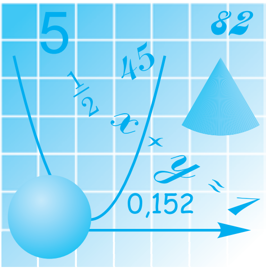
Алгебра

Ю.І. Мальований
Г.М. Возняк
Г.М. Литвиненко

«Алгебра»

підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів



УДК 512(075.3)
ББК 22.14я72
В65

ISBN 978-966-10-4483-7

Піктограмою у підручнику позначено ті його електронні складові, які можна відкрити за посиланням:
http://www.bohdan-digital.com/edu.

Люди, не знайомі з алгеброю, не можуть уявити собі тих дивних речей, яких можна досягти за допомогою цієї науки.

Г. Лейбніц,
французький математик

СЛОВО ДО УЧНІВ

Юні друзі! У 7 класі ви навчилися перетворювати одночлени і многочлени, розв'язувати рівняння і їх системи, а також задачі за їх допомогою, дізналися, що таке функція, ознайомилися з окремими видами функцій та їх графіками. Вам уже відомі такі дії, як додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня з натуральним показником.

У 8 класі ви дізнаєтесь про нову дію — добування кореня з числа, зокрема, квадратного кореня. Ваші знання про число доповнять відомості про новий вид чисел, які мають назву ірраціональних. Ви навчитеся перетворювати дроби із змінною в знаменнику, розв'язувати нові види рівнянь, дізнаєтесь, як записують дуже великі або надто малі числа.

Допомогти вам в успішному навчанні алгебри має цей підручник. Що треба знати, працюючи з ним?

Не поспішайте виконувати вправи, не прочитавши текст відповідного пункту, де ви знайдете необхідні для цього відомості. Там же вміщено зразки розв'язання окремих завдань. Полегшить розуміння тексту відновлення в пам'яті необхідних для цього відомостей, про які йдеться в рубриці «Пригадайте» на початку майже кожного пункту.

Щоб привернути вашу увагу до важливих положень, їх виділено відмінним від звичайного шрифтом, а також кольором. Означення та властивості, які потрібно запам'ятати, набрано кольоровим шрифтом. Основні формули записані на кольоровому фоні. Послідовність виконання певних дій, перетворень виразів, правила надруковано курсивом. Курсивом набрано також нові терміни. Зосередити увагу на найсуттєвішому вам допоможуть і відповідні запитання для самоперевірки, подані у кінці кожного пункту. У тексті під рубрикою «Увага!» подано застереження, що допоможуть вам уникнути поширених помилок, яких припускаються учні.

Виконуючи завдання для самоперевірки, вміщені в кінці кожного параграфа, ви зможете оцінити свої навчальні досягнення.

На рівень складності пропонованих задач і вправ указують умовні позначки: знак ° біля номера позначає вправи, що відповідають початковому і середньому рівням; * — вправи високого рівня навчальних досягнень. Ця ж позначка біля певного підпункту вказує на те, що вміщений у ньому матеріал подано лише для ознайомлення. Якщо ж біля номера немає спеціального позначення, то ця вправа відповідає достатньому рівню.

Знаком ▼ позначено початок розв'язання вправи, задачі, обґрунтування твердження, а знаком ▲ — їх кінець.

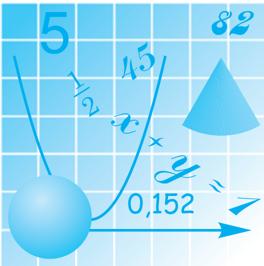
Слово до педагогів

Шановні колеги! Вважаємо за необхідне роз'яснити Вам реалізований у підручнику підхід до формування систем завдань до кожного пункту. По-перше, тут не виокремлено завдання, які віднесені для розгляду на уроці, і ті, що рекомендуються задати додому. Переконані, що таких універсальних рекомендацій не може бути. Все визначається комплексом факторів у кожному конкретному випадку, і лише вчитель, враховуючи їх, має зробити обґрунтований вибір.

По-друге, на перший погляд може здатися, що система завдань не впорядкована. Завдання тут не розташовані строго за рівнями: спочатку — всі завдання початкового, потім усі завдання середнього і т.д. рівнів. Принцип групування завдань дещо інший. Їх згруповано за серіями, кожна з яких передбачає відпрацювання певної дидактичної одиниці від початкового до вищого рівня. Тому після вправи вищого рівня попередньої серії природно зустріти вправи нижчого рівня наступної серії.

Дякуємо за розуміння!

Автори



Розділ I

РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ ТА ЇХ ПЕРЕТВОРЕННЯ


MIAMI – PLANETARIUM

§1. РАЦІОНАЛЬНІ ДРОБИ

1.1. Раціональні вирази

Пригадайте

1. Який вираз називають одночленом? Наведіть приклади.
2. Який вираз називають многочленом? Наведіть приклади.
3. Які з виразів є одночленами:

а) $0{,}5x^2$; б) $\dfrac{mn}{2}$; в) $\dfrac{3ab^3}{c}$;

г) $-\dfrac{2cd^2}{3}$; ґ) $\dfrac{0{,}3m}{2n^2}$?

① **Які вирази належать до раціональних?** У сьомому класі ви вивчали перетворення одночленів і многочленів та виразів, які не містять дії ділення на змінну або на вираз зі змінною. Такі вирази належать до *цілих виразів*.

Узагалі, цілими є всі вирази, утворені з чисел і букв за допомогою дій додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня, а також ділення на число, відмінне від нуля.

Наприклад: $8a^6$, $3m^2 - 4mn$, $\frac{x^2+9}{4}$, $(c - 3d)^2 + 1$.

Ті ж вирази, які містять дію ділення на змінну або на вираз зі змінною, називають ***дробовими.***

Дробовими є, наприклад, вирази $\frac{x-3y}{a}$, $\frac{a}{b+5} - c$, $\frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{(c-3)^2}$.

Усі цілі і дробові вирази утворюють множину *раціональних* виразів.

Окремий клас раціональних виразів складають дроби.

Раціональний дріб **— це вираз виду $\frac{A}{B}$, де A і B — цілі раціональні вирази.**

Наприклад: $\frac{a+b}{5}$, $\frac{4x^3-5y}{(x+3)^2}$, $\frac{2}{m-9}$, $\frac{7}{4}$.

Як бачимо, до раціональних дробів належить і *звичайний дріб,* тобто дріб, чисельник і знаменник якого є натуральними числами.

Слід зазначити, що раціональний дріб належить до цілих виразів, якщо його знаменник не містить змінної, і до дробових — у протилежному випадку. З огляду на це всі звичайні дроби належать до цілих виразів.

У наведених вище прикладах дробів перший і останній дроби є цілими виразами, інші — дробовими.

Класифікація раціональних виразів має такий вигляд:

- Раціональні вирази
  - Цілі (у т.ч. дроби з числовим знаменником)
  - Дробові
    - Дроби зі змінною в знаменнику
    - Сума, різниця, добуток, частка, степінь дробів зі змінною в знаменнику або таких дробів і цілих виразів

② **Що таке «допустимі значення змінних»?** Якщо не вказано додаткових умов, то цілі вирази мають зміст за будь-яких значень змінних, що входять до них. Про дробові вирази цього сказати не можна, оскільки вони містять ділення на вираз зі змінною, яка за певних значень може перетворювати знаменник у нуль, а на нуль, як відомо, ділити не можна.

Зокрема, вираз $\frac{x-3y}{a}$ не має змісту, якщо $a = 0$; вираз $\frac{a}{b+5}-c$ — якщо $b = -5$. Отже, у першому виразі змінна a може набувати будь-яких значень, крім 0 ($a \neq 0$), а змінна b у другому виразі — будь-яких значень, крім –5 ($b \neq -5$).

Числові значення, яких може набувати змінна (змінні) в алгебраїчному виразі, називають *допустимими значеннями* змінної (змінних).

Очевидно, що допустимими значеннями змінної c у виразі $\frac{1}{(c-3)^2}$ є всі раціональні числа, крім 3. Це можна записати так: $c \neq 3$.

Допустимими значеннями змінних у виразі $\frac{3}{(a-2)(b+1)}$ є всі раціональні числа, крім $a = 2$ і $b = -1$ ($a \neq 2$, $b \neq -1$).

Взагалі, щоб знайти допустимі значення змінних для даного раціонального дробу, треба прирівняти його знаменник до нуля, розв'язати утворене рівняння і вилучити знайдені корені з числових значень, яких можуть набувати змінні.

Приклад. Знайти допустимі значення змінної x для дробу $\frac{x-2}{x^2-1}$.

▼ Розв'яжемо рівняння $x^2 - 1 = 0$; $(x - 1)(x + 1) = 0$; $x - 1 = 0$, $x = 1$; $x + 1 = 0$, $x = -1$.

Відповідь. Допустимими значеннями змінної x є всі числа, крім 1 і –1. ▲

Можливий і такий запис розв'язання цієї вправи:

▼ $x^2 - 1 \neq 0$; $(x - 1)(x + 1) \neq 0$; $x - 1 \neq 0$, $x \neq 1$; $x + 1 \neq 0$, $x \neq -1$.

Відповідь. $x \neq -1$, $x \neq 1$. ▲

Всі наступні властивості і перетворення дробів розглядатимуться лише для допустимих значень змінних, що входять до них. Цей факт вказують як неодмінну умову (наприклад, $\frac{a}{b} = \frac{5a}{5b}$, $b \neq 0$) або ж мають на увазі в процесі перетворень.

③ **Уточнюємо означення тотожності.** З огляду на сказане, проаналізуємо таке означення тотожності: тотожність — це рівність, правильна за *всіх* значень змінних, що входять до неї.

Коли йдеться про цілі вирази, то питань не виникає, бо вони мають зміст за *всіх* значень змінних, які входять до них. А чи правомірне це означення стосовно дробових виразів? Очевидно, ні, бо ми вже знаємо, що за певних значень змінних дробові вирази можуть не мати змісту. Отже, в даному випадку мова має йти не про всі значення змінних, а лише про ті, за яких дані вирази мають зміст, тобто про *допустимі* значення змінних. Тобто тотожність — це рівність, правильна за *всіх допустимих* значень змінних, що входять до неї.

Для цілих виразів це означення не суперечить попередньому, бо в них допустимими є всі значення змінних.

④ **Коли дріб дорівнює нулю?** Часто доводиться визначати, за яких значень змінної значення дробу дорівнює нулю. Це ті значення, які перетворюють значення чисельника в нуль, і, звичайно, є допустимими для даного дробу. Тобто дріб

$$\boldsymbol{\frac{A}{B} = 0, \text{ коли } A = 0, \text{ а } B \neq 0.} \quad (1)$$

Приклад. За яких значень m дріб $\frac{m^2 - 9}{m^2 + 3m}$ дорівнює нулю?

▼ Знайдемо, за яких значень m чисельник дробу дорівнює нулю. Для цього розв'яжемо рівняння $m^2 - 9 = 0$.

$m^2 - 9 = 0$; $(m - 3)(m + 3) = 0$, $m - 3 = 0$ або $m + 3 = 0$; звідки $m = 3$ або $m = -3$.

З'ясуємо, чи одержані значення змінної m є допустимими для даного дробу. Це можна зробити, обчисливши значення знаменника дробу для $m = 3$ і $m = -3$. Якщо в результаті дістанемо 0, то дане значення змінної не є допустимим. Отже,

якщо $m = 3$, то $m^2 + 3m = 3^2 + 3 \cdot 3 = 18$;

якщо $m = -3$, то $m^2 + 3m = (-3)^2 + 3 \cdot (-3) = 0$.

Бачимо, що значення $m = -3$ не є допустимим і його слід вилучити. Отже, дріб дорівнює 0, якщо $m = 3$. ▲

З'ясувати, чи є дані значення змінної допустимими для даного дробу, можна й інакше. Спочатку встановлюють всі допустимі значення змінної, а потім порівнюють з ними дані значення.

У нашому випадку маємо: $m^2 + 3m \neq 0$ або $m(m + 3) \neq 0$; звідки $m \neq 0$ і $m \neq -3$.

З двох значень $m = 3$ і $m = -3$, за яких чисельник дробу дорівнює нулю, допустимим є лише перше.

Надалі встановлювати, чи є дане значення змінної допустимим для певного дробу, можна будь-яким із наведених способів. Однак у випадку, коли знаменник є досить складним виразом і знайти його корені непросто, доцільніше користуватися першим способом.

Зауваження. Вимога встановити, за яких значень змінної вираз $\frac{A}{B}$ дорівнює нулю, рівносильна вимозі розв'язати рівняння $\frac{A}{B} = 0$.

? Запитання для самоперевірки

1. Які вирази належать до раціональних?
2. У чому полягає відмінність між цілим і дробовим раціональним виразом?
3. Що таке раціональний дріб?
4. Чи може раціональний дріб бути цілим виразом? Наведіть приклади.
5. Як встановити допустимі значення змінної для даного дробу?

6. За якої умови дріб дорівнює нулю?

Задачі та вправи

1°. Випишіть окремо цілі вирази, дробові вирази і дроби:

а) $\frac{2}{5-x}$; б) $2\frac{3}{8}$; в) $a^2 - 2ab + 5$;

г) $\frac{x^3 - 8x}{x^2 + 3x}$; ґ) $\frac{6m}{m+5} - 1$; д) $\frac{c^2 + cd - d^3}{4}$;

е) $\frac{1}{2} + \frac{x}{4}$; є) $4x^2 - \frac{a}{2}$; ж) $2a^3 - \frac{1}{3b-1}$.

2°. Які з даних виразів є цілими виразами, а які — дробовими:

а) $\frac{5a}{a+x}$; б) $\frac{x^2}{y^2} + x$; в) $\frac{m-2}{5}$;

г) $\frac{1}{8}$; ґ) $\frac{b-c}{c+2}$; д) $\frac{b^3 - 3b^2 - 0,5b}{0,75}$?

3°. Запишіть вирази у вигляді дробів:

а) $4\frac{1}{2}$; б) 3,7; в) $-\frac{4}{9}$; г) 2;

ґ) a; д) $a - b$; е) $\frac{1}{2}a + a$; є) $2b - \frac{3}{4}b$.

4°. Обчисліть значення дробів:

а) $\frac{2x}{x-1,5}$, якщо $x = 3$; б) $\frac{4}{2x-6}$, якщо $x = 2,4$;

в) $\frac{x-3}{2x+5}$, якщо $x = -1,5$; г) $\frac{3a+1,5}{2a+2}$, якщо $a = -0,5$;

ґ) $\frac{m^2 - 4}{2,5m}$, якщо $m = 4$; д) $\frac{c+3,2}{c^2 - 9}$, якщо $c = -3$.

5°. Заповніть таблицю:

x	2	3	–3	4	5	–1	–5	–9
$\frac{4}{x-3}$								

Яку клітинку таблиці не можна заповнити і чому?

6°. За яких значень c значення дробу $\frac{c-3}{7}$ дорівнює:

а) 0; б) 1; в) –1; г) 2; ґ) –2?

7°. При яких значеннях змінної вирази не мають смислу?

а) $\frac{2}{3x}$; б) $\frac{m-3}{3m+12}$; в) $\frac{8}{2a+7}$;

г) $\frac{1-x}{2-x}$; ґ) $x+\frac{3x}{4x-1}$; д) $\frac{n+2}{2n-9}+\frac{n+1}{n+3}$.

8°. Встановіть, які значення змінної a (5; –2; 4; –1; 3; 0; 1) є допустимими для дробів:

а) $\frac{a-2}{a}$; б) $\frac{3a+1}{2a+2}$; в) $\frac{a^2-1}{a(a-3)}$;

г) $\frac{a}{(a+2)(a-4)}$; д) $\frac{5-a}{a^2-1}$; ґ) $\frac{a+1}{a^2+1}$.

9. За яких значень змінних дорівнюють нулю дроби:

а) $\frac{2m+7}{m}$; б) $\frac{2x}{2+x}$; в) $\frac{x(x+3)}{x^2-9}$; г) $\frac{m(m-1)}{m^2-3m}$;

ґ) $\frac{a(a+4)}{3a+12}$; д) $\frac{b^2-5b}{2b-10}$; е) $\frac{c^2-4}{3c+6}$; є) $\frac{(n-4)^2}{n^2-16}$;

ж) $\frac{n^2-16}{(n-4)^2}$; з) $\frac{1+a^2}{1-a^2}$; и) $\frac{a^2+9}{a+3}$; і) $\frac{a^2-9}{9+a^2}$?

10. Запишіть допустимі значення змінних у виразах:

а) $\frac{c+5}{c(c-1)}$; б) $\frac{5a}{(a-3)(7-a)}$; в) $\frac{2c+8}{c^2-5c}$;

г) $\frac{m^2}{m^2+2m}$; ґ) $\frac{a-3}{a^2-16}$; д) $\frac{x^2+6}{x^2+12x+36}$;

е) $\frac{2b-1}{b^2+1}$; є) $\frac{p-3}{|p|-2}$; ж) $\frac{b^2-4}{|b|+3}$.

11. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x^2+6x}{x}=0$; б) $\frac{4y^2-16}{y^2-2}=0$; в) $\frac{x^3-x}{x^2+x}=0$; г) $\frac{x^2+5}{3x-2}=0$.

12*. Знайдіть найменші (найбільші) значення виразів і відповідні їм значення змінних:

а) $x^2 + 2$; б) $4m^2$; в) $|a + 5|$; г) $2n^2 + 3$;
ґ) $3 - x^2$; д) $8 - 4x^2$; е) $7 - |b|$; є) $d^2 - 4$.

13*. Знайдіть найбільші (найменші) значення дробів:

а) $\dfrac{8}{a^2+4}$; б) $\dfrac{16}{|c|+2}$; в) $\dfrac{12}{6-|b|}, |b| < 6$.

14*. Чи можливі такі рівності:

а) $\dfrac{6}{a^2+3} = 3$; б) $\dfrac{10}{a^2+1} = 2$; в) $\dfrac{26}{2x^2+5} = 2$; г) $\dfrac{20}{|m|+5} = 5$?

Відповідь поясніть.

15. Довжина робочої частини конвеєра дорівнює l метрів. З якою швидкістю рухається стрічка конвеєра, якщо деталь, поставлена на стрічку на одному кінці конвеєра, досягає його протилежного кінця за t секунд?
Обчисліть, якщо: а) $l = 32{,}4$; $t = 3$; б) $l = 24{,}5$; $t = 5$.

16. Скільки рейсів має зробити вантажівка, щоб перевезти n мішків картоплі по p кілограмів у кожному, якщо на неї класти по m тонн картоплі? Обчисліть, якщо $n = 150$, $p = 50$, $m = 2{,}5$.

17*. Запишіть формулу обчислення площі S фігури (рис. 1). Знайдіть із одержаної формули h.

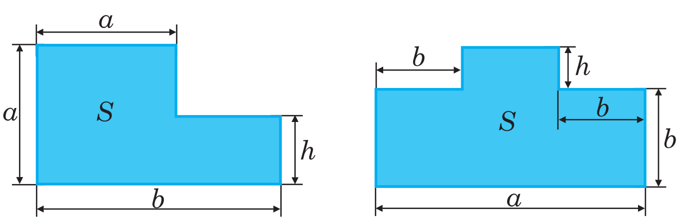


Рис. 1

1.2. Основна властивість раціонального дробу та її застосування

! Пригадайте

1. В чому полягає основна властивість звичайного дробу?
2. Як скоротити звичайний дріб? Яку властивість дробу при цьому використовують?
3. Що потрібно зробити із знаменником і чисельником дробу $\frac{4}{5}$, щоб отримати рівний йому дріб із знаменником 15? Яку властивість дробу при цьому використовують?
4. Скільки спільних знаменників можуть мати дроби $\frac{3}{8}$ і $\frac{5}{12}$? Назвіть найменший з них і зведіть до нього дані дроби.
5. Як шукають спільний множник кількох членів многочлена?

---

① **Основна властивість раціонального дробу.** Як відомо, чисельник і знаменник звичайного дробу можна помножити на одне і те саме натуральне число, від чого значення дробу не зміниться. Тобто:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}, \text{ де } a, b, c \text{ — натуральні числа.}$$

Рівність $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ правильна не лише для натуральних, а й для будь-яких раціональних значень *a, b* і *c*, крім $b = 0$ і $c = 0$ (тоді дроби не мають смислу).

Подібну властивість має і раціональний дріб:

$$\boldsymbol{\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}}, \textbf{ де } \boldsymbol{A, B, C} \textbf{ — цілі раціональні вирази, } \boldsymbol{B \neq 0, C \neq 0.} \qquad (2)$$

Доведемо, що рівність (2) є тотожністю.

▼ Щоб переконатися у цьому, треба встановити, що відповідні значення дробів $\frac{A}{B}$ і $\frac{AC}{BC}$ дорівнюють одне одному за всіх допустимих значень змінних, що входять до них. Допустимі значення змінних визначаються умовою: $B \neq 0$, $C \neq 0$. Враховуючи це, візьмемо певне числове значення дробу $\frac{A}{B}$ і порівняємо його з відповідним значенням дробу $\frac{AC}{BC}$. Ці значення за основною властивістю дробу з числовими чисельником і знаменником дорівнюють одне одному. Так само рівними будуть і всі інші пари відповідних значень даних дробів. Отже, тотожність (2) доведено. ▲

На підставі основної властивості раціонального дробу можна стверджувати, що, наприклад, дроби $\frac{x^2}{x-3}$ та $\frac{x^2(x+5)}{(x-3)(x+5)}$ тотожно рівні, тобто $\frac{x^2}{x-3} = \frac{x^2(x+5)}{(x-3)(x+5)}$ за всіх x, крім $x - 3 = 0$, $x = 3$ та $x + 5 = 0$, $x = -5$.

Основну властивість дробу використовують для виконання двох поширених тотожних перетворень дробів:

1) скорочення дробу;
2) зведення дробів до спільного знаменника.

② **Скорочення раціональних дробів.** Поміняємо місцями ліву і праву частини тотожності (2). Маємо:

$$\boldsymbol{\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B},\ B \neq 0,\ C \neq 0.} \qquad (2')$$

Бачимо, що дріб $\frac{AC}{BC}$ можна замінити простішим, тотожно рівним йому дробом $\frac{A}{B}$. Таке перетворення називають ***скороченням дробу***.

У даному випадку дріб скорочено на вираз С, що є спільним множником чисельника і знаменника.

Скоротимо, наприклад, дріб $\frac{5b^2}{ab^2}$. Очевидно, що тут можна виконати скорочення на b^2. Маємо $\frac{5b^2}{ab^2} = \frac{5}{a}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Аналогічно: $\frac{m(x+3)}{n(x+3)} = \frac{m}{n}$. Тут і далі для спрощення записів не вказуватимемо допустимих значень змінних, але пам'ятатимемо, за яких умов матиме зміст відповідна рівність.

Якщо у попередніх прикладах вираз, на який скорочували дріб, можна було визначити з першого погляду, то для скорочення, наприклад, дробу $\frac{18x^4y^6}{27x^5y^2}$ треба попередньо знайти спільний множник чисельника і знаменника. Це роблять аналогічно до того, як знаходили спільний множник членів многочлена, розкладаючи його на множники винесенням спільного множника за дужки. У даному випадку таким спільним множником є вираз $9x^4y^2$. Запишемо чисельник і знаменник дробу кожен у вигляді двох множників, одним із яких є знайдений спільний множник. Маємо:

$$\frac{18x^4y^6}{27x^5y^2} = \underbrace{\frac{9x^4y^2 \cdot 2y^4}{9x^4y^2 \cdot 3x}} = \frac{2y^4}{3x}.$$

Якщо під час скорочення дробу ускладнень не виникає, то позначений дужкою проміжний запис можна пропускати.

Якщо ж один або обидва члени дробу є многочленами, без відповідних проміжних записів не обійтися.

Наприклад:

1) $\frac{3m^2 - 6mn}{9m} = \frac{3m(m-2n)}{9m} = \frac{m-2n}{3}$;

2) $\frac{ax - 3ay}{bx - 3by} = \frac{a(x-3y)}{b(x-3y)} = \frac{a}{b}$.

Увага! Пам'ятайте, що дроби скорочують тільки на ***спільний множник*** чисельника і знаменника. Не припускайтеся помилок, схожих на подані нижче:

$\frac{x+a}{x+b} = \frac{a}{b}$ (тут «скоротили» на доданок, а не на множник);

$\frac{ac+b}{ad}=\frac{c+b}{d}$ (тут «скоротили» на множник a, який не є спільним множником чисельника і знаменника, оскільки даний чисельник на множники взагалі не розкладається).

У процесі перетворень дробів нерідко доводиться змінювати знак одного з членів дробу на основі таких тотожностей:

$$\frac{A}{B}=-\frac{-A}{B};\ \ \frac{A}{B}=-\frac{A}{-B}. \qquad (3)$$

Тобто, *щоб змінити знак чисельника або знаменника дробу, треба змінити його і перед дробом.*

Скористаємось цією тотожністю для скорочення дробу $\frac{3-x}{x^2-9}$.

Маємо: $\frac{3-x}{x^2-9}=\frac{3-x}{(x-3)(x+3)}=-\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=-\frac{1}{x+3}$.

③ **Зведення дробів до спільного знаменника.** Тотожність $\frac{A}{B}=\frac{AC}{BC}$ дає можливість записати дріб $\frac{A}{B}$ у вигляді тотожно рівного йому дробу з новим знаменником. Таке перетворення називають ***зведенням дробу до нового знаменника***.

Нехай, наприклад, треба звести дріб $\frac{a}{4b^2c}$ до знаменника $8b^3c^4$.

Знайдемо спочатку вираз, на який слід помножити знаменник даного дробу $4b^2c$, щоб дістати новий знаменник $8b^3c^4$. Цей вираз називають ***додатковим множником***. Він, очевидно, дорівнює $2bc^3 : 8b^3c^4 = 4b^2c \cdot 2bc^3$. Тепер замінимо даний дріб тотожно рівним йому дробом, помноживши його чисельник і знаменник на знайдений додатковий множник. Маємо:

$$\frac{a}{4b^2c}=\frac{a\cdot 2bc^3}{4b^2c\cdot 2bc^3}=\frac{2abc^3}{8b^3c^4}.$$

Отже, *щоб звести дріб до нового знаменника, треба:*

1) *знайти вираз (додатковий множник), на який слід помножити знаменник даного дробу, щоб дістати новий знаменник;*

2) *записати дріб з новим знаменником, чисельник якого є добутком чисельника даного дробу і додаткового множника.*

Як і для випадку звичайних дробів, додатковий множник можна записувати над чисельником даного дробу.

Наприклад, зведемо дріб $\frac{2}{x+2}$ до знаменника $x^2 - 4$.

▼ Щоб знайти додатковий множник, розкладемо новий знаменник на множники: $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Бачимо, що додатковий множник дорівнює $x - 2$. Маємо: $\frac{2}{x+2} = \frac{\overset{\backslash x-2}{2}}{x+2} = \frac{2(x-2)}{x^2-4} = \frac{2x-4}{x^2-4}$. ▲

Здебільшого знаменник, до якого потрібно звести дріб, необхідно знайти самостійно. Така потреба зазвичай виникає при зведенні двох або кількох дробів до спільного знаменника. *Звести дроби до спільного знаменника* означає записати їх у вигляді дробів з однаковими знаменниками.

Наприклад, зведемо до спільного знаменника дроби $\frac{a}{4x^2y}$ і $\frac{b}{6xy^3}$.

▼ Спочатку треба знайти цей спільний знаменник. Його можна утворити, помноживши знаменники даних дробів: $4x^2y \cdot 6xy^3 = 24x^3y^4$. Однак одержаний таким чином знаменник не є найпростішим серед можливих.

Якщо знаменники дробів одночлени, то найпростіший спільний знаменник визначають так:

1) *знаходять найменше спільне кратне коефіцієнтів одночленів;*

2) *до знайденого числа дописують множники — кожну змінну, що входить хоча б до одного знаменника, з найбільшим із відповідних показників степеня.*

У даному випадку найменше спільне кратне коефіцієнтів 4 і 6 дорівнює 12. Знаменники дробів містять лише дві змінні x і y. Найбільший показник степеня першої змінної дорівнює 2, а другої — 3. Отже, найпростіший спільний знаменник даних дробів дорівнює $12x^2y^3$. Далі зведення дробів до спільного знаменника виконують за відомим правилом:

$$\frac{\overset{\backslash 3y^2}{a}}{4x^2y} = \frac{a \cdot 3y^2}{12x^2y^3} = \frac{3ay^2}{12x^2y^3}; \qquad \frac{\overset{/2x}{b}}{6xy^3} = \frac{b \cdot 2x}{12x^2y^3} = \frac{2bx}{12x^2y^3}.$$ ▲

Якщо знаменники дробів — многочлени, то для знаходження спільного знаменника їх попередньо розкладають на множники (якщо це можливо).

Знайдемо, наприклад, спільний знаменник дробів $\frac{1}{x^2 - x}$ і $\frac{1}{2x^2 - 2}$.

▼ Знаменник першого дробу: $x^2 - x = x(x - 1)$, другого:

$$2x^2 - 2 = 2(x^2 - 1) = 2(x - 1)(x + 1).$$

Найпростішим спільним знаменником даних дробів є вираз $2x(x - 1)(x + 1)$.

Звівши дроби до цього знаменника, маємо:

$$\frac{1}{x^2 - x} = \frac{1^{\backslash 2(x+1)}}{x(x-1)} = \frac{2(x+1)}{2x(x-1)(x+1)} = \frac{2(x+1)}{2x(x^2-1)};$$

$$\frac{1}{2x^2 - 2} = \frac{1^{\backslash x}}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x}{2x(x-1)(x+1)} = \frac{x}{2x(x^2-1)}.$$ ▲

? Запитання для самоперевірки

1. Проілюструйте основну властивість раціонального дробу кількома прикладами.
2. Які тотожні перетворення раціональних дробів можна виконати на підставі основної властивості дробу?
3. Як скоротити раціональний дріб?
4. У якій послідовності виконують зведення дробу до даного знаменника?
5. Як знайти найпростіший спільний знаменник дробів з одночленними знаменниками?

Задачі та вправи

18°. Скоротіть дроби:

а) $\frac{12}{13}$; б) $\frac{15}{25}$; в) $\frac{2^3}{2^5}$; г) $\frac{x^2}{x^6}$;

ґ) $\frac{a^3}{a^4}$; д) $\frac{2a^2}{2b^2}$; е) $\frac{ax^2}{ay^3}$; є) $\frac{5cd}{10cn}$.

19°. Знайдіть спільні множники одночленів:

а) $5m^4$ і $15m^3$; б) $6a^2$ і $9ab^2$; в) $32x^3y^2$ і $48x^3$;
г) $21ab^2$ і $14a^2b$; ґ) $12m^4n^2$ і $8m^2n^3$; д) $18x^4y^3$ і $27x^2y^2$.

20°. Використовуючи результати виконання попередньої вправи, скоротіть дроби:

а) $\dfrac{6a^2}{9ab^2}$; б) $\dfrac{5m^4}{15m^3}$; в) $\dfrac{32x^3y^2}{48x^3}$;

г) $\dfrac{21ab^2}{48a^2b}$; ґ) $\dfrac{12m^4n^2}{18m^2n^3}$; д) $\dfrac{18x^4y^3}{27x^2y^2}$.

21°. Спростіть вирази:

а) $\dfrac{3m^2-6mn}{9m}$; б) $\dfrac{4x^3-2x^2}{10x^4}$;

в) $\dfrac{25a^2b^5}{5a^2b^2-10ab^2}$; г) $\dfrac{a^2b^2}{a^2b^2-3a^4b^2}$.

22. Визначте допустимі значення змінних у тотожностях:

а) $\dfrac{x^2}{x^5}=\dfrac{1}{x^3}$; б) $\dfrac{12x^3}{5x}=\dfrac{12x^2}{5}$;

в) $\dfrac{x+2}{x^2-4}=\dfrac{1}{x-2}$; г) $\dfrac{a^5}{a^3}=a^2$;

ґ) $\dfrac{1-x}{x^2-1}=-\dfrac{1}{1+x}$; д)* $\dfrac{x^2-8x+16}{x^2-16}=\dfrac{x-4}{x+4}$.

23*. З'ясовуючи, за яких значень m дріб $\dfrac{(m+1)^2}{m^2-1}$ дорівнює нулю, учень записав:

$$\frac{(m+1)^2}{m^2-1}=\frac{(m+1)^2}{(m-1)(m+1)}=\frac{m+1}{m-1};$$

$m+1=0$, $m=-1$;
$m-1=-1-1=-2\neq 0$.
Відповідь. $m=-1$.
Знайдіть і виправте помилку, якої припустився учень.

Скоротіть дроби (24–27):

24°. а) $\dfrac{m(a-b)}{n(a-b)}$; б) $\dfrac{2a-6b}{4a+8b}$; в) $\dfrac{m^2-3mn}{3m-5mn}$;

г) $\dfrac{c^2-2bc}{d(c-2b)}$; ґ) $\dfrac{ax-3ay}{bx-3by}$; д) $\dfrac{x^5-3x^2}{2x^7-6x^4}$.

25°. а) $\dfrac{5c(x+y)}{4(x^2-y^2)}$; б) $\dfrac{c^2-d^2}{ac+ad}$; в) $\dfrac{x+x^2}{x^2-1}$;

г) $\dfrac{2x+x^2}{4-x^2}$; ґ) $\dfrac{(a-b)^2}{a^2-b^2}$; д) $\dfrac{b^2-1}{(b+1)^2}$.

26°. а) $\dfrac{5c(x+y)^2}{4(x^2-y^2)}$; б) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$; в) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$.

27°. а) $\dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}$; б) $\dfrac{16-c^2}{16-8c+c^2}$; в) $\dfrac{x^2-25}{25+10x+x^2}$.

28. Визначте, за яких значень змінної дроби дорівнюють нулю:

а) $\dfrac{(a-2)(a+5)}{(a+5)^2}$; б) $\dfrac{x^2-3x}{(x-3)^2}$; в) $\dfrac{(m-2)^2}{m^2-4}$.

29°. З'ясуйте, які з рівностей є тотожностями:

а) $\dfrac{c}{c+x}=\dfrac{cm}{mc+mx}$; б) $\dfrac{4x^2+1}{xy+3x}=\dfrac{x+1}{y+3}$;

в) $\dfrac{an+b}{cn+d}=\dfrac{a+b}{c+d}$; г) $\dfrac{x-y}{x}=\dfrac{x^2-xy}{x^2}$;

ґ) $\dfrac{m+k}{n+k}=\dfrac{m}{n}$; д) $\dfrac{2a+ab}{a-ab}=\dfrac{2+b}{1-b}$.

Скоротіть дроби (30–31):

30. а) $\dfrac{x-y}{x^3-y^3}$; б) $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^3+y^3}$;

в) $\dfrac{12a^2-12ab+3b^2}{6ab-3b^2}$; г) $\dfrac{b^6-c^6}{b^2-c^2}$.

31*. а) $\dfrac{ab+ac+b^2+bc}{ax+by+ay+bx}$; б) $\dfrac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c}$;

в) $\dfrac{xy - x + y - y^2}{x^2 - y^2}$; г) $\dfrac{ax - by + ay - bx}{ax + by - ay - bx}$.

32*. Доведіть тотожність:

а) $\dfrac{2x^2 + 10xy}{x^2 - 25y^2} = \dfrac{2x^2 - 10xy}{x^2 - 10xy + 25y^2}$;

б) $\dfrac{a^2 - 4a + 4}{a^2 + ab - 2a - 2b} = \dfrac{a^2 - ab + 2b - 4}{a^2 + 2a + 2b - b^2}$;

в) $\dfrac{(2x - 3y)^2 + 2x - 3y}{4x^2 - 9y^2 + 2x + 3y} = \dfrac{4x^2 - 12xy + 9y^2}{4x^2 - 9y^2}$.

33. Знайдіть і запишіть пари тотожно рівних дробів:

а) $\dfrac{a-3}{a+3}$; б) $\dfrac{3-a}{3+a}$; в) $-\dfrac{a-3}{3+a}$;

г) $-\dfrac{3-a}{a+3}$; ґ) $\dfrac{3-a}{-a-3}$; д) $-\dfrac{a-3}{-a-3}$.

34. Замініть дроби тотожно рівними їм дробами, змінивши знак:

1) у чисельнику:

а) $\dfrac{m-8}{m-3}$; б) $\dfrac{x^2-4}{2x-5}$; в) $\dfrac{3a-7}{(a-2)^2}$; г) $\dfrac{(b-5)^2}{c^2}$;

2) у знаменнику:

а) $\dfrac{m-8}{m-3}$; б) $\dfrac{x^2-4}{2x-5}$; в) $\dfrac{3a-7}{(a-2)^2}$; г) $\dfrac{(b-5)^2}{c^2}$.

35. Скоротіть дроби:

а) $\dfrac{b^2 - 2b}{2c^2 - bc^2}$; б) $\dfrac{9 - x^2}{3ax + 9a}$; в) $\dfrac{n^3 - m^3}{m^2 - n^2}$;

г) $\dfrac{x^2 - 9y^2}{6xy - 2x^2}$; ґ) $\dfrac{m-n}{(n-m)^2}$; д) $\dfrac{m^3 - n^3}{(n-m)^3}$.

36. Спростіть дроби і знайдіть їх числові значення:

а) $\dfrac{a^2 - 4}{2 + a}$, якщо $a = 1{,}7$; б) $\dfrac{b^2 - 9}{3b - 9}$, якщо $b = 9{,}9$;

в) $\dfrac{a^2x - ax^2}{x - a}$, якщо $a = 4{,}3$; $x = 0{,}1$.

г)* $\dfrac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}$, якщо $x = 3{,}4$; $y = 1{,}6$;

ґ)* $\dfrac{9c^2-4d^2}{18c^2d-12cd^2}$, якщо $c=\dfrac{1}{3}$, $d=\dfrac{1}{2}$.

37*. Доведіть тотожності:

а) $\dfrac{ac+bx+ax+bc}{ay+2bx+2ax+by}=\dfrac{x+c}{2x+y}$;

б) $\dfrac{3a^3+ab^2-6a^2b-2b^3}{9a^5-ab^4-18a^4b+2b^5}=\dfrac{1}{3a^2-b^2}$;

38*. Доведіть, що за будь-якого натурального n дріб $\dfrac{10^n+2}{3}$ є цілим числом.

39*. Скоротіть дріб $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot n}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}$, якщо n — натуральне число, більше від 1.

40°. Запишіть дроби з новими знаменниками і заповніть таблицю, накресливши її в зошиті:

Дріб	Новий знаменник	Додатковий множник	Дріб, зведений до нового знаменника
$\dfrac{a+2x}{4}$	12		
$\dfrac{x-3y}{x^2y}$	x^2y^2		
$\dfrac{ab^3}{3mn^2}$	$9m^3n^2$		
$\dfrac{a}{b+5}$	$(b+5)(b-1)$		
$\dfrac{c-3}{c+3}$	c^2-9		
$\dfrac{p+4}{p-2}$	$0{,}5p-1$		

41. Зведіть дроби:

а) $\frac{3}{x-a}$ до знаменника $a-x$;

б) $\frac{2a}{2a-1}$ до знаменника $2a-4a^2$;

в) $\frac{2}{5+c}$ до знаменника c^2-25;

г) $\frac{1}{x-y}$ до знаменника y^2-x^2;

ґ) $\frac{4}{3m-n}$ до знаменника $9m^2-n^2$;

д) $\frac{3}{x-a}$ до знаменника $(a-x)^2$.

Зведіть до спільного знаменника дроби (42–44):

42°. а) $\frac{1}{a^5}$ і $\frac{1}{a^6}$;

б) $\frac{1}{a^3b^5}$ і $\frac{1}{a^7b^4}$;

в) $\frac{1}{18ax^2}$ і $\frac{1}{36a^2x^2}$;

г) $\frac{1}{24a^8x^5}$ і $\frac{1}{60a^6x^4}$;

ґ) $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b^2}$ і $\frac{1}{c^4}$;

д) $\frac{3x}{4}$ і $\frac{x-4}{6}$;

е) $\frac{4a-b}{8}$ і $\frac{3a-4b}{12}$;

є) $\frac{2a-3b}{a^2b}$ і $\frac{4a-5b}{ab^2}$.

43. а)° $\frac{1}{2x-6}$ і $\frac{1}{x^2-3x}$;

б)° $\frac{a}{3a+3b}$ і $\frac{1}{a^2+ab}$;

в)° $\frac{1}{m-n}$ і $\frac{1}{m^2-n^2}$;

г)° $\frac{1}{2m-2n}$ і $\frac{1}{m^2-n^2}$;

ґ) $\frac{3}{2x-4}$ і $\frac{5}{2x^2-8}$;

д) $\frac{1}{x^2-x}$ і $\frac{1}{2x^2-2}$;

е) $\frac{2}{a^2-1}$ і $\frac{3}{1-a}$;

є) $\frac{m-2}{m+2}$ і $\frac{m+1}{m^2+4m+4}$;

ж) $\frac{p}{p^2-4}$, $\frac{2}{2-p}$ і $\frac{1}{p+2}$.

44. а) $\dfrac{1}{a^2-9}$ і $\dfrac{1}{(a+3)(a+2)}$; б) $\dfrac{1}{a^2-b^2}$ і $\dfrac{1}{(a+b)^2}$;

в) $\dfrac{1}{x^2-xy}$ і $\dfrac{1}{x^2-y^2}$; г) $\dfrac{1}{xy-x^2}$ і $\dfrac{1}{x^2-y^2}$;

ґ)* $\dfrac{x-y}{xy+y^2}$ і $\dfrac{x^2+y^2}{x^3-xy^2}$; д)* $a+3$ і $\dfrac{a+3}{a-3}$;

е)* $\dfrac{c-d}{c^2+2cd+d^2}$ і $\dfrac{2c}{c^2-d^2}$; є)* $\dfrac{m-n}{m^3+n^3}$ і $\dfrac{m}{m^2-n^2}$.

45*. *Математична несподіванка.*

До будь-якого двоцифрового числа допишіть таке ж двоцифрове число. Визначте частку від ділення одержаного чотирицифрового числа на дане двоцифрове число. Зробіть висновок.

1.3. Додавання і віднімання раціональних дробів

! Пригадайте

1. Як додати звичайні дроби з однаковими знаменниками?
2. Як відняти звичайні дроби з однаковими знаменниками?
3. Як додати (відняти) звичайні дроби з різними знаменниками?

① **Сума і різниця дробів з однаковими знаменниками.** Як відомо, для звичайних дробів має місце рівність

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}.$$

Наприклад, $\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{7}=\dfrac{2+3}{7}=\dfrac{5}{7}$.

Ця рівність правильна не лише для натуральних, але й для будь-яких інших числових значень a, b і c (за винятком, звичайно, $c=0$). Доведемо це.

▼ Нехай $\frac{a}{c} = m$, $\frac{b}{c} = n$. Оскільки риска дробу позначає дію ділення, то за означенням ділення маємо: $a = cm$, $b = cn$.

Тоді $a + b = cm + cn = c(m + n)$.

З рівності $c(m + п) = a + b$ випливає:

$$m + n = \frac{a+b}{c}.$$

Повернувшись до введених на початку доведення позначень, маємо: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$. ▲

Тому можна стверджувати, що коли A, B і C — цілі раціональні вирази зі змінними, то відповідні числові значення виразів $\frac{A}{C} + \frac{B}{C}$ і $\frac{A+B}{C}$ будуть рівними за всіх значень змінних (за винятком $C = 0$). Отже, рівність

$$\boxed{\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}, \; C \neq 0,} \tag{4}$$

є тотожністю й ілюструє правило додавання раціональних дробів з однаковими знаменниками. Це правило можна сформулювати так:

щоб додати раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники й одержану суму записати в чисельнику дробу, а знаменник залишити без змін.

Аналогічно виконують віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками:

$$\boxed{\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}, \; C \neq 0.} \tag{5}$$

Приклади:

1) $\frac{2x+3}{6} + \frac{x}{6} = \frac{2x+3+x}{6} = \frac{3x+3}{6} = \frac{3(x+1)}{6} = \frac{x+1}{2}$;

2) $\frac{2x+1}{4} + \frac{4x+1}{4} = \frac{2x+1+4x+1}{4} = \frac{6x+2}{4} = \frac{2(3x+1)}{4} = \frac{3x+1}{2}$;

3) $\dfrac{2a+3}{6}-\dfrac{a+1}{6}=\underbrace{\dfrac{2a+3-(a+1)}{6}}=\dfrac{2a+3-a-1}{6}=\dfrac{a+2}{6}.$

Увага! Виконуючи подібні вправи, часто припускаються помилки, записуючи відразу: $\dfrac{2a+3}{6}-\dfrac{a+1}{6}=\dfrac{2a+3-a+1}{6}.$

Помилка полягає в тому, що, утворюючи різницю чисельників дробів, знак змінили лише перед першим членом чисельника дробу — від'ємника (а), а перед другим членом (+1) це зробити «забули». Щоб такого не траплялося, варто принаймні на перших порах вдаватися до проміжного запису (в нашому прикладі він позначений *дужкою*).

4) $\dfrac{x+4}{a-2}+\dfrac{x-3}{2-a}.$

Тут знаменники дробів відрізняються лише знаком. Їх легко зробити однаковими, змінивши в одному з них (наприклад, у другому) знак на протилежний, зробивши це одночасно і перед дробом:

$$\frac{x+4}{a-2}+\frac{x-3}{2-a}=\frac{x+4}{a-2}-\frac{x-3}{a-2}=\frac{x+4-(x-3)}{a-2}=\frac{x+4-x+3}{a-2}=\frac{7}{a-2}.$$

② **Сума і різниця дробів з різними знаменниками.** Часто виникає потреба додавати або віднімати дроби з різними знаменниками.

Щоб додати (відняти) дроби з різними знаменниками, їх спочатку зводять до спільного знаменника, а потім додають (віднімають), як дроби з однаковими знаменниками.

Приклади:

1) $\dfrac{7x+2y}{4}^{\backslash 3}+\dfrac{3x-y}{6}^{\backslash 2}=\dfrac{3(7x+2y)+2(3x-y)}{12}=$

$=\dfrac{21x+6y+6x-2y}{12}=\dfrac{27x+4y}{12};$

2) $\dfrac{m+n}{mn}^{\backslash m}-\dfrac{m-n}{m^2}^{\backslash n}=\dfrac{m(m+n)-n(m-n)}{m^2n}=$

$=\dfrac{m^2+mn-mn+n^2}{m^2n}=\dfrac{m^2+n^2}{m^2n};$

3) $\dfrac{a^2-4}{a^2-16}-\dfrac{a+1}{a+4}=\dfrac{a^2-4}{(a-4)(a+4)}-\dfrac{a+1}{a+4}^{\backslash a-4}=\dfrac{a^2-4-(a-4)(a+1)}{(a-4)(a+4)}=$

$$= \frac{a^2 - 4 - (a^2 + a - 4a - 4)}{(a-4)(a+4)} = \frac{a^2 - 4 - a^2 - a + 4a + 4}{(a-4)(a+4)} = \frac{3a}{(a-4)(a+4)} =$$

$$= \frac{3a}{a^2 - 16};$$

4) $m - n + \frac{2mn}{m-n}$.

У даному випадку маємо суму цілого виразу $m - n$ і дробу. Щоб скористатися правилом додавання дробів, цілий вираз можна записати у вигляді дробу зі знаменником 1. Маємо:

$$m - n + \frac{2mn}{m-n} = \frac{m-n}{1}^{\backslash m-n} + \frac{2mn}{m-n} = \frac{(m-n)^2 + 2mn}{m-n} =$$

$$= \frac{m^2 - 2mn + n^2 + 2mn}{m-n} = \frac{m^2 + n^2}{m-n}.$$

Завдання, пов'язані із додаванням і відніманням дробів, можуть бути сформульовані по-різному: виконати дії; знайти суму (різницю) дробів; спростити вираз; перетворити вираз у дріб тощо. Але послідовність виконання цих завдань завжди одна і та сама: спочатку суму чи різницю дробів записують у вигляді дробу (на основі відповідних правил додавання і віднімання дробів), а потім одержаний дріб зводять до найпростішого вигляду шляхом виконання відповідних тотожних перетворень його чисельника і скорочення дробу (якщо це можливо).

? Запитання для самоперевірки

1. Як додати (відняти) раціональні дроби з однаковими знаменниками?
2. Як додати (відняти) раціональні дроби з різними знаменниками?

Задачі та вправи

Виконайте дії (46 – 48):

46°. а) $\frac{3x}{7} + \frac{4x}{7}$; б) $\frac{2a}{3} - \frac{a}{3}$; в) $\frac{m}{n} + \frac{p}{n}$;

г) $\frac{1}{x}-\frac{5}{x}$; ґ) $\frac{2}{m}+\frac{3}{m}-\frac{4}{m}$; д) $\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y}$.

47°. а) $\frac{2x+1}{b}+\frac{3x+1}{b}$; б) $\frac{c-2d}{c^2}+\frac{c+2d}{c^2}$;

в) $\frac{a+3}{2}-\frac{a+1}{2}$; г) $\frac{2m+3n}{4mn}-\frac{2m-3n}{4mn}$;

ґ) $\frac{9p-4}{3p^2}+\frac{4-6p}{3p^2}$; д) $\frac{2y-1}{y^2}-\frac{y-2}{y^2}$.

48. а)° $\frac{x+4}{a-2}+\frac{x+3}{a-2}$; б)° $\frac{a+b}{c-d}-\frac{a-b}{d-c}$;

в) $\frac{c-5}{a^2-9}+\frac{c+5}{9-a^2}$; г) $\frac{a}{(a+2b)^2}+\frac{2b}{(2b+a)^2}$;

ґ) $\frac{x}{(x-y)^2}-\frac{y}{(y-x)^2}$; д) $\frac{m^2}{(m-n)^2}-\frac{n^2}{(n-m)^2}$.

Подайте вирази у вигляді дробів (49–51):

49. а)° $\frac{3}{x^2}-\frac{1}{2xy}$; б)° $\frac{a}{6b^3}+\frac{5}{8b^4}$;

в) $\frac{7x+2y}{4}+\frac{3x-y}{6}$; г) $\frac{2m+5}{6}-\frac{m-1}{8}$;

ґ) $\frac{5a+6}{6a}+\frac{1}{a}$; д) $\frac{x-y}{xy}+\frac{y-z}{yz}$.

50. а) $\frac{m+n}{mn}-\frac{m-n}{m^2}$; б) $\frac{2x-3y}{x^2y}+\frac{3x-2y}{xy^2}$;

в) $\frac{5a^2-3b}{a^2b}-\frac{2b^2-6a}{a^2b^2}$; г) $\frac{2a^2+a-5}{a^2b}-\frac{2a-1}{ab}$.

51. а)° $a+\frac{b}{c}$; б)° $\frac{b}{a}-b$; в)° $x-y+\frac{(x+y)^2}{2x}$;

г) $\frac{2mn}{m-n}-m+n$; ґ) $\frac{c^2-d^2}{c}-c+d$; д) $\frac{b^2+2c^2}{c}+2bc-c$.

52°. Розв'яжіть рівняння: $\frac{x}{3}-2=\frac{2-x}{5}$.

▼ Рівняння, що містять дроби без змінної в знаменнику, як правило, розв'язують так. Всі члени рівняння спочатку зводять до спільного знаменника, а потім множать на нього ліву і праву частини рівняння, щоб позбутися дробу. Таке перетворення, можна робити на основі відомої вам з попередніх класів властивості рівнянь. Отже:

$\frac{x}{3}^{\backslash 5} - \frac{2}{1}^{\backslash 15} = \frac{2-x}{5}^{\backslash 3}$; $\frac{5x}{15} - \frac{30}{15} = \frac{6-3x}{15}$;

$5x - 30 = 6 - 3x$; $8x = 36$; $x = 4{,}5$. ▲

а)° $\frac{6x+7}{7} - 3 = \frac{5x-3}{8}$; б)° $\frac{x-4}{5} + \frac{2x-3}{3} = 6$;

в)° $\frac{x-5}{2} + \frac{x-1}{8} = \frac{x-3}{4}$; г)° $\frac{x+6}{2} + \frac{5-4x}{3} - \frac{8-x}{6} = 0$.

Спростіть вирази (53 — 58):

53°. а) $\frac{4}{x-1} + \frac{1}{x}$; б) $\frac{4}{4-x} - \frac{3}{3+x}$; в) $\frac{m}{m+n} + \frac{n}{m-n}$;

г) $\frac{a}{a-3} - \frac{3}{a+3}$; ґ) $\frac{x}{x-2} - \frac{4x}{x+2}$; д) $\frac{6a}{x-2y} + \frac{2a}{x+y}$.

54°. а) $\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}$; б) $\frac{2x+1}{2x-1} + \frac{2x-1}{2x+1}$;

в) $\frac{c-2d}{c+d} - \frac{c-2d}{c-d}$; г) $\frac{m+n}{m-n} - \frac{m+2n}{m+n}$.

55°. а) $\frac{5}{x-1} + \frac{3}{2x-2}$; б) $\frac{a}{3a+3b} - \frac{2a}{5a+5b}$;

в) $\frac{3b}{ax+ay} - \frac{2a}{bx+by}$; г) $\frac{m}{2m^2-mn} - \frac{4n}{2mn-n^2}$;

ґ) $\frac{c}{2c^2-cd} - \frac{d}{2c-d}$; д) $\frac{5x+3y}{2(x+y)} - \frac{7x+4y}{3(x+y)}$.

56. а) $\frac{x+y}{x^2+xy} + \frac{x-y}{xy+y^2}$; б) $\frac{c-3}{c^2+3c} - \frac{3-c}{9+3c}$.

57. а) $\frac{3}{x^2-9} + \frac{5}{x-3}$; б) $\frac{4}{x+2} - \frac{x-8}{x^2-4}$; в) $\frac{c+d}{c-d} - \frac{2cd}{c^2-d^2}$;

г) $\frac{8}{b^2-16} + \frac{b-2}{b-4}$; ґ) $\frac{a+2}{a-1} + \frac{a^2}{1-a^2}$; д) $\frac{2x^2}{x^2-9} + \frac{2x+1}{3-x}$.

58. а) $\frac{m-n}{2m+2n}+\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$; б) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}-\frac{x+y}{2x-2y}$;

в) $\frac{5-a}{(a-4)^2}+\frac{6}{5a-20}$; г) $\frac{a+b}{(a-b)^2}-\frac{a}{a^2-b^2}$;

ґ) $\frac{a+b}{(a-b)^2}-\frac{2a}{a^2-b^2}$; д) $\frac{x}{x+1}+\frac{x^2+1}{1-x^2}+\frac{1}{x-1}$.

59*. Доведіть, що значення виразів не залежить від a:

а) $\frac{a^2-a-6}{a^2-4}+\frac{a-3}{2-a}$; б) $a-\frac{a^3-2a+1}{a^2+a-1}$.

60*. Перетворіть у дріб вирази:

а) $\frac{c^2}{p-3}+\frac{3+2c^2}{p^2+3p+9}-\frac{p^2c^2+5pc^2+3c^2}{p^3-27}$;

б) $\frac{x-y}{(x+y)^2}-\frac{2x}{x^2-y^2}+\frac{x+y}{(x-y)^2}$;

в) $\frac{c+2p}{(c-2p)^2}+\frac{6p}{4p^2-c^2}-\frac{c-2p}{(c+2p)^2}$;

г) $\frac{c+6b}{ac+2bc-6ab-3a^2}+\frac{2b}{a^2+2ab}-\frac{b}{ac-3a^2}$.

Доведіть тотожності (61–63):

61°. а) $\frac{2c}{c+4}+\frac{8}{c+4}=2$; б) $\frac{3c}{c-a}-\frac{3a}{c-a}=3$;

в) $\frac{(c+p)^2}{cp}-\frac{(c-p)^2}{cp}=4$; г) $-\frac{c^2-2cp+p^2}{c-p}=p-c$.

62. а) $\frac{c}{c+p}+\frac{2cp}{c^2-p^2}-\frac{p}{c-p}=1$; б) $c-1-\frac{c^2-3}{c+1}=\frac{2}{c+1}$.

63*. а) $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}=1$;

б) $\frac{(b-c)^2}{(a-b)(c-a)}-\frac{(a-c)^2}{(a-b)(b-c)}+\frac{(a-b)^2}{(c-a)(b-c)}=3$;

в) $\frac{2}{3c+6}-\frac{c-2}{2c^2+4c}-\frac{2}{3c^2+12c+12}-\frac{4}{3c(c+2)^2}=\frac{1}{6c}$.

64. Скориставшись тотожністю $\frac{a+b}{c}=\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$, запишіть дроби у вигляді суми:

а) $\frac{x+y}{c}$; б) $\frac{2x^2+3y}{2p}$; в) $\frac{x^2+3y^2}{2xy}$; г) $\frac{-2x+8y}{4xy}$.

65. Запишіть дроби у вигляді суми або різниці дробів:

а) $\frac{3x+4y}{12xy}$; б) $\frac{5x-y}{x}$; в) $\frac{x+2}{2x}$; г) $\frac{x^2-3xy}{x}$.

66*. Відомо, що $\frac{x}{y}=4$. Знайдіть значення виразів:

а) $\frac{x+y}{y}$; б) $\frac{x-y}{y}$; в) $\frac{y}{x}$; г) $\frac{x+2y}{y}$;

ґ) $\frac{x-3y}{y}$; д) $\frac{4x+y}{x}$; е) $\frac{5x-y}{x}$; є) $\frac{x^2+y^2}{xy}$.

67*. Відомо, що $\frac{x+y}{y}=6$. Знайдіть значення виразів:

а) $\frac{x}{y}$; б) $\frac{y}{x+y}$; в) $\frac{x-y}{y}$; г) $\frac{x^2-y^2}{xy}$.

68. Знайдіть значення виразів, попередньо спростивши їх:

а) $\frac{x}{x+1}-\frac{x^2+1}{x^2-1}+\frac{2}{x-1}$, якщо $x=3{,}5$;

б) $\frac{b+2}{b^2+3b}+\frac{b+1}{9-b^2}$, якщо $b=2{,}5$.

69*. Доведіть, що значення виразів дорівнюють нулю за всіх допустимих значень змінних:

а) $\frac{1}{(a-b)(b-c)}-\frac{1}{(b-c)(a-c)}-\frac{1}{(c-a)(b-a)}$;

б) $\frac{a}{(a-2b)(a-c)}+\frac{2b}{(2b-a)(2b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-2b)}$.

70*. Доведіть тотожності:

а) $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}$;

б) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$;

в) $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{2n}{2n+1}$.

1.4. Множення і ділення раціональних дробів

! Пригадайте

1. Як знайти добуток звичайних дробів?
2. Як знайти частку двох звичайних дробів?

① **Добуток раціональних дробів.** Множення раціональних дробів виконують за тим же правилом, що і множення звичайних дробів:

$$\boxed{\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},\ B\neq 0,\ D\neq 0.} \quad (6)$$

Тобто,

щоб помножити дріб на дріб, треба окремо помножити їх чисельники та знаменники і перший добуток записати у чисельнику, а другий у знаменнику дробу, що є добутком даних дробів.

Приклади:

1) $\frac{5a}{16b^2}\cdot\frac{4b}{5}=\frac{5a\cdot 4b}{16b^2\cdot 5}=\frac{a}{4b}$;

2) $\frac{mn-n^2}{mn+m^2}\cdot\frac{m+n}{m-n}=\frac{(mn-n^2)\cdot(m+n)}{(mn+m^2)\cdot(m-n)}=\frac{n(m-n)(m+n)}{m(n+m)(m-n)}=\frac{n}{m}$;

3) $\frac{x-3}{y^3}\cdot 6y^2=\frac{x-3}{y^3}\cdot\frac{6y^2}{1}=\frac{(x-3)\cdot 6y^2}{y^3}=\frac{6(x-3)}{y}$.

② **Степінь раціонального дробу.** Нехай треба перетворити в дріб вираз $\left(\frac{2a}{3b^2}\right)^3$. За означенням степеня маємо:

$$\left(\frac{2a}{3b^2}\right)^3 = \frac{2a}{3b^2}\cdot\frac{2a}{3b^2}\cdot\frac{2a}{3b^2} = \frac{2a\cdot 2a\cdot 2a}{3b^2\cdot 3b^2\cdot 3b^2} = \frac{(2a)^3}{\left(3b^2\right)^3} = \frac{8a^3}{27b^6}.$$

Взагалі

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n},\ n\text{ — натуральне число, } B \neq 0. \qquad (7)$$

③ **Частка раціональних дробів.** Ділення є дією, оберненою до множення. Тому дію ділення раціональних дробів, як і у випадку звичайних дробів, можна замінити дією множення діленого на дріб, обернений до дільника.

Нагадаємо, щоб утворити дріб, обернений до даного, треба поміняти місцями його чисельник і знаменник. Так, дріб $\frac{3}{5}$ обернений до дробу $\frac{5}{3}$, $\frac{x}{y^2}$ — до $\frac{y^2}{x}$ тощо. Взагалі дріб $\frac{B}{A}$ обернений до дробу $\frac{A}{B}$ ($A \neq 0$, $B \neq 0$). Як відомо, добуток обернених дробів дорівнює 1.

Отже,

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C} = \frac{AD}{BC},\ B \neq 0,\ C \neq 0,\ D \neq 0. \qquad (8)$$

У правильності рівності $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}$ легко переконатися, помноживши частку на дільник:

$$\frac{AD}{BC}\cdot\frac{C}{D} = \frac{ADC}{BCD} = \frac{A}{B}.$$

Отже, дістали ділене. Ділення виконано правильно.

Щоб поділити дріб на дріб, треба чисельник діленого помножити на знаменник дільника, а знаменник діленого — на чисельник дільника і перший добуток записати у чисельнику, а другий — у знаменнику дробу — частки.

Приклади:

1) $\frac{9x}{28y} : \frac{3x^2y}{7xy^2} = \frac{9x \cdot 7xy^2}{28y \cdot 3x^2y} = \frac{3}{4}$.

Зауваження. У подібних випадках одержаний дріб доцільніше скорочувати, не виконуючи множення у чисельнику і знаменнику.

2) $\frac{a^2-b^2}{2ab} : \frac{a+b}{a^2} = \frac{\left(a^2-b^2\right)a^2}{2ab(a+b)} = \frac{(a-b)(a+b)a}{2b(a+b)} = \frac{a(a-b)}{2b}$;

3) $\left(cd-d^2\right) : \frac{ac-ad}{c} = \frac{cd-d^2}{1} : \frac{ac-ad}{c} = \frac{(cd-d^2)c}{ac-ad} = \frac{d(c-d)c}{a(c-d)} = \frac{cd}{a}$.

? Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте правило множення раціональних дробів.
2. Сформулюйте правило ділення раціональних дробів.

Задачі та вправи

Виконайте дії (71–75):

71°. а) $\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{m}$; б) $\frac{a^2}{b} \cdot \frac{b^2}{a}$; в) $\frac{x}{y} \cdot z$; г) $c \cdot \frac{b}{c^2}$.

72. а)° $\frac{x^4}{y^3} \cdot \frac{y^2}{x^3}$; б)° $\frac{5a}{16b} \cdot \frac{4b^2}{15}$; в)° $\frac{3ab}{4xy} \cdot \frac{10x^2y}{21a^2b}$;

г)° $\frac{12ad^3}{7a^2b} \cdot \frac{21a^2b^2}{4cd}$; ґ) $\frac{17a^2b}{19x^3y} \cdot \frac{57xy}{51ab}$; д) $\frac{13x^3}{15ab} \cdot \frac{45a^2b^3}{52x^2}$.

73°. а) $\frac{2ax}{yz} : \frac{3bx}{ay}$; б) $\frac{9xy}{5ab} : \frac{3yz}{10ab}$; в) $\frac{8c}{21d^2} : \frac{6c^2}{7d}$; г) $\frac{6b^2cd}{9a^5} : \frac{24b^2}{5a^4}$.

74°. а) $3m \cdot \frac{n}{12m}$; б) $8a^2b^4 : \frac{4b^3}{3a}$; в) $\frac{5c}{28d^2} \cdot 21cd$;

г) $\frac{12xy}{25z} : 8z^2$; ґ) $36a^4b^2 : \frac{12a^5}{b^5}$; д) $15a^3b \cdot \frac{3c}{10a^4b^2}$.

75°. а) $-\frac{18a^2b^2}{5cd} : \frac{6ab^3}{5c^2d^2}$; б) $-\frac{25x^4y^3}{14a^2} \cdot \left(-\frac{21ab}{10x^3y^2}\right)$.

Спростіть вирази (76–80):

76°. а) $\dfrac{p^2-px}{x}\cdot\dfrac{x}{p}$; б) $\dfrac{xy-y}{9}\cdot\dfrac{3x}{y}$; в) $\dfrac{2x}{5y^2}:\dfrac{2x^2+6x}{10y^3-5y^2}$.

77°. а) $\dfrac{ab+b^2}{9}\cdot\dfrac{3a}{b^2}$; б) $\dfrac{b^2}{a}:\dfrac{b}{a^2-ab}$;

в) $\dfrac{x^2-y^2}{6x^2y^2}:\dfrac{x+y}{3xy}$; г) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2}\cdot\dfrac{a^4}{(a+b)^2}$;

ґ) $\dfrac{a^2b-4b^3}{3ab^2}\cdot\dfrac{a^2b}{a^2-2ab}$; д) $\dfrac{4x^2-9}{2xy}:\dfrac{2x+3}{4xy}$.

78. а) $\dfrac{x^2-xy}{x^2+xy}\cdot\dfrac{x^2y+xy^2}{xy}$; б) $\dfrac{c+p}{c-p}\cdot\dfrac{c^2-cp}{2c+2p}$.

79. а) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2}\cdot\dfrac{x^3}{x^2+2xy+y^2}$; б) $\dfrac{x^2-25}{x^2-3x}:\dfrac{x^2+5x}{x^2-9}$;

в) $\dfrac{x^2-4y^2}{x^2-xy}\cdot\dfrac{x-y}{x^2+2xy}$; г) $\dfrac{a^2-25}{a^2-3a}:\dfrac{a^2+5a}{a^2-9}$.

80. а) $\dfrac{m^2-n^2}{2mn}:\dfrac{n-m}{4m^2n^2}$; б) $\dfrac{a+b}{x^2-9}\cdot\dfrac{(3+x)^2}{b^2-a^2}$;

в) $\dfrac{(c-2)(c+5)}{(d-4)^2}:\dfrac{4-c^2}{2d-8}$; г) $\dfrac{x^2-2xy+y^2}{a^3-4a}\cdot\dfrac{a-2}{y^2-x^2}$.

Піднесіть до степеня дроби (81–83):

81°. а) $\left(\dfrac{a}{b^2}\right)^2$; б) $\left(\dfrac{x}{3y}\right)^3$; в) $\left(\dfrac{2a}{3b}\right)^2$;

г) $\left(\dfrac{-x}{y}\right)^5$; ґ) $\left(\dfrac{-x}{y}\right)^6$; д) $\left(\dfrac{3ax}{4by}\right)^2$.

82. а)° $\left(\dfrac{2x^2}{y^3}\right)^3$; б)° $\left(\dfrac{-xy}{3z^3}\right)^2$; в)° $\left(\dfrac{5m^2}{6n^2}\right)^2$;

г) $\left(\dfrac{xy^2}{x+y}\right)^4$; ґ) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^3$; д) $\left(\dfrac{bc^3}{(b-c)^2}\right)^2$.

83*. а) $\left(\left(-\dfrac{x}{y}\right)^2\right)^n$; б) $\left(-\left(\dfrac{x}{y^2}\right)^3\right)^{2n}$; в) $\left(-\left(-\dfrac{a}{b}\right)^3\right)^k$.

Знайдіть числове значення виразів (84–85):

84. а) $\dfrac{4m^2-4m}{m+3}:(2m-2)$, якщо $m=2{,}5$;

б) $\dfrac{b-2}{b+1}\cdot\dfrac{b^2-1}{2b-4}$, якщо $b=1\dfrac{1}{3}$;

в)* $\dfrac{5ab-a}{4a+b}\cdot\dfrac{16a^2-b^2}{5b-1}$, якщо $a=-6{,}25$, $b=-5$;

г)* $\dfrac{(x+2)^2}{3x+9}:\dfrac{x^2-4}{2x+6}$, якщо $x=2\dfrac{1}{3}$.

85. а) $\dfrac{a^2-9}{10a^2}\cdot\dfrac{5a}{(a+3)^2}$, якщо $a=0{,}6$;

б) $(2x-y):\dfrac{2x^2-xy}{x+y}$, якщо $x=\dfrac{2}{3}$, $y=-\dfrac{1}{6}$.

1.5. Перетворення раціональних виразів

① **Мета перетворень раціональних виразів.** Досі ми розглядали тотожні перетворення суми або різниці, добутку або частки двох дробів (або дробу і цілого виразу). Такі перетворення виконують за правилами, сформульованими вище. Ці ж правила лежать в основі тотожних перетворень складніших раціональних виразів, до яких входять алгебраїчні суми кількох виразів, їхні добутки або частки.

Наприклад, вираз $\left(\dfrac{1}{2a-b}-\dfrac{3b}{4a^2-b^2}+\dfrac{2}{2a+b}\right):\left(\dfrac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}+1\right)$ є часткою суми виразів $\dfrac{1}{2a-b}$, $-\dfrac{3b}{4a^2-b^2}$, $\dfrac{2}{2a+b}$ і суми дробу $\dfrac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}$ та 1.

Здебільшого метою тотожних перетворень подібних виразів є подання даного виразу у вигляді раціонального дробу.

② **Як виконують перетворення раціональних виразів.** Перетворимо розглянутий вираз:

$$\left(\frac{1}{2a-b}-\frac{3b}{4a^2-b^2}+\frac{2}{2a+b}\right):\left(\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}+1\right).$$

▼ Передусім потрібно встановити порядок дій і, враховуючи його, дотримуватися відповідної послідовності записів. Наразі слід виконати дії з дробами у перших і других дужках, а потім перший результат поділити на другий. Записати це можна так:

1) $\frac{1}{2a-b}-\frac{3b}{4a^2-b^2}+\frac{2}{2a+b}=\frac{(2a+b)-3b+2(2a-b)}{4a^2-b^2}=$

$=\frac{2a+b-3b+4a-2b}{4a^2-b^2}=\frac{6a-4b}{4a^2-b^2};$

2) $\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}+1=\frac{4a^2+b^2+4a^2-b^2}{4a^2-b^2}=\frac{8a^2}{4a^2-b^2};$

3) $\frac{6a-4b}{4a^2-b^2}:\frac{8a^2}{4a^2-b^2}=\frac{(6a-4b)\cdot(4a^2-b^2)}{(4a^2-b^2)\cdot 8a^2}=\frac{2(3a-2b)}{8a^2}=\frac{3a-2b}{4a^2}.$ ▲

Можлива й інша форма запису розв'язання цієї вправи так званим ланцюжком, коли перетворення дробів у дужках виконують одночасно:

▼ $\left(\frac{1}{2a-b}-\frac{3b}{4a^2-b^2}+\frac{2}{2a+b}\right):\left(\frac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}+1\right)=$

$=\frac{(2a+b)-3b+2(2a-b)}{4a^2-b^2}:\frac{4a^2+b^2+4a^2-b^2}{4a^2-b^2}=$

$=\frac{2a-2b+4a-2b}{4a^2-b^2}:\frac{8a^2}{4a^2-b^2}=\frac{(6a-4b)\cdot(4a^2-b^2)}{(4a^2-b^2)\cdot 8a^2}=\frac{2(3a-2b)}{8a^2}=$

$=\frac{3a-2b}{4a^2}.$ ▲

Трапляються випадки, коли треба спростити дріб, чисельник і знаменник якого є дробовими виразами. Наприклад, $\dfrac{\frac{a}{b}+1}{\frac{b}{a}+1}$.

Спростити цей вираз можна по-різному.

1) Спочатку перетворимо чисельник і знаменник у дроби, а потім перший вираз поділимо на другий:

▼ $\frac{a}{b}+1=\frac{a+b}{b}$; $\frac{b}{a}+1=\frac{b+a}{a}$; $\frac{a+b}{b}:\frac{b+a}{a}=\frac{a(a+b)}{b(a+b)}=\frac{a}{b}$. ▲

Ці перетворення можна записати й інакше:

$$▼\ \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{b}{a}+1}=\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{b+a}{a}}=\frac{a+b}{b}:\frac{b+a}{a}=\frac{(a+b)\cdot a}{b\cdot(b+a)}=\frac{a}{b}.\ ▲$$

2) Помножимо чисельник і знаменник даного дробу на їх спільний знаменник ab. За основною властивістю дробу маємо:

$$▼\ \frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{b}{a}+1}=\frac{\left(\frac{a}{b}+1\right)ab}{\left(\frac{b}{a}+1\right)ab}=\frac{\frac{a}{b}\cdot ab+ab}{\frac{b}{a}\cdot ab+ab}=\frac{a^2+ab}{b^2+ab}=\frac{a(a+b)}{b(a+b)}=\frac{a}{b}.\ ▲$$

Задачі та вправи

Перетворіть у дріб вирази (86–91):

86°. а) $\frac{x}{(x+1)^2}\cdot(x+1)+1$; б) $\left(\frac{x}{x+1}+1\right):\frac{1}{x+1}$; в) $\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}\right):\frac{2}{x}$.

87°. а) $\left(\frac{a}{b}+1\right)+\left(\frac{a}{b}-1\right)^2$; б) $\left(\frac{a}{b}+1\right)^2-\left(\frac{a}{b}-1\right)^2$;

в) $\frac{x}{(x+1)^2}\cdot(x+1)-1$; г) $\frac{x^2}{(x-3)^2}\cdot(x-3)-x$;

ґ) $\frac{1}{x^2-4}\cdot(x+2)+\frac{1}{x}$; д) $(x+1)^2\cdot\frac{1}{x^2-1}-\frac{x+1}{x-1}$.

88. а) $\left(a-\frac{bc}{b-c}\right):\left(b-\frac{ac}{a-c}\right)$; б) $\left(1+\frac{p}{1+p}\right)\cdot\left(1+\frac{p+1}{p}\right)$;

в) $\left(c+1-\frac{1}{1-c}\right):\left(c-\frac{c^2}{c-1}\right)$; г) $\frac{a-2}{a^2-9}\cdot\frac{a-3}{2a-4}+\frac{1}{a}$;

ґ) $\frac{xy}{y-x}\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)$; д) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$.

89°. а) $\left(\frac{a}{a+1}+1\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$; б) $\left(\frac{1}{a-1}+a\right)\cdot\frac{(a-1)^2}{a^2-a+1}$;

в) $(x^2-1)\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-1\right)$;

г) $\left(\frac{m+n}{n}-\frac{m}{m+n}\right):\left(\frac{m+n}{m}-\frac{n}{m+n}\right)$.

90°. а) $\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$; б) $\frac{xy+y^2}{3}:\frac{y^3}{3x}+\frac{x+y}{y}$.

91°. а) $\left(\frac{x}{c^2}+\frac{x^2}{c^3}\right):\left(\frac{c^2}{x^2}+\frac{c}{x}\right)$; б) $\frac{x-y}{x}-\frac{5y}{x^2}\cdot\frac{x^2-xy}{5y}$;

в) $\left(\frac{x}{x+1}+1\right)\cdot\frac{x+1}{2x-1}$; г) $\left(\frac{4p}{2-p}-p\right):\frac{p+2}{p-2}$.

Спростіть вирази (92–95):

92. а) $\left(\frac{2c+1}{2c-1}-\frac{2c-1}{2c+1}\right):\frac{4c}{10c-5}$; б) $\left(\frac{3c}{1-3c}+\frac{2c}{1+3c}\right):\frac{6c^2+10c}{(1-3c)^2}$;

в) $\left(\frac{p}{x-p}-\frac{p}{p+x}\right)\cdot\frac{x^2+2px+p^2}{2p^2}$;

г) $\left(\frac{b}{a^2+ab}-\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\left(\frac{b}{a}-2+\frac{a}{b}\right)$;

ґ) $\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(x-y)^2}\right):\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}\right)$;

д) $\left(\frac{x}{x-a}-\frac{a}{x+a}\right):\left(\frac{x+a}{a}-\frac{x-a}{x}\right)$.

93. а) $\left(\frac{2ab}{4a^2-9b^2}+\frac{b}{3b-2a}\right):\left(1-\frac{2a-3b}{2a+3b}\right)$;

б) $\left(\frac{6a+c}{a^2-6ac}+\frac{6a-c}{a^2+6ac}\right)\cdot\frac{a^2-36c^2}{a^2+c^2}$.

94*. а) $\left(\frac{a-x}{a^2+ax+x^2}-\frac{1}{a-x}\right)\cdot\left(\frac{2x+a}{a}+\frac{2a+x}{x}\right)$;

б) $\left(\frac{k+x}{k^2-kx+x^2}-\frac{1}{k+x}\right):\left(\frac{k^2+2x^2}{k^3+x^3}-\frac{k+2x}{k^2-kx+x^2}\right)$.

95*. а) $\left(\dfrac{2x+5y}{x^2-2xy}-\dfrac{9y}{x^2-4xy+4y^2}\right)\cdot\left(\dfrac{x-5y}{x+y}+2+\dfrac{x+y}{x-5y}\right)$;

б) $\left(\dfrac{2a-3b}{a-7b}-2+\dfrac{a-7b}{2a-3b}\right)\cdot\left(\dfrac{23a-29b}{a^2+8ab+16b^2}-\dfrac{15a-21b}{a^2+4ab}\right)$.

96. Доведіть тотожності і визначте допустимі значення змінної:

а) $\left(\dfrac{a+1}{2a-2}-\dfrac{1}{2a^2-2}\right)\cdot\dfrac{2a+2}{a+2}=\dfrac{a}{a-1}$;

б) $\left(\dfrac{1}{1-a}-1\right):\left(a-\dfrac{1-2a^2}{1-a}+1\right)=\dfrac{1}{a}$.

97*. Доведіть тотожності:

а) $\left(\dfrac{1}{p-2q}+\dfrac{6q}{4q^2-p^2}-\dfrac{2}{p+2q}\right):\left(\dfrac{p^2+4q^2}{p^2-4q^2}+1\right)=-\dfrac{1}{2p}$;

б) $\dfrac{4a-2b}{3ab}:\left(\dfrac{8ab}{12a^2-3b^2}+\dfrac{2a-b}{2a+b}-\dfrac{2a+b}{6a-3b}\right)=\dfrac{2a+b}{ab}$.

98*. Доведіть, що за всіх допустимих значень x і y значення виразу $\left(\dfrac{x-2y}{3xy+6y^2}-x^2+2xy\right)\cdot\dfrac{x+2y}{x^2-2xy}+\dfrac{6xy^2-1}{3xy}$ не залежить від y.

99. Знайдіть значення виразу:

а) $\left(\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}\right):\left(\dfrac{x}{12}+\dfrac{y}{18}\right)$, якщо $x=\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{1}{2}$.

б) $(0,2x-y):\left(\dfrac{x^2}{25}-y^2\right)$, якщо $x=-8$, $y=0,6$.

100*. Знайдіть значення виразу:

а) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$, якщо $x+\dfrac{1}{x}=-3$;

б) $x^3-\dfrac{1}{x^3}$, якщо $x-\dfrac{1}{x}=2$;

в) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$, якщо $x-\dfrac{1}{x}=5$.

101. Відомо, що $y=\dfrac{4}{x}$ і $x=\dfrac{2}{p}$. Виразіть y через p.

102*. Відомо, що $y = \frac{5}{x}$ і $x = \frac{4}{p}$. Виразіть:

а) $2x + p$ через y; б) $2xy$ через p.

103*. Відомо, що $y = \frac{1}{x}$ і $z = \frac{4}{x}$. Виразіть $x + y$ через z.

104*. Відомо, що $y = \frac{1-p}{p}$ і $x = \frac{p}{2-p}$. Виразіть:

а) y через x; б) $2py$ через x.

105. Спростіть вирази:

а) $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{x}}$; б) $\dfrac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$; в) $\dfrac{a-\frac{n^2}{a}}{n-\frac{a^2}{n}}$;

г) $\dfrac{1+\frac{1}{x-1}}{1-\frac{1}{x+1}}$; ґ) $\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x-1}$; д) $\dfrac{n-\frac{m^2}{n}}{1+\frac{m}{n}}$.

106*. Обчисліть:

а) $\dfrac{59^2-38^2-97\cdot 11}{61^2-36^2}+\dfrac{56^2-26^2}{66^2-16^2}$;

б) $\dfrac{109^2+160\cdot 32-51^2}{139^2-11^2}+\dfrac{42^2-6^2}{84^2-12^2}$.

107*. Знайдіть значення виразу

$\left(a+b-\dfrac{4ab}{a+b}\right):\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{b-a}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\right)$, якщо $a = 2{,}8$, $b = -3$.

1.6. Рівняння зі змінною в знаменнику

① **Рівносильні рівняння.** Досі ми мали справу з рівняннями, ліва і права частина яких є цілими виразами. Вам відомо, що процес розв'язування таких рівнянь полягає в послідовній заміні даного рівняння іншими рівняннями на основі правил тотожних перетворень виразів і властивостей рівнянь. Простежимо це на прикладі рівняння $x + 6 - 3(x + 1) = 2 - 5x$. Маємо:

$$x + 6 - 3(x + 1) = 2 - 5x, \qquad (1)$$

$$x + 6 - 3x - 3 = 2 - 5x, \qquad (2)$$

$$x - 3x + 5x = 2 - 6 + 3, \qquad (3)$$

$$3x = -1, \qquad (4)$$

$$x = -\frac{1}{3}. \qquad (5)$$

Встановіть самостійно, яке правило тотожних перетворень або яку властивість рівнянь використано під час замін: (1) $\to$ (2), (2) $\to$ (3), (3) $\to$ (4), (4) $\to$ (5).

Зауважимо, що в результаті виконання кожної із зазначених замін отримуємо рівняння, що має ті самі корені, що й попереднє; рівняння (2) має ті самі корені, що й рівняння (1); рівняння (3) — що й рівняння (2); рівняння (4) — що і (3). Це, власне, і дає підстави робити висновок, що розв'язок рівняння $3x = -1$ (4), тобто $x = -\frac{1}{3}$ є розв'язком рівняння (1).

Рівняння, що мають таку властивість, називають ***рівносильними***.

Якщо всі корені одного рівняння є коренями другого і навпаки — всі корені другого рівняння є коренями першого, то такі рівняння називаются *рівносильними*.

Рівносильними є, наприклад, рівняння:

$$x - 4 = 2x + 1 \quad \text{і} \quad 2x - x = -4 - 1;$$

$$x + 3 = 6 \quad \text{і} \quad 2x - 5 = 1;$$

$$\frac{x}{2} + 4 = 1 \quad \text{і} \quad x - 1 = -7.$$

Поясніть, чому.

А ось рівняння $x - 5 = 0$ і $(x - 5)(x - 2) = 0$ не рівносильні, бо не всі корені другого рівняння $x = 5$ і $x = 2$ є коренями першого. Рівняння, які не мають коренів, теж вважають рівносильними. Отже, розв'язуючи рівняння, ми послідовно замінюємо його ланцюжком рівносильних йому рівнянь, поки не отримаємо шуканий корінь.

Якщо до рівняння входять лише цілі вирази, то правила, на основі яких здійснюють такі заміни, відомі. А як бути у випадку дробових рівнянь, тобто таких, де змінна входить до знаменника дробу?

② **Як розв'язувати не слід.** Розв'яжемо, наприклад, рівняння $\frac{x^2}{x}+x=0$. За аналогією з властивістю рівнянь, ліва і права частини яких є цілими виразами, помножимо обидві частини даного рівняння на x. Маємо: $x^2+x^2=0$, $2x^2=0$, $x^2=0$, $x=0$.

Неважко помітити, що значення $x=0$ не є коренем початкового рівняння, бо в такому разі вираз $\frac{x^2}{x}$ не має змісту. Отже, множення обох частин даного рівняння на вираз, що містить змінну (в даному випадку на x) привело до того, що отримали рівняння, яке не рівносильне даному (кажуть ще: привело до порушення рівносильності рівнянь).

Розв'яжемо ще одне рівняння: $\frac{(x-1)^2}{x-1}=0$.

Спробуємо спростити це рівняння, скоротивши дріб, що стоїть у його лівій частині, на $x-1$. Маємо: $x-1=0$, $x=1$.

Підставивши це значення x у ліву частину початкового рівняння, маємо: $\frac{(1-1)^2}{1-1}$ — вираз, що не має змісту.

Отже, і скорочення дробу із змінною в знаменнику може призвести до порушення рівносильності відповідних рівнянь.

Як же бути в таких випадах? Не виконувати подібних перетворень? Зовсім ні. Просто слід пригадати і застосувати певні відомості, пов'язані з раціональними дробами.

③ **Як розв'язувати рівняння зі змінною в знаменнику.**

1. Почнемо з розв'язання рівняння $\frac{(x-1)^2}{x-1}=0$.

І спосіб. ▼ Скористаємося умовою рівності дробу нулю (с. 10): чисельник у цьому випадку має дорівнювати нулю, а знаменник — ні. Маємо:

$(x-1)^2=0$, $x-1=0$, $x=1$.

Якщо $x=1$ знаменник дробу $x-1=1-1=0$.

Відповідь. Рівняння не має розв'язків. ▲

II спосіб. Як відомо, всі правила розглянутих тотожних перетворень дробів мають місце для допустимих значень змінних, тобто таких значень, які не перетворюють знаменник дробу в 0 .

▼ Знайдемо спочатку область допустимих значень змінної (скорочено ОДЗ).

ОДЗ: $x-1\neq 0$, $x\neq 1$.

Враховуючи встановлену ОДЗ, виконаємо скорочення дробу в лівій частині даного рівняння:

$\frac{(x-1)^2}{x-1}=0.$ $x-1=0$. Звідси $x=1$.

Значення $x=1$ не входить до ОДЗ.

Відповідь. Рівняння не має розв'язків. ▲

2. Розв'яжемо перше з розглянутих рівнянь: $\frac{x^2}{x}+x=0.$

I спосіб. ▼ ОДЗ: $x\neq 0$.

Помножимо обидві частини рівняння на x і розв'яжемо утворене рівняння:

$x^2+x^2=0$, $2x^2=0$, $x^2=0$, $x=0$.

0 не входить до ОДЗ.

Відповідь. Рівняння не має розв'язків. ▲

II спосіб. ▼ Перетворимо ліву частину рівняння в дріб. Маємо:

$\frac{x^2}{x}+x=0,\ \frac{x^2+x^2}{x}=0,\ \frac{2x^2}{x}=0.$

Одержане рівняння розв'яжемо на основі умови рівності дробу нулю: $2x^2=0$, $x^2=0$, $x=0$.

Якщо $x=0$, знаменник дробу теж дорівнює 0.

Відповідь. Рівняння не має розв'язків. ▲

III спосіб. ▼ ОДЗ: $x\neq 0$.

Скоротимо дріб $\frac{x^2}{x}$ на x. Рівняння набуває вигляду:

$x+x=0$, $2x=0$, $x=0$.

0 не входить до ОДЗ.

Відповідь. Рівняння не має розв'язків. ▲

3. Розв'яжемо рівняння: $\frac{x+6}{x} = \frac{x+2}{x+1}$.

▼ ОДЗ: $x \neq 0$, $x + 1 \neq 0$, $x \neq -1$.

Щоб позбутися дробів, помножимо обидві частини рівняння на їх спільний знаменник $x(x + 1)$. Маємо:

$$\frac{(x+6)(x+1)\cancel{x}}{\cancel{x}} = \frac{(x+2)(\cancel{x+1})x}{\cancel{x+1}},$$

$(x + 6)(x + 1) = (x + 2)x$.

Розв'яжемо утворене рівняння:

$x^2 + x + 6x + 6 = x^2 + 2x$;

$x^2 + x + 6x - x^2 - 2x = -6$; $5x = -6$; $x = -1{,}2$.

$x = -1{,}2$ входить до ОДЗ.

Відповідь. $x = -1{,}2$. ▲

4. Розв'яжемо рівняння: $\frac{2}{x-1} + \frac{x+6}{x+2} = \frac{5x-2}{(x-1)(x+2)}$.

▼ $\frac{2}{x-1} + \frac{x+6}{x+2} - \frac{5x-2}{(x-1)(x+2)} = 0$; перетворимо ліву частину рівняння у дріб і скористаємось умовою рівності дробу нулю. Маємо:

$$\frac{2(x+2)+(x-1)(x+6)-(5x-2)}{(x-1)(x+2)} = 0.$$

$$\frac{2x+4+x^2+5x-6-5x+2}{(x-1)(x+2)} = 0; \quad \frac{x^2+2x}{(x-1)(x+2)} = 0.$$

$x^2 + 2x = 0$; $x(x + 2) = 0$; $x = 0$; $x + 2 = 0$, $x = -2$.

Якщо $x = 0$, знаменник $(x - 1)(x + 2) = -1 \cdot 2 = -2 \neq 0$.

Якщо $x = -2$, знаменник $(x - 1)(x + 2) = -3 \cdot 0 = 0$.

Відповідь: $x = 0$. ▲

④ **Раціональні рівняння та їх види.** Як бачимо, ліву і праву частини рівнянь можуть утворювати як цілі, так і дробові раціональні вирази. Такі рівняння називають ***раціональними***. Якщо обидві частини рівняння є цілими раціональними виразами, то його називають ***цілим раціональним рівнянням***.

Наприклад: $x - 4 = 2x + 1$; $x^2 - 3x = 0$; $\frac{3x+4}{5} = 2x - 3$.

Якщо хоча б одна з частин раціонального рівняння є дробовим виразом, що містить змінну в знаменнику, то таке рівняння називають ***дробовим***.

Наприклад: $\frac{1}{x-3} = 2$; $\frac{3}{x} - 4 = 2x - 5$; $\frac{2}{x-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{3x-2}{4x}$.

У цьому пункті ви дізналися, як розв'язують дробові раціональні рівняння.

? Запитання для самоперевірки

1. Які рівняння називаються рівносильними?
2. Нижче вказано розв'язки кількох рівнянь:
   а) 6; –1; б) –1; 3; 6; в) 8; 0; г) –4; 2; 5;
   ґ) –1; 6; д) 0; 3; е) 0; 8; 7; є) 2; 5; 4.
   Які з цих рівнянь є рівносильними?
3. Які рівняння належать до раціональних?

Задачі та вправи

Розв'яжіть рівняння (108–115):

108°. а) $\frac{x-3}{x} = 0$; б) $\frac{2x-4}{x+2} = 0$; в) $\frac{x(2x+1)}{x-5} = 0$;

г) $\frac{(x-1)(x+2)}{x} = 0$; ґ) $\frac{2x+5}{x-3} = 0$; д) $\frac{x^2-9}{x+2} = 0$.

109°. а) $\frac{x^2-3x}{x^2} = 0$; б) $\frac{4x^2-1}{x-0,5} = 0$; в) $\frac{3x+9}{x^2-9} = 0$;

г) $\frac{(x+2)^2}{x^2-4} = 0$; ґ) $\frac{16-x^2}{4-x} = 0$; д) $\frac{x^2-49}{2x+14} = 0$.

110°. а) $\frac{x^2-5x}{2x-10} = 0$; б) $\frac{5x+10}{x^2-4} = 0$;

в) $\frac{x^2-3x^3}{x} = 0$; г) $\frac{(x-3)^2(x+1)}{(x-3)(x+2)} = 0$.

111. а) $\frac{x-3}{x+2}=2$; б) $\frac{4y-1}{2y+7}-1=0$;

в) $\frac{x}{x+6}=\frac{4}{7}$; г) $\frac{x-2}{x+4}=\frac{2}{5}$.

112. а) $\frac{3}{x-1}=\frac{5}{x+1}$; б) $\frac{3}{2-x}=\frac{5}{x+2}$;

в) $\frac{x-2}{x-4}=\frac{x}{x+2}$; г) $\frac{x}{x-1}=\frac{x-15}{x+5}$.

113. а) $\frac{x+1}{x-2}=\frac{x-1}{x-3}$; б) $\frac{x+3}{x-6}=\frac{x-2}{x+4}$;

в) $\frac{x+3}{x+1}+\frac{1-x}{x-2}=0$; г) $\frac{1}{x-1}+\frac{x}{1-x}=0$.

114. а) $\frac{9}{x}-\frac{7-x}{x-1}=1$; б) $\frac{x+1}{x-2}=1-\frac{5}{x+2}$.

115*. а) $\frac{x+1}{x+3}+\frac{6}{x^2-9}=\frac{1-x}{3-x}$; б) $\frac{3-x}{x-5}+\frac{x-2}{x}+\frac{2}{x^2-5x}=0$;

в) $\frac{6}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}+\frac{x^2}{x^2-4}=0$; г) $\frac{2x+3}{2x+1}+\frac{2-2x}{2x-1}=\frac{1}{1-4x^2}$.

Розв'яжіть задачі (116–122):

116°. Яке число треба відняти від чисельника і знаменника дробу $\frac{17}{21}$, щоб дістати дріб $\frac{3}{5}$?

117. Чисельник дробу менший від знаменника на 4. Якщо до його чисельника і знаменника додати по 5, то дістанемо $\frac{3}{4}$. Знайдіть цей дріб.

118. Сума чисельника і знаменника дробу дорівнює 13. Якщо до чисельника і знаменника додати по 6, то дістанемо $\frac{2}{3}$. Знайдіть цей дріб.

119. Чисельник дробу на 2 менший від знаменника. Якщо чисельник збільшити на 3, а знаменник — на 5, то дістанемо 0,5. Знайдіть невідомий дріб.

120. Різниця знаменника і чисельника невідомого дробу дорівнює 4. Якщо чисельник збільшити на 6, а знаменник зменшити на 3, то дістанемо дріб, обернений до попереднього. Знайдіть невідомий дріб.

121. Різниця двох чисел дорівнює 6, а їх відношення дорівнює 0,8. Знайдіть ці числа.

122*. Якщо двоцифрове число, цифра десятків якого втричі більша за цифру одиниць, поділити на суму його цифр, то в частці дістанемо 7, а в остачі — 6. Знайдіть це число.

Задачі та вправи для повторення

Спростіть вирази (123–125):

123°. а) $\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{3}\right)\cdot\frac{6}{a^2}$; б) $\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{3}\right):\frac{a^3}{12}$; в) $\frac{ab}{a-b}\cdot\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$;

г) $4:\left(1-\frac{1}{a}\right)$; ґ) $\left(a-\frac{1}{a}\right)\cdot a$; д) $a:\left(a+\frac{1}{a}\right)$.

124. а) $(x^2-1)\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{1+x}+1\right)$; б) $\left(1+a-\frac{a^2+3}{a+1}\right)\cdot(1-a^2)$;

в) $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)$;

г) $\left(\frac{2-a}{2+a}-\frac{a+2}{a-2}\right):\left(\frac{2+a}{2-a}+\frac{a-2}{a+2}\right)$.

125*. а) $\left(\frac{2a}{b+2a}-\frac{4a^2}{b^2+4ab+4a^2}\right):\left(\frac{2a}{b^2-4a^2}+\frac{1}{2a-b}\right)$;

б) $\left(\frac{2a}{2a+x}-\frac{4a^2}{4a^2+4ax+x^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-x^2}+\frac{1}{x-2a}\right)$;

в) $\left(\frac{p}{p^2-4}+\frac{2}{2-p}+\frac{1}{p+2}\right):\left(p-2+\frac{10-p^2}{p+2}\right)$.

126. Виділіть цілу частину:

а)° $\frac{x+y}{x}$; б) $\frac{2x-y}{x}$; в) $\frac{x+2y}{x+y}$;

г) $\dfrac{1+a+a^2}{1+a}$; ґ) $\dfrac{2+a+a^2}{1+a^2}$; д) $\dfrac{3+x+x^2}{3+x^2}$.

127*. Спростіть вирази:

а) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$; б) $\dfrac{x}{2x-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x+1}}}$; в) $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{x}}}$.

128*. Доведіть, що за всіх допустимих значень x значення виразу не залежить від x:

а) $\left(\dfrac{x+2}{2x}\right)^2:\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{x+2}\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\right)\right)$;

б) $\dfrac{1}{(x+4)^2+2(x^2-16)+(x-4)^2}\cdot 4x^2$.

129. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

а) $\dfrac{p-k}{k^2+p^2}\cdot\left(\dfrac{k+p}{k}-\dfrac{2k}{k-p}\right)$, якщо $k=-0{,}4$;

б) $\dfrac{x^2+2xy+y^2}{6x+6y}\cdot\left(\dfrac{3x}{x^2-y^2}+\dfrac{3}{x-y}\right)$, якщо $x=3{,}75$, $y=-\dfrac{3}{4}$;

в) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a^3+2a^2b+ab^2}+\dfrac{b-a}{(a+b)^2}\cdot\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a}{a^2+ab}$, якщо $a=-1\dfrac{1}{3}$, $b=-\dfrac{3}{4}$;

г) $\dfrac{2mn}{m+n}:\left(\dfrac{m-n}{mn-n^2}-\dfrac{3m+n}{n^2-m^2}-\dfrac{m-n}{m^2-mn}\right)$, якщо $m=-2$, $n=0{,}5$.

130. Доведіть тотожності:

а) $\dfrac{2}{mn}:\left(\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{n}\right)^2-\dfrac{m^2+n^2}{(m-n)^2}=-1$;

б) $\left(\dfrac{ab+b^2}{5a^2-5ab}+ab+b^2\right)\cdot\dfrac{5a}{a+b}-\dfrac{b}{a-b}=5ab$.

Чи рівносильні рівняння (131–132):

131°. а) $x-2=5$ і $\dfrac{x}{x+3}=0{,}7$; б) $x+7=2$ і $\dfrac{x}{x+4}=1$;

в) $\frac{x}{2}+\frac{9}{x}=4\frac{1}{2}$ і $10-x=4$; г) $\frac{8}{x}=1+\frac{3}{x}$ і $x+3=9$;

ґ) $\frac{8}{x}=1+\frac{2}{x}$ і $x+1=7$; д) $\frac{x}{2}-\frac{5}{x}=\frac{3}{x}$ і $x^2-16=0$.

132. а) $x-2=5$ і $\frac{x-2}{x-3}=\frac{5}{x-3}$; б) $\frac{x+7}{x+4}=\frac{2}{x+4}$ і $x+6=1$;

в) $\frac{x+9}{x-1}=\frac{10}{x-1}$ і $\frac{x-1}{6}=\frac{x+3}{2}-\frac{x+5}{3}$?

133*. Придумайте приклад, де ділення обох частин рівняння на вираз, що містить змінну, приводить до рівняння, не рівносильного даному.

Розв'яжіть рівняння (134–136);

134°. а) $\frac{x-7}{x}=3$; б) $\frac{7-x}{x}=2{,}5$; в) $\frac{x}{x-4}=3$;

г) $\frac{5-2x}{x}=8$; ґ) $\frac{6+x}{x}=-1$; д) $1{,}5=\frac{8-x}{2x}$.

135. а)° $\frac{x^2-6x}{2x-12}=0$; б)° $\frac{(x^2-4)(x-7)}{x+2}=0$;

в) $3x-\frac{3x^2-2}{x+3}=4$; г) $\frac{1}{x}=\frac{5}{x-2}-\frac{4}{x-3}$.

136*. а) $\frac{1}{4x-6}+\frac{2x-5}{18-8x^2}=\frac{1}{2x^2+3x}$;

б) $\frac{x+6}{x^2-7x}=\frac{4}{(7-x)^2}+\frac{1}{x-7}$;

в) $\frac{2x-1}{5x-1}=\frac{2x+1}{4}-\frac{3x-1}{6}$;

г) $\frac{3x}{x+2}+\frac{7x}{2-x}=\frac{5-4x^2}{x^2-4}$.

137. Знайдіть формулу для обчислення площі S отвору фігури, зображеної на рис. 2. Визначте з одержаної формули d.

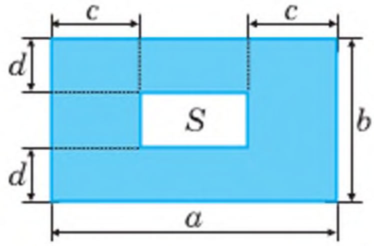


Рис. 2

138°. До m літрів сиропу ціною p грн за 1 л додали n літрів води. Яка ціна 1 л суміші?

139. Змішали a кг цукерок ціною p грн за кілограм і b кг цукерок ціною c грн за кілограм. Яка ціна 1 кг суміші?

140*. Мотоцикліст подолав відстань S км із швидкістю v км/год, а назад повертався тим самим шляхом зі швидкістю u км/год. Яка середня швидкість руху мотоцикліста?

141*. Поїзд проїхав S км зі швидкістю v км/год, а l км — зі швидкістю u км/год. Визначте середню швидкість поїзда.

Завдання для самоперевірки

I–II рівні

1. Випишіть окремо цілі вирази, дробові вирази і дроби:

а) $\dfrac{a}{x-b}$; $x^2+2xy+y^2$; $3\dfrac{1}{5}$; $\dfrac{4m}{n+1}-2$;

б) $\dfrac{c^2}{b^2}+4$; $\dfrac{x-y}{x-2}$; $\dfrac{1}{2}x+y^2$; $\dfrac{2x-1}{2}$;

в) $2c^2-\dfrac{1}{2c+2}$; 8,5; $\dfrac{6}{2x-1}$; $3x^2-xy+\dfrac{1}{3}y^2$;

г) $\dfrac{m-2}{4}$; $\dfrac{6k+1}{2}-1$; $3y^2+ab$; $\dfrac{2-x}{2+x}$.

2. Обчисліть значення дробів:

а) $\dfrac{a+2,5}{2a+2}$, якщо $a=1,5$; б) $\dfrac{b^2-2}{2,5b}$, якщо $b=4$;

в) $\dfrac{3x-1,5}{2x+2}$, якщо $x=-0,5$; г) $\dfrac{y+3,2}{y^2-9}$, якщо $y=-2$.

3. За яких значень змінної вираз не має змісту:

а) $2x-\dfrac{x}{2x-6}$; б) $\dfrac{3}{4a}$; в) $\dfrac{6}{a-5}$; г) $\dfrac{1-a}{2-a}$.

4. Скоротіть дроби:

а) $\dfrac{16}{24}$; б) $\dfrac{4x^2}{3x}$; в) $\dfrac{2c^4}{4c^4}$; г) $\dfrac{16ab}{10ac}$.

5. Зведіть дроби до спільного знаменника:

а) $\frac{2}{x^2}$ і $\frac{3}{x^3}$; б) $\frac{4x}{15}$ і $\frac{x-2}{10ac}$;

в) $\frac{1}{m-n}$ і $\frac{1}{m^2-n^2}$; г) $\frac{4}{3m-3n}$ і $\frac{6}{m^2-n^2}$.

6. Виконайте дії:

а) $\frac{3}{x^2}-\frac{4}{2xy}$; б) $\frac{b}{4a^2}+\frac{4}{6a^6}$;

в) $\frac{x+y}{xy}-\frac{x-y}{x^2}$; г) $\frac{a-b}{ab}+\frac{b+c}{bc}$.

7. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{4y}{9}-\frac{5y}{12}=1$; б) $\frac{5x}{2}+\frac{2x}{3}=19$;

в) $\frac{16y+1}{7}=\frac{5y-4}{2}$; г) $\frac{18-5x}{12}=\frac{5-x}{8}$.

8. Виконайте дії:

а) $\frac{a}{2b}:\frac{c}{b}$; б) $\frac{x^2}{y}:\frac{y^3}{x^3}$; в) $\frac{3}{2x}:\frac{2}{3x}$; г) $\frac{x^2-3}{x^2}\cdot\frac{x}{2}$.

9. Перетворіть у дріб вирази:

а) $\frac{1}{a+2}-\frac{3}{a}$; б) $\frac{4}{a}+\frac{3}{1-a}$;

в) $\frac{9}{x+1}\cdot\frac{x+xy}{3}$; г) $\frac{1}{a+b}:\frac{2}{a^2-b^2}$.

10. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{2y-6}{y+3}=0$; б) $\frac{x^2-3x}{x^2}=0$;

в) $\frac{(y-2)(y+3)}{y}=0$; г) $\frac{3x+9}{x^2-9}=0$.

III рівень

1. Знайдіть допустимі значення змінних у виразах:

а) $\frac{x-3}{x^2-4}$; б) $\frac{2a+10}{a^2-4c}$; в) $\frac{2y-1}{y^3+y}$; г) $\frac{m-3}{|m|-2}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x-1}$; б) $\frac{y-5}{y-3}=\frac{1+y}{y-1}$;

в) $\frac{2}{y-3}=\frac{3}{y-2}$; г) $\frac{2-x}{6-x}=\frac{x}{x-5}$.

3. Скоротіть дроби:

а) $\frac{a^2-3a}{3x^2-ax^2}$; б) $\frac{n^3-m^3}{m^2-n^2}$; в) $\frac{9-y^2}{3ay+9a}$; г) $\frac{a^2-25b^2}{10ab-2a^2}$.

4. Виконайте дії:

а) $\frac{a-5}{(a-4)^2}+\frac{6}{20-5a}$; б) $\frac{a+b}{(a-b)^2}-\frac{a}{a^2-b^2}$;

в) $\frac{x^2-y^2}{2xy}:\frac{y-x}{4x^2y^2}$; г) $\frac{b+a}{c^2-9}\cdot\frac{(3+c)^2}{b^2-a}$.

5. Спростіть:

а) $\frac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2}\cdot\left(\frac{a}{b^2-ab}+\frac{b}{a^2-ab}\right)$;

б) $\left(1+\frac{a}{a+1}\right):\left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$;

в) $\left(\frac{2n+1}{2n-1}-\frac{2n-1}{2n+1}\right):\frac{4n}{10n-5}$;

г) $\frac{x^2-2ax+a^2}{2a^2}\cdot\left(\frac{a}{x-a}-\frac{a}{x+a}\right)$.

IV рівень

1. Покажіть, що в процесі зведення даних рівнянь до цілого вигляду з'являються сторонні корені:

а) $8-\frac{1}{7-x}=\frac{x-8}{7-x}$; б) $\frac{x-6}{5-x}=\frac{1}{x-5}+6$;

в) $\frac{x-3}{2-x}-3=\frac{1}{x-2}$; г) $\frac{x-5}{4-x}=5-\frac{1}{4-x}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x^3-27}{x^2+3x+9}=0$; б) $\frac{x+6}{x^2-7x}-\frac{4}{(7-x)^2}=\frac{1}{x-7}$;

в) $\dfrac{x^3+64}{x^2-4x+16}=0;$ г) $\dfrac{5}{(x-1)^2}=\dfrac{2}{(1+x)^2}-\dfrac{3}{1-x^2}.$

3. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{1}{x}\cdot\left(\dfrac{y^2-xy}{x+y}\right)^2\cdot\left(\dfrac{x+y}{(x-y)^2}+\dfrac{x+y}{xy-y^2}\right)+\dfrac{x}{x+y};$

б) $\dfrac{x+7}{x+9}+\left(\dfrac{x+7}{x^2+81-18x}+\dfrac{x+5}{x^2-81}\right)\cdot\dfrac{x-9}{x+3};$

в) $\left(\dfrac{3}{9-m^2}+\dfrac{2m-1}{m-3}-\dfrac{m^2-4}{m^2+6m+9}\cdot\dfrac{m+3}{m-2}\right):\dfrac{m}{m-3};$

г) $\left(\dfrac{81x^2-48xy}{24xy-16y^2}-4\right):\left(\dfrac{9x-8y}{3x-2y}+\dfrac{24y-27x}{2y}\right).$

4. Знайдіть значення виразу:

а) $\dfrac{a^2-12b}{a^2-3ab}+\dfrac{3ab+4}{3ab-a^2}$, якщо $a=-0{,}8$, $b=-1{,}75$;

б) $\dfrac{1-16y^2}{4y^2+10y+25}:\dfrac{4y-1}{8y^3-125}$, якщо $y=-0{,}5$;

в) $\dfrac{x^4-xy^3}{x^3+x^2y+xy^2}+\dfrac{x^3y+y^4}{x^2y-xy^2+y^3}$, якщо $x=20$, $y=22{,}5$;

г) $\dfrac{4-9y^2}{9y^2-12y+16}\cdot\dfrac{27y^3+64}{2-3y}$, якщо $y=\dfrac{1}{3}$.

§2. СТЕПІНЬ ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ

2.1. Степінь із цілим від'ємним і нульовим показниками

! Пригадайте

1. Що означає запис a^n, де n — натуральне число?
2. Яку назву мають у цьому випадку a, n і a^n?

① **Степінь з цілим від'ємним показником.** Пригадаємо правило ділення степенів з натуральними показниками:

$$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}, \ m > n, \ a \neq 0.}$$

А тепер розглянемо приклади ділення степенів у випадку, коли $m < n$.

Знайдемо частку a^5 і a^8. Запишемо її у вигляді дробу і виконаємо його скорочення. Маємо:

$$a^5 : a^8 = \frac{a^5}{a^8} = \frac{1}{a^3}.$$

Аналогічно

$$b^7 : b^{12} = \frac{b^7}{b^{12}} = \frac{1}{b^5}; \quad 6^3 : 6^{10} = \frac{6^3}{6^{10}} = \frac{1}{6^7}.$$

Якби припустити, що ділення цих степенів можна виконати за попереднім правилом, то мали б:

$$a^5 : a^8 = a^{5-8} = a^{-3};$$
$$b^7 : b^{12} = b^{7-12} = b^{-5};$$
$$6^3 : 6^{10} = 6^{3-10} = 6^{-7}.$$

Зіставлення відповідних результатів $\left(a^{-3} \text{ і } \dfrac{1}{a^3},\ b^{-5} \text{ і } \dfrac{1}{b^5},\ 6^{-7} \text{ і } \dfrac{1}{6^7}\right)$ приводить до доцільності вважати, що $a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$, $b^{-5} = \dfrac{1}{b^5}$, $6^{-7} = \dfrac{1}{6^7}$.

Таке розуміння степеня з цілим від'ємним показником відображено в означенні:

якщо $a \neq 0$ і m — натуральне число, то $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$.

Наприклад:

1) $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$;

2) $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = -\dfrac{1}{8}$;

3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^3} = \dfrac{1}{\dfrac{2^3}{3^3}} = \dfrac{3^3}{2^3} = \dfrac{27}{8}$.

Для перетворення степенів з цілим від'ємним показником корисно використовувати тотожність $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m$. Доведемо її.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \frac{1}{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{b^m}{a^m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m.$$

Скориставшись цією тотожністю, обчислимо $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$. Маємо:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{3} = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$.

② **Степінь з нульовим показником.** Спробуємо поширити правило ділення степенів з натуральним показником $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$ на випадок, коли $m = n$. Тоді матимемо:

$$a^m : a^m = a^{m-m} = a^0.$$

З іншого боку, $a^m : a^m = \frac{a^m}{a^m} = 1$.

Тому домовилися вважати, що

нульовий степінь будь-якого відмінного від нуля числа або виразу дорівнює одиниці.

$$a^0 = 1,\ a \neq 0.$$

Вираз 0^0 не має змісту.

Зауваження. Наведені міркування в жодному разі не слід розглядати як доведення тотожності $a^0 = 1$. Вони лише ілюструють доцільність її введення за означенням. А означення, як відомо, не доводять.

Це також стосується і міркувань щодо введення означення степеня з цілим від'ємним показником.

Відомо, що натуральні числа, протилежні їм числа і нуль називають цілими числами. Отже, розуміння степеня числа з цілим показником виражається трьома рівностями:

1) $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}$, де n — ***натуральне число***;

2) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, де $-n$ — ***ціле від'ємне число***, $a \neq 0$;

3) $a^0 = 1$, де $a \neq 0$.

Всі ці рівності приймаємо за означенням.

Запитання для самоперевірки

1. Як слід розуміти степінь відмінного від нуля числа з цілим від'ємним показником?
2. Доведіть, що $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^{m}$.
3. Чому дорівнює степінь будь-якого відмінного від нуля числа з нульовим показником?
4. Які числа належать до цілих?
5. Запишіть математичною мовою означення степеня числа з цілим показником.

Задачі та вправи

Обчисліть (142–143):

142°. а) 4^{-2}; б) 3^{-3}; в) 2^{-5}; г) 10^{-4};

ґ) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$; д) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$; е) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-3}$; є) $(0{,}2)^{-2}$.

143°. а) $(-4)^{-2}$; б) $(-5)^{-3}$; в) $(-2)^{-4}$; г) -2^{-4};

ґ) -5^{-3}; д) $(-10)^{-4}$; е) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-3}$; є) -3^{-2}.

144°. Запишіть числа:

а) 3; 9; 27; 81; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$; $\frac{1}{81}$ у вигляді степеня з основою 3;

б) 1; 10; 100; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 у вигляді степеня з основою 10;

в) $\frac{1}{16}$; $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{32}$; 1; 2; 4; 128 у вигляді степеня з основою 2;

г) $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{125}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{5^{-3}}$; $\frac{1}{5^{-4}}$; $\frac{1}{5^{-2}}$ у вигляді степеня з основою 5.

145. Подайте у вигляді дробу:

а) b^{-1}; б) c^{-3}; в) x^{-4}; г) $(a-b)^{-4}$;

ґ) xy^{-2}; д) $(xy)^{-2}$; е) $a^{-1}+b^{-1}$; є) $m^{-2}-n^{-2}$;

ж) $2y^{-5}+3y^{-3}$; з) $5c^{-2}-2c^{-4}$; и) $(a+b)^{-1}$; і) $(a^2-b^2)^{-1}$.

146. Обчисліть:

а) $3 \cdot 6^{-1}$; б) $5 \cdot 10^{-2}$; в) $5^{-2} \cdot 15$; г) $6^2 \cdot 12^{-3}$.

2.2. Властивості степеня з цілим показником

! Пригадайте

1. Які з рівностей неправильні:

   1) а) $3^2 \cdot 3^4 = 3^8$; б) $3^2 \cdot 3^4 = 9^6$;
   в) $3^2 \cdot 3^4 = 3^6$; г) $3^2 \cdot 3^4 = 9^8$;

   2) а) $\left(2^3\right)^2 = 2^9$; б) $\left(2^3\right)^2 = 4^6$; в) $\left(2^3\right)^2 = 2^6$;
   г) $\left(2^3\right)^2 = 4^9$; ґ) $\left(2^3\right)^2 = \left(2^2\right)^3$?

   Відповідь поясніть.

2. Які властивості має степінь з натуральним показником?

Степінь з будь-яким цілим показником має такі самі властивості, як і степінь з натуральним показником.

Тобто,

для будь-яких цілих m і n і $a \neq 0$ справджуються рівності:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad (1)$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}; \quad (2)$$

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}; \quad (3)$$

а для $a \neq 0$, $b \neq 0$ і будь-якого цілого n мають місце рівності:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}; \quad (4)$$

$$(ab)^n = a^n b^n. \quad (5)$$

Ці рівності можна довести, скориставшись означенням степеня з цілим від'ємним показником та властивостями степеня з натуральним показником.

Доведемо, наприклад, властивість (5): $(ab)^n = a^n b^n$.

▼ 1) Для натурального n властивість доведено раніше.

2) $n = 0$. Знайдемо значення лівої і правої частин рівності (5).

$(ab)^n = (ab)^0 = 1$ — за означенням степеня з нульовим показником.

$a^n b^n = a^0 b^0 = 1 \cdot 1 = 1$ — на тій же підставі.

Отже, $(ab)^n = a^n b^n$.

3) n — від'ємне ціле число. Тоді $-n$ — натуральне число.

$(ab)^n = \frac{1}{(ab)^{-n}} = \frac{1}{a^{-n} \cdot b^{-n}} = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} = a^n b^n$. Отже, $(ab)^n = a^n b^n$.

Обґрунтуємо виконані перетворення, позначивши їх для зручності відповідними цифрами.

$$(ab)^n \underset{\text{I}}{=} \frac{1}{(ab)^{-n}} \underset{\text{II}}{=} \frac{1}{a^{-n} \cdot b^{-n}} \underset{\text{III}}{=} \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{1}{b^{-n}} \underset{\text{IV}}{=} a^n b^n.$$

Перетворення I здійснено на основі означення степеня з від'ємним показником.

Перетворення II — на основі відповідної властивості степеня з натуральним показником ($-n$ — натуральне число).

Перетворення III — на основі тотожності $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}$.

Перетворення IV — на основі означення степеня з від'ємним показником. ▲

Доведемо ще рівність (2).

▼ Розглянемо всі можливі випадки для цілих m і n.

1. m і n — натуральні числа.

а) $m > n$; $a^m : a^n = a^{m-n}$ (за відомою властивістю степеня з натуральним показником);

б) $m = n$.

Знайдемо значення лівої і правої частин рівності (2). Маємо: $a^m : a^n = a^m : a^m = 1$;

$a^{m-n} = a^{m-m} = a^0 = 1$ (за означенням).

Отже, $a^m : a^n = a^{m-n}$.

в) $m < n$.

$a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n}$. Скоротимо цей дріб на a^m, тобто поділимо його чисельник і знаменник на a^m. Маємо $a^m : a^m = 1$, $a^n : a^m = a^{n-m}$ (за відомою властивістю степеня з натуральним показником, якщо $n > m$).

Отже, $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$.

Перетворимо вираз $\dfrac{1}{a^{n-m}}$, скориставшись поняттям степеня з від'ємним показником. Маємо:

$$\frac{1}{a^{n-m}} = a^{-(n-m)} = a^{-n+m} = a^{m-n}.$$

Отже, $a^m : a^n = a^{m-n}$ для будь-яких натуральних m і n.

2. Якщо одне з чисел m і n — натуральне, а інше дорівнює 0, або обидва вони дорівнюють 0, то рівність (2) теж правильна. Перевірте це самостійно.

3. m і n — довільні цілі числа крім 0.

а) $m > 0$, тобто натуральне число, $n < 0$ (тоді $-n$ — натуральне число).

$$a^m : a^n = a^m : \frac{1}{a^{-n}} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$$

(за відомою властивістю степеня з натуральним показником).

б) $m < 0$ (тоді $-m$ — натуральне число), $n > 0$, тобто натуральне число.

$$a^m : a^n = \frac{1}{a^{-m}} : a^n = \frac{1}{a^{-m} \cdot a^n} = \frac{1}{a^{-m+n}},$$

бо $-m$ і n — натуральні числа.

Перетворимо вираз $\dfrac{1}{a^{-m+n}}$, скориставшись поняттям степеня з від'ємним показником. Маємо:

$$\frac{1}{a^{-m+n}} = a^{-(-m+n)} = a^{m-n}.$$

Отже, $a^m : a^n = a^{m-n}$.

в) $m < 0$, $n < 0$, тоді $-m$ і $-n$ — натуральні числа.

$$a^m : a^n = \frac{1}{a^{-m}} : \frac{1}{a^{-n}} = \frac{a^{-n}}{a^{-m}} = a^{-n-(-m)} = a^{m-n}$$

(за доведеним у п. 1 на с. 53).

4. Переконайтеся, що рівність (2) правильна, якщо одне з чисел m або n — ціле від'ємне, а інше дорівнює 0, знайшовши значення лівої і правої частин цієї рівності. Зробіть це самостійно.

Здійснені обґрунтування, дають підстави стверджувати, що рівність $a^m : a^n = a^{m-n}$ правильна для всіх цілих значень m і n. ▲

Аналогічно можна обґрунтувати решту властивостей степеня з цілим показником.

З урахуванням цих властивостей виконують перетворення виразів, що містять степені з цілим показником.

Приклади.

1) $a^7 \cdot a^{-4} = a^{7+(-4)} = a^3$;

2) $b^5 : b^{-3} = b^{5-(-3)} = b^8$;

3) $(a^{-1} - b^{-1})(a^{-1} + b^{-1}) = (a^{-1})^2 - (b^{-1})^2 = a^{-2} - b^{-2}$.

Вираз $a^{-2} - b^{-2}$ можна записати, позбувшись від'ємних показників степеня, так:

$$a^{-2} - b^{-2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2}.$$

? Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте записані у вигляді рівностей 1-5 правила виконання перетворень степенів з цілими показниками.
2. У чому відмінність між правилами ділення степенів з натуральним і цілим показниками?

Задачі та вправи

Обчисліть (147–150):

147°. а) $3^4 \cdot 3^{-5}$; б) $4^2 \cdot 4^{-3}$; в) $2^{-2} \cdot 2^{-3}$; г) $5^3 \cdot 5^{-3}$;
ґ) $2^4 : 2^7$; д) $2^{-4} : 2^{-7}$; е) $(4^{-3} + 5^{-6})^0$; є) $10^8 \cdot 10^{-5} : 10^2$.

148°. а) $27 \cdot 3^{-2}$; б) $16 \cdot 2^{-5}$; в) $125 \cdot 5^{-3}$; г) $6^0 \cdot 36 \cdot 6^{-3}$.

149. а) $\left(\frac{15}{49}\right)^{-13} : \left(\frac{15}{49}\right)^{-14}$; б) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-18} : \left(1\frac{2}{3}\right)^{-21}$;

в) $\frac{2}{7} : 3{,}5^{-2}$; г) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-7} : 0{,}6^{4}$.

150*. а) $\dfrac{3^{-1}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2-\left(\frac{3}{4}\right)^{2}} \cdot \left(7^{0}-\frac{1}{6}\right)^{-1} + 2\cdot 10^{-1}$;

б) $(-0{,}1)^{-5}\cdot 1000^{-1} + \dfrac{4\cdot 7^{-1}-(-0{,}6)^{0}}{(-7)^{-2}}$.

151°. Піднесіть до степеня вирази:

а) $\left(a^{6}\right)^{-2}$; б) $\left(a^{-3}\right)^{4}$; в) $\left(3x^{3}\right)^{-4}$; г) $\left(a^{-1}b^{2}\right)^{3}$;

ґ) $\left(ab^{-2}\right)^{3}$; д) $\left(c^{2}d^{-1}\right)^{4}$; е) $\left(3x^{3}\right)^{-4}$; є) $\left(a^{-1}b^{2}\right)^{-3}$.

152°. Знайдіть значення виразів:

а) $125^{-1}\cdot 25^{2}$; б) $16^{-3}\cdot 2^{8}$; в) $\dfrac{\left(2^{3}\right)^{5}\cdot\left(2^{-6}\right)^{2}}{4^{2}}$; г) $\dfrac{\left(3^{2}\right)^{-3}\cdot 9^{4}}{\left(3^{2}\right)^{2}}$.

153°. Спростіть вирази:

а) $\dfrac{7a^{-4}}{b^{-6}}\cdot\dfrac{b}{21a^{5}}$; б) $\dfrac{5c^{-1}d^{3}}{3}\cdot\dfrac{9c^{6}}{d^{-2}}$; в) $\dfrac{x}{3y^{-2}} : \dfrac{y}{15x^{-1}}$.

154. Знайдіть значення виразів:

а) $\dfrac{a^{5}\cdot a^{-7}}{a^{-2}}$, якщо $a = 0{,}82$; б) $\dfrac{b^{-12}\cdot b^{13}}{b^{3}}$, якщо $b=\dfrac{1}{2}$.

155. Розкладіть на множники:

а) $1{,}44 - 0{,}25a^{-4}$; б) $0{,}09a^{4} - 16a^{-2}$; в) $6{,}25 - 4a^{-2}$.

156. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x-8)x^{-1} = 3$; б) $(3x-7)x^{-1} = \dfrac{2}{3}$;

в) $x(x-4)^{-1} - 3 = 0$; г) $2x(x+3)^{-1} = 1$.

157*. Доведіть, що за будь–якого цілого значення n справджується рівність:

а) $4^n + 4^{n+2} = 17 \cdot 2^{2n}$;

б) $4 \cdot 5^n + 5^n = 5^{n+1}$;

в) $6 \cdot 8^n - 8^{n+1} = -2^{3n+1}$.

158*. Скоротіть дріб (n — ціле число):

а) $\dfrac{4^{n+1} - 4^n}{2^n}$; б) $\dfrac{2^n + 2^{-n}}{4^n + 1}$; в) $\dfrac{3^{3n} - 3^{-3n}}{9^n + 9^{-n} + 1}$.

2.3. Стандартний вигляд числа

Нерідко доводиться мати справу як із дуже великими, так і з надто малими значеннями величин. Так, астрономи для вимірювання відстаней у Всесвіті послуговуються одиницею вимірювання, яку називають *світловим роком*. Світловий рік (с.р.) — це відстань, яку долає світло протягом одного земного року. 1 с. р. ≈ ≈ 9 400 000 000 000 км. Маса Землі становить 6 000 000 000 000 000 000 000 т. А діаметр молекули води — лише 0,0 000 000 000 003 мм. Такі числа зручно записувати у так званому *стандартному вигляді* — як *добуток числа a, де* $1 \le a < 10$, *і степеня числа* 10 *з цілим показником*.

Наведені вище числові значення величин можна записати у стандартному вигляді так: 1 с. р. ≈ $9{,}4 \cdot 10^{12}$ км; маса Землі становить $6 \cdot 10^{21}$ т, а діаметр молекули води — $3 \cdot 10^{-13}$ мм.

Запишемо у стандартному вигляді число 84 500 000 000. Спочатку знайдемо a. Оскільки $1 \le a < 10$, то в його цілій частині має бути лише одна цифра. Отже, $a = 8{,}45$. Щоб дістати дане в умові число, потрібно у числі 8,45 перенести кому на 10 знаків праворуч (цифри 4 і 5 та вісім нулів), тобто, по суті, збільшити його у 10^{10} разів. Отже, $84500000000 = 8{,}45 \cdot 10^{10}$.

Виконаємо аналогічне перетворення для числа 0,00000079. Знайдемо a. Оскільки в цілій частині даного числа може бути лише одна цифра, то $a = 7{,}9$. Число 0,00000079 можна дістати з числа 7,9, перенісши кому на сім знаків ліворуч (цифра 7 і шість нулів), тобто фактично зменшивши число у 10^7 разів. Отже,

$$0{,}00000079 = 7{,}9 : 10^7 = 7{,}9 \cdot \frac{1}{10^7} = 7{,}9 \cdot 10^{-7}.$$

Показник степеня 10 у стандартному вигляді числа називають *порядком числа*. Скажімо, $9{,}4 \cdot 10^{12}$ є числом дванадцятого порядку. Чим більший додатний порядок числа, тим воно більше. І, навпаки, чим більший модуль від'ємного порядку числа, тим воно менше.

Числа, записані в стандартному вигляді, можна множити і ділити.

Наприклад:

$(2{,}3 \cdot 10^6) \cdot (1{,}9 \cdot 10^{-3}) = (2{,}3 \cdot 1{,}9) \cdot (10^6 \cdot 10^{-3}) = 4{,}37 \cdot 10^3.$

$(6{,}64 \cdot 10^{12}) : (8{,}3 \cdot 10^7) = (6{,}64 : 8{,}3) \cdot (10^{12} : 10^7) = 0{,}8 \cdot 10^5 = 8 \cdot 10^4.$

До таких обчислень часто вдаються під час розв'язування задач з фізики та хімії, а також і в практичній діяльності.

Цікаво знати

А як уявити собі такі числа, як, скажімо, 10^{100}? Яку фізичну реальність можна окреслити цим числом?

Приміром, якщо визначити площу нашої планети у квадратних міліметрах, то вона дорівнюватиме «лише» $5 \cdot 10^{20}$ мм^2.

Навіть, коли перерахувати всі елементарні частинки відомого нам Всесвіту (в одній порошинці їх принаймні кілька мільярдів), то й тоді матимемо менше число — лишень 10^{88}.

Таким чином, число 10^{100} — одиниця із 100 нулями — є своєрідною межею для операцій, які ми зазвичай окреслюємо поняттям «лічби». Це число називають *гугол*.

? Запитання для самоперевірки

1. Що являє собою запис числа у стандратному вигляді? Які із записів є записами чисел у стандартному вигляді:

а) $1{,}6 \cdot 10^{-12}$; б) $0{,}2 \cdot 10^{40}$;

в) $9{,}9 \cdot 10^{-5}$; г) $2{,}5 \cdot 10^8 \cdot 3 \cdot 10^{-4}$?

Задачі та вправи

Запишіть числа у стандартному вигляді (159–162):

159°. а) $1{,}3 \cdot 10000$; б) $2{,}5 \cdot 1000000$;
в) $14 \cdot 1000$; г) $536 \cdot 100000$;
ґ) 240000; д) 124000000;
е) 600000; є) 1032000.

160°. а) $32 \cdot 10^{-6}$; б) $76{,}5 \cdot 10^{4}$; в) $142 \cdot 10^{6}$; г) $62{,}4 \cdot 10^{-7}$.

161°. а) $0{,}014 \cdot 10^{-8}$; б) $0{,}4 \cdot 10^{5}$;
в) $0{,}63 \cdot 10^{7}$; г) $0{,}00347 \cdot 10^{11}$.

162. а) 0,0000009; б) 0,000032;
в) 0,85; г) 0,00000000134.

163. Запишіть у стандартному вигляді:
а) масу атома кисню — $0{,}\underbrace{000...0}_{22\text{ нулі}}2662$ г;
б) товщину оболонки мильної бульбашки — 0,00000006 см;
в) розмір віруса грипу — 0,00001 мм;
г) відстань від Землі до найяскравішої зірки нашого небосхилу Сіріуса — 400 000 000 000 000 км;
ґ) відстань від Землі до Сонця — 150 000 000 км.

2.4. Функція $y = \dfrac{k}{x}$

Пригадайте

1. Що таке функція?
2. Як побудувати графік функції, заданої формулою?
3. Яку функцію називають прямою пропорційністю?

① **Задачі, що приводять до функції $y = \dfrac{k}{x}$.** Розглянемо кілька задач.

Задача 1. Площа прямокутника дорівнює 10 см², його довжина — x см. Знайдіть ширину y прямокутника.

▼ Оскільки площа прямокутника $xy = 10$, то його ширина $y = \frac{10}{x}$ (см). ▲

Задача 2. Скільки кілограмів (y) овочів можна купити за 48 грн, якщо 1 кг овочів коштує x грн.

▼ Ціна овочів x, їх маса y і загальна вартість 48 пов'язані залежністю $xy = 48$ (щоб знайти загальну вартість овочів, треба ціну їх 1 кг помножити на кількість куплених кілограмів). Звідси $y = \frac{48}{x}$ (кг). ▲

Задача 3. Відстань 240 км між двома містами поїзд проходить із постійною швидкістю x км/год. Знайдіть час руху поїзда.

▼ З фізики відомо, що час t рівномірного руху, його швидкість v і шлях S перебувають у залежності $S = vt$. В наших позначеннях ця залежність виражається формулою $240 = xy$. Звідси $y = \frac{240}{x}$ (год). ▲

Можна навести ще безліч прикладів, у яких залежність між змінними x і y виражається формулою виду $y = \frac{k}{x}$, де k — певне число.

Формула $y = \frac{k}{x}$, де k — дане число, відмінне від нуля, а x — змінна, задає функцію, яку називають ***оберненою пропорційністю***.

Число k в даному випадку називають ***коефіцієнтом оберненої пропорційності***.

Очевидно, що областю визначення цієї функції є множина всіх чисел, крім $x = 0$.

② **Графік функції $y = \frac{k}{x}$, якщо $k > 0$.** Побудуємо графік функції $y = \frac{6}{x}$ і на його прикладі з'ясуємо особливості графіків усіх функцій виду $y = \frac{k}{x}$, якщо $k > 0$.

▼ Областю визначення цієї функції є множина всіх чисел, крім нуля. Побудуємо декілька точок графіка, які зможуть дати нам уявлення про його вигляд. Але перед тим, як це зробити, спробуємо попередньо дещо з’ясувати.

Передусім, оскільки x і y за умови $y = \frac{6}{x}$ не можуть дорівнювати нулю, то графік функції не має спільних точок ні з віссю абсцис, ні з віссю ординат. Неважко також встановити, що:

– коли змінна x набуває додатних значень, значення y також додатні;

– за від’ємних значень x значення y від’ємні.

Точки, в яких обидві координати додатні, розміщені у першій координатній чверті; якщо обидві координати точки від’ємні, то вона розміщена у третій чверті координатної площини.

Отже, графік функції $y = \frac{6}{x}$ складається з двох частин і розміщений у I і III чвертях.

А тепер знайдемо координати кількох точок графіка у цих чвертях, надаючи змінній x спочатку додатних, а потім від’ємних значень і обчислюючи за формулою $y = \frac{6}{x}$ відповідні значення y. Результати занесемо до таблиці.

x	$\frac{1}{2}$	1	2	3	6	12	$-\frac{1}{2}$	–1	–2	–3	–6	–12
$y = \frac{6}{x}$	12	6	3	2	1	$\frac{1}{2}$	–12	–6	–3	–2	–1	$-\frac{1}{2}$

Побудуємо точки графіка за даними координатами (рис. 3).

Якщо розглядати частину графіка, розміщену в I координатній чверті, то можна помітити, що чим більшого значення набуває x, тим меншим стає значення y. Отже, зі зростанням x крива графіка все ближче прилягає до осі Ox, ніколи, однак, її не перетинаючи.

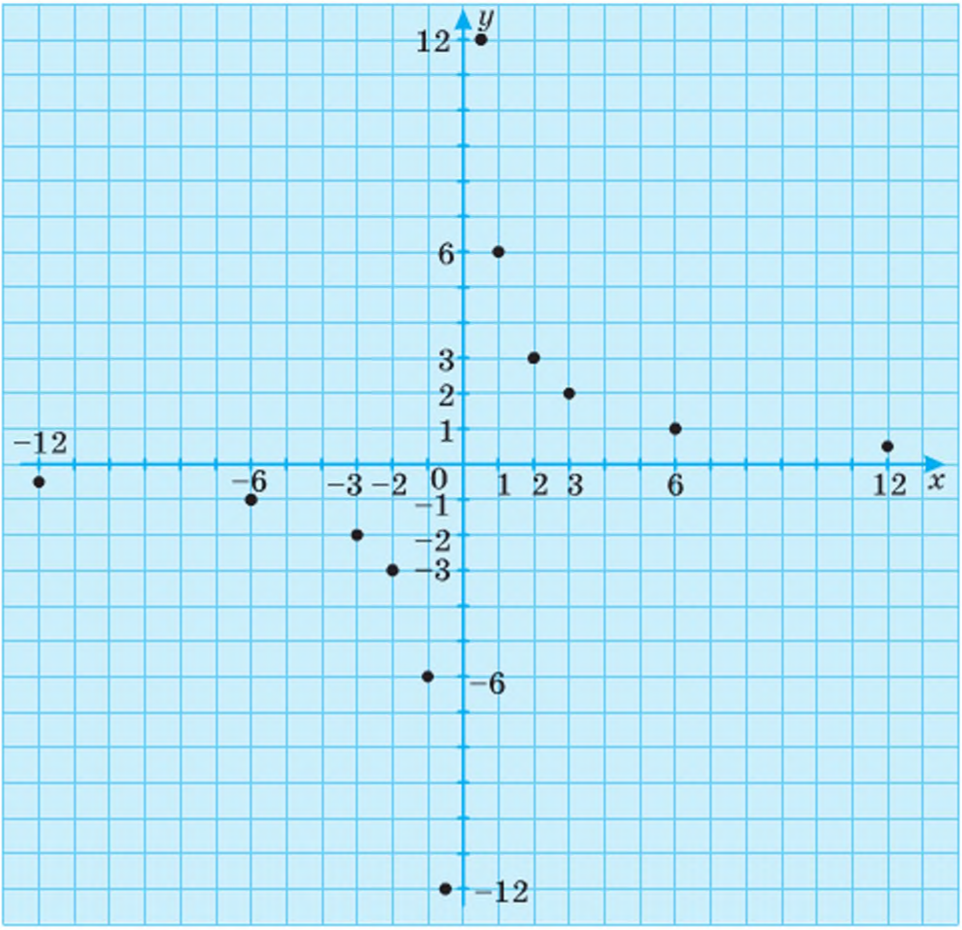


Рис. 3

І навпаки, чим менших значень набуває x $\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}\right.$ і т. д.), тим більшими стають значення y (відповідно 60, 600, 6000 і т. д.). Тобто, зі зменшенням x крива графіка все ближче прилягатиме до осі Oy, але ніколи її не перетне.

Аналогічне дослідження графіка даної функції у III чверті пропонуємо вам зробити самостійно.

Враховуючи результати цих досліджень, а також скориставшись побудованими точками графіка функції $y = \dfrac{6}{x}$, приходимо до висновку, що він має вигляд кривої, зображеної на рис. 4. Ця крива складається з двох частин (гілок) і називається ***гіперболою***. ▲

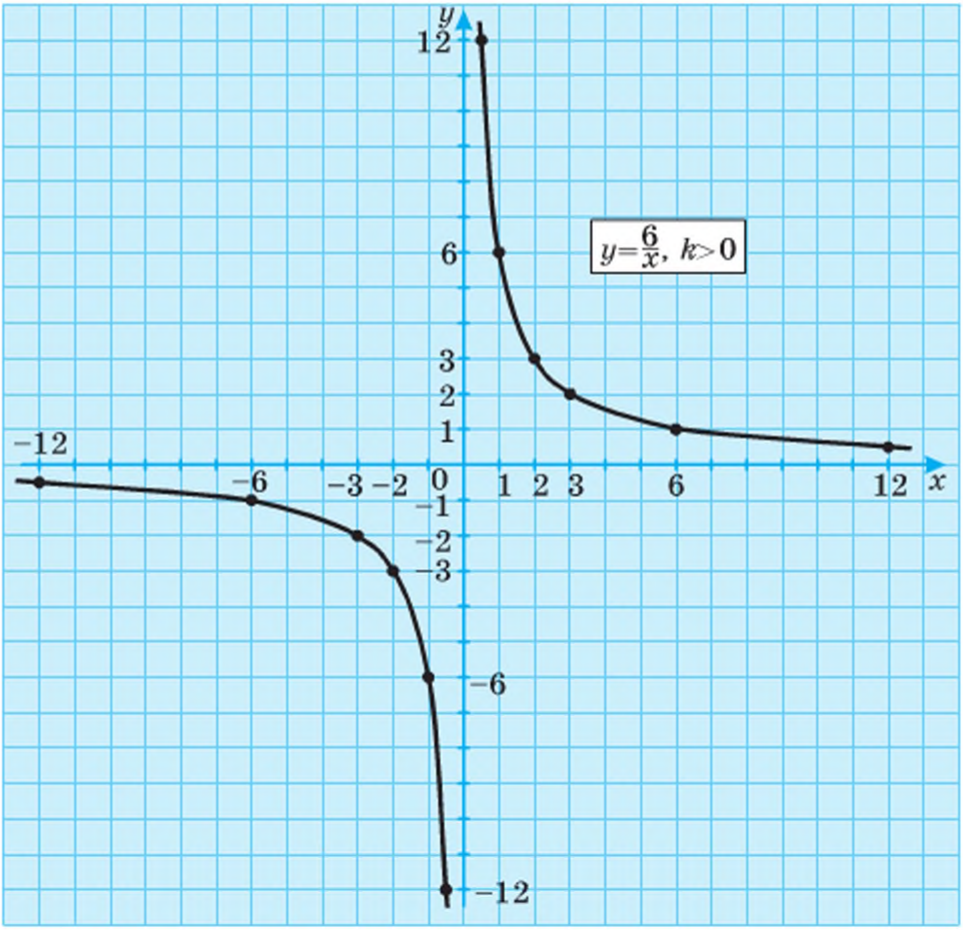


Рис. 4

Подібними є графіки усіх функцій виду $y=\dfrac{k}{x}$ за додатного k. Окремі відмінності між ними ви можете встановити самостійно, побудувавши в одній системі координат, наприклад, графіки функцій $y=\dfrac{6}{x}$ та $y=\dfrac{1}{x}$.

③ **Графік функції $y=\dfrac{k}{x}$, якщо $k<0$.** Якщо k — від'ємне число, то за додатних x значення $y=\dfrac{k}{x}$ від'ємні (це точки IV чверті); за від'ємних х значення y додатні (II чверть).

Отже, графік оберненої пропорційності $y = \frac{k}{x}$ за від'ємного k розміщений у II і IV координатних чвертях і має також форму гіперболи (рис. 5).

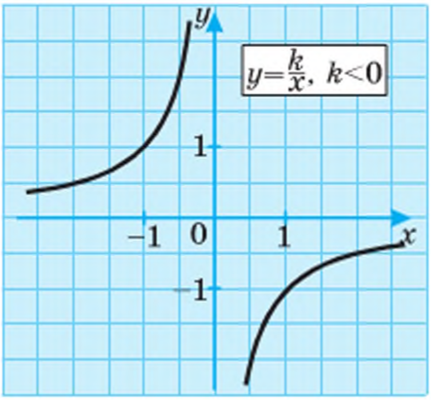


Рис. 5

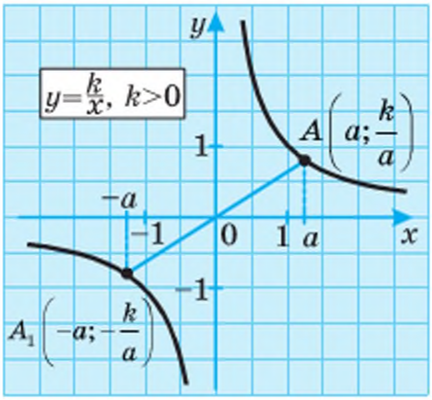


Рис. 6

④ **Властивість гілок гіперболи.** Якщо уважно придивитись до гілок гіперболи, що є графіком функції $y = \frac{k}{x}$, то можна помітити, що вони симетричні відносно початку координат (рис. 6).

Дійсно, якщо $x = a$, то $y = \frac{k}{a}$ (точка A). Якщо x набуває протилежного значення ($x_1 = -a$), то значення $y_1 = \frac{k}{-a} = -\frac{k}{a}$ теж буде протилежним (точка A_1). Точки, відповідні координати яких є протилежними числами, симетричні відносно початку координат.

? Запитання для самоперевірки

1. Як називається крива, що є графіком функції $y = \frac{k}{x}$?
2. У яких координатних чвертях розміщений графік функції $y = \frac{k}{x}$, якщо: а) k — додатне число; б) k — від'ємне число?

3. Яка область визначення функції $y = \frac{k}{x}$?

4. Яких значень може набувати дана функція?

Задачі та вправи

164°. Рухаючись зі швидкістю v км/год, поїзд проходить відстань між містами A і B, яка дорівнює 600 км, за t год. Запишіть формулу залежності: а) v від t; б) t від v?

165°. Довжина прямокутника x см, а ширина y см. Площа прямокутника дорівнює 4 см². Виразіть формулою залежність ширини цього прямокутника від довжини. Побудуйте графік цієї залежності, обчисливши попередньо координати кількох його точок і записавши результат у таблицю:

x	0,25	0,5	1	2	4	8	16
y							

Знайдіть за графіком ширину прямокутника, якщо його довжина дорівнює: а) 5 см; б) 6 см; в) 12 см.

166°. Побудуйте графік функції $y = -\frac{2}{x}$ за кількома його точками, їх координати запишіть у таблицю:

x	–8	–4	–2	–1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
y														

167. Використовуючи графік попередньої вправи, побудуйте графік функції $y = \frac{2}{x}$. Охарактеризуйте взаємне розміщення графіків функцій $y = \frac{2}{x}$ та $y = -\frac{2}{x}$.

168°. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = \frac{3}{x}$; б) $y = \frac{5}{x}$; в) $y = \frac{8}{x}$.

169. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y=\frac{1}{x}$ та $y=\frac{4}{x}$ і зробіть висновок щодо впливу коефіцієнта на розміщення графіка функції $y=\frac{k}{x}$.

170°. Відомо, що змінна y обернено пропорційна змінній x, причому коефіцієнт пропорційності дорівнює 16.

а) Запишіть формулу, що виражає цю залежність;

б) заповніть таблицю:

x	1	2	4	8	12	16	–1	–2	–4	–8	–12	–16
y												

в) побудуйте графік цієї залежності.

171°. Чи проходить графік функції $y=\frac{3}{x}$ через точки: $A(1;\ 1)$; $B(-2;\ -1{,}5)$; $C(6;\ 0{,}5)$; $D(3;\ 1)$; $E(12;\ 4)$?

172. Знайдіть k, якщо відомо, що графік функції $y=\frac{k}{x}$ проходить через точку $(-2;\ 2)$.

173. За якого значення k графік функції $y=\frac{k}{x}$ проходить через точку: а) $A(3;\ 3)$; б) $B(-3;\ -3)$; в) $C(1;\ 2)$; г) $D(0{,}5;\ -6)$?

174. Графік функції $y=\frac{k}{x}$ проходить через точку $A(3;\ 1)$. Побудуйте цей графік.

175. Графік функції $y=\frac{k}{x}$ проходить через точку $K(-2;\ 4)$. Чи проходить цей графік через точки: $A(2;\ -4)$; $B(-1;\ 6)$; $C(4;\ -2)$; $D\left(6;-\frac{4}{3}\right)$?

176. Графік функції $y=\frac{k}{x}$ проходить через точку $N(-3;\ 2)$. Запишіть координати ще трьох точок графіка функції.

177*. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

а) $y = \frac{8}{x}$ і $y = 9 - x$, якщо $1 \le x \le 8$;

б) $y = \frac{8}{|x|}$, якщо $|x| \le 8$, $|y| = 4$, якщо $|x| \le 2$ і $|y| = 1$, якщо $|x| \le 8$;

в) $y = \frac{6}{|x|}$, якщо $1 \le |x| \le 6$ і $y = 6|x|$, якщо $|x| \le 1$.

Задачі та вправи для повторення

Обчисліть (178–180):

178°. а) $(-4)^{-3} \cdot 10^{-2}$; б) $10^{-3} \cdot (0,2)^{-2}$; в) $170 - (-2)^{-3}$;
г) $-7 \cdot 8^{-9} + 40$; ґ) $(90 + 0,1)^{-2}$; д) $25^{-1} + 0,1^{-2}$.

179. а) $(4,75 \cdot 10^{12}) \cdot (8,5 \cdot 10^{-15})$; б) $-3^0\,(1,22)^{-1} \cdot 0,36^2 \cdot 0,6^{-3}$.

180*. а) $\dfrac{(0,5)^4 \cdot 4^5 + (-0,25)^{-4} \cdot 2^{12} \cdot \left(2^{-6}\right)^2}{3 \cdot \left(2^{-2}\right)^{-2}}$;

б) $\dfrac{\left(\frac{1}{9}\right)^{-4} \cdot 81^3 \cdot \left(-3^{-6}\right)^2 + 9^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5}{\left(-\frac{1}{81}\right)^{-1} \cdot 7}$.

181*. Спростіть вираз $(x^2 - a^{-1}x + a^{-2})(x^{-1} + a) - x(ax)^{-2}$ і обчисліть його значення, якщо $a = 0,018$, $x = 0,03^{-1}$.

182. Спростіть добуток:

а) $\left(\dfrac{81a^{4n-1}}{25b^3}\right)^{-3} \cdot \left(-\dfrac{5b^3}{27a^{3n-1}}\right)^{-4}$; б)* $\left(\dfrac{81a^{4n+2}}{25b^5}\right)^3 : \left(\dfrac{5b^3}{27a^{3n-1}}\right)^{-4}$.

Розв'яжіть рівняння (183 — 184):

183°. а) $7^0 = \frac{1}{3}(x+1)x^{-1}$; б) $x(x + 1)^{-1} - 1 = 0$; в) $x(x + 4)^{-1} = 3$.

184. а) $(3 + x^{-1}) \cdot (5 - 4x^{-1}) = 0$; б) $x - x^{-1} = 0$;
в) $2x(x + 3)^{-1} = 8^0$.

185°. Через нитку розжарювання 25-ватної лампочки за 1 год проходить 1 100 000 000 000 000 000 000 електронів. Запишіть це число у стандартному вигляді.

186. Діаметр Сонця у 10^9 разів довший за діаметр Землі. Знайдіть діаметр Сонця і запишіть його довжину у стандартному вигляді, якщо діаметр Землі наближено дорівнює 12700 км.

187*. Доведіть, що за будь-якого цілого n дріб $\dfrac{10^n+8}{9}$ є скінченним десятковим дробом.

188*. Доведіть, що за будь-якого цілого n дріб $\dfrac{10^n+2}{5}$ є скінченним десятковим дробом.

189*. Заповніть порожні клітинки квадратів (рис. 7) числами так, щоб добуток усіх чисел на кожній вертикалі, горизонталі та діагоналі дорівнював одному і тому ж числу. Запишіть цей добуток у стандартному вигляді. Знайдені числа розташуйте у порядку зростання.

а)

2	$2\cdot10^{-5}$	$2\cdot10^{-4}$
$2\cdot10^{-2}$		

б)

0,4		
$4\cdot10^{-8}$		4
$4\cdot10^{-3}$		

Рис. 7

Завдання для самоперевірки

I–II рівні

1. Запишіть у вигляді степеня з від'ємним показником:

а) $\frac{1}{a^2}$; б) $\frac{1}{y^3}$; в) $\frac{1}{(a+b)^5}$; г) $\frac{1}{(mn)^6}$.

2. Запишіть десяткові дроби у вигляді степеня числа 10:

а) 0,1; б) 0,001; в) 0,0001; г) 0,000001

3. Обчисліть:

а) 2^{-3}; б) 5^{-2}; в) 4^{-3}; г) $(-10)^{-2}$.

4. Запишіть числа:

а) 8 і 32 у вигляді степеня з основою 2;

б) $\frac{1}{8}$ і $\frac{1}{32}$ у вигляді степеня з основою 2;

в) $\frac{1}{25}$ і $\frac{1}{625}$ у вигляді степеня з основою 5;

г) $\frac{1}{27}$ і $\frac{1}{3^{-4}}$ у вигляді степеня з основою 3.

5. Знайдіть значення виразів:

а) $2^3 \cdot 2^{-4}$; б) $3^{-2} : 3^{-4}$; в) $7^{-2} : 2^{-1}$; г) $25^2 \cdot 5^{-4}$.

6. Піднесіть до степеня і запишіть без від'ємного показника степеня:

а) $(a^3)^{-2}$; б) $(3x^{-3})^2$; в) $(a^{-2}b^{-1})^3$; г) $(a^{-3})^2$.

7. Виконайте дії:

а) $\left(\frac{11}{12}\right)^{-9} : \left(\frac{11}{12}\right)^{-10}$; б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 5$; г) $3^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{0}$.

8. Спростіть вирази:

а) $(x^2-9)^{-1}(x-3)+2x^{-1}$; б) $5(x^2-16)(x-4)^{-1}-5x^{-1}$.

9. Запишіть у стандартному вигляді числа:

а) 2 530 000; б) 0,000081.

10. Побудуйте графік функції $y = \frac{3}{x}$.

III рівень

1. Знайдіть, яку частину становить:

а) 1 г від 1 ц і запишіть це у вигляді степеня числа 10;

б) 1 мм від 1 км і запишіть це у вигляді степеня числа 10;

в) 1 м^2 від 1 га і запишіть це у вигляді степеня числа 10;

г) 1 дм^2 від 1 а і запишіть це у вигляді степеня числа 10;

2. Спростіть вирази:

а) $(64m^2n^4)^5 : (16mn^3)^6$; б) $\frac{121x^{-3}}{y^2} \cdot \frac{10x^4y^2}{11xy}$;

в) $(0{,}13b^{-2})^{-2} \cdot 3a^{-3}b^{-1}$; г) $\frac{125y^{-1}}{y^{-2}} \cdot \frac{2x^{-6}}{25x^{-4}y^3}$.

3. Розв'яжіть рівняння:

а) $(3x - 4)x^{-1} - 2 \cdot 80 = 0$; б) $2x(x - 3)^{-1} = 50$.

4. Обчисліть:

а) $\frac{5^3 : 5^{-4} + 3^5 \cdot 3^4}{2^{-3} + (0{,}28)^0 : 2}$; б) $\frac{2^{-3} \cdot 4^2 - 27^{-2} : 9^{-3}}{125^{-4} \cdot 625^3 + 4}$;

в) $(1{,}3^8 + 3^8)^0 \cdot (5{,}7^0 - 2{,}2)$; г) $(18{,}39^0 + 2{,}5) : (12{,}5^9 - 4^8)^0$.

5. Запишіть у стандартному вигляді значення виразу:

а) $(8{,}2 \cdot 10^8) \cdot (5 \cdot 10^{15})$; б) $(3{,}6 \cdot 10^{-21}) : (1{,}5 \cdot 10^{13})$;

в) $(6{,}7 \cdot 10^9) \cdot (2{,}1 \cdot 10^{-4})$; г) $(8{,}84 \cdot 10^{26}) : (1{,}7 \cdot 10^{-21})$.

6. Графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку $A(-2; 2)$. Чи проходить цей графік через точки: $K(1; -2)$, $Z(-0{,}5; 3)$, $M(2; -1)$, $N\left(3; \frac{2}{3}\right)$?

IV рівень

1. Запишіть вираз у вигляді степеня з основою 5, якщо m — ціле число:

а) $5^m \cdot 5^{m+1} \cdot 5^{1-m}$; б) $(5^m)^2 \cdot (5^{-3})^m$;

в) $5^{m+1} \cdot 5^m \cdot 5^{m-1}$; г) $(5^2)^{-m} \cdot (3^m)^2$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x^3+64)(x^2-4x+16)^{-1}=0$;

б) $2(1-x)^{-2}-3(1-x^2)^{-1}=5(x-1)^{-2}$;

в) $(x+6)x^{-1}-(x+2)(x-1)^{-1}=0$;

г) $(x+1)(x-2)^{-1}=1-5(x+2)^{-1}$.

3. Доведіть тотожність:

а) $\dfrac{a^{-2}+2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-2}-b^{-2}}=\dfrac{a+b}{b-a}$; б) $\dfrac{m^{-2}n^{-1}+m^{-1}n^{-2}}{m^{-2}-n^{-2}}=\dfrac{1}{n-m}$.

4. Відстань від Землі до зірки Альфа Центавра становить $2{,}06\cdot10^5$ астрономічних одиниць[1]. За який час світло від цієї зірки досягає поверхні Землі, якщо швидкість світла 300 000 км/с?

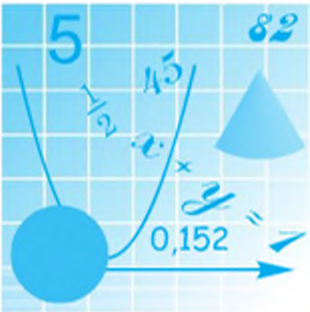
5. Знайдіть об'єм куба (в см^3), довжина ребра якого дорівнює:

а) 0,0005 м; б) 3100 мм; в) 0,0015 см.

Результат запишіть у стандартному вигляді.

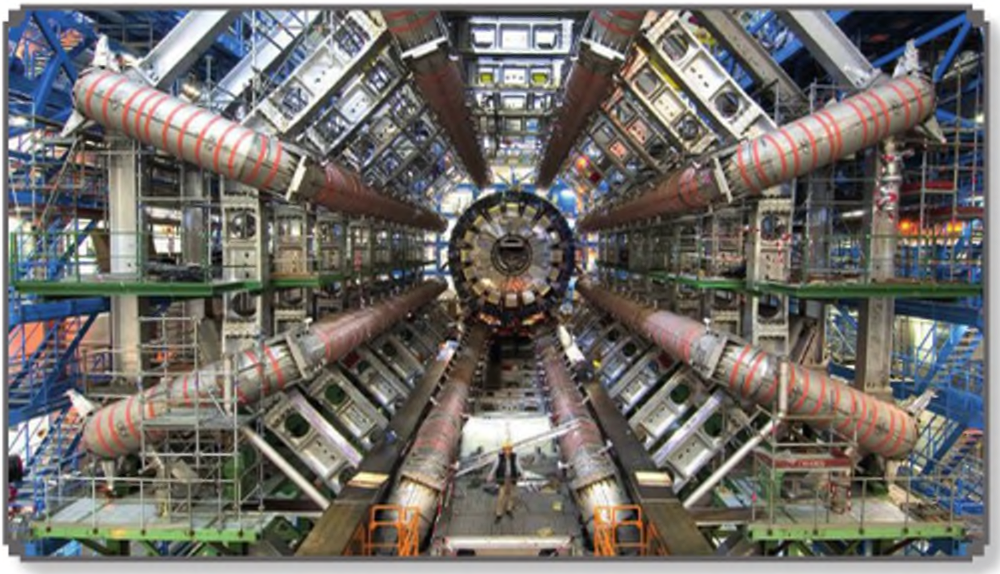
6. Побудуйте графік функції $y=\dfrac{2}{|x|}$. Розв'яжіть графічно рівняння $\dfrac{2}{|x|}=2-x$.

[1] *Астрономічною одиницею* називається відстань від Землі до Сонця, яка дорівнює $1{,}5\cdot10^8$ км.



Розділ II

ДІЙСНІ ЧИСЛА. КВАДРАТНІ КОРЕНІ



§3. ДІЙСНІ ЧИСЛА

3.1. Раціональні числа

! Пригадайте

1. Які числа вам відомі?
2. Які числа входять до складу цілих чисел?
3. Які числа входять до складу раціональних чисел?

① **Чому така назва?** Досі ви мали справу з цілими і дробовими (додатними і від'ємними) числами, які належать до ***раціональних чисел***. Походить ця назва від латинського слова *ratio*, що означає *відношення*. І це не випадково. Річ у тому, що будь-яке раціональне число можна записати у вигляді відношення $\frac{m}{n}$ двох цілих чисел ($n \neq 0$), тобто у вигляді звичайного дробу. Наприклад:

1) $0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \frac{0}{3} = \ldots;$

2) $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \ldots;$

3) $-6 = \frac{-6}{1} = \frac{-12}{2} = \frac{-18}{3} = \ldots;$

4) $\frac{2}{7} = \frac{6}{21} = \frac{20}{70} = \ldots;$

5) $0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = \frac{6}{30} = \ldots;$

6) $-3\frac{5}{7} = \frac{-26}{7} = \frac{-52}{14} = \frac{78}{-21} = \ldots$

Зауважимо два моменти.

1) Існує безліч звичайних дробів, що є записом одного і того самого раціонального числа, але усіх їх можна звести до єдиного нескоротного дробу.

2) Будь–який з цих дробів можна записати так, щоб чисельник його був цілим числом, а знаменник — натуральним. Так, дріб $\frac{12}{-2}$, що є одним із записів числа –6, можна записати, як $\frac{-12}{2}$, а $\frac{78}{-21}=\frac{-78}{21}$ тощо.

② **Десятковий дріб як запис раціонального числа.** Кожний звичайний дріб можна записати у вигляді десяткового (перетворити в десятковий), поділивши його чисельник на знаменник. Наприклад:

1) $\frac{1}{2}=0,5$;
2) $\frac{3}{8}=0,375$;
3) $\frac{2}{3}=0,666...$;
4) $\frac{5}{11}=0,454545...$;
5) $\frac{1}{6}=0,1666...$;
6) $\frac{111}{330}=0,3363636...$

Кажуть, що в перших двох випадках дістали скінченні десяткові дроби, а в решті — нескінченні десяткові дроби, у яких, починаючи з певного місця, одна або кілька цифр у незмінному порядку повторюються. Такі дроби називають ***періодичними***, а цифру чи групу цифр, що повторюються, — ***періодом дробу***.

Як відомо, третій дріб можна скорочено записати так: $\frac{2}{3}=0,(6)$ (читають «нуль цілих і 6 у періоді»);

четвертий дріб $\frac{5}{11}=0,(45)$ (читають «нуль цілих і 45 у періоді»);

п'ятий дріб $\frac{1}{6}=0,1(6)$ (читають «нуль цілих одна десята і 6 у періоді»);

шостий дріб $\frac{111}{330} = 0{,}3(36)$ (читають «нуль цілих три десятих і 36 у періоді»).

Якщо період починається відразу після коми, то дріб називається ***чистим періодичним***, в інших випадках — ***мішаним періодичним*** дробом.

Дроби 0,(6), 0,(45) є чистими періодичними дробами, а 0,1(6), 0,3(36) — мішаними.

У вигляді нескінченного періодичного дробу можна записати і будь-який скінченний десятковий дріб, а також будь-яке ціле число. Наприклад:

1) 0,5 = 0,5000...;
2) 0,375 = 0,375000...:
3) 4 = 4,000...;
4) –5 = –5,000...

Взагалі,

будь-яке раціональне число можна записати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

Це можна довести так.

У процесі ділення цілого числа m на довільне натуральне число n можливо отримати $(n - 1)$ кількість остач:

$$1, 2, 3, n - 1.$$

Отже, якась із них має повторитися не більше як через $n - 1$ кроків, а тому мусить з'явитися період.

③ Як записати періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного.

Правильним є й обернене твердження:

будь-який періодичний десятковий дріб є записом раціонального числа.

Проілюструємо це на прикладі дробів 0,(16) і 0,2(5).

а) Нехай $0{,}(16) = x$, тоді
$100 \cdot 0{,}(16) = 100x$;

б) Якщо $0{,}2(5) = x$, то
$100 \cdot 0{,}2(5) = 100x$ і $10 \cdot 0{,}2(5) = 10x$;

$16,(16) = 100x;$

$16 + 0,(16) = 100x;$

$16 + x = 100x;$

$99x = 16;$

$x = \frac{16}{99}.$

Отже, $0,(16) = \frac{16}{99}.$

$25,(5) = 100x$ і $2 + 0,(5) = 10x;$

$25 + 0,(5) = 100x$ і $0,(5) = 10x - 2;$

$25 + (10x - 2) = 100x;$

$90x = 23;$

$x = \frac{23}{90}.$

Отже, $0,2(5) = \frac{23}{90} = \frac{25-2}{90}.$

Для запису періодичного десяткового дробу у вигляді звичайного використовують такі правила.

Щоб записати чистий періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного, треба записати у чисельнику період десяткового дробу, а у знаменнику — число, утворене з дев'яток, кількість яких дорівнює кількості цифр у періоді десяткового дробу.

Наприклад: $0,(7) = \frac{7}{9};\ \ 0,(18) = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}.$

Щоб записати мішаний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного, треба записати у чисельнику число, яке стоїть у десятковому дробі до другого періоду, зменшивши його на число, яке стоїть до першого періоду, а у знаменнику записати стільки дев'яток, скільки цифр у періоді, і приписати до них стільки нулів, скільки цифр стоїть у даному десятковому дробі від коми до першого періоду.

Наприклад: $0,2(37) = \frac{237-2}{990} = \frac{235}{990} = \frac{47}{198}.$

Доведення цих тверджень ми розглядати не будемо.

Цікаво знати

Різні нескінченні десяткові періодичні дроби є різними раціональними числами. Винятком є дроби з періодом 9, які можна записати дробом з періодом 0. Зокрема

$0,(9) = \frac{9}{9} = 1 = 1,000...$

$$15{,}1(9)=15{,}1999...=15\frac{19-1}{90}=15\frac{18}{90}=15\frac{1}{5}=15{,}2=15{,}2000...\ .$$

Як бачимо, нескінченні десяткові дроби з періодом 9 можна замінити дробами з періодом 0. Однак слід зауважити, що при перетворенні звичайного дробу в десятковий не може утворитися дріб з періодом 9.

? Запитання для самоперевірки

1. Як можна записати будь-яке раціональне число?
2. Скільки існує звичайних дробів, які позначають одне і те саме раціональне число?
3. Як записати звичайний дріб у вигляді десяткового?
4. Які десяткові дроби можна одержати, перетворюючи звичайні дроби в десяткові?
5. Як записати скінченний десятковий дріб у вигляді нескінченного десяткового дробу?
6. Назвіть можливі способи запису будь-якого раціонального числа.

Задачі та вправи

190°. Запишіть у вигляді звичайного дробу числа:

а) 0,7; 0,28; 0,345; 1,25; $5\frac{3}{5}$; 2,05; $7\frac{1}{9}$;

б) 7; –1; 2–1; 0; –3,5; $-6\frac{1}{4}$; –0,32.

191°. Запишіть у вигляді звичайних дробів з найменшими натуральними знаменниками:

а) 0,6; 0,01; 2,75; 4,5; –0,45; –16,04;

б) –4; 41; –28; $\frac{8}{12}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; $-\frac{128}{20}$.

192°. Запишіть у вигляді нескінченного десяткового дробу:

а) $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{14}{9}$; $\frac{17}{12}$; $\frac{8}{9}$; $-\frac{19}{12}$; $2\frac{5}{66}$;

б) $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{5}$; $-\frac{5}{8}$; 4,7; 12,07; 7; –8; 8,05;

в) $\frac{1}{15}$; $\frac{7}{15}$; $4\frac{1}{6}$; $2\frac{7}{11}$; $-\frac{10}{9}$; $-\frac{25}{24}$; 3.

193. Запишіть у вигляді звичайних дробів:

а)° 0,(3); 0,(4); 0,(7); 0,(6);

б)° 0,(17); 0,(23); 0,(63); 0,(12);

в) 0,2(1); 1,0(7); 0,1(8); 0,3(2).

194. Знайдіть помилки в обчисленнях і виправте їх:

а) $5 \cdot 2^3 = 10^3 = 1000$; б) $2^3 \cdot 10 = 20^3$;

в) $7 \cdot 3^4 = 7 \cdot 81 = 567$; г) $7 - 2^3 = 5^3 = 125$;

ґ) $24^3 : 4^3 = 6^3 = 216$; д) $4^6 : 2^3 = 2^2 = 4$.

195. Обчисліть зручним способом:

а) $\frac{73^2 - 2 \cdot 73 \cdot 23 + 23^2}{26^2 - 24^2}$; б) $\left(7^{13} - 7^{12}\right) \cdot 7^{-11} - 27^5 \cdot 27^{-4}$.

Запишіть три числа, що знаходяться між числами (196–198):

196°. а) 10,1 і 11,2; б) –10 і –10,2; в) 3 і 3,1.

197. а) $\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{3}$; б) –0,01 і 0; в) –1001 і –1002.

198*. а) $\frac{1}{3}$ і 0,3; б) 0,2 і 0,(2); в) $-\frac{5}{6}$ і 0,8(3).

199°. Знайдіть натуральні корені рівнянь:

а) $(x - 2)(x - 5) = 0$; б) $(x - 5)(x + 7) = 0$;

в) $(x + 3)(x - 2) = 0$; г) $x(x - 1) = 0$;

ґ) $(x + 2)(x + 7) = 0$; д) $x(x - 0,5) = 0$.

200*. Чи правильні твердження:

а) якщо $a^2 = b^2$, то $a = b$;

б) якщо $a^3 = b^3$, то $a = b$;

в) якщо $a^2 > b^2$, то $a > b$?

Наведіть приклади, які підтверджують або спростовують ці твердження.

3.2. Ірраціональні числа. Дійсні числа

① **Поняття ірраціонального числа.** Крім нескінченних періодичних десяткових дробів, існують також нескінченні неперіодичні десяткові дроби. Наприклад:

1) 0,12112111211112...;

2) 3,570570057000...

Закономірність їх утворення очевидна.

У першому випадку кількість одиниць, записаних після кожної наступної двійки, послідовно збільшується на одну; у другому — кількість нулів, записаних після кожної наступної пари цифр 57, послідовно збільшується на один.

Утворені таким чином десяткові дроби не містять у своєму записі однієї цифри або кількох цифр, які, починаючи з певного місця, незмінно повторюються, а тому не є періодичними.

Оскільки раціональні числа виражаються лише нескінченними періодичними десятковими дробами, то нескінченні неперіодичні дроби позначають числа, які не є раціональними. Такі числа дістали назву ***ірраціональних*** (префікс «*ір*» означає «*не*»).

До ірраціональних чисел належить, зокрема, відоме вам число $\pi = 3{,}14159265358...$ Загалом існує безліч ірраціональних чисел — з деякими з них ви згодом познайомитеся.

② **Числові множини. Підмножина.** Пригадаймо, як у процесі навчання поглиблювалося ваше розуміння числа як основного математичного поняття і чим це було зумовлено.

Знайомство з математикою ви почали з вивчення натуральних чисел (1, 2, 3, ...). Наша мова містить чимало різних слів, якими називають сукупність об'єктів: табун коней, рій бджіл, зграя птахів, гурт людей тощо. Математики в таких випадках послуговуються терміном «*множина*». Кажуть, наприклад, про множину точок відрізка, множину парних чисел і т.д.

З огляду на це можна сказати, що всі натуральні числа утворюють ***множину натуральних чисел***.

Натуральні числа можна додавати, віднімати, множити, ділити. Але якщо в результаті додавання і множення натуральних чисел завжди отримують натуральне число, то про різницю двох натуральних чисел цього сказати не можна. Наприклад, різниця 8 – 15 не є натуральним числом, так само, як і 10 – 10. Це було однією з передумов уведення від'ємних чисел і числа 0. Так утворилася ***множина цілих чисел***, яку складають натуральні числа, протилежні їм числа і нуль.

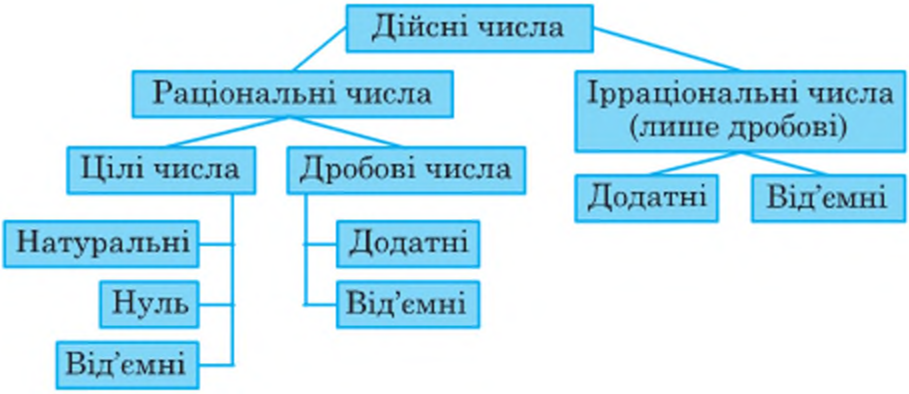
Але згодом з'ясувалося, що й цієї множини недостатньо для потреб математики і життя. Зокрема, довжину відрізка далеко не завжди можна записати з допомогою цілого числа, частка цілих чисел теж не завжди є цілим числом (наприклад, 5 : 2). Тому постала необхідність у нових числах — ***дробових***.

Дробові числа разом з цілими утворили ***множину раціональних чисел***.

Крім раціональних чисел, як ви знаєте, існують також числа ірраціональні. Постає запитання: для чого вони потрібні, у яких галузях математики чи життєвої практики неможливо обійтися лише раціональними числами? Один з прикладів вам відомий: відношення довжини кола до його діаметра не є раціональним числом. Крім того, маючи лише раціональні числа, не завжди можна записати корені рівняння, наприклад, виду $x^2 = a$, зокрема, $x^2 = 2$, $x^2 = 6$ та ін. Із розв'язанням таких рівнянь ви ознайомитеся у наступному параграфі. Раціональні та ірраціональні числа утворюють нову множину чисел, які називаються ***дійсними числами***.

Підсумовуючи розглянуте у цьому і попередньому пунктах, можна стверджувати, що *будь-яке дійсне число можна записати у вигляді нескінченного десяткового дробу (періодичного, якщо число раціональне, і неперіодичного, якщо воно ірраціональне).*

Класифікацію дійсних чисел зображає така схема:



Названі числові множини прийнято позначати відповідними буквами латинського алфавіту: **N** — множина натуральних чисел, **Z** — множина цілих чисел, **Q** — множина раціональних чисел, **R** — множина дійсних чисел. Якщо число належить до певної множини, то це позначають знаком $\in$. Запис $5 \in \mathbf{N}$ означає, що 5 належить множині натуральних чисел, або, іншими словами, 5 — натуральне число. Твердження «a — ціле число» символічно записують так: $a \in \mathbf{Z}$.

Взаємозалежність між числовими множинами, які утворюють множину дійсних чисел, можна зобразити у вигляді кругів (рис. 8).

Бачимо, що, наприклад, множина натуральних чисел є частиною (входить до складу) множини цілих чисел, а множина цілих чисел у свою чергу є частиною множини раціональних чисел і т.д. У таких випадках користуються поняттям ***підмножини***, як частини певної множини. Зокрема, кажуть, що множина натуральних чисел є підмножиною множини цілих чисел. Математичною мовою це записують так: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$. Запис $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ означає, що множина цілих чисел є підмножиною множини дійсних чисел.

Рис. 8

③ **Дії з дійсними числами.** З дійсними числами можна виконувати всі відомі вам математичні дії, що ґрунтуються на тих самих законах і правилах, які було встановлено для раціональних чисел. Якщо дії виконуються з ірраціональними числами, то їх, як і нескінченні періодичні десяткові дроби, спочатку округлюють відповідно до того, з якою точністю передбачають дістати результат. Щоб знайти, наприклад, суму чисел 6,(7) і 3,121121112... з точністю до сотих, доданки округлюють до тисячних:

6,(7) + 3,121121112... » 6,778 + 3,121 = 9,899 ≈ 9,90.

Сума, різниця, добуток, частка двох дійсних чисел, одне з яких — раціональне (крім нуля), а друге — ірраціональне, є ірраціональним числом. Якщо ж обидва компоненти відповідної дії — числа ірраціональні, то в результаті можна дістати і раціональне число.

Наприклад:

7,262662666... + 19,515115111... = 26,77777... = 26,(7);

15,9449944999444.. . – 8,722772277722... = 7,2222... = 7,(2).

З прикладами обчислення добутку і частки двох ірраціональних чисел ви познайомитеся в наступних параграфах.

? Запитання для самоперевірки

1. Які числа належать до ірраціональних?
2. Чи можна ірраціональне число записати у вигляді відношення двох цілих чисел $\frac{m}{n}$?
3. Які числові множини вам відомі?
4. З яких чисел складається множина цілих чисел?
5. Назвіть підмножини множини раціональних чисел.
6. Підмножиною яких числових множин є множина цілих чисел?
7. Які математичні дії не завжди можна виконати у множині натуральних чисел?
8. Які математичні дії завжди виконуються у множині цілих чисел?
9. Які математичні дії не завжди виконуються у множині раціональних чисел?

Задачі та вправи

201°. Випишіть окремо цілі і дробові числа:

а) -2; $-1{,}5$; 0; $0{,}8$; $\frac{5}{6}$; 6; $3\frac{7}{8}$; -10;

б) $2{,}3$; $3{,}(5)$; $0{,}434343...$; $7{,}000...$; p; -15.

202°. Випишіть окремо раціональні та ірраціональні числа:

а) $0{,}343434...$; $\frac{1}{3}$; π; $\frac{\pi}{2}$; $4{,}723172311723111...$;

б) $8{,}6666...$; $5{,}545545554...$; $7{,}1534222...$

203°. Яке із тверджень правильне:

а) будь-яке натуральне число є цілим;

б) будь-яке дробове число є раціональним;

в) будь-яке ціле число є раціональним;

г) будь-яке ціле число є дійсним;

ґ) будь-яке дійсне число є ірраціональним;

д) будь-яке дробове число є дійсним?

204°. Запишіть твердження з допомогою математичних символів:

а) b — ціле число;

б) a — раціональне число;

в) n — натуральне число;

г) x — дійсне число, відмінне від 2;

ґ) y — ціле число, відмінне від 0.

205. Яке із тверджень правильне:

а) $3{,}4 \in \mathbf{R}$; б) $\frac{2}{3} \in \mathbf{Z}$; в) $1\frac{3}{4} \in \mathbf{R}$;

г) $-5 \in \mathbf{Q}$; ґ) $-5 \in \mathbf{Z}$; д) $-5 \in \mathbf{R}$;

е) $\pi \in \mathbf{H}$; є) $\pi \in \mathbf{Q}$; ж) $\mathbf{R} \subset \mathbf{Q}$;

з) $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$; и) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$; і) $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$?

206. Обчисліть, відповідно округливши результат:

а) $\pi + \frac{1}{3}$ (до сотих);

б) $2{,}535335333... - \frac{3}{7}$ (до тисячних);

в) $3{,}2\pi$ (до цілих).

207°. Знайдіть наближене значення довжини кола з радіусом 4,5 см.

208. Запишіть ірраціональне число, розташоване між числами:
а) 3 і 4; б) π і 4; в) 2π і 7.

209. Запишіть два ірраціональні числа, сума яких є раціональним числом.

210*. Запишіть два ірраціональні числа, різниця яких є раціональним числом.

211*. Запишіть два ірраціональні числа, частка яких є раціональним числом.

212. Розв'яжіть рівняння і вкажіть всі числові множини, до яких належить кожен з коренів:

а) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{2}{5}\right) = 0$; б) $\left(x - \frac{3}{8}\right)(x + 4) = 0$;

в) $x(x - 5) = 0$; г) $(x - 0{,}4)(2x - \pi) = 0$;

ґ) $(x - 3)(3x - 8) = 0$; д) $x(x + 2)(x - \pi) = 0$.

Задачі та вправи для повторення

213°. Які математичні дії можна виконати з числами 3 і 7 у множині:
а) натуральних чисел; б) цілих чисел;
в) раціональних чисел.

214°. Які математичні дії можна виконати з числами 12 і 0 у множині:
а) цілих чисел; б) раціональних чисел.

215°. Подайте кількома способами у вигляді відношення цілого і натурального чисел такі числа: $3\frac{4}{7}$; 0,8; $-4\frac{2}{5}$; –14; 0; 1; 17.

216. Порівняйте числа:

а) 0,027 і 0,10027; б) $\frac{2}{3}$ і 0,5(6);

в) 0,(4) і $\frac{4}{9}$; г) $\frac{9}{10}$ і $\frac{10}{11}$.

217*. Запишіть періодичні десяткові дроби у вигляді звичайних:

а) 0,(12); б) 0,2(3); в) 1,4(5);

г) 0,28(7); ґ) 0,2(87); д) 0,4(7).

218*. Перетворіть звичайні дроби в десяткові:

а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{2}{7}$; в) $\frac{3}{7}$;

г) $\frac{4}{7}$; ґ) $\frac{5}{7}$; д) $\frac{6}{7}$.

Знайдіть закономірність визначення періоду кожного з поданих чисел за допомогою перестановки цифр у періоді дробу $\frac{1}{7}$.

219. Запишіть ірраціональне число, розміщене між числами:

а) 3 і 3,2; б) 1 і 2; в) 0 і 1.

220. Знайдіть наближене значення площі круга з радіусом:

а) $r = 2{,}5$ дм; б) $r = 1{,}5$ м,

округливши результат до десятих.

221*. Знайдіть наближене значення довжини лінії, якою обмежена фігура, зображена на рисунку 9.

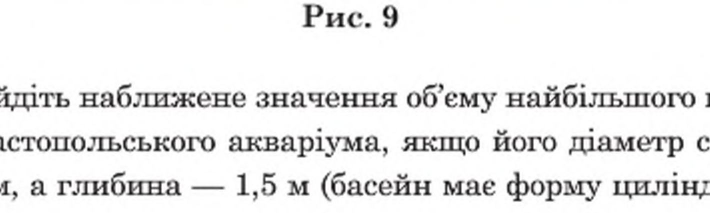


Рис. 9

222. Знайдіть наближене значення об'єму найбільшого в Україні Севастопольського акваріума, якщо його діаметр становить 9,2 м, а глибина — 1,5 м (басейн має форму циліндра, об'єм якого обчислюється за формулою $V = \pi r^2 h$, де r — радіус циліндра, h — висота циліндра).

223*. Доведіть, що число 0,1234567891011..., в якому після коми записані підряд усі натуральні числа, не є раціональним.

Завдання для самоперевірки

I–II рівні

1. Запишіть у вигляді звичайного дробу:

а) 0,9; б) $2\dfrac{2}{5}$; в) 5–2; г) $-6\dfrac{1}{2}$.

2. Запишіть у вигляді нескінченного десяткового дробу:

а) $\dfrac{2}{3}$; б) $1\dfrac{2}{5}$; в) $-\dfrac{19}{6}$; г) 4,7.

3. Випишіть окремо цілі й дробові числа:

а) –3; $\dfrac{5}{6}$; –10,1; 5; 0; б) 2,(2); 0,4343...; 0;

в) π; $1\dfrac{2}{5}$; –0,(3); 0; г) –2,666...; 0; $\dfrac{1}{2}$; –7,5000... .

4. Які з даних чисел є раціональнми, а які — ірраціональними:

а) 0,242424...; б) $\dfrac{2}{3}$; в) π; г) $\dfrac{\pi}{3}$?

5. Яке з наведених тверджень правильне:

а) кожне натуральне число є цілим;

б) кожне дійсне число є ірраціональним;

в) кожне дробове число є раціональним;

г) кожне дробове число є дійсним?

6. Які відомі вам математичні дії можна виконати з числами 2 і 6 у множині:

а) цілих чисел; б) натуральних чисел;

в) раціональних чисел; г) дробових чисел?

7. Між якими послідовними цілими числами міститься число:

а) $2\dfrac{1}{4}$; б) –3,7; в) 0; г) р?

8. Запишіть твердження математичною мовою:

а) x — ціле число, менше від 0;

б) m — раціональне число, більше за 0;

в) a — дійсне число, відмінне від 0;

г) n — натуральне число, більше за 3.

9. Запишіть по два числа, що знаходяться між числами:

а) 2,1 і 3,2; б) –6 і –6,2; в) –0,01 і 0; г) $\frac{1}{3}$ і 0,3.

III рівень

1. Запишіть у вигляді звичайних дробів:

а) 0,(5); б) 2,(7); в) 0,(8); г) 0,63.

2. Знайдіть натуральні розв'язки рівнянь:

а) $(x-2)(2x+5)=0$; б) $(y+2)(6x-30)=0$;

в) $x(x-0,7)=0$; г) $(2y-3)x=0$.

3. Які з тверджень є правильні:

а) $\frac{2}{3} \in \mathbf{Z}$; б) $2,75 \in \mathbf{R}$; в) $\pi \in \mathbf{N}$; г) $-5 \in \mathbf{Q}$;

ґ) $\mathbf{R} \subset \mathbf{Z}$; д) $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$; е) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$; є) $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{Q}$.

4. Обчисліть значення виразу, округливши до сотих:

а) $\frac{2}{3}+\pi$; б) $2,(53)-\frac{3}{5}$; в) $2,4\pi$; г) $\frac{1}{3}\cdot 3,(42)$.

5. Порівняйте числа:

а) 0,035 і 0,10035; б) $\frac{2}{3}$ і 0,5(6);

в) 0,(5) і $\frac{5}{9}$; г) $\frac{3}{7}$ і $\frac{7}{3}$.

6. Обчисліть наближене значення площі круга з радіусом:

а) ≈ 2,5 см; б) ≈ 1,2 см; в) ≈ 0,4 м; г) ≈ 1,1 дм.

IV рівень

1. Запишіть три числа, одне з яких ірраціональне, розміщені між числами 0,(7) і 0,8.

2. Знайдіть значення виразу $\dfrac{a^3 - ab^2 - b^2 + a^2}{a^2b - b^3}$, якщо $a = 0{,}7(6)$ і $b = 0{,}2(3)$.

3. Запишіть:

а) два дійсних числа, різниця яких є ірраціональним числом;

б) два ірраціональних числа, сума яких є натуральним числом.

4. Знайдіть наближені значення площі зафарбованої фігури та довжини лінії, якою вона обмежена (рис. 10):

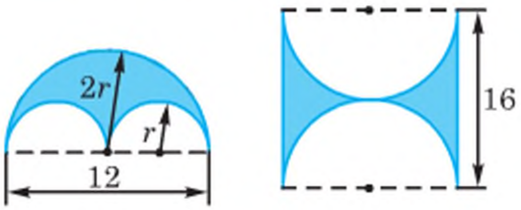


Рис. 10

§4. КВАДРАТНІ КОРЕНІ

4.1. Функція $y = x^2$

На практиці часто маємо справу з функцією, яку задано формулою $y = x^2$. У зазначеній залежності перебувають, наприклад, довжина (x) сторони квадрата і його площа (y).

Побудуємо графік цієї функції.

▼ Попередньо з'ясуємо деякі його особливості. Передусім зауважимо, що областю визначення даної функції є множина всіх дійсних чисел. Отже, x може бути будь-яким дійсним числом. Значення y при цьому не може бути від'ємним, бо $x^2 \geq 0$ для будь-якого x. Точки, що мають додатні або від'ємні абсциси і додатні ординати, розташовані у I і II координатних чвертях. Якщо $x = 0$, то $y = 0$. Отже, графік функції $y = x^2$ розміщений у I і II чвертях і проходить через початок координат.

Для з'ясування його форми побудуємо кілька точок цього графіка, склавши таблицю відповідних значень x і y (рис. 11).

x	3	2,5	2	1,5	1	0,5	0	–0,5	–1	–1,5	–2	–2,5	–3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

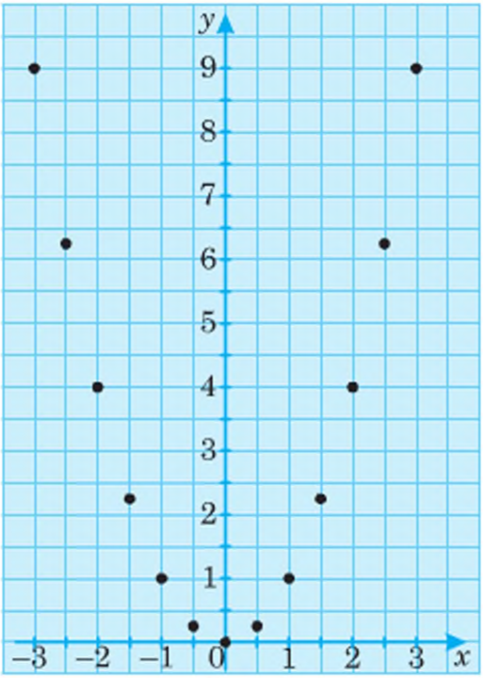


Рис. 11

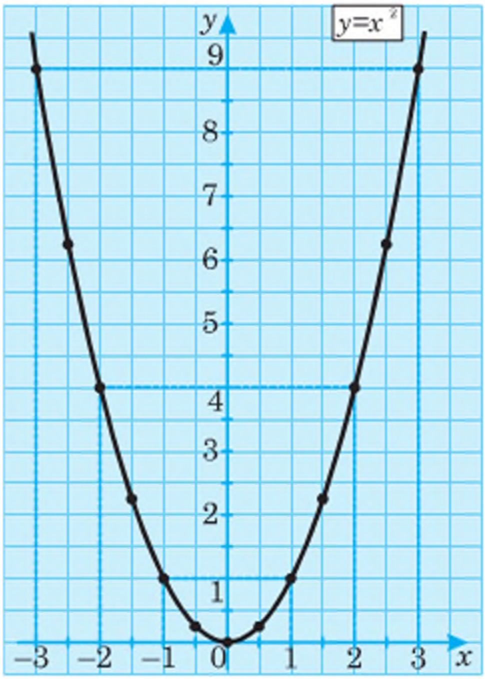


Рис. 12

Провівши через побудовані точки лінію, одержимо криву, яка є графіком функції $y = x^2$ (рис. 12). ▲

Її називають ***параболою***. Неважко помітити, що вона симетрична відносно осі 0y (відповідні точки графіка при протилежних значеннях абсцис мають рівні між собою ординати). Ці дві взаємно симетричні частини називають її ***гілками***, а точку, в якій вони сходяться (в даному випадку це початок координат), — ***вершиною параболи***.

? Запитання для самоперевірки

1. Що є областю значень функції $y = x^2$? Який висновок щодо розміщення графіка даної функції з цього випливає?
2. Як називається крива, що є графіком функції $y = x^2$? Яка її властивість?

Задачі та вправи

224°. Побудуйте графік функції $y = x^2$, областю визначення якої є множина дійсних чисел, що знаходяться між числами –3 і 2.

225. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ та $y = -x^2$. Який висновок можна зробити про взаємне розташування цих графіків?

226°. Побудуйте графік функції $y = x^2$. Користуючись ним, встановіть:

а) значення функції для таких значень аргументу: 2,5; –1,7; 1,5;

б) значення аргументу, при яких значення функції дорівнює: 16; 9; 4; 2; 1;

в*) значення аргументу, при яких значення функції менші від 2.

227. Користуючись графіком функції $y = x^2$, знайдіть числа, квадрат яких дорівнює:

а) 3; б) 5; в) 10; г) 8.

228°. Встановіть, чи проходить графік функції $y = x^2$ через точки: $A(0; 1)$; $B(-5; 25)$; $C(-1; 1)$; $D(1; 1)$; $E(2{,}6; 5{,}76)$; $F(1{,}3; 1{,}59)$.

229. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ та $y = 2x$. Користуючись рисунком, знайдіть, при яких значеннях x дані функції набувають однакових значень. Яке рівняння ви розв'язали?

230. Розв'яжіть графічно рівняння:

а) $x^2 = x$; б) $x^2 = -x$; в) $x^2 = x + 2$; г) $x^2 = -3x$.

231*. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

а) $y = x^2$, якщо $|x| \le 2$, $y = 2x + 8$, якщо $-4 < x \le -2$ і $y = 8 - 2x$, якщо $2 < x \le 4$;

б) $y = x^2$, якщо $|x| \le 2$ і $y = \dfrac{8}{|x|}$, якщо $-8 \le x < -2$ і $2 < x \le 8$.

4.2. Квадратний корінь. Арифметичний квадратний корінь

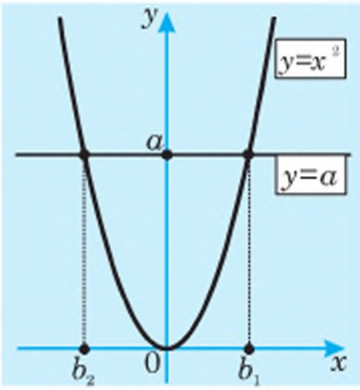


Рис. 13

① **Поняття квадратного кореня з числа.** За допомогою графіка функції $y = x^2$ можна знайти число, квадрат якого дорівнює a (розв'язати рівняння $x^2 = a$). Для цього слід позначити число a на осі ординат і через побудовану точку провести пряму, паралельну осі Ox. Абсциси точок перетину цієї прямої і графіка функції $y = x^2$ і є шуканими числами (рис. 13).

Кожне із знайдених чисел називають ***квадратним коренем*** з числа a.

Квадратним коренем із числа a **називають таке число *b*, квадрат якого дорівнює *a*.**

Тобто, *якщо $b^2 = a$, то b — квадратний корінь з a, або якщо b — квадратний корінь з a, то $b^2 = a$.*

$4^2 = 16$; 4 — квадратний корінь із 16;

$(-4)^2 = 16$; -4 — квадратний корінь із 16;

12 — квадратний корінь із числа 144, бо $12^2 = 144$;

-12 — квадратний корінь із 144, бо $(-12)^2 = 144$;

$\frac{2}{3}$ і $-\frac{2}{3}$ квадратні корені із $\frac{4}{9}$, бо $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ і $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$;

0 — квадратний корінь з 0, бо $0^2 = 0$.

З рис. 13 видно, що у випадку, коли a — додатне число, то пряма $y = a$ перетинає параболу $y = x^2$ у двох точках, симетричних відносно осі ординат, а, значить, їх абсциси є протилежними числами. Отже, якщо a — додатне число ($a > 0$), то існує два значення квадратного кореня з a, які є протилежними числами.

Якщо $a = 0$, то пряма $y = 0$ (тобто вісь Ox) має з параболою $y = x^2$ лише одну спільну точку — початок координат. У цьому випадку маємо одне значення квадратного кореня з a, яке дорівнює 0.

Якщо a — від'ємне число ($a < 0$), то пряма $y = a$ лежить під віссю Ox і не має з параболою жодної спільної точки. Тому квадратного кореня з від'ємного числа a не існує.

② Що таке арифметичний квадратний корінь?

Додатне значення квадратного кореня з числа a називають ***арифметичним квадратним коренем*** і позначають так: $\sqrt{a}$.

Знак $\sqrt{\ }$ називають ***знаком арифметичного квадратного кореня***.

Той самий знак використовують і для позначення квадратного кореня з 0, що має єдине значення, яке теж називають арифметичним квадратним коренем: $\sqrt{0} = 0$.

Оскільки додатні числа і 0 утворюють множину невід'ємних чисел, то сказане можна узагальнити так:

Арифметичним квадратним коренем **з невід'ємного числа *a* називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює *a*.**

Отже, запис $\sqrt{a} = b$ означає: $a \geq 0$, $b \geq 0$, $b^2 = a$. Тому записи типу $\sqrt{-4}$, $\sqrt{9} = -3$ не мають змісту.

Від'ємне значення квадратного кореня з додатного числа можна виразити через арифметичний корінь, поставивши перед ним знак мінус. Наприклад:

$$-4 = -\sqrt{16};\quad -12 = -\sqrt{144};\quad -\frac{2}{3} = -\sqrt{\frac{4}{9}}.$$

Зокрема, розв'язки рівняння $x^2 = a$, якщо $a > 0$, можна записати так: $x = \sqrt{a}$ і $x = -\sqrt{a}$.

Вираз $\sqrt{a}$ здебільшого читають: «квадратний корінь з a», не вживаючи слова «арифметичний», але обов'язково мають це на увазі.

Вираз $\sqrt{a}$ називають ще ***квадратним радикалом***.

Число (вираз), що стоїть під знаком кореня, називають **підкореневим числом** (***виразом***).

Знаходження квадратного кореня з числа називають ***добуванням квадратного кореня*** з числа. Добування квадратного кореня з числа є дією, оберненою до піднесення числа до квадрата.

З означення арифметичного квадратного кореня з невід'ємного числа a випливає тотожність:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a, \ a \ge 0. \qquad (1)$$

Ця тотожність дає можливість записувати будь–яке невід'ємне число або вираз, що набуває лише невід'ємних значень, у вигляді квадрата іншого числа або виразу. Наприклад:

$$5 = \left(\sqrt{5}\right)^2; \ 0,4 = \left(\sqrt{0,4}\right)^2; \ m = \left(\sqrt{m}\right)^2, \ m \ge 0.$$

③* **Одне з джерел ірраціональних чисел.** У результаті добування квадратного кореня з раціонального числа не завжди дістають раціональне число. Зокрема, $\sqrt{2}$ ***не є раціональним числом.***

▼ Для доведення цього твердження скористаємося методом міркувань від супротивного. Припустимо, що $\sqrt{2}$ — раціональне число. В такому разі його можна записати у вигляді *нескоротного* дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне. Тобто $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

За означенням квадратного кореня маємо: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ або $\frac{m^2}{n^2} = 2$, звідки $m^2 = 2n^2$. Оскільки $2n^2$ — число парне, то і m^2, а, отже, і m — парні числа. Запишемо m, як і будь-яке парне число, у вигляді $m = 2k$, де $k \in \mathbf{N}$ і підставимо його значення у рівність $m^2 = 2n^2$. Маємо: $(2k)^2 = 2n^2$, $4k^2 = 2n^2$ або $2k^2 = n^2$. З останньої рівності випливає, що n — парне число, а тому дріб $\frac{m}{n}$ *можна скоротити,* бо m і n — парні числа. Але ж наші міркування ґрунтувалися на тому, що $\frac{m}{n}$ — нескоротний дріб. Таким чином отримали протиріччя.

Тому робимо висновок: наше припущення про те, що $\sqrt{2}$ — раціональне число — неправильне. Отже, $\sqrt{2}$ — *ірраціональне число*. ▲

Ірраціональними числами є також арифметичні квадратні корені з інших натуральних чисел, які не є точними квадратами, наприклад, $\sqrt{5}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{30}$ і т.д.

④ **Обчислення квадратних коренів на калькуляторі.** Для добування квадратних коренів з додатних чисел використовуються спеціальні таблиці або калькулятор. Як правило, в результаті дістаємо наближені значення квадратних коренів.

Наприклад, щоб добути квадратний корінь з числа 2304, достатньо набрати на калькуляторі це число і натиснути на клавішу $\boxed{\sqrt{\ }}$ — в результаті дістанемо число 48, яке і дорівнює значенню $\sqrt{2304}$. Аналогічно можна знайти:

$$\sqrt{10} = 3{,}1622776..., \ \sqrt{153} = 12{,}369316..., \ \sqrt{70} = 8{,}3666002... \ .$$

Одержані числа відповідним чином округлюють.

Щоб знайти значення виразу $\sqrt{24 \cdot (35{,}8 + 124{,}4)}$, треба ввести до мікрокалькулятора число 35,8 натиснути на клавішу $\boxed{+}$; потім ввести число 124,4, натиснути на клавішу $\boxed{\times}$; відтак ввести число 24 і послідовно натиснути на клавіші $\boxed{=}$ та $\boxed{\sqrt{\ }}$. На екрані висвітиться число 62,006451, яке округлюють до відповідного десяткового знака.

Програму таких обчислень можна записати так:

$$35{,}8 \ \boxed{+} \ 124{,}4 \ \boxed{\times} \ 24 \ \boxed{=} \ \boxed{\sqrt{\ }}$$

? Запитання для самоперевірки

1. Дайте означення квадратного кореня з числа.
2. Що означає добути квадратний корінь з числа?
3. Чи завжди можна добути квадратний корінь з числа?

4. Скільки значень має квадратний корінь з додатного числа?
5. Виключно з якими числами пов'язане поняття арифметичного квадратного кореня? Сформулюйте означення цього поняття і запишіть його, послуговуючись математичними символами.
6. У чому слід переконатися, щоб стверджувати, що число b є арифметичним квадратним коренем з числа a?
7. У якій числовій множині завжди можна виконати операцію добування арифметичного квадратного кореня?

Задачі та вправи

232°. Заповніть таблицю:

Площа квадрата, см²	81	64	100	121	144	196	225
Сторона квадрата, см							

233°. Заповніть таблицю:

Число	4			49	36		100		900
Квадратний корінь з числа		–3	5			0,1		20	

234°. Покажіть, що:

а) 16 є арифметичним квадратним коренем з 256;

б) 1,3 є арифметичним квадратним коренем з 1,69;

в) –0,3 не є арифметичним квадратним коренем з 0,09;

г) 4 не є арифметичним квадратним коренем з 15.

235°. Заповніть таблицю:

x	0	0,25	–0,25	9	–9			$\frac{1}{4}$	
$\sqrt{x}$						4	–9		–0,25

Які клітинки не можна заповнити? Чому?

236°. Обчисліть:

а) $\sqrt{225}$; б) $-\sqrt{64}$; в) $\sqrt{400}$; г) $-\sqrt{400}$;

ґ) $\sqrt{0{,}16}$; д) $\sqrt{0{,}64}$; е) $-\sqrt{0{,}121}$; є) $-\sqrt{0{,}04}$.

237°. Перевірте, чи правильно добуті квадратні корені:

а) $\sqrt{1444}=38$; б) $\sqrt{0{,}01444}=0{,}12$; в) $\sqrt{0{,}0169}=0{,}013$;

г) $\sqrt{156{,}25}=12{,}5$; ґ) $\sqrt{9\frac{4}{25}}=3\frac{2}{5}$; д) $\sqrt{9{,}16}=3{,}4$;

е) $\sqrt{11{,}56}=3{,}4$; є) $\sqrt{16{,}9}=4{,}3$; ж) $\sqrt{20}=4{,}47$.

238°. Виразіть через арифметичний квадратний корінь квадратні корені з чисел:

а) 100; б) 25; в) 0,49; г) 10000;

ґ) 20; е) 7; є) 31.

239°. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2=0{,}81$; б) $x^2=529$; в) $x^2=4{,}41$;

г) $3x^2=48$; ґ) $11x^2=704$; д) $5x^2=125$;

е) $11x^2-275=0$; є) $3x^2+27=0$; ж) $x^2=10$;

з) $2x^2-16=0$; и) $3x^2-120=0$; і) $5x^2+4=0$;

Обчисліть (240 – 243):

240°. а) $2\sqrt{49}$; б) $3\sqrt{81}$; в) $4\sqrt{25}$; г) $5\sqrt{36}$.

241°. а) $\sqrt{64}+\sqrt{25}$; б) $\sqrt{81}-\sqrt{49}$; в) $\sqrt{36}-\sqrt{121}$.

242. а) $5\sqrt{36}-2{,}5\sqrt{64}$; б) $2\sqrt{2{,}25}-10\sqrt{0{,}64}$.

243°. а) $\sqrt{100}$; б) $-\sqrt{100}$; в) $\sqrt{-100}$; г) $\sqrt{(-10)^2}$.

244. Назвіть рівності, що не мають змісту:

а) $\sqrt{64}=8$; б) $\sqrt{36}=-6$; в) $\sqrt{0{,}25}=0{,}5$; г) $\sqrt{-4}=-2$;

ґ) $\sqrt{(-9)^2}=-9$; д) $\sqrt{(-9)^2}=9$; е) $\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$; є) $\sqrt{1}=-1$.

245°. Для яких із вказаних значень змінної мають зміст вирази:

а) $\sqrt{x-7}$, $x=7$; $x=8$; $x=-3$; $x=6$; $x=10$; $x=16$;

б) $\sqrt{3x+1}$, $x=-2$; $x=-\frac{1}{3}$; $x=4$; $x=-1$; $x=5$; $x=0$;

в) $\sqrt{x^2+2}$, $x=-7$; $x=0$; $x=5$; $x=-100$; $x=1$; $x=3{,}2$?

246. Чи існують значення x, для яких має зміст запис $\sqrt{-x}$? Відповідь проілюструйте кількома прикладами.

247. Знайдіть множину допустимих значень змінних у виразах:

а) $\sqrt{x^2}$; б) $\sqrt{-x^2}$; в) $\sqrt{x^2+1}$; г) $\sqrt{(x-3)^2}$.

248. Чи існують значення змінної х, при яких:

а) $\sqrt{x}=12$; б) $\sqrt{x-5}=0$; в) $\sqrt{x+1}=-3$?

249. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{2x+5}$, якщо $x=2$; $x=10$; $x=-2$; $x=-2{,}5$;

б) $\sqrt{2x-y}$, якщо $x=9$, $y=2$; $x=0$, $y=-4$.

Розв'яжіть рівняння (250–253):

250°. а) $\sqrt{x}=6$; б) $\sqrt{x}=9$;

в) $\sqrt{x}=11$; г) $\sqrt{x}=-4$.

251°. а) $\sqrt{x}-2=0$; б) $7-\sqrt{x}=0$; в) $\sqrt{x}-\sqrt{5}=0$.

252°. а) $6\sqrt{x}=12$; б) $-9\sqrt{x}=-27$; в) $2\sqrt{x}-10=0$; г) $\frac{1}{3}\sqrt{x}-1=0$.

253. а) $\sqrt{x+1}=3$; б) $\sqrt{2-x}=6$;

в) $\sqrt{2x-1}=\sqrt{7}$; г) $\sqrt{3-5x}=\sqrt{13}$;

ґ) $\sqrt{x^2-3}=1$; д) $\sqrt{2x^2+5}=\sqrt{55}$;

е) $\sqrt{1-x^2}=1$; є) $\sqrt{x^2+4}=1$.

254*. Поясніть, чому дані рівняння не мають розв'язків:

а) $\sqrt{x-4}=-2$; б) $\sqrt{x}+1=0$;

в) $\sqrt{x+5}=-\sqrt{2x-1}$; г) $\sqrt{x^2+9}=2$;

ґ) $\sqrt{x+4}+\sqrt{x}=1$; д) $\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+1}=0$.

255°. Користуючись тотожністю $\left(\sqrt{a}\right)^2=a,\ a\geq 0$, запишіть у вигляді квадрата:

а) 3; б) 8; в) 11;

г) a, $a\geq 0$; ґ) $3a$, $a\geq 0$; д) $a+3$, $a\geq 0$.

256. Скоротіть дроби:

а) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{\sqrt{6}}{6}$; в) $\frac{a}{5\sqrt{a}}$;

г) $\frac{7\sqrt{b}}{b}$; ґ) $\frac{\sqrt{a+2}}{a+2}$; д) $\frac{x-4}{\sqrt{x-4}}$.

257. Розкладіть на множники, винісши спільний множник за дужки:

а) $5+\sqrt{5}$; б) $2-\sqrt{2}$; в) $a+\sqrt{a}$; г) $\sqrt{b}-b$.

258. Скоротіть дріб:

а) $\frac{6+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{10}-10}{10}$; г) $\frac{c}{\sqrt{c}+c}$.

259. Розкладіть на множники вирази, попередньо записавши їх як різницю квадратів двох виразів:

а) m^2-1; б) b^2-3; в) $4m^2-7$;
г) $c-9$ $(c>0)$; ґ) $a-b$ $(a>0,\ b>0)$.

Скоротіть дроби (260–261):

260. а) $\frac{a^2-2}{a+\sqrt{2}}$; б) $\frac{c^2-6}{c-\sqrt{6}}$; в) $\frac{x-5}{\sqrt{x}+\sqrt{5}}$; г) $\frac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}$.

261*. а) $\frac{b^2-8}{b\sqrt{8}+8}$; б) $\frac{m\sqrt{n}-n}{m^2-n}$; в) $\frac{2\sqrt{a}+a}{a-4}$; г) $\frac{4a^2-1}{\sqrt{2a}+1}$.

262. Доведіть, що значення виразу є число раціональне:

а) $\left(\sqrt{7}+1\right)\left(\sqrt{7}-1\right)$; б) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$;

в) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{8}\right)$; г) $\left(-\sqrt{17}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{17}-\sqrt{7}\right)$.

263*. Доведіть, що $\sqrt{3}$ — ірраціональне число.

264. Запишіть кілька додатних значень змінної a, за яких значення виразу $\sqrt{a}$ є:

а) раціональним числом; б) ірраціональним числом.

265. Використовуючи знак арифметичного квадратного кореня, запишіть два ірраціональні числа, сума яких є числом раціональним.

266. Користуючись мікрокалькулятором, знайдіть наближені значення:

а) $\sqrt{30}$; $\sqrt{43}$; $\sqrt{107}$, округливши результат до сотих;

б) $\sqrt{50}$; $\sqrt{90}$; $\sqrt{352}$, округливши результат до десятих.

267*. Унаслідок збільшення сторони квадрата, його площа збільшилася на 69%. На скільки відсотків збільшено сторону квадрата?

4.3. Функція $y = \sqrt{x}$

Функція, задана формулою $y = \sqrt{x}$, областю визначення має множину невід'ємних дійсних чисел, бо з від'ємного числа квадратний корінь добути не можна. Областю значень цієї функції також є множина невід'ємних дійсних чисел, бо за означенням арифметичного квадратного кореня $\sqrt{x} \geq 0$. Крім того, якщо $x = 0$, то $y = 0$.

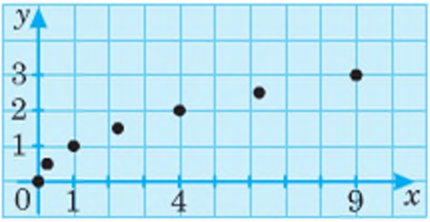
З викладеного можна зробити висновок, що графік функції $y = \sqrt{x}$ проходить через початок координат і розташований у I координатній чверті; його утворює безліч точок.

Знайдемо координати кількох з них, надавши змінній x довільних значень і обчисливши відповідні значення змінної y. Результати занесемо до таблиці:

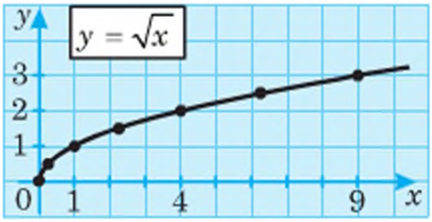
x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = \sqrt{x}$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Побудуємо на координатній площині точки за знайденими координатами (рис. 14, а). Вони дають уявлення про форму графіка функції $y = \sqrt{x}$. Провівши через них криву, одержимо графік даної функції (рис. 14, б).

За побудованим графіком можна знайти значення квадратного кореня з чисел (як правило, наближені). Щоб обчислити, на-



а)



б)

Рис. 14

приклад, $\sqrt{5}$, треба знайти ординату точки графіка з абсцисою 5 (рис. 15).

Бачимо, що $\sqrt{5} \approx 2{,}25$.

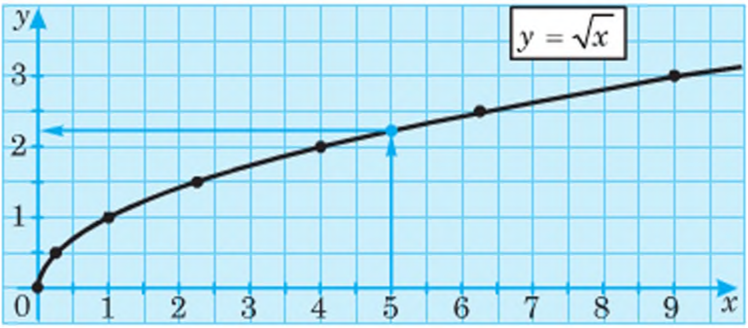


Рис. 15

? Запитання для самоперевірки

1. Яка область визначення функції $y = \sqrt{x}$? Обґрунтуйте відповідь.
2. Яка область значень функції $y = \sqrt{x}$? Обґрунтуйте відповідь.
3. Де розміщений графік функції $y = \sqrt{x}$?
4. Як побудувати графік функції $y = \sqrt{x}$?

Задачі та вправи

268°. Побудуйте графік функції $y=\sqrt{x}$. Користуючись графіком, обчисліть: $\sqrt{3}$; $\sqrt{4}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{7{,}5}$; $\sqrt{9}$.

269°. Не будуючи графіка функції $y=\sqrt{x}$, встановіть, чи належать йому точки: $A(16;4)$; $B(100;-10)$; $C(0{,}01;\ 0{,}1)$; $D(0{,}1;\ 001)$; $E(-9;\ 3)$?

270. Чи перетинає графік функції $y=\sqrt{x}$ пряма:

а) $y=4$; б) $y=36$; в) $y=\frac{1}{25}$; г) $y=-1$?

Якщо перетинає, то знайдіть координати відповідних точок.

271. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y=x^2$ та $y=\sqrt{x}$. Знайдіть значення x, при якому значення даних функцій рівні між собою. Яке рівняння ви розв'язали?

272*. Розв'яжіть графічним способом рівняння:

а) $\sqrt{x}=x-6$; б) $\sqrt{x}=x-2$; в) $\sqrt{x}=2x-1$.

273*. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

а) $y=x^2$, якщо $0\le x\le 2$, $y=\sqrt{x}$, якщо $0\le x\le 4$ і $y=\frac{8}{x}$, якщо $2<x<4$;

б) $y=x^2$, якщо $0\le x\le 3$, $y=\sqrt{x}$, якщо $0<x\le 9$ і $y=12-x$, якщо $3<x<9$.

Розв'яжіть графічним способом рівняння (274–275):

274. а) $\sqrt{x}=6-x$; б) $\sqrt{x}=\frac{8}{x}$; в) $\sqrt{x}=12-x$.

275*. а) $\sqrt{x}=x-2$; б) $x+\sqrt{x}-2=0$.

Знайдіть область визначення функції (276–278):

276°. а) $y=\sqrt{x-2}$; б) $y=\frac{10}{x}$; в) $y=\sqrt{3-x}$.

277. а) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$; б) $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}$.

278*. а) $y=\sqrt{x-2}+\frac{3}{x-4}$; б) $y=\frac{1}{x}+\sqrt{x+2}$.

4.4. Арифметичний квадратний корінь з добутку і дробу

① **Як добути арифметичний квадратний корінь з добутку?** Обчислимо значення виразу $\sqrt{25 \cdot 64}$. Для цього знайдемо спочатку добуток під коренем, а потім з одержаного числа добудемо квадратний корінь:

$$\sqrt{25 \cdot 64} = \sqrt{1600} = 40.$$

А тепер вчинимо інакше і добудемо корінь окремо з кожного множника підкореневого виразу:

$$\sqrt{25} = 5, \quad \sqrt{64} = 8.$$

Помноживши 5 на 8, дістанемо 40:

Отже, $\sqrt{25 \cdot 64} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{64} = 5 \cdot 8 = 40.$

Доведемо, що аналогічна рівність справджується для будь-яких двох невід'ємних множників. Тобто

$$\boldsymbol{\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},} \quad a \geq 0,\ b \geq 0.$$

▼ Для доведення скористаємося означенням арифметичного квадратного кореня, тобто покажемо, що $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = ab$, пам'ятаючи, що всі вирази: $\sqrt{ab}$, $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ — невід'ємні. Перетворимо вираз $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2$ за правилом піднесення добутку до степеня: $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2$. Оскільки $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ і $\left(\sqrt{b}\right)^2 = b$, то $\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$, що і треба було довести. ▲

Отже,

$$\boxed{\boldsymbol{\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},\ a \geq 0,\ b \geq 0.}} \qquad (2)$$

Тобто,

арифметичний квадратний корінь з добутку двох невід'ємних чисел дорівнює добутку арифметичних квадратних коренів з цих чисел.

Цей висновок поширюється на будь-яку кількість множників, якими можуть бути невід'ємні числа або алгебраїчні вирази, що набувають лише невід'ємних значень за всіх допустимих значеннях змінних, що входять до них.

Скориставшись тотожністю (2), обчислимо значення виразу $\sqrt{50 \cdot 72}$. Втім, безпосереднє її застосування не спрощує обчислень, бо $\sqrt{50}$ і $\sqrt{72}$ — ірраціональні числа. Тому запишемо спочатку 50 і 72 у вигляді добутку двох чисел, одне з яких є квадратом натурального числа: $50 = 25 \cdot 2$; $72 = 36 \cdot 2$. А тепер перетворимо даний вираз так:

$$\sqrt{50 \cdot 72} = \sqrt{25 \cdot 2 \cdot 36 \cdot 2} = \sqrt{25 \cdot 36 \cdot 4} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{4} = 5 \cdot 6 \cdot 2 = 60.$$

② **Добуток арифметичних квадратних коренів.** Якщо у тотожності (2) поміняти місцями ліву і праву частини, то дістанемо:

$$\boxed{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab},\ a \geq 0,\ b \geq 0.} \qquad (2')$$

Ця тотожність виражає правило множення арифметичних квадратних коренів. Сформулюйте його самостійно.

Наприклад:

1) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{150} = \sqrt{6 \cdot 150} = \sqrt{900} = 30;$

2) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{128} = \sqrt{72 \cdot 128} = \sqrt{(36 \cdot 2) \cdot (64 \cdot 2)} = \sqrt{36 \cdot 64 \cdot 4} = 6 \cdot 8 \cdot 2 = 96.$

Обидва приклади ілюструють той факт, що добуток двох ірраціональних чисел може бути раціональним числом.

③ **Як добути арифметичний квадратний корінь з дробу?** Обчислимо значення виразу $\sqrt{\frac{144}{9}}$ двома способами:

1) $\sqrt{\frac{144}{9}} = \sqrt{144 : 9} = \sqrt{16} = 4;$

2) $\sqrt{\frac{144}{9}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{9}} = \frac{12}{3} = 4.$

Як бачимо, результати однакові.

Доведемо тотожність:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ a \geq 0,\ b > 0.$$

▼ **Для цього досить показати, що $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{a}{b}$.** Перетворимо вираз $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2$, скориставшись правилом піднесення дробу до степеня: $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2}$. Враховуючи, що $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ і $\left(\sqrt{b}\right)^2 = b$ (за тотожністю (1)), остаточно маємо: $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}$. Тотожність доведено. ▲

Отже,

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ a \ge 0,\ b > 0.} \qquad (3)$$

Тобто,

арифметичний квадратний корінь з дробу, чисельник якого — невід'ємний, а знаменник — додатний, дорівнює частці арифметичних квадратних коренів з чисельника і знаменника.

Приклади:

1) $\sqrt{\frac{49}{0{,}25}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{0{,}25}} = \frac{7}{0{,}5} = 14;$

2) $\sqrt{\frac{150}{24}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 6}{4 \cdot 6}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2} = 2{,}5;$

④ **Частка арифметичних квадратних коренів.** Якщо в тотожності (3) поміняти місцями ліву і праву частини, то одержимо:

$$\boxed{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}},\ a \ge 0,\ b > 0.} \qquad (3')$$

На основі цієї тотожності можна знайти частку коренів.

Наприклад: $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{52}{13}} = \sqrt{4} = 2.$

Запитання для самоперевірки

1. Як добути арифметичний квадратний корінь з добутку кількох невід'ємних множників? Відповіді проілюструйте прикладами.
2. Які математичні твердження використовують для доведення теореми про корінь з добутку кількох невід'ємних множників?
3. Як знайти добуток арифметичних квадратних коренів з невід'ємних множників? На чому ґрунтується це правило?
4. Як добути арифметичний квадратний корінь з дробу, чисельник якого — невід'ємний, а знаменник — додатний?
5. Як знайти частку арифметичних квадратних коренів?

Задачі та вправи

Обчисліть значення виразів (279–290):

279°. а) $\sqrt{64 \cdot 49}$; б) $\sqrt{36 \cdot 81}$; в) $\sqrt{25 \cdot 16}$;
г) $\sqrt{0{,}64 \cdot 0{,}49}$; ґ) $\sqrt{0{,}81 \cdot 100}$; д) $\sqrt{0{,}25 \cdot 64}$.

280°. а) $\sqrt{225 \cdot 289}$; б) $\sqrt{576 \cdot 441}$; в) $\sqrt{676 \cdot 256}$;
г) $\sqrt{2{,}25 \cdot 2{,}89}$; ґ) $\sqrt{0{,}0576 \cdot 4{,}41}$; д) $\sqrt{0{,}0169 \cdot 10000}$.

281°. а) $\sqrt{\frac{49}{16}}$; б) $\sqrt{\frac{81}{25}}$; в) $\sqrt{\frac{100}{49}}$; г) $\sqrt{\frac{81}{121}}$.

282°. а) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$; б) $\sqrt{12\frac{1}{4}}$; в) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$;
г) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; ґ) $\sqrt{3\frac{13}{36}}$; д) $\sqrt{5\frac{19}{25}}$.

283°. а) $\sqrt{\frac{16}{25} \cdot 100}$; б) $\sqrt{6\frac{1}{4} \cdot \frac{144}{169}}$; в) $\sqrt{3\frac{1}{16} \cdot 2\frac{14}{25}}$; г) $\sqrt{2\frac{7}{81} \cdot 2\frac{1}{4}}$.

284°. а) $\sqrt{81\cdot100\cdot4}$; б) $\sqrt{25\cdot16\cdot9}$;

в) $\sqrt{0{,}64\cdot0{,}36\cdot4}$; г) $\sqrt{0{,}01\cdot0{,}25\cdot16}$.

285°. а) $\sqrt{\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{81}\cdot\frac{121}{225}}$; б) $\sqrt{\frac{4}{9}\cdot\frac{100}{144}\cdot\frac{25}{36}}$.

286. а) $\sqrt{50\cdot8}$; б) $\sqrt{12\cdot3}$; в) $\sqrt{48\cdot3}$;

г) $\sqrt{24\cdot6}$; ґ) $\sqrt{60\cdot15}$; д) $\sqrt{76\cdot19}$.

287. а) $\sqrt{6{,}4\cdot10}$; б) $\sqrt{30\cdot2{,}7}$; в) $\sqrt{0{,}7\cdot70}$;

г) $\sqrt{12{,}8\cdot5}$; ґ) $\sqrt{15\cdot5{,}4}$; д) $\sqrt{35\cdot1{,}4}$.

288. а) $\sqrt{0{,}01\cdot484\cdot0{,}0529}$; б) $\sqrt{0{,}0001\cdot0{,}0961\cdot729}$;

в) $\sqrt{1\frac{24}{25}\cdot5\frac{1}{16}\cdot256}$; г) $\sqrt{22\cdot48\cdot11\cdot54}$.

289. а) $\sqrt{21{,}8^2-18{,}2^2}$; б) $\sqrt{2{,}18^2-1{,}82^2}$;

в) $\sqrt{45{,}8^2-44{,}2^2}$; г) $\sqrt{8{,}2^2-1{,}8^2}$;

ґ) $\sqrt{12^2+5^2}$; д)* $\sqrt{0{,}53^2-0{,}25\cdot0{,}81}$.

290. а) $\sqrt{24\cdot27\cdot2}$; б) $\sqrt{18\cdot14\cdot7}$; в) $\sqrt{40\cdot15\cdot6}$;

г) $\sqrt{250\cdot8{,}1\cdot9}$; ґ) $\sqrt{4{,}9\cdot160\cdot25}$; д) $\sqrt{64\cdot16{,}9\cdot0{,}4}$.

291*. Обчислюючи значення виразу $\sqrt{(-4)\cdot(-16)}$, один учень записав: $\sqrt{(-4)\cdot(-16)}=\sqrt{64}=8$. Другий учень виконував обчислення так: $\sqrt{(-4)\cdot(-16)}=\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-16}$ і дійшов висновку, що значення виразу обчислити не можна. Хто з них помилився? У чому суть помилки?

Обчисліть добутки (292–294):

292°. а) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}$; б) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$;

в) $\sqrt{0{,}32}\cdot\sqrt{2}$; г) $\sqrt{0{,}03}\cdot\sqrt{0{,}27}$.

293. а) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{75}$; б) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{50}$;

в) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{24}$; г) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{21}$.

294°. а) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{6}{25}}$; б) $\sqrt{\frac{16}{35}} \cdot \sqrt{\frac{5}{7}}$; в) $\sqrt{1\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{1\frac{3}{13}}$;

г) $\sqrt{1\frac{1}{16}} \cdot \sqrt{1\frac{8}{17}}$; ґ) $\sqrt{3\frac{1}{16}} \cdot \sqrt{2\frac{14}{25}}$; д) $\sqrt{\frac{121}{144}} \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}}$.

295°. Знайдіть частку:

а) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{27}}$; б) $\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{150}}$; в) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{117}}$;

г) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{1053}}$; ґ) $\frac{\sqrt{6{,}8}}{\sqrt{1{,}7}}$; д) $\frac{\sqrt{1{,}4}}{\sqrt{560}}$.

296. Обчисліть з допомогою мікрокалькулятора наближені значення виразів (округливши до сотих):

а) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{12}$; б) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{3}$; в) $\sqrt{13{,}5} \cdot \sqrt{4{,}2}$;

г) $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{24}}$; ґ) $\frac{\sqrt{39} \cdot \sqrt{4{,}8}}{\sqrt{19}}$; д) $\frac{\sqrt{75{,}4}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{3{,}1}}$.

297*. Заповніть порожні клітинки квадратів (рис. 16) числами так, щоб добуток усіх чисел кожної вертикалі, горизонталі та діагоналі дорівнював одному і тому самому числу. Знайдені числа розмістіть у порядку зростання їхнього значення. Визначте закономірність їх розміщення.

а)

		$2\sqrt{2}$
	2	0,5
$\sqrt{2}$		

б)

$\sqrt{3}/3$	9	$3\sqrt{3}$
$\sqrt{3}$		

Рис. 16

298. Площа одного квадрата дорівнює 25 см², а другого — 16 см². У скільки разів сторона першого квадрата довша за сторону другого?

299*. Площа одного квадрата дорівнює 225 м², а другого — 144 м². На скільки відсотків сторона першого квадрата більша за сторону другого?

300*. Площа квадрата дорівнює 25 м². Якою має бути сторона квадрата, щоб його площа була на 96% більшою?

4.5. Тотожність $\sqrt{a^2} = |a|$

Пригадайте

1. Чому дорівнює модуль невід'ємного числа?
2. Чому дорівнює модуль від'ємного числа?
3. Як піднести степінь до степеня?
4. Як записати кожен із виразів: a^{10}; b^4; c^6 у вигляді квадрата іншого виразу?

① **Як спростити вираз $\sqrt{a^2}$?** Спробуємо спростити вираз $\sqrt{a^2}$. Він має зміст і для $a \geq 0$, і для $a < 0$, бо $a^2 \geq 0$ за всіх дійсних значень a.

За означенням арифметичного квадратного кореня $\sqrt{a^2}$ — невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a^2. Як відомо, існує два числа, квадрат яких дорівнює a^2: це a і $-a$. З них потрібно вибрати невід'ємне значення. Очевидно, якщо $a \geq 0$, то цим числом є a; якщо ж $a < 0$, то це $-a$, бо тоді $-a > 0$.

Отже,

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Скориставшись поняттям модуля числа, рівність (4) можна записати й інакше:

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Наприклад:

1) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$;

2) $\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} = \left|2-\sqrt{5}\right|$.

Оскільки $2 < \sqrt{5}$, бо $2^2 = 4$, то різниця $2 - \sqrt{5} < 0$. Тому $\left|2 - \sqrt{5}\right| =$

$= -\left(2 - \sqrt{5}\right) = \sqrt{5} - 2$.

Отже, $\sqrt{\left(2 - \sqrt{5}\right)^2} = \left|2 - \sqrt{5}\right| = -\left(2 - \sqrt{5}\right) = \sqrt{5} - 2$;

3) $\sqrt{m^2} = |m|$. Подальші перетворення цього виразу можливі, якщо попередньо вказаний знак m.

② **Як добути арифметичний квадратний корінь зі степеня з парним показником?** На основі тотожності (4) добувають арифметичний квадратний корінь зі степеня з парним показником.

Для цього підкорений вираз спочатку записують у вигляді квадрата іншого підкореневого виразу.

Приклади.

1) $\sqrt{a^8} = \sqrt{\left(a^4\right)^2} = \left|a^4\right| = a^4$, бо $a^4 \geq 0$ за будь-якого a;

2) $\sqrt{b^6} = \sqrt{\left(b^3\right)^2} = \left|b^3\right|$;

3) $\sqrt{\left(\sqrt{10} - 3\right)^{10}} = \sqrt{\left(\left(\sqrt{10} - 3\right)^5\right)^2} = \left|\left(\sqrt{10} - 3\right)^5\right| = \left(\sqrt{10} - 3\right)^5$,

бо $\sqrt{10} > 3$, тому $\sqrt{10} - 3 > 0$.

4) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x - 3| = \begin{cases} x - 3, & x \geq 3, \\ -(x-3), & x < 3 \end{cases} = \begin{cases} x - 3, & x \geq 3, \\ 3 - x, & x < 3. \end{cases}$

? Запитання для самоперевірки

1. Арифметичний квадратний корінь з квадрата числа (виразу) дорівнює цьому числу (виразу). За якої умови це твердження правильне?
2. Арифметичний квадратний корінь з квадрата числа (виразу) дорівнює протилежному числу (виразу). За якої умови це твердження правильне?
3. Щоб добути арифметичний квадратний корінь із степеня з парним показником, треба показник степеня поділити

на 2, а основу залишити без змін. Чи правильне таке твердження? Проілюструйте прикладами.

Задачі та вправи

Обчисліть (301–302):

301°. а) $\sqrt{5^2}$; б) $\sqrt{2{,}1^2}$; в) $\sqrt{(-7)^2}$;

г) $\sqrt{(-0{,}4)^2}$; ґ) $\sqrt{(-25)^2}$; д) $\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$.

302°. а) $2\sqrt{6^2}$; б) $3\sqrt{(-4)^2}$; в) $1{,}5\sqrt{10^2}$; г) $8\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}$;

ґ) $-5\sqrt{(3{,}4)^2}$; д) $-\frac{1}{9}\sqrt{27^2}$; е) $-4\sqrt{(-7)^2}$; є) $-0{,}7\sqrt{(-9)^2}$.

Запишіть без знака кореня (303–304):

303. а)° $\sqrt{(5-3)^2}$; б)° $\sqrt{(6-10)^2}$; в) $\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}$;

г) $\sqrt{\left(3-\sqrt{10}\right)^2}$; ґ) $\sqrt{\left(\sqrt{13}-\sqrt{7}\right)^2}$; д) $\sqrt{\left(2-\sqrt{6}\right)^2}$;

е) $\sqrt{\left(6+\sqrt{2}\right)^2}$; є) $\sqrt{\left(\sqrt{30}-5\right)^2}$.

304. а) $\sqrt{x^2}$, якщо $x \geq 0$; б) $\sqrt{x^2}$, якщо $x < 0$;

в) $-\sqrt{x^2}$, якщо $x > 0$; г) $-\sqrt{x^2}$, якщо $x < 0$;

ґ) $\sqrt{4c^2}$, якщо $c < 0$; д) $\sqrt{36d^2}$, якщо $d > 0$;

е) $-\sqrt{81y^2}$, якщо $y \geq 0$; є) $-\sqrt{125m^2}$, якщо $m < 0$.

305*. Спростіть вираз:

а) $\sqrt{(x-1)^2}-x$, якщо $x > 1$; б) $\sqrt{(5-x)^2}-x$, якщо $x < 5$.

306*. Чи існує таке значення x, за якого вираз:

а) $\sqrt{(x-5)^2}-x$ дорівнює 25;

б) $x-\sqrt{(x-1)^2}$ дорівнює -17;

в) $\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-2)^2}$ дорівнює 10?

307*. Обчислюючи значення виразу $a+\sqrt{1-2a+a^2}$ за $a = 5$, учні дістали різні відповіді. Одні з них розв'язували так:

$a+\sqrt{1-2a+a^2}=a+\sqrt{(1-a)^2}=a+1-a=1.$

Інші підставляли у даний вираз замість a його значення:

$a+\sqrt{1-2a+a^2}=5+\sqrt{1-10+25}=5+\sqrt{16}=5+4=9.$

Яка з відповідей правильна? Виправте помилку, якої припустилися учні.

308. Спростіть вирази і знайдіть їх значення:

а) $\sqrt{(2x-6)^2}-3x+6$, якщо $x = 3{,}5$;

б) $\sqrt{(x-3)^2}+\sqrt{(2-x)^2}$, якщо $x = 2{,}5$;

в) $\sqrt{(x+4)^2}-\sqrt{(x+10)^2}$, якщо $x = -7{,}8$;

г) $\sqrt{(3x+2)^2}-\sqrt{(3x-2)^2}$, якщо $x=-\dfrac{5}{3}$.

309°. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{x^2}=4$; б) $\sqrt{(3x)^2}=1$; в) $\sqrt{25x^2}=10$;

г) $\sqrt{(x-1)^2}=1$; ґ) $\sqrt{(6-x)^2}=2$; д) $\sqrt{(x+2)^2}=5$.

310°. Обчисліть:

а) $\sqrt{3^6}$; б) $\sqrt{2^8}$; в) $\sqrt{(-2)^4}$; г) $\sqrt{(-3)^8}$;

ґ) $\sqrt{(-5)^6}$; д) $\sqrt{(-2)^{10}}$; е) $\sqrt{(-6)^4}$; є) $\sqrt{(-7)^6}$.

311. Запишіть без знака кореня:

а) $\sqrt{c^4}$; б) $\sqrt{c^6}$, $c \geq 0$; в) $\sqrt{16d^8}$;

г) $\sqrt{25d^{10}}$, $d<0$; ґ) $\sqrt{49x^{16}}$; д) $\sqrt{4y^{14}}$, $y \geq 0$;

е) $\sqrt{36m^{18}}$, $m<0$; є) $\sqrt{a^6b^{10}}$, $a>0$, $b<0$;

ж) $\sqrt{4m^4n^8}$; з) $\sqrt{b^2c^4}$, $b<0$.

Чому у випадках б), г), д), е), є), з) знаки змінних вказано, а в інших — ні?

312. Зазначте, умови, за яких дані рівності є тотожностями:

а) $\sqrt{x^6}=x^3$; б) $\sqrt{a^8}=a^4$; в) $\sqrt{(-a)^2}=-a$; г) $\sqrt{a^2}=a$;

ґ) $\sqrt{(-m)^4} = (-m)^2$; д) $\sqrt{(x^2+1)^2} = x^2+1$.

313*. Знайдіть помилку в доведенні софізму[1] $2 \cdot 2 = 5$.

Доведення

Візьмемо рівність $16 - 36 = 25 - 45$. Додамо до обох частин цієї рівності $20\frac{1}{4}$:

$$16-36+20\frac{1}{4}=25-45+20\frac{1}{4} \text{ або } 16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4};$$

$$4^2-36+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-45+\left(\frac{9}{2}\right)^2.$$

Подамо 36 як $2\cdot4\cdot\frac{9}{2}$, а 45 як $2\cdot5\cdot\frac{9}{2}$. Тоді:

$$4^2-2\cdot4\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5^2-2\cdot5\cdot\frac{9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2 \text{ або } \left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2.$$

Добувши квадратний корінь з обох частин одержаної рівності, дістанемо: $\sqrt{\left(4-\frac{9}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(5-\frac{9}{2}\right)^2}$; $4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$; звідки $4 = 5$, тобто $2 \cdot 2 = 5$ (!?).

4.6. Перетворення виразів з квадратними коренями

① **Перетворення суми квадратних радикалів.** Вирази, що містять корені, нерідко доводиться перетворювати для спрощення вигляду, зручності обчислень тощо. В основі таких перетворень лежать властивості арифметичних квадратних коренів, деякі з них здійснюються за правилами, аналогічними до тих, що застосовуються у процесі перетворень цілих виразів; окремі перетворення характерні лише для радикалів і мають відповідні назви.

[1] *Софізм* — навмисне хибно зроблений висновок, який має видиму істинність (правильність).

Зокрема, суму $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ спростити не можна. А вираз $\sqrt{3}+\sqrt{3}$ можна перетворити за правилом, аналогічним до правила зведення подібних членів многочлена: $\sqrt{3}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ (порівняйте: $a+a=$ $=2a$).

Так само спрощують, наприклад, вираз

$$2\sqrt{3}-4\sqrt{2}+9\sqrt{2}+7\sqrt{3}=9\sqrt{3}+5\sqrt{2}.$$

Добуток арифметичних квадратних коренів, як відомо, знаходять, помноживши підкореневі вирази. Добуток виразів $5\sqrt{6}$ і $3\sqrt{5}$ спрощують так:

$$5\sqrt{6}\cdot 3\sqrt{5}=5\cdot 3\cdot\sqrt{6\cdot 5}=15\sqrt{30}.$$

Увага! Перетворюючи корені, не припускайтеся помилок виду $\sqrt{3}+\sqrt{7}=\sqrt{10}$. Пам'ятайте, що на відміну від правильної рівності для добутку $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$, аналогічна рівність для суми $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ не має місця.

Розглянемо ще деякі інші перетворення виразів з коренями.

② **Винесення множника з-під знака кореня.** Вочевидь, ні в кого не викликає сумніву, що число $5\sqrt{3}$ менше, ніж $8\sqrt{3}$. А тепер спробуйте порівняти числа $\sqrt{80}$ і $4\sqrt{5}$. Відразу це зробити непросто, адже підкореневі вирази у цьому випадку є різними. Втім, цю перешкоду можна подолати. Для цього перетворимо $\sqrt{80}$ так: $\sqrt{80}=\sqrt{16\cdot 5}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{5}=4\sqrt{5}$. Тепер очевидно, що числа, дані в умові, є рівними.

Порівнюючи дані числа, ми замінили $\sqrt{80}$ числом $4\sqrt{5}$, що дорівнює йому, за допомогою перетворення, яке називають ***винесення множника з-під знака кореня***.

Щоб винести множник з-під знака арифметичного квадратного кореня, треба записати підкореневий вираз у вигляді двох множників, один з яких є квадратом певного числа або виразу, потім добути з нього арифметичний квадратний корінь і одержаний результат записати у вигляді множника перед знаком *радикала, залишивши без змін другий множник під знаком кореня.*

Відповідно до правила винесення множника з-під знака кореня, маємо:

$$\boxed{\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b},\ b \geq 0.} \qquad (5)$$

Приклади.

Винесемо множник з-під знака кореня.

1) $\sqrt{32} = \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$;

2) $\sqrt{4a^3} = \sqrt{4a^2 \cdot a} = 2a\sqrt{a}$;

3) $\sqrt{12a^2},\ a < 0$;

$\sqrt{12a^2} = \sqrt{4a^2 \cdot 3} = 2|a|\sqrt{3} = -2a\sqrt{3}$.

Зауваження. Як ви гадаєте: чому в третьому прикладі знак a вказано, а в другому — ні? Річ у тім, що в другому прикладі знак a однозначно визначається множиною допустимих значень змінної a у виразі $\sqrt{4a^3}$. Оскільки $4a^3 \geq 0$, то і $a \geq 0$. У третьому прикладі $a^2 \geq 0$ за будь-якого a, тому необхідні додаткові уточнення.

③ **Внесення множника під знак кореня.** Якщо перетворення $\sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$ записати у зворотному порядку, тобто $4\sqrt{5} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{16 \cdot 5} = \sqrt{80}$, то дістанемо нове перетворення, яке називається ***внесення множника під знак кореня***. У даному випадку під знак кореня внесено множник 4. Як бачимо, для цього його подали у вигляді арифметичного квадратного кореня з 16, а потім виконали множення отриманих коренів за відомим правилом.

Розглянемо ще кілька прикладів виконання такого перетворення:

1) $6\sqrt{3} = \sqrt{6^2 \cdot 3} = \sqrt{36 \cdot 3} = \sqrt{108}$;

2) $-2\sqrt{5}$. Оскільки $2 = \sqrt{2^2}$, то $-2 = -\sqrt{2^2}$. Маємо:

$-2\sqrt{5} = -\sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{4 \cdot 5} = -\sqrt{20}$;

3) $-9\sqrt{7} = -\sqrt{9^2} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{81 \cdot 7} = -\sqrt{567}$.

4) $a\sqrt{6}$, a < 0. Запишемо a за допомогою арифметичного квадратного кореня. Скористаємося тотожністю (4) для $a < 0$: $\sqrt{a^2} = -a$. Відтак, $a = -\sqrt{a^2}$.

Отже, $a\sqrt{6} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{6} = -\sqrt{6a^2}$.

Увага! Записуючи від'ємне число за допомогою арифметичного квадратного кореня, не забувайте ставити знак «мінус» перед знаком кореня.

Правило внесення множника під знак кореня можна записати так:

$$a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b}, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -\sqrt{a^2 b}, & \text{якщо } a < 0. \end{cases} \quad (6)$$

Розглянуте перетворення використовують, зокрема, для порівняння чисел.

Порівняємо, наприклад, числа $3\sqrt{13}$ і $5\sqrt{6}$. Внесемо у кожному з них множник під знак кореня. Маємо: $3\sqrt{13} = \sqrt{9 \cdot 13} = \sqrt{117}$; $5\sqrt{6} = \sqrt{25 \cdot 6} = \sqrt{150}$. Очевидно, що друге число більше від першого.

④ **Звільнення від ірраціональності в знаменнику.** Порівняємо числа $3\sqrt{5}$ і $\frac{14}{\sqrt{5}}$. Це неважко було б зробити, якби вдалося записати друге число у вигляді $m\sqrt{5}$, де m — дійсне число. Спробуємо виконати таке перетворення.

Замінимо дріб $\frac{14}{\sqrt{5}}$ дробом, який дорівнює йому і не містить кореня в знаменнику. Для цього помножимо чисельник і знаменник даного дробу на $\sqrt{5}$. Маємо: $\frac{14}{\sqrt{5}} = \frac{14 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{14\sqrt{5}}{5}$.

Поділивши 14 на 5, дістанемо: $\frac{14\sqrt{5}}{5} = 2{,}8\sqrt{5}$.

Тепер очевидно, що $3\sqrt{5}$ більше від $2{,}8\sqrt{5}$.

Перетворення дробу $\frac{14}{\sqrt{5}}$ у дріб $\frac{14\sqrt{5}}{5}$, знаменник якого не містить кореня, має назву ***звільнення від ірраціональності*** (від кореня) ***в знаменнику дробу***.

Розглянемо приклади такого перетворення.

1) $\frac{5}{\sqrt{10}}$. Щоб позбутися кореня у знаменнику, очевидно, слід помножити його на $\sqrt{10}$. На це ж число множимо і чисельник даного дробу:

$$\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{5\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{2}.$$

2) $\frac{3}{\sqrt{12}}=\frac{3\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{12}}=\frac{3\sqrt{4\cdot 3}}{12}=\frac{6\sqrt{3}}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Щоб позбутися ірраціональності у знаменнику дробу $\frac{3}{\sqrt{12}}$, ми помножили його чисельник і знаменник на $\sqrt{12}$. Але є й менший множник, яким можна скористатися для виконання цього перетворення. Оскільки $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}$, то підкореневий вираз у знаменнику дробу $\frac{3}{\sqrt{12}}$ достатньо помножити на 3, щоб добути з нього квадратний корінь. Отже, $\sqrt{12}$ слід помножити на $\sqrt{3}$. На це ж число множимо і чисельник. Маємо:

$$\frac{3}{\sqrt{12}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{36}}=\frac{3\sqrt{3}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) Спробуємо позбутися ірраціональності у знаменнику дробу $\frac{7}{3-\sqrt{2}}$.

Якщо помножити знаменник на вираз $3-\sqrt{2}$, то дістанемо $\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)=\left(3-\sqrt{2}\right)^2=9-6\sqrt{2}+2$, тобто корінь у знаменнику залишиться. Якщо ж $3-\sqrt{2}$ помножити на $3+\sqrt{2}$, то дістанемо:

$$\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)=3^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=9-2=7.$$

Отже, $\frac{7}{3-\sqrt{2}} = \frac{7\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)}{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)} = \frac{7\left(3+\sqrt{2}\right)}{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)} = 3+\sqrt{2}.$

4) Щоб позбутися ірраціональності у знаменнику дробу $\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$, очевидно, слід помножити чисельник і знаменник на $\sqrt{7}-\sqrt{2}$:

$$\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \frac{5\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)} = \frac{5\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)}{7-2} = \sqrt{7}-\sqrt{2}.$$

Якщо треба звільнитися від дробу під коренем, то знаменник і чисельник множать на таке число, щоб із нового знаменника можна було добути корінь.

Наприклад:

1) $\sqrt{\frac{6}{7}} = \sqrt{\frac{6\cdot 7}{7^2}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$;   2) $\sqrt{\frac{5}{a^3}} = \sqrt{\frac{5a}{a^4}} = \frac{\sqrt{5a}}{a^2}$.

? Запитання для самоперевірки

1. Які з виразів можна спростити:
   а) $\sqrt{5}+\sqrt{3}$;   б) $2\sqrt{5}-\sqrt{5}$;   в) $2\sqrt{5}-\sqrt{3}$;   г) $3\sqrt{6}+2\sqrt{6}$?
2. У якій послідовності виконують винесення множника з-під знака кореня?
3. Як внести множник під знак кореня? Проілюструйте прикладами.
4. У чому полягає суть звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу? Як виконати таке перетворення? Проілюструйте прикладами.

Задачі та вправи

Спростіть вирази (314–315):

314°. а) $\sqrt{5}-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}$;   б) $\sqrt{5}-3\sqrt{5}+2\sqrt{5}$;

в) $4\sqrt{6}-7\sqrt{6}-5\sqrt{6}+10\sqrt{6}$;   г) $3\sqrt{a}+5\sqrt{a}-4\sqrt{a}$.

315°. а) $5\sqrt{2}-3\sqrt{3}+4\sqrt{2}-8\sqrt{3}$; б) $9\sqrt{x}-3\sqrt{y}-7\sqrt{y}-2\sqrt{x}$;
в) $\sqrt{3}+4\sqrt{5}-2\sqrt{5}-3\sqrt{3}$; г) $7\sqrt{xy}-3\sqrt{x}+5\sqrt{x}-4\sqrt{xy}$.

Винесіть множник з-під знака кореня (316–323):

316°. а) $\sqrt{2^2\cdot 3}$; б) $\sqrt{5^2\cdot 7}$; в) $\sqrt{3^2\cdot 2}$; г) $\sqrt{6\cdot 10^2}$.

317°. а) $\sqrt{3^4\cdot 7}$; б) $\sqrt{13\cdot 2^6}$; в) $\sqrt{6^8\cdot 5}$; г) $\sqrt{5^4\cdot 2}$.

318. а) $\sqrt{(-2)^2\cdot 3}$; б) $\sqrt{10\cdot(-3)^2}$; в) $\sqrt{(-5)^4\cdot 2}$; г) $\sqrt{(-2)^6\cdot 5}$.

319°. а) $\sqrt{6^5}$; б) $\sqrt{7^3}$; в) $\sqrt{2^7}$; г) $\sqrt{3^3}$.

320°. а) $\sqrt{3\cdot 5^5}$; б) $\sqrt{5\cdot 2^3}$; в) $\sqrt{11\cdot 3^5}$; г) $\sqrt{7^5\cdot 2}$.

321°. а) $\sqrt{9\cdot 2}$; б) $\sqrt{4\cdot 5}$; в) $\sqrt{36\cdot 3}$; г) $\sqrt{7\cdot 49}$;
ґ) $\sqrt{25\cdot 3}$; д) $\sqrt{16\cdot 5}$; е) $\sqrt{144\cdot 3}$; є) $\sqrt{81\cdot 10}$.

322. а) $\sqrt{32}$; б) $\sqrt{8}$; в) $\sqrt{125}$; г) $\sqrt{27}$;
ґ) $\sqrt{48}$; д) $\sqrt{54}$; е) $\sqrt{75}$; є) $\sqrt{150}$.

323. а) $2\sqrt{50}$; б) $3\sqrt{72}$; в) $5\sqrt{98}$;
г) $\frac{1}{6}\sqrt{108}$; ґ) $\frac{1}{2}\sqrt{128}$; д) $0{,}2\sqrt{300}$.

Спростіть вирази (324–325):

324. а) $\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{8}$; б) $\sqrt{75}+\sqrt{48}-\sqrt{300}$;
в) $\sqrt{72}-\sqrt{50}-\sqrt{2\cdot 18}$; г) $\sqrt{32}-\sqrt{2}-\sqrt{8}$.

325. а) $\sqrt{98}-\sqrt{72}+0{,}5\sqrt{2}$; б) $3\sqrt{2}+2\sqrt{32}+\sqrt{128}$;
в) $\sqrt{72}-\sqrt{50}-2\sqrt{8}$; г) $\sqrt{160}+2\sqrt{40}-3\sqrt{90}$.

326. Порівняйте вирази:
а) $2\sqrt{5}$ і $\sqrt{45}$; б) $\sqrt{8}$ і $3\sqrt{2}$; в) $5\sqrt{7}$ і $\sqrt{63}$;
г) $7\sqrt{2}$ і $\sqrt{147}$; ґ) $2\sqrt{24}$ і $\sqrt{216}$; д) $2\sqrt{125}$ і $\frac{11}{3}\sqrt{45}$.

Винесіть множник з-під знака кореня (327–329):

327. а) $\sqrt{3x^2}$, $x\ge 0$; б) $x\sqrt{x^3}$; в) $\sqrt{5y^4}$; г) $\sqrt{10a^6}$, $a<0$;
ґ)* $\sqrt{125a^4b^8}$; д)* $\sqrt{405a^6b^6}$, $a<0$, $b>0$.
Чому у випадках а), г) і д) знак змінних вказано, а в інших — ні?

328. а) $\sqrt{27b^5}$; б) $\sqrt{32a^{12}}$;

в) $\sqrt{16x^3}$; г) $\sqrt{8x^2y^5}$, $x < 0$.

329*. а) $\sqrt{32x^3y^2}$, $y < 0$; б) $\sqrt{48x^{10}y^4}$, $x \geq 0$;

в) $\sqrt{25x^6y^{14}}$, $x \geq 0$, $y < 0$; г) $\sqrt{4m^2n^6}$, $m < 0$, $n < 0$.

330°. Перетворіть корені так, щоб підкореневі вирази стали однаковими:

а) $\sqrt{8}$ і $\sqrt{18}$; б) $\sqrt{50}$ і $\sqrt{32}$; в) $\sqrt{75}$ і $\sqrt{27}$;

г) $\sqrt{54}$, $\sqrt{24}$, $\sqrt{150}$; ґ) $\sqrt{50}$, $\sqrt{162}$, $\sqrt{98}$; д) $\sqrt{27}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt{192}$.

331. Спростіть вирази:

а) $5\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{27}+\sqrt{48}$; б) $\sqrt{80}+\frac{1}{2}\sqrt{20}-3\sqrt{45}$;

в) $5\sqrt{27}-4\sqrt{48}-2\sqrt{12}$; г) $\sqrt{25m^5}+4m\sqrt{m^3}-m^2\sqrt{m}$;

ґ) $\sqrt{81a^3}-5a\sqrt{a}+\frac{3}{a}\sqrt{4a^5}$; д) $\sqrt{9x^4y}-\frac{16}{y}\sqrt{x^4y^3}+5x^2\sqrt{y}$.

Внесіть множник під знак кореня (332–334):

332°. а) $4\sqrt{3}$; б) $5\sqrt{2}$; в) $6\sqrt{5}$; г) $\frac{1}{2}\sqrt{32}$;

ґ) $\frac{2}{3}\sqrt{18}$; д) $0{,}1\sqrt{1000}$; е) $\frac{1}{5}\sqrt{6\frac{1}{4}}$; є) $0{,}5\sqrt{40}$.

333°. а) $-3\sqrt{2}$; б) $-6\sqrt{5}$; в) $-4\sqrt{\frac{1}{8}}$;

г) $-\frac{1}{2}\sqrt{12}$; ґ) $-0{,}1\sqrt{10}$; д) $-\frac{1}{3}\sqrt{45}$.

334. а) $a\sqrt{3}$, $a > 0$; б) $a\sqrt{3}$, $a < 0$; в) $x^2\sqrt{5}$;

г) $y\sqrt{\frac{1}{y}}$ (обґрунтуйте, що в цьому випадку $y > 0$);

ґ) $-\frac{1}{2}a^2\sqrt{12}$; д) $-\frac{1}{2}a\sqrt{5}$, $a < 0$; е) $m\sqrt{10}$, $m < 0$;

є) $-m\sqrt{7}$, $m > 0$.

335. Порівняйте числа:

а) $2\sqrt{13}$ і $3\sqrt{6}$; б) $3\sqrt{2}$ і $2\sqrt{5}$;

в) $4\sqrt{3}$ і $3\sqrt{7}$; г) $\frac{1}{3}\sqrt{54}$ і $\frac{1}{4}\sqrt{96}$;

ґ) $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{2}}$ і $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}$; д) $-5\sqrt{0,2}$ і $-10\sqrt{0,1}$;

е) $-6\sqrt{\frac{1}{12}}$ і $-2\sqrt{\frac{3}{5}}$; є) $-\frac{1}{2}\sqrt{12}$ і $-\frac{1}{3}\sqrt{18}$.

336°. Запишіть числа в порядку їх зменшення:

а) $2\sqrt{3}$; $\sqrt{11}$; 3,7; $\sqrt{11,9}$; $2\sqrt{2,6}$;

б) $-2\sqrt{3}$; $-\sqrt{11}$; $3\sqrt{16}$.

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу (337–339):

337°. а) $\frac{5}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{3}{\sqrt{x}}$; г) $\frac{2}{\sqrt{y}}$; ґ) $\frac{15}{\sqrt{5}}$;

д) $\frac{12}{\sqrt{3}}$; е) $\frac{10}{\sqrt{15}}$; є) $\frac{7}{\sqrt{14}}$; ж) $\frac{x}{\sqrt{2x}}$; з) $\frac{3x}{\sqrt{6x}}$.

338°. а) $\frac{4}{\sqrt{18}}$; б) $\frac{5}{\sqrt{20}}$; в) $\frac{6}{\sqrt{8}}$; г) $\frac{15}{\sqrt{40}}$.

339°. а) $\frac{c}{\sqrt{bc}}$; б) $\frac{x^2}{\sqrt{xy}}$; в) $\frac{3m}{\sqrt{mn}}$; г) $\frac{4a}{\sqrt{2ab}}$.

340°. Звільніться від дробу під знаком кореня:

а) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt{\frac{7}{15}}$; в) $\sqrt{\frac{5}{7}}$;

г) $\sqrt{\frac{3}{23}}$; ґ) $\sqrt{\frac{5}{32}}$; д) $\sqrt{\frac{1}{18}}$.

341. Перетворіть корені так, щоб підкореневі вирази стали однаковими:

а) $\sqrt{\frac{1}{2}}$ і $\sqrt{8}$; б) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ і $2\sqrt{24}$;

в) $\sqrt{\frac{3}{10}}$ і $\sqrt{\frac{5}{6}}$; г) $36\sqrt{\frac{7}{12}}$ і $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

342. Спростіть вирази:

а) $3\sqrt{20}+\sqrt{\frac{1}{5}}-0{,}2\sqrt{5}$; б) $2\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{60}-\sqrt{15}+5\sqrt{\frac{1}{15}}$.

343°. Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

а) $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; б) $\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$;

в) $\frac{9}{3+\sqrt{3}}$; г) $\frac{10}{\sqrt{5}+5}$;

ґ) $\frac{15}{2\sqrt{3}-3}$; д) $\frac{6}{4+3\sqrt{2}}$;

е) $\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$; є) $\frac{b}{a-\sqrt{b}}$.

344. Переконайтеся у правильності рівностей:

а) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=4+\sqrt{15}$; б) $\frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{6}+2}=5-2\sqrt{6}$;

в) $\frac{3\sqrt{2}-4}{3\sqrt{2}+4}=17-6\sqrt{2}$; г) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=5+2\sqrt{6}$.

345°. Спростіть вирази:

а) $\left(\sqrt{12}+\sqrt{15}\right)\sqrt{3}$; б) $\left(\sqrt{12}+\sqrt{75}\right)\sqrt{3}$;

в) $\left(\sqrt{18}-\sqrt{50}\right)\sqrt{2}$; г) $\left(4\sqrt{12}-3\sqrt{3}\right)\sqrt{12}$.

346. Виконайте множення:

а) $\left(\sqrt{3}+5\right)\left(\sqrt{3}-5\right)$; б) $\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)$;

в) $\left(\sqrt{2}-3\right)\left(\sqrt{2}+3\right)$; г) $\left(6-3\sqrt{2}\right)\left(6+3\sqrt{2}\right)$;

ґ) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$; д) $\left(\sqrt{a}+2\right)\left(\sqrt{a}-2\right)$;

е) $\left(\sqrt{x}-y\right)\left(\sqrt{x}+y\right)$; є) $\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)$.

347*. Розкладіть двочлен на множники:

а) $x-y$; б) $x-y^2$;

в) x^2-3; г) $2-b^2$;

ґ) $3-y^2$; д) $x-3$.

Спростіть вирази (348–350):

348. а) $\left(\sqrt{5}-1\right)^2+\sqrt{20}$; б) $\left(\sqrt{3}+2\right)^2-\sqrt{48}$;

в) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{6}$; г) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{40}$.

349. а) $3\left(\sqrt{12}-2\sqrt{27}\right)$; б) $\left(5\sqrt{2}-7\sqrt{3}\right)\sqrt{6}$;

в) $\sqrt{8}-\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)\sqrt{5}$; г) $\sqrt{48}-2\sqrt{3}\left(2-5\sqrt{12}\right)$;

ґ) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2+2\sqrt{xy}$; д) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2-2\sqrt{xy}$;

е) $\left(\sqrt{14}-3\sqrt{2}\right)^2+6\sqrt{28}$; є) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{18}\right)^2-30$.

350. а) $\left(5\sqrt{2}-3\sqrt{3}-\sqrt{8}\right)\cdot\sqrt{6}$; б) $2\sqrt{3}-3\sqrt{2}-\frac{1}{2}\sqrt{12}$;

в) $\left(\sqrt{12}+2\sqrt{18}\right)\cdot\sqrt{2}-\sqrt{150}$; г) $\left(\sqrt{a}-3\right)\left(\sqrt{a}+2\right)+\sqrt{a}$;

ґ) $\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)$; д) $\left(\sqrt{m}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{m}+\sqrt{n}\right)(m+n)$.

351*. Розкладіть на множники вирази:

а) $\sqrt{15}-2\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{x}-x$;

в) $\sqrt{21}+7$; г) $3\sqrt{x}+x\sqrt{3}$;

ґ) $ab-\sqrt{ab}$; д) $x-1$.

352*. Скоротіть дроби:

а) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-2}$; б) $\dfrac{5\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{10}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2x}-2\sqrt{x}}{5-5\sqrt{2}}$; г) $\dfrac{\sqrt{15}-5}{\sqrt{6}-\sqrt{10}}$;

ґ) $\dfrac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{x-y}$; д) $\dfrac{a^2-a-2}{a+\sqrt{a+2}}$.

353*. Спростивши вираз, учень випадково стер частину записів на класній дошці (рис. 17). Відновіть записи.

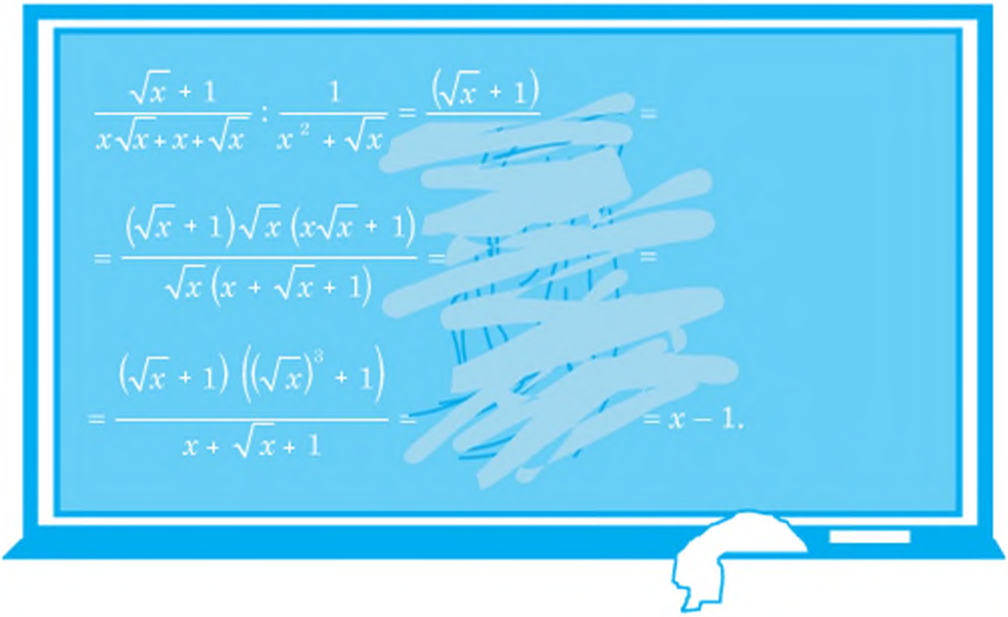


Рис. 17

354. Переконайтеся, що значення виразів є раціональними числами:

а) $\frac{2}{13-2\sqrt{30}}+\frac{2}{13+2\sqrt{30}}$;

б) $\frac{1}{6+2\sqrt{5}}-\frac{1}{2\sqrt{5}-6}$;

в) $\sqrt{\sqrt{20}-\sqrt{11}}\cdot\sqrt{\sqrt{20}+\sqrt{11}}$;

г) $\sqrt{8-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{8+4\sqrt{3}}$.

Обчисліть (355–356):

355*. а) $\frac{5+\sqrt{21}}{5-\sqrt{21}}+\frac{5-\sqrt{21}}{5+\sqrt{21}}$;

б) $\frac{6\sqrt{2}-2\sqrt{7}}{6\sqrt{2}+2\sqrt{7}}-\frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{7}}{6\sqrt{2}-2\sqrt{7}}$;

в) $\frac{3\sqrt{7}-\sqrt{38}}{3\sqrt{7}+\sqrt{38}}-\frac{3\sqrt{7}+\sqrt{38}}{3\sqrt{7}-\sqrt{38}}$;

г) $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}-1}-\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}-1}+1}$.

356*. а) $\frac{1}{1260}\sqrt{134^2-62^2}+\frac{9}{25}\sqrt{\frac{25}{162}}-\frac{1}{66}\sqrt{242}$;

б) $\frac{1}{510}\sqrt{232^2-57^2}+\frac{1}{6}\sqrt{576}-1\frac{13}{15}\sqrt{\frac{25}{28}}$;

в) $54{,}6\sqrt{\frac{1}{117}}+0{,}05\sqrt{468}-\frac{7}{720}\sqrt{366^2-258^2}$;

г) $\frac{1}{16}\sqrt{192}-2{,}5\sqrt{\frac{4}{75}}-\frac{1}{234}\sqrt{98^2-71^2}$.

Задачі та вправи для повторення

357°. Знайдіть добуток розв'язків кожного рівняння:

а) $x^2 = 196$; б) $x^2 = 0{,}64$; в) $3x^2 = 75$.

358°. Знайдіть суму розв'язків кожного рівняння:

а) $x^2 = 225$; б) $x^2 = 0{,}0225$; в) $4\,x^2 = 900$.

359. Запишіть три ірраціональні числа, розміщені між числами:

а) 3 і 4; б) 7 і 8; в) 11 і 12.

360°. Користуючись калькулятором, знайдіть арифметичний корінь кожного рівняння, округливши результат до сотих:

а) $x^2 = 8$; б) $x^2 - 26 = 0$; в) $15 - x^2 = 0$;

г) $x^2 - 0{,}7 = 4{,}3$; ґ) $x^2 - 2{,}7 = 32{,}3$; д) $37{,}6 - x^2 = -2{,}4$.

361°. Запишіть, між якими послідовними цілими числами розміщені числа:

а) $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{21}$; в) $\sqrt{47}$; г) $\sqrt{91}$;

ґ) $\sqrt{8{,}9}$; д) $\sqrt{4\frac{1}{3}}$; е) $3\sqrt{43}$; є) $3\sqrt{21}$.

362. Дальність горизонту на морі визначають за формулою $d = 3{,}6\sqrt{h}$, де d — дальність горизонту (в км), а h — висота ока спостерігача над рівнем моря (в метрах). Знайдіть дальність горизонту, якщо $h = 1{,}69$ м.

363. Обчисліть з точністю до 1 с тривалість падіння тіла з висоти 45 м, користуючись формулою $h = 0{,}5gt^2$, де h — висота (в метрах), $g = 9{,}8$ м/с^2, t — час у секундах.

364. Відомо, що брус із поперечним перерізом у формі прямокутника має найбільшу міцність тоді, коли розміри його сторін відносяться, як $1:\sqrt{2}$. Визначте максимальні розміри поперечного перерізу бруса найбільшої міцності, який можна випиляти з колоди діаметром 27 см.

365. Площа одного круга дорівнює 27π см^2, а площа другого — 12π см^2. У скільки разів діаметр першого круга більший, ніж діаметр другого?

366. Площа круга дорівнює 9π см^2. Яким повинен бути діаметр круга, щоб його площа була у 2,26 раза більшою?

367. Спростіть вирази:

а) $\left(m^2-n^2\right)\sqrt{\dfrac{mn}{(m+n)\left(m^2-n^2\right)}}$;

б) $\left(x\sqrt{\dfrac{x}{y}}+3\sqrt{xy}-y\sqrt{\dfrac{y}{x}}\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$.

368. Порівняйте числа:

а) $\sqrt{10}$ і π; б) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ і $\dfrac{\pi}{4}$; в) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ і 0,(7).

369*. Спростіть вирази:

а) $\left(\dfrac{a+2}{\sqrt{2a}}-\dfrac{a}{\sqrt{2a}+2}+\dfrac{2}{a-\sqrt{2a}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$.

б) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\right)^2\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}\right)$;

в) $\dfrac{\left(\sqrt{a^2+a\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a^2-a\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2}{2\sqrt{a^2b}}:\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}-2\right)$;

г) $\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)$.

370*. Знайдіть числове значення виразу:

а) x^2-4x+3, якщо $x=2+\sqrt{3}$;

б) $x^2 - 3x + 5$, якщо $x = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$;

в) $2x^2 - 6x + 1$, якщо $x = \dfrac{3-\sqrt{2}}{2}$.

371*. Раціональним чи ірраціональним числом є значення виразу:

а) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \sqrt{15}$; б) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \sqrt{15}$?

372*. Обчисліть значення виразу:

а) $\left(\sqrt{a+1+2\sqrt{a}} : \sqrt{a+1-2\sqrt{a}}\right)\left(1-\sqrt{a}\right)-\sqrt{a}$, якщо $a = 0{,}3$;

б) $\sqrt{b+1-2\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b+1+2\sqrt{b}} + b$, якщо $b = 0{,}7$.

Завдання для самоперевірки

I–II рівні

1. Обчисліть:

а) $\sqrt{125}$; б) $\sqrt{0{,}81}$; в) $\sqrt{\dfrac{25}{36}}$; г) $-\sqrt{36}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 = 0{,}16$; б) $2x^2 = 50$; в) $x^2 = 6\dfrac{1}{4}$; г) $3x^2 = 18$.

3. Обчисліть:

а) $\sqrt{25}+\sqrt{81}$; б) $\sqrt{225}-\sqrt{121}$;

в) $\sqrt{400}+\sqrt{36}$; г) $\sqrt{49}-\sqrt{64}$.

4. Знайдіть корінь рівняння:

а) $\sqrt{x} = 3$; б) $\sqrt{x} = -2$;

в) $\sqrt{x} = \dfrac{2}{3}$; г) $\sqrt{x} = 0{,}2$.

5. Обчисліть значення виразів:

а) $\sqrt{25 \cdot 144}$; б) $\sqrt{0{,}01 \cdot 256}$;

в) $\sqrt{\dfrac{9}{16} \cdot \dfrac{36}{64}}$; г) $\sqrt{8^2 \cdot 3^4}$.

6. Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{x^2} - \sqrt{x}$, якщо $x = 49$;

б) $3\sqrt{x} + \sqrt{x^2}$, якщо $x = 0,16$;

в) $\sqrt{x^2} - 2\sqrt{x}$, якщо $x = 25$;

г) $4\sqrt{x} + \sqrt{x^2}$, якщо $x = 0,25$.

7. Винесіть множник з-під знака кореня:

а) $\sqrt{63}$; б) $\sqrt{0,28}$;

в) $\sqrt{\dfrac{700}{144}}$; г) $\sqrt{\dfrac{12}{200}}$.

8. Внесіть множник під знак кореня:

а) $3\sqrt{7}$; б) $0,2\sqrt{25}$;

в) $-\dfrac{2}{3}\sqrt{27}$; г) $-2\sqrt{7}$.

9. Звільніться від ірраціональності в знаменнику:

а) $\dfrac{c}{\sqrt{bc}}$; б) $\dfrac{x^2}{\sqrt{xy}}$; в) $\dfrac{3m}{\sqrt{mn}}$; г) $\dfrac{4x}{\sqrt{2xy}}$.

10. Знайдіть область визначення і область значень функції:

а) $y = -\sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{x} - 1$;

в) $y = \sqrt{2 - x}$; г) $y = -\sqrt{1 - x}$.

III рівень

1. Знайдіть допустимі значення змінної у виразах:

а) $\sqrt{x - 2}$; б) $\sqrt{-x^2}$;

в) $\sqrt{x^2 + 1}$; г) $\sqrt{(x - 2)^2}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{2 - x} = 6$; б) $\sqrt{x^2 - 3} = 1$;

в) $\sqrt{2x^2 + 5} = \sqrt{55}$; г) $\sqrt{1 - x^2} = 1$.

3. Звільніться від ірраціональності в знаменнику:

а) $\frac{33}{7-3\sqrt{3}}$; б) $\frac{12}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$;

в) $\frac{15}{2\sqrt{5}+\sqrt{5}}$; г) $\frac{4}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$.

4. Обчисліть:

а) $\left(\sqrt{20}+3\sqrt{5}-\sqrt{50}-\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}\right)$;

б) $\sqrt{148}\cdot\sqrt{7-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7+2\sqrt{3}}$;

в) $\left(3+2\sqrt{6}-\sqrt{33}\right)\left(\sqrt{22}+\sqrt{6}+4\right)$;

г) $\sqrt{6+3\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6-3\sqrt{2}}\cdot\sqrt{8}$.

5. Порівняйте:

а) $0{,}3\sqrt{3\frac{1}{3}}$ і $0{,}4\sqrt{2\frac{1}{2}}$; б) $0{,}7\sqrt{7\frac{3}{7}}$ і $0{,}9\sqrt{\frac{2}{3}}$;

в) $-3\sqrt{\frac{1}{12}}$ і $-\sqrt{\frac{3}{5}}$; г) $-0{,}5\sqrt{12}$ і $-\frac{1}{3}\sqrt{18}$.

6. Доведіть, що

а) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=5+2\sqrt{6}$; б) $\frac{3\sqrt{2}-4}{3\sqrt{2}+4}=17-12\sqrt{2}$.

7. Спростіть вираз:

а) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; б) $\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}-\frac{m+n}{m-n}$.

IV рівень

1. Обчисліть значення виразу, попередньо спростивши його:

а) $\sqrt{(m-n)^2}+\sqrt{(m+2n)^2}$, якщо $m = 8{,}7$, $n = -5{,}1$;

б) $\sqrt{4a^2-4ab+b^2}-\sqrt{a^2+2ab+b^2}$, якщо $a = -3{,}8$, $b = -5{,}398$.

2. Скоротіть дріб:

а) $\frac{a-2\sqrt{3a}+3}{a\sqrt{3}-3\sqrt{a}}$; б) $\frac{4m+4\sqrt{mn}+n}{4m-n}$;

в) $\frac{2\sqrt{2}-x\sqrt{x}}{2+\sqrt{2x}+x}$; г) $\frac{b-\sqrt{3b}+3}{b\sqrt{b}+3\sqrt{3}}$.

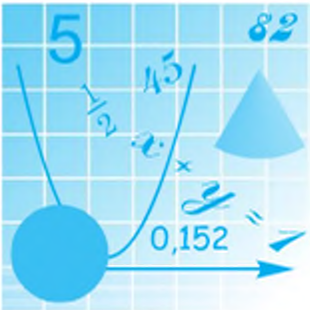
3. Розв'яжіть рівняння:

а) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=2$; б) $\sqrt{2+\sqrt{3-\sqrt{y}}}=3$.

4. Доведіть, що значення виразу є натуральним числом:

а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; б) $\frac{1}{3\sqrt{2}-4}-\frac{1}{3\sqrt{2}+4}$;

в) $\frac{1}{5+2\sqrt{6}}+\frac{1}{5-2\sqrt{6}}$; г) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}$.



Розділ III

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

§5. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

5.1. Квадратне рівняння і його види

! Пригадайте

1. Що називають розв'язком рівняння?
2. Скільки розв'язків може мати рівняння $x^2 = a$?
3. Як розв'язати рівняння виду $(x - a)(x - b) = 0$?

① Квадратне рівняння. Зведене квадратне рівняння.

Рівняння, що має вигляд $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b, c — довільні числа, причому $a \neq 0$, називається *квадратним*.

Числа a і b називають, відповідно, ***першим*** і ***другим коефіцієнтом, с — вільним членом*** квадратного рівняння.

Приклади квадратних рівнянь:

$3x^2 + 5x + 4 = 0$; $x^2 - 3x + 5 = 0$; $-4x^2 + 7x = 0$;
$5x^2 - 10 = 0$; $7x^2 = 0$.

У першому рівнянні $a = 3$, $b = 5$, $c = 4$;
у другому — $a = 1$, $b = -3$, $c = 5$;
у третьому — $a = -4$, $b = 7$, $c = 0$;

у четвертому — $a = 5$, $b = 0$, $c = –10$;

у п'ятому — $a = 7$, $b = c = 0$.

Рівняння $x(x + 3) = 6$, яке у даному вигляді не є квадратним, за допомогою відомих перетворень, що не порушують рівносильності рівнянь, можна звести до квадратного. Для цього досить виконати множення у лівій частині рівняння і перенести туди число 6 з протилежним знаком. Маємо: $x^2 + 3x – 6 = 0$.

Аналогічно можна перетворити, наприклад, рівняння:

$$(2 – x)(3x + 5) = 4;\ x – 1 = 2x(x + 4) \text{ тощо.}$$

Як правило, будь-яке рівняння, яке зводять до квадратного, записують у ***загальному вигляді*** $ax^2 + bx + c = 0$ так, щоб коефіцієнт a був додатним. Зокрема, рівняння $–3x^2 + 5x – 6 = 0$ записують у вигляді $3x^2 – 5x + 6 = 0$; а $7x – x^2 + 10 = 0$ подають, як

$$x^2 – 7x – 10 = 0 \text{ і т.д.}$$

Якщо у квадратному рівнянні перший коефіцієнт дорівнює 1, то таке рівняння називають *зведеним*. У загальному вигляді зведене квадратне рівняння записують так: $x^2 + px + q = 0$.

Наприклад:

$x^2 + 2x + 3 = 0$;	$x^2 – 4x + 6 = 0$;	$x^2 – 3x – 10 = 0$.
$p = 2$, $q = 3$;	$p = –4$, $q = 6$;	$p = –3$, $q = –10$.

② **Неповні квадратні рівняння.** Окремо слід розглянути квадратні рівняння, у яких $b = 0$, або $c = 0$, або $b = c = 0$. Наприклад:

1) $b = 0$;	$ax^2 + c = 0$;	$3x^2 – 12 = 0$.
2) $c = 0$;	$ax^2 + bx = 0$;	$4x^2 – 10x = 0$.
3) $b = c = 0$;	$ax^2 = 0$;	$5x^2 = 0$.

Такі квадратні рівняння називають ***неповними***. Спробуємо розв'язати неповні квадратні рівняння кожного виду.

1) $ax^2 + c = 0$.

Розглянемо приклад.

$3x^2 – 12 = 0$; $3x^2 = 12$; $x^2 = 4$; $x_1 = 2$; $x_2 = –2$.

Розв'язки цього рівняння можна записати і так: $x = \pm\sqrt{4}$, тобто $x = \pm 2$.

А тепер розв'яжемо дане рівняння в загальному вигляді:

$$ax^2 + c = 0,\ ax^2 = -c,\ x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Якщо $-\frac{c}{a}$ — додатне число, то $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, тобто $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$. Якщо $-\frac{c}{a}$ — від'ємне число, то рівняння розв'язків не має, бо добути квадратний корінь з від'ємного числа не можна.

Наприклад, $5x^2 + 15 = 0$; $5x^2 = -15$, $x^2 = -3$. Це рівняння розв'язків не має.

2) $\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$**.**

Щоб розв'язати це рівняння, потрібно розкласти його ліву частину на множники, прирівняти кожен з них до нуля і розв'язати відповідні рівняння.

У загальному вигляді:	*Приклад*:
$ax^2 + bx = 0$;	$3x^2 + 5x = 0$;
$x(ax + b) = 0$;	$x(3x + 5) = 0$;
$x = 0$ або $ax + b = 0$;	$x = 0$ або $3x + 5 = 0$;
$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$.	$x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{5}{3}$.
3) $\boldsymbol{ax^2 = 0}$**.**	$7x^2 = 0$;
$x^2 = 0$;	$x^2 = 0$;
$x = 0$.	$x = 0$.

? Запитання для самоперевірки

1. Яке рівняння називають квадратним?
2. Наведіть приклади квадратних рівнянь і вкажіть у кожному з них перший коефіцієнт, другий коефіцієнт, вільний член.
3. Яке квадратне рівняння називають зведеним? Наведіть приклади.
4. Які види неповних квадратних рівнянь ви знаєте?
5. Проілюструйте прикладами способи розв'язання кожного виду неповних квадратних рівнянь.

Задачі та вправи

373°. Запишіть перший коефіцієнт, другий коефіцієнт і вільний член кожного з рівнянь:

а) $2x^2 - 3x + 8 = 0$; б) $3x^2 + 7x - 6 = 0$;
в) $4x^2 - 9x - 2 = 0$; г) $5x^2 + x - 4 = 0$;
ґ) $x^2 - 2x + 3 = 0$; д) $x^2 - x + 1 = 0$;
е) $-6x^2 + x + 5 = 0$; є) $7x^2 + 2x = 0$;
ж) $3x^2 - 10 = 0$; з) $5x^2 = 0$;
и) $\sqrt{5}x^2 - 3x + 1 = 0$; і) $12x^2 - 11x + \pi = 0$.

374°. Запишіть рівняння у вигляді квадратного рівняння з додатним першим коефіцієнтом:

а) $-2x^2 + 3x + 4 = 0$; б) $-7x^2 - x + 5 = 0$;
в) $2x - 3x^2 + 2 = 0$; г) $2x - 15 - 2x^2 = 0$;
ґ) $5x - x^2 + 2 = 0$; д) $-3x - x^2 - 7 = 0$.

Замініть кожне рівняння (375–378) *рівносильним квадратним рівнянням з додатним першим коефіцієнтом*:

375°. а) $5x^2 = 3x + 3$; б) $-5x^2 + 7x = 3$; в) $5x^2 = 3x - 3$;
г) $x(x - 2) - 3 = 0$; ґ) $(7 - x)x = 6$; д) $3x^2 = 12 + x$.

376°. а) $(3x - 6)(x + 2) = 0$; б) $x(x - 8) = 20$;
в) $(x - 4)x = 45$; г) $x^2 + 2(7x + 12) = 0$.

377. а) $x(x + 8) = 33$; б) $x^2 = 4(16 - 3x)$;
в) $(x - 3)(4 - x) = 0$; г) $x^2 - 5 = (x + 5)(2x - 1)$;
ґ) $(x - 1)(x + 2) = 4x$; д) $(2x - 5)^2 = 9$.

378*. а) $\left(\sqrt{2} - x\right)\left(\sqrt{3} - x\right) = 0$; б) $2\sqrt{3} + \sqrt{3}x - 2x - x^2 = 0$;
в) $x(\pi - x) = \pi$; г) $3(x + 2) = x^2 + 2x$.

Запишіть кожне рівняння у вигляді рівносильного йому квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами (379 – 380):

379°. а) $2x^2 - \frac{1}{3}x + 4 = 0$; б) $\frac{x^2}{4} + 5x - 1 = 0$;
в) $\frac{1}{3}x^2 - 5x + \frac{1}{6} = 0$; г) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{x}{10} + 2 = 0$.

380. а) $\frac{x^2 - 6x}{4} = \frac{5}{2}$; б) $\frac{2 - 3x^2}{2} = x$;

в) $\frac{x^2-4}{5}=\frac{x}{15}$;　　　г) $\frac{4x^2-3}{2}=\frac{x+1}{4}$;

ґ) $\frac{x^2}{5}-\frac{2x}{3}=\frac{x+5}{6}$;　　　д) $\frac{(x-2)^2}{4}-\frac{5(x-2)}{6}=0$.

Розв'яжіть рівняння (381 – 383):

381°. а) $x^2 = 9$;　б) $3x^2 = 0$;　в) $3x^2 = 12$;　г) $16 = x^2$;

ґ) $x^2 = 25$;　д) $3x^2 = 48$;　е) $\frac{1}{3}x^2=3$;　є) $0{,}4x^2 = 1$.

382°. а) $3x^2 = 5$;　б) $2x^2 = \pi$;　в) $0{,}04x^2 = 1$;　г) $x^2 - 8 = 0$.

383°. а) $3x^2 - 48 = 0$;　б) $8 - 2x^2 = 0$;　в) $2x^2 + 8 = 0$;

г) $4x^2 - 1 = 0$;　ґ) $\frac{3}{4}x^2-12=0$;　д) $3x^2-\frac{1}{27}=0$.

Розв'яжіть рівняння, попередньо звівши їх до вигляду $ax^2 + c = 0$ (384 – 386):

384. а) $x(x - 15) = 3(108 - 5x)$;　б) $(x - 2)(x + 2) = 2x^2 - 13$;

в) $(x - 3)^2 = 25 - 6x$;　г) $(2x + 1)(x - 2) = 16 - 3x$.

385. а) $\frac{x^2-6}{4}=\frac{5}{2}$;　б) $\frac{2x^2+1}{3}=\frac{2x^2+2}{5}$;

в) $\frac{5x^2+9}{6}-\frac{4x^2-9}{5}=0$;　г) $\frac{8x^2-3}{5}+\frac{9x^2-5}{4}=2$.

386*. а) $(x + 3)^2 - 25 = 0$.

Розв'язання.

Перший спосіб. Це рівняння можна перетворити на неповне квадратне рівняння, позначивши вираз $x + 3$ змінною y. Тоді дане рівняння матиме вигляд $y^2 - 25 = 0$. Відтак, $y^2 = 25$; $y_1 = 5$; $y_2 = -5$.

Повернувшись до введеного позначення, маємо:

якщо $y = 5$, то $x + 3 = 5$;　　$x_1 = 2$;

якщо $y = -5$, то $x + 3 = -5$;　　$x_2 = -8$.

Другий спосіб. Розклавши ліву частину рівняння на множники, одержимо: $(x + 3 - 5)(x + 3 + 5) = 0$; $(x - 2)(x + 8) = 0$; $x_1 = 2$; $x_2 = -8$.

б) $(2x + 1)^2 - 4 = 0$;　в) $(x + 7)^2 + 9 = 10$;

г) $3(2 - x)^2 - 147 = 0$;　ґ) $(3x + 2)^2 + 4 = 3$.

Розв'яжіть задачі, склавши відповідні рівняння (387–388):

387°. Довжина прямокутної ділянки в 4 рази більша від її ширини, а площа ділянки дорівнює 1 га. Знайдіть довжину і ширину ділянки.

388. Сума квадратів трьох послідовних натуральних чисел дорівнює 50. Знайдіть ці числа.

Розв'яжіть рівняння (389–393):

389.° а) $x^2 - 4x = 0$; б) $3x^2 - x = 0$; в) $2x^2 - 8x = 0$; г) $3x^2 = 12x$.

390°. а) $4x^2 + 6x = 9x^2 - 15x$; б) $13x + 7x2 = 5x^2 + 8x$;
в) $12x^2 - 5x = 9x2 + 7x$; г) $8{,}5x - 3x^2 = 3{,}5x + 2x^2$.

391. а) $x(x - 15) = 3(108 - 5x)$;
б) $47 - x(3x + 4) = 2(17 - 2x) - 62$;
в) $(x - 7)(x + 3) + (x - 1)(x + 5) = 102$;
г) $10(x - 2) + 19 = (5x - 1)(5x + 1)$.

392*. а) $(x - 3)^2 = 2x + 9$; б) $(x + 2)^2 + 5x - 4 = 0$.
в) $6x^2 - (x + 2)^2 = -4(x - 1)$;
г) $(3x - 8)^2 - (4x - 6)^2 + (5x - 2)(5x + 2) = 96$.

393. а) $\frac{5x^2+9}{6} - \frac{4x^2-9}{5} = 3$; б) $\frac{3x^2-11}{8} + \frac{74-2x^2}{12} = 10$;
в) $\frac{8x^2-2}{5} + \frac{9x^2-5}{4} = 2$; г) $\frac{13x^2-4}{12} - \frac{20-3x^2}{18} = 3$.

Розв'яжіть задачі (394–402), *склавши відповідні рівняння*:

394°. Знайдіть довжину сторони квадрата, площа якого дорівнює площі прямокутника, що має розміри 12,5 м × 8 м.

395°. Знайдіть периметр квадрата, площа якого дорівнює площі прямокутника, що має розміри 50 м × 32 м.

396. Сторонами прямого кута від вершини одночасно починають рухатися два точкові тіла. Швидкість одного з них становить 3 м/с, другого — 4 м/с. Через який час відстань між тілами дорівнюватиме 0,3 км?

397. Яку довжину повинна мати менша діагональ ромба, якщо більша діагональ дорівнює 32 см, а довжина сторони ромба — 20 см?

398. Яку довжину повинна мати діагональ d паралелограма (рис. 18) зі сторонами a і b, щоб він був прямокутником? Обчисліть, якщо:
а) $a = 12$ м, $b = 16$ м;
б) $a = 9$ м, $b = 12$ м.

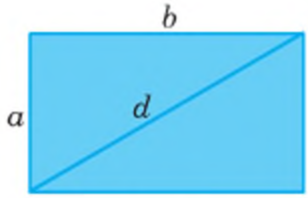


Рис. 18

399*. Шкільний спортивний майданчик має форму квадрата. Не змінюючи площі майданчика, треба надати йому форму прямокутника. Для цього довжину майданчика збільшили вдвічі, а ширину зменшили на 40 м. Знайдіть початкові розміри майданчика.

400. Знайдіть число, квадрат якого дорівнює подвоєному цьому числу. Скільки розв'язків має ця задача?

401*. Катети прямокутного трикутника відносяться, як 8 : 15, а довжина гіпотенузи дорівнює 34 см. Знайдіть площу трикутника.

402*. Гіпотенуза прямокутного трикутника відноситься до одного з його катетів, як 13 : 12, а довжина другого катета дорівнює 15 см. Знайдіть периметр трикутника.

5.2. Формули коренів квадратного рівняння

! Пригадайте

1. Який вигляд має формула квадрата двочлена?
2. Квадратом якого двочлена є тричлен:
а) $x^2 + 10x + 25$; б) $x^2 - 18x + 16$; в) $m^2 - 20m + 100$?
3. За якого значення m даний тричлен можна записати у вигляді квадрата двочлена:
а) $x^2 - 4x + m$; б) $x^2 + 18x + m$; в) $x^2 - 12x + m$?

① **Метод виділення квадрата двочлена.** Спробуємо знайти спосіб розв'язання квадратних рівнянь $ax^2 + bx + + c = 0$ і $x^2 + px + + q = 0$, у яких жодне з чисел a, b, c, p і q не дорівнює 0.

Почнемо зі зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$.

Розглянемо приклади:

1) $x^2 + 6x + 8 = 0$.

▼ Щоб розв'язати це рівняння, скористаємося прийомом, який називають ***виділенням квадрата двочлена***. Для цього розглянемо перші два члени рівняння, відповідно, як квадрат одного доданка і подвоєний добуток цього доданка й іншого.

x^2 — квадрат змінної x. Отже, перший доданок дорівнює x.

$6x$ запишемо як подвоєний добуток двох множників, один з яких дорівнює x. Маємо: $6x = 2 \cdot x \cdot 3$. Отже, другий доданок дорівнює 3. Щоб одержати квадрат двочлена, не вистачає квадрата другого доданка, тобто $3^2 = 9$. Додамо і, щоб не порушити рівність, одночасно віднімемо від лівої частини рівняння число 9. Маємо:

$$\underbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 9} - 9 + 8 = 0.$$

Підкреслений дужкою тричлен подамо у вигляді квадрата двочлена:

$$(x + 3)^2 - 9 + 8 = 0, \text{ або } (x + 3)^2 - 1 = 0.$$

Звідси маємо:

$(x + 3)^2 = 1$; $x + 3 = \pm\sqrt{1}$; $x = -3 \pm 1$;

$x_1 = -3 + 1$, $x_1 = -2$; $x_2 = -3 - 1$, $x_2 = -4$. ▲

2) $x^2 + 12x + 32 = 0$.

▼ Щоб розв'язати це рівняння, скористаємось уже випробуваним способом. Записавши $12x$ як $2 \cdot x \cdot 6$, бачимо, що другий доданок у квадраті двочлена, який можна виділити, дорівнює 6. Маємо:

$\underbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2} - 6^2 + 32 = 0$; $(x + 6)^2 - 36 + 32 = 0$;

$(x + 6)^2 - 4 = 0$; $(x + 6)^2 = 4$; $x + 6 = \pm\sqrt{4}$; $x + 6 = \pm 2$;

$x_1 = -6 + 2$, $x_1 = -4$; $x_2 = -6 - 2$, $x_2 = -8$. ▲

3) $x^2 + 3x + 2 = 0$.

▼ $\underbrace{x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = 0$; $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = 0$;

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2-2;\;\; x+\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2};\;\; x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2-2}.$$

$$x_1=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}-2}=-\frac{3}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}}=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2};\;\; x_1=-1;$$

$$x_2=-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{9}{4}-2}=-\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2};\;\; x_2=-2. \;▲$$

② **Формула коренів зведеного квадратного рівняння.** Застосуємо розглянутий прийом з метою розв'язання зведеного квадратного рівняння, записаного у загальному вигляді:

$$x^2+px+q=0.$$

$$x^2+2\cdot x\cdot\frac{p}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0;\;\; \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q=0;$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q;\;\;\; x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};$$

$$\boxed{x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.} \qquad (1)$$

Застосувавши формулу (1), можна виразити корені будь-якого зведеного квадратного рівняння через його другий коефіцієнт p і вільний член q.

$$\boldsymbol{x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q};} \qquad\qquad \boldsymbol{x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.}$$

Проілюструємо сказане, розв'язавши кілька зведених квадратних рівнянь.

1) $x^2+4x+3=0$.

▼ Очевидно, що $p=4$, $q=3$.

$x=-2\pm\sqrt{2^2-3},\;\; x=-2\pm\sqrt{1},\;\; x=-2\pm 1;$

$x_1=-2+1; x_1=-1;\quad x_2=-2-1;\; x_2=-3.$ ▲

2) $x^2-5x+6=0$.

▼ У цьому рівнянні $p=-5$, $q=6$.

$$x=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-6}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-6}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2};$$

$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$; $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$; $x_2 = 2$. ▲

Увага! Будьте уважні зі знаками, застосовуючи формулу (1). Оскільки $\frac{p}{2} = -\frac{5}{2}$, то $-\frac{p}{2} = \frac{5}{2}$.

---

3) $x^2 + x - 6 = 0$.

▼ У цьому випадку $p = 1$, $q = -6$.

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-6)} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1+24}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2};$$

$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}$; $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{5}{2}$; $x_2 = -3$. ▲

Увага! Оскільки $q = -6$, то, підставляючи це значення у вираз $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, отримуємо $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - (-6)}$, тобто $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + 6}$.

---

4) $x^2 - 10x + 25 = 0$.

▼ $p = -10$; $q = 25$.

$x = 5 \pm \sqrt{25 - 25}$; $x = 5$. ▲

Як бачимо, рівняння має один розв'язок. Його можна було знайти й іншим способом, зауваживши, що $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$.

Тоді $(x - 5)^2 = 0$, $x = 5$.

5) $x^2 + 2x + 5 = 0$;

▼ $p = 2$. $q = 5$; $x = -1 \pm \sqrt{1 - 5} = -1 \pm \sqrt{-4}$.

Оскільки під коренем одержали від'ємне число, то рівняння розв'язків не має. ▲

③ Формула коренів рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$.

Виведемо формулу для розв'язання квадратних рівнянь, що мають вигляд $ax^2 + bx + c = 0$. Для цього перетворимо дане рівняння у зведене, поділивши обидві його частини на a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

А тепер розв'яжемо утворене рівняння, скориставшись формулою (1) і врахувавши, що $p = \frac{b}{a}$, а $q = \frac{c}{a}$. Маємо:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}.$$

Перетворимо підкореневий вираз:

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Отже, $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$, тобто $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Записавши одержаний вираз у вигляді дробу, маємо:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.} \qquad (2)$$

Очевидно, що кількість розв'язків квадратного рівняння залежить від числового значення підкореневого виразу $b^2 - 4ac$.

Якщо значення виразу $b^2 - 4ac$ є додатним числом, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два різні розв'язки:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Якщо вираз $b^2 - 4ac$ дорівнює нулю, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має один розв'язок: $x = -\frac{b}{2a}$. (Іноді кажуть, що це рівняння також має два розв'язки, але вони рівні між собою: $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$).

Якщо значення виразу $b^2 - 4ac$ є від'ємним числом, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має дійсних розв'язків, бо добути квадратний корінь з від'ємного числа не можна.

Вираз $b^2 - 4ac$ назвали ***дискримінантом*** (від латинського *discriminantis* — той, що розрізняє), враховуючи його властивість визначати (розрізняти) кількість коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Дискримінант квадратного рівняння прийнято позначати буквою D ($b^2 - 4ac = D$). Використовуючи це позначення, формулу (2) можна записати в такому вигляді:

$$\boldsymbol{x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},\ D = b^2 - 4ac.} \tag{2'}$$

Оскільки істотну роль у визначенні кількості розв'язків квадратного рівняння відіграє дискримінант D, то й розв'язувати квадратне рівняння починають саме з обчислення D.

Приклади:

1) $3x^2 - 5x + 2 = 0$.

▼ $D = 5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1,\ \sqrt{D} = 1$.

$x = \dfrac{-(-5) \pm 1}{2 \cdot 3} = \dfrac{5 \pm 1}{6};\ x_1 = \dfrac{5+1}{6},\ x_1 = 1;\ x_2 = \dfrac{5-1}{6},\ x_2 = \dfrac{2}{3}$. ▲

2) $5x^2 + 2x - 1 = 0$.

▼ $D = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1) = 4 + 20 = 24,\ \sqrt{D} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

$x = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2 \cdot 5} = \dfrac{2\left(-1 \pm \sqrt{6}\right)}{2 \cdot 5} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{6}}{5};\ x_1 = \dfrac{-1 + \sqrt{6}}{5},\ x_2 = \dfrac{-1 - \sqrt{6}}{5}$. ▲

3) $2x^2 + 3x + 4 = 0$.

▼ $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 9 - 32 < 0$; рівняння розв'язків не має. ▲

Формула (2) є універсальною в тому розумінні, що з її допомогою можна розв'язати будь-яке квадратне рівняння, в тому числі зведене і неповне. Наприклад:

1) $x^2 - 7x + 12 = 0$.

▼ Враховуючи, що $a = 1$, $b = -7$, $c = 12$, маємо:

$D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1;\ \sqrt{D} = 1$.

$x = \dfrac{7 \pm 1}{2};\ x_1 = \dfrac{7+1}{2},\ x_1 = 4;\ x_2 = \dfrac{7-1}{2},\ x_2 = 3$. ▲

2) $x^2 - 3x = 0$.

▼ Тут $a = 1$, $b = -3$, $c = 0$. $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 9;\ \sqrt{D} = 3$.

$x = \dfrac{3 \pm 3}{2};\ x_1 = \dfrac{3+3}{2},\ x_1 = 3;\ x_2 = \dfrac{3-3}{2},\ x_2 = 0$. ▲

Цікаво знати

Розв'язуванню квадратних рівнянь присвятив ряд своїх праць відомий український математик, професор Микола Чайковський, який протягом тривалого часу працював у вищих навчальних закладах Кам'янця-Подільського, Львова, Одеси. Його наукові дослідження присвячені передусім теорії рівнянь. М. Чайковський зробив вагомий внесок у створення української наукової термінології з математики, а також брав активну участь у виданні україномовних підручників з математики.

М. Чайковський
(1887 – 1970)

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть приклади розв'язання зведених квадратних рівнянь способом виділення квадрата двочлена.
2. Запишіть формулу коренів зведеного квадратного рівняння.
3. Запишіть формулу коренів квадратного рівняння, що має вигляд $ax^2 + bx + c = 0$.
4. Скільки коренів може мати квадратне рівняння?
5. Поясніть походження назви «дискримінант квадратного рівняння».

Задачі та вправи

403°. Розв'яжіть рівняння способом виділення квадрата двочлена:

а) $x^2 + 6x + 5 = 0$; б) $x^2 - 6x + 8 = 0$;
в) $x^2 - 4x - 5 = 0$; г) $x^2 - 8x + 15 = 0$;
ґ) $x^2 + 2x - 3 = 0$; д) $x^2 + 10x + 24 = 0$.

Розв'яжіть рівняння (404–407), *застосувавши формулу коренів зведеного квадратного рівняння*:

404°. а) $x^2 + 8x + 7 = 0$; б) $x^2 + 12x + 27 = 0$;

в) $x^2 + 10x + 16 = 0$; г) $x^2 + 8x + 12 = 0$;

ґ) $x^2 + 5x + 6 = 0$; д) $x^2 + 5x + 4 = 0$.

405°. а) $x^2 - 6x + 5 = 0$; б) $x^2 - 6x + 8 = 0$;

в) $x^2 - 8x + 7 = 0$; г) $x^2 - 10x + 21 = 0$;

ґ) $x^2 - 7x + 10 = 0$; д) $x^2 - 9x + 8 = 0$.

406°. а) $x^2 + 8x - 33 = 0$; б) $x^2 + 12x - 64 = 0$;

в) $x^2 + 6x - 16 = 0$; г) $x^2 - 2x - 3 = 0$;

ґ) $x^2 - 4x - 32 = 0$; д) $x^2 - x - 20 = 0$.

407. а) $(x - 2)^2 = 2x - 4$; б) $(x + 1)^2 = 13 - 2x$;

в) $(x - 1)^2 - 2x = 13$; г) $2x - (x - 3)^2 = -29$.

408°. Визначте кількість коренів кожного рівняння:

а) $3x^2 + 4x + 1 = 0$; б) $5x^2 + 2x + 3 = 0$;

в) $x^2 + 10x + 25 = 0$; г) $2x^2 + 5x - 25 = 0$.

409°. Використовуючи результати виконання попередньої вправи, розв'яжіть рівняння:

а) $3x^2 + 4x + 1 = 0$; б) $5x^2 + 2x + 3 = 0$;

в) $x^2 + 10x + 25 = 0$; г) $2x^2 + 5x - 25 = 0$;

ґ) $2x^2 - 5x + 3 = 0$; д) $3x^2 - 2x - 5 = 0$.

Розв'яжіть рівняння (410–412):

410°. а) $2x^2 + 9x + 10 = 0$; б) $4x^2 + 11x + 6 = 0$;

в) $2x^2 - 7x + 6 = 0$; г) $5x^2 - 8x + 3 = 0$;

ґ) $3x^2 + 5x - 2 = 0$; д) $4x^2 + x - 3 = 0$;

е) $5x^2 - 7x - 24 = 0$; є) $3x^2 - 5x - 12 = 0$.

411. а) $(3x - 1)(x + 2) = 20$; б) $(x - 4)(4x - 3) + 3 = 0$;

в) $(x - 3)^2 + (x + 3)^2 = 12x$; г) $(x + 5)^2 + (x - 2)^2 = 25$;

ґ) $x^2 - 3x + 0{,}81 = 0$; д) $x^2 - 2x + 0{,}36 = 0$;

е) $x^2 - \frac{4}{7}x - \frac{3}{7} = 0$; є) $x^2 + \frac{7}{2}x - 2 = 0$.

412. а) $7(x + 1) = 5x^2 + 3x + 7$; б) $8x^2 + 3(x + 5) = 15 - 2x$;

в) $(x - 1)(x + 1) = 2(x - 1)$; г) $(x - 3)(x + 3) = 2x + 6$.

413. З'ясуйте, за яких значень змінної вирази мають однакове числове значення:

а) $y^2 + 7y + 6$ і $y + 1$; **б)** $3a^2 - a + 1$ і $2a^2 + 5a - 4$.

414. За якого значення a один з коренів рівняння $ax^2 - 2x - 3 = 0$ дорівнює 1?

415. За якого значення b один з коренів рівняння $3x^2 + bx - 6 = 0$ дорівнює 2?

416*. Знайдіть a і розв'яжіть рівняння:

а) $ax^2 - 5x - 3 = 0$, якщо його коренем є число 3;

б) $3x^2 + ax - 8 = 0$, якщо його коренем є число –4.

Розв'яжіть рівняння (417 – 419):

417. а) $x^2 - \frac{5}{3}x - 26 = 0$; б) $x^2 - 4\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2} = 0$;

в) $x^2 - 2{,}4x - 13 = 0$; г) $x^2 - 5{,}6x + 6{,}4 = 0$.

418. а) $\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{x+5}{6}$; б) $\frac{x^2-4}{8} - \frac{2x+3}{5} = 1$;

в) $\frac{(x+1)^2}{12} - \frac{13-x}{4} = \frac{x}{5}$; г) $\frac{x-4}{6} + \frac{(x-2)^2}{8} = \frac{3-x}{5}$.

419. а) $\frac{x^2}{x-2} = \frac{x+2}{x-2}$.

▼ Замінимо послідовно дане рівняння рівносильними, перенісши вираз $\frac{x+2}{x-2}$ у ліву частину рівняння і виконавши віднімання дробів:

$$\frac{x^2}{x-2} - \frac{x+2}{x-2} = 0; \quad \frac{x^2-x-2}{x-2} = 0.$$

Щоб розв'язати утворене рівняння, скористаємось умовою рівності дробу нулю (див. с. 10).

З'ясуємо, за яких значень x чисельник дробу дорівнює нулю.

$x^2 - x - 2 = 0$; $D = 1 + 8$; $\sqrt{D} = 3$;

$x = \frac{1 \pm 3}{2}$; $x_1 = 2$; $x_2 = -1$.

Перевіримо, чи не дорівнює нулю за цих значень змінної знаменник дробу.

Якщо $x_1 = 2$, знаменник $x - 2 = 2 - 2 = 0$, тому 2 не є коренем рівняння. Якщо $x_2 = -1$, знаменник $x - 2 = -1 - 2 = -3 \neq 0$, тому -1 є коренем рівняння.

Відповідь. -1. ▲

б) $\frac{2x^2}{x+3} = \frac{3-5x}{x+3}$;

в) $\frac{5y+1}{y+1} = \frac{y+2}{y}$;

г) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2} = \frac{1}{x+3}$;

ґ) $\frac{3x-1}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} = 1$;

д)* $\frac{x+5}{x^2-25} - \frac{3}{2x+10} = \frac{35x+25}{2x^3-50x}$.

420. Ділянку прямокутної форми, що межує з цегляним муром, обгородили парканом (рис. 19). Яка довжина паркана, якщо площа ділянки становить 6 арів?

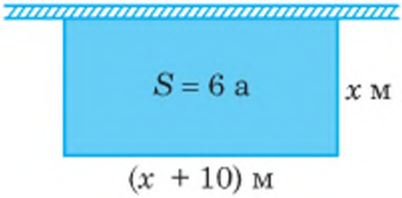


Рис. 19

421. За якого значення x:

а) значення дробу $\frac{2x^2}{3x-4}$ дорівнює 4;

б) значення дробу $\frac{5x-7}{x^2+1}$ дорівнює -6; 0; 0,8;

в) значення дробу $\frac{x^2-2x+6}{x+4}$ дорівнює 1,5; 3;

г) сума дробів $\frac{6}{x+1}$ і $\frac{x}{x-2}$ дорівнює їх добутку?

422*. Чи існує таке ціле число x, за якого різниця значень дробів $\frac{x}{x-1}$ і $\frac{x}{x+1}$ дорівнює $\frac{5}{12}$?

423*. Чи існує від'ємне значення x, за якого сума значень дробів $\frac{x-1}{2x+1}$ і $\frac{x+3}{x+2}$ дорівнює їх добутку?

424*. За якого значення a значення дробу $\frac{a}{a-2}$ у 9 разів більше за значення оберненого дробу?

425*. Двоє учнів розв'язували рівняння $\frac{x+5}{x-7}-5=\frac{4x-40}{13-2x}$. Спочатку вони міркували однаково, записавши у зошитах:

$$\frac{x+5-5x+35}{x-7}=\frac{4x-40}{13-2x};$$

$$\frac{-4x+40}{x-7}=\frac{4x-40}{13-2x}; \qquad \frac{4x-40}{7-x}=\frac{4x-40}{13-2x}.$$

Проте надалі кожен з них продовжував розв'язувати по-своєму. Перший учень записав: «Дроби з рівними чисельниками будуть рівними, якщо рівними є також і їхні знаменники. Відтак $7-x=13-2x$; а, отже, $x=6$».

Другий учень міркував інакше:

$$\frac{4x-40}{7-x}-\frac{4x-40}{13-2x}=0;$$

$$\frac{(4x-40)(13-2x)-(4x-40)(7-x)}{(7-x)(13-2x)}=0;$$

$$\frac{(4x-40)(13-2x-7+x)}{(7-x)(13-2x)}=0; \qquad \frac{(4x-40)(6-x)}{(7-x)(13-2x)}=0;$$

Чисельник: $(4x-40)(6-x)=0; -4x^2+64x-240=0;$

$x^2-16x+60=0;$ $\qquad x_1=10;\ x_2=6.$

При $x=10$ знаменник $(7-x)(13-2x)=(7-10)(13-20)\neq 0$.

При $x=6$ знаменник $(7-x)(13-2x)=(7-6)(13-12)\neq 0$.

Відповідь. $x_1=10$; $x_2=6$.

Хто з учнів розв'язав рівняння неправильно, і в чому полягає допущена помилка?

5.3. Теорема Вієта

① **Залежність між коренями зведеного квадратного рівняння і його другим коефіцієнтом та вільним членом.** Розв'яжіть рівняння $x^2-17x+70=0$ та $x^2+24x+140=0$ і перевірте, чи правильно заповнена таблиця.

Рівняння	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$x^2 - 17x + 70 = 0$	10	7	17	70
$x^2 + 24x + 140 = 0$	–10	–14	–24	140

Порівняйте суму коренів кожного рівняння з його другим коефіцієнтом, а добуток коренів — з вільним членом. Який напрошується висновок?

Доведемо твердження:

Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює його другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену.

Дано: рівняння $x^2 + px + q = 0$, x_1 і x_2 — корені цього рівняння.

Довести: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

▼ Знайдемо корені даного рівняння:

$$D = p^2 - 4q;\ x_1 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2};\ x_2 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2}.$$

Звідси дістанемо:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2} + \frac{-p-\sqrt{D}}{2} = \frac{-p+\sqrt{D}-p-\sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p-\sqrt{D}}{2} = \frac{\left(-p+\sqrt{D}\right)\left(-p-\sqrt{D}\right)}{4} = \frac{(-p)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2}{4} =$$

$$= \frac{p^2 - D}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{p^2 - p^2 + 4q}{4} = q.$$

Отже, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, що й треба було довести. ▲

Цю теорему сформулював французький математик Франсуа Вієт (1540–1603), тому вона й названа його ім’ям.

Теорема Вієта справджується і для зведених квадратних рівнянь, які мають один розв’язок (або інакше: два рівних між собою розв’язки).

Наприклад: $x^2 + 4x + 4 = 0$. Неважко переконатися, що єдиним розв’язком цього рівняння є число –2, тобто $x_1 = x_2 = -2$.

Звідси $x_1 + x_2 = -2 + (-2) = -4$, $x_1 \cdot x_2 = (-2) \cdot (-2) = 4$.

Теорему Вієта часто використовують для усного розв'язання зведених квадратних рівнянь. Наприклад, щоб розв'язати рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$, досить знайти два числа, сума яких ($x_1 + x_2$) дорівнює 3, а добуток $x_1 \cdot x_2$ дорівнює 2. Очевидно, це числа 1 і 2. Отже, $x_1 = 1$; $x_2 = 2$.

Якщо квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ замінити рівносильним йому зведеним рівнянням $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{і} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \qquad (3)$$

②* **Теорема, обернена до теореми Вієта.** Сформулюємо твердження, обернене до теореми Вієта. Відомо, що для того, щоб утворити твердження, обернене до даного, в ньому треба поміняти місцями умову і висновок. Щоб легше розрізняти умову і висновок, твердження доцільно формулювати у вигляді «Якщо ..., то ...» (в такому разі все, що записано перед «то», є умовою, після «то» — висновком).

Враховуючи сказане, теорему Вієта можна сформулювати так:

Якщо числа x_1 і x_2 є коренями квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Умова: числа x_1 і x_2 є коренями квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$;

висновок: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Утворимо твердження, обернене до теореми Вієта, помінявши місцями умову і висновок.

Якщо $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$, то числа x_1 і x_2 є коренями квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$.

З'ясуємо, чи правильне це твердження.

▼ Складемо зведене квадратне рівняння, другий коефіцієнт якого p дорівнює сумі двох даних чисел x_1 і x_2, взятій з протилежним знаком ($p = -(x_1 + x_2)$), а вільний член q дорівнює їх добутку ($q = x_1x_2$). Це рівняння матиме вигляд: $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$;

Перетворимо його ліву частину:

$x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1x_2 = 0;$ $(x^2 - xx_1) - (xx_2 - x_1x_2) = 0;$

$x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = 0;$ $(x - x_1)(x - x_2) = 0.$

Одержаний добуток дорівнює нулю, якщо $x = x_1$ або $x = x_2$, а це означає, що x_1 і x_2 є коренями утвореного рівняння. ▲

Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, можна скласти зведене квадратне рівняння, якщо відомо його корені.

Наприклад, складемо зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа –3 і 5.

▼ Знайдемо його другий коефіцієнт p і вільний член q.

$$p = -(-3 + 5) = -2; \quad q = -3 \cdot 5 = -15.$$

Таким чином, рівняння має вигляд: $x^2 - 2x - 15 = 0$. ▲

? Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте теорему Вієта. Проілюструйте прикладами.
2. Запишіть теорему Вієта для квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.
3. Поясніть, як на основі теореми Вієта можна визначити знаки коренів квадратного рівняння.
4. Сформулюйте теорему, обернену до теореми Вієта. Проілюструйте прикладами.

Задачі та вправи

Знайдіть суму і добуток коренів рівняння (426 – 428):

426°. а) $x^2 - 6x + 8 = 0;$ б) $x^2 + 5x + 6 = 0;$
в) $x^2 - 4x + 3 = 0;$ г) $x^2 - 10x + 9 = 0.$

Використовуючи здобуті результати, розв'яжіть дані рівняння (усно).

427°. а) $x^2 - 2x - 8 = 0;$ б) $x^2 + 3x - 10 = 0;$
в) $x^2 + 7x + 10 = 0;$ г) $x^2 - 6x - 27 = 0.$

428. а) $8x^2 + 2x - 3 = 0;$ б) $4x^2 - 8x + 3 = 0;$
в) $5x^2 + 12x + 7 = 0;$ г) $3x^2 - 10x + 3 = 0.$

429. Не розв'язуючи рівнянь, вкажіть знаки їх коренів:
а) $x^2 - 15x + 4 = 0;$ б) $x^2 + 10x + 2 = 0;$

в) $x^2 - 5x - 6 = 0$; г) $x^2 + 3x - 2 = 0$;

ґ) $3x^2 + 7x + 5 = 0$; д) $2x^2 - 17x - 3 = 0$.

430. Розв'яжіть рівняння (усно):

а) $x^2 - 9x + 20 = 0$; б) $x^2 - 7x + 6 = 0$;

в) $x^2 - 2x - 24 = 0$; г) $x^2 - 5x - 6 = 0$;

ґ) $x^2 + 3x - 10 = 0$; д) $x^2 + x - 30 = 0$.

431°. Складіть зведене квадратне рівняння, коренями якого є числа:

а) 3 і 5; б) 2 і 1; в) –1 і 3;

г) 4 і –7; ґ) –6 і –8; д) –7 і –2.

432. Складіть зведене квадратне рівняння, якщо відомі його корені:

а) $x_1 = 3 - \sqrt{2}$, $x_2 = 3 + \sqrt{2}$;

б) $x_1 = 4 - \sqrt{3}$, $x_2 = 4 + \sqrt{3}$;

в) $x_1 = 2 - \sqrt{5}$, $x_1 = 2 + \sqrt{5}$.

433°. (Усно). За якого значення p рівняння:

а) $x^2 + px + 24 = 0$ має корінь, що дорівнює 6;

б) $x^2 + px - 35 = 0$ має корінь, що дорівнює 7;

в) $x^2 + px + 68 = 0$ має корінь, що дорівнює –17;

г) $x^2 + px - 18 = 0$ має корінь, що дорівнює –1?

434°. (Усно). За якого значення q рівняння:

а) $x^2 - 8x + q = 0$ має корінь, що дорівнює 6;

б) $x^2 + 15x + q = 0$ має корінь, що дорівнює 10;

в) $x^2 - 6x + q = 0$ має корінь, що дорівнює –2;

г) $x^2 + 10x + q = 0$ має корінь, що дорівнює –7?

435. За якого значення q рівняння $x^2 + 3x + q = 0$ матиме корені, різниця яких дорівнює 6?

436. Один із коренів рівняння $x^2 - 6x + q = 0$ на 2 більший за другий. Знайдіть q.

437. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 10x + 8 = 0$, знайдіть суму квадратів його коренів.

438*. Не розв'язуючи квадратного рівняння $x^2 - 7x + 5 = 0$, знайдіть:

а) $x_1^2 + x_2^2$; б) $x_1^3 + x_2^3$.

439*. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 3x - 10 = 0$, утворіть квадратне рівняння, корені якого дорівнюють подвоєним кореням даного рівняння.

440*. У квадратному рівнянні $3x^2 + bx + 15 = 0$ знайдіть b, якщо відомо, що його корені — цілі числа. Скільки розв'язків має задача?

5.4. Квадратний тричлен

! Пригадайте

1. Що таке тричлен? Наведіть приклади.
2. Скільки коренів може мати квадратне рівняння? Від чого це залежить?
3. Як виразити суму і добуток коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ через a, b і c?

① Квадратний тричлен і його корені.

Квадратним тричленом **називається вираз $ax^2 + bx + c$, де a, b, c — дані числа, причому $a \neq 0$, а x — змінна.**

Наприклад:

$3x^2 - 4x + 5$; $0,5x^2 + 7x - 9$; $x^2 + 3,2x - 4$; $x^2 - 3x$; $6x^2 + 1$.

Два останні вирази теж відносяться до квадратних тричленів, у яких відповідно $c = 0$ і $b = 0$.

Як і в квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$, числа a і b називають відповідно ***першим*** і ***другим коефіцієнтами*** тричлена, а c — його ***вільним членом.***

Значення змінної x, за якого значення квадратного тричлена дорівнює нулю, називається *коренем квадратного тричлена.*

Отже, щоб знайти корені тричлена $ax^2 + bx + c$, треба розв'язати квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Наприклад, знайдемо корені тричлена $3x^2 + 5x - 2$. Для цього розв'яжемо рівняння $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

$D = 25 + 24 = 49$; $\sqrt{D} = 7$.

$x = \dfrac{-5 \pm 7}{6}$; $x_1 = \dfrac{1}{3}$; $x_2 = -2$.

Отже, коренями тричлена є числа $\dfrac{1}{3}$ і -2.

З п. 5.2 відомо, що кількість коренів квадратного рівняння, а значить, і відповідного тричлена, залежить від значення виразу $b^2 - 4ac = D$.

Якщо $D > 0$, то квадратний тричлен має два різні корені;

якщо $D = 0$, то квадратний тричлен має один корінь;

якщо $D < 0$, то квадратний тричлен коренів не має.

Вираз $b^2 - 4ac$ називається ***дискримінантом квадратного тричлена*** $ax^2 + bx + c$.

② **Розкладання квадратного тричлена на множники.** Розкладемо на множники тричлен $x^2 - 8x + 12$.

Для цього у тричлені подамо $-8x$ як суму двох доданків: $-8x = -2x + (-6x) = -2x - 6x$ і розкладемо утворений вираз на множники способом групування. Маємо:

$$x^2 - 2x - 6x + 12 = x(x - 2) - 6(x - 2) = (x - 2)(x - 6).$$

Звернемо увагу на те, що коренями тричлена $x^2 - 8x + 12$ є числа 2 і 6 (перевірте).

Розкладемо аналогічним способом на множники тричлен $x^2 + 7x + 6$. Маємо: $x^2 + 7x + 6 = x^2 + x + 6x + 6 = x(x + 1) + 6(x + 1) = (x + 1)(x + 6)$.

Зауважимо, що коренями тричлена $x^2 + 7x + 6$ є числа -1 і -6.

Співвіднесіть тепер множники, на які розкладено відповідні тричлени, і їх корені. Який напрошується висновок щодо утворення цих множників?

Доведемо теорему:

якщо x_1 і x_2 — корені квадартного тричлена $ax^2 + bx + c$, то

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

▼ Перетворимо праву частину рівності, яку потрібно довести:

$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - axx_2 - axx_1 + ax_1x_2 = ax^2 - ax(x_2 + x_1) + ax_1x_2.$

За теоремою Вієта для рівняння $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\ \ x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Звідси $-ax(x_2 + x_1) = -ax\left(-\frac{b}{a}\right) = bx,\ \ ax_1x_2 = a\frac{c}{a} = c.$

Тому $ax^2 - ax(x_2 + x_1) + ax_1x_2 = ax^2 + bx + c.$

Отже, $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c.$ ▲

Розглянемо приклади.

1. Розкласти на множники тричлени:

1) $2x^2 - 3x - 5.$

▼ Знайдемо корені даного тричлена:

$2x^2 - 3x - 5 = 0$; $D = 9 + 40 = 49$; $\sqrt{49} = 7.$

$x = \frac{3 \pm 7}{4}$; $x_1 = 2{,}5$; $x_2 = -1.$

$2x^2 - 3x - 5 = 2(x - 2{,}5)(x - (-1)) = 2(x - 2{,}5)(x + 1).$

Останній вираз, як правило, записують у вигляді $(2x - 5)(x + 1)$ — різницю у перших дужках помножено на 2. ▲

Увага! Перетворюючи подібні вирази, не припускайтеся помилок, на зразок такої: $2(x - 2{,}5)(x + 1) = (2x - 5)(2x + 2).$

У даному разі добуток $(x - 2{,}5)(x + 1)$помножено не на 2, а на 4.

Пам'ятайте: щоб помножити добуток кількох множників на число, слід на це число помножити один із множників, залишивши решту без змін.

2) $4x^2 - 4x + 1.$

▼ $4x^2 - 4x + 1 = 0$; $D = 16 - 16 = 0$; $\sqrt{0} = 0$;

$x_1 = x_2 = 0{,}5.$

$4x^2 - 4x + 1 = 4(x - 0{,}5)(x - 0{,}5) = 2(x - 0{,}5) \cdot 2(x - 0{,}5) =$
$= (2x - 1)(2x - 1).$ ▲

2. Скоротити дріб $\frac{x^2-9}{x^2+4x-21}$.

▼ Розкладемо на множники чисельник і знаменник даного дробу. Маємо:

$$x^2-9=(x-3)(x+3).$$

Знаменник розкладаємо на множники як квадратний тричлен:

$x^2+4x-21=0;\ x=-2\pm\sqrt{4+21}=-2\pm5;\ x_1=3,\ x_2=-7.$

Отже, $x^2+4x-21=(x-3)(x+7)$.

$\frac{x^2-9}{x^2+4x-21}=\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+7)}=\frac{x+3}{x+7}$. ▲

Цікаво знати

Видатний український математик М.В. Остроградський (1801 –1862) скористався встановленим вище твердженням щодо розкладання квадратного тричлена на множники для обґрунтування залежності між коренями квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ і його коефіцієнтами. Ось це обґрунтування.

М. Остроградський (1801 – 1862)

▼ Нехай m — корінь квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$. Тоді

$$am^2+bm+c=0.$$

Віднявши ці рівності, матимемо:

$a(x^2-m^2)+b(x-m)=0$, або $a(x-m)(x+m)+b(x-m)=0$,

$$a(x-m)\left(x+m+\frac{b}{a}\right)=0.$$

З цього випливає, що другий корінь рівняння $n=-\left(m+\frac{b}{a}\right)$.

Відтак, квадратний тричлен $ax^2+bx+c=0$ можна записати в такому вигляді:

$$ax^2+bx+c=a(x-m)(x-n),\text{ або}$$

$$ax^2+\underline{bx}+\underline{\underline{c}}=ax^2-\underline{a(m+n)x}+\underline{\underline{amn}}.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях невідомого, маємо:

$$b=-a(m+n),\quad m+n=-\frac{b}{a},\quad c=amn,\quad mn=\frac{c}{a}.$$

Запитання для самоперевірки

1. Дайте означення квадратного тричлена. Наведіть приклади квадратних тричленів.
2. Що таке корінь квадратного тричлена?
3. Як знайти корені квадратного тричлена?
4. Скільки коренів може мати квадратний тричлен? Від чого це залежить?
5. Як розкласти на множники тричлен $ax^2 + bx + c$, якщо корені дорівнюють m і n?
6. Чи завжди квадратний тричлен можна розкласти на множники? У якому випадку цього зробити не можна?

Задачі та вправи

441°. Скільки коренів має квадратний тричлен:

а) $-4x^2 - 3x + 1$; б) $4x^2 + 2x + 5$; в) $5x^2 - x - 4$;
г) $x^2 + x - 2$; ґ) $-9x^2 - 30x - 25$; д) $2x^2 - 2x + 0,5$?

442°. Знайдіть корені квадратних тричленів:

а) $x^2 - 7x + 12$; б) $x^2 + 5x - 6$; в) $x^2 - 9x + 30$;
г) $4x^2 + x - 3$; ґ) $2x^2 - 7x + 6$; д) $5x^2 - 8x + 3$;
е) $3x^2 + 2x - 8$; є) $9x^2 + 18x + 1$; ж) $4x^2 + x + 1$.

443°. Використовуючи результат виконання попередньої вправи, розкладіть на множники, якщо це можливо, дані там тричлени.

Розкладіть на множники тричлени (444 – 445):

444°. а) $x^2 + 5x - 24$; б) $x^2 + 4x - 5$; в) $x^2 - 8x - 33$;
г) $2x^2 - 5x + 3$; ґ) $2x^2 - x - 3$; д) $3x^2 - 5x - 2$;
е) $3x^2 + 2x - 8$; є) $8x^2 + 10x + 3$; ж) $5x^2 - 6x + 4$.

445. а) $-x^2 + 10x - 21$; б) $-x^2 + x + 90$; в) $-6x^2 + 7x - 2$;
г) $-4x^2 - 7x + 2$; ґ) $-4x^2 - 4x - 1$; д) $-10x^2 + x + 21$.

446. Розкладіть на множники:

а) $x^3 - 3x^2 + 2x$; б) $x^3 + 4x^2 - 21x$; в) $x^3 + 5x^2 - 24x$;
г) $4x^3 + 3x^2 - x$; ґ) $2x^3 - 3x^2 - 20x$; д) $5x^3 + 6x^2 + x$.

447. Запишіть квадратний тричлен, корені якого:

а)° -1 і -3; б)° 2 і -5; в)° 0 і 4;

г)° 3 і 3; ґ) 2 і $0{,}5$; д) $-\frac{1}{2}$ і $-\frac{1}{3}$.

Скоротіть дроби (448 – 450):

448°. а) $\frac{x-4}{x^2-3x-4}$; б) $\frac{x^2+7x+6}{x+1}$;

в) $\frac{(x+2)(x+1)}{x^2+7x+10}$; г) $\frac{x^2+3x}{x^2+x-6}$.

449. а) $\frac{x^2-8x+15}{x^2+7x-30}$; б) $\frac{x^2-10x+21}{x^2-2x-3}$;

в) $\frac{x^2-6x+5}{x^2+x-2}$; г) $\frac{m^2+6m-91}{m^2+8m-105}$.

450. а) $\frac{a^2-2a-99}{18-7a-a^2}$; б) $\frac{y^2-9y-22}{11+10y-y^2}$;

в) $\frac{4x^2+12x+9}{2x^2-x-6}$; г) $\frac{2x^2-x-15}{2x^2+7x+5}$.

451*. Розкладіть на множники вираз, розглядаючи його як квадратний тричлен відносно змінної x:

а) $x^2-5ax+6a^2$; б) $3b^2x^2+7bx+4$.

452*. Скоротіть дроби:

а) $\frac{x^2-2ax-3a^2}{x^2-5ax+6a^2}$; б) $\frac{3y^2-7by+2b^2}{3y^2+2by-b^2}$;

в) $\frac{m^2+mn-2n^2}{m^2-n^2}$; г) $\frac{c^2-12cp-28p^2}{c^2+3c+6p-4p^2}$.

Знайдіть значення виразів, попередньо спростивши їх (453– 454).

453. а) $\frac{49-x^2}{x^2-6x-7}$, якщо $x = 8; -107; 999$;

б) $\frac{6-7x+x^2}{36-x^2}$, якщо $x = 3; 1; 1000$.

454. а) $\dfrac{p^2-11p+10}{20+8p-p^2}$, якщо $p = 3; 1; 101; 998$;

б) $\dfrac{3x^2+16x-12}{10-13x-3x^2}$, якщо $x = 5; 95; 995$.

455*. Чим відрізняються графіки функцій:

а) $y=\dfrac{x^2}{x}$ і $y = x$; б) $y=\dfrac{(x-3)(x-5)}{x-3}$ і $y = x - 5$;

в) $y=\dfrac{x^2+7x+12}{x+4}$ і $y = x + 3$; г) $y=\dfrac{2x^2+3x-2}{x+2}$ і $y = 2x - 1$?

456*. Побудуйте графіки функцій:

а) $y=\dfrac{2x^2+x-3}{2x+3}$; б) $y=\dfrac{-3x^2+16x-5}{6x-2}$.

457. Спростіть вираз:

а) $\dfrac{y^2-6y+8}{y^2-1}\cdot\dfrac{y-1}{y-4}$; б) $\dfrac{3a^2-10a+8}{4a^2-36}\cdot\dfrac{a-3}{a-2}$;

в) $\left(\dfrac{b-3}{b^2-2b-3}+\dfrac{b+3}{b^2+4b+3}\right)\cdot(1-b^2)$;

г)* $\left(\dfrac{x+2}{2x^2+3x-2}-\dfrac{x-1}{3x^2-x-2}\right)\cdot(6x^2+x-2)$.

5.5. Розв'язування рівнянь, що зводяться до квадратних

! Пригадайте

1. Для яких значень a рівність $\sqrt{x}=a$ не має змісту?
2. У якому випадку дріб дорівнює нулю?

До розв'язування квадратного рівняння можна звести розв'язування ряду видів рівнянь, які у початковому вигляді не є квадратними.

① **Біквадратні рівняння.** ***Біквадратним*** називається рівняння, що має вигляд $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Для його розв'язання вводять нову змінну, наприклад y, якою позначають x^2, тобто $x^2 = y$. У цих позначеннях $x^4 = \left(x^2\right)^2 = y^2$ і дане рівняння набуває вигляду $ay^2 + by + c = 0$, тобто є квадратним відносно y. Розв'язавши це рівняння, значення y підставляють у рівняння $x^2 = y$ і знаходять відповідні значення x.

Розв'яжемо рівняння:

1) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

▼ Нехай $x^2 = y$. Тоді $x^4 = y^2$ і дане рівняння набуває вигляду $y^2 - 13y + 36 = 0$. Розв'яжемо його.

$D = 169 - 144 = 25$; $\sqrt{25} = 5$; $y = \dfrac{13 \pm 5}{2}$; $y_1 = 9$, $y_2 = 4$.

Отже, $x^2 = 9$ або $x^2 = 4$. Звідси $x = \pm 3$ або $x = \pm 2$.

Відповідь: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$. ▲

2) $2x^4 - x^2 - 3 = 0$.

▼ $x^2 = y$; $2y^2 - y - 3 = 0$, $D = 1 + 24 = 25$; $\sqrt{25} = 5$;

$y = \dfrac{1 \pm 5}{4}$; $y_1 = \dfrac{3}{2}$, $y_2 = -1$.

$x^2 = \dfrac{3}{2}$, $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$;

$x^2 = -1$, розв'язків немає.

Відповідь: $x_1 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$; $x_2 = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$. ▲

② **Інші види рівнянь.** За допомогою введення нової змінної (такий спосіб розв'язування називають ще способом підстановки) до розв'язування квадратного рівняння можна звести розв'язування і деяких інших видів рівнянь. Розглянемо приклади розв'язування таких рівнянь:

1) $x + \sqrt{x} = -12$.

▼ Якщо ввести позначення $\sqrt{x} = y$, то $x = \left(\sqrt{x}\right)^2 = y^2$ і дане рівняння набуває вигляду $y^2 + y - 12 = 0$.

Розв'язавши його, отримаємо: $y_1 = 3$, $y_2 = -4$.

Звідси $\sqrt{x} = 3$ або $\sqrt{x} = -4$. Остання рівність не має смислу, бо арифметичний квадратний корінь не може набувати від'ємних значень.

Відповідь: $x = 9$. ▲

2) $\left(x^2+x\right)^2-5\left(x^2+x\right)+6=0$.

▼ Нехай $x^2 + x = y$. Тоді рівняння набуває вигляду $y^2 - 5y + 6 = 0$. Розв'язавши його, отримаємо: $y_1 = 2$, $y_2 = 3$.

Отже, $x^2 + x = 2$; $x^2 + x - 2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = -2$;

$x^2 + x = 3$; $x^2 + x - 3 = 0$; $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$; $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$. ▲

Зазначимо, що до розв'язування квадратних рівнянь приводить у багатьох випадках розв'язування рівнянь зі змінною в знаменнику. Загальні підходи до розв'язування таких рівнянь розглянуто на с. 154.

Запитання для самоперевірки

1. Яке рівняння називається біквадратним?
2. Як розв'язати біквадратне рівняння?
3. Скільки розв'язків може мати біквадратне рівняння?
4. У чому суть способу підстановки (введення нової змінної) при розв'язуванні рівнянь?

Задачі та вправи

458°. Розв'яжіть біквадратне рівняння:

а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; б) $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$;
в) $x^4 + 6x^2 - 40 = 0$; г) $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$;
ґ) $x^4 + x^2 + 1 = 0$; д) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$.
е) $4x^4 + 5x^2 + 1 = 0$; є) $2x^4 - 5x^2 - 3 = 0$;
ж) $5x^4 - x^2 + 8 = 0$; з) $(x + 2)^2 = 11x^2 - 4$.

Розв'яжіть рівняння, ввівши нову змінну (459 – 460):

459. а) $x-5\sqrt{x}+4=0$; б) $x-7\sqrt{x}+12=0$;

в) $3x-10\sqrt{x}+3=0$; г) $2x-7\sqrt{x}+6=0$;

ґ) $2x+3\sqrt{x}-2=0$; д) $4x+11\sqrt{x}+6=0$.

460. а) $\left(x^2+5x\right)^2-2\left(x^2+5x\right)-24=0$;

б) $\left(x^2+2x\right)^2-14\left(x^2+2x\right)=15$;

в) $\left(x^2-5x+7\right)^2-\left(x^2-5x+6\right)=1$;

Вказівка: Введіть позначення $x^2-5x+6=y$.

г) $\left(x^2+x+1\right)^2-3x^2-3x-1=0$.

Розв'яжіть рівняння (461 – 464):

461°. а) $\frac{48}{y+2}-3=\frac{18}{y}$; б) $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{30}=\frac{1}{x+2}$;

в) $\frac{80}{x-2}=18-\frac{80}{x}$; г) $\frac{x}{x-2}+\frac{1}{2}=\frac{x+6}{x}$;

ґ) $\frac{12}{y-1}-\frac{7}{y-2}=\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{y-5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{y}$;

е) $\frac{48}{y-2}-\frac{48}{y}=2$; є) $\frac{11}{2x}+\frac{7}{x+3}=1$;

ж) $\frac{3}{x+2}=\frac{15}{2x}-1$; з) $\frac{10}{x}-\frac{1}{2}=\frac{20}{x+6}$.

462. а) $\frac{x+5}{2x-1}=\frac{x+15}{3-x}$; б) $\frac{x-6}{3x-10}=\frac{x-1}{2x-11}$;

в) $\frac{3y+8}{y-4}=\frac{2y+6}{y-3}$; г) $\frac{2x-5}{x-1}=\frac{5x-3}{3x+5}$.

463. а) $\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x-1}=\frac{8}{3}$; б) $\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{5}{2}$;

в) $\frac{1}{3-x}=\frac{8-x}{x+2}-1$; г) $\frac{9(x+12)}{x}-\frac{8x}{x+12}=6$.

464*. а) $\frac{x+3}{3-x}=\frac{x-3}{3+x}-\frac{90}{x^2-9}$;

б) $\frac{3x}{2x-1}+\frac{7x}{2x+1}=\frac{4-20x}{1-4x^2}$;

в) $\dfrac{2x+1}{6x^2-3x}-\dfrac{2x-1}{14x^2+7x}=\dfrac{8}{12x^2-3}$;

г) $\dfrac{2x-5}{x^2-3x}-\dfrac{x+2}{x^2+3x}-\dfrac{x-5}{9-x^2}=0$.

5.6. Застосування квадратних рівнянь для розв'язування задач

① **Рівняння як математична модель прикладної задачі.**

Вам уже неодноразово доводилось розв'язувати різноманітні задачі, вдаючись до складання відповідних рівнянь або їх систем. У чому суть такого розв'язання? Рівняння, складене за умовою задачі, є фактично математичним записом залежностей між величинами, які описує умова задачі. Іншими словами, рівняння — це ***математична модель*** тієї ситуації, про яку йдеться в задачі. Склавши рівняння (побудувавши відповідну модель), ми потім оперуємо з цією моделлю виключно математичними методами, абстрагуючись від реальностей, які стоять за цією моделлю. І лише дійшовши розв'язку рівняння, інтерпретуємо його відповідно до умови задачі. Так математика допомагає розв'язувати різноманітні практичні задачі, що без неї виявляється зробити досить важко, а стосовно багатьох із них — взагалі неможливо.

② Розглянемо кілька прикладів, аби пригадати вже відомі вам підходи для розв'язування задач за допомогою рівнянь.

Задача 1. Протягом певного часу підприємство мало зібрати 480 комп'ютерів. Збираючи щодня по 2 комп'ютери понад план, підприємство упоралося із завданням на 8 днів раніше визначеного терміну. Скільки комп'ютерів збирало підприємство щодня?

▼ Передусім оберемо і позначимо основне невідоме. Таким невідомим може бути те, про що йдеться як у запитанні до задачі, так і в умові (інколи варто вибрати саме другий шлях). У даному випадку спробуємо взяти за основне невідоме кількість комп'ютерів, яку підприємство збирало щодня. Позначимо його буквою x.

Виразимо через x дані числа та невідомі, про які йдеться в задачі. Аналізуючи умову, зауважуємо, що в задачі йдеться про три величини: кількість комп'ютерів, яку підприємство збирало щодня; загальну кількість виготовлених комп'ютерів; кількість робочих днів (за планом і реально). Поділивши загальну кількість комп'ютерів (480) на кількість комп'ютерів, зібраних за один день, отримаємо кількість робочих днів.

Відобразимо ці міркування в таблиці:

Величини	За планом	Реально
Кількість комп'ютерів, зібраних за день	$x-2$	x
Загальна кількість зібраних комп'ютерів	480	480
Кількість робочих днів	$\frac{480}{x-2}$	$\frac{480}{x}$

За умовою задачі значення виразу $\frac{480}{x-2}$ більше за значення виразу $\frac{480}{x}$ на 8. Запишемо це у вигляді рівності (складемо рівняння):

$$\frac{480}{x-2}=\frac{480}{x}+8.$$

Можливі й інші варіанти запису даного відношення між виразами $\frac{480}{x-2}$ і $\frac{480}{x}$:

$$\frac{480}{x-2}-8=\frac{480}{x}, \quad \text{або} \quad \frac{480}{x-2}-\frac{480}{x}=8.$$

Розв'яжемо утворене рівняння:

$$\frac{480}{x-2}-\frac{480}{x}-8=0; \qquad \frac{480x-480(x-2)-8x(x-2)}{x(x-2)}=0;$$

$$\frac{480x-480x+960-8x^2+16x}{x(x-2)}=0; \qquad \frac{-8x^2+16x+960}{x(x-2)}=0;$$

$-8x^2 + 16x + 960 = 0;$ $x^2 - 2x - 120 = 0;$

$x = 1 \pm \sqrt{1 + 120};$ $x_1 = 12,$ $x_2 = -10.$

Обидва ці значення не перетворюють знаменник $x(x-2)$ в нуль, отже, є розв'язками початкового рівняння.

Оскільки кількість комп'ютерів не може виражатися від'ємним числом, то корінь $x = -10$ слід відкинути.

Отже, підприємство збирало щодня 12 комп'ютерів. ▲

Задача 2. Дошка прямокутної форми має площу 54 дм². Від неї відрізали частину, що має ту саму ширину, а довжину 1,5 м. Частина дошки, що залишилася, має форму квадрата. Знайдіть площу цього квадрата.

▼ У даному випадку вибирати за основне невідоме площу квадрата, про яку йдеться в запитанні до задачі, не зовсім зручно, бо тоді довелося б для позначення лінійних розмірів дошки використовувати квадратний корінь (якщо площа квадрата x, то його сторона $\sqrt{x}$). Тому доцільно позначити через x лінійний елемент, наприклад, довжину сторони квадрата в дециметрах, тобто ширину дошки (рис. 20).

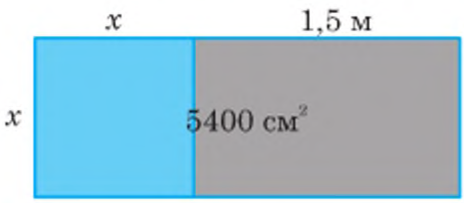


Рис. 20

Відтак, можна виразити площу дошки через введене позначення і дані умови задачі. Довжина дошки в дециметрах становить $x + 15$ (1,5 м = 15 дм), а її площа $(x + 15) \cdot x$. За умовою задачі цей добуток дорівнює 54. Маємо рівняння $x(x + 15) = 54$, яке можна перетворити у зведене квадратне рівняння і розв'язати:

$x^2 + 15x - 54 = 0;$ $x = -7{,}5 \pm \sqrt{56{,}25 + 54} = -7{,}5 \pm 10{,}5;$

$x_1 = 3;$ $x_2 = -18.$

Ширина дошки не може виражатися від'ємним числом, тому умову задачі задовольняє тільки додатний корінь рівняння, тобто 3.

Отже, площа утвореного квадрата дорівнює $3^2 = 9$ (дм²).

Відповідь: 9 дм². ▲

Серед задач, які розв'язують за допомогою квадратних рівнянь, чи не найбільше помилок викликають так звані задачі на спільну роботу. Розглянемо приклади.

Задача 3. Певну роботу один робітник може виконати за 6 год, а другий — за 12 год. За який час вони можуть виконати цю роботу, працюючи разом?

▼ Досить часто можна почути відповідь: «За 18 год» (з відповідним «поясненням»: 6 + 12 = 18). Але ж елементарний аналіз показує, що, працюючи разом, робітники не можуть виконувати роботу довше, ніж кожен працюючи окремо. Щоб не припускатися подібних помилок, поміркуємо над запитаннями:

1) яку частину роботи виконає робітник за 1 год, якщо всю роботу він виконує за 4 год? Відповідь очевидна: $\frac{1}{4}$ (чверть) роботи. Відповідно, якщо всю роботу робітник виконує за 3 дні, то за 1 день він виконає $\frac{1}{3}$ (третину) роботи тощо;

2) за який час робітник може виконати всю роботу, якщо за 1 год він виконує $\frac{1}{5}$ роботи? Зрозуміло, що всю роботу він виконає за 5 год. Якщо ж за 1 год робітник виконує $\frac{1}{6}$ частину роботи, то з усією роботою він упорається за 6 год і т.д.

Повернемося до розгляду задачі 3 і перед тим, як відповісти на поставлене в ній запитання, з'ясуємо, яку частину роботи виконають обидва робітники, працюючи разом, за 1 год. Перший робітник за 1 год виконує $\frac{1}{6}$ роботи, другий — $\frac{1}{12}$ роботи, а разом вони виконають:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{2+1}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4} \text{ (чверть усієї роботи).}$$

Отже, разом вони виконають всю роботу за 4 год. ▲

Задача 4. Два трактористи, працюючи разом, зорали поле за 6 год. Скільки часу потрібно кожному трактористу для виконання цієї роботи окремо, якщо першому трактористові для цього потрібно на 5 год більше, ніж другому?

▼ Позначимо час (в годинах), потрібний для виконання роботи першому трактористу, через x і заповнимо таблицю:

Трактористи	Час виконання роботи (год)	Частина роботи, виконувана за 1 год
Перший	x	$\frac{1}{x}$
Другий	$x-5$	$\frac{1}{x-5}$
Разом	6	$\frac{1}{6}$

Відтак, можемо скласти рівняння: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{6}$.

Розв'яжемо його:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-5}-\frac{1}{6}=0;$$

$$\frac{6(x-5)+6x-x(x-5)}{6x(x-5)}=0;$$

$$\frac{6x-30+6x-x^2+5x}{6x(x-5)}=0;$$

$$\frac{-x^2+17x-30}{6x(x-5)}=0;$$

$$-x^2+17x-30=0;$$

$$x^2-17x+30=0.$$

Скориставшись теоремою Вієта, неважко знайти корені рівняння: $x_1=15$; $x_2=2$.

При жодному з цих значень x знаменник дробу $6x(x-5)$ не дорівнює 0. Отже, рівняння має два розв'язки. Співвідносячи їх з умовою задачі, зауважуємо, що другий корінь не задовольняє умову, бо самотужки тракторист не може виконати роботу швидше (за 2 год), ніж працюючи спільно з другим трактористом (6 год).

Отже, перший тракторист може зорати поле за 15 год, а другий за $15-5=10$ год. ▲

Задачі та вправи

465°. Якщо сторону квадрата збільшити на 10 см, то його площа збільшиться в 4 рази. Знайдіть довжину сторони квадрата.

466°. Якщо сторону квадрата зменшити на 16 дм, то його площа зменшиться в 4 рази. Знайдіть довжину сторони квадрата.

467°. Найменша у світі книжка — мікромініатюрний «Кобзар» — створена українським майстром Миколою Сядристим, і має форму прямокутника, одна сторона якого на 0,13 мм довша за іншу, а площа дорівнює 0,5964 мм^2. Знайдіть розміри цієї книжки.

468*. На виготовлення прямокутної рамки картини-«велетня» М.І. Івасюка «В'їзд Богдана Хмельницького до Києва» використано 19,92 погонних метрів багету завширшки 4 см. Площа полотна картини — 23,2 м^2. Знайдіть розміри полотна картини.

469. Прямокутна ділянка землі площею 2400 м^2 обгороджена парканом, довжина якого дорівнює 200 м. Знайдіть розміри ділянки.

470. Із картону вирізали прямокутник, площа якого дорівнює 3 дм^2, а периметр — 70 см. Визначте розміри прямокутника.

471°. Чи можна накреслити прямокутник площею 36 см^2, щоб його основа була на 5 см більшою від висоти?

472°. Які розміри повинен мати прямокутний трикутник, щоб його площа дорівнювала 150 см^2 і один з катетів був більшим від другого на 5 см?

473°. Один із катетів прямокутного трикутника на 3 см довший від іншого, а гіпотенуза дорівнює 15 см. Обчисліть довжину катетів.

474. Периметр прямокутника дорівнює 46 см, а довжина його діагоналі — 17 см. Знайдіть довжину сторін прямокутника.

475. Від сталевого листа, що має форму квадрата, відрізали смугу завширшки 3 дм, після чого площа листа стала дорівнювати 70 дм². Визначте початкові розміри листа.

476*. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 17 см, а його периметр — 40 см. Обчисліть площу трикутника.

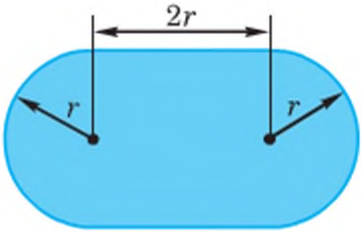


Рис. 21

477*. Знайдіть довжину лінії, якою обмежена фігура, зображена на рис. 21. Площа цієї фігури наближено дорівнює 714 см² ($\pi \approx 3,14$).

478*. Покажіть, що рівняння $x^2 - 58x + 480 = 0$ є спільною математичною моделлю для таких задач:

а) Заготовлено матеріал для побудови огорожі довжиною 116 м. Чи вистачить його, щоб обгородити прямокутну ділянку, площа якої дорівнює 480 м²? Визначте розміри ділянки.

б) Протягом певного часу завод мав випустити 480 машин. Щодня перевиконуючи план на 1 машину і працюючи на 1 день більше, завод випустив 59 машин понад план. Скільки машин випускав завод щодня?

в) Велосипедист їхав із села до міста по шосе, довжина якого 24 км, а повертався іншою дорогою, довжина якої 30 км. Незважаючи на те, що на зворотному шляху швидкість велосипедиста була вищою на 2 км/год, він затратив часу на 6 хв більше. З якою швидкістю повертався велосипедист?

479°. 10 однокласників обмінялися фотографіями. Скільки фотографій роздано?

480°. 10 учасників шахового турніру зіграли один з одним по одній партії. Скільки партій зіграно?

481. Однокласники обмінялися фотокартками. Скільки було учнів у класі, якщо для обміну потрібно 650 фотокарток?

482. У шаховому турнірі було зіграно 28 партій. Визначте кількість учасників турніру, якщо відомо, що кожен шахіст зіграв по одній партії з усіма іншими учасниками турніру.

483. Учасники засідання потиснули один одному руки, і хтось підрахував, що всіх рукостискань було 66. Скільки чоловік брало участь у засіданні?

484. У першості України з футболу відбулося 90 матчів, причому кожна команда грала з усіма іншими двічі. Скільки команд брало участь у турнірі?

485°. Розв'яжіть задачу, записану:

Звичайною мовою	Мовою алгебри
Оля задумала нескоротний дріб, чисельник якого на 5 менший від знаменника.	$\frac{x}{x+5}$
Потім чисельник цього дробу зменшила на 2,	$x-2$
а знаменник збільшила на 16,	$(x+5)+16$
внаслідок чого дістала дріб,	$\frac{x-2}{x+21}$
менший від задуманого на $\frac{1}{3}$.	$\frac{x}{x+5}-\frac{x-2}{x+21}=\frac{1}{3}$
Який дріб задумала Оля?	$\frac{x}{x+5}$ — ?

Дайте пояснення до виразів, що подані праворуч.

486. Учень задумав звичайний дріб, знаменник якого більший за чисельник на 3. До чисельника цього дробу він додав 7, а знаменник збільшив на 5. У результаті учень одержав дріб, більший за задуманий на 0,5. Який дріб задумав учень?

487. Учень задумав додатний дріб, чисельник якого на 4 менший від знаменника. Зменшивши чисельник на 3 і додавши 3 до знаменника, він одержав дріб, удвічі менший від задуманого. Який дріб задумав учень?

488. Чисельник дробу на 1 менший від знаменника. Якщо до чисельника додати 5, а від знаменника відняти 2, то одержимо дріб, втричі більший за даний. Знайдіть даний дріб.

---

489. Для перевезення учасників конґресу в кількості 150 чоловік передбачалося виділити декілька автобусів. Оскільки на конґрес приїхало на 18 учасників більше, то додали ще один автобус і тому в кожний з них посадили порівну, але на 2 чоловіка менше, ніж передбачалося спочатку. Скільки автобусів було виділено для перевезення учасників конґресу?

490. Для перевезення 63 т зерна було замовлено певну кількість вантажівок. Але оскільки у призначений час три вантажівки не прибули, то в кожну машину вантажили на 0,5 т зерна більше, ніж передбачалось. Скільки вантажівок було замовлено?

491. Під час збирання врожаю на двох ділянках було зібрано по 210 ц пшениці з кожної. Площа першої ділянки на 0,5 га менша від площі другої. Скільки центнерів пшениці зібрано з 1 га на кожній ділянці, якщо на першій ділянці урожайність була на 1 ц/га вищою, ніж на другій?

492. У залі кінотеатру було 600 місць. Якщо кількість рядів зменшити на 2, а кількість місць у кожному ряду збільшити на 4, то загальна кількість місць у залі зросте на 72. Скільки рядів у залі?

493°. Відстань між містами A і B, що дорівнює 180 км, автомобіль долає зі швидкістю x км/год, а назад рухається на 10 км/год повільніше. Виразіть через x:

а) швидкість руху автомобіля з B до A;

б) час руху автомобіля з A до B;

в) час руху автомобіля з B до A.

Складіть рівняння, якщо відомо, що в дорозі автомобіль перебував 4,5 год.

494°. Теплохід пройшов 48 км за течією ріки і повернувся назад, здійснивши всю подорож за 5 год (рис. 22). Визначте власну швидкість теплохода, якщо швидкість течії ріки становить 4 км/год.

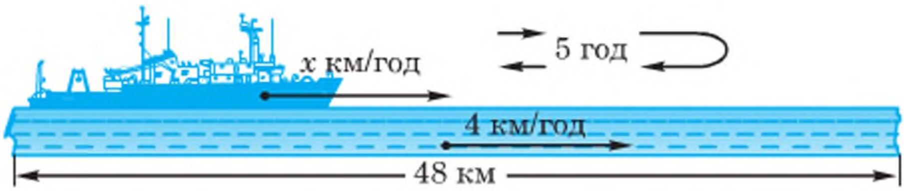


Рис. 22

495°. Катер, власна швидкість якого дорівнює 20 км/год, протягом 3 год пройшов 22 км за течією ріки і 36 км проти течії. Знайдіть швидкість течії.

496. Човен пройшов відстань 24 км за течією ріки і повернувся назад, витративши на зворотний шлях на 1 год більше. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії становить 2 км/год.

497°. Відстань між селом і містом дорівнює 36 км. Велосипедист доїхав до міста і повернувся назад у село за 7 год. З якою швидкістю велосипедист повертався у село, якщо до міста він їхав на 3 км/год швидше?

498. Відстань між селом і містом — 200 км. Виконуючи спеціальний рейс, автобус рухався на 10 км/год швидше, ніж зазвичай, і прибув до міста на 1 год раніше, ніж завжди. З якою швидкістю рухався автобус?

499. Один із лижників пройшов відстань 20 км на 20 хв швидше за другого, бо його шидкість була на 2 км/год більшою. Визначте швидкість кожного лижника.

500. Два автомобілі одночасно вирушають з одного міста в інше. Швидкість першого на 15 км/год менша від швидкості другого, тому перший автомобіль прибув на місце на 2 год пізніше від другого. Визначте швидкість кожного автомобіля, якщо відстань між містами становить 600 км.

Розв'яжіть задачу двома способами:

1) обравши за основне невідоме швидкість одного з автомобілів;

2) обравши за основне невідоме час руху одного з автомобілів.

501. На середині шляху між станціями A і B поїзд «Каменяр» затримали на 10 хв. Щоб прибути на станцію B за розкладом, машиністові довелося збільшити початкову швидкість поїзда на 12 км/год (рис. 23). Визначте початкову швидкість поїзда, якщо відомо, що відстань між станціями дорівнює 120 км.

Рис. 23

502*. Електропоїзд затримався в дорозі на 4 хв і ліквідував запізнення на перегоні завдовжки 20 км, подолавши його зі швидкістю на 10 км/год більшою за належну за розкладом. Визначте, з якою швидкістю повинен рухатися поїзд на цьому перегоні за розкладом.

Увага! Складаючи рівняння, не забудьте подати різницю часу (4 хв) в годинах.

503. Поїзд мав подолати відстань 840 км. На середині шляху його затримали на 20 хв, і тому, щоб прибути вчасно, він збільшив швидкість на 6 км/год. За скільки часу поїзд подолав увесь шлях?

504*. На спортивних змаганнях уболівальник зауважив, що один із ковзанярів проходить двокілометрове коло на 1 хв швидше від свого суперника, а через кожних 20 хв його обганяє. Визначте швидкість кожного ковзаняра.

505. Двоє робітників виконали роботу за 12 днів. За скільки днів може виконати роботу кожен робітник, якщо одному з них для виконання всієї роботи потрібно на 10 днів більше, ніж другому?

506. Дві учнівські бригади, працюючи разом, закінчили садіння дерев на дослідній ділянці за 4 дні. Скільки днів потрібно було б на виконання цієї роботи кожній бригаді окремо, якщо одна з бригад могла б закінчити садіння дерев на 6 днів швидше, ніж друга?

507. Два комбайни, працюючи разом, можуть зібрати урожай з поля за 20 год. За який час цю роботу може виконати кожен комбайн окремо, якщо одному з них для цього потрібно на 9 год менше, ніж другому?

508*. Дві молотарки разом обмолочують зібрану пшеницю за 4 дні. Якби одна з них обмолотила половину збіжжя, а потім друга обмолотила решту, то вся робота була б закінчена за 9 днів. За скільки днів могла б обмолотити всю пшеницю кожна молотарка окремо?

509. Два робітники разом можуть виконати замовлення за 12 днів. Якщо половину роботи виконає перший робітник, а потім його замінить другий, то замовлення буде виконане за 25 днів. За скільки днів виконає замовлення кожний робітник окремо?

510. Два комбайни разом можуть обмолотити певну кількість пшениці за 4 дні. Однак через несправність один із комбайнів обмолотив $\frac{1}{3}$ всього збіжжя, а другий — решту. Уся робота була закінчена за 8 днів. За скільки днів кожний комбайн може обмолотити всю пшеницю, працюючи окремо?

511*. Два оператори комп'ютерного набору, працюючи разом, витрачають на передрук рукопису на 1 год більше, ніж витрачає на передрук половини рукопису перший оператор і $\frac{1}{3}$ рукопису — другий. За скільки годин передрукує рукопис кожний оператор?

Задачі та вправи для повторення

Розв'яжіть рівняння (512 – 516):

512°. а) $3x^2 + 4 = 4x + 2(x^2 - 2x + 4)$;

б) $(4x + 5)(5x - 3) = 7x^2 + 13x - 2$;

в) $(x + 1)(x + 3) + 8x = 5x^2 + 3$;

г) $(3x - 1)^2 - 4x = 1$;

ґ) $-x^2 + 16 + 2x = (4 + 3x)^2$;

д) $(x - 3)(x + 3) = 7x - 19$.

513. а) $(2x + 7)(5 - 2x) = 35 - 5x^2$;

б) $8(x - 1)(x + 1) = 3x(x + 1) + 3x(x - 1)$;

в) $6x = 37 - (3x - 1)^2$;

г) $(2y + 7)(7 - 2y) + 6y^2 = 49 + 7y$.

514°. а) $\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{x+5}{6}$; б) $\frac{x^2+1}{2} - x = 2$;

в) $\frac{x^2+3}{6} - \frac{x+4}{3} = 5$; г) $\frac{x^2-4}{8} - \frac{2x+3}{5} = 1$.

515. а) $\frac{2x-1}{x+7} = \frac{3x+4}{x-1}$; б) $\frac{5y+1}{y+1} = \frac{y+2}{y}$;

в) $\frac{x}{x-2} + \frac{5}{x+2} = \frac{8}{x^2-4}$; г) $\frac{3x+1}{x+2} - \frac{x-1}{x-2} = 1$.

516*. а) $\frac{4}{9x^2-1} - \frac{4}{3x+1} - \frac{x}{1-3x} = 0$; б) $\frac{4}{x+3} - \frac{5}{3-x} = \frac{1}{x-3} - 1$;

в) $\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{3(2x-1)}{7(2x+1)} - \frac{8x}{4x^2-1} = 0$; г) $\frac{2x-5}{x^2-3x} + \frac{x-5}{x^2-9} = \frac{x+2}{x^2+3x}$.

517°. Один корінь рівняння $5x^2 + 4x - 9 = 0$ дорівнює 1. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть другий його корінь.

518. Не розв'язуючи рівняння $x^2 + 2x - 5 = 0$, обчисліть суму квадратів його коренів.

519. Складіть квадратні рівняння за їх коренями:

а) -8 і -5; б) $2+\sqrt{3}$ і $2-\sqrt{3}$;

в) $\frac{5+\sqrt{2}}{7}$ і $\frac{5-\sqrt{2}}{7}$; г) $\frac{-3+\sqrt{6}}{2}$ і $\frac{-3-\sqrt{6}}{2}$.

520*. Не розв'язуючи рівняння $x^2 + 6x - 16 = 0$, складіть нове рівняння, корені якого були б обернені до коренів даного рівняння.

521. Різниця коренів квадратного рівняння $25x^2 - 30x + c = 0$ дорівнює 2. Знайдіть c.

522. Відношення коренів квадратного рівняння $16x^2 - 78x + c = 0$ дорівнює 12. Знайдіть c.

523°. Утворіть квадратний тричлен, що має корені:

а) 6 і –2; б) 3 і $-\dfrac{1}{2}$; в) 0,8 і –0,8.

524°. Розкладіть на множники тричлен:

а) $x^2 - x - 56$; б) $2x^2 + 7x - 15$;
в) $-6x^2 - 7x - 1$; г) $4x^2 - 20x + 25$.

525*. Розкладіть на множники вираз:

а) $6a^2 - ab - b^2$; б) $12x^2 + 5xy - 2y^2$.

526. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2}$; б) $\dfrac{a^2 + 2a - 15}{-a^2 + 4a - 3}$;

в)* $\dfrac{2a^2 - 3ab - 2b^2}{8b^2 - 2a^2}$; г)* $\dfrac{3m^2 - 2mn - n^2}{6m^2 + 5mn + n^2}$.

Розв'яжіть рівняння (527 – 528):

527°. а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; б) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$;
в) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$; г) $3x^4 - 8x^2 - 3x = 0$.

528*. а) $\dfrac{x^2 + 2x - 6}{x} - \dfrac{3x}{x^2 + 2x - 6} = -2$; б) $\dfrac{x^2 - 2x - 6}{x} - \dfrac{3x}{x^2 - 2x - 6} = 2$.

529. Спростіть вираз:

а)° $\dfrac{m^2 - 1}{m^2 - 6m + 8} \cdot \dfrac{m - 4}{m + 1}$;

б) $\dfrac{5a^2 - 5}{2a^2 + 7a - 4} \cdot \dfrac{1 - 2a}{a - 1} + \dfrac{8a + 17}{a + 4}$;

в)* $\left(\dfrac{4x}{x^2 - x - 6} - \dfrac{10}{x^2 - 9}\right) : \dfrac{4x - 8}{x^2 + 5x + 6} - \dfrac{8{,}5 - x}{x - 3}$.

530*. Побудуйте графік функції:

а)° $y = \frac{-x^2 - 4x + 5}{x - 1}$; б) $y = \frac{2x^2 - x - 6}{4x - 8}$.

Розв'яжіть задачі (531 – 541):

531. Чисельник звичайного дробу на 1 більший за знаменник. Якщо до його чисельника додати число 3, а до знаменника — число 18, то здобутий дріб буде менший від початкового на 1. Знайдіть початковий дріб.

532. Знайдіть п'ять таких послідовних натуральних чисел, щоб сума квадратів трьох перших чисел дорівнювала сумі квадратів двох останніх.

533°. Квадрат суми двох послідовних натуральних чисел більший за суму їхніх квадратів на 112. Знайдіть ці числа.

534°. Відстань між двома містами 560 км. Один автомобіль долає цю відстань на одну годину швидше, ніж другий, бо його швидкість на 10 км/год більша від швидкості другого автомобіля. Знайдіть швидкості автомобілів.

535°. Турист проплив човном 6 км проти течії річки і 15 км озером, витративши на подорож по озеру на 1 год більше, ніж річкою. Знаючи, що швидкість течії річки дорівнює 2 км/год, знайдіть власну швидкість човна.

536°. Катер, швидкість якого у стоячій воді дорівнює 20 км/год, піднявся 36 км по річці, а потім спустився вниз за течією на 22 км, витративши на всю подорож 3 год. Яка швидкість течії річки?

537. У кінозалі 160 місць. Під час перебудови кількість рядів збільшено на один, а кількість місць у кожному них — на 2, внаслідок чого отримали 38 додаткових місць. Скільки рядів стало у кінозалі після перебудови?

538. На дослідній ділянці зібрали на 19 кг пшениці більше, ніж посіяли. Все зібране зерно знову посіяли і зібрали в стільки ж разів більше (ніж посіяли), як і першого разу — всього 400 кг зерна. Скільки кілограмів зерна посіяли першого разу?

539. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати певне замовлення за 2 год 55 хв. Перший робітник, працюючи сам, може виконати замовлення на 2 год швидше, ніж другий. За який час може виконати замовлення кожен робітник, працюючи окремо?

540. Заводу було замовлено 105 двигунів. Виготовляючи щодня на 6 двигунів більше, ніж було заплановано, завод виконав замовлення на 2 дні раніше встановленого терміну. Скільки двигунів виготовляв завод щодня?

541*. Два прокатних стани, працюючи одночасно, можуть прокатати певну кількість сталі за 9 год 36 хв. Якщо працюватиме лише перший стан, то на виконання цього завдання потрібно буде на 8 год більше, ніж тоді, коли працюватиме один другий. За який час може виконати завдання кожен стан, працюючи окремо?

Завдання для самоперевірки

I–II рівні

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $2x^2 - 32x = 0$; б) $x^2 = 5x$;

в) $7x - 5x^2 = 0$; г) $3x^2 = 27$;

ґ) $x^2 - 25 = 0$; д) $2x^2 = 10$.

2. Знайдіть довжину сторони квадрата, площа якого дорівнює:

а) 49 см^2; б) 0,81 дм^2;

в) 2,25 см^2; г) 0,0016 м^2.

3. Скільки коренів має рівняння:

а) $2x^2 - 5x - 25 = 0$; б) $x^2 - 10x + 25 = 0$;

в) $5x^2 + 2x + 3 = 0$; г) $3x^2 - 4x + 1 = 0$?

4. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 - 8x - 9 = 0$; б) $x^2 - 5x - 24 = 0$;

в) $3x^2 + 7x + 2 = 0$; г) $2x^2 - 7x + 7 = 0$.

5. Знайдіть коефіцієнти k і p рівняння $x^2 + kx + p = 0$, якщо корені його дорівнюють:

а) 3 і 7; б) 2 і –5; в) $-\frac{1}{2}$ і –2.

6. Знайдіть суму $x_1 + x_2$ і добуток x_1x_2 коренів рівняння, не розв'язуючи його:

а) $x^2 + 10x + 9 = 0$;
б) $x^2 - 7x + 12 = 0$;
в) $x^2 + x - 12 = 0$;
г) $x^2 - 3x = 0$.

7. Розкладіть на множники тричлен:

а) $x^2 - 7x + 12$;
б) $2x^2 - 5x - 3$.

8. Розв'яжіть задачі:

а) добуток двох натуральних чисел, одне з яких на 5 більше від другого, дорівнює 36. Знайдіть ці числа;

б) площа прямокутника дорівнює 120 см². Знайдіть сторони прямокутника, якщо одна з них довша від другої на 7 см.

III рівень

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $4x(x + 3) - 4x(3 - x) = 9(x^2 - 9)$;

б) $\frac{3x+4}{x-6} = \frac{x-2}{4x+3}$;

в) $\frac{1}{y-5} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$;

г) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$;

ґ) $9x^4 - 9x^2 + 2 = 0$.

2. Чи існує таке значення змінної y, за якого:

а) сума дробів $\frac{y-3}{y+2}$ і $\frac{y-34}{2y-5}$ дорівнює 1;

б) різниця дробів $\frac{y+1}{y-2}$ і $\frac{2-y}{y+1}$ дорівнює $3\frac{1}{3}$?

3. Не розв'язуючи рівнянь:

а) $x^2 + 3x - 18 = 0$;

б) $x^2 - 6x + 8 = 0$,

обчисліть значення виразу $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, де x_1 і x_2 — корені даних рівнянь.

4. Різниця коренів рівняння $x^2 - 10x + p = 0$ дорівнює 2. Знайдіть значення p.

5. Скоротіть дроби:

а) $\frac{6m^2 - 6}{2m^2 + m - 3}$;

б) $\frac{4a^2 - 5a - 6}{2a^2 - 5a + 2}$.

6. Розв'яжіть задачі:

а) Від пристані за течією річки відправився пліт. Через 5 год 20 хв від тієї самої пристані слідом за ним вирушив катер, який наздогнав пліт на відстані 20 км від пристані. З якою швидкістю рухався пліт, якщо катер рухався швидше від нього на 12 км/год?

б) Дві групи учнів, працюючи разом, висадили квіти на ділянці за 4 год. За який час кожна група виконала б усю роботу, працюючи окремо, якщо першій потрібно для цього на 6 год менше, ніж другій?

IV рівень

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{7y - 5}{2y - 1} = \frac{45}{4y^2 - 1} - \frac{39}{2y + 1}$;

б) $\frac{1}{x + 1} + \frac{2x - 1}{x^3 + 1} = \frac{2}{x^2 - x + 1}$;

в) $\frac{x}{x - 10} - \frac{8}{x - 6} = \frac{4x}{x^2 - 16x + 60}$;

г) $\left(x^2 + 3x - 2\right)^2 + \left(x^2 + 3x\right)^2 = 10$.

2. Не розв'язуючи квадратного рівняння $2x^2 + 5x - 7 = 0$, складіть рівняння, корені якого на 1 більші за відповідні корені даного рівняння.

3. Побудуйте графік функції $y = \dfrac{-4x^2 + 6x + 4}{4x + 2}$.

4. Розв'яжіть задачі:
а) Маса дерев'яної балки дорівнює 90 кг, а маса залізної, яка на 2 м довша за неї, — 160 кг. Обчисліть масу погонного метра і довжину кожної балки, якщо маса погонного метра залізної балки на 5 кг більша від маси погонного метра дерев'яної балки.
б) По колу, довжина якого 60 м, рівномірно і в одному напрямку рухаються дві точки. Одна робить повний оберт на 5 с швидше за другу і при цьому наздоганяє другу точку кожної хвилини. Знайдіть швидкості точок.

ПОВТОРЕННЯ

§1. ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

542°. За яких значень змінної не мають змісту вирази:

а) $\frac{x}{x-3}$; б) $\frac{x+4}{3+x}$; в) $\frac{2a}{(a-4)(a+2)}$;

г) $\frac{16-x^2}{4x+x^2}$; ґ) $\frac{x+1}{2x+5}-\frac{x}{x-5}$?

543. Знайдіть область визначення функції:

а)° $y=\frac{x^2}{x^2+5x-36}$; б)° $y=\frac{4x}{9x^2-6x+1}$;

в)° $y=\frac{5x-3}{3x^2+7x+8}$; г) $y=\frac{(x-4)^2}{\sqrt{x-1}}$.

544. Знайдіть нулі функції:

а)° $y=\frac{x-2}{x}$; б) $y=\frac{x^2-6x+8}{x+3}$; в)° $y=\frac{(x+1)^2}{x^2-1}$;

г) $y=\frac{4-x^2}{2x+x^2}$; ґ) $y=\frac{x^2+7x+12}{x^2+2x-3}$; д) $y=\frac{x-1}{x^2-4x+3}$.

Спростіть вирази (545 – 548):

545°. а) $\frac{a}{(a+1)^2}\cdot(a+1)$; б) $\frac{b+2}{b^2-6b+9}\cdot(b-3)$;

в) $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{a}{a+1}\right)$; г) $\frac{m+n}{m-n}\cdot\left(1-\frac{m}{n}\right)$.

546. а)° $\frac{1}{6a-4b}-\frac{1}{6a+4b}-\frac{3a}{4b^2-9a^2}$;

б)° $\left(\frac{a+b}{b}-\frac{a-b}{a}\right):\left(\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}\right)$;

в) $\left(\frac{a-x}{a^2+ax+x^2}-\frac{1}{a-x}\right)\cdot\left(\frac{2x+a}{a}+\frac{2a+x}{x}\right)$;

г) $\left(\frac{m+n}{m^2-mn+n^2}-\frac{1}{m+n}\right):\left(\frac{m^2+2n^2}{m^3+n^3}-\frac{m+2n}{m^2-mn+n^2}\right)$.

547. а) $\frac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$;

б) $\frac{a-2}{a^2+2a}:\left(\frac{a}{a^2-2a}-\frac{a^2+4}{a^3-4a}-\frac{1}{a^2+2a}\right)$;

548. а) $\frac{4c^2}{(c-2)^4}:\left(\frac{1}{(c+2)^2}-\frac{1}{(c-2)^2}+\frac{c}{c^2-4}\right)$;

б) $\left(\frac{25}{a^2+5a+25}-\frac{2a}{5-a}-\frac{a^3+25a^2}{a^3-125}\right)\cdot\left(a-5+\frac{15a}{a-5}\right)$.

549*. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної, що входить до нього:

а) $\left(\frac{x^2-2x+4}{4x^2-1}\cdot\frac{2x^2+x}{x^3+8}-\frac{x+2}{2x^2-x}\right):\frac{4}{x^2+2x}-\frac{x+4}{3-6x}$;

б) $\frac{2-y}{5}+\left(\frac{1}{1-2y}\right)^2:\left(\frac{y+2}{4y^3-4y^2+y}-\frac{2-y}{1-8y^3}\cdot\frac{4y^2+2y+1}{2y^2+y}\right)$.

Знайдіть значення виразів (550–551):

550. а) $\frac{a^2-2a+1}{a^3-a^2-a+1}$, якщо $a=-1\frac{2}{3}$;

б) $\left(\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{b}{2b-2a}\right):\frac{2b}{a^2-b^2}$, якщо $a=-5{,}7$, $b=-3\frac{3}{5}$.

551. а) $\left(\frac{m+5}{2m-10}-\frac{m-5}{2m+10}-\frac{50}{25-m^2}\right)\cdot\frac{m-5}{5m}$, якщо $m=-\frac{1}{4}$;

б) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a+b}:\left(\frac{2ab}{b^2-a^2}+\frac{a}{a+b}-\frac{b}{b-a}\right)$, якщо $a=8{,}4$, $b=-\frac{3}{5}$.

552*. Відомо, що $\frac{x}{y}=5$. Знайдіть значення виразів:

а) $\frac{x+y}{y}$; б) $\frac{x-y}{y}$; в) $\frac{x+2y}{y}$.

553*. Знайдіть значення виразів:

а) $\frac{x}{y}$; б) $\frac{y}{x+y}$; в) $\frac{x-2y}{y}$, якщо $\frac{x+y}{y}=9$.

Розв'яжіть рівняння (554–556):

554°. а) $\frac{6x}{3x-1}=\frac{2x+1}{x}$; б) $\frac{2x+3}{2x-1}=\frac{x-5}{x+3}$;

в) $\frac{1+3y}{1-3y}=\frac{5-2y}{1+2y}$; г) $\frac{1+x-6x^2}{3x+1}=x$.

555. а) $\frac{5}{x-2}-\frac{4}{x-3}=\frac{1}{x}$; б) $\frac{3x+1}{x-3}+\frac{x-5}{x}=4$;

в) $\frac{1}{x-3}+\frac{4}{x+1}=\frac{4}{(x-3)(x+1)}$; г) $\frac{3}{2y-1}+\frac{7}{2y+1}=\frac{4-20y^2}{1-4y^2}$.

556. а) $\frac{5-4x^2}{x^2-4}=\frac{3x}{x+2}+\frac{7}{2-x}$;

б) $\frac{8x}{3x-6}-\frac{3x-1}{4x+8}=\frac{23x^2+11}{12y^2-48}$;

в) $\frac{2x^2-1}{x^3-27}-\frac{1}{x-3}=\frac{x-5}{x^2+3x+9}$;

г) $\frac{19+2x^2}{x^3+125}=\frac{3}{x+5}-\frac{x-7}{x^2-5x+25}$.

Обчисліть значення виразів (557 – 558):

557°. а) $\frac{3^{15}+3^{13}}{3^{12}+3^{14}}$; б) $\frac{17^5+17^2}{17^8+17^5}$; в) $\frac{10^{10}-10^6}{10^8+10^6}$; г) $\frac{5^{15}-5^{13}}{5^{12}+5^{11}}$.

558. а) $\frac{5^{-3}:5^{-4}+3^5:81}{2^{-3}+(0{,}148)^0\cdot 2}$; б) $\frac{7^{-1}:7^{-2}+2^{-3}\cdot 8}{8\cdot 2^{-4}+18\cdot 3^{-2}}$.

559. Запишіть дріб у вигляді цілого виразу, попередньо спростивши його:

а) $\frac{(a-b)^{-1}}{(b-a)^{-2}}$; б) $\frac{(x^{-2}-2x^{-1}y^{-1}+y^{-2})xy}{x^{-1}-y^{-1}}$.

560. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{x^{-2}-1}{x^{-1}-1}$; б) $\dfrac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-2}+2a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}$.

Спростіть вирази (561–569):

561°. а) $2\sqrt{5}-\sqrt{45}+\sqrt{20}$; б) $2\sqrt{2}+3\sqrt{8}-2\sqrt{32}$.

562. а) $\sqrt{0{,}49x^3y^4}$; б) $\sqrt{2x}\cdot\sqrt{8x}$.

563°. а) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)$; б) $0{,}5\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$.

564. а) $\left(1-\sqrt{5}\right)^2\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)$; б) $\left(3-\sqrt{7}\right)^2\cdot\left(\sqrt{7}+3\right)^2$.

565*. а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; б) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$;

в) $\dfrac{1}{7+4\sqrt{3}}+\dfrac{1}{7-4\sqrt{3}}$; г) $\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2$.

566. а) $\sqrt{x-2}\left(x\sqrt{x-2}+2\sqrt{x-2}\right)$; б) $\sqrt{x-2}\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$.

567°. а) $\sqrt{(x-2)^2}$, якщо $x\ge 2$; б) $\sqrt{(x-2)^2}$, якщо $x<2$.

568. а) $\sqrt{x^2-6x+9}$, якщо $x\ge 3$; б) $\sqrt{x^2-6x+9}$, якщо $x<3$.

569. а) $\sqrt{x^2+2-2\sqrt{2}x}$, якщо $x\ge\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{x^2+2-2\sqrt{2}x}$, якщо $x<\sqrt{2}$.

570. Скоротіть дріб:

а) $\dfrac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y}$; б) $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

Винесіть множник з-під знака кореня (571–573):

571. а)° $\sqrt{2\cdot\left(3-\sqrt{10}\right)^2}$; б)° $\sqrt{18\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)^2}$;

в) $\sqrt{\dfrac{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}{8}}$; г) $\sqrt{\dfrac{20}{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}}$.

572. а) $\sqrt{32\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)^4}$; б) $\sqrt{48\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)^4}$;

в) $\sqrt{32\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)^4}$; г) $\sqrt{16\cdot\left(\sqrt{8}-3\right)^2}$.

573. а) $\sqrt{(1-x)^3}$ при $x \le 1$; б) $\sqrt{x^4(x-2)^2}$ при $x \le 2$.

Винесіть множник з-під знака кореня і назвіть допустимі значення букв (574–575):

574* а) $\sqrt{(a-3)^3}$; б) $\sqrt{1-3a+3a^2-a^3}$;

в) $2\sqrt{(x-3)^2}$; г) $4\sqrt{(x-2)^4}$.

575*. а) $\sqrt{(2a-3)^2}$; б) $\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)^3}$.

Внесіть множник під знак кореня (576 – 577):

576°. а) $-2\sqrt{3}$; б) $-3\sqrt{2}$; в) $-0{,}5\sqrt{2x}$.

577. а) $\frac{1}{x+1}\sqrt{\frac{1}{x}+x+2}$, $x>0$; б) $\frac{2a}{a-b}\sqrt{\frac{a}{2}-\frac{b^2}{2a}}$, $a>b$, $a>0$.

578. Доведіть рівності:

а) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=4+\sqrt{15}$; б) $\frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2-\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Знайдіть допустимі значення x у виразах (579 – 581):

579°. а) $\sqrt{x-2}$; б) $\sqrt{2-x}$; в) $\sqrt{3x-2}$; г) $\sqrt{2x-6}$.

580. а) $\sqrt{x-2}+\sqrt{5-x}$; б) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}$.

581. а) $\frac{4}{\sqrt{3-x}}+\frac{1}{x}$; б) $\sqrt{(x-5)^2}+\sqrt{x-6}$.

Спростіть вирази та обчисліть їх значення (582 – 583):

582°. а) $3\sqrt{a^3}-\sqrt{a}$, якщо $a=5$; б) $5\sqrt{4a^3}-3\sqrt{a}$, якщо $a=2$.

583. а) $3\sqrt{(a-4)^2}+\sqrt{a^2}$, якщо $a=3$;

б) $4\sqrt{(5-a)^2}+\sqrt{a^2}$, якщо $a=-3$.

584*. а) $\sqrt{\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}+2}:\sqrt{\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}-2}\cdot\left(1-\sqrt{a}\right)-\sqrt{a}$, якщо $a=0{,}3$;

б) $\sqrt{\frac{a\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}-\sqrt{a}}\cdot\sqrt{\frac{a\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}-1}+\sqrt{a}}-1$, якщо $a=0{,}5$.

585*. а) $\sqrt{\left(\sqrt{a}+1\right)^2-4\sqrt{a}}+\sqrt{\left(\sqrt{a}-1\right)^2+4\sqrt{a}}$, якщо $a = 0{,}7$;

б) $\sqrt{a+2\sqrt{a+1}+2}+\sqrt{a-2\sqrt{a+1}+2}$, якщо $a = -0{,}7$.

586. Для побудови відрізка довжиною $\sqrt{2}$ см досить побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник з катетами довжиною 1 см. Як побудувати відрізок довжиною:

а) $\sqrt{3}$ см; б) $\sqrt{5}$ см; в) $\sqrt{6}$ см?

Виконайте відповідні побудови.

587. Розв'яжіть рівняння:

а) $6x^2 = x$; б) $4x^2 = 0$;

в) $9x^2 - 1 = 0$; г) $(1 - x)(1 + x) = 2x^2 - 5$;

ґ) $(x - 4)^2 = x(5x - 8) + 8$; д) $(x - 3)(x + 2) = 5x - 6$;

е) $(2x - 1)(1 + 2x) = (x - 2)^2 - 5$.

588. За яких значень k рівняння має один корінь:

а) $16x^2 + kx + 9 = 0$; б) $kx^2 - 100x + k = 0$;

в) $15x^2 - 90x + k = 0$; г) $25x^2 + kx + 2 = 0$?

Розв'яжіть рівняння (589 – 594):

589°. а) $x^2 - x = 12$; б) $4x = 5 - x^2$; в) $5x = 6 - x^2$.

590°. а) $x^2 = 12 + x$; б) $7x = x^2 + 12$; в) $x + 20 = x^2$.

591°. а) $3x^2 - 5x - 2 = 0$; б) $2x^2 = 7x - 6$.

592°. а) $x - 3 = 4x^2$; б) $5x^2 + 3 = 8x$.

593. а) $\dfrac{3x-7}{x+5}=\dfrac{x-3}{x+2}$; б) $\dfrac{5-x}{2x-1}=\dfrac{15-4x}{3x+1}$.

594*. а) $\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+1}$;

б) $\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{2}{x-3}=\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{4}{x-1}$.

595. Складіть квадратне рівняння, коренями якого є числа:

а)° 3 і –5; б)° 0 і 4;

в) $5-\sqrt{3}$ і $5+\sqrt{3}$; г) $\dfrac{6+\sqrt{2}}{2}$ і $\dfrac{6-\sqrt{2}}{2}$.

596. Один корінь квадратного рівняння дорівнює $4+\sqrt{3}$, а сума коренів дорівнює 8. Складіть це рівняння.

597. Не розв'язуючи квадратного рівняння $x^2 - 5x + 3 = 0$, складіть квадратне рівняння, корені якого дорівнюють подвоєним кореням даного рівняння.

598. Виконайте попереднє завдання стосовно рівнянь:

а) $x^2 + 7x + 4 = 0$; б) $x^2 - 6x - 3 = 0$;

в) $3x^2 - 10x + 2 = 0$; г) $5x^2 + x - 1 = 0$.

599. За якого значення a один із коренів рівняння $ax^2 - 3x - 5 = 0$ дорівнює 1?

600. Доведіть, що один із коренів рівняння $ax^2 - (a + c)x + c = 0$ дорівнює 1.

601*. Доведіть, що корені рівняння $cx^2 + bx + a = 0$ обернені до коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

602. Чи існують такі значення x, для яких сума дробів $\frac{x+1}{x-5}$ і $\frac{10}{x+5}$ дорівнює їх добутку?

603°. Розкладіть на множники вирази:

а) $a^2 - 8a + 15$; б) $x^2 + 2x - 48$; в) $m^2 - 4m + 3$;

г) $5y^2 + 8y + 3$; ґ) $5x^2 - 3x - 14$; д) $2b^2 + 7b - 9$.

604. Скоротіть дроби:

а)° $\frac{a^2+2a+1}{a^2+8a+7}$; б)° $\frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+9}$;

в)° $\frac{6a^2-11a-2}{6a^2-5a-1}$; г)° $\frac{3x^2-5x-12}{3x^2-2x-8}$.

605. Знайдіть значення дробу, попередньо скоротивши його:

а) $\frac{x^2+x-2}{3x^2+4x-4}$, якщо $x = \frac{1}{3}$;

б) $\frac{6a^2-7a-3}{2a^2-a-3}$, якщо $a = -2$;

в) $\frac{3a^2-14a-5}{2a^2-13a+15}$, якщо $a = \frac{2}{3}$;

г) $\frac{12x^2-x-1}{3x^2+5x-2}$, якщо $x = -0{,}75$.

606. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної на всій області визначення виразу:

а) $\left(\frac{22}{a^2+a-30}-\frac{10}{a^2-5a}\right)\cdot\frac{a^2-36}{48}+\frac{3}{2a}$;

б) $\frac{b-4}{b-6}-\frac{b}{3}\cdot\left(\frac{10}{b^2-2b-24}-\frac{4}{b^2+4b}\right)$;

в) $\left(\frac{a}{3a^2+a-2}+\frac{8}{9a^2-4}\right):\frac{3a+4}{9a^2-4}-\frac{1}{a+1}$;

г) $\left(\frac{4(a-2)}{a^2-a-6}+\frac{a-3}{4-a^2}\right)\cdot\frac{a^2-4}{a-1}-\frac{2}{a-3}$.

Розв'яжіть рівняння (607 – 609):

607. а) $\frac{13}{2x^2+x-21}+\frac{1}{2x+7}=\frac{6}{x^2-9}$;

б) $\frac{25x-21}{2x^2+5x-12}+\frac{2x-3}{x+4}+\frac{x+4}{3-2x}=0$.

608. а)° $x^4-2x^2-8=0$; б)° $2x^4-11x^2+5=0$;

в) $3x^4+14x^2+8=0$; г) $x^5-5x^3+4x=0$.

609. а) $\left(x^2-8\right)^2+4\left(x^2-8\right)-5=0$;

б) $\left(x^2+6x\right)^2+8\left(x^2+6x\right)-9=0$;

в)* $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\frac{1}{x}\right)-4=0$;

г)* $\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}=\frac{18}{x^2+2x+1}$.

§2. ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

610°. Від листа жерсті, що має форму квадрата, відрізали смужку завширшки 3 см, внаслідок чого площа листа стала дорівнювати 10 см^2. Визначте початкові розміри листа жерсті.

611. Від нитки, довжина якої дорівнює периметру деякого квадрата, відрізано 36 см. Довжина вкороченої таким чином нитки дорівнює периметру іншого квадрата, площа якого у 2,25 разу менша від площі першого. Визначте початкову довжину нитки.

612. Який із прямокутників з периметром 90 м має площу 0,05 га?

613°. Для огорожі прямокутної ділянки площею 12 арів потрібно 140 погонних метрів матеріалу. Які розміри має ця ділянка?

614. На скільки відсотків треба збільшити довжину сторони квадрата, щоб його площа збільшилася у 2,25 разу?

615. На скільки відсотків треба збільшити довжину радіуса круга, щоб його площа стала більшою на 69%?

616. На скільки відсотків треба зменшити довжину сторони квадрата, щоб його площа зменшилась на 36%?

617. На скільки відсотків треба зменшити довжину радіуса круга, щоб його площа зменшилась на 64%?

618. З колоди діаметром 40 см (рис. 24) треба вирізати брус, розміри поперечного перерізу якого відносилися б, як 3 : 4. Визначте розміри поперечного перерізу бруса.

619. Брус з поперечним перерізом прямокутної форми має найбільшу міцність, якщо його розміри відносяться, як $1 : \sqrt{2}$. Визначте найбільші розміри поперечного перерізу бруса найбільшої міцності, який можна випиляти з колоди циліндричної форми діаметром 42 см (рис. 25).

620. Якої найбільшої ширини можна випиляти дошки з колоди діаметром 40 см, якщо потрібно виготовити 8 дощок (рис. 26) однакової ширини і товщина кожної дошки має бути меншою від ширини на 20 см?

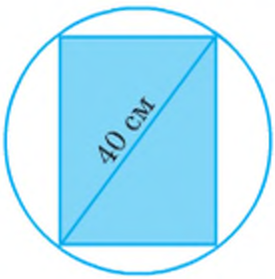


Рис. 24

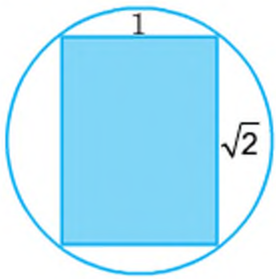


Рис. 25

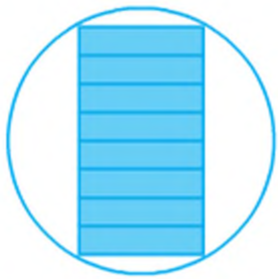


Рис. 26

621. Учні 8 класу обмінялися фотографіями один з одним. Скільки було учнів, якщо для обміну використали 380 фотографій?

622. На огородженій ділянці прямокутної форми довжиною 150 м і шириною 110 м розбито прямокутний газон, який однаково віддалений від огорожі. Знайдіть довжину і ширину газону, коли відомо, що його площа становить $\frac{4}{11}$ площі ділянки.

623. Автотурист проїхав відстань 400 км між містами A і B з певною середньою швидкістю. Повертаючись назад, він 2 год їхав з тією самою швидкістю, а потім збільшив її на 10 км/год і повернувся в місто A, витративши на зворотний шлях на 40 хв менше, ніж на шлях від A до B. Скільки часу витратив автотурист на дорогу назад?

624. Велосипедист проїхав 40 км від міста до турбази. Повертаючись назад, він 2 год їхав з тією самою швидкістю, а потім зробив зупинку на 20 хв. Їдучи далі, велосипедист збільшив швидкість на 4 км/год, а тому шлях назад проїхав за стільки часу, як і шлях з міста до турбази. Скільки часу велосипедист їхав з міста до турбази?

625. Поїзд був затриманий у дорозі на 6 хв. Це запізнення було ліквідовано на перегоні 20 км за рахунок збільшення швидкості на 10 км/год. Яка швидкість поїзда за розкладом?

626. Від будинку до школи 400 м. Старшокласник робить на цьому шляху на 300 кроків менше, ніж молодший школяр, бо в нього крок на 30 см довший. Яка довжина кроку кожного учня?

627. Двоє робітників, працюючи разом, можуть виконати роботу за 6 год. Якщо спочатку перший робітник виконає половину цієї роботи, а потім другий — решту, то роботу буде виконано за 12 год 30 хв. За який час кожен робітник, працюючи окремо, може виконати цю роботу?

628*. Збирання врожаю з ділянки почав один комбайн. Через 2 год до нього приєднався другий комбайн, і через 6 год їх спільної роботи виявилося зібраним 80% урожаю. За який час зміг би зібрати урожай з ділянки кожен комбайн, якщо першому потрібно для цього на 5 год більше, ніж другому?

629. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 8 дм. Довжина гіпотенузи — 3,4 дм. Знайдіть площу трикутника.

630. Гіпотенуза прямокутного трикутника довша за один з катетів на 3,2 дм, а за другий — на 0,9 дм. Знайдіть катети трикутника.

Завдання для самоперевірки за курс 8 класу

I–II рівні

1. Запишіть вираз у вигляді дробу:

а) $\frac{3}{2x}:\frac{2}{3x}$; б) $\frac{4x+1}{x^2}\cdot\frac{x}{2}$;

в) $\frac{9}{x+1}\cdot\frac{x^2+x}{18}$; г) $\frac{1}{a+b}:\frac{2}{a^2-b^2}$.

2. Виконайте дії:

а) $\frac{a+b}{ab}-\frac{a-c}{ac}$; б) $\frac{4}{x^3}-\frac{y}{6x^4}$;

в) $\frac{m-n}{m^2}+\frac{m+n}{mn}$; г) $\frac{6}{y^2}-\frac{8}{xy}$.

3. Спростіть вираз:

а) $\frac{7}{x-4}-\frac{9-x}{x^2-16}$; б) $\left(\frac{m+5}{m-5}-\frac{m}{m+5}\right)\cdot\frac{m+5}{3m+5}$;

в) $\frac{5}{x-7}+\frac{x+4}{x^2-49}$; г) $\left(\frac{y+1}{y-1}-\frac{y}{y+1}\right):\frac{3y+1}{y^2+y}$.

4. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x^2-4}{x}=0$; б) $\frac{x^2-9}{x+3}=0$.

5. Спростіть вираз:

а) $\frac{3x^{-4}}{y^{-6}}\cdot\frac{y}{12x^5}$; б) $\frac{15a}{4b^{-2}}:\frac{3b}{16a^{-1}}$;

в) $\frac{5c^{-2}b^3}{3}\cdot\frac{6c^4}{b^{-3}}$; г) $\frac{2m^{-4}n}{3a^2}:\frac{m^3n^{-2}}{18a^{-8}}$.

6. Спростіть вираз:

а) $\left(\sqrt{3}-1\right)^2-\sqrt{12}$; б) $\left(5\sqrt{2}-7\sqrt{3}\right)\sqrt{6}$;

в) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2+\sqrt{40}$; г) $\sqrt{8}-\left(\sqrt{10}-\sqrt{5}\right)\sqrt{5}$.

7. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2+3x-4=0$; б) $3x^2-7x+2=0$;

в) $x^2-5x+6=0$; г) $2x^2+7x+3=0$.

8. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння, не розв'язуючи його:

а) $x^2 - 12x + 6 = 0$; б) $x^2 - 5x - 6 = 0$;

в) $x^2 + 8x + 12 = 0$; г) $x^2 + 7x - 30 = 0$.

9. Складіть квадратне рівняння, корені якого дорівнюють:

а) –4 і 2; б) 1 і 3; в) 5 і 5.

10. Розкладіть на множники вираз:

а) $x^2 - 9x + 20$; б) $5x^2 + 13x - 6$.

11. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x}$. Користуючись графіком, знайдіть наближені значення:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{8}$.

12. Розв'яжіть задачі:

а) Чисельник правильного дробу на 2 менший від знаменника. Якщо чисельник дробу збільшити на 2, а знаменник збільшити у 2 рази, то отримаємо $\frac{1}{2}$. Знайдіть дріб.

б) Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 22, а різниця їх добутку і числа 20 становить 100.

III рівень

1. Доведіть тотожність:

а) $\left(\frac{2a}{a+3} - \frac{4a}{a^2+6a+9}\right) : \frac{a+1}{a^2-9} - \frac{a^2-9a}{a+3} = a$;

б) $\frac{b^2-3b}{(b+3)^2} : \left(\frac{b^2+9}{b^2-9} + \frac{b}{b+3} - \frac{b}{3-b}\right) = \frac{b}{b+3}$;

в) $\left(\frac{a}{a-1} + \frac{a^2-1}{a^2-1} - \frac{a}{a+1}\right) : \frac{a^2+a}{(1-a)^2} = \frac{a-1}{a}$;

г) $\left(\frac{4-2y}{y+6} + y\right) : \frac{y^2+2y}{y^2-36} + \frac{12}{y} = y - 4$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x}{x-3} - \frac{5}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$; б) $\frac{1}{x^2-9} + \frac{1}{3x-x^2} = \frac{3}{2x+6}$;

в) $\frac{2}{1-x^2}+\frac{3}{x^2-2x+1}=\frac{1}{x+1}$;   г) $\frac{4}{x^2+6x+9}=\frac{6}{9-x^2}+\frac{1}{x-3}$.

3. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

а) $\frac{10\sqrt{m}}{n-m}+\frac{5}{\sqrt{n}+\sqrt{m}}$, якщо $n=\frac{4}{9}$, $m=\frac{16}{81}$;

б) $\frac{-3}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{6\sqrt{a}}{a-b}$, якщо $a=\frac{1}{4}$, $b=2\frac{17}{16}$;

в) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}-\frac{5\sqrt{m}}{n-m}$, якщо $m = 6{,}25$, $n = 5$;

г) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{4\sqrt{b}}{b-a}$, якщо $a=1\frac{7}{6}$, $b=4$.

4. Не розв'язуючи квадратного рівняння $2x^2 - 6x - 9 = 0$, знайдіть:

а) $x_1 + x_1x_2 + x_2$;   б) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$,

де x_1 і x_2 — корені даного рівняння.

5. Скоротіть дріб:

а) $\frac{7a-2a^2-3}{4a^2-1}$;   б) $\frac{2x^3+16}{10-x-3x^2}$.

6. Побудуйте графік функції $y = x^2$. Користуючись графіком, знайдіть наближені значення:

а) $\sqrt{3}$;   б) $\sqrt{6}$;   в) $\sqrt{7}$.

7. Розв'яжіть рівняння: $\frac{x}{3(x^2-1)}+\frac{2x}{3(1-x^4)}=\frac{1}{x(x^2+1)}$.

8. Розв'яжіть задачі:

а) Із міста в село виїхав автобус, а через 20 хв із села йому назустріч вирушив другий автобус, швидкість якого на 10 км/год більша. Автобуси зустрілися на середині шляху між містом і селом довжиною 200 км. Знайдіть швидкість кожного автобуса.

б) Один насос може наповнити басейн на 24 год швидше за другий. Через 8 год після того, як було включено другий насос, включили перший, і через 20 год виявилося, що наповнено $\frac{2}{3}$ басейну. За скільки годин може наповнити басейн кожен насос окремо?

IV рівень

1. Доведіть, що за всіх допустимих значень змінної дані вирази не залежать від неї:

а) $\frac{12b-4b^2}{2b+3}+\frac{1}{2b-3}:\left(\frac{4}{4b^2-9}-\frac{6b-9}{8b^3+27}\right)$;

б) $\frac{3n+14}{n+4}-\left(\frac{n-4}{n+6}\right)^2\cdot\left(\frac{n+21}{16-8n+n^2}-\frac{n+3}{16-n^2}\right)$;

в) $\left(\frac{x^2-2x+4}{4x^2-1}\cdot\frac{2x^2+x}{x^3+8}-\frac{x+2}{2x^2-x}\right):\frac{4}{x^2+2x}-\frac{x+4}{3-6x}$;

г) $\left(\frac{x+5}{x^2-81}+\frac{x+7}{x^2-18x+81}\right):\left(\frac{x+3}{x-9}\right)^2+\frac{7+x}{9+x}$.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $\left(\frac{5x+3}{2x-1}\right)^2+\left(\frac{2x-1}{5x+3}\right)^2=4{,}25$;

б) $\frac{1-x\sqrt{3}}{1+x\sqrt{3}}-\frac{1+x\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}=\frac{13}{1-3x^2}$;

в) $3x^2-3x-2=\frac{2}{3x^2-3x-1}$;

г) $2(5x-1)^2+35x-11=0$.

3. Розкладіть на множники:

а) x^4-12x^2+32; б) $6x^4-5x^2+1$.

4. Скоротіть дріб: $\frac{a^4-11a^2+24}{a^4-17a^2+72}$.

5. Не розв'язуючи квадратного рівняння $x^2-6x-10=0$, знайдіть суму квадратів і суму кубів його коренів.

6. Розв'яжіть рівняння $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)=\frac{10}{9}$.

7. Розв'яжіть графічно рівняння $\frac{2}{x} = x^2 - 3$.

8. Розв'яжіть задачі:

а) Два пішоходи вийшли одночасно назустріч один одному — перший з пункту A, другий з пункту B — і зустрілись через 3 год. За який час пройшов відстань між пунктами кожен пішохід, якщо перший прийшов у B на 2,5 год пізніше, ніж другий прийшов до A? Відстань між пунктами 30 км.

б) Два куски латуні мають масу 30 кг. Перший кусок містить 5 кг чистої міді, а другий — 4 кг. Скільки відсотків міді містить перший кусок латуні, якщо другий містить її на 15% більше, ніж перший?

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

Розділ І

§1. **11.** а) –6; б) 2 і –2; в) 1; г) розв'язків немає. **16.** $\frac{pn}{1000m}$; 3 рейси. **17.** а) $h = \frac{S - a^2}{b - a}$, $a \neq b$. **21.** а) $\frac{m - 2n}{3}$; в) $\frac{5ab^3}{a - 2}$. **22.** в) $x \neq 2$ і $x \neq -2$. **24.** г) $\frac{c}{d}$; д) $\frac{1}{2x^2}$. **26.** в) $\frac{x + y}{x - y}$. **27.** в) $\frac{x - 5}{x + 5}$. **30.** а) $\frac{1}{x^2 + xy + y^2}$; в) $\frac{2a - b}{b}$. **31.** а) $\frac{b + c}{x + y}$; б) $a + b - c$; в) $\frac{y - 1}{x + y}$; г) $\frac{x + y}{x - y}$. **32.** а) $\frac{4 - 2x + x^2}{(x + 2)^2}$. **36.** в) –0,43. г) 5; ґ) 2. **39.** *Вказівка.* $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot 2n = 2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n)$. **45.** 101. **47.** г) $\frac{3}{2m}$. **48.** б) $\frac{2a}{c - d}$. **49.** д) $\frac{x - z}{xz}$. **50.** б) $\frac{3(x^2 - y^2)}{x^2y^2}$. **52.** г) 5. **54.** г) $\frac{mn + 3n^2}{m^2 - n^2}$. **55.** г) $\frac{3}{n - 2m}$. **56.** а) $\frac{x^2 + y^2}{xy(x + y)}$; б) $\frac{c - 3}{3c}$. **57.** г) $\frac{b^2 + 2b}{b^2 - 16}$. **58.** б) $\frac{x - y}{2(x + y)}$. **59.** а) 0; б) 1. **60.** а) $\frac{3}{p^2 + 3p + 9}$; б) $\frac{8xy^2}{\left(x^2 - y^2\right)^2}$; в) $\frac{40p^3 + 6pc^2}{\left(4p^2 - c^2\right)^2}$; г) $\frac{c - b}{a(c - 3a)}$. **66.** а) 5; б) 3; в) $\frac{1}{4}$; г) 6; ґ) 1; д) 4,25;

е) 4,75; є) 4,25. **67.** а) 5; б) $\frac{1}{6}$; в) 4. **68.** а) 0,4; б) 1,6. **70.** в) *Вказівка.* $\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$. **76.** в) $\frac{2y-1}{x+3}$. **77.** в) $\frac{x-y}{2xy}$. **78.** б) $\frac{c}{2}$. **79.** в) $\frac{x-2y}{x^2}$. **80.** в) $\frac{2(c+5)}{(2+c)(4-d)}$. **84.** в) 125. **85.** б) $\frac{3}{4}$. **86.** б) $2x+1$. **87.** б) $\frac{4a}{b}$. **88.** в) $-c$; д) $\frac{ab}{b-a}$. **89.** а) $\frac{1-a}{1-2a}$; б) $a-1$; в) $3-x^2$; г) $\frac{m}{n}$. **90.** а) $\frac{x-y}{y}$; б) $\left(\frac{x+y}{y}\right)^2$. **91.** а) $\frac{x^3}{c^4}$; б) 0; в) $\frac{2x+1}{2x-1}$; г) $-p$. **92.** а) $\frac{10}{2c+1}$; б) $\frac{1-3c}{2(1+3c)}$; в) $\frac{x+p}{x-p}$; г) $\frac{1}{a+b}$; ґ) $\frac{x^2+y^2}{x(x^2-y^2)}$; д) $\frac{ax}{x^2-a^2}$. **93.** а) $\frac{b}{2(3b-2a)}$; б) $\frac{12}{a}$. **94.** а) $\frac{6}{x-a}$; б) -1. **95.** а) $\frac{8}{x}$; б) $\frac{4}{a}$. 98. $-x$. **99.** а) 1; б) -1. **100.** а) 7; б) 14; в) 727. **101.** $2p$. 102. а) $\frac{10}{y}+\frac{4y}{5}$. **103.** а) $x+y=\frac{4}{z}+\frac{z}{4}$. **104.** а) $y=\frac{1-x}{2x}$; б) $2py=\frac{2(1-x)}{1+x}$. **105.** а) $\frac{x+2}{x-2}$; б) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; в) $-\frac{n}{a}$; г) $\frac{x+1}{x-1}$; ґ) $\frac{x+1}{x}$. **106.** а) 1; б) 1. **107.** 5,8. **109.** а) 3; в) розв'язків немає. **110.** г) -1. **111.** б) 4. **112.** г) $\frac{5}{7}$. **113.** г) Розв'язків немає. **114.** а) 3; б) 0,5. **115.** а) 1,5; б) 3; в) 8; г) 0. **116.** 11. **117.** $\frac{7}{11}$. **118.** $\frac{4}{9}$. **119.** $\frac{1}{3}$. **120.** $\frac{4}{8}$. **121.** 24 і 30. **122.** 62. **123.** д) $\frac{a^2}{a^2+1}$. **124.** г) $\frac{a^2+4}{4a}$. **125.** а) $\frac{2a(2a-b)}{2a+b}$; б) $\frac{2a(x-2a)}{2a+x}$; в) $\frac{1}{2-p}$. **127.** а) $\frac{1}{x}$; б) $\frac{x}{x-1}$; в) $\frac{10x+3}{7x+2}$. **128.** а) 1; б) 1. **129.** а) $-2,5$; б) 0,75; в) 0,21. **135.** в) 2; г) -3. **136.** а) Розв'язків немає; б) 21; в) -7; г) $-1\frac{13}{63}$. **138.** $\frac{mp}{m+n}$. **139.** $\frac{ap+bc}{a+b}$. **140.** $\frac{2uv}{u+v}$ км/год. **141.** $\frac{uv(s+l)}{su+lv}$ км/год.

§2. **149.** в) 3,5; г) $\frac{27}{125}$. **150.** а) –1,4; б) –121. **152.** в) 0,5; г) $\frac{1}{9}$. **153.** а) $\frac{b^7}{3a^9}$; б) $15c^5d^5$. **156.** а) –4; б) 3; в) 6. **158.** в) $3^n - 3^{-n}$; **173.** в) $y = \frac{2}{x}$. **180.** а) $6\frac{2}{3}$; б) –12. **181.** $ax^2 = 20$. **182.** а) $25a^{-1}b^{-3}$; б) $0{,}04a^{10}b^{-3}$. **183.** а) 0,5. **184.** а) $-\frac{1}{3}$; 0,8.

Розділ II

§3. **195.** а) 25; б) 15. **221.** а) $(\pi + 1)$ дм; б) $(1{,}5\pi + 6)$ дм. **222.** $\approx 99{,}66$ м^3.

§4. **289.** б) 1,2; в) 12; д) 0,28. **290.** б) 42; в) 60. **293.** г) 42. **295.** г) $\frac{1}{9}$; д) 0,05. **296.** д) ≈ 1,10. **299.** 25%. **300.** 7 м. **305.** а) –1; б) $5 - 2x$. **306.** а) –10; б) –8; в) 6 і –4. **308.** а) –3,5; б) 1; в) 1,6; г) –4. **309.** ґ) 4; 8; д) 3; –7. **311.** е) $-6m^9$; ж) $2m^2n^4$; з) $-bc^2$. **324.** г) $\sqrt{2}$. **325.** г) $-\sqrt{10}$. **329.** в) $-5x^3y^7$; г) $2mn^3$. **331.** ґ) $10a\sqrt{a}$. **334.** б) $-\sqrt{3a^2}$. **342.** б) $2\sqrt{15}$. **348.** г) 7. **349.** в) $5 - 3\sqrt{2}$; е) 32; є) 2. **350.** в) $12 - 3\sqrt{6}$; г) $a - 6$; ґ) b^2. **351.** ґ) $\sqrt{ab}\left(\sqrt{ab} - 1\right)$; д) $\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)$. **352.** ґ) $\frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$; д) $a - \sqrt{a + 2}$. **354.** б) 0,75; в) 3; г) 4. **355.** а) 23; б) $-\frac{12}{11}\sqrt{14}$; в) $-0{,}48\sqrt{266}$; г) $\frac{2}{\sqrt{2} - 2}$. **356.** а) 0; б) $4 - 0{,}5\sqrt{7}$; в) $\sqrt{13}$; г) 0. **364.** $9\sqrt{6} \approx 22{,}06$ (см), $9\sqrt{3} \approx 15{,}60$ (см). **365.** 1,5 разу. **366.** ≈ 9 см. **367.** а) $\sqrt{mn(m - n)}$; б) $\frac{x^2 + 3xy - y^2}{xy}$, $x > 0, y > 0$; $\frac{y^2 + 3xy - x^2}{xy}$, $x < 0, y < 0$. **369.** а) $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{a}}$; б) $\frac{1 - a}{\sqrt{a}}$; в) $\frac{\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$; г) $\frac{16x\sqrt{x}}{(1 - x^2)(x - 1)}$. **370.** а) 2; б) 3,25; в) –2,5. **371.** а) 4; б) 4. **372.** а) 1; б) 1.

Розділ III

§5. **387.** 200 м, 50 м. **388.** 3; 4; 5. **390.** а) 0; 4,2. **392.** б) 0; –9; г) 2; –2. **393.** б) 5; –5. **394.** 10 м. **395.** 160 м. **396.** 1 хв. **397.** 24 см.

398. а) 20 м; б) 15 см. **399.** 80 м. **401.** 240 см². **402.** 90 м. **412.** а) 0; 0,8; б) 0; $-\frac{5}{8}$; в) 1; г) –3; 5. **413.** –1; –5. **414.** $a = 5$. **415.** $b = -3$. **416.** а) $a = 2$; 3; –0,5; б) $a = 10$; –4; $\frac{2}{3}$. **417.** а) $-4\frac{1}{3}$; 6; б) 3; 1,5; в) 5; –2,6; г) 4; 1,6. **418.** а) 5; $-\frac{5}{6}$; б) 6; –2,8; в) 5; –7,6; г) $3\frac{1}{15}$; –2. **420.** 70 м. **421.** а) 4; 2; г) 3; –4. **422.** 5. **423.** –1. **424.** 3 і 1,5. **435.** $q = -6{,}75$. **436.** $q = 8$. **438.** а) 39; б) 238. **439.** $x^2 - 6x - 40 = 0$. **440.** $b = \pm 18$. **445.** а) $(3 - x)(x - 7)$; д) $(15 - 10x)(x + 1{,}4)$. **446.** а) $x(x - 1)(x - 2)$; д) $x(5x + 1)(x + 1)$. **448.** а) $\frac{1}{x+1}$; г) $\frac{x}{x-2}$. **449.** г) $\frac{m+13}{m+15}$. **450.** а) $\frac{a-11}{2-a}$; г) $\frac{x-3}{x+1}$. **451.** а) $(x - 2a)(x - 3a)$; б) $(bx + 1)(3bx + 4)$. **452.** г) $\frac{c-14p}{c-2p+3}$. **453.** а) $-1\frac{2}{3}$ при $x = 8$. **457.** а) $\frac{y-2}{y+1}$; г) $x + 3$. **459.** а) 1; 16; г) 4; 2,25. **460.** а) 1; –6; –1; –4; в) 2; 3. **461.** е) 8; –6. **462.** г) 4; –7. **464.** б) 0,2; 1; в) розв'язків немає; г) –1,5. **465.** 10 см. **466.** 32 м. **467.** 0,84 мм × 0,71 мм. **468.** 5,8 м × 4,0 м. **469.** 60 м і 40 м. **470.** 20 см × 15 см. **472.** 20 см і 15 см. **473.** 9 см і 12 см. **474.** 15 см і 8 см. **475.** 10 см × 10 см. **476.** 60 см². **477.** 102,8 см. **481.** 26. **482.** 8. **483.** 12. **484.** 10. **488.** $\frac{5}{6}$. **489.** 5 автобусів. **490.** 21 вантажних автомобілів. **491.** 21 ц і 20 ц. **492.** 30 рядів. **494.** 20 км/год. **495.** 2 км/год. **496.** 10 км/год. **497.** 12 км/год. **498.** 50 км/год. **499.** 10 км/год; 12 км/год. **500.** 75 км/год і 60 км/год. **501.** 60 км/год. **502.** 50 км/год. **503.** 10 год. **504.** 30 км/год; 24 км/год. **505.** 20 днів; 30 днів. **506.** 12 днів; 6 днів. **507.** 45 год; 36 год. **508.** 6 днів; 12 днів. **509.** 30 днів; 20 днів. **510.** 12 днів і 6 днів або 8 днів і 4 дні. **511.** 10 год; 15 год. **513.** г) 0; 3,5. **514.** б) –1; 3; в) –5; 7; г) –2,8; 6. **515.** а) –27, –1; в) –9. **516.** а) 1; $2\frac{2}{3}$; б) 1; –9. **521.** $c = -16$. **522.** $c = 27$. **525.** а) $(2a - b)(3a + b)$; б) $(4x - y)(3x + 2y)$. **526.** а) $\frac{x-3}{x+2}$; б) $\frac{a+5}{a-1}$; в) $-\frac{2a+b}{2(2b+a)}$. **528.** а) 1; –6; –3; 2; б) 3; 6; –2 і –1. **529.** б) 3; в) 2.

531. $\frac{4}{3}$. **532.** 10, 11, 12, 13, 14. **533.** 7, 8. **534.** 70 км/год, 80 км/год. **535.** 6 км/год. **536.** 2 км/год. **537.** 11 рядів. **538.** 1 кг. **539.** 7 год, 5 год. **540.** 21 двигун. **541.** 24 год, 16 год.

Повторення

§1. **545.** а) $\frac{a}{a+1}$; в) **546.** а) $\frac{1}{3a-2b}$; б) $\frac{a^2-b^2}{ab}$; в) $\frac{6}{x-a}$. **547.** а) $2x(x+y)$; б) $a-2$. **548.** б) $a-5$. **550.** а) –1,5; б) –0,525. **551.** а) –8; б) 9. **552.** в) 7. **553.** в) 6. **554.** г) $\frac{1}{3}$. **555.** б) –3. **556.** в) 5. **557.** г) 100. **558.** б) 3,2. **559.** б) $y-x$. **560.** б) $\frac{b-a}{b+a}$. **561.** а) $\sqrt{5}$; б) 0. **566.** а) x^2-4. **570.** а) $\sqrt{x}+\sqrt{y}$; б) $x+\sqrt{xy}+y$. **571.** в) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$. **573.** б) $x^2(2-x)$. **574.** б) $(1-a)\sqrt{1-a}$. **575.** а) $2a-3$, якщо $a \geq 1{,}5$; $3-2a$, якщо $a < 1{,}5$. **577.** а) $\frac{1}{\sqrt{x}}$; б) $\sqrt{\frac{2a(a+b)}{a-b}}$. **581.** б) $x \geq 6$. **584.** а) 1; б) 0,5. **585.** а) 2; б) 2. **593.** а) 1; 0,5; б) 2. **594.** б) 5; 2,5.

§2. **611.** 108 см. **612.** 20 м × 25 м. **613.** 40 м × 30 м. **614.** На 50%. **615.** На 30%. **616.** На 20%. **617.** На 40%. **618.** 24 см × 32 см. **620.** 24 см. **621.** 20 учнів. **622.** 100 м, 60 м. **623.** 6 год. **624.** 3 год 20 хв. **625.** 40 км/год. **626.** 0,8 м і 0,5 м. **627.** 10 год; 15 год. **628.** 20 год, 15 год. **629.** 2,4 дм^2. **630.** 5,6 дм; 3,3 дм.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ОСНОВНІ ФОРМУЛИ

Формули скороченого множення

1. $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
4. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
5. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

Квадратні рівняння

1. $x^2 + px + q = 0;\ x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{q}\right)^2 - q}$.

   $x_1 + x_2 = -p;\ x_1 \cdot x_2 = q$.
2. $ax^2 + bx + c = 0;\ x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a},\ D = b^2 - 4ac$.

   $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.
3. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
4. $ax^4 + bx^2 + c = 0;\ x^2 = y \geq 0;\ ay^2 + by + c = 0;$

   $y = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};\ x = \pm\sqrt{y}$.

Раціональні дроби

2. $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{A}{B}$; $B \neq 0,\ C \neq 0.$

3. $\dfrac{A}{C} + \dfrac{B}{C} = \dfrac{A+B}{C}$; $C \neq 0.$

4. $\dfrac{A}{C} - \dfrac{B}{C} = \dfrac{A-B}{C}$; $C \neq 0.$

5. $\dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{C}{D} = \dfrac{AC}{BD}$; $B \neq 0,\ D \neq 0.$

6. $\dfrac{A}{B} : \dfrac{C}{D} = \dfrac{AD}{BC}$; $B \neq 0,\ C \neq 0,\ D \neq 0.$

Степінь із цілим показником

1. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}.$
2. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$
3. $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}.$
4. $a^m : a^n = a^{m-n}.$
5. $(a^m)^n = a^{mn}.$
6. $(ab)^n = a^n \cdot b^n.$
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
8. $a^0 = 1,\ a \neq 0.$

Дійсні числа

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Квадратні корені

1. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\ a \geq 0.$
2. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},\ a \geq 0,\ b \geq 0.$
3. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ a \geq 0,\ b > 0.$
4. $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{якщо} \quad a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо} \quad a < 0. \end{cases}$
5. $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 b}, & \text{якщо} \quad a \geq 0, \\ -\sqrt{a^2 b}, & \text{якщо} \quad a < 0. \end{cases}$
6. $\sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b},\ b \geq 0.$
7. $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right) = a - b.$

ЗМІСТ

Розділ II. Дійсні числа. Квадратні корені

Розділ III. Квадратні рівняння

Повторення

Відомості про стан підручника

№	Прізвище і ім'я учня	Навчальний рік	Стан підручника		Оцінка
			на початку року	у кінці року	
1					
2					
3					
4					
5					

Навчальне видання

МАЛЬОВАНИЙ Юрій Іванович
ВОЗНЯК Григорій Михайлович
ЛИТВИНЕНКО Григорій Миколайович

АЛГЕБРА

Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Мальований Ю.І.

М21 Алгебра : підручник для 8 кл. загальноосвітн. навч. закл. / Ю.І. Мальований, Г.М. Возняк, Г.М. Литвиненко. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2016. — 224 с : іл.

ISBN 978-966-10-4483-7

Пропонований підручник відповідає програмі з алгебри для 8-го класу й передбачає формування готовності учнів до широкого і свідомого застосування математики. Цю орієнтацію забезпечують зміст курсу, характер викладення навчального матеріалу, добір ілюстрацій і приклади застосувань, запитання для перевірки знань, задачі і вправи на повторення, а також письмові роботи, призначені для самоконтролю.

Для учнів і вчителів загальноосвітніх навчальних закладів.

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я72