари паралельних прямих (мал. 264), якщо:

- а) $\angle 1 = 120^\circ$, $\angle 2 = 70^\circ$, $\angle 3 = 60^\circ$;
 б) $\angle 1 = 120^\circ$, $\angle 3 = 80^\circ$, $\angle 4 = 100^\circ$;
 в) $\angle 2 = 60^\circ$, $\angle 3 = 80^\circ$, $\angle 4 = 120^\circ$;
 г) $\angle 3 = \angle 2 = 60^\circ$, $\angle 4 = 120^\circ$.

690. Доведіть, що протилежні сторони квадрата лежать на паралельних прямих.

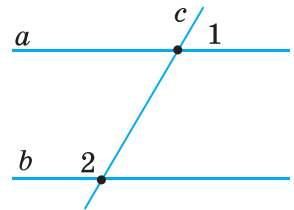
691. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle BAD$ у 2 рази менший від $\angle ABC$, а $\angle ABC$ на 60° більший за $\angle BAD$. Доведіть, що $BC \parallel AD$.

692. У чотирикутнику $ABCD$ пряма BD ділить навпіл $\angle ABC$ і $\angle ADC$. Чи паралельні протилежні сторони чотирикутника, якщо:

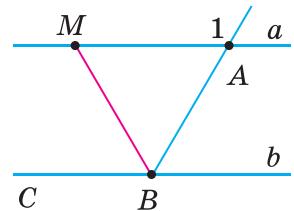
- а) $\angle ABC = 140^\circ$, $\angle BDC = 70^\circ$;
 б) $\angle ABC = \angle ADC$?

693. Запишіть пари паралельних прямих (мал. 265), якщо:

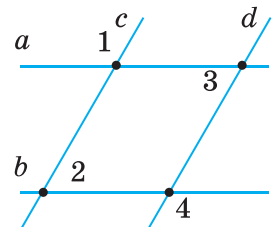
- а) $\angle 1 = 70^\circ$, $\angle 2 = 80^\circ$, $\angle 3 = 110^\circ$;
 б) $\angle 1 = 60^\circ$, $\angle 2 = 60^\circ$, $\angle 3 = 100^\circ$;
 в) $\angle 1 = 50^\circ$, $\angle 2 = 80^\circ$, $\angle 3 = 100^\circ$;
 г) $\angle 1 = \angle 2 = 40^\circ$, $\angle 3 = 140^\circ$.



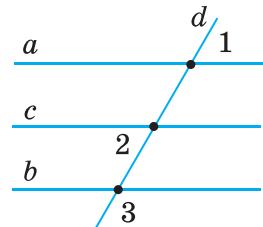
Мал. 262



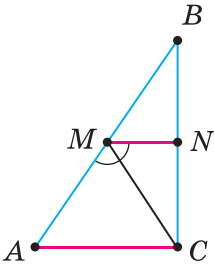
Мал. 263



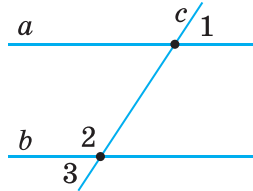
Мал. 264



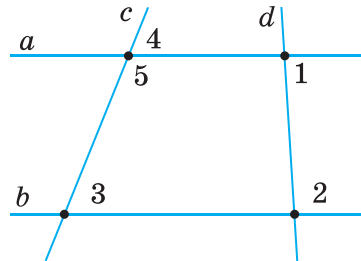
Мал. 265



Мал. 266



Мал. 267

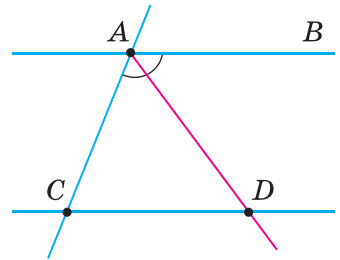


Мал. 268

694. На сторонах AB і BC трикутника ABC (мал. 266) узято точки M і N так, що MC — бісектриса кута AMN , $\angle ACM = 50^\circ$. Доведіть, що $MN \parallel AC$, якщо $\angle BMN = 80^\circ$.

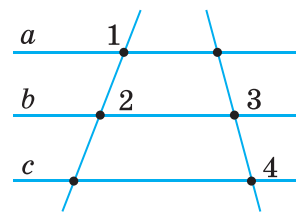
До § 7

695. Прямі a і b — паралельні (мал. 267). Знайдіть $\angle 3$, якщо:
- $\angle 1 = 70^\circ$;
 - $\angle 1$ на 30° менший від $\angle 2$;
 - $\angle 1 : \angle 2 = 4 : 5$;
 - $\angle 1$ становить $\frac{3}{5} \angle 2$.



Мал. 269

696. Розв'яжіть задачі, скориставшись малюнком 268:
- $\angle 1 = 80^\circ$, $\angle 2 = 100^\circ$, $\angle 3 = 60^\circ$. Знайдіть $\angle 4$;
 - $\angle 4 = \angle 3$, $\angle 2 = 2 \angle 1$. Знайдіть $\angle 1$ і $\angle 2$;
 - $\angle 1 = 55^\circ$, $\angle 2 = 125^\circ$, $\angle 5 : \angle 3 = 3 : 1$. Знайдіть $\angle 4$;
 - $\angle 3 = 70^\circ$, $\angle 5 = 110^\circ$, $\angle 2 - \angle 1 = 70^\circ$. Знайдіть $\angle 1$ і $\angle 2$.



Мал. 270

697. $AB \parallel CD$, AD — бісектриса кута CAB (мал. 269). $\angle ADC = 50^\circ$. Знайдіть $\angle ACD$.
698. На сторонах AB і BC трикутника ABC взято точки M і N так, що $MN \parallel AC$ (див. мал. 266). $\angle ACM = 65^\circ$, MC — бісектриса кута AMN . Знайдіть $\angle BMN$ і $\angle BAC$.
699. Чи паралельні прямі a і c (мал. 270), якщо:
- $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, $\angle 3 = \angle 4$;
 - $\angle 2 = 50^\circ$, $\angle 3 = 100^\circ$, $\angle 4 = 100^\circ$, $\angle 1 - \angle 4 = 30^\circ$;
 - $\angle 2 : \angle 3 = 1 : 2$, $\angle 3 - \angle 2 = 60^\circ$, $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 4 = 130^\circ$?

До § 8

700. Доведіть, що кути, утворені при перетині двох перпендикулярних прямих, — рівні.
701. Доведіть, що зовнішні різносторонні кути, утворені січною з паралельними прямими, — рівні.
702. Доведіть, що зовнішні односторонні кути, утворені січною з паралельними прямими, в сумі дорівнюють 180° .
703. Доведіть, що протилежні сторони прямокутника паралельні.
704. Доведіть, що бісектриси зовнішніх різносторонніх кутів, утворених січною з паралельними прямими, — паралельні.
705. На прямій послідовно взято точки A, B, C і D . Точка M — середина відрізка BC , $AB = CD$. Доведіть, що точка M — середина відрізка AD .
706. У чотирикутнику $ABCD$ $BC \parallel AD$. Доведіть, що сума кутів A і B даного чотирикутника дорівнює сумі кутів C і D .
707. У трикутнику ABC $P \in AB$, $K \in BC$, $PK \parallel AC$. Доведіть, що кути трикутника ABC дорівнюють кутам трикутника PBK .
708. Через точку на площині проведено 4 прями. Доведіть, що принаймні один з утворених кутів менший від 47° .

До § 9

709. Знайдіть периметр трикутника, якщо одна з його сторін дорівнює 5 см, друга — на 3 см більша, а третя — на 3 см менша від суми перших двох сторін.
710. Чи існує трикутник, у якого одна сторона в 2 рази більша за другу, третя — на 1 см менша від другої, а периметр дорівнює 11 см?
711. Дві сторони трикутника дорівнюють 2 см і 3 см. Якому цілому числу сантиметрів може дорівнювати третя сторона трикутника?
712. З вершини B трикутника ABC проведено висоту BK . Знайдіть довжину відрізка KC , якщо $AC = 10$ см, $AK = 3$ см. Розгляньте випадки, коли:
а) $\angle A$ — гострий; б) $\angle A$ — тупий.
713. У $\triangle ABC$ проведено висоту BK . $AK : KC = 3 : 5$, $AC = 16$ см. Знайдіть довжину відрізків AK і KC , якщо: а) $\angle A$ — гострий; б) $\angle A$ — тупий.
714. Висота і медіана прямокутного трикутника, проведені з вершини прямого кута, ділять кут на три рівні частини. Знайдіть кут між висотою і бісектрисою, проведеною із цієї вершини.
715. З вершини тупого кута B трикутника ABC проведено висоту, бісектрису і медіану. Кут між бісектрисою і висотою у 2 рази більший за кут між бісектрисою і медіаною. Знайдіть ці кути, якщо кут між висотою і медіаною дорівнює 60° .

До § 10

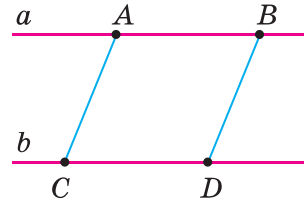
716. Знайдіть кути трикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3 і 7.
717. Знайдіть внутрішні кути трикутника, якщо один із них у 3 рази більший за інший, а зовнішній кут при третій вершині дорівнює 100° .
718. Знайдіть внутрішні кути трикутника, якщо його зовнішні кути пропорційні числам 3, 4 і 5.
719. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо кут між висотою і бісектрисою, проведеними з вершини прямого кута, дорівнює 20° .
720. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведено висоту CH . Доведіть, що $\angle HCB = \angle CAB$.
721. Знайдіть кути трикутника ABC , якщо $\angle B = 100^\circ$, а бісектриса BK є одночасно і висотою.
722. Один із кутів трикутника на 20° більший за другий і на 50° менший від третього. Знайдіть кут між бісектрисами менших кутів цього трикутника.
723. У трикутнику ABC $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. Знайдіть кут між:
а) бісектрисами, проведеними з вершин A і C ;
б) висотами, проведеними з вершин A і C .
724. Доведіть, що кут між висотою і бісектрисою, проведеними з вершини B нерівнобедреного трикутника ABC , дорівнює піврізниці кутів A і C .

До § 11

725. Точка M ділить відрізок AB на два відрізки завдовжки 5 см і 7 см. На які відрізки поділить точка N відрізок CD , якщо $CD = AB$ і $CN : ND = 1 : 5$?
726. $\angle AOB = \angle COD$, OM — внутрішній промінь кута COD , $\angle COM : \angle MOD = 2 : 3$, а $\angle MOD - \angle COM = 30^\circ$. Знайдіть $\angle AOB$.
727. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 50^\circ$. Знайдіть $\angle C_1$.
728. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. $AC = 7$ см, $AB - BC = 2$ см. Знайдіть сторони трикутника $A_1B_1C_1$, якщо його периметр дорівнює 21 см.
729. Чи рівні кути трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, якщо $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 80^\circ$, а кути трикутника $A_1B_1C_1$ пропорційні числам 7, 5 і 8?
730. Чи рівні квадрати $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, якщо периметр квадрата $ABCD$ дорівнює 20 см, а площа квадрата $A_1B_1C_1D_1$ дорівнює:
а) 36 см^2 ; б) 25 см^2 ?
731. Радіус одного з кіл — 5 см, а довжина іншого — 10π см. Чи рівні ці кола?
732. Довжина одного з кіл — 14π см, а площа круга, обмеженого другим колом, — $64\pi \text{ см}^2$. Чи рівні ці кола?

До § 12

733. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O . $AD \parallel CB$ і $AD = CB$. Доведіть, що $\triangle AOD = \triangle COB$.
734. Рівні відрізки AB і CD перетинаються так, що $\angle ABC = \angle BCD$. Доведіть, що $AC = BD$.
735. Дано відрізок AB і точки C і D так, що $\angle ACB = \angle ADB$ і $\angle CAB = \angle ABD$. Доведіть, що $AC = BD$. Розгляньте випадки, коли точки C і D лежать в одній півплощині відносно прямої AB і в різних півплощинах.
736. На паралельних прямих a і b взято точки A, B, C і D , як показано на малюнку 271. $AB = CD$. Доведіть, що $AC \parallel BD$.
737. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O . $AO = CO$, $BO = DO$. Доведіть, що $\angle OBD = \angle ODB$.
738. У колі із центром O проведено діаметри AB і CD . Доведіть, що $AC = BD$ і $AC \parallel BD$.
739. На колі із центром O по один бік від діаметра AD взято точки B і C так, що $\angle AOB = \angle COD$. Доведіть, що $BD = AC$.
740. CD — медіана трикутника ABC , C_1D_1 — медіана трикутника $A_1B_1C_1$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, якщо $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$.
741. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Доведіть, що бісектриси, проведені з вершин B і B_1 , — рівні.
742. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Доведіть, що висоти, проведені з вершин A і A_1 , — рівні.
743. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Доведіть, що медіани, проведені з вершин B і B_1 , — рівні.



Мал. 271

До § 13

744. Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 110° . Обчисліть інші кути трикутника.
745. Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 80° . Обчисліть інші кути трикутника. Скільки розв'язків має задача?
746. Одна зі сторін рівнобедреного трикутника на 3 см більша за іншу. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 21 см. Розгляньте всі можливі випадки.
747. На основі AC рівнобедреного трикутника ABC взято точки M і N так, що $AM = CN$. Доведіть, що $\triangle MBN$ — рівнобедрений.
748. Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 100° . Під яким кутом перетинаються:

- а) рівні бісектриси трикутника;
 б) продовження рівних висот трикутника?
749. У $\triangle ABC$ медіана AM перпендикулярна до бісектриси BK . Знайдіть BC , якщо $AB = 10$ см.
750. Доведіть, що медіани, проведені до бічних сторін рівнобедреного трикутника, — рівні.
751. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O . $AO = CO$, $BO = DO$, $AO \neq BO$. K — точка перетину прямих AD і BC . Доведіть, що $\triangle DKB$ — рівнобедрений. Розгляньте випадки:
 а) $AO < BO$; б) $AO > BO$.
752. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут між бісектрисами, проведеними до бічних сторін, у 2 рази більший за кут при вершині.
753. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині дорівнює куту між бісектрисами, проведеними до основи і до бічної сторони.
754. У рівнобедреному трикутнику ABC кут при вершині B у 2 рази менший від кута при основі, AD — бісектриса, $D \in BC$. Доведіть, що $\triangle CAD$ і $\triangle ADB$ — рівнобедрені.

До § 14

755. Дано відрізок AB і точки C та D поза прямою AB так, що $AC = BD$ і $AD = BC$. Доведіть, що $\triangle ACB = \triangle BDA$. Розгляньте різні випадки розміщення точок C і D .
756. Протилежні сторони чотирикутника $ABCD$ попарно рівні. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle CDA$.
757. Протилежні сторони чотирикутника $ABCD$ попарно рівні. Доведіть, що вони паралельні.
758. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O , $AO = CO$, $BO = DO$. Доведіть, що $\triangle ADB = \triangle CBD$.
759. У середині рівнобедреного трикутника ABC з основою AC взято точку D так, що $AD = CD$. Доведіть, що $\angle ADB = \angle CDB$.
760. Точки C і D лежать по різні боки від прямої AB , $AC = AD$ і $BC = BD$. Доведіть, що AB — бісектриса кута CAD .
761. Трикутники ACB і ADB мають спільну основу AB , $AC = AD$, $BC = BD$. Доведіть, що $AB \perp CD$.
762. Точки C і D лежать по один бік від прямої AB , $AC = BD$ і $AD = CB$. Доведіть, що $\triangle AOB$ — рівнобедрений, де O — точка перетину відрізків AD і BC .
763. Точки C і D лежать по один бік від прямої AB , $AC = BD$ і $AD = CB$. Доведіть, що $\triangle AKB$ — рівнобедрений, де K — точка перетину прямих AC і BD .

До § 15

764. У трикутнику ABC $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 80^\circ$. Укажіть найбільшу і найменшу сторони трикутника.
765. У трикутнику ABC $AB : 2 = BC : 3 = AC : 7$. Укажіть найбільший і найменший кути трикутника.
766. Доведіть, що найбільша сторона трикутника лежить проти найменшого зовнішнього кута.
767. У трикутнику ABC на стороні AC взято точку K так, що $AB = KB$. Доведіть, що $\angle A > \angle C$.
768. Висота BK трикутника ABC ділить сторону AC у відношенні $AK : KC = 1 : 3$. Порівняйте кути A і C .
769. Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 3 см і 6 см. Визначте третю сторону трикутника.
770. Одна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 39 см, а периметр — 157 см. Знайдіть інші сторони трикутника.
771. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 10 см. Яким натуральним числом може виражатися довжина третьої сторони?
772. Одна сторона трикутника дорівнює 0,6 см, друга — у 3 рази більша. Знайдіть периметр трикутника, якщо довжина третьої сторони — натуральне число.
773. Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 5 см і 2 см. Чи може довжина висоти, проведеної до основи, виражатися натуральним числом?
774. Бічна сторона й основа рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють 5 см і 6 см. Знайдіть довжину висоти, проведеної до основи, скориставшись теоремою Піфагора (див. с. 114).

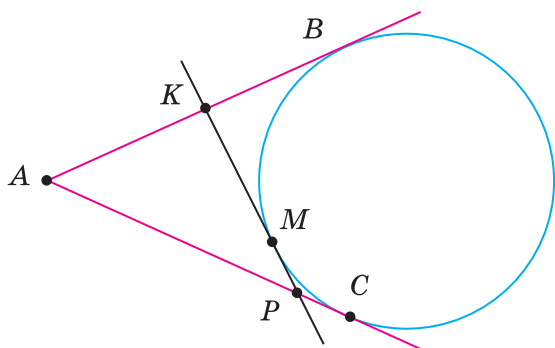
До § 16

775. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо один із них у 4 рази більший за інший.
776. Кути трикутника пропорційні числам 1, 2 і 3. Доведіть, що трикутник — прямокутний.
777. Один із кутів трикутника дорівнює сумі двох інших. Доведіть, що трикутник — прямокутний.
778. Один із катетів прямокутного трикутника більший за інший на 7 см і менший від гіпотенузи на 1 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 30 см.
779. Медіана трикутника дорівнює половині сторони, до якої її проведено. Доведіть, що трикутник — прямокутний.
780. Знайдіть менший катет прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 10 см, а один із кутів — 30° .

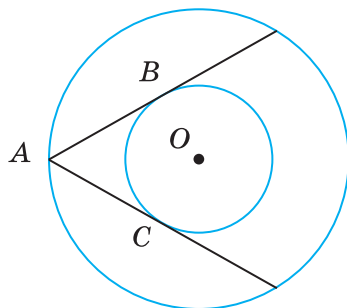
781. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а один з кутів — 30° . Знайдіть відрізки, на які висота, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу.
782. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, BP — бісектриса, $BP = 5$ см. Знайдіть AC .
783. У трикутнику ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $CK \perp AB$, $K \in AB$. Знайдіть відстань від точки K до сторони BC , якщо $AC = 8$ см.
784. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 10 см. Знайдіть довжину висоти, проведеної з вершини прямого кута.
785. Катети рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнюють по 10 см. CK — висота, проведена з вершини прямого кута. Знайдіть відстань від точки K до катетів.
786. M , N , P і K — середини сторін квадрата $ABCD$. Доведіть, що $MNPK$ — квадрат.

До § 17

787. Хорда AB кола із центром O дорівнює радіусу цього кола. Знайдіть $\angle AOB$.
788. Знайдіть відстань від центра O кола радіуса r до хорди AB , якщо $\angle AOB = 120^\circ$.
789. Діаметри AB і CD кола із центром O — перпендикулярні. Доведіть, що $\angle ACB = 90^\circ$.
790. У колі із центром O проведено хорди AB і CD . $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle COD = 120^\circ$. Яка з хорд лежить далі від центра кола і чому?
791. Хорди AB і CD — паралельні й лежать на однаковій відстані від центра кола. Доведіть, що $AB = CD$.
792. Дано два кола з радіусами 3 см і 5 см. Як розміщені ці кола, якщо відстань між їх центрами дорівнює: а) 6 см; б) 8 см; в) 10 см?
793. Два кола дотикаються зовні. Відстань між їх центрами дорівнює 12 см. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо один із них більший за інший на 2 см.
794. Два кола мають внутрішній дотик. Відстань між їх центрами дорівнює 8 см. Знайдіть радіуси кіл, якщо один із них у 3 рази менший за інший.
795. Три кола із центрами O_1 , O_2 і O_3 попарно дотикаються одне до одного зовнішнім способом. Знайдіть їх радіуси, якщо вони пропорційні числам 2, 3 і 4, а периметр трикутника $O_1O_2O_3$ дорівнює 36 см.
796. З точки A до кола проведено дотичні AB і AC . Пряма KP дотикається до кола в точці M (мал. 272). Знайдіть довжини відрізків AB і AC , якщо периметр трикутника AKP дорівнює 36 см.
797. З точки A до кола із центром O проведено дотичні AB і AC , $\angle BOC = 120^\circ$, $AB = 7$ см. Знайдіть периметр трикутника ABC .



Мал. 272



Мал. 273

798. Знайдіть ширину кільця, утвореного концентричними колами радіусів 10 см і 7 см.
799. Знайдіть радіуси двох концентричних кіл, якщо вони відносяться як 2 : 5, а ширина кільця дорівнює 9 см.
800. Дано два концентричні кола. Із точки A кола радіуса 10 см до кола меншого радіуса проведено дотичні AB і AC (мал. 273). Знайдіть радіус меншого кола, якщо $\angle BAC = 60^\circ$.

До § 18

801. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців хорди AB кола із центром O .
802. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців основи рівнобедреного трикутника.
803. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від вершин рівностороннього трикутника.
804. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін рівностороннього трикутника.
805. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від двох прямих, що перетинаються.
806. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до двох паралельних прямих.
807. Дано коло із центром O радіуса r . Знайдіть геометричне місце точок, які лежать на відстані $2r$ від точки O .
808. Дано коло радіуса 10 см. Знайдіть геометричне місце центрів кіл з радіусами 3 см, які з даним колом мають дотик:
а) зовнішній; б) внутрішній.
809. Дано два кола рівних радіусів, які дотикаються зовні. Доведіть, що геометричним місцем точок, рівновіддалених від центрів кіл, є спільна дотична цих кіл, яка проходить через точку дотику.

До § 19

810. Кут B прямокутного трикутника ABC дорівнює 60° , катет BC — 5 см. Знайдіть радіус описаного кола.
811. Сторони прямокутного трикутника ABC дорівнюють 9 см, 12 см і 15 см. Знайдіть радіуси описаного і вписаного кіл.
812. У прямокутний трикутник з гіпотенузою 20 см вписано коло радіуса 3 см. Знайдіть периметр даного трикутника.
813. Точка дотику кола, вписаного у трикутник, ділить одну з його сторін на відрізки завдовжки 5 см і 7 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 44 см.
814. У трикутнику ABC сторона AC дорівнює 15 см. Точка дотику вписаного в трикутник кола ділить сторону AB у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини A . Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 42 см.
815. Сторони трикутника дорівнюють 5 см, 7 см і 10 см. Знайдіть відрізки, на які точка дотику вписаного кола ділить найбільшу сторону трикутника.
816. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, кут при основі — 30° . Знайдіть радіус описаного кола.
817. У трикутнику центри вписаного й описаного кіл збігаються. Знайдіть кути трикутника.
818. У трикутник ABC вписано коло, $BC = a$. Доведіть, що відстань від точки A до найближчої точки дотику дорівнює $p - a$, де p — півпериметр трикутника ABC .
819. У прямокутний трикутник зі сторонами $AB = 10$ см, $AC = 8$ см і $BC = 6$ см вписано коло. MN — дотична до кола, проведена паралельно до сторони BC ($M \in AB$, $N \in AC$). Знайдіть периметр трикутника AMN .
820. Дано $\triangle ABC$ зі сторонами 7 см, 9 см і 10 см. На його менших сторонах AB і BC взято точки P і K так, що пряма PK дотикається до кола, вписаного в трикутник. Знайдіть периметр трикутника PBK .

До § 20*

821. Поділіть даний відрізок у відношенні 1 : 3.
822. Побудуйте прямий кут і проведіть його бісектрису.
823. Побудуйте прямокутний трикутник із катетами 3 см і 4 см.
824. Побудуйте трикутник зі сторонами 5 см, 7 см і 9 см.
825. Побудуйте рівнобедрений трикутник з основою a і бічною стороною b .

826. Побудуйте рівнобедрений трикутник з основою a і кутом при основі α .
827. Побудуйте гострокутний і тупокутний трикутники та впишіть у них кола.
828. Побудуйте прямокутний трикутник із катетами a і b та опишіть навколо нього коло.
829. Побудуйте трикутник зі сторонами a і b та кутом між ними 120° . Знайдіть центр описаного кола та опишіть це коло.
830. Побудуйте трикутник за двома сторонами і зовнішнім кутом при їх спільній вершині.
831. Накресліть дві паралельні прямі, відстань між якими дорівнює даному відрізку.

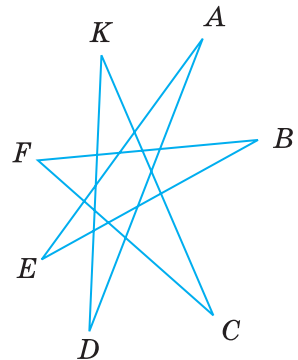
До § 21*

832. Побудуйте трикутник, периметр якого дорівнює 18 см, а сторони пропорційні числам 2, 3 і 4.
833. Побудуйте прямокутник, периметр якого дорівнює 20 см, а нерівні сторони відносяться як 2 : 3.
834. Дано прямі a і c , що перетинаються, і відрізок KP . На прямій a вкажіть точку, віддалену від прямої c на відстань KP .
835. Побудуйте трикутник за двома сторонами і висотою, проведеною до однієї із цих сторін.
836. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте кут, який дорівнює:
а) 30° ; б) 60° ; в) 15° ; г) 120° ; ґ) 150° ; д) 75° .
837. Побудуйте трикутник за двома його зовнішніми кутами і стороною, що з'єднує вершини цих кутів.
838. Опишіть навколо даного кола:
а) квадрат; б) рівносторонній трикутник.
839. Впишіть у дане коло:
а) квадрат; б) рівносторонній трикутник.
840. Дано коло радіуса r . Побудуйте геометричне місце середин його хорд, довжина яких дорівнює r .
841. Дано точки A , B і C . Проведіть через точку A пряму, рівновіддалену від точок B і C .
842. Навколо даного кола опишіть трикутник, два кути якого дані.
843. Побудуйте коло даного радіуса, дотичне до обох сторін даного кута.
844. Побудуйте коло даного радіуса, яке б дотикалося до однієї сторони даного кута і мало б центр на другій його стороні.
845. Побудуйте коло даного радіуса, яке б дотикалося до даної прямої в даній її точці.

846. Побудуйте геометричне місце точок, з яких дане коло видно під:
а) прямим кутом; б) кутом 60° .
847. Побудуйте коло, що дотикається до кожного з двох даних концентричних кіл.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

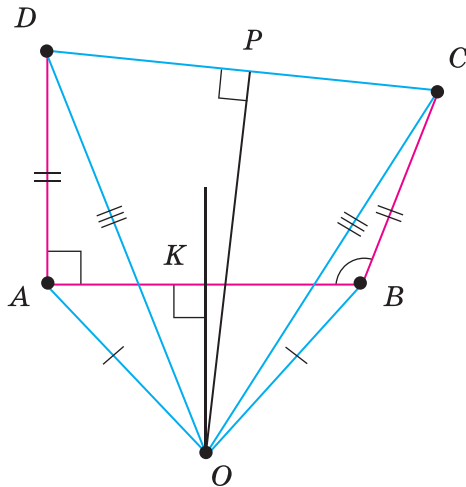
848. Відстань від Землі до Сонця дорівнює приблизно 149 500 тис. км, а до Місяця — 400 тис. км.
Знайдіть відстань від Місяця до Сонця під час:
а) сонячного затемнення;
б) місячного затемнення.
849. Точки A, B і C лежать на одній прямій; точки K, P і T — середини відрізків AB, AC і BC відповідно. Доведіть, що $KP = BT$.
850. Точка C — середина відрізка AB . Знайдіть на відрізку AB таку точку X , щоб виконувалась рівність $XA = 1,5(XB + XC)$.
851. Один із суміжних кутів у три рази більший за їх різницю. Знайдіть міри цих кутів.
852. Точки A, B, C і D розміщені на площині так, що $AB = BC = CA$ і $DA = DB = DC$. Знайдіть міру кута ADB .
853. Знайдіть суму кутів A, B, C, D, E, F і K семикутної зірки (мал. 274).
854. У середині трикутника ABC взято довільну точку X . Доведіть, що кут AXC більший за кут ABC .
855. Побудуйте кут на 25 % більший за даний гострий кут.
856. Чи можуть дві висоти трикутника точкою перетину ділитися навпіл?
857. Знайдіть периметр трикутника, якщо від однієї сторони трикутника він більший на a , від другої — на b , а від третьої — на c .
858. Доведіть, що сума медіан трикутника менша від його периметра, але більша за півпериметр.
859. Доведіть, що будь-який трикутник можна розрізати на кілька рівнобедрених трикутників.
860. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AC = AO = BO = BD$. Доведіть, що $OC = OD$.
861. Відрізок BB_1 — бісектриса трикутника ABC . Доведіть, що $AB > AB_1$ і $BC > B_1C$.
862. Доведіть, що сума відстаней від довільної точки основи гострокутного рівнобедреного трикутника до його бічних сторін є сталою.



Мал. 274

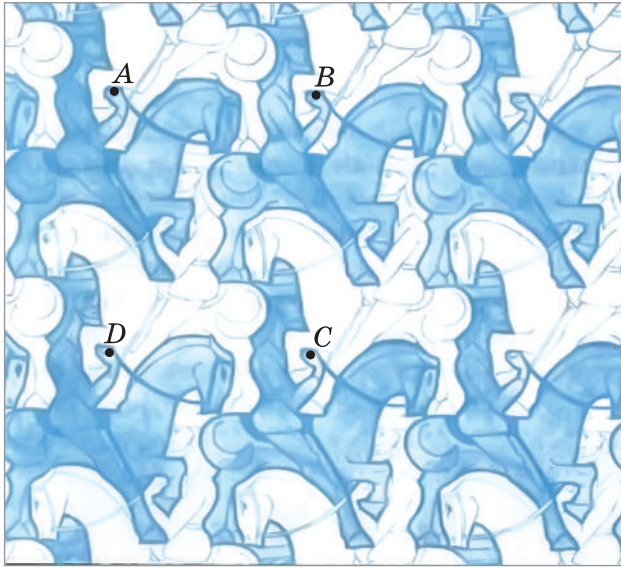
863. У трикутнику ABC $AB = BC$, $\angle B = 20^\circ$. На стороні AB взято точку M таку, що $BM = AC$. Знайдіть кут ACM .
864. Гострі кути прямокутного трикутника відносяться як $1 : 3$. Доведіть, що бісектриса його прямого кута дорівнює одному з катетів.
865. Один із гострих кутів прямокутного трикутника на n° більший за інший. Знайдіть кут між медіаною і висотою трикутника, проведенними з вершини прямого кута.
866. Висота і медіана, проведені з вершини трикутника, ділять його кут на три рівні частини. Знайдіть кути цього трикутника.
867. Доведіть, що кожен сторону трикутника із центра вписаного в нього кола видно під тупим кутом.
868. Навколо рівностороннього трикутника ABC описано коло. Точка K кола лежить усередині кута C . Доведіть, що $KA + KB = KC$.
869. Гіпотенуза прямокутного трикутника в 4 рази довша за проведену до неї висоту. Знайдіть міри гострих кутів трикутника.
870. Знайдіть помилку в міркуваннях.

Доведемо, що прямий кут дорівнює тупому. Нехай $\angle ABC$ — тупий, а $\angle DAB$ — прямий (мал. 275). Відкладемо $AD = BC$, проведемо відрізок DC і серединні перпендикуляри KO і PO до відрізків AB та CD . Вони перетнуться в деякій точці O , бо прямі AB і CD — не паралельні. Сполучивши точку O з точками A, B, C і D , одержимо рівні трикутники OAD і OBC (за трьома сторонами). Отже, $\angle OAD = \angle OBC$. Кути OAB і OBA також рівні. Тому $\angle DAB = \angle ABC$, тобто прямий кут дорівнює тупому.



Мал. 275

871. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і сумою катетів.
 872. Побудуйте прямокутний трикутник:
 1) за катетом і різницею двох інших його сторін;
 2) за гіпотенузою і різницею катетів.
 873. Усі вершини на конях, зображені на малюнку 276, — рівні фігури. Знайдіть площу однієї фігури, якщо точки A , B , C і D — вершини чотирикутника площею S .



Мал. 276

874. Побудуйте трикутник за двома кутами і різницею протилежних їм сторін.
 875. Дано тупокутний трикутник. Проведіть пряму, що відтинала б від нього трикутник, дві сторони і кут якого дорівнювали б двом сторонам і куту даного трикутника.
 876. Проведіть частину бісектриси кута, вершина якого недоступна (лежить за межею зошита).
 877. Побудуйте трикутник за його периметром і двома кутами.
 878. Розв'яжіть кросворд (мал. 277).

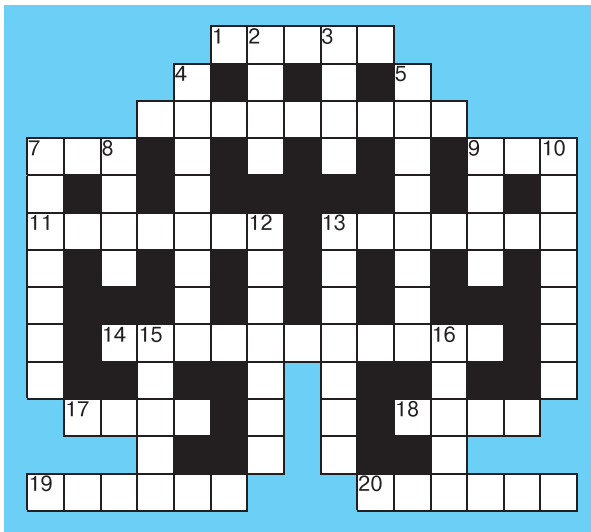
По горизонталі:

1. Основне геометричне поняття, що приймається без означення.
 6. Наука про геометричні фігури. 7. Захищена споруда в порту. 9. Система умовних знаків для передавання інформації. 11. Пряма, яка має з колом тільки одну спільну точку. 13. Неправильність у міркуваннях, побудовах тощо. 14. Частина геометрії про фігури на площині. 17. Восьма частина

прямого кута. **18.** Частина площини, обмежена колом. **19.** Частина круга.
20. Давньогрецький математик, автор книги «Основи».

По вертикалі:

2. Чотирикутник з рівними сторонами. **3.** Одиниця довжини. **4.** Кількісна характеристика предмета або явища. **5.** Тисячна частина метра.
7. Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони. **8.** Одиниця об'єму. **9.** Геометрична фігура. **10.** Найбільша хорда кола.
12. Твердження, яке приймається без доведення. **13.** Прилад для наближеного вимірювання площ. **15.** Норма, крайній ступінь обмеження.
16. Латинська літера.



Мал. 277

Про авторів епіграфів



Леонардо да Вінчі (1452–1519) — італійський архітектор, скульптор, художник, винахідник.

Спенсер Герберт (1820–1903) — англійський філософ, соціолог, психолог.

Олександр Степанович Смогоержевський (1896–1969) — український математик.

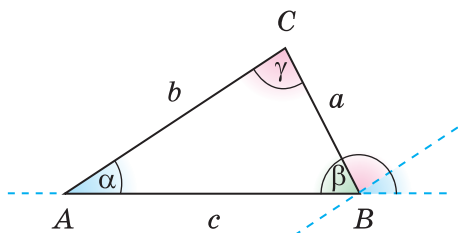
Прокл Діадок (410–485) — грецький філософ.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПОЗАКЛАСНОЇ РОБОТИ

I	СТВОРЮЄМО ЗБІРНИК ЗАДАЧ ІЗ ГЕОМЕТРІЇ	
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Щотижня кожний учень може скласти (або дібрати з додаткової літератури) і розв'язати одну задачу з теми, що вивчається. Текст задачі та її розв'язання подається вчителю та надсилається електронною поштою для створення бази. 2. Наприкінці чверті задачі систематизуються і пропонуються учням для розв'язування під час канікул. 3. Після канікул проводиться конкурс на кращу задачу та розв'язання. 4. Наприкінці року можна створити збірник задач (електронний чи паперовий), який містив би понад 500 задач, і подарувати його шкільній бібліотеці й майбутнім семикласникам. 	
		
II	ІНТЕГРОВАНІЙ ПРОЕКТ З МАТЕМАТИКИ, ІНФОРМАТИКИ ТА ІНОЗЕМНОЇ МОВИ НА ТЕМУ «ТРИКУТНИКИ»	
	<ol style="list-style-type: none"> 1. Кожний учень може брати участь у роботі однієї з двох проектних груп, які працюють над підтемами «Загальні відомості про трикутники» і «Рівність трикутників». 2. Результати роботи над проектом бажано оформити у вигляді групового портфоліо з комп'ютерною презентацією. Розподіл діяльності в групі можна здійснити в такий спосіб: науковець-консультант, дизайнер, історик, менеджер... 3. Про тему, мету, завдання та зміст проекту бажано дізнатися перед осінніми канікулами. Кожний учасник проекту має самостійно ознайомитися з основними поняттями й твердженнями теми, перекласти їх іноземною мовою та підготувати коротку комп'ютерну презентацію. 4. Захист проектів відбувається протягом двох днів перед вивченням теми «Трикутники» за участю учнів 7 класів, учителів математики, інформатики, іноземної мови, адміністрації школи та інших. 	

II

**ІНТЕГРОВАНІЙ ПРОЕКТ З МАТЕМАТИКИ,
ІНФОРМАТИКИ ТА ІНОЗЕМНОЇ МОВИ
НА ТЕМУ «ТРИКУТНИКИ»**

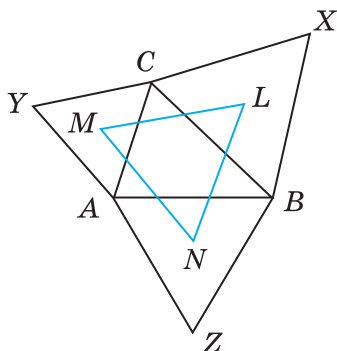


- Сума кутів трикутника дорівнює 180° .
- Die Summe der Innenwinkel in einem planaren (ebenen) Dreieck beträgt immer 180° .
- The measures of the interior angles of the triangle always add up to 180 degrees.

III

**МАТЕМАТИЧНИЙ ВЕЧІР НА ТЕМУ
«РЕКЛАМА В ГЕОМЕТРІЇ»**

1. Для реклами пропонуються два об'єкти: рівнобедрений трикутник і прямокутний трикутник (або коло і круг).
2. За допомогою *реклами* (спеціально підготовленої інформації про обрані види геометричних фігур) передбачається одержати «прибуток» у знаннях тих, хто готує рекламу, і тих, хто її слухає.
3. Замовники — учителі та батьки; споживачі — учні паралельних класів, друзі та знайомі.
4. Реклама може бути друкованою, сувенірною, аудіо-, відео-, комп'ютерною презентацією, усним повідомленням тощо.
5. Реклама має бути цікавою, зрозумілою, динамічною, правдивою і виділятися серед інших рекламних повідомлень.
6. У рекламній кампанії можуть брати участь усі бажаючі.
7. Ефективність рекламної кампанії оцінюється за результатами вікторини, у якій беруть участь і рекламодавці і споживачі реклами.
8. Реклама може базуватися як на суто математичних відомостях (Трикутник Наполеона), так і на використанні математичних знань у побуті (модульне оригамі).

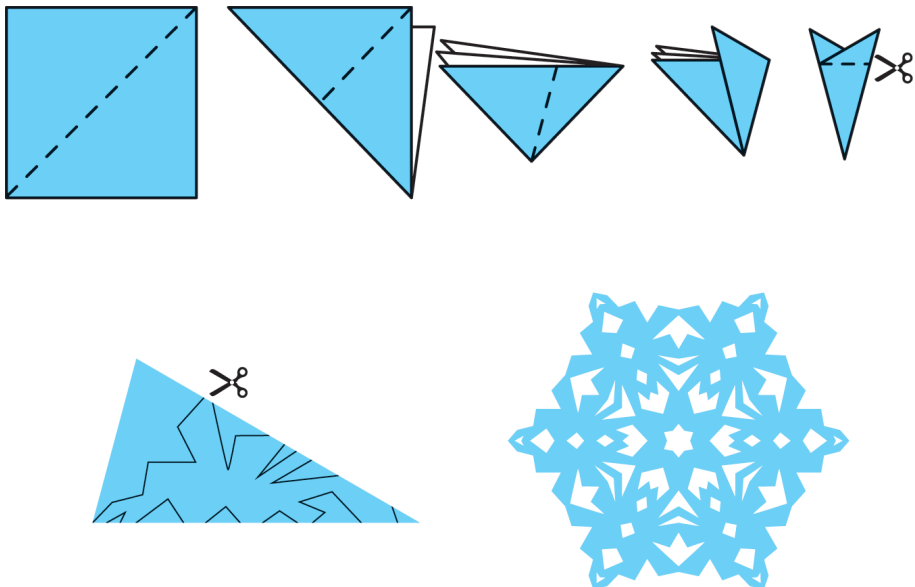


IV

**ВИСТАВКА-АУКЦІОН
«ГЕОМЕТРІЯ В МОЇХ РУКАХ»**

1. Кожний учень або невелика група учнів створюють своїми руками для виставки один або кілька експонатів, які супроводжуються короткою анотацією.
2. Експонати можуть стосуватися різних сфер життєдіяльності людини (вироби з дерева, металу та інших матеріалів; вишивки, орнаменти, прикраси, сувеніри; кондитерські вироби; іграшки тощо). Основна вимога — кожний експонат має співвідноситись із образом геометричної фігури.
3. В анотації відображається зв'язок експоната з геометрією, подаються цікаві відомості про сферу його застосування та коротко описується процес виготовлення чи створення експоната.
4. Виставка може проходити в кілька етапів. Правила проведення виставки-аукціону розробляються та повідомляються завчасно.

Схема виготовлення сніжинки



З ІСТОРІЇ ГЕОМЕТРІЇ

Геометрія — наука давня. Один грецький історик ще в V ст. до н. е. писав: «Геометрія, за свідченням дуже багатьох, була відкрита єгиптянами і виникла під час вимірювання землі. Це вимірювання було їм потрібне, бо внаслідок розливу Ніл постійно міняв своє русло. Немає нічого дивного в тому, що ця наука, як і інші, виникла з потреб людини».

З Єгипту геометричні відомості перейшли до Греції. Тут з'явилась і назва науки (від грецьких слів $\gamma\eta$ — «земля» і $\mu\epsilon\tau\rho\epsilon\omega$ — «міряю»). Отже, спочатку геометрією називали землемірство.

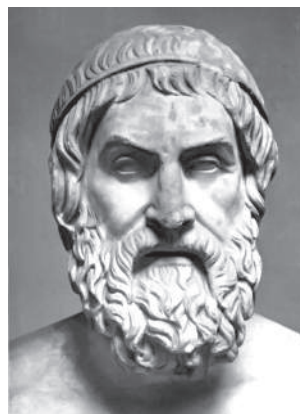
Згодом зміст геометрії розширився. Потрібні були люди, які вмели вимірювати не тільки земельні ділянки. Будівельникам треба було відкладати прямі кути, провішувати прямі лінії, креслити кола. Мореплавцям, щоб орієнтуватися за зоряним небом, часто доводилося вимірювати кути. Для цього ще задовго до початку нашої ери було створено астролябію.

Спочатку властивості геометричних фігур встановлювали на основі дослідів. Тільки в першому тисячолітті до нашої ери їх почали доводити як теореми.

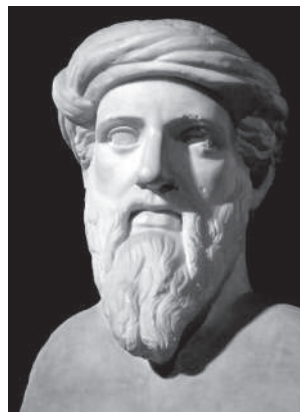
Одним із перших творців геометричної науки був давньогрецький учений **Фалес** (VI ст. до н. е.). Він довів теореми про рівність вертикальних кутів, про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника, про вписаний кут, який спирається на діаметр кола. Знав Фалес і другу ознаку рівності трикутників, і властивість прямокутного трикутника з кутом 45° . На основі останньої властивості він обчислив висоту єгипетської піраміди. Користуючись астролябією, Фалес передбачив сонячне затемнення 28 травня 585 р. до н. е.

Піфагор (VI ст. до н. е.) — давньогрецький філософ і математик. Зі своїми учнями він досліджував властивості чисел, геометричних фігур, небесних світил. У його школі було відкрито і доведено кілька геометричних теорем, зокрема про те, що в кожному прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів. Тепер відомо близько ста різних доведень теореми Піфагора.

Як наука геометрія вперше сформувалась у Стародавній Греції, коли геометричні закономірності й залежності, знайдені спочатку дослідним шляхом, було зведено в систему. Одна з математичних праць тих далеких часів дійшла і до нас.



Фалес



Піфагор

Це — «Основи» давньогрецького математика **Евкліда** (III ст. до н. е.). Вони складаються з тринадцяти книг-сувоїв, перші шість з яких присвячено планіметрії. Робота Евкліда цікава не тільки своїм багатим змістом, а й формою викладу. У ній спочатку сформульовано означення й аксіоми, а всі наступні твердження доведено як теореми.

Евклід не сам відкрив і довів усі викладені ним теореми. Багато зробили і його попередники. Але Евклід так вдало систематизував відомі йому математичні знання, що його «Основи» були впродовж 2000 років основним підручником з математики!



Евклід

Цікавий факт з біографії Евкліда. Одного разу цар запитав математика, чи немає в геометрії коротшого шляху, ніж той, що його пропонує Евклід у своїх книжках. На це Евклід відповів: «Ні, в математиці навіть для царів немає інших шляхів!..».

Після Евкліда багато зробили для розвитку геометрії Архімед, Аполлоній та інші давньогрецькі математики.

Наступні півтори тисячі років геометрія в Європі майже не розвивалась. Тільки в епоху Ренесансу вона почала відроджуватись.

Коли Правобережна Україна входила до складу Польщі, юнаки з багатьох українських міст, які навчалися у вищих школах, геометрію вивчали спочатку за латинським перекладом «Основ» Евкліда, а згодом — за польським підручником С. Гжепського, надрукованим у Кракові 1565 р. Його титульна сторінка українською мовою перекладається так: *«Геометрія, тобто Землемірна Наука, по-польськи коротко написана за грецькими і латинськими книжками. У ній знайдеш ти також, як наші землеміри вимірювали ниви волоками або ланами. Тут також про югер, скільки він в собі містить. А ще — як виміряти башти або що-небудь інше високе...»*.

Студентів Києво-Могилянської академії геометрії навчали не завжди, а коли навчали, то латинською мовою. Зберігся конспект лекцій з геометрії, прочитаних у 1707–1708 рр. відомим українським філософом і церковним діячем Феофаном Прокоповичем. У ньому пояснювалося: *«Геометрія розподіляється на загальну й спеціальну... Спеціальна геометрія інакше називається геодезією»*. Лекцію про геодезію Прокопович починав так: *«Спеціальна геометрія, яку іноді називають практичною геометрією, а іноді геодезією, є однією з найшляхетніших, найкорисніших і найцікавіших галузей математики»*.

Але із часом у школах вивченню практичної геометрії почали надавати дедалі менше уваги.

Особливо значними є внески в геометрію Р. Декарта, Л. Ейлера, М. І. Лобачевського.

Вам уже відома аксіома Евкліда про паралельні прями. Понад 2000 років сотні геометрів намагалися довести твердження, яке Евклід прийняв без доведення. Багато часу згаяно, багато паперу списано...

Але справжнього доведення так ніхто і не відшукав.

Микола Іванович Лобачевський (1792–1856) поклав край цим марним заняттям. Він показав, що твердження Евкліда не можна довести як теорему, і створив нову геометрію, яку тепер називають *геометрією Лобачевського*. Те, що зробив Лобачевський у геометрії, фахівці порівнюють з революційним переворотом Коперника в астрономії.

Лобачевський народився в Росії, а його рід походив з Волині.

З українських математиків найбільший внесок у розвиток геометрії зробили Г. Ф. Вороний, М. Є. Ващенко-Захарченко, О. С. Смогоржевський.

Георгій Феодосійович Вороний (1868–1908) народився в селі Журавка Чернігівської області. Був професором Петербурзького і Варшавського університетів. Досліджував питання про заповнення площини і простору рівними фігурами. Уважається творцем геометричної теорії чисел.

Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко (1825–1912) народився в селі Макіївка на Полтавщині. Навчався в Києві та Парижі, був професором Київського університету. Досліджував питання історії розвитку геометрії, надрукував кілька посібників з геометрії, переклав російською «Основи» Евкліда.

Олександр Степанович Смогоржевський (1896–1969) народився в селі Лісове на Вінниччині. Навчався в Немирові та Києві, був професором Київського політехнічного інституту. Досліджував питання, пов'язані з геометричними побудовами, надрукував кілька посібників і підручників, зокрема підручник з основ геометрії для студентів університетів. Його праці перекладено англійською, болгарською, японською та іншими мовами.

Розвивається геометрична наука і тепер. Геометрія продовжує служити людям. Ось що писав один із найвідоміших архітекторів ХХ ст. Ле Корбюзьє: «Ніколи ще до нашого часу ми не жили в такий геометричний період... Навколишній світ — це світ геометрії, чистий, істинний, бездоганий у наших очах. Усе навколо — геометрія».



М. Лобачевський



Г. Вороний

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аксиома	52	— Евклідова	52
— Евкліда	52	— елементарна	8
Астролябія	18	— Лобачевського	53
Бісектриса кута	20	— трикутника	73
— трикутника	72	Гіпотенуза	112
Вершина кута	17	Градус	18
— трикутника	72	Градусна міра кута	18
Вимірювальні прилади	13	Діаграма Ейлера	99
Висновок теореми	57	Діаметр кола	126
Висота трикутника	72	— круга	127
Відношення паралельності	40	Доведення	32
Відрізок	12	Довжина відрізка	12
— одиничний	12	— кола	128
Відстань між двома точками	12	Дотик двох кіл	127
— від точки до прямої	39	Дотична до кола	126
Властивість вимірювання		Елементи трикутника	72
відрізків	13	— кола	126
— вимірювання кутів	19	Етапи розв'язування задачі	
— вертикальних кутів	32	на побудову	148
— відкладання відрізків	13	Задачі на побудову	147
— відкладання кутів	19	Зовнішній кут трикутника	77
— зовнішнього кута		Катет	112
трикутника	77	Коло	126
— кутів трикутника	76	— вписане	137
— кутів, утворених при		— описане	136
перетині паралельних		Концентричні кола	127
прямих січною	52	Круг	127
— дотичної до кола	126	Кут	17
— паралельних прямих	51	— гострий	19
— прямокутного трикутника	113	— між двома прямими	39
— рівнобедреного трикутника	97	— прямий	19
— розміщення точок		— розгорнутий	18
на прямій	7	— тупий	19
— суміжних кутів	32	Кути вертикальні	32
Внутрішній промінь кута	19	— відповідні	45
Внутрішні точки відрізка	12	— внутрішні односторонні	45
Внутрішня область кута	17	— — різносторонні	45
Геометричне місце точок	131	— суміжні	32
Геометричні побудови	142	— трикутника	73
Геометрія	6	— чотирикутника	77

Лінійка	6	— доповняльні.....	8
Медіана трикутника	72	— співнапрямлені	60
Метод доведення від супротивного	46	Пряма	6
— геометричних місць	147	Прямі паралельні	39
Мінута.....	18	— перпендикулярні.....	39
Міра кута.....	18	Радіус кола	126
Наслідок	52	— круга	127
Нерівність трикутника	109	Рівність відрізків.....	12
Ознаки	58	— кутів.....	19
— паралельності прямих	46	— трикутників	81
— рівнобедреного трикутника	98	— фігур	81
— рівності трикутників.....	86	Румб	20
— — прямокутних трикутників.....	112	Секунда	18
Означення.....	58	Середина відрізка	13
Основа перпендикуляра	39	Січна двох прямих	45
— рівнобедреного трикутника	97	— кола.....	126
Паралельні відрізки	40	Сторона кута	17
— промені	40	— трикутника	72
Периметр трикутника	72	Сума кутів трикутника	76
Перпендикуляр	39	Твердження протилежні	47
— серединний.....	132	— супротивні	47
Планіметрія	6	Теорема.....	32, 57
Площина	6	— обернена до даної.....	58
Побудова бісектриси кута	143	Точка	6
— кута, що дорівнює даному... 142		— дотику	126
— перпендикулярної прямої... 143		Транспортир	18
— паралельної прямої	144	Трикутник.....	72
— трикутника за даними сторонами.....	142	— гострокутний.....	73
Побудови класичні.....	149	— прямокутний	73
— наближені	149	— рівнобедрений.....	97
Поділ відрізка навпіл	143	— рівносторонній.....	97
Похила	113	— різносторонній.....	97
Початок променя	8	— тупокутний	73
Проекція похилої.....	113	Умова теореми.....	57
Промені.....	7	Фігура геометрична	6
		Хорда кола	126
		Центр кола	126
		— круга.....	127
		Циркуль.....	126

ВІДПОВІДІ І ВКАЗІВКИ

7. АВ. 11. Так. 12. Не належить. 13. КР, РТ, КТ, РК, ТР, ТК. 16. 4. 19. Можна. 21. 6. На 16,17 або 18 частин. 28. 20,5 см. 29. 8 см. 31. 10 дм. 33. 1) 2 см; 6 дм; 20 км. 34. 21 см. 42. Так. 44. а) 5,9 см. 45. а) 0,6 дм. 46. 13 см. 48. 6 см. 50. а), б). Так. 52. 13 см і 7 см. 54. 3 см, 9 см, 11 см, 17 см. 62. 0,5 м. 65. 30°. 70. Ні. 73. 2° 15'; 83° 20'. 78. 90°. 79. Ні; може бути. 81. 15°; 2,5°. 82. 31° 15'. 83. 90° або 30°. 84. 180°; 60°. 85. 20°. 86. У 4 рази. 87. 45°. 89. 70° і 40°. 102. Ні. 104. 130°. 105. 20°. 106. а) 146°; г) 44° 13'. 108. а) 75° і 105°. 109. б) 72° і 108°. 111. 60°. 120. в) 50°, 130°, 50°, 130°. 121. 80°; 100°; 90°. 122. а) 120°. 124. 130°. 125. а) 55°. 127. Як 1 : 8; як 1 : 4. 140. Правильно. 143. 135° і 135°. 145. (0; 6), (6; 0); (0; -4), (-4; 0). Так. 150. а) 50°. 161. Ні. 162. а) 60° і 120°; г) 108° і 72°. 163. а) 0,1 Р, 0,2 Р, 0,3 Р, 0,4 Р. 172. а) 90°, 90°, 80°, 100°, 90°, 80°. 173. а) Так. 174. а) Так. 175. Так. 176. Так. 177. а) Так. 180. а) 90° і 90°; в) 120° і 60°. 181. а) Так. 182. а) $a \parallel b \parallel c$; в) $a \parallel b \parallel c$. 185. Так. 198. 145°, 35° і 145°. 199. 50° і 130°. 206. 40°. 209. 180°. 210. а) 65° і 115°. 216. 50°, 70° і 60°. 217. 86°. 218. 71°. 220. а) 6 см; б) 7 см. 222. б) Жодної; одну; безліч. 235. Твердження в). 238. Кути з відповідно паралельними сторонами не завжди рівні. 239. а) Ні; б) ні. 242. Твердження а). 246. а) Ні; б) ні; в) ні. 263. 15,8 см. 264. 6 см. 265. 39 см. 266. Так. 269. а) 4 см і 12 см; б) 6 см і 10 см; в) 8 см і 8 см; г) 5 см і 11 см. 272. 12 см, 6 см, 8 см. 273. 12 см. 274. 30 см. 275. 24 см. 276. 3 см. 277. 102 см. 279. 3 см. 287. 20 м. 288. 50°. 294. а) 36°, 54°, 90°; б) 15°, 75°, 90°; в) 54°, 54°, 72°. 297. а) 50°, 50° і 80°; б) 80°, 60° і 40°; в) 76°, 38° і 66°. 298. 130°. 299. Ні. 301. 60°, 40° і 80°. 302. 75° або 15°. 303. 15°. 304. а) 70°; б) 60°. 305. а) 60°, 30°; б) 60°, 30°. 306. а) 140°, 130°, 90°; в) 130°, 130°, 100°. 308. 180°. 309. 270°. 310. Ні. 312. 0,5 а. 313. 1,5. 314. Так. 315. Так. 316. 2 : 3. 327. Ні. 329. 12 см. 330. Так. 331. 70°; 3,8 см. 332. 60°, 60°, 60°. 333. Так. 340. Так. Ні. 341. 24 см. 345. 9л см²; 6л см. 346. 1,8л см². 348. 25л га. 349. 55°. 351. Так. 352. Так. 355. 12 см. 364. Бо $\Delta СТР = \Delta САВ$. 366. 8 см. 375. 40°, 80°. 376. Так. 377. 90°. 386. 67 см. 387. 2 см. 388. а) 50°. 389. б) $2p - 2b$; в) $p - 0,5a$. 390. а) 50°, 50°, 80° або 40°, 70°, 70°; б) 36°, 72°, 72° або 90°, 45°, 45°. 393. а) 25°; б) 75°; в) 40°. 394. а) 10 см, 20 см і 20 см; б) 15 см, 15 см і 20 см. 395. 30°. 396. 110°. 399. 15 см. 402. 20 см, 20 см, 10 см або 15 см, 15 см, 25 см. 404. а) 120°, 30°, 30°; б) 30°, 75°, 75° або 120°, 30°, 30°; в) 165°, 7,5°, 7,5°; г) 50°, 65°, 65° або 65°, 75,5°, 75,5°. 406. 50°, 50° і 80°. 407. За. 411. Лежать на прямій, яка перпендикулярна до АВ і проходить через її середину. 412. 80°, 80°, 100° і 100°. 414. 96°. 415. а) 60° і 120°; б) 72° і 108°. 416. 18 см. 417. 30 дм. 421. Доведіть рівність трикутників АОВ, ВОС і АОС. 429. а) Доведіть спочатку, що $\Delta АОВ = \Delta АОС$, а потім доведіть рівність трикутників АВМ і АСМ; б) Доведіть рівність трикутників ОВМ і ОСМ. 431. 1) Проведіть діагональ ВD і доведіть, що $\Delta АВD = \Delta СDВ$. 2) Проведіть відрізок АС і доведіть, що $\Delta АСВ = \Delta САD$. 433. а) Доведіть рівність трикутників АРВ і

СРВ. 437. $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$. 438. 60° . 439. 60 см. 440. $\frac{2}{3}p$. 441. 90° . 445. а) AC — найбільша, BC — найменша. 446. $\angle B$ — найбільший, $\angle C$ — найменший. 447. Ні; так. 448. Ні. 449. Ні. 451. Ні. 453. Ні. 455. Ні. 456. $3 \text{ см} < BC < 13 \text{ см}$. 458. $196 \text{ см} < P < 252 \text{ см}$. 459. Так. 461. 80° і 80° . 469. 40° і 50° . 471. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. 473. 40° і 50° . 477. $AC = BC$. 478. $180^\circ - \alpha$. 480. 16 см. 482. а) 9 см; б) 9 см. 483. а) 9,5 см; б) 9,5 см. 484. 27 см. 485. 50° і 40° . 486. Ні. 488. Ні. 490. 2 м. 491. 5 см. 493. $70^\circ, 80^\circ, 30^\circ$. 494. Ні. 495. $36^\circ, 54^\circ, 90^\circ$. 498. в) 0, 1, 2, 3, 4, 5 або 6; г) 0, 1, 2 або безліч. 505. а) 12 м; б) 2 м. 506. Так. 509. $120^\circ, 60^\circ$. 511. Якщо O — центр кола, а AB і CD — хорди, то $\triangle ABO = \triangle CDO$ (за трьома сторонами). А в рівних трикутниках відповідні висоти — рівні. 512. а) Із центра O даного кола проведіть пряму s , перпендикулярну до даної прямої. Якщо пряма s перетинає коло в точках A і B , то проведіть дотичні в цих точках. 514. 4 см і 12 см або 8 см і 24 см. 515. Прямокутні трикутники AOB і AOC — рівні. 516. 5 см. Бо катет, що лежить проти кута 30° , дорівнює половині гіпотенузи. 517. 90° . 518. 60° . 519. Кожна із сторін O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 дорівнює сумі двох рівних радіусів. Тому $\triangle KPT$ — рівносторонній. 520. $120^\circ, \approx 1,4 \text{ см}$. 521. $S = \pi r^2 - \pi r_1^2 = \pi(r^2 - r_1^2) = \pi(r - r_1)(r + r_1) = mn(r + r_1) = ml$. 523. $\frac{2}{3}a$. 524. 5 см. 525. 50 см^2 . Розріжте уявно квадрат на 4 рівні прямокутні трикутники і складіть з них один прямокутник. 527. Ні, бо пропущено слово «кута». 529. Пряма, паралельна даним прямим і рівновіддалена від них. 530. Пряма BK , пряма BC . 531. Пряма CK . 532. Так, якщо точка C — не середина відрізка AB . 533. Так. 537. Дві прямі, паралельні даній прямій. 540. Дві прямі, паралельні даній прямій і рівновіддалені від неї. 541. Коло. 543. а) Дане коло і концентричне йому коло радіуса $3r$. 544. Коло, концентричне даному; його діаметр дорівнює третині діаметра даного кола. 545. Коло, концентричне даному. 547. 4 прямі, паралельні даним прямим. 548. 4 точки. 552. 135° . 557. 0, 1 або безліч. 559. 0, 1, 2, 3, 4, 5 або 6. 561. Ні. З периметром 8 см — можна. 564. $30^\circ, 30^\circ$ і 120° . 567. Довжина кола більша. 569. Ні. 570. 5 см; 2 см. 572. 120° . 574. $30^\circ, 30^\circ$ і 120° . 576. а) 12,5 м. 577. Нехай O — центр вписаного в $\triangle ABC$ кола. Трикутники OAB, OBC і OCA — рівнобедрені й рівні, бо в них кути при основах — по 30° . Отже, $OA = OB = OC$ — радіуси описаного кола. Якщо вписане коло дотикається до AB в точці H , то $OH = 0,5 OB$ — як катет проти кута 30° . 578. Точки дотику кола до сторін кута — рівновіддалені від його вершини. 579. а) 4 см; $\approx 50,24 \text{ см}^2$; б) 13 см; $\approx 40,82$. 580. $2(c + r)$. 581. 34 см. 582. 4 см. 590. Проведіть бісектрису даного кута і бісектрису його половини. 595. Від обох кінців даного відрізка відкладіть рівні відрізки, а середній відрізок поділіть навпіл. 600. Побудуйте трикутник за трьома даними рівними відрізками. 611. Січна PM з даною і побудованою прямими утворює рівні внутрішні різносторонні кути.

612. Якщо даний кут не прямий, то задача має 2 розв'язки. **615.** Трикутник ABC прямокутний і рівнобедрений. Тому $\angle BAC = \angle BCA = 45^\circ$. **616.** Трикутник — тупокутний. **617.** 60° . **618.** Побудуйте прямий кут і на одній його стороні від вершини відкладіть половину основи, а на другій — висоту. **619.** 1) Побудуйте спочатку даний кут; на його стороні від вершини відкладіть відрізок, що дорівнює гіпотенузі. Побудуйте коло, діаметром якого є цей відрізок. **620.** Побудуйте допоміжний трикутник за трьома відомими відрізками: медіаною, даною стороною і половиною другої сторони. **621.** 1) Проведіть дві паралельні прямі, відстань між якими дорівнює даній висоті, на одній з них відкладіть одну з даних сторін. Задача може мати 0, 1 або 2 розв'язки. **623.** Скористайтесь методом ГМТ. Якщо дані прямі не паралельні, задача має 2 розв'язки. **624.** Проведіть серединний перпендикуляр відрізку, кінцями якого є дані точки. **625.** Через дану на стороні кута точку проведіть пряму, перпендикулярну до цієї сторони. Ця пряма перетинає бісектрису даного кута в точці, що є центром кола, яке треба побудувати. **626.** Гіпотенуза трикутника вдвічі довша за даний радіус кола. **627.** Спочатку проведіть коло даного радіуса, а з якої-небудь його точки — дві хорди даних довжин. Задача може мати 0, 1 або 2 розв'язки. **628.** Проведіть спочатку коло даного радіуса, а в ньому — хорду даної довжини. **629.** Проведіть коло даного радіуса і хорду, що дорівнює даній основі трикутника. Серединний перпендикуляр цієї хорди перетне коло у вершинах трикутників, які треба побудувати. **630.** Проведіть коло даного радіуса і його діаметр. У кінці діаметра відкладіть даний гострий кут. **631.** Проведіть пряму, рівновіддалену від даних паралельних прямих. Із даної точки A як із центра опишіть дугу радіуса, що дорівнює половині відстані між даними прямими. Задача має 2 розв'язки. **632.** Проведіть коло даного радіуса і в ньому хорди $AB = BC = CD = DE = EF = r$. Трикутники OAB, OBC, \dots, OEF — рівні рівносторонні, усі їхні кути — по 60° . Тому $\angle FOA = 60^\circ$ і $\triangle OFA$ також рівносторонній. Отже, $\triangle ACE$ — той, який треба було побудувати. *2-й спосіб.* Побудуйте $\triangle AOC$ за даними сторонами $OA = OC = r$ і кутом між ними $\angle AOC = 120^\circ$. AC — сторона рівностороннього трикутника, який треба побудувати. **634.** На даній гіпотенузі AB , як на діаметрі, побудуйте півколо. Знайдіть точки перетину півкола з прямою, паралельною AB і віддаленою від неї на відстань, що дорівнює даній висоті. **636.** Впишіть у прямий кут коло даного радіуса, відкладіть на одній стороні кута даний катет, а з його кінця проведіть дотичну до кола. **639.** Побудуйте за катетом і гіпотенузою допоміжний прямокутний трикутник CHM , де CH — висота, CM — медіана. На прямій HM відкладіть відрізки $MA = MB = MC$. Трикутник ACB — шуканий. **651.** а), б) 6 частин; в) 7 частин. **652.** а) 12 см; б) 20 см; в) 12,5 см; г) 7,5 см. **653.** 2 см і 6 см або 4 см і 12 см. **654.** 4 випадки: 1 см, 5 см, 9 см, 13 см. **655.** 1 : 4; 1 : 2; 2 : 1. **656.** а) 8 см; б) 12 см; в) 16 см. **657.** 5 см. **658.** а) 4 см; б) 6 см; в) 10 см. **659.** $AC = 13,5$ см, $BC = 1,5$ см

або $AC = 1,5$ см, $BC = 13,5$ см. **660.** $AB = 2$ см; $AC = 8$ см або $AC = 2$ см, $AB = 8$ см. **662.** Ні. **664.** а) 20° і 60° ; б) 30° і 50° ; в) 20° і 60° ; г) 40° і 40° . **665.** 10° , 30° , 50° . **666.** 80° . **667.** 50° або 30° . **668.** 20° , 160° . **669.** 72° , 108° . **673.** а) 130° ; б) 80° ; в) 144° ; г) 108° ; р) 105° . **674.** $35^\circ 25'$; $144^\circ 35'$; $144^\circ 35'$. **675.** 60° ; 120° ; 60° ; 120° . **676.** 90° ; 180° . **678.** 110° ; 70° . **680.** 144° ; 36° ; 144° ; 36° . **681.** 20° ; 160° ; 20° ; 160° . **684.** 4 см. **686.** а) Ні; б) так; в) ні; г) так. **687.** а) Так; б) так; в) так. **688.** а) так; б) ні; в) так. **689.** а) $c \parallel d$; б) $a \parallel b$; в) $c \parallel d$; г) $c \parallel d$, $a \parallel b$. **692.** а) так; б) так. **693.** а) $a \parallel c$; б) $a \parallel b$; в) $b \parallel c$; г) $a \parallel b \parallel c$. **695.** а) 70° ; б) 75° ; в) 80° ; г) $67^\circ 30'$. **697.** 80° . **698.** 50° ; 50° . **699.** а) Так; б) так; в) ні. **709.** 23 см. **710.** Ні. **711.** 2 см, 3 см або 4 см. **712.** а) 7 см; б) 13 см. **713.** а) 6 см і 10 см; б) 24 см і 40 см. **714.** 15° . **715.** 40° і 20° . **717.** 25° , 75° , 80° . **718.** 30° , 60° , 90° . **719.** 25° , 65° . **722.** 40° . **723.** а) 75° ; б) 30° . **725.** 2 см і 10 см. **726.** 150° . **728.** 7 см, 8 см, 6 см. **729.** Ні. **730.** а) Ні; б) так. **731.** Так. **732.** Ні. **745.** 50° , 50° , 80° або 80° , 80° , 20° . **746.** 5 см, 8 см, 8 см або 6 см, 6 см, 9 см. **748.** а) 40° ; б) 80° . **749.** 20 см. **752.** 36° , 72° , 72° . **753.** 60° , 60° , 60° . **765.** $\angle C$ — найменший; $\angle B$ — найбільший. **768.** $\angle A > \angle C$. **769.** 6 см. **770.** 59 см і 59 см. **771.** 8 см, 9 см, 10 см, 11 см, 12 см. **772.** 4,4 см. **773.** Ні. **774.** 4 см. **775.** 18° і 72° . **778.** 5 см, 12 см, 13 см. **781.** 3 см і 9 см. **782.** 7,5 см. **783.** 2 см. **784.** 5 см. **785.** 5 см. **787.** 60° . **788.** $\frac{1}{2}r$. **790.** AB . **793.** 5 см і 7 см. **794.** 4 см і 12 см. **795.** 4 см, 6 см, 8 см. **797.** 21 см. **798.** 3 см. **799.** 6 см і 15 см. **800.** 5 см. **805.** Бісектриси утворених кутів. **807.** Коло із центром O із радіусом $2r$. **808.** а) Коло із центром O із радіусом 13 см; коло із центром O із радіусом 7 см. **810.** 5 см. **811.** 7,5 см і 3 см. **812.** 46 см. **813.** 12 см, 15 см, 17 см. **814.** 9 см і 18 см. **815.** 4 см і 6 см. **816.** 8 см. **819.** 12 см. **820.** 6 см. **848.** а) 149 100 тис. км; б) 149 900 тис. км. **850.** X — середина відрізка CB . **851.** 108° і 72° . **852.** 120° . **853.** 180° . **854.** Якщо промінь BX перетинає AC в точці K , то $\angle AXK > \angle ABK$ і $\angle CXK > \angle CBK$. **855.** Поділіть даний кут на 4 рівні частини і добудуйте до даного кута одну з таких частин. **856.** Не можуть. Якщо висоти AH і CE $\triangle ABC$ перетинаються в точці O , то $\triangle AOE = \triangle COH$, $AO = OE$, що неможливо. **857.** $\frac{1}{2}(a + b + c)$. **859.** Будь-який трикутник можна розрізати на два прямокутні трикутники, а медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, ділить його на два рівнобедрені трикутники. **860.** Доведіть, що трикутники AOC і BOD — рівнобедрені й рівні. **861.** Нехай $\angle ABB_1 = \angle B_1BC = \alpha$. Доведіть, що кожний з кутів AB_1B і BB_1C більший за α . Для цього через вершину B проведіть пряму, паралельну AC . **862.** Нехай на основі рівнобедреного трикутника ABC лежить точка M . Проведіть відрізок $MD \parallel AB$, $D \in BC$ і доведіть, що $MD = DC$. **863.** 70° . Позначте в середині $\triangle ABC$ точку K таку, що $AK = KC = AC$. Тоді $\triangle BMC = \triangle AKB$, $\angle BCM = 10^\circ$. **866.** 90° , 30° і 60° . Нехай CH , CM — висота і медіана $\triangle ABC$, $\angle ACH = \angle HCM = \angle MCB = \alpha$, а пряма CM перетинає описане

коло в точці K . Тоді $\angle SKB = \angle CAB$ і $\angle CBK = \angle CHA = 90^\circ$. CK — діаметр описаного кола, а оскільки $AM = MB$, то й AB — діаметр. **867.** Ці кути: $90^\circ + 0,5 \angle A$, $90^\circ + 0,5 \angle B$, $90^\circ + 0,5 \angle C$. **869.** 15° і 75° . **871.** $a + b - c$. **872.** 1) Нехай ABC — трикутник, який треба побудувати, і K — точка гіпотенузи AB така, що $AK = AC$. Відрізки CB і KB — дані. На промені AC відкладіть $CB_1 = KB$. Трикутники ACK і AB_1B — рівнобедрені. Побудуйте $\triangle CBV_1$ і проведіть серединний перпендикуляр до відрізка BB_1 . **874.** Нехай ABC — трикутник, який треба побудувати, і на його стороні AB точка K така, що $AK = AC$. Знайдіть кут SKB , побудуйте $\triangle BKS$ і проведіть серединний перпендикуляр до відрізка SK . **875.** Нехай у $\triangle ABC$ кут C — тупий і K — точка сторони AB така, що $AK = CB$. Пряма SK така, яку треба було провести. **877.** Побудуйте спочатку трикутник за даним відрізком і прилеглими до нього половинами даних кутів. Потім проведіть серединні перпендикуляри до двох сторін побудованого трикутника.

У підручнику використано фото та ілюстрації авторів: Кургак Є. М., Раскалов В., Дудкін І. Ф., Віксенко А. М., Дмитренко К. О., Daniel Libeskind, Ben Foster, Jeangagnon, Steven Heap, Oliver Berkhausen, Oliver Sved, Claudia Newland, Kristina Kuznetsova.

ЗМІСТ

Юні друзі! 3



РОЗДІЛ 1. НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

§ 1. Точки і прямі	6
§ 2. Відрізки і їх довжини	12
§ 3. Кути і їх міри	17
<i>Задачі за готовими малюнками</i>	24
<i>Самостійна робота 1</i>	26
<i>Тестові завдання 1</i>	27
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i>	28
<i>Головне в розділі 1</i>	29



РОЗДІЛ 2. ВЗАЄМНЕ РОЗТАШУВАННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

§ 4. Суміжні і вертикальні кути	32
<i>Задачі за готовими малюнками</i>	38
§ 5. Перпендикулярні і паралельні прямі	39
§ 6. Ознаки паралельності прямих	45
§ 7. Властивості паралельних прямих	51
§ 8. Теорема і аксіоми	57
<i>Задачі за готовими малюнками</i>	64
<i>Самостійна робота 2</i>	65
<i>Тестові завдання 2</i>	66
<i>Типові задачі для контрольної роботи</i>	67
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i>	68
<i>Головне в розділі 2</i>	69



РОЗДІЛ 3. ТРИКУТНИКИ

§ 9. Трикутник і його елементи	72
§ 10. Сума кутів трикутника	76
§ 11. Про рівність геометричних фігур	81

§ 12. Ознаки рівності трикутників	86
<i>Самостійна робота 3</i>	92
<i>Задачі за готовими малюнками</i>	93
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i>	94
<i>Тестові завдання 3</i>	95
<i>Типові задачі для контрольної роботи</i>	96
§ 13. Рівнобедрений трикутник	97
§ 14. Третя ознака рівності трикутників	103
§ 15. Нерівності трикутника	108
§ 16. Прямокутний трикутник	112
<i>Задачі за готовими малюнками</i>	118
<i>Самостійна робота 4</i>	119
<i>Тестові завдання 4</i>	120
<i>Типові задачі для контрольної роботи</i>	121
<i>Запитання і завдання для самоконтролю</i>	122
<i>Головне в розділі 3</i>	123



РОЗДІЛ 4. КОЛО І КРУГ

§ 17. Коло і круг	126
§ 18. Геометричне місце точок	131
§ 19. Коло і трикутник	136
§ 20*. Геометричні побудови	142
§ 21*. Задачі на побудову	147
<i>Задачі за готовими малюнками</i>	153
<i>Самостійна робота 5</i>	155
<i>Тестові завдання 5</i>	156
<i>Типові задачі для контрольної роботи</i>	157
<i>Головне в розділі 4</i>	158
Задачі для повторення	159
Завдання для позакласної роботи	177
З історії геометрії	180
Предметний покажчик	183
Відповіді і вказівки	185

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна
ВЛАДІМІРОВА Наталія Григорівна

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Головний редактор *Наталія Заблоцька*
Редактор *Алла Кравченко*
Обкладинка *Тетяни Куц*
Макет, художнє оформлення *Людмили Кузнецової*
Комп'ютерна верстка *Юрія Лебедєва*
Коректор *Лариса Леуська*

Формат 70×100/16.

Ум. друк. арк. 15,552. Обл.-вид. арк. 14,57.

Тираж 7754 пр. Вид. № 1704.

Зам. №

Видавництво «Генеза», вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 3966 від 01.02.2011.

Віддруковано на ПАТ «Білоцерківська книжкова фабрика»,
вул. Л. Курбаса, 4, м. Біла Церква, 09117.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4063 від 11.05.2011.
Впроваджено систему управління якістю
згідно з міжнародним стандартом DIN EN ISO 9001:2000