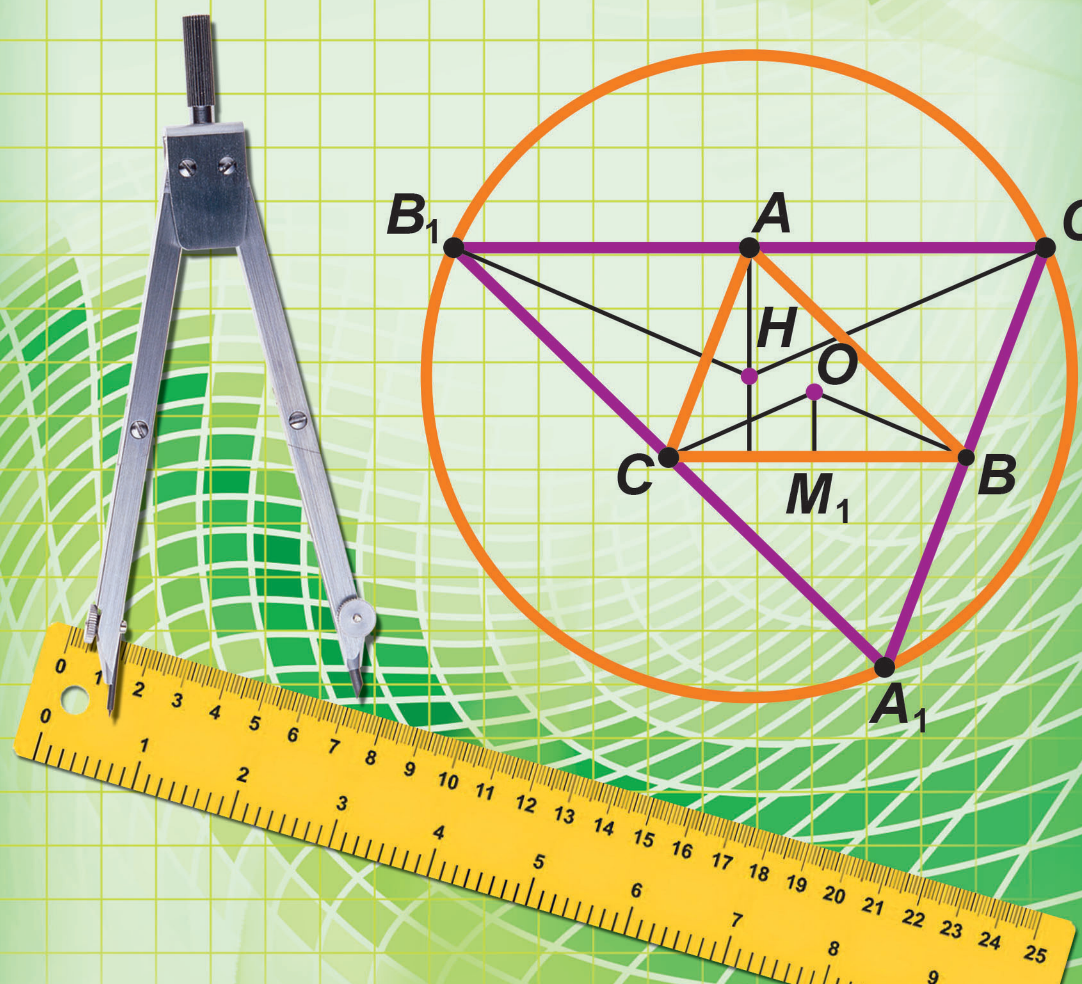
Аркадій Мерзляк
Віталій Полонський
Михайло Якір

8

ГЕОМЕТРІЯ

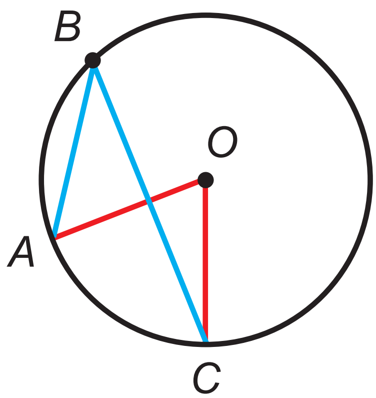


ГІМНАЗІЯ

Частина 1

8
ГЕОМЕТРІЯ
Аркадій Мерзляк, Віталій Полонський, Михайло Якір

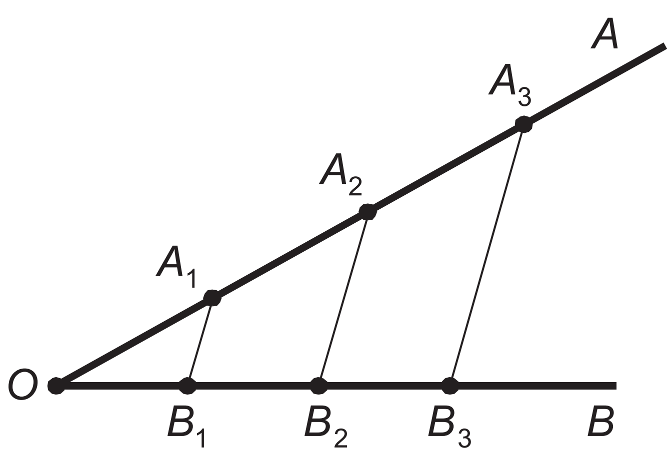
ЦЕНТРАЛЬНІ ТА ВПИСАНІ КУТИ



$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$$

$$\angle AOC = \cup AC$$

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

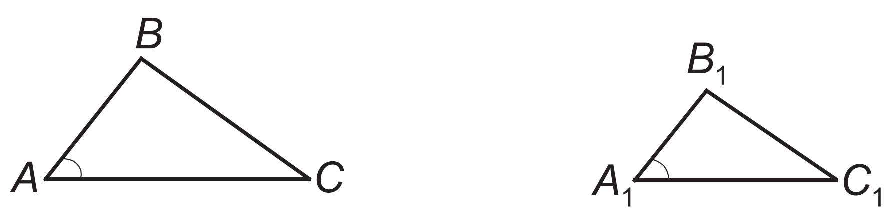


Якщо $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ і $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$,
то $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$

ПЕРША ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

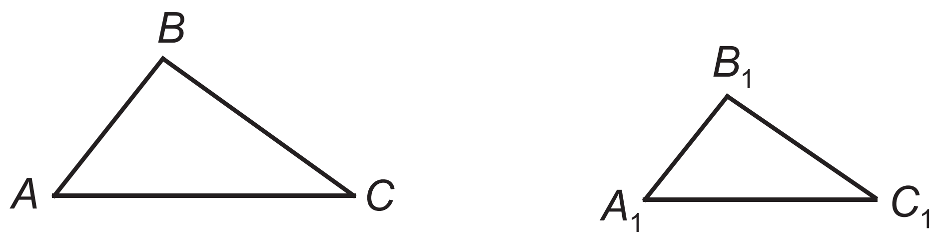
Якщо $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

ДРУГА ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



Якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ і $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

ТРЕТЯ ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



Якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$

Аркадій Мерзляк
Віталій Полонський
Михайло Якір

ГЕОМЕТРІЯ

підручник для осіб
з особливими освітніми потребами
(Н 54.1 – Н 54.2)

8 клас

(у 2-х частинах)

ЧАСТИНА 1

Харків
«Гімназія»
2021

УДК 373.167.1:512
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 22.02.2021 № 243)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Мерзляк А. Г.
М52 Геометрія : підруч. для осіб з особлив. освіт. потребами (Н 54.1 – Н 54.2) : 8 кл. (у 2-х ч.) : Ч. 1 / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2021. — 168 с. : іл.
ISBN 978-966-474-358-4 (Ч. 1).

УДК 373.167.1:512

ISBN 978-966-474-357-7
ISBN 978-966-474-358-4 (Ч. 1)

ВІД АВТОРІВ

Любі восьмикласники та восьмикласниці!

У цьому навчальному році ви продовжуватиме вивчати геометрію. Сподіваємося, що ви встигли полюбити цю важливу і красиву науку, а отже, з інтересом будете опановувати нові знання. Ми маємо надію, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Текст підручника поділено на чотири параграфи, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Вивчаючи його, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, що позначено «зірочкою» (*)). Свої знання можна перевірити, розв'язуючи задачі в тестовій формі, розміщені в кінці кожного параграфа.

Кожний пункт завершується рубрикою «Спостерігайте, рисуйте, конструюйте, фантазуйте». До неї дібрано задачі, для розв'язування яких потрібні не спеціальні геометричні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі корисні, як вітаміни: вони розвивають «геометричний зір» та інтуїцію.

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, непростий. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Дерзайте! Бажаємо успіху!

Шановні колеги та колежанки!

Ми дуже сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Звертаємо увагу на те, що в підручнику наявні задачі на побудову. Вони не є обов'язковими для розгляду. Цей матеріал доцільно використовувати лише в тому разі, коли учні та учениці вже ознайомлені з відповідним розділом з курсу геометрії 7 класу.

Блакитним кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи, **пурпуровим** кольором — номери задач, що рекомендовано для розв'язування усно.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка та факультативних занять.

Тож перетворімо разом шкільний курс геометрії в зрозумілий і привабливий предмет.

Бажаємо творчого натхнення та терпіння.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n°	завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;
$n^{\bullet}$	завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
$n^{\bullet\bullet}$	завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
n^{*}	задачі для математичних гуртків і факультативів;
⚿	ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв'язування інших задач;
⊙	доведення теореми, що відповідає достатньому рівню навчальних досягнень;
⊙⊙	доведення теореми, що відповідає високому рівню навчальних досягнень;
⊛	доведення теореми, не обов'язкове для вивчення;
▲	закінчення доведення теореми;
●	закінчення розв'язання задачі;
	рубрика «Коли зроблено уроки».

ЧОТИРИКУТНИКИ §1

У цьому параграфі розглядається знайома вам геометрична фігура **чотирикутник**. Ви ознайомитеся з окремими видами чотирикутника: паралелограмом, прямокутником, ромбом, квадратом, трапецією, вивчите властивості цих фігур і дізнаєтеся про ознаки, за допомогою яких серед чотирикутників можна розпізнати зазначені фігури.

Ви вивчите властивості відрізка, який сполучає середини сторін трикутника, і переконаєтеся в тому, що ці властивості можуть слугувати ключем до розв’язування цілого ряду задач.

Як виміряти дугу кола? Навколо якого чотирикутника можна описати коло? У який чотирикутник можна вписати коло? Опанувавши матеріал цього параграфа, ви отримаєте відповіді й на ці запитання.

1. Чотирикутник та його елементи

На рисунку 1 відрізки *AB* і *BC* мають тільки одну спільну точку *B*, яка є кінцем кожного з них. Такі відрізки називають **сусідніми**. На рисунку 2 кожні два відрізки є сусідніми.

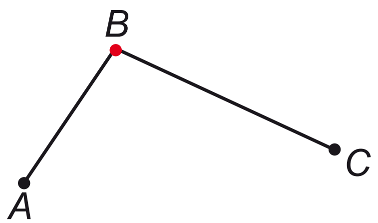


Рис. 1

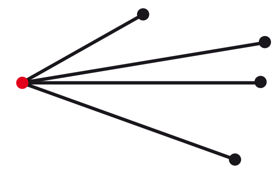
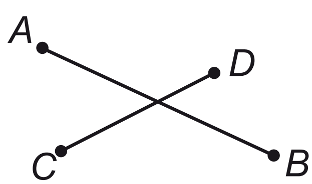
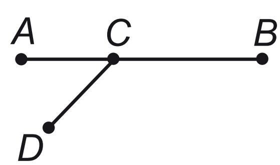


Рис. 2

Відрізки *AB* і *CD* на рисунку 3 не є сусідніми.



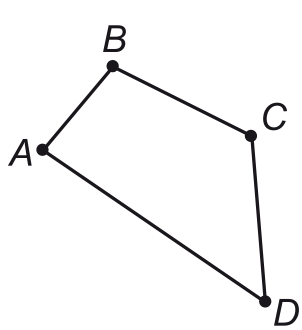
а



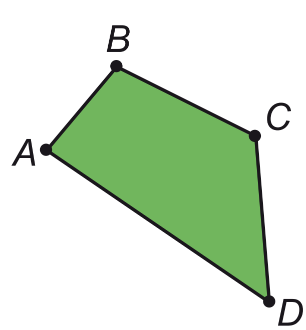
б

Рис. 3

Розглянемо фігуру, яка складається із чотирьох точок *A*, *B*, *C*, *D* і чотирьох відрізків *AB*, *BC*, *CD*, *DA* таких, що ніякі два сусідніх відрізки не лежать на одній прямій і ніякі два несусідніх відрізки не мають спільних точок (рис. 4, *а*).



а



б

Рис. 4

Фігура, утворена цими відрізками, обмежує частину площини, виділену на рисунку 4, *б* зеленим кольором. Цю частину площини разом з відрізками AB, BC, CD і DA називають **чотирикутником**. Точки A, B, C, D називають **вершинами** чотирикутника, а відрізки AB, BC, CD, DA — **сторонами** чотирикутника.

На рисунку 5 зображено фігури, що складаються із чотирьох відрізків AB, BC, CD, DA та частини площини, яку вони обмежують. Проте ці фігури не є чотирикутниками. Поясніть чому.

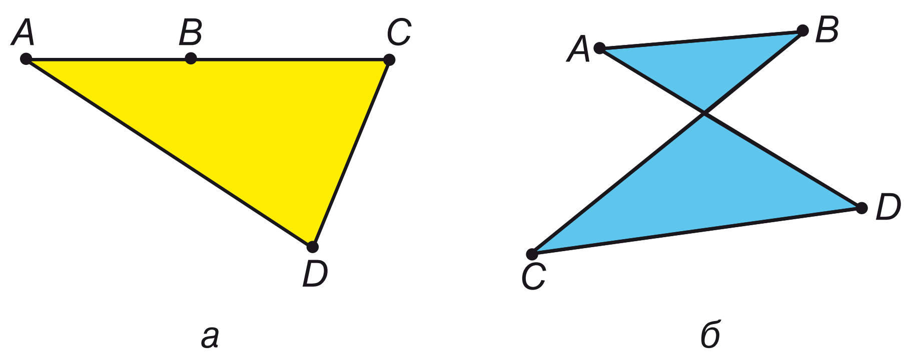


Рис. 5

Сторони чотирикутника, які є сусідніми відрізками, називають **сусідніми сторонами** чотирикутника. Вершини, які є кінцями однієї сторони, називають **сусідніми вершинами** чотирикутника. Сторони, які не є сусідніми, називають **протилежними сторонами** чотирикутника. Несусідні вершини називають **протилежними вершинами** чотирикутника.

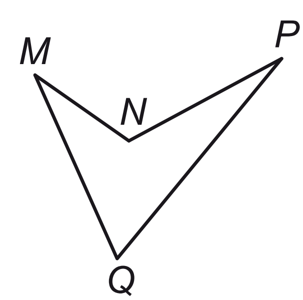


Рис. 6

На рисунку 6 зображено чотирикутник, у якому, наприклад, сторони MQ і MN є сусідніми, а сторони NP і MQ — протилежними. Вершини Q і P — сусідні, а вершини M і P — протилежні.

Чотирикутник називають і позначають за його вершинами. Наприклад, на рисунку 4, *б* зображено чотирикутник *ABCD*, а на рисунку 6 — чотирикутник *MNPQ*. У позначенні чотирикутника букви, що стоять поруч, відповідають сусіднім вершинам чотирикутника. Наприклад, чотирикутник, зображений на рисунку 6, можна позначити ще й так: *PQMN*, або *MQPN*, або *NPQM* тощо.

Суму довжин усіх сторін чотирикутника називають **периметром** чотирикутника.

Відрізок, який сполучає протилежні вершини чотирикутника, називають **діагоналлю**. На рисунку 7 відрізки *AC* і *BD* — діагоналі чотирикутника *ABCD*.

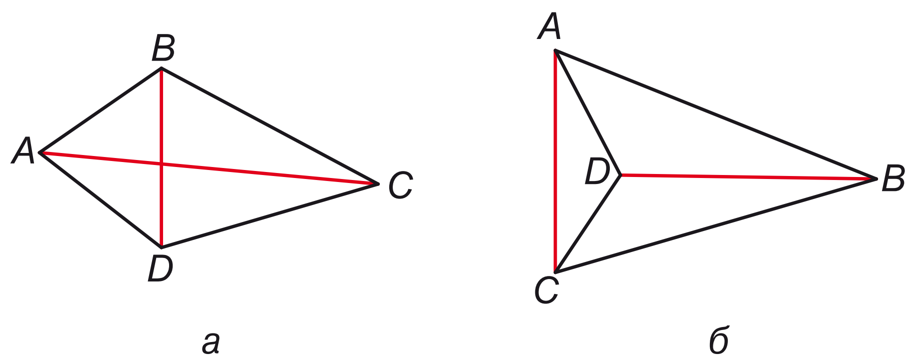


Рис. 7

Кути *ABC*, *BCD*, *CDA*, *DAB* (рис. 8) називають **кутами** чотирикутника *ABCD*. У цьому чотирикутнику всі вони менші від розгорнутого кута. Такий чотирикутник називають **опуклим**. Однак існують чотирикутники, у яких не всі кути менші від розгорнутого. Наприклад, на рисунку 9 кут *B* чотирикутника *ABCD* більший за 180°. Такий чотирикутник називають **неопуклим**[1].

Кути *ABC* і *ADC* називають **протилежними кутами** чотирикутника *ABCD* (рис. 8, 9). Також протилежними є кути *BAD* і *BCD*.

---

[1] Докладніше з поняттям «опуклість» ви ознайомитеся в п. 19.

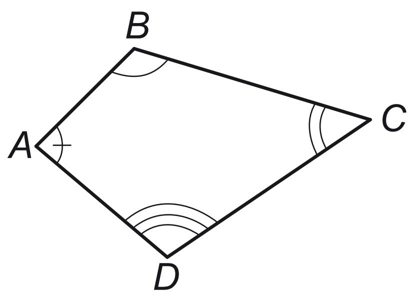


Рис. 8

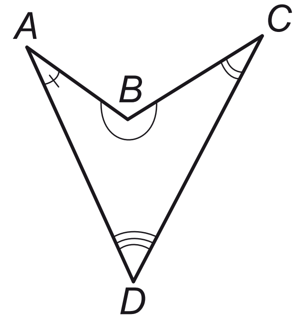


Рис. 9

Теорема 1.1. ***Сума кутів чотирикутника дорівнює*** **360°**.

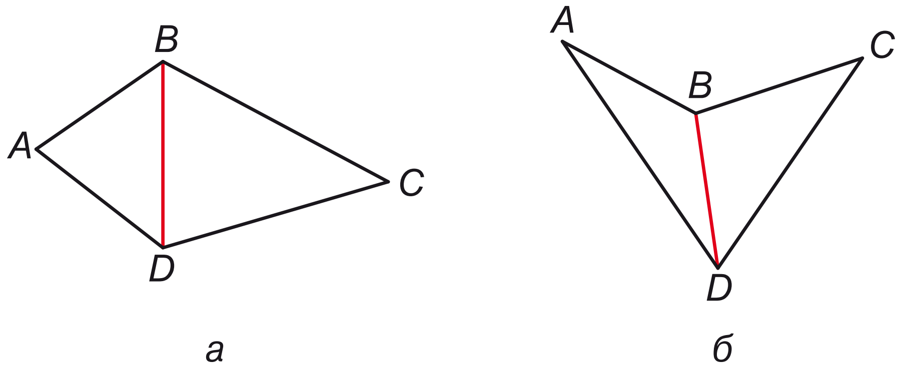


Рис. 10

Доведення. ⊙ Проведемо в чотирикутнику діагональ, яка розбиває його на два трикутники. Наприклад, на рисунку 10 це діагональ *BD*. Тоді сума кутів чотирикутника *ABCD* дорівнює сумі кутів трикутників *ABD* і *CBD*. Оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180°, то сума кутів чотирикутника дорівнює 360°. ▲

Наслідок. ***У чотирикутнику тільки один із кутів може бути більшим за розгорнутий.***

Доведіть цю властивість самостійно.

Задача 1. Доведіть, що довжина будь-якої сторони чотирикутника менша від суми довжин трьох інших його сторін.

Розв'язання. Розглянемо довільний чотирикутник $ABCD$ (рис. 11). Покажемо, наприклад, що $AB < AD + DC + CB$.

Проведемо діагональ AC. Застосовуючи нерівність трикутника для сторін AB і AC відповідно трикутників ABC і ADC, отримуємо нерівності: $AB < AC + CB$, $AC < AD + DC$.

Звідси $AB < AC + CB < AD + DC + CB$.

Отже, $AB < AD + DC + CB$. ●

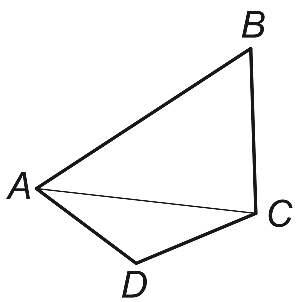


Рис. 11

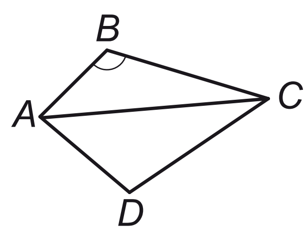


Рис. 12

Задача 2. Побудуйте чотирикутник за двома сусідніми сторонами та чотирма кутами, кожний з яких менший від розгорнутого.[1]

Розв'язання. На рисунку 12 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому відомо довжини сторін AB і BC, а також усі його кути.

У трикутнику ABC відомо дві сторони AB і BC та кут B між ними. Отже, цей трикутник можна побудувати. Тепер можемо від променів AB і CB відкласти кути, які дорівнюють кутам чотирикутника при вершинах A і C.

Проведений аналіз показує, як будувати шуканий чотирикутник.

Будуємо трикутник за двома даними сторонами чотирикутника та кутом між ними. На рисунку 12 це трикутник ABC.

[1] У підручнику задачі на побудову не є обов'язковими для розгляду.

Далі від променів *AB* і *CB* відкладаємо два відомих кути чотирикутника. Два побудованих промені перетинаються в точці *D*. Чотирикутник *ABCD* — шуканий. ●

1. Поясніть, які відрізки називають сусідніми.
2. Поясніть, яку фігуру називають чотирикутником.
3. Які сторони чотирикутника називають сусідніми? протилежними?
4. Які вершини чотирикутника називають сусідніми? протилежними?
5. Як позначають чотирикутник?
6. Що називають периметром чотирикутника?
7. Що називають діагоналлю чотирикутника?
8. Який чотирикутник називають опуклим?
9. Сформулюйте теорему про суму кутів чотирикутника.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1.° Накресліть чотирикутник, у якому:
1) три кути тупі;
2) кути при сусідніх вершинах прямі, а два інших не є прямими;
3) одна діагональ точкою перетину діагоналей ділиться навпіл, а друга не ділиться навпіл;
4) діагоналі перпендикулярні.

2.° Накресліть довільний чотирикутник, позначте його вершини буквами *M*, *K*, *E*, *F*. Укажіть пари його сусідніх сторін, протилежних сторін, протилежних вершин. Запишіть які-небудь три позначення цього чотирикутника.

3.° Накресліть чотирикутник, у якому:
1) три кути гострі;
2) два протилежних кути прямі, а два інших не є прямими;
3) діагоналі точкою перетину діляться навпіл.

ВПРАВИ

4.° Серед фігур, зображених на рисунку 13, укажіть чотирикутники.

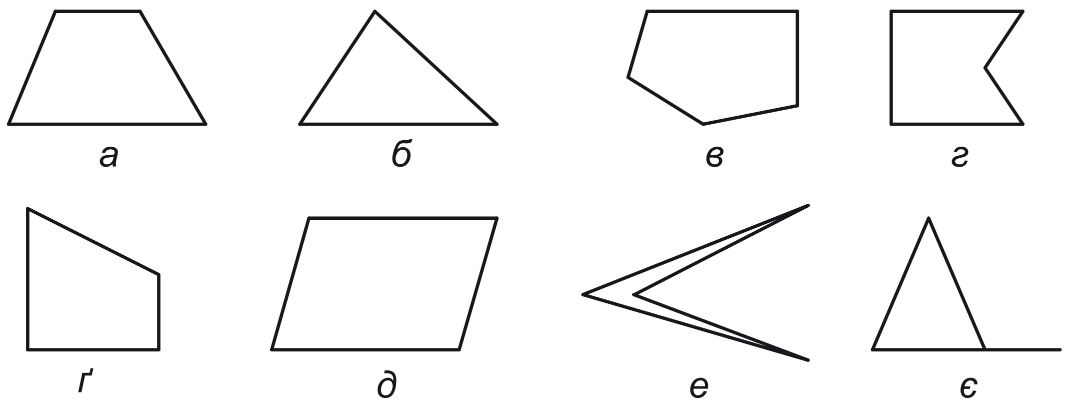


Рис. 13

5.° Наведіть чотири яких-небудь позначення чотирикутника, зображеного на рисунку 14. Укажіть:

1) вершини чотирикутника;
2) його сторони;
3) пари сусідніх вершин;
4) пари протилежних вершин;
5) пари сусідніх сторін;
6) пари протилежних сторін;
7) діагоналі чотирикутника.

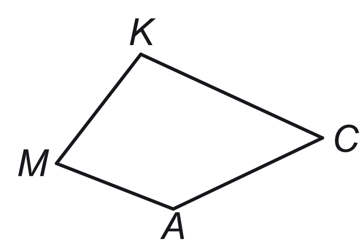


Рис. 14

6.° Серед чотирикутників, зображених на рисунку 15, укажіть опуклі.

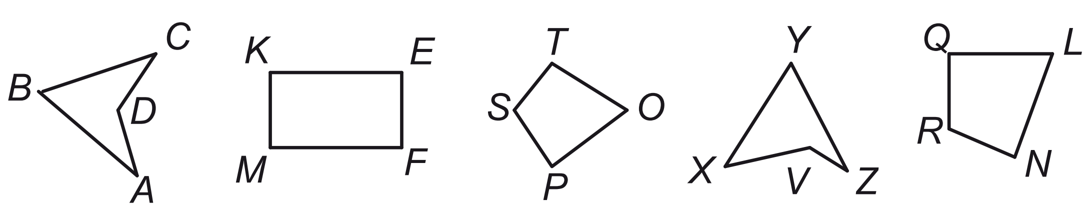


Рис. 15

7.° Чому дорівнює четвертий кут чотирикутника, якщо три його кути дорівнюють $78°$, $89°$ і $93°$?

8.° Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони рівні між собою.

9.° У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle B = 150°$, $\angle A = \angle C = \angle D$. Знайдіть невідомі кути чотирикутника.

10.° Один із кутів чотирикутника у 2 рази менший від другого кута, на $20°$ менший від третього та на $40°$ більший за четвертий. Знайдіть кути чотирикутника.

11.° Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2, 3, 10 і 21. Чи є цей чотирикутник опуклим?

12.° Знайдіть кути чотирикутника, якщо три його кути пропорційні числам 4, 5 і 7, а четвертий кут дорівнює їхній півсумі. Чи є цей чотирикутник опуклим?

13.° Чи може чотирикутник мати:

1) три прямих кути й один гострий;
2) три прямих кути й один тупий;
3) чотири прямих кути;
4) чотири гострих кути;
5) два прямих і два тупих кути;
6) два прямих кути, один гострий та один тупий?

У разі ствердної відповіді нарисуйте такий чотирикутник.

14.° Периметр чотирикутника дорівнює 63 см. Знайдіть його сторони, якщо друга сторона становить $\frac{2}{3}$ першої, третя — 50 % другої, а четверта — 150 % першої.

15.° Знайдіть сторони чотирикутника, якщо одна з них на 2 см більша за другу, на 6 см менша від третьої, у 3 рази менша від четвертої, а периметр дорівнює 64 см.

16.° У чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і BC рівні, а діагональ BD утворює із цими сторонами рівні кути. Доведіть, що сторони CD і AD теж рівні.

17.° Діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл, одна з його сторін дорівнює 6 см. Чому дорівнює протилежна їй сторона чотирикутника?

18.° У чотирикутнику $MNKP$ відомо, що $MN = NK$, $MP = PK$, $\angle M = 100°$. Знайдіть кут K.

19.° У чотирикутнику $ABCD$ діагональ AC утворює зі сторонами AB і AD рівні кути та зі сторонами CB і CD також рівні кути, $AB = 8$ см, $BC = 10$ см. Знайдіть периметр чотирикутника $ABCD$.

20.• У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 44°$, $\angle B = 56°$. Бісектриси AK і BM трикутника перетинаються в точці O. Знайдіть кути чотирикутника: 1) $MOKC$; 2) $AOBC$.

21.• У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 36°$, $\angle B = 72°$. Висоти AE і BF трикутника перетинаються в точці H. Знайдіть кути чотирикутника: 1) $CFHE$; 2) $ACBH$.

22.• Знайдіть діагональ чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 80 см, а периметри трикутників, на які ця діагональ розбиває даний чотирикутник, дорівнюють 36 см і 64 см.

23.• Чи можуть сторони чотирикутника дорівнювати:
1) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 9 дм; 2) 2 дм, 3 дм, 4 дм, 10 дм?

24.•• У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle A = \angle C = 90°$. Доведіть, що бісектриси двох інших кутів чотирикутника або паралельні, або лежать на одній прямій.

25.•• Доведіть, що коли бісектриси двох протилежних кутів опуклого чотирикутника паралельні або лежать на одній прямій, то два інших кути чотирикутника рівні.

26.•• Побудуйте чотирикутник за його сторонами та одним із кутів.

27.•• Побудуйте чотирикутник за трьома сторонами та двома діагоналями.

28.•• Побудуйте чотирикутник за його сторонами та однією з діагоналей.

29.* Побудуйте чотирикутник *ABCD* за кутами *A* і *B*, сторонами *AB* і *BC* та сумою сторін *AD* і *CD*.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

30. Пряма *c* перетинає кожну з прямих *a* і *b* (рис. 16). Укажіть пари різносторонніх і пари односторонніх кутів, які при цьому утворилися. Яке взаємне розміщення прямих *a* і *b*, якщо: 1) $\angle 1 = \angle 4$; 2) $\angle 1 = 20^\circ$; $\angle 3 = 180^\circ$?

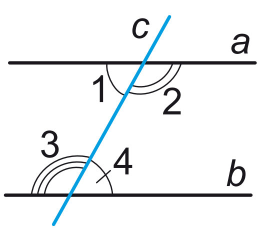


Рис. 16

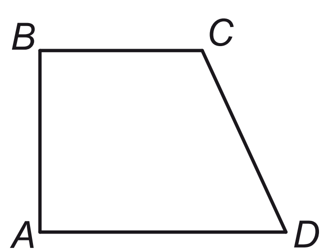


Рис. 17

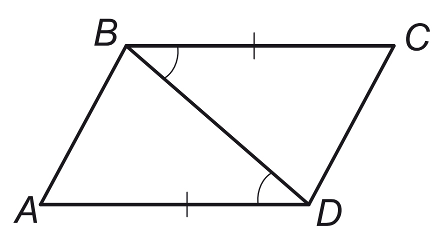


Рис. 18

31. У чотирикутнику *ABCD* (рис. 17) $\angle C = 110^\circ$, $\angle D = 70^\circ$. Доведіть, що $BC \parallel AD$.

32. У чотирикутнику *ABCD* відомо, що $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $\angle C = 100^\circ$. Чи є паралельними прямі:
1) *BC* і *AD*; 2) *AB* і *CD*?

33. На рисунку 18 $AD = BC$, $\angle ADB = \angle CBD$. Доведіть, що $AB = CD$ і $AB \parallel CD$.

34. Відрізок *BK* — бісектриса трикутника *ABC*. Пряма *DK* паралельна стороні *AB* і перетинає сторону *BC* у точці *D*, $\angle BDK = 116^\circ$. Знайдіть кут *BKD*.

Поновіть у пам’яті зміст пунктів 12, 13, 14 на с. 104–105 частини 2 підручника.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

35. Білу площину довільно забризкано чорною фарбою. Доведіть, що на площині знайдеться відрізок завдовжки 1 м, кінці якого зафарбовано одним кольором.

ДЕРЗАЙТЕ!

Задачу 29 позначено «зірочкою» (*). Це означає, що вона належить до задач підвищеної складності. Хоча таких задач не буде на самостійних і контрольних роботах, їх у підручнику чимало. У вас може виникнути запитання: «Навіщо ж витрачати час і сили на складні задачі, якщо вони не є обов'язковими для розв'язування, а високу оцінку можна заробити й значно меншими зусиллями?» На нашу думку, найкращу відповідь на це запитання можна знайти в книзі «Математика й романтика» відомого українського геометра та педагога Миколи Івановича Кованцова. Він писав: «Любі друзі! Беріться за розв'язування складних математичних задач! І тих, які щойно поставлені, і тих, які вже багато десятиліть або століть не піддаються розв'язуванню. Вас спіткають страждання й розчарування, коли здаватиметься, що ви марно витратили роки на пошуки примари, яка від вас ухиляється. Усе може бути. Але ви будете сторицею винагороджені, коли одного чудового дня опинитеся перед тією завітною ціллю, до якої так довго й складно йшли. Не будьте байдужими, інакше на вас чекає духовна смерть».

М. І. Кованцов
(1924–1988)

М. І. Кованцов майже 30 років очолював кафедру геометрії Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Його перу належить понад 200 наукових і науково-популярних праць.

Микола Іванович виховав десятки вчених, які сьогодні працюють як в Україні, так і в багатьох країнах світу.

2. Паралелограм. Властивості паралелограма

Означення. Паралелограмом називають чотирикутник, у якого кожні дві протилежні сторони паралельні.

На рисунку 19 зображено паралелограм *ABCD*. За означенням паралелограма маємо: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Розглянемо деякі властивості паралелограма.

Теорема 2.1. ***Протилежні сторони паралелограма рівні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 19 зображено паралелограм *ABCD*. Доведемо, що $AB = CD$ і $BC = AD$.

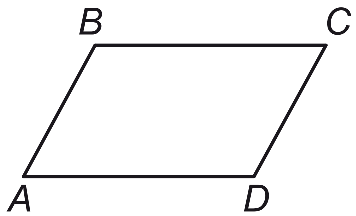


Рис. 19

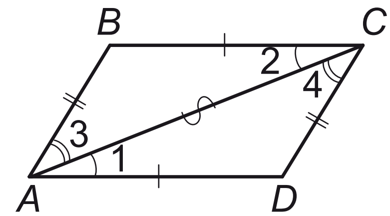


Рис. 20

Проведемо діагональ *AC*. Доведемо, що трикутники *ABC* і *CDA* рівні (рис. 20).

У цих трикутниках сторона *AC* — спільна, кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих *BC* і *AD* та січній AC, кути 3 і 4 рівні як різносторонні при паралельних прямих AB і CD та січній AC. Отже, трикутники ABC і CDA рівні за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $AB = CD$ і $BC = AD$. ▲

Теорема 2.2. ***Протилежні кути паралелограма рівні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 19 зображено паралелограм $ABCD$. Доведемо, що $\angle A = \angle C$ і $\angle B = \angle D$.

Під час доведення попередньої теореми було встановлено, що $\Delta ABC = \Delta CDA$ (рис. 20). Звідси $\angle B = \angle D$. З рівності кутів 1 і 2 та рівності кутів 3 і 4 випливає, що $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$. Отже, $\angle BAD = \angle BCD$. ▲

Теорема 2.3. ***Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.***

Доведення. ⊙ На рисунку 21 зображено паралелограм $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Доведемо, що $AO = OC$ і $BO = OD$.

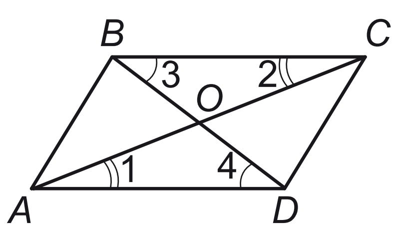


Рис. 21

Розглянемо трикутники AOD і COB.

Маємо: $\angle 1$ і $\angle 2$, $\angle 3$ і $\angle 4$ рівні як різносторонні при паралельних прямих AD і BC та січних AC і BD відповідно. З теореми 2.1 отримуємо: $AD = BC$. Отже, трикутники AOD і COB рівні за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $AO = OC$, $BO = OD$. ▲

Означення. **Висотою паралелограма називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить сторону паралелограма, на пряму, що містить протилежну сторону.**

На рисунку 22 кожний із відрізків *AF*, *QE*, *BM*, *PN*, *CK* є висотою паралелограма *ABCD*.

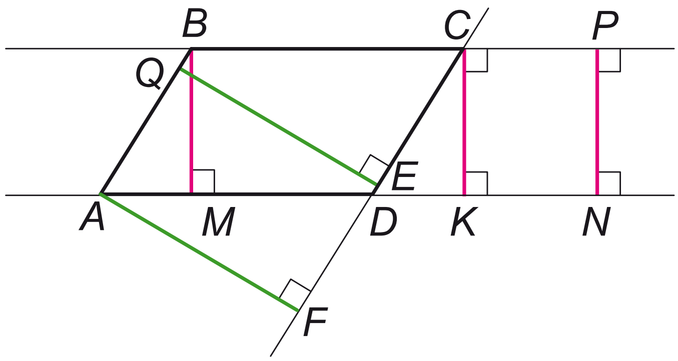


Рис. 22

Із курсу геометрії 7 класу ви знаєте, що всі точки однієї з двох паралельних прямих рівновіддалені від другої прямої. Тому $AF = QE$ і $BM = PN = CK$.

Кажуть, що **висоти** *BM*, *CK*, *PN* **проведено до сторін** *BC* і *AD*, а висоти *AF*, *QE* — до сторін *AB* і *CD*.

Задача 1. Доведіть, що прямі, які містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці.

Розв'язання. Через кожну вершину даного трикутника *ABC* проведемо пряму, паралельну протилежній стороні. Отримаємо трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 23).

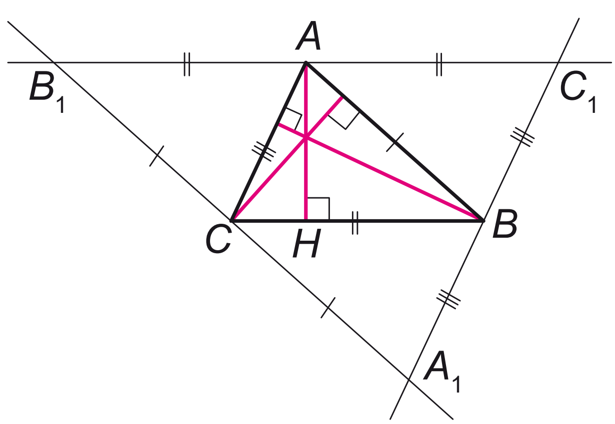


Рис. 23

Із побудови випливає, що чотирикутники AC_1BC і $ABCB_1$ — паралелограми. Звідси $AC_1 = BC = AB_1$. Отже, точка A є серединою відрізка B_1C_1.

Оскільки прямі B_1C_1 і BC паралельні, то висота AH трикутника ABC перпендикулярна до відрізка B_1C_1. Таким чином, пряма AH — серединний перпендикуляр сторони B_1C_1 трикутника $A_1B_1C_1$. Аналогічно можна довести, що прямі, які містять дві інші висоти трикутника ABC, є серединними перпендикулярами сторін C_1A_1 і A_1B_1 трикутника $A_1B_1C_1$.

Оскільки серединні перпендикуляри сторін трикутника перетинаються в одній точці, то твердження задачі доведено. ●

Задача 2. Бісектриса тупого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини гострого кута. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 60 см.

Розв'язання. Нехай бісектриса тупого кута B паралелограма $ABCD$ (рис. 24) перетинає сторону AD у точці M. За умовою $AM : MD = 2 : 1$.

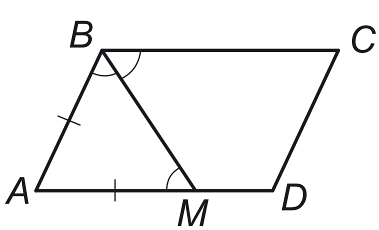


Рис. 24

Кути ABM і CBM рівні за умовою. Кути CBM і AMB рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній BM.

Тоді $\angle ABM = \angle AMB$. Отже, трикутник BAM рівнобедрений, звідси $AB = AM$.

Нехай $MD = x$ см, тоді $AB = AM = 2x$ см, $AD = 3x$ см. Оскільки протилежні сторони паралелограма рівні, то його периметр дорівнює $2(AB + AD)$.

Ураховуючи, що за умовою периметр паралелограма дорівнює 60 см, отримуємо:

$$2(2x + 3x) = 60;$$
$$x = 6.$$

Отже, $AB = 12$ см, $AD = 18$ см.

Відповідь: 12 см, 18 см.

1. Який чотирикутник називають паралелограмом?
2. Яку властивість мають протилежні сторони паралелограма?
3. Яку властивість мають протилежні кути паралелограма?
4. Яку властивість мають діагоналі паралелограма?
5. Що називають висотою паралелограма?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

36.° На рисунку 25 зображено паралелограм $ABCD$. Зробіть такий рисунок у зошиті. Проведіть із точок B і M висоти паралелограма до сторони AD, а з точки K — висоту до сторони AB.

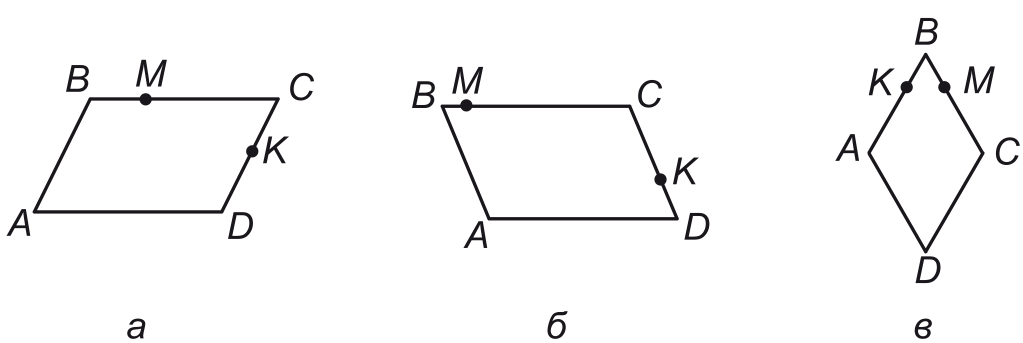


Рис. 25

ВПРАВИ

37.° Дві паралельні прямі перетинають три інші паралельні прямі. Скільки при цьому утворилося паралелограмів?

38.° На рисунку 26 зображено паралелограми. Визначте, не виконуючи вимірювань, на яких рисунках величини кутів або довжини відрізків позначено неправильно (довжини відрізків наведено в сантиметрах).

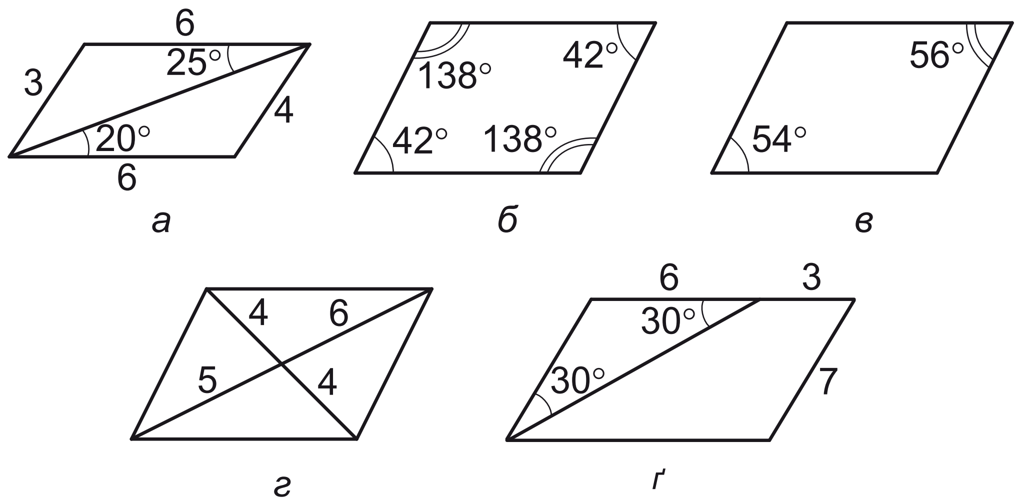


Рис. 26

39.° Чи вистачить 40 см дроту, щоб виготовити з нього паралелограм зі сторонами: 1) 14 см і 8 см; 2) 16 см і 4 см; 3) 12 см і 6 см?

40.° Периметр паралелограма дорівнює 112 см. Знайдіть його сторони, якщо: 1) одна з них на 12 см менша від другої; 2) дві його сторони відносяться як 5 : 9.

41.° Знайдіть сторони паралелограма, якщо одна з них у 5 разів більша за другу, а периметр паралелограма дорівнює 96 см.

42.° У паралелограмі *ABCD* відомо, що $AB = 6$ см, $AC = 10$ см, $BD = 8$ см, *O* — точка перетину його діагоналей. Знайдіть периметр трикутника *COD*.

43.° Доведіть, що сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180°.

44.° Знайдіть кути паралелограма, якщо:

1) один із них дорівнює 70°;
1) сума двох його кутів дорівнює 100°;
2) різниця двох його кутів дорівнює 20°;
3) два його кути відносяться як 3 : 7.

45.° Знайдіть кути паралелограма, якщо один із них:

1) у 2 рази більший за другий;
2) на 24° менший від другого.

46.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = 35°$. Через довільну точку, яка належить стороні BC, проведено дві прямі, паралельні сторонам AB і AC трикутника. Визначте вид чотирикутника, що утворився, та знайдіть усі його кути.

47.° Знайдіть кути паралелограма $ABCD$ (рис. 27), якщо $\angle ABD = 68°$, $\angle ADB = 47°$.

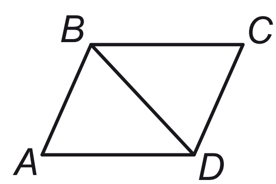


Рис. 27

48.° У паралелограмі $ABCD$ діагональ AC утворює зі стороною AB кут, який дорівнює 32°, $\angle BCD = 56°$. Знайдіть кути CAD і D.

49.° Бісектриси кутів A і B паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці M. Визначте величину кута M трикутника ABM.

50.° Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 10 см. Чи може одна з його діагоналей дорівнювати 16 см?

51.• Висота BK паралелограма $ABCD$ ділить його сторону AD на відрізки AK і KD такі, що $AK = 4$ см, $KD = 6$ см. Знайдіть кути й периметр паралелограма, якщо $\angle ABK = 30°$.

52.• Один із кутів паралелограма дорівнює 45°. Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, дорівнює 3 см і ділить сторону паралелограма навпіл. Знайдіть цю сторону паралелограма та кути, які утворює діагональ, що сполучає вершини тупих кутів, зі сторонами паралелограма.

53.• У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $\angle C = 30^\circ$, висота BH, проведена до сторони CD, дорівнює 7 см, а периметр паралелограма — 46 см. Знайдіть сторони паралелограма.

54.• Дано паралелограм $ABCD$ і трикутник MKN. Чи можуть одночасно виконуватися рівності $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle K$, $\angle C = \angle N$?

55.• Доведіть, що вершини B і D паралелограма $ABCD$ рівновіддалені від прямої AC.

56.• Доведіть, що будь-який відрізок, який проходить через точку перетину діагоналей паралелограма та кінці якого належать протилежним сторонам паралелограма, ділиться цією точкою навпіл.

57.• Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 24 см, $\angle ABC = 160^\circ$, діагональ AC утворює зі стороною AD кут 10°. Знайдіть сторони паралелограма.

58.• Діагональ BD паралелограма $ABCD$ утворює зі стороною AB кут 65°, $\angle C = 50^\circ$, $AB = 8$ см. Знайдіть периметр паралелограма.

59.• Знайдіть кути паралелограма $ABCD$, якщо $BD \perp AB$ і $BD = AB$.

60.• Діагональ паралелограма утворює з його сторонами кути 30° і 90°. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 36 см.

61.• Поза паралелограмом $ABCD$ проведено пряму, паралельну його діагоналі BD. Ця пряма перетинає прямі AB, BC, CD і AD у точках E, M, F і K відповідно. Доведіть, що $MK = EF$.

62.• Паралельно діагоналі AC паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає відрізки AB і BC у точках M

і N, а прямі AD і CD у точках P і K відповідно. Доведіть, що $PM = NK$.

63.• Один із кутів, утворених при перетині бісектриси кута паралелограма з його стороною, дорівнює $24°$. Знайдіть кути паралелограма.

64.• Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M. Знайдіть периметр даного паралелограма, якщо $AB = 12$ см, $MC = 16$ см.

65.• Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні 3 : 5, рахуючи від вершини тупого кута. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 66 см.

66.• Бісектриса кута B паралелограма $ABCD$ перетинає сторону CD у точці K так, що відрізок CK у 5 разів більший за відрізок KD. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 88 см.

67.• У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $AD = 12$ см, $AB = 3$ см, бісектриси кутів B і C перетинають сторону AD у точках E і F відповідно. Знайдіть відрізок EF.

68.• Кут між висотою BH паралелограма $ABCD$ і бісектрисою BM кута ABC дорівнює $24°$. Знайдіть кути паралелограма.

69.• Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює гострому куту паралелограма.

70.• Доведіть, що кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини гострого кута, дорівнює тупому куту паралелограма.

71.• Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює $30°$. Знайдіть периметр паралелограма, якщо його висоти дорівнюють 4 см і 6 см.

72.• Висоти паралелограма, проведені з вершини гострого кута, утворюють кут 150°, сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 18 см. Знайдіть висоти паралелограма.

73.• Через довільну точку основи рівнобедреного трикутника проведено прямі, паралельні його бічним сторонам. Доведіть, що периметр утвореного чотирикутника дорівнює сумі бічних сторін даного трикутника.

74.• Через кожну вершину трикутника ABC проведено пряму, паралельну протилежній стороні. Сума периметрів усіх утворених паралелограмів дорівнює 100 см. Знайдіть периметр трикутника ABC.

75.• Побудуйте паралелограм:

1) за двома сторонами та кутом між ними;
2) за двома діагоналями та стороною;
3) за стороною, діагоналлю та кутом між ними.

76.• Побудуйте паралелограм:

1) за двома сторонами та діагоналлю;
2) за двома діагоналями та кутом між ними.

77.•• Дано три точки, які не лежать на одній прямій. Побудуйте паралелограм, вершинами якого є дані точки. Скільки розв'язків має задача?

78.•• Точка перетину бісектрис двох сусідніх кутів паралелограма належить його стороні. Знайдіть відношення сусідніх сторін паралелограма.

79.•• На стороні BC паралелограма $ABCD$ існує така точка M, що $BM = MD = CD$. Знайдіть кути паралелограма, якщо $AD = BD$.

80.•• Побудуйте паралелограм:

1) за стороною, проведеною до неї висотою та діагоналлю;
2) за двома діагоналями та висотою;

3) за гострим кутом і двома висотами, проведеними до двох сусідніх сторін.

81.•• Побудуйте паралелограм:

1) за двома сторонами та висотою;
2) за діагоналлю та двома висотами, проведеними до двох сусідніх сторін.

82.* Із вершини *B* паралелограма *ABCD* опустили перпендикуляр *BE* на діагональ *AC*. Через точку *A* проведено пряму *m*, перпендикулярну до прямої *AD*, а через точку *C* — пряму *n*, перпендикулярну до прямої *CD*. Доведіть, що точка перетину прямих *m* і *n* належить прямій *BE*.

83.* Побудуйте паралелограм за стороною, сумою діагоналей та кутом між діагоналями.

84.* На сторонах *AB* і *BC* паралелограма *ABCD* поза ним побудовано рівносторонні трикутники *ABM* і *BCK*. Доведіть, що трикутник *MKD* рівносторонній.

85.* Через точку, яка належить куту, проведіть пряму так, щоб відрізок цієї прямої, що міститься всередині кута, даною точкою ділився б навпіл.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

86. Довжина відрізка *AB* дорівнює 24 см. Точка *C* належить прямій *AB*, причому $BC = 5AC$. На відрізку *AB* позначено точку *D* так, що $AB = 4BD$. Знайдіть відрізок *CD*.

87. Скільки існує нерівних між собою:

1) прямокутних трикутників зі стороною 5 см і кутом 45°;
2) рівнобедрених трикутників зі стороною 6 см і кутом 30°;
3) прямокутних трикутників зі стороною 7 см і кутом 60°?

88. Діагоналі AC і BD чотирикутника $ABCD$ є діаметрами кола. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

89. Чи можна квадрат розміром 10×10 клітинок розрізати на 25 фігур, що складаються із чотирьох клітинок і мають такий вигляд, як зображено на рисунку 28?

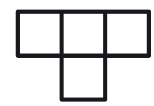


Рис. 28

3. Ознаки паралелограма

Означення паралелограма дає змогу серед чотирикутників розпізнавати паралелограми. Цій самій меті слугують такі три теореми, які називають ознаками паралелограма.

Теорема 3.1 (обернена до теореми 2.1). ***Якщо в чотирикутнику кожні дві протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.***

Доведення. ⊙ На рисунку 29 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому $AB = CD$ і $BC = AD$. Доведемо, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

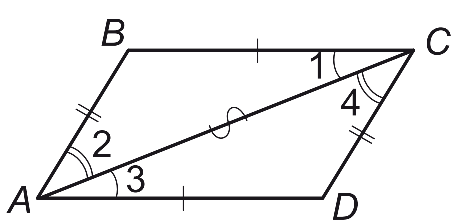


Рис. 29

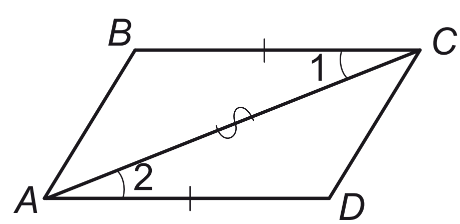


Рис. 30

Проведемо діагональ AC. Трикутники ABC і CDA рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle 1 = \angle 3$ і $\angle 2 = \angle 4$. Кути 1 і 3 є різносторонніми при прямих BC і AD та січній AC. Отже, $BC \parallel AD$. Аналогічно з рівності $\angle 2 = \angle 4$ випливає, що $AB \parallel CD$.

Отже, у чотирикутнику $ABCD$ кожні дві протилежні сторони паралельні, а тому цей чотирикутник — паралелограм. ▲

Теорема 3.2. ***Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні та паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм.***

Доведення. ⊙ На рисунку 30 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому $BC = AD$ і $BC \parallel AD$. Доведемо, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Проведемо діагональ AC. У трикутниках ABC і CDA маємо: $BC = AD$ за умовою, кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній AC, а сторона AC — спільна. Отже, трикутники ABC і CDA рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $AB = CD$. Таким чином, у чотирикутнику $ABCD$ кожні дві протилежні сторони рівні. Тому за теоремою 3.1 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. ▲

Теорема 3.3 (обернена до теореми 2.3). ***Якщо в чотирикутнику діагоналі точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.***

Доведення. ⊙ На рисунку 31 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому діагоналі AC і BD перетинаються в точці O, причому $AO = OC$ і $BO = OD$. Доведемо, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Оскільки кути BOC і DOA рівні як вертикальні, $AO = OC$ і $BO = OD$, то трикутники BOC і DOA рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $BC = AD$ і $\angle 1 = \angle 2$. Кути 1 і 2 є різносторонніми при прямих BC і AD та січній AC. Отже, $BC \parallel AD$.

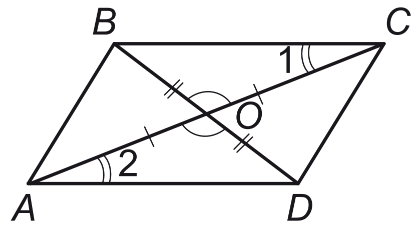


Рис. 31

Таким чином, у чотирикутнику $ABCD$ дві протилежні сторони рівні й паралельні. За теоремою 3.2 чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. ▲

Ви знаєте, що трикутник можна однозначно задати його сторонами, тобто задача побудови трикутника за трьома сторонами має єдиний розв'язок. Інша річ — паралелограм. На рисунку 32 зображено паралелограми $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, сторони яких рівні, тобто $AB = A_1B_1 = A_1B_1 = A_2B_2$ і $BC = B_1C_1 = B_2C_2$. Проте очевидно, що самі паралелограми не є рівними.

Сказане означає, що коли чотири рейки скріпити так, щоб утворився паралелограм, то отримана конструкція не буде жорсткою.

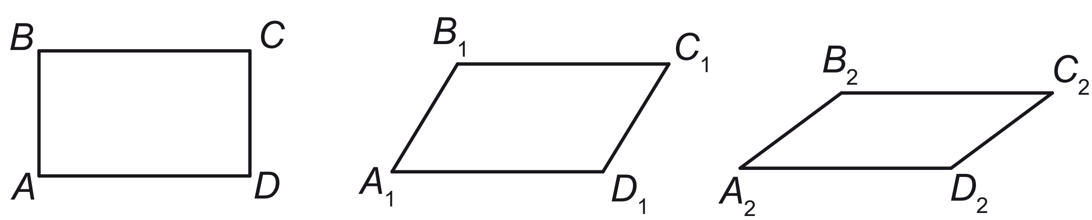


Рис. 32

Цю властивість паралелограма широко використовують на практиці. Завдяки його рухомості лампу можна встановлювати в зручне для роботи положення, а розсувну решітку — відсувати на потрібну відстань у дверному прорізі (рис. 33).

На рисунку 34 зображено схему механізму, який є складовою парової машини. Зі збільшенням швидкості обертання осі кулі віддаляються від неї під дією відцентрової сили, тим самим піднімаючи заслінку, яка регулює кількість пари. Механізм названо **паралелограмом Ватта** на честь винахідника першої універсальної парової машини.

Рис. 33

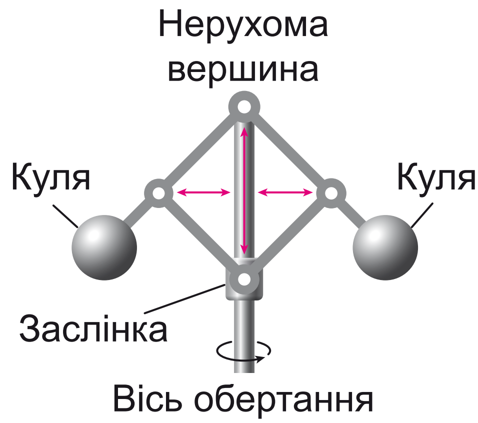


Рис. 34

Задача. Доведіть, що коли в чотирикутнику кожні два протилежні кути рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.

Розв'язання. На рисунку 35 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$. Доведемо, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

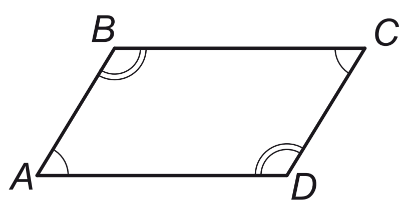


Рис. 35

За теоремою про суму кутів чотирикутника $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$. Ураховуючи, що $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, отримаємо: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 180°$.

Оскільки кути A і B — односторонні кути при прямих AD і BC та січній AB, а їхня сума дорівнює $180°$, то $BC \parallel AD$.

Аналогічно доводимо, що $AB \parallel CD$.

Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

?

1. Які ознаки паралелограма ви знаєте? Сформулюйте їх.
2. Серед властивостей та ознак паралелограма вкажіть взаємно обернені теореми.
3. Яку властивість паралелограма широко використовують на практиці?

ВПРАВИ

90.° Доведіть, що коли сума кутів, прилеглих до будь-якої із сусідніх сторін чотирикутника, дорівнює 180°, то цей чотирикутник — паралелограм.

91.° Чотирикутники *ABCD* і *AMKD* — паралелограми (рис. 36). Доведіть, що чотирикутник *BMKC* — паралелограм.

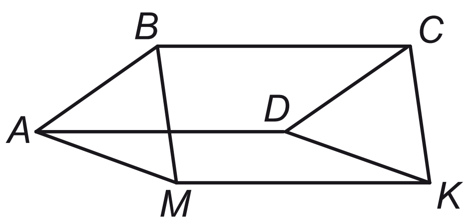


Рис. 36

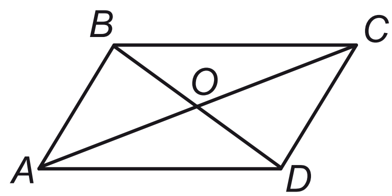


Рис. 37

92.° Відрізок *AO* — медіана трикутника *ABD*, відрізок *BO* — медіана трикутника *ABC* (рис. 37). Доведіть, що чотирикутник *ABCD* — паралелограм.

93.° На діагоналі *AC* паралелограма *ABCD* позначили точки *M* і *K* так, що *AM* = *CK*. Доведіть, що чотирикутник *MBKD* — паралелограм.

94.° Два кола мають спільний центр *O* (рис. 38). В одному з кіл проведено діаметр *AB*, у другому — діаметр *CD*. Доведіть, що чотирикутник *ACBD* — паралелограм.

95.° Точки *E* і *F* — відповідно середини сторін *BC* і *AD* паралелограма *ABCD*. Доведіть, що чотирикутник *AECF* — паралелограм.

96.° На сторонах *AB* і *CD* паралелограма *ABCD* відкладено рівні відрізки *AM* і *CK*. Доведіть, що чотирикутник *MBKD* — паралелограм.

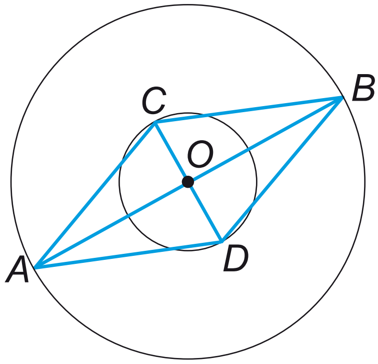


Рис. 38

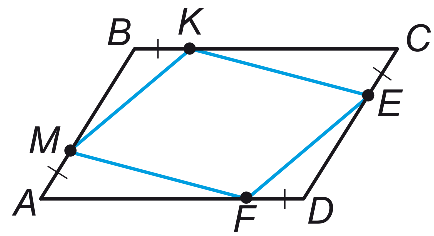


Рис. 39

97.° На сторонах паралелограма *ABCD* (рис. 39) відклали рівні відрізки *AM*, *BK*, *CE* і *DF*. Доведіть, що чотирикутник *MKEF* — паралелограм.

98.• У трикутнику *ABC* на продовженні медіани *AM* за точку *M* відклали відрізок *MK*, який дорівнює відрізку *AM*. Визначте вид чотирикутника *ABKC*.

99.• У чотирикутнику *ABCD* відомо, що $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$. Доведіть, що чотирикутник *ABCD* — паралелограм.

100.• Бісектриса кута *A* паралелограма *ABCD* перетинає сторону *BC* у точці *M*, а бісектриса кута *C* — сторону *AD* у точці *K*. Доведіть, що чотирикутник *AMCK* — паралелограм.

101.• На рисунку 40 чотирикутник *ABCD* — паралелограм, $\angle BCP = \angle DAE$. Доведіть, що чотирикутник *APCE* — паралелограм.

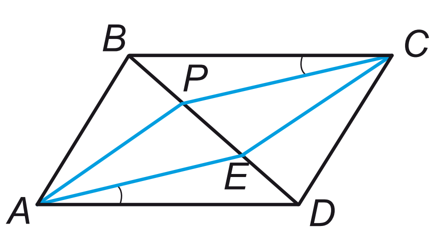


Рис. 40

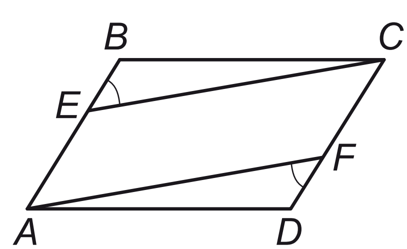


Рис. 41

102.• На рисунку 41 чотирикутник *ABCD* — паралелограм, $\angle BEC = \angle DFA$. Доведіть, що чотирикутник *AECF* — паралелограм.

103.• Із вершин *B* і *D* паралелограма *ABCD* проведено перпендикуляри *BM* і *DK* до діагоналі *AC*. Доведіть, що чотирикутник *BKDM* — паралелограм.

104.• Бісектриси кутів *A* і *C* паралелограма *ABCD* перетинають його діагональ *BD* у точках *E* і *F* відповідно. Доведіть, що чотирикутник *AECF* — паралелограм.

105.•• Через середину *O* діагоналі *NP* паралелограма *MNKP* проведено пряму, яка перетинає сторони *MN* і *KP* у точках *A* і *B* відповідно. Доведіть, що чотирикутник *ANBP* — паралелограм.

106.•• Через точку перетину діагоналей паралелограма *CDEF* проведено дві прямі, одна з яких перетинає сторони *CD* і *EF* у точках *A* і *B* відповідно, а друга — сторони *DE* і *CF* у точках *M* і *K* відповідно. Доведіть, що чотирикутник *AMBK* — паралелограм.

107.•• Точки *M*, *N*, *K* і *P* — середини сторін *AB*, *BC*, *CD* і *AD* паралелограма *ABCD* відповідно. Доведіть, що чотирикутник, вершинами якого є точки перетину прямих *AN*, *BK*, *CP* і *DM*, — паралелограм.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

108. Прямі, на яких лежать бісектриси *AK* і *BM* трикутника *ABC*, перетинаються під кутом 74°. Знайдіть кут *C*.

109. Кут, протилежний основі рівнобедреного трикутника, дорівнює 120°, а висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 8 см. Знайдіть основу трикутника.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

110. Учитель запропонував учневі вирізати з листа картону розміром 8×8 клітинок вісім квадратів розміром

2×2 клітинки за умови не псувати клітинки, що залишилися. Потім виявилося, що потрібен ще один такий самий квадрат. Чи завжди можна це зробити із залишків листа?

НЕОБХІДНО І ДОСТАТНЬО

Із курсу геометрії 7 класу ви дізналися, що більшість теорем складається з двох частин: умови (те, що дано) і висновку (те, що треба довести).

Якщо твердження, що виражає умову, позначити буквою *A*, а твердження, що виражає висновок, — буквою *B*, то формулювання теореми можна зобразити такою схемою:

якщо *A*, то *B*.

Наприклад, теорему 2.3 можна сформулювати так:

	A		***B***
якщо	чотирикутник є паралелограмом,	**то**	діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл

Тоді теорему 3.3, обернену до теореми 2.3, можна сформулювати так:

	A		***B***
якщо	діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл,	**то**	чотирикутник є паралелограмом

Часто в повсякденному житті у своїх висловлюваннях ми користуємося словами «необхідно», «достатньо». Наведемо кілька прикладів.

- Для того щоб уміти розв’язувати задачі, *необхідно* знати теореми.

- Якщо ви на математичній олімпіаді правильно розв'язали всі запропоновані задачі, то цього *достатньо* для того, щоби посісти перше місце.

Уживання слів «необхідно» і «достатньо» тісно пов'язане з теоремами.

Розглянемо теорему:

	A		*B*
якщо	натуральне число кратне 10,	**то**	це число кратне 5

Умова *A* є достатньою для висновку *B*. Разом з тим подільність числа націло на 5 (твердження *B*) необхідна для подільності числа націло на 10 (твердження *A*).

Наведемо ще один приклад:

	A		*B*
якщо	два кути є вертикальними,	**то**	ці кути рівні

У цій теоремі твердження *A* є **достатньою умовою** для твердження *B*, тобто для того, щоб два кути були рівними, *достатньо*, щоб вони були вертикальними. У цій самій теоремі твердження *B* є **необхідною умовою** для твердження *A*, тобто для того, щоб два кути були вертикальними, *необхідно*, щоб вони були рівними. Зазначимо, що твердження *B* не є достатньою умовою для твердження *A*. Справді, якщо два кути рівні, то це зовсім не означає, що вони вертикальні.

Отже, у будь-якій теоремі виду **якщо *A*, то *B*** твердження *A* є достатнім для твердження *B*, а твердження *B* — необхідним для твердження *A*.

Якщо справедлива не тільки теорема

якщо *A*, то *B*,

але й обернена теорема

якщо *B*, то *A*,

то *A* є **необхідною і достатньою** умовою для *B*, а *B* — необхідною і достатньою умовою для *A*.

Наприклад, теореми 3.3 і 2.3 є взаємно оберненими. Мовою «необхідно — достатньо» цей факт можна сформулювати так:

для того щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно і достатньо, щоб його діагоналі точкою перетину ділилися навпіл.

Наголосимо, що коли в теоремі є слова «необхідно» і «достатньо», то вона об'єднує дві теореми: пряму й обернену (прямою теоремою може бути будь-яка з двох теорем, тоді друга буде оберненою). Отже, доведення такої теореми має складатися з двох частин: доведень прямої та оберненої теорем. Теорему, яка об'єднує пряму та обернену теореми, називають **критерієм**.

Іноді замість «необхідно і достатньо» говорять «тоді й тільки тоді». Наприклад, взаємно обернені теореми 2.1 і 3.1 можна об'єднати в такий критерій:

чотирикутник є паралелограмом тоді й тільки тоді, коли кожні дві його протилежні сторони рівні.

Сформулюйте самостійно теорему 2.2 та ключову задачу з пункту 3 у вигляді теореми-критерію.

4. Прямокутник

Паралелограм — це чотирикутник, проте очевидно, що не кожний чотирикутник є паралелограмом. У цьому разі говорять, що паралелограм — це окремий вид чотирикутників. Рисунок 42 ілюструє цей факт.

Рис. 42

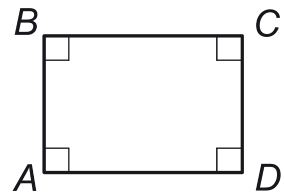


Рис. 43

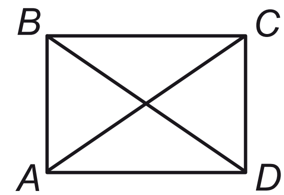


Рис. 44

Існують також окремі види паралелограмів.

Означення. Прямокутником називають паралелограм, у якого всі кути прямі.

На рисунку 43 зображено прямокутник *ABCD*.

З означення випливає, що прямокутник має всі властивості паралелограма. *У прямокутнику:*

- *протилежні сторони рівні;*
- *діагоналі точкою перетину діляться навпіл.*

Проте прямокутник має свої особливі властивості, яких не має паралелограм, відмінний від прямокутника. Так, з означення випливає, що всі кути прямокутника рівні. Ще одну властивість прямокутника встановлює така теорема.

Теорема 4.1. ***Діагоналі прямокутника рівні.***

Доведення. ⊙ На рисунку 44 зображено прямокутник *ABCD*. Доведемо, що його діагоналі *AC* і *BD* рівні.

У прямокутних трикутниках *ABD* і *DCA* катети *AB* і *DC* рівні, а катет *AD* спільний. Тому трикутники *ABD* і *DCA* рівні за двома катетами. Звідси $BD = AC$. ▲

Означення прямокутника дає змогу серед паралелограмів розпізнавати прямокутники. Цій самій меті слугують такі дві теореми, які називають ознаками прямокутника.

Теорема 4.2. ***Якщо один із кутів паралелограма прямий, то цей паралелограм — прямокутник.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 4.3. ***Якщо діагоналі паралелограма рівні, то цей паралелограм — прямокутник.***

Доведення. ⊙ На рисунку 45 зображено паралелограм $ABCD$, діагоналі AC і BD якого рівні. Доведемо, що паралелограм $ABCD$ — прямокутник.

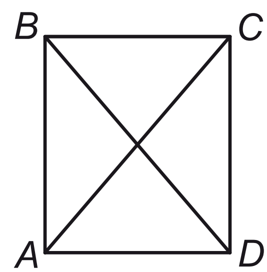


Рис. 45

Розглянемо трикутники ABD і DCA. У них $AB = CD$, $BD = AC$, AD — спільна сторона. Отже, ці трикутники рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle BAD = \angle CDA$. Ці кути є односторонніми при паралельних прямих AB і DC та січній AD. Таким чином, $\angle BAD + \angle CDA = 180°$. Тоді $\angle BAD = \angle CDA = 90°$. Тому за теоремою 4.2 паралелограм $ABCD$ — прямокутник. ▲

1. Яку фігуру називають прямокутником?
2. Які властивості має прямокутник?
3. Яку особливу властивість мають діагоналі прямокутника?
4. За якими ознаками можна встановити, що паралелограм є прямокутником?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

111.° Накресліть прямокутник. Користуючись лише лінійкою, знайдіть точку, яка рівновіддалена від його вершин.

ВПРАВИ

112.° Доведіть, що чотирикутник, усі кути якого прямі, є прямокутником.

113.° Діагоналі прямокутника $ABCD$ (рис. 46) перетинаються в точці O. Доведіть, що трикутники AOB і AOD рівнобедрені.

114.° Діагоналі прямокутника $ABCD$ (рис. 46) перетинаються в точці O, $\angle ABD = 64^\circ$. Знайдіть кути COD і AOD.

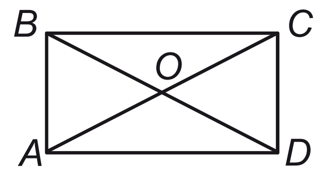


Рис. 46

115.° Діагоналі прямокутника $ABCD$ (рис. 46) перетинаються в точці O, $\angle ADB = 30^\circ$, $BD = 10$ см. Знайдіть периметр трикутника AOB.

116.° Кут між діагоналями прямокутника дорівнює 60°, а менша сторона прямокутника дорівнює 8 см. Знайдіть діагональ прямокутника.

117.• На діагоналі AC прямокутника $ABCD$ відкладено рівні відрізки AM і CK (точка M лежить між точками A і K). Доведіть, що чотирикутник $BKDM$ — паралелограм, відмінний від прямокутника.

118.• На продовженні діагоналі BD прямокутника $ABCD$ за точку B позначили точку E, а на продовженні за точку D — точку F так, що $BE = DF$. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм, відмінний від прямокутника.

119.• Точка M — середина сторони BC прямокутника $ABCD$, $MA \perp MD$, периметр прямокутника дорівнює 36 см. Знайдіть сторони прямокутника.

120.• Периметр прямокутника $ABCD$ дорівнює 30 см. Бісектриси кутів A і D перетинаються в точці M, яка належить стороні BC. Знайдіть сторони прямокутника.

121.• Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 55 см. Прямокутник $ABCD$ побудовано так, що дві його вершини A і D належать гіпотенузі, а дві інші — катетам даного трикутника. Знайдіть сторони прямокутника, якщо $AB : BC = 3 : 5$.

122.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AC = BC = 6$ см. Прямокутник $CMKN$ побудовано так, що точка M належить катету AC, точка N — катету BC, а точка K — гіпотенузі AB. Знайдіть периметр прямокутника $CMKN$.

123.° Доведіть, що коли діагоналі паралелограма утворюють рівні кути з однією з його сторін, то цей паралелограм є прямокутником.

124.° Доведіть, що медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює її половині.

125.° Побудуйте прямокутник:
1) за двома сторонами;
2) за діагоналлю та кутом між діагоналлю та стороною.

126.° Побудуйте прямокутник:
1) за стороною та діагоналлю;
2) за діагоналлю та кутом між діагоналями.

127.°° Серединний перпендикуляр діагоналі AC прямокутника $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M так, що $BM : MC = 1 : 2$. Знайдіть кути, на які діагональ прямокутника ділить його кут.

128.°° У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $\angle BCA : \angle DCA = 1 : 5$, $AC = 18$ см. Знайдіть відстань від точки C до діагоналі BD.

129.°° Доведіть, що бісектриси кутів паралелограма, у якого сусідні сторони не рівні, перетинаючись, утворюють прямокутник.

130.°° Побудуйте прямокутник за стороною та кутом між діагоналями, який протилежний даній стороні.

131.* Побудуйте прямокутник:
1) за діагоналлю та різницею двох сторін;
2) за периметром і діагоналлю;
3) за периметром і кутом між діагоналями.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

132. У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 48°$, відрізки AK і BM — його висоти. Знайдіть кут між прямими AK і BM.

133. На стороні AC трикутника ABC позначено точку D так, що $\angle A = \angle CBD$. Знайдіть кут ABC, якщо трикутники ABD і BCD мають ще одну пару рівних кутів.

134. Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC. Через точку C проведено пряму, яка паралельна прямій AD і перетинає пряму AB у точці E. Визначте вид трикутника ACE.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

135. На площині позначено 1000 точок. Доведіть, що існує пряма, відносно якої у кожній півплощині лежать по 500 точок.

5. Ромб

Ви вже знаєте, що прямокутник — це окремий вид паралелограма. Ознайомимося ще з одним видом паралелограма — ромбом.

Означення. Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні.

На рисунку 47 зображено ромб $ABCD$.

З означення випливає, що ромб має всі властивості паралелограма. *У ромбі:*

- *протилежні кути рівні;*
- *діагоналі точкою перетину діляться навпіл.*

Проте ромб має і свої особливі властивості.

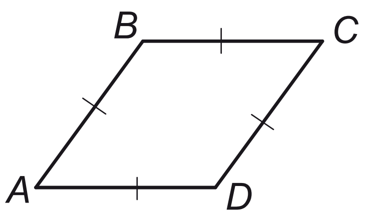


Рис. 47

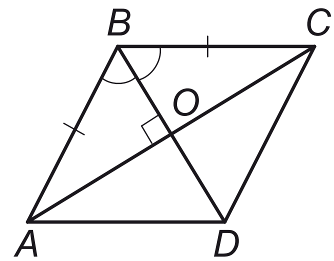


Рис. 48

Теорема 5.1. ***Діагоналі ромба перпендикулярні та є бісектрисами його кутів.***

Доведення. ⊙ На рисунку 48 зображено ромб $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Доведемо, що $BD \perp AC$ і $\angle ABO = \angle CBO$.

Оскільки за означенням ромба всі його сторони рівні, то трикутник ABC рівнобедрений ($AB = BC$). За властивістю діагоналей паралелограма $AO = OC$. Тоді відрізок BO є медіаною трикутника ABC, а отже, і висотою та бісектрисою цього трикутника. Таким чином, $BD \perp AC$ і $\angle ABO = \angle CBO$. ▲

Розпізнавати ромби серед паралелограмів дають змогу не лише означення ромба, а й такі дві теореми, які називають ознаками ромба.

Теорема 5.2. ***Якщо діагоналі паралелограма перпендикулярні, то цей паралелограм — ромб.***

Теорема 5.3. ***Якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його кута, то цей паралелограм — ромб.***

Доведіть ці теореми самостійно.

1. Яку фігуру називають ромбом?
2. Які властивості має ромб?
3. Які особливі властивості мають діагоналі ромба?

4. За якими ознаками можна встановити, що паралелограм є ромбом?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

136.° Накресліть ромб зі стороною 5 см і кутом 40°. Проведіть дві висоти з вершини його гострого кута та дві висоти з вершини тупого кута.

ВПРАВИ

137.° Доведіть, що коли дві сусідні сторони паралелограма рівні, то він є ромбом.

138.° Доведіть, що чотирикутник, усі сторони якого рівні, є ромбом.

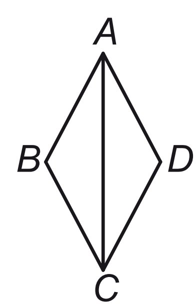


Рис. 49

139.° Діагональ AC ромба $ABCD$ (рис. 49) утворює зі стороною AD кут 42°. Знайдіть усі кути ромба.

140.° У ромбі $ABCD$ відомо, що $\angle C = 140°$, а діагоналі перетинаються в точці O. Знайдіть кути трикутника AOB.

141.° Одна з діагоналей ромба дорівнює його стороні. Знайдіть кути ромба.

142.° Знайдіть кути ромба, якщо його периметр дорівнює 24 см, а висота — 3 см.

143.° Знайдіть периметр ромба $ABCD$, якщо $\angle A = 60°$, $BD = 9$ см.

144.° Кут D ромба $ABCD$ у 8 разів більший за кут CAD. Знайдіть кут BAD.

145.° Кути, які сторона ромба утворює з його діагоналями, відносяться як 2 : 7. Знайдіть кути ромба.

146.° Точки M і K — відповідно середини сторін AB і BC ромба $ABCD$. Доведіть, що $MD = KD$.

147.° Точки E і F — відповідно середини сторін BC і CD ромба $ABCD$. Доведіть, що $\angle EAC = \angle FAC$.

148.° Доведіть, що висоти ромба рівні.

149.• Висота ромба, проведена з вершини його тупого кута, ділить сторону ромба навпіл. Менша діагональ ромба дорівнює 4 см. Знайдіть кути та периметр ромба.

150.• Доведіть, що діагональ ромба ділить навпіл кут між висотами ромба, проведеними з тієї самої його вершини, що й діагональ.

151.• На сторонах AB і AD ромба $ABCD$ відкладено рівні відрізки AE і AF відповідно. Доведіть, що $\angle CEF = \angle CFE$.

152.• Відрізок AM — бісектриса трикутника ABC. Через точку M проведено пряму, яка паралельна стороні AC і перетинає сторону AB у точці K, та пряму, яка паралельна стороні AB і перетинає сторону AC у точці D. Доведіть, що $AM \perp DK$.

153.• Бісектриси кутів A і B паралелограма $ABCD$ перетинають його сторони BC і AD у точках F і E відповідно. Визначте вид чотирикутника $ABFE$.

154.• У трикутнику ABC проведено серединний перпендикуляр його бісектриси BD, який перетинає сторони AB і BC у точках K і P відповідно. Визначте вид чотирикутника $BKDP$.

155.• Побудуйте ромб:

1) за стороною та кутом;
2) за двома діагоналями;
3) за висотою та кутом.

156.• Побудуйте ромб:

1) за стороною та діагоналлю;
2) за висотою та діагоналлю.

157.•• У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $AD = 9$ см, $\angle BDA = 30°$. На сторонах BC і AD позначено відповідно точки M і K так, що утворився ромб $AMCK$. Знайдіть сторону цього ромба.

158.•• Побудуйте ромб за діагоналлю та кутом, вершина якого належить цій діагоналі.

159.•• Побудуйте ромб за діагоналлю та протилежним їй кутом ромба.

160.* Побудуйте ромб:

1) за сумою діагоналей і кутом між діагоналлю та стороною;
2) за гострим кутом і різницею діагоналей;
3) за гострим кутом і сумою сторони та висоти;
4) за стороною та сумою діагоналей;
5) за тупим кутом і сумою діагоналей;
6) за стороною та різницею діагоналей.

161.* Дано точки M, N і K. Побудуйте ромб $ABCD$ так, щоб точка M була серединою сторони AB, а точки N і K — основами висот, проведених з вершини B до сторони AD і з вершини D до сторони BC відповідно.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

162. На сторонах кута з вершиною в точці A відкладено рівні відрізки AB і AC. Через точки B і C проведено прямі, які перпендикулярні до сторін AB і AC відповідно та перетинаються в точці D. Доведіть, що промінь AD є бісектрисою кута BAC.

163. На продовженні сторони AC трикутника ABC за точку A позначили точку D таку, що $AD = AB$, а на продовженні цієї сторони за точку C — точку E таку, що $CE = BC$. Знайдіть кути та периметр трикутника ABC, якщо $DE = 18$ см, $\angle BDA = 15°$, $\angle BEC = 36°$.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

164. На аркуші паперу в клітинку вибрали довільно 100 клітинок. Доведіть, що серед них можна знайти не менше ніж 25 клітинок, які не мають спільних точок.

6. Квадрат

Означення. Квадратом називають прямокутник, у якого всі сторони рівні.

На рисунку 50 зображено квадрат $ABCD$.

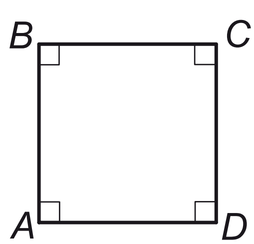


Рис. 50

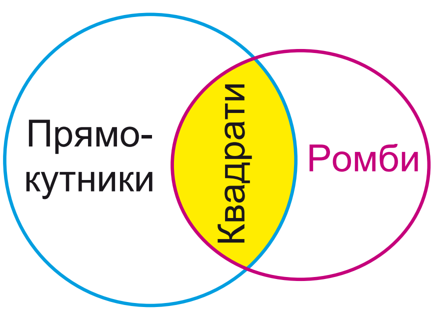


Рис. 51

З наведеного означення випливає, що квадрат — це ромб, у якого всі кути рівні. Отже, квадрат є окремим видом і прямокутника, і ромба. Це ілюструє рисунок 51. Тому квадрат має всі властивості прямокутника та ромба. Звідси випливає, що:

- *усі кути квадрата прямі;*
- *діагоналі квадрата рівні, перпендикулярні та є бісектрисами його кутів.*

1. Яку фігуру називають квадратом?
2. Який ромб є квадратом?
3. Які властивості має квадрат?

ВПРАВИ

165.° Доведіть, що коли один із кутів ромба прямий, то цей ромб є квадратом.

166.° Доведіть, що коли дві сусідні сторони прямокутника рівні, то цей прямокутник є квадратом.

167.° Діагональ BD квадрата $ABCD$ дорівнює 5 см. Яка довжина діагоналі AC? Чому дорівнюють кути трикутника AOB, де O — точка перетину діагоналей квадрата?

168.° На стороні BC квадрата $ABCD$ (рис. 52) позначили точку K так, що $\angle AKB = 74°$. Знайдіть кут CAK.

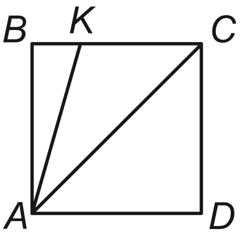


Рис. 52

169.° На стороні BC квадрата $ABCD$ позначили точку K так, що $AK = 2BK$. Знайдіть кут KAD.

170.° Чи є правильним твердження:

1) будь-який квадрат є паралелограмом;
2) будь-який ромб є квадратом;
3) будь-який прямокутник є квадратом;
4) будь-який квадрат є прямокутником;
5) будь-який квадрат є ромбом;

6) якщо діагоналі чотирикутника рівні, то він є прямокутником;
7) якщо діагоналі чотирикутника перпендикулярні, то він є ромбом;
8) існує ромб, який є прямокутником;
9) існує квадрат, який не є ромбом;
10) якщо діагоналі чотирикутника не перпендикулярні, то він не є ромбом;
11) якщо діагоналі паралелограма не рівні, то він не є прямокутником;
12) якщо діагональ прямокутника ділить його кут навпіл, то цей прямокутник є квадратом?

171.• Через вершини квадрата проведено прямі, паралельні його діагоналям. Доведіть, що точки перетину цих прямих є вершинами квадрата.

172.• У прямокутному трикутнику через точку перетину бісектриси прямого кута та гіпотенузи проведено прямі, паралельні катетам. Доведіть, що чотирикутник, який утворився, є квадратом.

173.• Точки M, K, N, P є відповідно серединами сторін AB, BC, CD і AD квадрата $ABCD$. Доведіть, що чотирикутник $MKNP$ — квадрат.

174.• У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AC = BC = 14$ см. Дві сторони квадрата $CDEF$ лежать на катетах трикутника ABC, а вершина E належить гіпотенузі AB. Знайдіть периметр квадрата $CDEF$.

175.• У квадраті $ABCD$ позначено точку M так, що трикутник AMB рівносторонній. Доведіть, що трикутник CMD рівнобедрений.

176.• Доведіть, що коли діагоналі паралелограма рівні та перпендикулярні, то цей паралелограм є квадратом.

177.• Чотирикутники $ABCD$, $DEFM$, $MNKL$, $LPOS$, $SQTV$ — квадрати (рис. 53). Знайдіть суму довжин тих сторін квадратів, які не лежать на прямій AV, якщо довжина відрізка AV дорівнює 16 см.

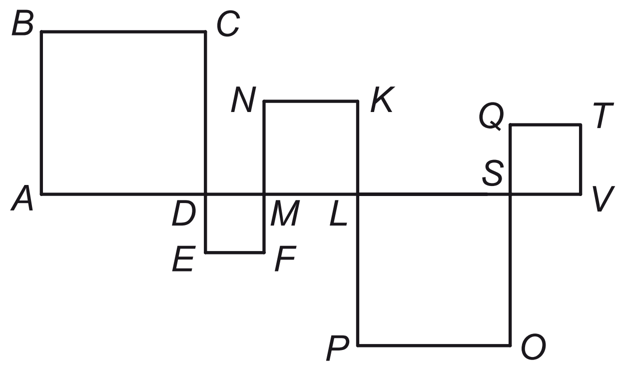


Рис. 53

178.• Побудуйте квадрат за його стороною.

179.•• Доведіть, що точки перетину бісектрис кутів прямокутника, який не є квадратом, є вершинами квадрата.

180.•• Вершини M і K рівностороннього трикутника AMK належать сторонам BC і CD квадрата $ABCD$. Доведіть, що $MK \parallel BD$.

181.•• Дано точки M і K. Побудуйте квадрат $ABCD$ так, щоб точка M була серединою сторони AB, а точка K — серединою сторони BC.

182.* Через довільну точку, яка належить квадрату, проведено дві перпендикулярні прямі, кожна з яких перетинає дві протилежні сторони квадрата. Доведіть, що відрізки цих прямих, які належать квадрату, рівні.

183.* Побудуйте квадрат:
1) за сумою діагоналі та сторони;
2) за різницею діагоналі та сторони.

184.* У квадраті $ABCD$ позначено точку O так, що $\angle OAD = \angle ODA = 15°$. Доведіть, що трикутник BOC рівносторонній.

185.* На сторонах BC і CD квадрата $ABCD$ позначено точки M і E так, що кути BAM і MAE рівні. Доведіть, що $AE = BM + DE$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

186. На рисунку 54 $AB \parallel CD$, $AB = AE$, $CD = CE$. Доведіть, що $BE \perp DE$.

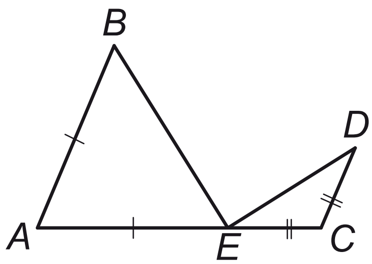


Рис. 54

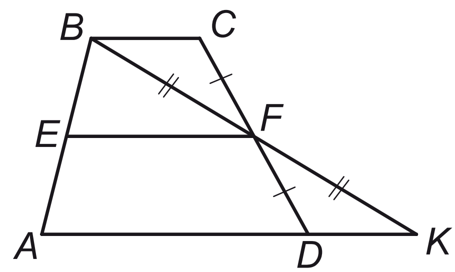


Рис. 55

187. На рисунку 55 $EF \parallel AD$, $BF = KF$, $CF = DF$. Доведіть, що $EF \parallel BC$.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

188. Розташуйте на площині вісім точок так, щоб на серединному перпендикулярі будь-якого відрізка з кінцями в цих точках лежало рівно дві із цих точок.

7. Середня лінія трикутника

Означення. **Середньою лінією трикутника називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін.**

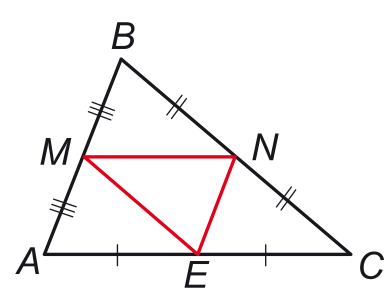


Рис. 56

На рисунку 56 відрізки MN, NE, EM — середні лінії трикутника ABC.

Теорема 7.1. ***Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох його сторін, паралельна третій стороні та дорівнює її половині.***

Доведення. Нехай MN — середня лінія трикутника ABC (рис. 57). Доведемо, що $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2}AC$.

На прямій MN позначимо точку E так, що $MN = NE$ (рис. 57). Сполучимо відрізком точки E і C. Оскільки точка N є серединою відрізка BC, то $BN = NC$. Кути 1 і 2 рівні як вертикальні. Отже, трикутники MBN і ECN рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $MB = EC$ і $\angle 3 = \angle 4$. Ураховуючи, що $AM = BM$, отримаємо: $EC = AM$. Кути 3 і 4 є різносторонніми при прямих AB і EC та січній BC. Тоді $AB \parallel EC$.

Таким чином, у чотирикутнику $AMEC$ сторони AM і EC паралельні та рівні. Отже, за теоремою 3.2 чотирикутник $AMEC$ є паралелограмом. Звідси $ME \parallel AC$, тобто $MN \parallel AC$.

Також $ME = AC$. Оскільки $MN = \frac{1}{2}ME$, то $MN = \frac{1}{2}AC$. ▲

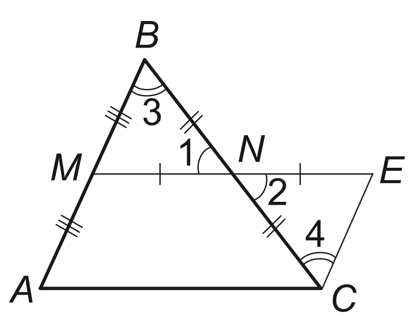


Рис. 57

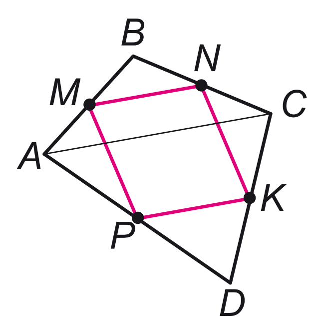


Рис. 58

Задача. Доведіть, що середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма.

Розв'язання. У чотирикутнику $ABCD$ точки M, N, K і P — середини сторін AB, BC, CD і AD відповідно (рис. 58).

Відрізок MN — середня лінія трикутника ABC. За властивістю середньої лінії трикутника $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2}AC$.

Відрізок PK — середня лінія трикутника ADC. За властивістю середньої лінії трикутника $PK \parallel AC$, $PK = \frac{1}{2}AC$.

Оскільки $MN \parallel AC$ і $PK \parallel AC$, то $MN \parallel PK$.

З рівностей $MN = \frac{1}{2}AC$ і $PK = \frac{1}{2}AC$ отримуємо:

$$MN = PK = \frac{1}{2}AC.$$

Отже, у чотирикутнику $MNKP$ сторони MN і PK рівні та паралельні, тому чотирикутник $MNKP$ — паралелограм. ●

1. Що називають середньою лінією трикутника?
2. Скільки середніх ліній можна провести в трикутнику?
3. Які властивості має середня лінія трикутника?

ВПРАВИ

189.° Чи є відрізок MK середньою лінією трикутника ABC (рис. 59)?

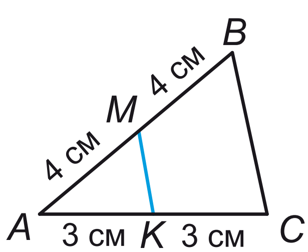


Рис. 59

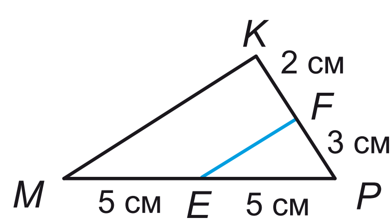


Рис. 60

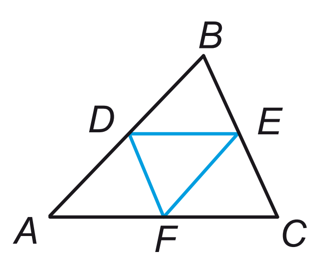


Рис. 61

190.° Чи є відрізок EF середньою лінією трикутника MKP (рис. 60)?

191.° Відрізки DE і DF — середні лінії трикутника ABC (рис. 61). Чи є відрізок EF середньою лінією цього трикутника?

192.° Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 8 см і 12 см. Знайдіть середні лінії цього трикутника.

193.° Точки *M* і *K* — середини сторін *AB* і *AC* трикутника *ABC* відповідно. Знайдіть периметр трикутника *ABC*, якщо периметр трикутника *MAK* дорівнює 17 см.

194.° Доведіть, що периметр трикутника, сторони якого є середніми лініями трикутника *ABC*, дорівнює половині периметра трикутника *ABC*.

195.° Визначте вид трикутника, у якому середні лінії рівні між собою.

196.° Доведіть, що середні лінії трикутника розбивають його на чотири рівних трикутники.

197.° Точки *E* і *F* — відповідно середини сторін *AB* і *BC* трикутника *ABC*. Знайдіть сторону *AC*, якщо вона на 7 см більша за відрізок *EF*.

198.° Доведіть, що середня лінія *DE* трикутника *ABC* (точки *D* і *E* належать сторонам *AB* і *BC* відповідно) та його медіана *BM* точкою перетину діляться навпіл.

199.° Доведіть, що висота *AM* трикутника *ABC* перпендикулярна до його середньої лінії, яка сполучає середини сторін *AB* і *AC*.

200.• Знайдіть кути трикутника, дві середні лінії якого рівні та перпендикулярні.

201.• Середня лінія рівнобедреного трикутника, паралельна основі, дорівнює 6 см. Знайдіть сторони даного трикутника, якщо його периметр дорівнює 46 см.

202.• Сума діагоналей чотирикутника дорівнює 28 см. Знайдіть периметр чотирикутника, вершини якого є серединами сторін даного чотирикутника.

203.• Вершинами чотирикутника є середини сторін ромба з діагоналями 8 см і 14 см. Визначте вид чотирикутника та знайдіть його сторони.

204.• Вершинами чотирикутника є середини сторін прямокутника з діагоналлю 12 см. Визначте вид чотирикутника та знайдіть його сторони.

205.• Доведіть, що вершини трикутника рівновіддалені від прямої, на якій лежить його середня лінія.

206.•• На сторонах AB і BC трикутника позначено відповідно точки M і K так, що $AM = 3BM$, $CK = 3BK$. Доведіть, що $MK \parallel AC$, і знайдіть відрізок MK, якщо $AC = 16$ см.

207.•• Кути BAD і BCE — зовнішні кути трикутника ABC. Із вершини B проведено перпендикуляри BM і BK до бісектрис кутів BAD і BCE відповідно. Знайдіть відрізок MK, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 18 см.

208.•• Побудуйте трикутник за серединами трьох його сторін.

209.•• Побудуйте паралелограм за серединами трьох його сторін.

210.* Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні. Через середини сторін AB і AD проведено прямі, перпендикулярні відповідно до сторін DC і BC. Доведіть, що точка перетину проведених прямих належить прямій AC.

211.* Сторони AB і CD опуклого чотирикутника $ABCD$ рівні. Через середини діагоналей AC і BD проведено пряму, яка перетинає сторони AB і CD у точках M і N відповідно. Доведіть, що $\angle BMN = \angle CNM$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

212. До кола із центром O через точку C проведено дотичні CA і CB (A і B — точки дотику). Відрізок AD — діаметр кола. Доведіть, що $BD \parallel CO$.

213. У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, $\angle B = 32°$, AK — бісектриса трикутника. Через точку K проведено пряму, яка паралельна стороні AB і перетинає сторону AC у точці M. Знайдіть кут AKM.

214. Діагональ BD паралелограма $ABCD$ є його висотою та дорівнює стороні BC. Знайдіть сторону CD паралелограма, якщо точка B віддалена від прямої CD на 4 см.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

215. П’ять точок належать рівносторонньому трикутнику, сторона якого дорівнює 1 см. Доведіть, що із цих точок можна вибрати дві, відстань між якими не більша за 0,5 см.

8. Трапеція

Означення. Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.

Кожний із чотирикутників, зображених на рисунку 62, є трапецією.

Паралельні сторони трапеції називають **основами**, а непаралельні — **бічними сторонами** (рис. 63).

У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) кути A і D називають **кутами при основі** AD, а кути B і C — кутами при основі BC.

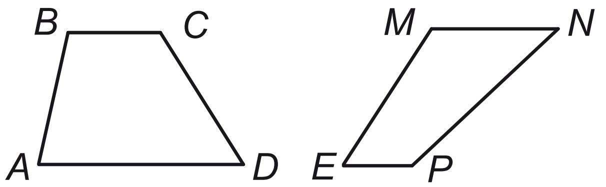


Рис. 62

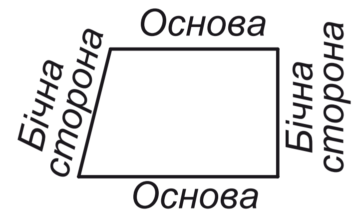


Рис. 63

Означення. Висотою трапеції називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить одну з основ, на пряму, що містить другу основу.

На рисунку 64 кожний із відрізків BM, EF, DK, PQ є висотою трапеції $ABCD$. Довжини цих відрізків дорівнюють відстані між паралельними прямими BC і AD. Тому $BM = EF = DK = PQ$.

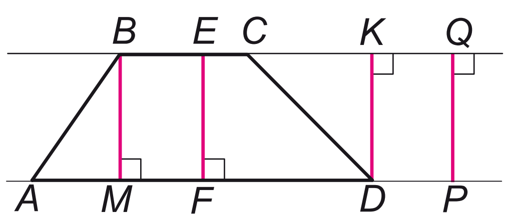


Рис. 64

На рисунку 65 зображено трапецію $ABCD$, у якої бічні сторони AB і CD рівні. Таку трапецію називають **рівнобічною** або **рівнобедреною**.

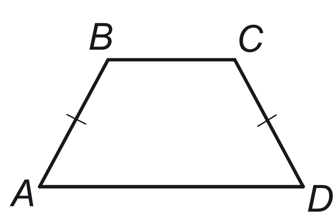


Рис. 65

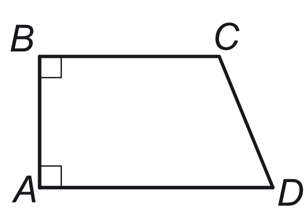


Рис. 66

Якщо бічна сторона трапеції є її висотою, то таку трапецію називають **прямокутною** (рис. 66).

Трапеція — це окремий вид чотирикутника. Зв'язок між чотирикутниками та їхніми окремими видами показано на рисунку 67.

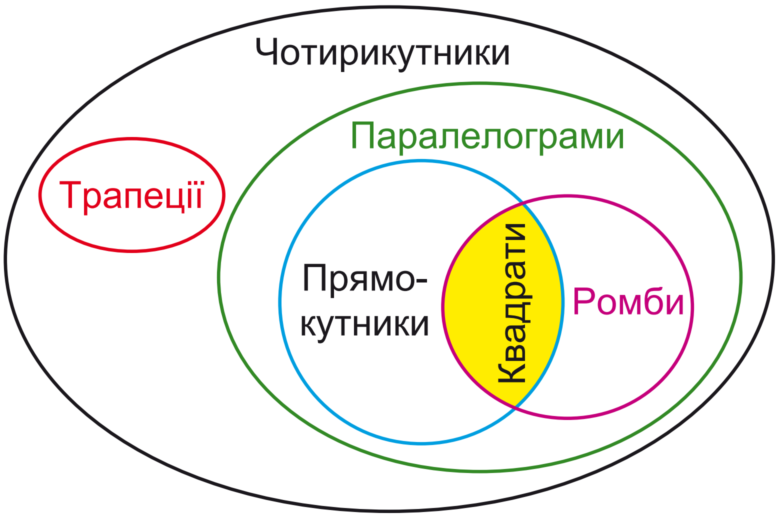


Рис. 67

Означення. Середньою лінією трапеції називають відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.

На рисунку 68 відрізок *MN* — середня лінія трапеції *ABCD*.

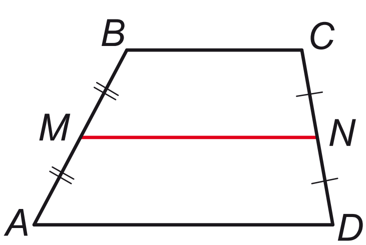


Рис. 68

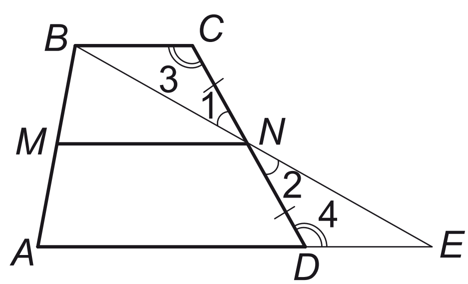


Рис. 69

Теорема 8.1. ***Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює половині їхньої суми.***

Доведення. Нехай *MN* — середня лінія трапеції *ABCD* (рис. 69). Доведемо, що $MN \parallel AD$ і $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Проведемо пряму BN і точку її перетину з прямою AD позначимо буквою E.

Оскільки точка N — середина відрізка CD, то $CN = ND$. Кути 1 і 2 рівні як вертикальні, а кути 3 і 4 рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AE та січній CD. Отже, трикутники BCN і EDN рівні за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $BC = DE$ і $BN = NE$. Тоді відрізок MN — середня лінія трикутника ABE. Із цього випливає, що $MN \parallel AE$, тобто $MN \parallel AD$, і $MN = \frac{1}{2}AE$. Маємо:

$$MN = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC). \blacktriangle$$

Задача (властивості рівнобічної трапеції). Доведіть, що в рівнобічній трапеції:

1) кути при кожній основі рівні;

2) діагоналі рівні;

3) висота трапеції, проведена з вершини тупого кута, ділить основу трапеції на два відрізки, менший з яких дорівнює половині різниці основ, а більший — половині суми основ (середній лінії трапеції).

Розв'язання. Розглянемо рівнобічну трапецію $ABCD$ ($AB = CD$).

1) Проведемо висоти BM і CK (рис. 70). Оскільки $AB = CD$ і $BM = CK$, то прямокутні трикутники AMB і DKC рівні за катетом і гіпотенузою. Тоді $\angle A = \angle D$.

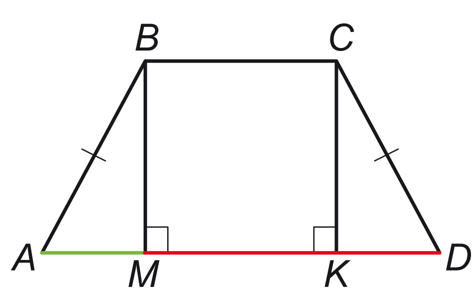


Рис. 70

Маємо: $\angle A = \angle D$, $\angle A + \angle ABC = 180°$, $\angle D + \angle DCB = 180°$. Отже, $\angle ABC = \angle DCB$.

2) Розглянемо трикутники ACD і DBA (рис. 71).

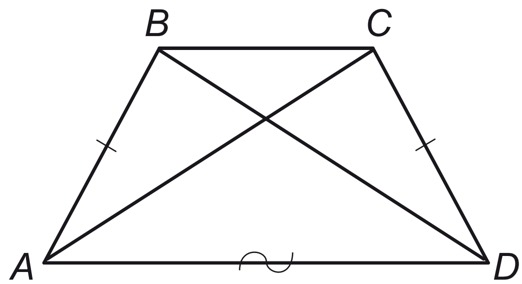


Рис. 71

Маємо: $AB = CD$, AD — спільна сторона, кути BAD і CDA рівні як кути при основі рівнобічної трапеції. Отже, трикутники ACD і DBA рівні за двома сторонами та кутом між ними. Тоді $AC = BD$.

3) У чотирикутнику $BMKC$ (рис. 70) $BM \parallel CK$, $BC \parallel MK$, кут BMK прямий. Отже, цей чотирикутник є прямокутником. Звідси $MK = BC$.

З рівності трикутників AMB і DKC випливає, що $AM = KD$. Тоді

$$AM = \frac{AD - MK}{2} = \frac{AD - BC}{2};$$

$$MD = AD - AM = AD - \frac{AD - BC}{2} =$$

$$= \frac{2AD - AD + BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

1. Який чотирикутник називають трапецією?
2. Які сторони трапеції називають основами? бічними сторонами?
3. Що називають висотою трапеції?
4. Які існують види трапецій?

5. Яку трапецію називають рівнобічною?
6. Яку трапецію називають прямокутною?
7. Що називають середньою лінією трапеції?
8. Сформулюйте теорему про властивості середньої лінії трапеції.
9. Сформулюйте властивості рівнобічної трапеції.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

216.° Накресліть, використовуючи клітинки зошита, трапецію:

1) рівнобічну;
2) прямокутну;
3) яка не є ні прямокутною, ні рівнобічною;
4) у якої один із кутів при основі гострий, а другий кут при цій самій основі тупий.

217.° Перерисуйте в зошит рисунок 72, проведіть висоти трапеції, одним із кінців яких є відповідно точки *B*, *M*, *K* і *D*.

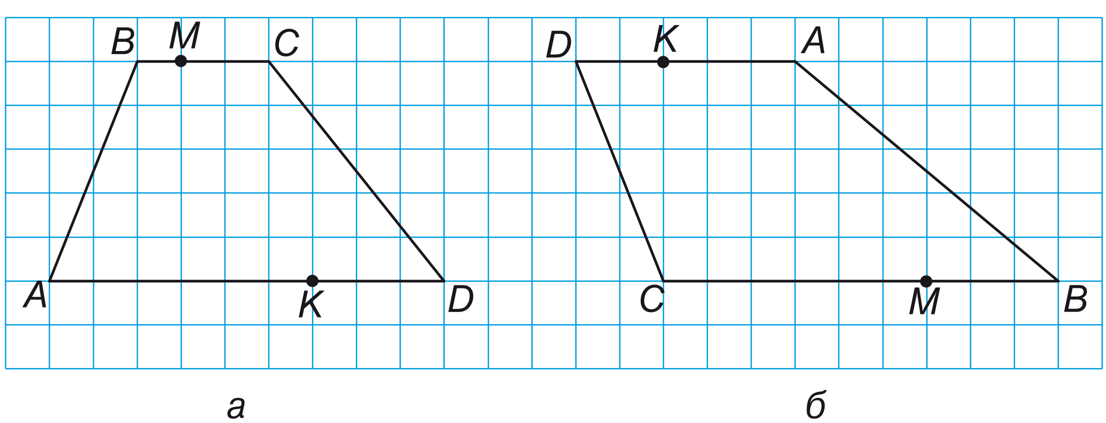


Рис. 72

ВПРАВИ

218.° Знайдіть на рисунку 73 трапеції, укажіть їхні основи та бічні сторони.

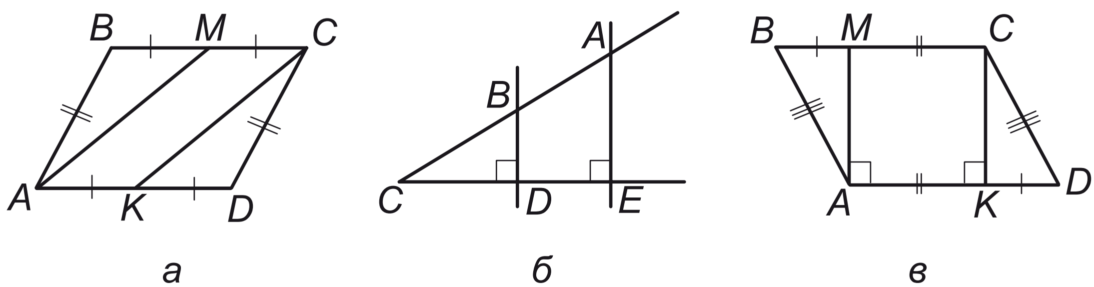


Рис. 73

219.° Чи є чотирикутник *ABCD*, зображений на рисунку 74, трапецією? У разі ствердної відповіді вкажіть основи та бічні сторони трапеції.

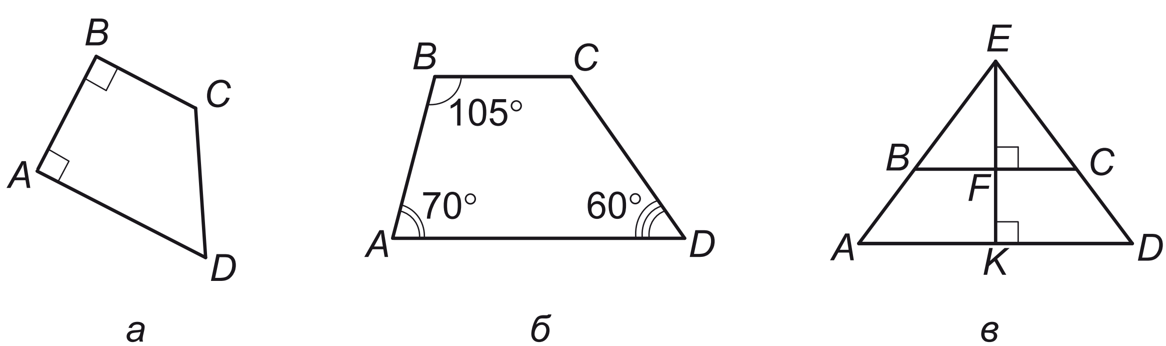


Рис. 74

220.° Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 52 см, основи — 13 см і 21 см. Знайдіть бічну сторону трапеції.

221.° Периметр трапеції дорівнює 49 см, бічні сторони — 5,6 см і 7,8 см. Знайдіть основи трапеції, якщо одна з них на 7,4 см більша за другу.

222.° Доведіть, що сума кутів трапеції, прилеглих до її бічної сторони, дорівнює 180°.

223.° 1) Знайдіть кути A і C трапеції $ABCD$ з основами AD і BC, якщо $\angle B = 132°$, $\angle D = 24°$.

2) Знайдіть кути трапеції $ABCD$, прилеглі до бічної сторони AB, якщо кут A менший від кута B на $38°$.

224.° Знайдіть кути трапеції $ABCD$, прилеглі до бічної сторони CD, якщо $\angle C : \angle D = 8 : 7$.

225.° Один із кутів рівнобічної трапеції дорівнює $46°$. Знайдіть решту її кутів.

226.° Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо різниця її протилежних кутів дорівнює $20°$.

227.° У рівнобічній трапеції кут між бічною стороною та висотою, проведеною з вершини тупого кута, дорівнює $23°$. Знайдіть кути трапеції.

228.° Чи можуть у трапеції бути:

1) три прямих кути;
2) три гострих кути;
3) два протилежних кути тупими;
4) два протилежних кути прямими;
5) два протилежних кути рівними?

229.° Чи можуть:

1) основи трапеції бути рівними;
2) діагоналі трапеції точкою перетину ділитися навпіл?

230.° Доведіть, що коли кути при одній з основ трапеції рівні, то дана трапеція є рівнобічною.

231.° Доведіть, що сума протилежних кутів рівнобічної трапеції дорівнює $180°$. Чи є правильним обернене твердження: якщо сума протилежних кутів трапеції дорівнює $180°$, то дана трапеція є рівнобічною?

232.° Середня лінія рівностороннього трикутника зі стороною 6 см розбиває його на трикутник і чотирикутник. Визначте вид чотирикутника та знайдіть його периметр.

233.° Висота рівнобічної трапеції, проведена з кінця меншої основи, ділить більшу основу на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть основи трапеції.

234.° Один із кутів рівнобічної трапеції дорівнює 60°, бічна сторона — 18 см, а сума основ — 50 см. Знайдіть основи трапеції.

235.° Основи прямокутної трапеції дорівнюють 10 см і 24 см, а один із кутів — 45°. Знайдіть меншу бічну сторону трапеції.

236.° Основи прямокутної трапеції дорівнюють 7 см і 15 см, а один із кутів — 60°. Знайдіть більшу бічну сторону трапеції.

237.° У трапеції $ABCD$ відомо, що $AB = CD$, $\angle BAC = 20°$, $\angle CAD = 50°$. Знайдіть кути ACB і ACD.

238.° У трапеції $ABCD$ відомо, що $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $BC = CD$, $\angle ABD = 80°$. Знайдіть кути трапеції.

239.° У трапеції $ABCD$ менша основа BC дорівнює 6 см. Через вершину B проведено пряму, яка паралельна стороні CD і перетинає сторону AD у точці M. Знайдіть периметр трапеції, якщо периметр трикутника ABM дорівнює 16 см.

240.° Через вершину C трапеції $ABCD$ проведено пряму, яка паралельна бічній стороні AB і перетинає більшу основу AD у точці E. Знайдіть кути трапеції, якщо $\angle D = 35°$, $\angle DCE = 65°$.

241.° Основи трапеції дорівнюють 9 см і 15 см. Чому дорівнює її середня лінія?

242.° Середня лінія трапеції дорівнює 8 см, а одна з основ — 5 см. Знайдіть другу основу трапеції.

243.° Одна з основ трапеції на 8 см більша за другу, а середня лінія дорівнює 17 см. Знайдіть основи трапеції.

244.° Основи трапеції відносяться як 3 : 4, а середня лінія дорівнює 14 см. Знайдіть основи трапеції.

245.° Кожну з бічних сторін трапеції $ABCD$ (рис. 75) поділено на чотири рівні частини: $AE = EF = FK = KB$, $DN = NM = MP = PC$. Знайдіть відрізки EN, FM і KP, якщо $AD = 19$ см, $BC = 11$ см.

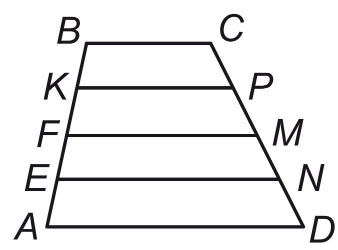


Рис. 75

246.° Висота прямокутної трапеції, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки завдовжки 7 см і 5 см, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть середню лінію трапеції.

247.° Середня лінія прямокутної трапеції дорівнює 9 см, а висота, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки, один з яких у 2 рази більший за другий, рахуючи від вершини прямого кута. Знайдіть основи трапеції.

248.• Діагоналі рівнобічної трапеції $ABCD$ ($AB = CD$) перетинаються в точці O. Доведіть, що $AO = OD$ і $BO = OC$.

249.• Висота рівнобічної трапеції дорівнює h, а бічну сторону видно з точки перетину діагоналей під кутом[1] $60°$. Знайдіть діагональ трапеції.

250.• Основи рівнобічної трапеції відносяться як 2 : 5, а діагональ ділить тупий кут трапеції навпіл. Знайдіть сторони трапеції, якщо її периметр дорівнює 68 см.

251.• У трапеції $ABCD$ відомо, що $AB = CD$, $AD = 24$ см, $\angle ADB = \angle CDB$, а периметр дорівнює 60 см. Знайдіть невідомі сторони трапеції.

---

[1] Нехай дано відрізок AB і точку M поза прямою AB таку, що $\angle AMB = \alpha$. У такому випадку говорять, що відрізок AB видно з точки M під кутом α.

252.• Сторони трапеції дорівнюють *a*, *a*, *a* і 2*a*. Знайдіть кути трапеції.

253.• У трапеції *ABCD* діагональ *AC* перпендикулярна до бічної сторони *CD* і є бісектрисою кута *BAD*, $\angle D = 60^\circ$, периметр трапеції дорівнює 40 см. Знайдіть основи трапеції.

254.• Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, а менша основа дорівнює бічній стороні. Знайдіть кути трапеції.

255.• За якої умови висота рівнобічної трапеції дорівнює половині різниці основ?

256.• Побудуйте рівнобічну трапецію за основою, бічною стороною та кутом між ними.

257.• Побудуйте прямокутну трапецію за основами та меншою бічною стороною.

258.• Побудуйте рівнобічну трапецію за основою, бічною стороною та діагоналлю.

259.• Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 6 см, більша основа — 10 см. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо один з її кутів дорівнює 60°.

260.• Діагональ рівнобічної трапеції дорівнює 14 см і утворює з основою кут 60°. Знайдіть середню лінію трапеції.

261.• Середня лінія трапеції *ABCD* розбиває її на дві трапеції, середні лінії яких дорівнюють 15 см і 19 см. Знайдіть основи трапеції *ABCD*.

262.•• Доведіть, що коли діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні, то її висота дорівнює середній лінії трапеції.

263.•• Доведіть, що коли висота рівнобічної трапеції дорівнює її середній лінії, то діагоналі трапеції перпендикулярні.

264.•• Діагональ прямокутної трапеції розбиває її на два трикутники, один з яких є рівностороннім зі стороною *a*. Знайдіть середню лінію трапеції.

265.•• Діагональ рівнобічної трапеції розбиває її на два рівнобедрених трикутники. Знайдіть кути трапеції.

266.•• У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) відомо, що $AC \perp BD$, $\angle CAD = 30°$, $BD = 8$ см. Знайдіть середню лінію трапеції.

267.•• Доведіть, що точка перетину бісектрис кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, належить прямій, яка містить її середню лінію.

268.•• Побудуйте трапецію:
1) за основами та бічними сторонами;
2) за основою, висотою та діагоналями;
3) за різницею основ, бічними сторонами й діагоналлю.

269.•• Побудуйте рівнобічну трапецію за основою, висотою та бічною стороною.

270.•• Побудуйте трапецію:
1) за основами та діагоналями;
2) за бічними сторонами, середньою лінією та висотою;
3) за основою, прилеглим до неї кутом і бічними сторонами;
4) за бічними сторонами, висотою та однією з діагоналей.

271.* Через вершину B паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка не має з паралелограмом інших спільних точок. Вершини A і C віддалені від цієї прямої на відстані a і b відповідно. Знайдіть відстань від точки D до цієї прямої.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

272. У колі проведено діаметри AB і CD. Доведіть, що $AC = BD$ і $AC \parallel BD$.

273. У колі з центром O проведено діаметр AB і хорду AC. Доведіть, що $\angle BOC = 2\angle BAC$.

274. Пряма AB дотикається до кола з центром O в точці C, $AC = BC$. Доведіть, що $OA = OB$.

275. Хорда AB кола з центром O перпендикулярна до радіуса OC і ділить його навпіл. Знайдіть: 1) кут AOB; 2) кут ACB.

276. Скільки спільних точок мають два кола з радіусами 6 см і 8 см, якщо відстань між їхніми центрами дорівнює: 1) 15 см; 2) 14 см; 3) 10 см; 4) 2 см?

Поновіть у пам'яті зміст пунктів 19–22 на с. 107–109 частини 2 підручника.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

277. Многокутник розбито на трикутники, які пофарбовано в чорний та білий кольори так, що будь-які два трикутники, що мають спільну сторону, пофарбовано в різні кольори. Доведіть, що кількість чорних трикутників не більша за потроєну кількість білих трикутників.

9. Центральні та вписані кути

Означення. Центральним кутом кола називають кут з вершиною в центрі кола.

На рисунку 76 кут AOB — центральний. Сторони цього кута перетинають коло в точках A і B. Ці точки ділять коло на дві **дуги**, які виділено на рисунку 76 різним кольором.

Точки A і B називають **кінцями дуги**, вони належать кожній з виділених дуг. Кожну із цих дуг можна позначити так: $\cup AB$ (читають: «дуга AB»).

Але за записом $\cup AB$ не можна розрізнити дуги на рисунку 76. Якщо на якійсь із двох дуг позначити точку (на рисунку 77 це точка M), то зрозуміло, що позначення $\cup AMB$ відноситься до «синьої» дуги. Якщо на одній із двох дуг AB відмічено точку, то домовимося, що позначення $\cup AB$ відноситься до дуги, якій ця точка не належить (на рисунку 77 це «зелена» дуга).

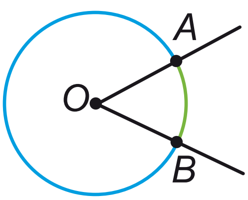


Рис. 76

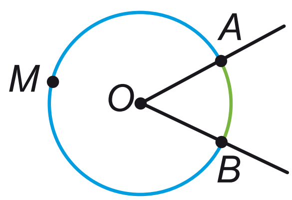


Рис. 77

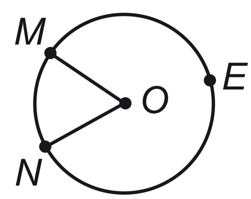


Рис. 78

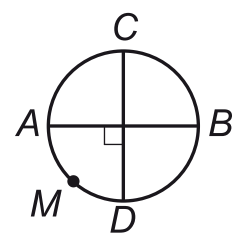


Рис. 79

Дуга AB належить центральному куту AOB (рис. 77). У цьому випадку говорять, що центральний кут AOB **спирається на дугу** AB.

Кожна дуга кола, як і все коло, має **градусну міру**. *Градусну міру всього кола вважають рівною* $360°$. Якщо центральний кут MON спирається на дугу MN (рис. 78), то градусну міру дуги MN вважають рівною градусній мірі кута MON і записують: $\cup MN = \angle MON$ (читають: «градусна міра дуги MN дорівнює градусній мірі кута MON»). Градусну міру дуги MEN (рис. 78) вважають рівною $360° - \angle MON$.

На рисунку 79 зображено коло, у якому проведено два перпендикулярних діаметри AB і CD. Тоді $\cup AMD = 90°$, $\cup ACD = 360° - 90° = 270°$, $\cup ACB = \cup ADB = 180°$. Кожну з дуг ACB і ADB називають **півколом**. На рисунку 79 півколами є також дуги CAD і CBD.

Про хорду, яка сполучає кінці дуги, говорять, що хорда **стягує** дугу. На рисунку 80 хорда AB стягує кожну з дуг AB і AKB.

Будь-яка хорда стягує дві дуги, сума градусних мір яких дорівнює 360°.

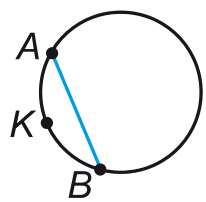


Рис. 80

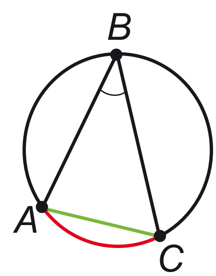


Рис. 81

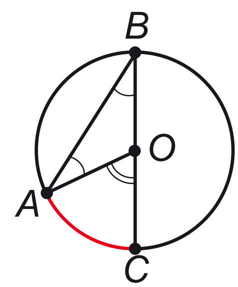


Рис. 82

Означення. Вписаним кутом кола називають кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають коло.

На рисунку 81 кут ABC — вписаний. Дуга AC належить цьому куту, а дуга ABC — не належить. У такому випадку говорять, що вписаний кут ABC **спирається на дугу** AC. Також можна сказати, що вписаний кут ABC **спирається на хорду** AC.

Теорема 9.1. ***Градусна міра вписаного кута дорівнює половині градусної міри дуги, на яку він спирається***.

Доведення. На рисунку 81 кут ABC вписаний. Доведемо, що $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

Розглянемо три випадки розташування центра O кола відносно вписаного кута ABC.

Випадок 1. Центр O належить одній зі сторін кута, наприклад стороні BC (рис. 82).

Проведемо радіус *OA*. Центральний кут *AOC* — зовнішній кут рівнобедреного трикутника *ABO* (сторони *OA* та *OB* рівні як радіуси). Тоді $\angle AOC = \angle A + \angle B$. Проте $\angle A = \angle B$. Звідси $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\cup AC$.

В и п а д о к 2. Центр *O* належить куту, проте не належить жодній із його сторін (рис. 83).

Проведемо діаметр *BK*. Згідно з доведеним

$$\angle ABK = \frac{1}{2}\cup AK,$$

$$\angle KBC = \frac{1}{2}\cup KC.$$

Маємо:

$$\angle ABC = \angle ABK + \angle KBC = \frac{1}{2}\cup AK + \frac{1}{2}\cup KC = \frac{1}{2}\cup AKC.$$

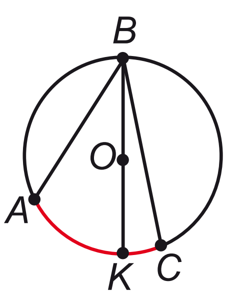


Рис. 83

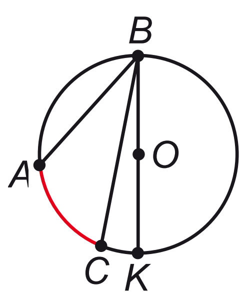


Рис. 84

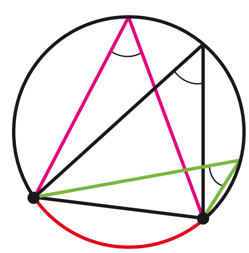


Рис. 85

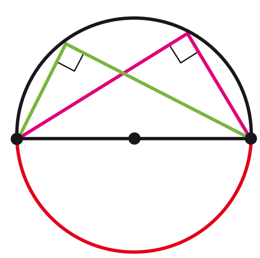


Рис. 86

В и п а д о к 3. Центр *O* не належить куту (рис. 84).

Для третього випадку проведіть доведення самостійно. ▲

Наслідок 1. ***Вписані кути, які спираються на одну й ту саму дугу, рівні*** (рис. 85).

Наслідок 2. ***Вписаний кут, який спирається на діаметр (півколо), — прямий*** (рис. 86).

Доведіть ці властивості самостійно.

Задача 1 (властивість кута між дотичною та хордою). Відрізок AB — хорда кола із центром O (рис. 87). Через точку A проведено дотичну MN. Доведіть, що $\angle MAB = \frac{1}{2} \cup AB$ і $\angle NAB = \frac{1}{2} \cup AKB$.

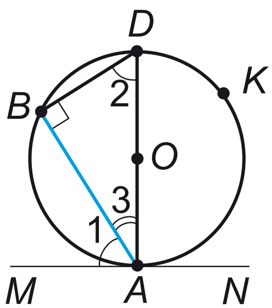


Рис. 87

Розв'язання. Проведемо діаметр AD (рис. 87). Тоді кут B дорівнює $90°$ як вписаний, що спирається на діаметр AD. У прямокутному трикутнику ABD $\angle 2 + \angle 3 = 90°$. Оскільки MN — дотична, то $\angle DAM = 90°$. Тоді $\angle 1 + \angle 3 = 90°$. Отримуємо, що $\angle 1 = \angle 2$.

Отже, $\angle MAB = \angle BDA = \frac{1}{2} \cup AB$.

Маємо:

$$\angle NAB = 180° - \angle MAB = 180° - \frac{1}{2} \cup AB =$$
$$= 180° - \frac{1}{2}(360° - \cup AKB) =$$
$$= 180° - 180° + \frac{1}{2} \cup AKB = \frac{1}{2} \cup AKB.$$

Задача 2. Побудуйте дотичну до даного кола, яка проходить через дану точку, що лежить поза колом.

Розв'язання. На рисунку 88 зображено коло із центром O і точку M, яка лежить поза цим колом.

Нехай X — така точка кола, що пряма MX є дотичною (рис. 88). Тоді кут MXO прямий. Отже, його можна розглядати як вписаний у коло з діаметром MO.

Проведений аналіз показує, як провести побудову.

Побудуємо відрізок MO та розділимо його навпіл (рис. 89). Нехай точка K — його середина. Побудуємо коло радіуса KO із центром K. Позначимо точки перетину побудованого та даного кіл буквами E і F. Тоді кожна з прямих ME і MF є шуканою дотичною.

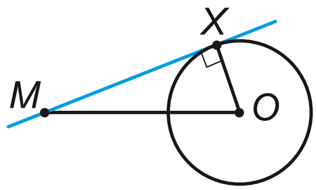


Рис. 88

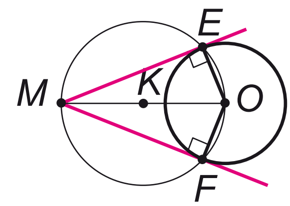


Рис. 89

Справді, кут *MEO* дорівнює 90° як вписаний кут, що спирається на діаметр *MO*. Відрізок *OE* — радіус даного кола. Тоді за ознакою дотичної пряма *ME* — шукана дотична.

1. Який кут називають центральним кутом кола?
2. Як називають частини кола, на які ділять його дві точки?
3. Яким символом позначають дугу кола?
4. У якому випадку говорять, що центральний кут спирається на дугу?
5. Чому вважають рівною градусну міру кола?
6. Як пов'язані градусні міри центрального кута кола та дуги, на яку цей кут спирається?
7. Скільки дуг стягує кожна хорда? Чому дорівнює сума їхніх градусних мір?
8. Який кут називають вписаним кутом кола?
9. У якому випадку говорять, що вписаний кут спирається на дугу?
10. Чому дорівнює градусна міра вписаного кута?
11. Яку властивість мають вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу?
12. Яким є вписаний кут, що спирається на діаметр?

ВПРАВИ

278.° Чому дорівнює градусна міра центрального кута кола, який спирається на дугу, що становить:

1) $\frac{1}{6}$ кола; 2) $\frac{1}{10}$ кола; 3) $\frac{1}{2}$ кола; 4) $\frac{2}{9}$ кола?

279.° Знайдіть градусні міри двох дуг кола, на які його ділять дві точки, якщо градусна міра однієї з дуг на 80° більша за градусну міру другої.

280.° Знайдіть градусні міри двох дуг кола, на які його ділять дві точки, якщо градусні міри цих дуг відносяться як 7 : 11.

281.° Знайдіть градусну міру дуги, яку описує кінець годинної стрілки: 1) за 2 год; 2) за 5 год; 3) за 8 год; 4) за 30 хв; 5) за 12 год.

282.° Які з кутів, зображених на рисунку 90, є вписаними? На яку дугу спирається кожний із вписаних кутів?

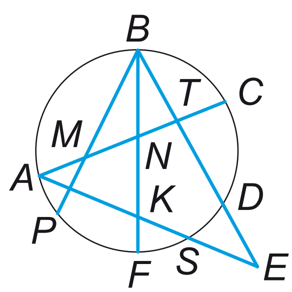


Рис. 90

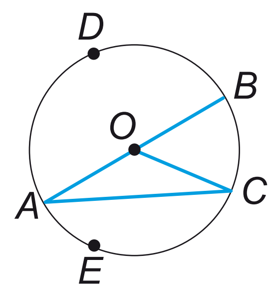


Рис. 91

283.° На рисунку 91 зображено коло із центром O. Знайдіть:

1) кут BDC, якщо $\angle BAC = 40°$;

2) кут BEC, якщо $\angle BOC = 70°$;

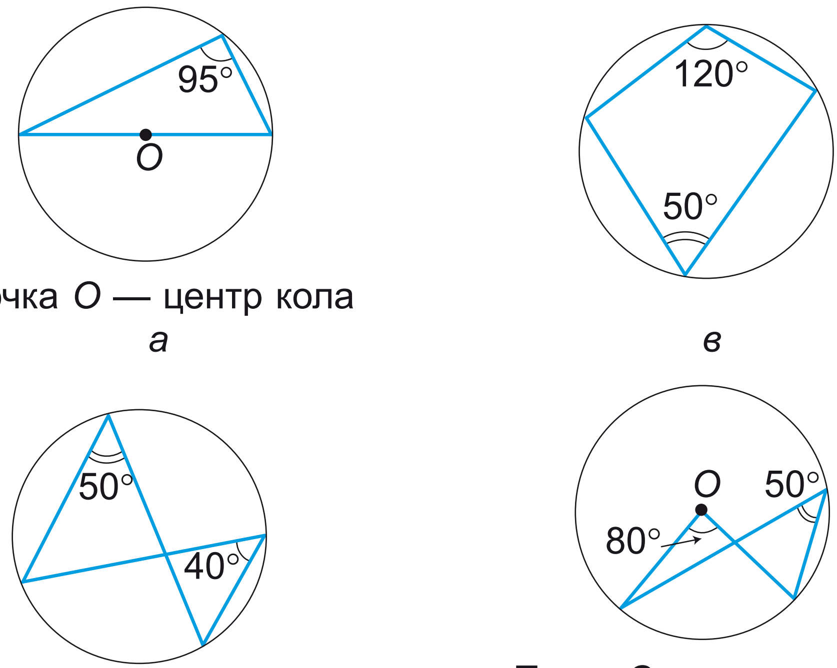
3) дугу CE, якщо $\angle CDE = 80°$;

4) дугу DBA, якщо $\cup DBA = 300°$.

284.° Знайдіть помилки на рисунку 92.

285.° Знайдіть вписаний кут, якщо градусна міра дуги, на яку він спирається, дорівнює: 1) 84°; 2) 110°; 3) 230°; 4) 340°.

286.° На рисунку 93 $\cup AB = 74°$, $\angle ABC = 68°$. Знайдіть дугу BC.



Точка *O* — центр кола
а

в

б

Точка *O* — центр кола
г

Рис. 92

287.° На рисунку 93 $\smile AB = 64°$, $\smile BC = 92°$. Знайдіть кут *ABC*.

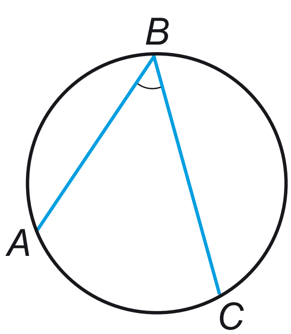


Рис. 93

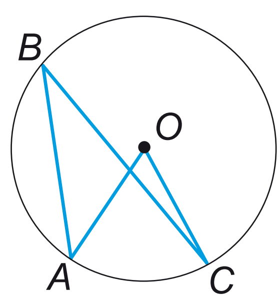


Рис. 94

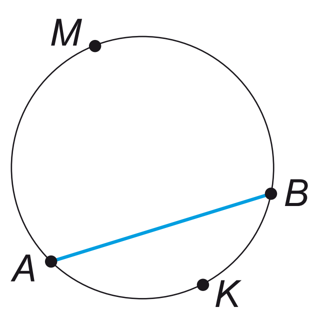


Рис. 95

288.° Центральний кут *AOC* на 25° більший за вписаний кут *ABC*, що спирається на дугу *AC* (рис. 94). Знайдіть кути *AOC* і *ABC*.

289.° Кінці хорди *AB* ділять коло на дві дуги, градусні міри яких відносяться як 3 : 7. Під якими кутами видно цю хорду з точок *M* і *K* (рис. 95)?

290.° На рисунку 96 хорди AB і CD рівні. Доведіть, що $\cup AMB = \cup CND$.

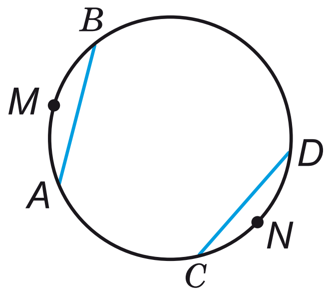


Рис. 96

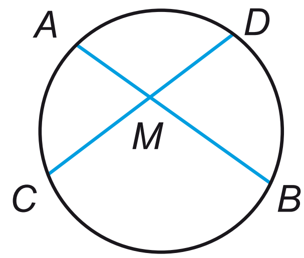


Рис. 97

291.° Доведіть, що коли дві дуги кола рівні, то рівні й хорди, які їх стягують.

292.° Точки A, B і C ділять коло на три дуги так, що $\cup AB : \cup BC : \cup AC = 1 : 2 : 3$. Знайдіть кути трикутника ABC.

293.° Вершини рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) ділять описане навколо нього коло на три дуги, причому $\cup AB = 70°$. Знайдіть кути трикутника ABC.

294.° Кінці діаметрів AC і BD кола послідовно сполучили так, що утворився чотирикутник $ABCD$.
1) Визначте вид чотирикутника $ABCD$.
2) Знайдіть дуги AB, BC, CD і AD, якщо $\angle ABD = 80°$.

295.° Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює 32°. Знайдіть градусні міри дуг, на які вершини трикутника ділять коло, описане навколо нього, та радіус цього кола, якщо гіпотенуза даного трикутника дорівнює 12 см.

296.• Доведіть, що коли вписаний кут є прямим, то він спирається на діаметр.

297.• Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M (рис. 97). Доведіть, що $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$.

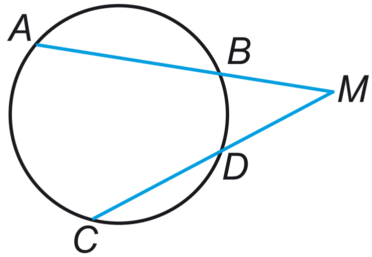


Рис. 98

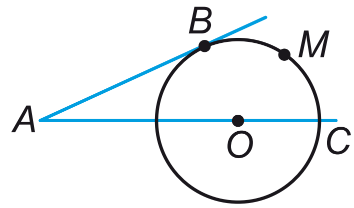


Рис. 99

298.• Хорди AB і CD кола не перетинаються, а прямі AB і CD перетинаються в точці M (рис. 98). Доведіть, що $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup BD)$.

299.• Через точку A, яка лежить поза колом із центром O, проведено дві прямі, одна з яких дотикається до кола в точці B, а друга проходить через його центр (рис. 99). Відомо, що $\cup BMC = 100^\circ$. Знайдіть кут BAC.

300.• Бісектриса кута B трикутника ABC перетинає коло, описане навколо цього трикутника, у точці D. Знайдіть кути трикутника ADC, якщо $\angle ABC = 80^\circ$.

301.• На дузі AC кола, описаного навколо рівностороннього трикутника ABC, позначено точку M так, що $\cup AM = 2 \cup CM$. Знайдіть кути трикутника AMC.

302.• Коло, побудоване на стороні AB трикутника ABC як на діаметрі, перетинає сторони AC і BC у точках M і K відповідно. Доведіть, що відрізки AK і BM — висоти трикутника ABC.

303.• Коло, побудоване на стороні AC трикутника ABC як на діаметрі, перетинає сторону AB у точці K так, що $\angle ACK = \angle BCK$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

304.• Доведіть, що градусні міри дуг кола, які містяться між двома паралельними хордами, рівні.

305.• Вершини квадрата $ABCD$ лежать на колі. На дузі AB позначено довільну точку M. Доведіть, що $\angle AMD = \angle CMD = \angle CMB$.

306.• Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 56°. На бічній стороні трикутника як на діаметрі побудовано півколо, яке інші сторони трикутника ділять на три дуги. Знайдіть градусні міри утворених дуг.

307.•• Як, користуючись лише косинцем, знайти центр даного кола?

308.•• Дано коло, у якому проведено діаметр AB, і позначено точку C поза колом (рис. 100). Як, користуючись лише лінійкою, провести через точку C пряму, що перпендикулярна до прямої AB?

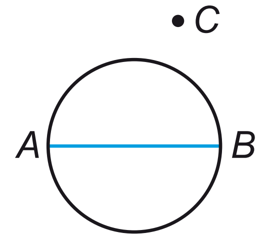


Рис. 100

309.•• Два кола мають єдину спільну точку M. Через точку M проведено дві прямі, які перетинають дані кола. Точки їхнього перетину з колами, відмінні від точки M, сполучено хордами. Доведіть, що ці хорди паралельні.

310.•• До кола, описаного навколо трикутника ABC, проведено в точці B дотичну, яка перетинає пряму AC у точці D. Відрізок BM — бісектриса трикутника ABC. Доведіть, що $BD = MD$.

311.* Дано відрізок AB і кут α. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $\angle AXB = \alpha$.

312.* Побудуйте трикутник за стороною, протилежним їй кутом і висотою, проведеною до даної сторони.

313.* Побудуйте трикутник за стороною, протилежним їй кутом і медіаною, проведеною до даної сторони.

314.* Побудуйте паралелограм за двома сторонами та кутом між діагоналями.

315.* Побудуйте паралелограм за кутом і двома діагоналями.

316.* У прямокутному трикутнику ABC на катеті AC як на діаметрі побудовано коло, що перетинає гіпотенузу AB у точці E. Через точку E проведено дотичну до кола, яка перетинає катет CB у точці D. Доведіть, що трикутник BDE рівнобедрений.

317.* Дано відрізок AB. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що трикутник AXB прямокутний.

318.* Бісектриса кута A трикутника ABC перетинає описане навколо нього коло в точці D. Точка O — центр вписаного кола трикутника ABC. Доведіть, що $DO = DB = DC$.

319.* Бісектриси кутів A, B і C трикутника ABC перетинають описане навколо нього коло в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Доведіть, що $A_1B_1 \perp CC_1$.

320.* На рисунку 101 зображено два кола із центрами O_1 і O_2. Побудуйте пряму l, яка дотикається до цих кіл так, що точки дотику лежать в одній півплощині відносно прямої O_1O_2 (таку пряму називають **зовнішньою спільною дотичною** до двох даних кіл).

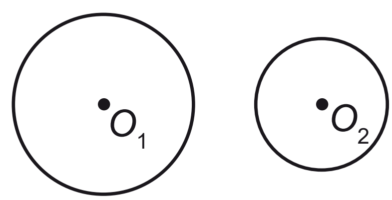


Рис. 101

321.* Побудуйте трикутник:

1) за стороною, протилежним їй кутом і радіусом вписаного кола;
2) за стороною, протилежним їй кутом і медіаною, проведеною до другої сторони.

ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

322. Периметр трикутника *ABC* дорівнює 30 см. Точка дотику вписаного кола до сторони *AB* ділить її у відношенні 3 : 2, рахуючи від вершини *A*, а точка дотику до сторони *BC* віддалена від вершини *C* на 5 см. Знайдіть сторони трикутника.

323. До кола, вписаного в трикутник *ABC*, проведено три дотичні (рис. 102). Периметри трикутників, які ці дотичні відтинають від даного трикутника, дорівнюють P_1, P_2 і P_3. Знайдіть периметр трикутника *ABC*.

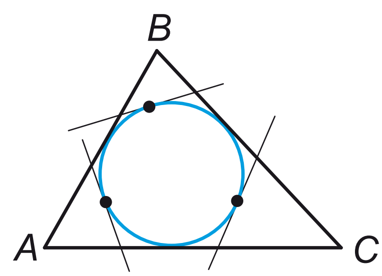


Рис. 102

324. Установіть вид трикутника, у якого центр описаного кола належить медіані.

Поновіть у пам’яті зміст пункту 22 на с. 109–110 частини 2 підручника.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

325. Клітинки квадрата розміром 100×100 клітинок розфарбовано в шаховому порядку. Квадрат розрізали на квадрати, сторони яких містять непарну кількість клітинок, і в кожному такому квадраті позначили центральну клітинку. Доведіть, що білих і чорних клітинок позначено порівну.

ПЕРША ЗАДАЧА ПЕРШОЇ ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

Сподіваємося, що задача 316 вам сподобалася і ви відчули радість успіху, розв'язавши її. Ця задача варта уваги ще й тому, що в 1961 р. саме її умовою починався текст першої Всеукраїнської олімпіади юних математиків.

Узагалі, математичні олімпіади в Україні мають давню традицію. Перша міська олімпіада юних математиків відбулася в 1935 р. в Києві. З того часу минуло понад 80 років, і за ці роки математичні олімпіади стали для багатьох талановитих школярів і школярок першим кроком на шляху до наукової творчості. Сьогодні такі імена, як О. В. Погорєлов, С. Г. Крейн, М. О. Красносельський, В. Г. Дрінфельд, відомі в усьому науковому світі. Усі вони в різні роки були переможцями математичних олімпіад в Україні.

Хочемо із задоволенням зазначити, що й зараз математичні олімпіади в Україні дуже популярні. Десятки тисяч школярів і школярок нашої країни на різних етапах беруть участь у цьому математичному змаганні. До організації та проведення олімпіад залучають наукову та освітянську спільноту. Саме завдяки ентузіазму та професіоналізму цієї спільноти команда України гідно представляє нашу країну на міжнародних математичних олімпіадах.

Радимо й вам, любі восьмикласники та восьмикласниці, брати участь у математичних олімпіадах. Нижче ми наводимо текст першої Всеукраїнської олімпіади юних математиків. Випробуйте свої сили.

1. У прямокутному трикутнику ABC на катеті AC як на діаметрі побудовано коло, що перетинає гіпотенузу AB

у точці E. Через точку E проведено дотичну до кола, яка перетинає катет CB у точці D. Доведіть, що трикутник BDE рівнобедрений.

2. У площині розміщено n зубчастих коліс так, що перше зчеплене з другим, друге — із третім і т. д., а останнє — з першим. У яких випадках можуть рухатися колеса такої системи?
3. Обчисліть кути рівнобедреного трикутника, у якому центри вписаного й описаного кіл симетричні відносно прямої, що містить основу трикутника.
4. Доведіть, що при кожному цілому n вираз $\frac{n^5}{120}-\frac{n^3}{24}+\frac{n}{30}$ також набуває цілих значень.
5. Побудуйте трикутник за двома даними точками, що є основами висот, опущених на дві сторони цього трикутника, та прямою, на якій розміщено його третю сторону.

10. Описане та вписане кола чотирикутника

Означення. Коло називають описаним навколо чотирикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

На рисунку 103 зображено коло, описане навколо чотирикутника $ABCD$. У цьому разі також говорять, що чотирикутник **вписаний** у коло.

Теорема 10.1. ***Якщо чотирикутник є вписаним у коло, то сума його протилежних кутів дорівнює*** **$180°$.**

Доведення. ⊙ Нехай чотирикутник $ABCD$ вписано в коло (рис. 103). Доведемо, що $\angle A+\angle C=180°$ і $\angle B+$ $+\angle D=180°$.

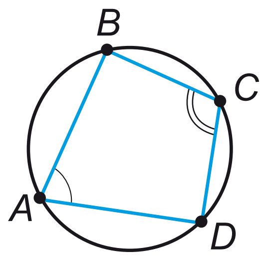


Рис. 103

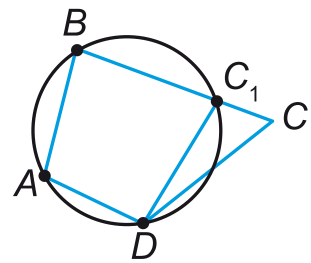


Рис. 104

Оскільки кути A і C є вписаними, то $\angle A = \frac{1}{2} \cup BCD$ і $\angle C = \frac{1}{2} \cup DAB$.

Маємо: $\cup BCD + \cup DAB = 360°$. Тоді $\angle A + \angle C = 180°$.

Аналогічно можна показати, що $\angle B + \angle D = 180°$. ▲

Ви знаєте, що навколо будь-якого трикутника можна описати коло. Проте не будь-який чотирикутник має таку властивість. Наприклад, неможливо описати коло навколо паралелограма, відмінного від прямокутника. Розпізнавати чотирикутники, навколо яких можна описати коло, дає змогу така теорема.

Теорема 10.2 (обернена до теореми 10.1). ***Якщо в чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює* 180°, *то навколо нього можна описати коло*.**

Доведення. Розглянемо чотирикутник $ABCD$, у якому $\angle A + \angle C = 180°$. Доведемо, що навколо нього можна описати коло.

Припустимо, що навколо цього чотирикутника не можна описати коло. Опишемо коло навколо трикутника ABD. За припущенням точка C не належить цьому колу. Тому можливі два випадки.

Випадок 1. Точка C лежить поза описаним колом трикутника ABD (рис. 104).

Нехай сторона BC перетинає коло в точці C_1. Чотирикутник ABC_1D вписано в коло. Тоді за теоремою 10.1 отримуємо, що $\angle A + \angle BC_1D = 180°$. Але за умовою $\angle A + \angle C = 180°$. Звідси $\angle BC_1D = \angle C$. Проте ця рівність виконуватися не може, оскільки за властивістю зовнішнього кута трикутника $\angle BC_1D = \angle C + \angle CDC_1$.

Отже, точка C не може лежати поза колом, описаним навколо трикутника ABD.

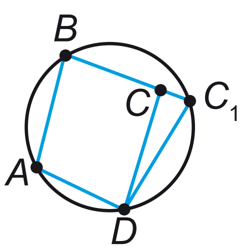


Рис. 105

В и п а д о к 2. Точка C лежить усередині описаного кола трикутника ABD (рис. 105). Міркуючи аналогічно, можна показати, що точка C не може лежати всередині розглядуваного кола. Переконайтеся в цьому самостійно.

Таким чином, припустивши, що точка C не належить колу, описаному навколо трикутника ABD, ми отримали суперечність. ▲

Теорему 10.2 можна розглядати як ознаку належності чотирьох точок одному колу.

Якщо чотирикутник вписано в коло, то існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин (центр описаного кола). Щоб знайти цю точку, достатньо знайти точку перетину серединних перпендикулярів двох сусідніх сторін чотирикутника.

Означення. Коло називають вписаним у чотирикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

На рисунку 106 зображено коло, вписане в чотирикутник $ABCD$. У цьому разі також говорять, що чотирикутник **описаний** навколо кола.

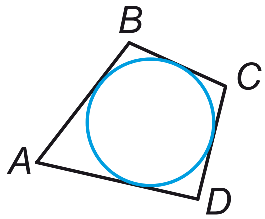


Рис. 106

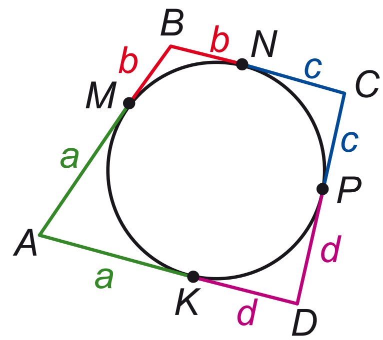


Рис. 107

Теорема 10.3. ***Якщо чотирикутник є описаним навколо кола, то суми його протилежних сторін рівні.***

Доведення. Нехай чотирикутник $ABCD$ описано навколо кола (рис. 107). Доведемо, що $AB + CD = BC + AD$.

Точки M, N, P, K — точки дотику кола до сторін чотирикутника.

Оскільки відрізки дотичних, проведених до кола через одну точку, рівні, то $AK = AM$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DK$. Нехай $AK = a$, $BM = b$, $CN = c$, $DP = d$.

Тоді $AB + CD = a + b + c + d$, $BC + AD = b + c + a + d$.

Отже, $AB + CD = BC + AD$. ▲

Ви знаєте, що в будь-який трикутник можна вписати коло. Проте не будь-який чотирикутник має цю властивість. Наприклад, неможливо вписати коло в прямокутник, відмінний від квадрата. Розпізнавати чотирикутники, у які можна вписати коло, дає змогу така теорема.

Теорема 10.4. ***Якщо в опуклому чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло.***

Доведення. Розглянемо опуклий чотирикутник $ABCD$, у якому $AB + CD = BC + AD$. Доведемо, що в нього можна вписати коло.

Нехай бісектриси кутів A і B перетинаються в точці O (рис. 108). Тоді точка O рівновіддалена від сторін AB, BC і AD. Отже, існує коло із центром у точці O, яке дотикається до трьох цих сторін.

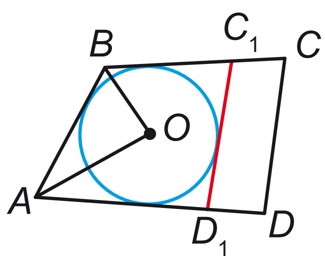


Рис. 108

Припустимо, що це коло не дотикається до сторони CD. Тоді можливі два випадки.

Випадок 1. Сторона CD не має спільних точок з побудованим колом.

Проведемо дотичну C_1D_1 паралельно стороні CD (рис. 108). Чотирикутник ABC_1D_1 описано навколо кола. Тоді за теоремою 10.3 отримуємо, що

$$AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1. \quad (1)$$

Проте за умовою

$$AB + CD = BC + AD. \quad (2)$$

Віднімемо від рівності (2) рівність (1):

$$CD - C_1D_1 = BC - BC_1 + AD - AD_1.$$

Звідси маємо:

$$CD - C_1D_1 = C_1C + D_1D; \; CD = C_1C + D_1D + C_1D_1.$$

Ця рівність суперечить твердженню, доведеному в ключовій задачі п. 1.

Отже, сторона CD повинна мати спільні точки з розглядуваним колом.

Випадок 2. Сторона CD має дві спільні точки з побудованим колом.

Міркуючи аналогічно, можна показати, що сторона CD не може мати дві спільні точки з побудованим колом. Переконайтеся в цьому самостійно.

Таким чином, припустивши, що побудоване коло не дотикається до сторони CD, ми отримали суперечність. ▲

Якщо чотирикутник описано навколо кола, то існує точка, рівновіддалена від усіх його сторін (центр вписаного кола). Щоб знайти цю точку, достатньо знайти точку перетину бісектрис двох сусідніх кутів цього чотирикутника.

Задача (ознака належності чотирьох точок одному колу). Точки A, M, N, B такі, що $\angle AMB = \angle ANB$, причому точки M і N лежать в одній півплощині відносно прямої AB. Доведіть, що точки A, M, N, B лежать на одному колі.

Розв'язання. Нехай $\angle AMB = \angle ANB = \alpha$. Навколо трикутника AMB опишемо коло (рис. 109). Нехай C — довільна точка кола, яка не належить дузі AMB. Тоді чотирикутник $ACBM$ вписано в коло. Звідси $\angle C = 180° - \alpha$. Маємо: $\angle C + \angle N = 180°$. Отже, за теоремою 10.2 навколо чотирикутника $ACBN$ можна описати коло. Оскільки навколо трикутника ABC можна описати тільки одне коло, то цьому колу належать як точка M, так і точка N. ●

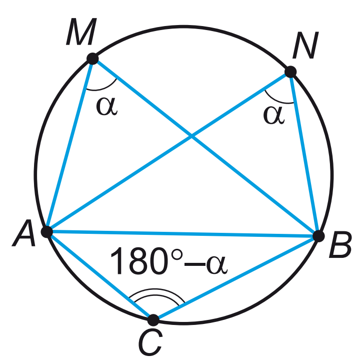


Рис. 109

1. Яке коло називають описаним навколо чотирикутника?
2. У якому випадку говорять, що чотирикутник вписаний у коло?
3. Яку властивість мають кути чотирикутника, вписаного в коло?
4. За якої умови навколо чотирикутника можна описати коло?
5. Яке коло називають вписаним у чотирикутник?
6. У якому випадку говорять, що чотирикутник описаний навколо кола?
7. Яку властивість мають сторони чотирикутника, описаного навколо кола?
8. За якої умови в чотирикутник можна вписати коло?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

326.° Накресліть прямокутник зі сторонами 2 см і 3 см. Опишіть навколо нього коло.

327.° Накресліть довільну рівнобічну трапецію. Опишіть навколо неї коло.

328.° Накресліть рівнобічну трапецію з більшою основою 6 см, бічною стороною 4 см і кутом 60°. Впишіть у неї коло.

329.° Накресліть довільний квадрат. Впишіть у нього коло й опишіть навколо нього коло.

ВПРАВИ

330.° Чи можна описати коло навколо чотирикутника *ABCD*, якщо його кути *A*, *B*, *C* і *D* відповідно дорівнюють:
1) 90°, 90°, 80°, 100°;
2) 90°, 80°, 90°, 100°;
3) 50°, 70°, 130°, 110°?

331.° Чи можна описати коло навколо чотирикутника *ABCD*, якщо його кути *A*, *B*, *C* і *D* відповідно пропорційні числам:
1) 3, 8, 11, 6; 2) 4, 5, 4, 2?

332.° Доведіть, що можна описати коло навколо:
1) будь-якого прямокутника;
2) будь-якої рівнобічної трапеції.

333.° Яка точка є центром кола, описаного навколо прямокутника?

334.° Чи можна описати коло навколо ромба, який не є квадратом?

335.° У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $AB = 12$ см, $\angle CAD = 30°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даного прямокутника.

336.° Чи можна вписати коло в чотирикутник $ABCD$, якщо його сторони AB, BC, CD, AD відповідно пропорційні числам:

1) 7, 8, 12, 11; 2) 7, 12, 8, 11?

337.° Сума двох протилежних сторін чотирикутника, описаного навколо кола, дорівнює 18 см. Знайдіть периметр даного чотирикутника.

338.° Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 7 см. Чому дорівнює периметр даної трапеції, якщо в неї можна вписати коло?

339.° У чотирикутнику $CDEF$, у який можна вписати коло, $CD = 6$ см, $DE = 8$ см, $EF = 12$ см. Знайдіть сторону CF.

340.° Доведіть, що в будь-який ромб можна вписати коло. Яка точка є центром кола, вписаного в ромб?

341.° Чи можна вписати коло в паралелограм, який не є ромбом?

342.° Під яким кутом видно бічну сторону трапеції із центра вписаного кола?

343.° Один із кутів ромба дорівнює 60°, а більша діагональ — 24 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в даний ромб.

344.• Доведіть, що коли в прямокутник можна вписати коло, то цей прямокутник є квадратом.

345.• Доведіть, що коли навколо ромба можна описати коло, то цей ромб є квадратом.

346.• Сторона AD чотирикутника $ABCD$ є діаметром кола, описаного навколо нього, $\angle ABC = 108°$, $\angle BCD = 132°$. Знайдіть кути BAD, ADC, CAD, BDA.

347.• Знайдіть кути чотирикутника $MNKP$, вписаного в коло, якщо $\angle MKP = 58°$, $\angle MPN = 34°$, $\angle KMP = 16°$.

348.• Рівнобічну трапецію вписано в коло, центр якого належить одній з основ. Кут між діагоналями трапеції, протилежний її бічній стороні, дорівнює $56°$. Знайдіть кути трапеції.

349.• Висоти BM і CK гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. Доведіть, що точки A, K, H і M лежать на одному колі.

350.• У прямокутну трапецію вписано коло. Точка дотику ділить більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 50 см. Знайдіть периметр даної трапеції, якщо радіус вписаного кола дорівнює 20 см.

351.• У прямокутну трапецію вписано коло. Точка дотику ділить більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 3 см і 12 см. Знайдіть радіус вписаного кола, якщо периметр трапеції дорівнює 54 см.

352.•• Центр кола, описаного навколо трапеції, належить більшій основі, а бічна сторона дорівнює меншій основі. Знайдіть кути трапеції.

353.•• Діагональ трапеції, вписаної в коло, дорівнює d. Бічну сторону видно із центра описаного кола під кутом $120°$. Знайдіть середню лінію трапеції.

354.•• Бічні сторони та менша основа рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см, а один з її кутів дорівнює $60°$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даної трапеції.

355.•• З довільної точки M катета AC прямокутного трикутника ABC опущено перпендикуляр MK на гіпотенузу AB. Доведіть, що $\angle MKC = \angle MBC$.

356.•• З довільної точки O, яка належить гострому куту A, але не належить його сторонам, опущено перпендикуляри OB і OC на його сторони. Доведіть, що $\angle OAB = \angle OCB$.

357.* Бісектриси BK і CM трикутника ABC перетинаються в точці O, $\angle A = 60°$. Знайдіть кут CMK.

358.* Бісектриси MA і KB трикутника MNK перетинаються в точці O, точки A, N, B і O лежать на одному колі. Знайдіть кут N.

359.* Поза прямокутним трикутником ABC на його гіпотенузі AB побудовано квадрат $ABFD$. Доведіть, що $\angle ACO = \angle OCB$, де O — точка перетину діагоналей квадрата.

360.* Вершини A і B трикутника ABC із прямим кутом C ковзають по сторонах прямого кута з вершиною P (рис. 110). Доведіть, що точка C при цьому переміщується по відрізку.

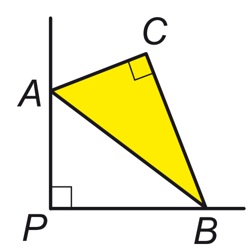


Рис. 110

361.* З довільної точки M, яка належить куту з вершиною A, але не належить його сторонам, проведено перпендикуляри MP і MQ до сторін кута. Із точки A проведено перпендикуляр AK до відрізка PQ. Доведіть, що $\angle PAK = \angle MAQ$.

362.* У гострокутному трикутнику ABC відрізки CC_1 і AA_1 — висоти. Доведіть, що серединний перпендикуляр відрізка C_1A_1 проходить через середину сторони AC.

363.* На бічних сторонах трапеції, у яку можна вписати коло, як на діаметрах побудовано два кола. Доведіть, що ці кола мають одну спільну точку.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

364. Через середину діагоналі AC паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає сторони BC і AD. Ця пряма перетинає прямі AB і CD у точках M і K відповідно. Визначте вид чотирикутника $AMCK$.

365. У трикутнику ABC відрізок AD — бісектриса. Через точку D проведено пряму, яка паралельна стороні AC і перетинає сторону AB у точці E. Через точку E проведено пряму, яка паралельна стороні BC і перетинає сторону AC у точці F. Доведіть, що $AE = CF$.

366. Висота BM ромба $ABCD$, опущена з вершини тупого кута на сторону AD, перетинає діагональ AC у точці K, $\angle BKC = 64°$. Знайдіть кут ABC.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

367. Чи можна квадрат розрізати на тисячокутник і 199 п'ятикутників?

ЗАВДАННЯ № 1 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. Яким із наведених способів можна позначити чотирикутник, зображений на рисунку 111?

А) *MPQN*;

Б) *QMNP*;

В) *NPMQ*;

Г) *QNPM*.

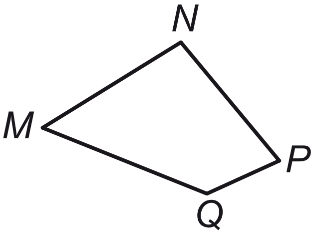


Рис. 111

2. Які кути може мати чотирикутник?

А) Чотири тупих кути;

Б) чотири гострих кути;

В) два тупих і два прямих кути;

Г) два прямих кути, один гострий кут і один тупий кут.

3. У чотирикутнику кожна сторона дорівнює одній і тій самій його діагоналі. Чому дорівнюють кути чотирикутника?

А) 60°, 60°, 120°, 120°;

Б) 60°, 120°, 90°, 90°;

В) 90°, 90°, 90°, 90°;

Г) 150°, 30°, 150°, 30°.

4. Бісектриса кута паралелограма ділить його сторону навпіл. Чому дорівнюють сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 30 см?

А) 5 см, 10 см;

Б) 6 см, 4 см;

В) 7 см, 8 см;

Г) 3 см, 12 см.

5. Чотирикутник є паралелограмом, якщо:

А) у нього є дві пари рівних сторін;

Б) у нього є дві пари рівних кутів;

В) кожна діагональ ділить його на два рівних трикутники;

Г) у нього три сторони рівні.

6. Яке з даних тверджень неправильне?

А) Чотирикутник, який одночасно є і ромбом, і прямокутником, — квадрат;

Б) паралелограм, у якого діагоналі рівні й перпендикулярні, — квадрат;

В) паралелограм, у якого всі кути прямі й діагоналі рівні, — квадрат;

Г) ромб, у якого діагоналі рівні, — квадрат.

7. У трикутнику *ABC* точки *M* і *N* належать відповідно сторонам *AB* і *BC*. Відрізок *MN* є середньою лінією, якщо:

А) $MN \parallel AC$;

Б) $MN = \frac{1}{2}AC$;

В) $MN = \frac{1}{2}AC,\ \angle BNM = \angle BAC$;

Г) $MN = \frac{1}{2}AC,\ \angle BNM = \angle BCA$.

8. Яку з даних властивостей не може мати трапеція?

А) Протилежні кути рівні;

Б) діагоналі рівні та перпендикулярні;

В) один із кутів при більшій основі більший за один із кутів при меншій основі;

Г) середня лінія трапеції дорівнює її висоті.

9. Вписані кути одного кола рівні, якщо вони:

А) спираються на одну хорду;

Б) мають спільну вершину;

В) спираються на одну дугу;

Г) мають спільну сторону.

10. Навколо чотирикутника *CDEF* описано коло, $\angle CDF = 80°$, $\angle DEC = 30°$. Чому дорівнює кут *DCF*?

А) 50°; Б) 110°; В) 70°; Г) 90°.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 1

Сума кутів чотирикутника

Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.

Паралелограм

Паралелограмом називають чотирикутник, у якого кожні дві протилежні сторони паралельні.

Властивості паралелограма

- Протилежні сторони паралелограма рівні.
- Протилежні кути паралелограма рівні.
- Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

Висота паралелограма

Висотою паралелограма називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить сторону паралелограма, на пряму, що містить протилежну сторону.

Ознаки паралелограма

- Якщо в чотирикутнику кожні дві протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.
- Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні та паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм.
- Якщо в чотирикутнику діагоналі точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.

Прямокутник

Прямокутником називають паралелограм, у якого всі кути прямі.

Особлива властивість прямокутника

Діагоналі прямокутника рівні.

Ознаки прямокутника

- Якщо один із кутів паралелограма прямий, то цей паралелограм — прямокутник.
- Якщо діагоналі паралелограма рівні, то цей паралелограм — прямокутник.

Ромб

Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні.

Особлива властивість ромба

Діагоналі ромба перпендикулярні та є бісектрисами його кутів.

Ознаки ромба

- Якщо діагоналі паралелограма перпендикулярні, то цей паралелограм — ромб.
- Якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його кута, то цей паралелограм — ромб.

Квадрат

Квадратом називають прямокутник, у якого всі сторони рівні.

Середня лінія трикутника

Середньою лінією трикутника називають відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

Властивість середньої лінії трикутника

Середня лінія трикутника, яка сполучає середини двох його сторін, паралельна третій стороні та дорівнює її половині.

Трапеція

Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні.

Висота трапеції

Висотою трапеції називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить одну з основ, на пряму, що містить другу основу.

Середня лінія трапеції

Середньою лінією трапеції називають відрізок, який сполучає середини її бічних сторін.

Властивість середньої лінії трапеції

Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює половині їхньої суми.

Центральний кут кола

Центральним кутом кола називають кут з вершиною в центрі кола.

Вписаний кут кола

Вписаним кутом кола називають кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають коло.

Градусна міра вписаного кута кола

Градусна міра вписаного кута дорівнює половині градусної міри дуги, на яку він спирається.

Властивості вписаних кутів

- Вписані кути, які спираються на одну й ту саму дугу, рівні.
- Вписаний кут, який спирається на діаметр (півколо), — прямий.

Коло, описане навколо чотирикутника

Коло називають описаним навколо чотирикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

Властивість чотирикутника, вписаного в коло

Якщо чотирикутник є вписаним у коло, то сума його протилежних кутів дорівнює 180°.

Ознака чотирикутника, навколо якого можна описати коло

Якщо в чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює 180°, то навколо нього можна описати коло.

Коло, вписане в чотирикутник

Коло називають вписаним у чотирикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

Властивість кола, описаного навколо чотирикутника

Якщо чотирикутник є описаним навколо кола, то суми його протилежних сторін рівні.

Ознака чотирикутника, у який можна вписати коло

Якщо в опуклому чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло.

ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ §2

Опанувавши матеріал цього параграфа, ви дізнаєтеся про властивості відрізків, які паралельні прямі відтинають на сторонах кута.

Ви навчитеся серед трикутників знаходити такі, що мають однакову форму, але різні розміри.

Ознайомитеся з властивістю хорд, які перетинаються, і властивістю дотичної і січної, проведених до кола через одну точку.

Дізнаєтеся, які трикутники називають подібними, і навчитеся застосовувати їхні властивості.

11. Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки

Теорема 11.1 (теорема Фалеса). ***Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки й на другій його стороні.***

Доведення. Нехай маємо кут AOB (рис. 112). Відомо, що $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = ...$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_3B_3 \parallel A_4B_4$, ... Доведемо, що $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = ...$

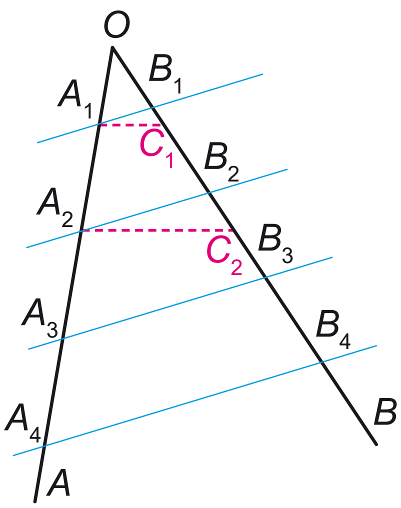
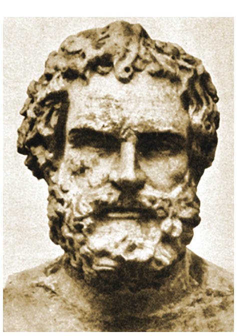


Рис. 112

Припустимо, що $OB_1 \neq B_1B_2$. Нехай серединою відрізка OB_2 є деяка точка C_1. Тоді відрізок A_1C_1 — середня лінія трикутника A_2OB_2.

Звідси $A_1C_1 \parallel A_2B_2$. Отже, через точку A_1 проходять дві прямі, паралельні прямій A_2B_2, що суперечить аксіомі паралельності прямих. Ми отримали суперечність. Таким чином, $OB_1 = B_1B_2$.



Фале́с Мілетський

(бл. 625 — бл. 547 до н. е.)

Давньогрецький філософ, учений, купець і державний діяч. Походив з Мілета — порту в Малій Азії на узбережжі Егейського моря.

Припустимо, що $B_1B_2 \neq B_2B_3$. Нехай серединою відрізка B_1B_3 є деяка точка C_2. Тоді відрізок A_2C_2 — середня лінія трапеції $A_3A_1B_1B_3$. Звідси $A_2C_2 \parallel A_3B_3$. Таким чином, через точку A_2 проходять дві прямі, паралельні прямій A_3B_3. Ми отримали суперечність. Отже, $B_1B_2 = B_2B_3$.

Аналогічно доводимо, що $B_2B_3 = B_3B_4$ і т. д. ▲

Означення. Відношенням двох відрізків називають відношення їхніх довжин, виражених в одних і тих самих одиницях виміру.

Якщо, наприклад, $AB = 8$ см, $CD = 6$ см, то відношення відрізка AB до відрізка CD дорівнює $\frac{8}{6}$. Записують: $\frac{AB}{CD} = \frac{8}{6}$, тобто $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$.

Якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$, то говорять, що відрізки AB і CD **пропорційні** відповідно відрізкам A_1B_1 і C_1D_1.

Аналогічно можна говорити про пропорційність більшої кількості відрізків. Наприклад, якщо $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{MN}{M_1N_1}$, то говорять, що відрізки AB, CD, MN пропорційні відповідно відрізкам A_1B_1, C_1D_1, M_1N_1.

Теорема 11.2 (теорема про пропорційні відрізки). ***Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута, то відрізки, що утворилися на одній стороні кута, пропорційні відповідним відрізкам, що утворилися на другій стороні кута.***

Доведення цієї теореми виходить за рамки шкільного курсу геометрії. Ми наведемо доведення для окремого випадку.

Нехай сторони кута MON перетнуто паралельними прямими AA_1 і BB_1 (рис. 113). Доведемо, що:

1) $\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$; 2) $\frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1}$; 3) $\frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

Доведемо першу з наведених рівностей (інші дві доводять аналогічно).

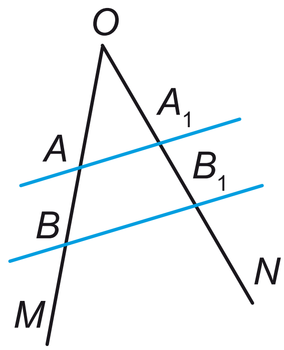


Рис. 113

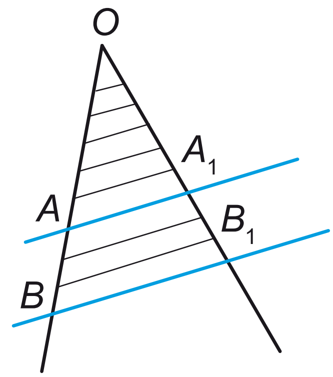


Рис. 114

Нехай для відрізків OA і AB існує такий відрізок завдовжки l, який укладається ціле число разів у кожному з них. Маємо: $OA = ml$, $AB = nl$, де m і n — деякі натуральні числа.

Тоді відрізки OA і AB можна поділити відповідно на m і n рівних відрізків, кожний з яких дорівнює l.

Через кінці отриманих відрізків проведемо прямі, паралельні прямій BB_1 (рис. 114). За теоремою Фалеса ці прямі ділять відрізки OA_1 і A_1B_1 відповідно на m і n рівних відрізків. Нехай кожний із цих відрізків дорівнює l_1. Звідси $OA_1 = ml_1$, $A_1B_1 = nl_1$.

Маємо: $\frac{OA}{AB} = \frac{ml}{nl} = \frac{m}{n}$, $\frac{OA_1}{A_1B_1} = \frac{ml_1}{nl_1} = \frac{m}{n}$. Звідси $\frac{OA}{AB} = \frac{OA_1}{A_1B_1}$.

Тоді $\frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

Чому ж наведені міркування не можна вважати повним доведенням теореми? Річ у тім, що не для будь-яких двох відрізків існує відрізок, що вміщається в кожному з них ціле число разів. Зокрема, для відрізків OA і AB такий відрізок може й не існувати. Доведення для цього випадку виходить за межі розглядуваного курсу. ▲

Якщо рисунок 113 доповнити прямою CC_1, паралельною прямій BB_1 (рис. 115), то, міркуючи аналогічно, отримаємо, наприклад, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

Теорема 11.2 залишається справедливою, якщо замість сторін кута взяти дві будь-які прямі.

Теорема 11.3. ***Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини трикутника.***

Доведення. ✪ На рисунку 116 медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці M. Доведемо, що медіана CC_1 також проходить через точку M і $\frac{BM}{MB_1} = \frac{AM}{MA_1} = \frac{CM}{MC_1} = \frac{2}{1}$.

Проведемо $B_1K \parallel AA_1$. Оскільки $AB_1 = B_1C$, то за теоремою Фалеса $A_1K = KC$, тобто $\frac{A_1C}{A_1K} = \frac{2}{1}$.

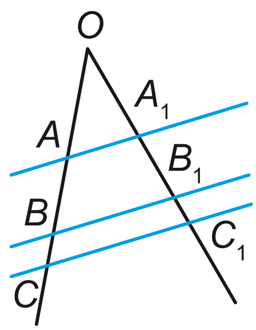


Рис. 115

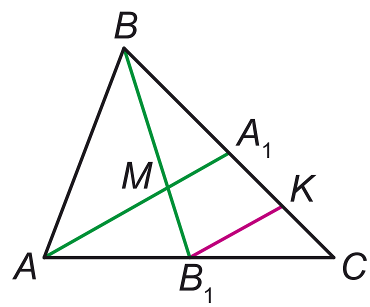


Рис. 116

Оскільки $BA_1 = A_1C$, то $\frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$. За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{BM}{MB_1} = \frac{BA_1}{A_1K} = \frac{2}{1}$.

Таким чином, медіана AA_1, перетинаючи медіану BB_1, ділить її у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини B.

Аналогічно можна довести (зробіть це самостійно), що медіана CC_1 також ділить медіану BB_1 у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини B (рис. 117).

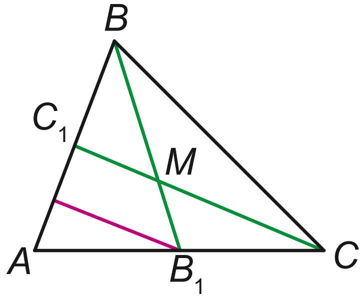


Рис. 117

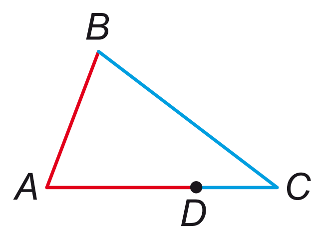


Рис. 118

А це означає, що всі три медіани трикутника ABC проходять через одну точку. Ми довели, що ця точка ділить медіану BB_1 у відношенні 2 : 1. Аналогічно можна довести, що ця точка ділить у відношенні 2 : 1 також медіани AA_1 і CC_1. ▲

На рисунку 118 зображено трикутник ABC. Точка D належить стороні AC. У цьому разі говорять, що сторони AB і BC **прилягають** відповідно до відрізків AD і DC.

Теорема 11.4 (властивість бісектриси трикутника). ***Бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.***

Доведення. На рисунку 119 відрізок BD — бісектриса трикутника ABC. Доведемо, що $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$.

Через точку C проведемо пряму, паралельну прямій BD. Нехай проведена пряма перетинає пряму AB у точці E. Кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих BD і CE та січній BC; кути 3 і 4 рівні як відповідні при паралельних прямих BD і CE та січній AE. Оскільки BD — бісектриса трикутника ABC, то $\angle 4 = \angle 1$. Звідси $\angle 2 = \angle 3$. Тоді трикутник CBE рівнобедрений з рівними сторонами BC і BE. За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BE}$.

Оскільки $BE = BC$, то $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$. ▲

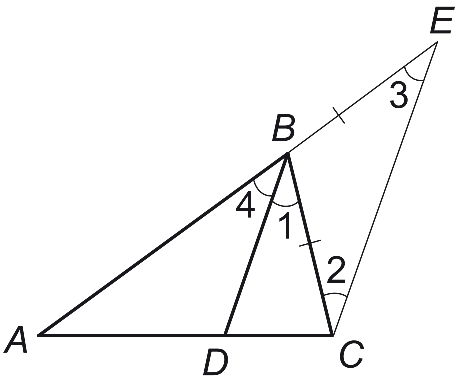


Рис. 119

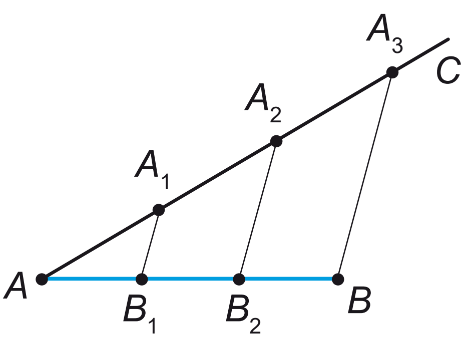


Рис. 120

Задача. Поділіть даний відрізок на три рівних відрізки.

Розв'язання. Через кінець A даного відрізка AB проведемо промінь AC, який не належить прямій AB (рис. 120). Позначимо на промені AC довільну точку A_1. Потім позначимо точки A_2 і A_3 так, щоб $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$.

Проведемо відрізок A_3B. Через точки A_1 і A_2 проведемо прямі, паралельні прямій A_3B.

Вони перетинатимуть відрізок AB у точках B_1 і B_2 відповідно.

За теоремою Фалеса $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$. ●

1. Сформулюйте теорему Фалеса.
2. Що називають відношенням двох відрізків?
3. У якому випадку говорять, що відрізки AB і CD пропорційні відрізкам A_1B_1 і C_1D_1?
4. Сформулюйте теорему про пропорційні відрізки.
5. Сформулюйте теорему про перетин медіан трикутника.
6. Сформулюйте властивість бісектриси трикутника.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

368.° Накресліть довільний відрізок і поділіть його на п’ять рівних частин.

369.° Накресліть довільний відрізок і поділіть його на сім рівних частин.

370.° Накресліть довільний відрізок AB і побудуйте на ньому точку C таку, що $AC : CB = 2 : 7$.

371.° Накресліть довільний відрізок CD і побудуйте на ньому точку E таку, що $CE : ED = 1 : 5$.

ВПРАВИ

372.° На рисунку 121 $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $OB_1 = 3$ см. Знайдіть відрізки B_1B_2, OB_3, B_1B_4.

373.° На рисунку 122 $AB = BC$, $EF = 5$ см. Знайдіть відрізок ED.

374.° Знайдіть відношення відрізків AB і CD, якщо їхні довжини відповідно дорівнюють 12 см і 18 см. Чи зміниться це відношення, якщо довжини даних відрізків виразити в дециметрах? у міліметрах?

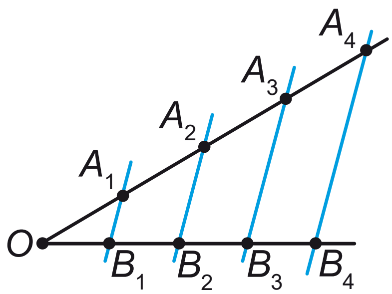


Рис. 121

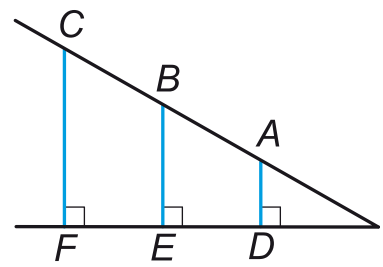


Рис. 122

375.° Чи пропорційні відрізки AB і CD відповідно відрізкам EF і MK, якщо:

1) $AB = 16$ см, $CD = 6$ см, $EF = 24$ см, $MK = 9$ см;
2) $AB = 8$ см, $CD = 20$ см, $EF = 10$ см, $MK = 35$ см?

376.° Серед відрізків AB, CD, EF, MK, PS виберіть чотири відрізки так, щоб два з них були пропорційними двом іншим відрізкам, якщо $AB = 3$ см, $CD = 16$ см, $EF = 18$ см, $MK = 36$ см, $PS = 6$ см.

377.° На рисунку 123 $BD \parallel CE$, $AB = 16$ см, $BC = 6$ см, $AD = 8$ см. Знайдіть відрізок DE.

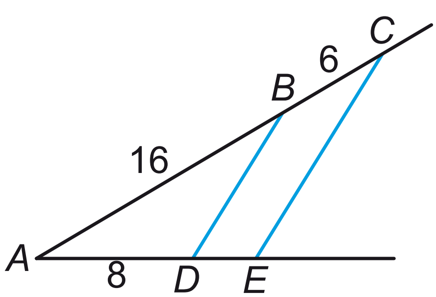


Рис. 123

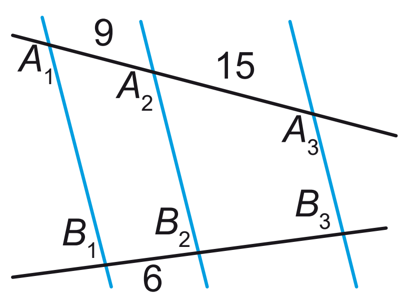


Рис. 124

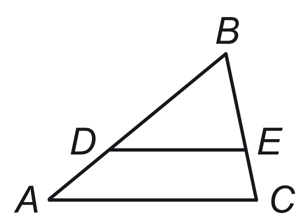


Рис. 125

378.° На рисунку 124 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = 9$ см, $A_2A_3 = 15$ см, $B_1B_2 = 6$ см. Знайдіть відрізок B_2B_3.

379.° На рисунку 125 $DE \parallel AC$, $BE = 10$ см, відрізок BD у два рази більший за відрізок AD. Знайдіть відрізок BC.

380.° Пряма, паралельна стороні BC трикутника ABC, перетинає його сторону AB у точці M, а сторону AC —

у точці K, $AM = 9$ см, $BM = 6$ см, $KC = 8$ см. Знайдіть відрізок AK.

381.° Доведіть, що середня лінія трикутника ABC, паралельна стороні AC, ділить навпіл будь-який відрізок, який сполучає вершину B з довільною точкою сторони AC.

382.° Відстань від точки перетину діагоналей прямокутника до його більшої сторони дорівнює 7 см. Знайдіть довжину меншої сторони прямокутника.

383.° Висота рівностороннього трикутника дорівнює 12 см. На якій відстані від сторін трикутника розташована точка перетину його бісектрис?

384.° Медіана CD трикутника ABC дорівнює 9 см. Знайдіть відрізки CO і OD, де O — точка перетину медіан трикутника ABC.

385.° Відрізок BD є бісектрисою трикутника ABC, $AB = 40$ см, $AD = 30$ см, $CD = 12$ см. Знайдіть сторону BC.

386.° Відрізок AM — бісектриса трикутника ABC, $AB = 48$ см, $AC = 32$ см, $BM = 18$ см. Знайдіть сторону BC.

387.• Кінці відрізка, який не перетинає дану пряму, віддалені від цієї прямої на 8 см і 14 см. Знайдіть відстань від середини цього відрізка до даної прямої.

388.• Відстань від середини хорди BC до діаметра AC дорівнює 3 см, $\angle BAC = 30°$. Знайдіть хорду AB.

389.• Відрізок BM — висота ромба $ABCD$, проведена до сторони AD, $\angle A = 45°$, $AM = 8$ см. Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей ромба до сторони AD.

390.• У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, $AC = 8$ см, AD — медіана, BE — висота, $BE = 12$ см. Із точки D опущено перпендикуляр DF на сторону AC. Знайдіть відрізок DF і кут ADF.

391.• Сторона AC трикутника ABC дорівнює 24 см. Сторону AB поділили на чотири рівних відрізки та через точки поділу провели прямі, паралельні стороні AC. Знайдіть відрізки цих прямих, які належать трикутнику.

392.• Основи трапеції дорівнюють 16 см і 28 см. Одну з бічних сторін поділили на три рівних відрізки та через точки поділу провели прямі, паралельні основам. Знайдіть відрізки цих прямих, які належать трапеції.

393.• Сторону DE трикутника DEF поділили на три рівних відрізки та через точки поділу провели прямі, паралельні стороні DF. Знайдіть відрізки цих прямих, які належать трикутнику DEF, якщо $DF = 15$ см.

394.• Доведіть, що середня лінія трапеції ділить її діагоналі навпіл.

395.• Середня лінія MK трапеції $ABCD$ перетинає діагональ AC у точці E, $ME = 4$ см, $EK = 6$ см. Знайдіть основи трапеції.

396.• Діагоналі трапеції перетинають її середню лінію MK у точках E і F. Доведіть, що $ME = KF$.

397.• Основи трапеції дорівнюють 12 см і 22 см. Знайдіть відрізки, на які діагоналі трапеції ділять її середню лінію.

398.• На рисунку 126 $AE \parallel BF \parallel CM \parallel DK$, $AB = 25$ см, $BC = 20$ см, $CD = 35$ см, $EK = 48$ см. Знайдіть відрізки EF, FM і MK.

399.• Через точку D, позначену на стороні AC трикутника ABC, проведено пряму, яка паралельна стороні AB і перетинає сторону BC у точці E. Знайдіть відрізок BE, якщо $AD : DC = 5 : 7$, $BC = 36$ см.

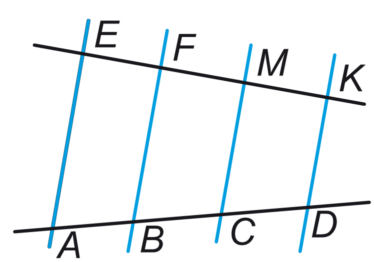


Рис. 126

400.• Точки M і K — середини сторін AB і AD паралелограма $ABCD$ відповідно. Доведіть, що точка перетину прямих BK і DM належить діагоналі AC.

401.• Доведіть, що коли дві медіани трикутника рівні, то цей трикутник рівнобедрений.

402.• У трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено медіану AM і висоту BH. Знайдіть висоту BH, якщо $AM = 45$ см, $\angle CAM = 30°$.

403.• Дано відрізок AB і точку O, яка не належить прямій AB. Побудуйте трикутник, для якого відрізок AB є стороною, а точка O — точкою перетину медіан.

404.• Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC, $AB = 28$ см, $BC = 20$ см, $AC = 36$ см. Знайдіть відрізки AD і CD.

405.• У трикутник ABC вписано ромб $CDEF$ так, що кут C у них спільний, а вершини D, E і F ромба належать відповідно сторонам AC, AB і BC трикутника. Знайдіть сторони AC і BC, якщо $AE = 30$ см, $BE = 12$ см, а периметр трикутника дорівнює 105 см.

406.• Сторони трикутника дорівнюють 39 см, 65 см і 80 см. Коло, центр якого належить більшій стороні трикутника, дотикається до двох інших його сторін. На які відрізки центр цього кола ділить сторону трикутника?

407.• Точка D — середина основи AC рівнобедреного трикутника ABC. На стороні AB позначили точку M так, що $AM : MB = 2 : 7$. У якому відношенні пряма BD ділить відрізок CM?

408.• У рівнобедреному трикутнику DEF провели висоту EC до його основи та на бічній стороні EF позначили точку A. Відрізки EC і DA перетинаються в точці O, причому $AO : OD = 3 : 8$. Знайдіть відношення $EA : AF$.

409.• У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, дорівнює 42 см, а основа відноситься до бічної сторони як 6 : 11. Знайдіть радіус кола, вписаного в даний трикутник.

410.• Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 60 см, а центр вписаного кола ділить медіану, проведену до основи, у відношенні 12 : 5. Знайдіть основу трикутника.

411.•• На стороні BC трикутника ABC позначено точку M так, що $BM : MC = 3 : 10$. У якому відношенні відрізок AM ділить медіану BK трикутника ABC?

412.•• На стороні AB трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : MB = 4 : 3$. У якому відношенні медіана BK: 1) ділить відрізок CM; 2) ділиться відрізком CM?

413.•• Доведіть, що відрізок, який сполучає середини діагоналей трапеції, паралельний її основам і дорівнює половині їхньої різниці.

414.•• Дано відрізки a, b, c. Побудуйте відрізок x такий, що $a : x = b : c$.

415.•• Через точку O, яка належить даному куту, проведіть відрізок, кінці якого належать сторонам даного кута та який ділиться точкою O: 1) навпіл; 2) у відношенні 2 : 3.

416.•• Побудуйте трикутник:

1) за стороною та кутами, які ця сторона утворює з медіанами, проведеними до двох інших сторін;
2) за двома медіанами та кутом між ними;
3) за висотою та медіаною, проведеними до однієї сторони, і кутом між цією стороною та медіаною, проведеною до іншої сторони;
4) за трьома медіанами.

417.•• Побудуйте трикутник:

1) за стороною та медіанами, проведеними до двох інших сторін;
2) за висотою, проведеною до однієї зі сторін, і медіанами, проведеними до двох інших сторін.

418.•• На сторонах кута A позначено точки B_1, B_2, C_1, C_2 так, що $\frac{AB_1}{B_1B_2} = \frac{AC_1}{C_1C_2}$ (рис. 127). Доведіть, що $B_1C_1 \parallel B_2C_2$.

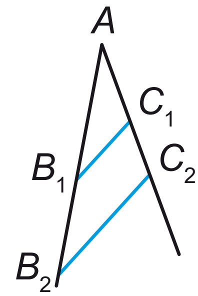


Рис. 127

419.* Бісектриса зовнішнього кута при вершині B трикутника ABC перетинає промінь AC у точці D. Доведіть, що $AB : BC = AD : CD$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

420. Сторона квадрата $ABCD$ дорівнює a. На дузі AC кола із центром B, радіус якого дорівнює a, позначено точку E таку, що $\angle BEC = 75^\circ$. Знайдіть відрізок AE.

421. Діагональ трапеції перпендикулярна до її основ, тупий кут, прилеглий до більшої основи, дорівнює 120°, бічна сторона, прилегла до цього кута, — 12 см, а більша основа — 16 см. Знайдіть середню лінію трапеції.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

422. Рівносторонній трикутник покрито п'ятьма меншими рівними між собою рівносторонніми трикутниками. Доведіть, що для покриття досить і чотирьох таких трикутників.

12. Подібні трикутники

На рисунку 128 ви бачите зменшене зображення обкладинки підручника з геометрії. Узагалі, у повсякденному житті ви часто стикаєтеся з об'єктами, які мають однакову форму, але різні розміри (рис. 129).

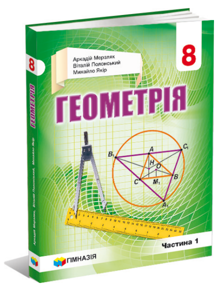


Рис. 128

Рис. 129

Геометричні фігури, які мають однакову форму, називають **подібними**. Наприклад, подібними є будь-які два кола, два квадрати, два рівносторонніх трикутники (рис. 130).

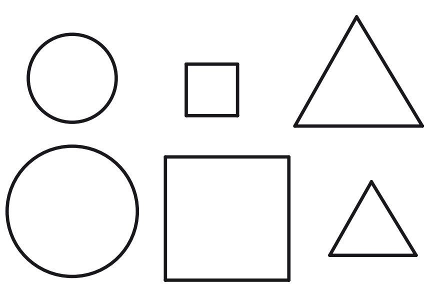


Рис. 130

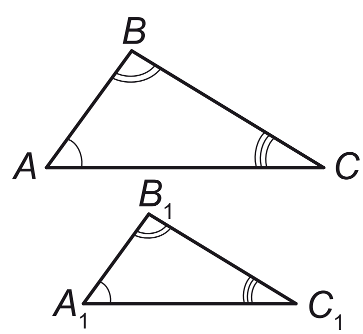


Рис. 131

На рисунку 131 зображено трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких рівні кути: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$.

Сторони AB і A_1B_1 лежать проти рівних кутів C і C_1. Такі сторони називають **відповідними**. Відповідними також є сторони BC і B_1C_1, CA і C_1A_1.

Означення. Два трикутники називають подібними, якщо їхні кути відповідно рівні та сторони одного трикутника пропорційні відповідним сторонам другого трикутника.

Наприклад, на рисунку 132 зображено трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ і $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = 2$. За означенням ці трикутники подібні. Пишуть: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ (читають: «трикутник ABC подібний трикутнику $A_1B_1C_1$»).

Число 2, якому дорівнює відношення відповідних сторін, називають **коефіцієнтом подібності**. Кажуть, що трикутник ABC подібний трикутнику $A_1B_1C_1$ із коефіцієнтом подібності, який дорівнює 2. Пишуть: $\Delta ABC \overset{2}{\backsim} \Delta A_1B_1C_1$.

Оскільки $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{1}{2}$, то можна також сказати, що трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC із коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}$. Пишуть: $\Delta A_1B_1C_1 \overset{1/2}{\backsim} \Delta ABC$.

З означення рівних трикутників випливає, що будь-які два рівних трикутники подібні з коефіцієнтом подібності, який дорівнює 1.

Якщо $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ і $\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$, то $\Delta ABC \backsim \Delta A_2B_2C_2$. Доведіть цю властивість самостійно.

Лема[1] про подібні трикутники. ***Пряма, яка паралельна стороні трикутника та перетинає дві інших його сторони, відтинає від даного трикутника йому подібний*.**

---

[1] **Лемою** називають допоміжну теорему, яку використовують для доведення інших теорем.

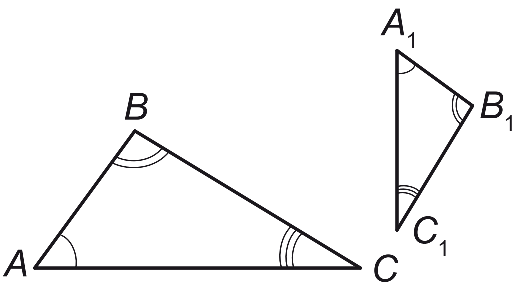


Рис. 132

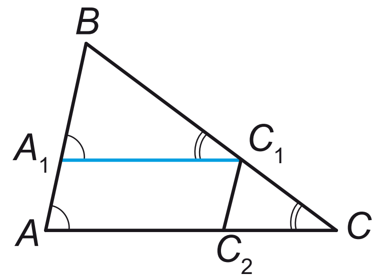


Рис. 133

Доведення. На рисунку 133 зображено трикутник ABC, відрізок A_1C_1 паралельний стороні AC. Доведемо, що $\Delta A_1BC_1 \backsim \Delta ABC$.

Кути A і A_1, C і C_1 рівні як відповідні при паралельних прямих A_1C_1 і AC та січних AB і CB відповідно. Отже, кути трикутників, що розглядаються, відповідно рівні.

Покажемо, що сторони BA і BC пропорційні відповідно сторонам BA_1 і BC_1.

Із теореми про пропорційні відрізки (теорема 11.2) випливає, що $\frac{BA}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$.

Звідси $\frac{BA}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$.

Проведемо $C_1C_2 \parallel AB$. Отримуємо: $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{AC_2}$. За означенням чотирикутник $AA_1C_1C_2$ — паралелограм. Тоді $AC_2 = A_1C_1$. Звідси $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Таким чином, ми довели, що $\frac{BA}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Отже, у трикутниках A_1BC_1 і ABC кути відповідно рівні та відповідні сторони пропорційні. Тому за означенням ці трикутники подібні. ▲

Задача. Доведіть, що відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

Розв'язання. Нехай трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC із коефіцієнтом подібності k.

Тоді $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$, звідки

$$A_1B_1 = k \cdot AB, \quad B_1C_1 = k \cdot BC, \quad A_1C_1 = k \cdot AC.$$

Позначимо буквою P_1 периметр трикутника $A_1B_1C_1$, буквою P — периметр трикутника ABC. Маємо:

$$P_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = k \cdot AB + k \cdot BC + k \cdot AC =$$
$$= k(AB + BC + AC) = kP,$$

тобто $\frac{P_1}{P} = k$. ●

?

1. Які два трикутники називають подібними?
2. Як знайти коефіцієнт подібності двох подібних трикутників?
3. Сформулюйте лему про подібні трикутники.

ВПРАВИ

423.° На рисунку 134 зображено подібні трикутники ABC і DEF, рівні кути яких позначено однаковою кількістю дуг. Які сторони цих трикутників пропорційні? Запишіть відповідні рівності.

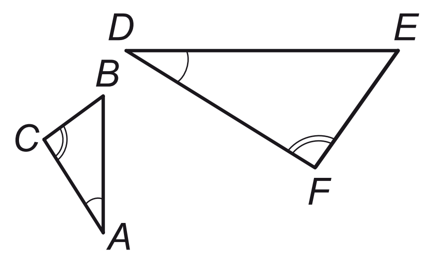


Рис. 134

424.° Чи подібні трикутники ABC і MNK, якщо $\angle A = 40°$, $\angle B = 82°$, $\angle M = 40°$, $\angle K = 58°$, $AB = 2{,}4$ см, $BC = 2{,}1$ см, $AC = 3{,}9$ см, $MN = 3{,}2$ см, $NK = 2{,}8$ см, $MK = 5{,}2$ см?

425.° Відомо, що $\Delta DEP \overset{0,3}{\backsim} \Delta MCP$, причому стороні DE відповідає сторона MC, стороні DF — сторона MP, $MC = 12$ см, $MP = 8$ см, $EF = 4{,}5$ см. Знайдіть невідомі сторони даних трикутників.

426.° Відомо, що $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$, причому $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 10$ см, $A_1B_1 = 9$ см. Знайдіть сторони B_1C_1 і A_1C_1.

427.° Знайдіть кути трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$, причому стороні AB відповідає сторона A_1B_1, стороні BC — сторона B_1C_1, $\angle A = 25°$, $\angle B = 70°$.

428.° Сторони MK і DE, KT і EF — відповідні сторони подібних трикутників MKT і DEF, $MK = 18$ см, $KT = 16$ см, $MT = 28$ см, $MK : DE = 4 : 5$. Знайдіть сторони трикутника DEF.

429.° На рисунку 135 $AB \parallel CD$. Знайдіть на цьому рисунку подібні трикутники. Запишіть пропорції, які починаються з відношення: 1) $\frac{AE}{CE}$; 2) $\frac{CD}{AB}$; 3) $\frac{AB}{AE}$.

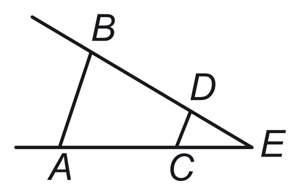


Рис. 135

430.° Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає сторону AB у точці D, а сторону BC — у точці E. Знайдіть:
1) відрізок BD, якщо $AB = 16$ см, $AC = 20$ см, $DE = 15$ см;
2) відрізок AD, якщо $AB = 28$ см, $BC = 63$ см, $BE = 27$ см.

431.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = 6$ см. Через точку M сторони AB проведено пряму, яка паралельна стороні BC і перетинає сторону AC у точці K. Знайдіть невідомі сторони трикутника ABC, якщо $AM = 4$ см, $MK = 8$ см, $AK = 9$ см.

432.° Знайдіть висоту вежі (рис. 136), якщо відстані від спостерігача до жердини та до вежі відповідно дорівнюють 1,5 м і 39 м, висота жердини — 3 м, а зріст спостерігача — 1,8 м.

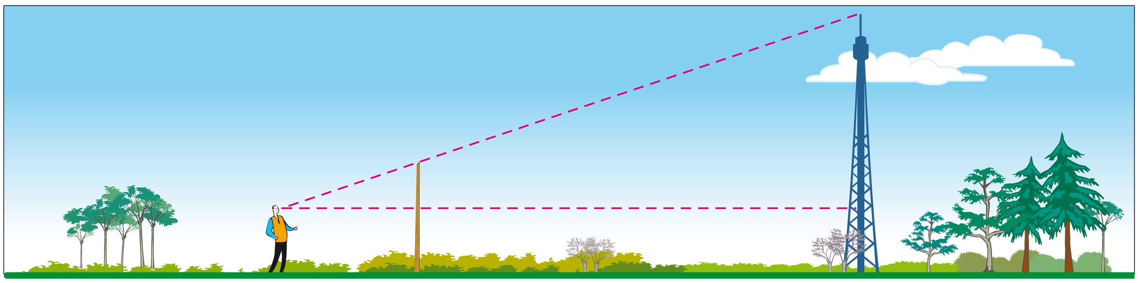


Рис. 136

433.° Продовження бічних сторін *AB* і *CD* трапеції *ABCD* перетинаються в точці *E*. Знайдіть відрізок *CE*, якщо $DE = 40$ см, $BC : AD = 4 : 5$.

434.° Продовження бічних сторін *AB* і *CD* трапеції *ABCD* перетинаються в точці *M*. Знайдіть меншу основу трапеції, якщо більша основа *AD* дорівнює 42 см, $AB = 9$ см, $BM = 54$ см.

435.° Користуючись означенням подібних трикутників, доведіть, що будь-які два рівносторонніх трикутники подібні.

436.• Точки *M* і *K* — середини сторін *CD* і *AD* квадрата *ABCD* відповідно. Користуючись означенням подібних трикутників, доведіть, що $\Delta MDK \backsim \Delta BCD$.

437.• Сторони трикутника відносяться як 5 : 4 : 7. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якого: 1) периметр дорівнює 64 см; 2) менша сторона дорівнює 24 см.

438.• Сторони даного трикутника дорівнюють 15 см, 25 см і 35 см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, у якого: 1) периметр дорівнює 45 см; 2) різниця найбільшої і найменшої сторін становить 16 см.

439.• На рисунку 137 зображено трикутник ABC і вписаний у нього ромб $BDEK$. Знайдіть сторону ромба, якщо $AB = 10$ см, $BC = 15$ см.

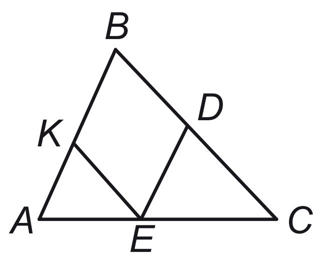


Рис. 137

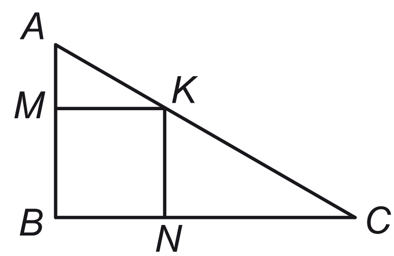


Рис. 138

440.• На рисунку 138 зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle B = 90°$) і вписаний у нього квадрат $BMKN$. Знайдіть відрізок CN, якщо $BM = 6$ см, $AB = 10$ см.

441.• Два кола із центрами O_1 і O_2 та радіусами 8 см і 12 см відповідно мають тільки одну спільну точку A (точка A лежить між точками O_1 і O_2). Їхня спільна зовнішня дотична перетинає пряму O_1O_2 у точці B. Знайдіть відстані від точки B до центрів даних кіл.

442.•• Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. Через середину висоти трикутника, опущеної на його основу, проведено пряму, паралельну бічній стороні. Знайдіть периметр трикутника, який ця пряма відтинає від даного.

443.•• У рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 12 см, а бічна сторона — 18 см, вписано коло. Знайдіть відстань між точками дотику цього кола до бічних сторін трикутника.

444.* У трикутнику ABC відомо, що $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $\angle ABC = 120°$, BD — бісектриса. Знайдіть відрізок BD.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

445. Сторона BC паралелограма $ABCD$ у 2 рази більша за сторону AB. Бісектриси кутів A і B паралелограма перетинають пряму CD у точках M і K відповідно (рис. 139). Знайдіть сторони паралелограма, якщо $MK = 18$ см.

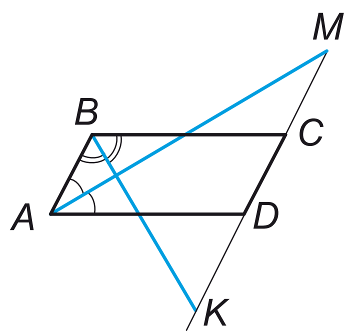


Рис. 139

446. Діагоналі прямокутника $ABCD$ перетинаються в точці O, кут AOD на $60°$ більший за кут AOB, $AC = 24$ см. Знайдіть периметр трикутника COD.

447. Коло, центр якого належить стороні AB трикутника ABC, проходить через точку B, дотикається до сторони AC у точці C і перетинає сторону AB у точці D, причому $AD : BD = 1 : 2$. Знайдіть кути: 1) трикутника ABC; 2) трикутника BCD.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

448. На площині позначили 25 точок так, що серед будь-яких трьох із них знайдуться дві точки, відстань між якими менша від одиниці. Доведіть, що існує коло одиничного радіуса, яке містить не менше ніж 13 даних точок.

13. Перша ознака подібності трикутників

Якщо для трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ виконуються умови $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$, то за означенням ці трикутники подібні.

Чи можна за меншою кількістю умов визначати подібність трикутників? На це запитання відповідають ознаки подібності трикутників.

Теорема 13.1 (перша ознака подібності трикутників: за двома кутами). ***Якщо два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.***

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Доведемо, що $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Якщо $AB = A_1B_1$, то трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за другою ознакою рівності трикутників, а отже, ці трикутники подібні.

Нехай, наприклад, $AB > A_1B_1$. Відкладемо на стороні BA відрізок BA_2, який дорівнює стороні B_1A_1. Через точку A_2 проведемо пряму A_2C_2, паралельну стороні AC (рис. 140).

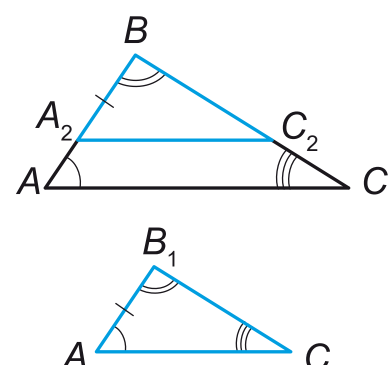


Рис. 140

Кути A і BA_2C_2 є відповідними при паралельних прямих A_2C_2 і AC та січній AA_2. Звідси $\angle A = \angle BA_2C_2$. Але $\angle A = \angle A_1$. Отримуємо, що $\angle A_1 = \angle BA_2C_2$. Таким чином, трикутники A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$ рівні за другою ознакою рівності трикутників. За лемою про подібні трикутники $\Delta A_2BC_2 \backsim \Delta ABC$. Отже, $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. ▲

Задача 1. Середня лінія трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) дорівнює 24 см, а її діагоналі перетинаються в точці O. Знайдіть основи трапеції, якщо $AO : OC = 5 : 3$.

Розв'язання. Розглянемо трикутники AOD і COB (рис. 141). Кути AOD і BOC рівні як вертикальні, кути CAD і ACB рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній AC. Отже, трикутники AOD і COB подібні за двома кутами.

Тоді $\frac{AD}{BC} = \frac{AO}{CO} = \frac{5}{3}$.

Нехай $BC = 3x$ см, тоді $AD = 5x$ см.

Оскільки середня лінія трапеції дорівнює 24 см, то $BC + AD = 48$ см.

Маємо: $3x + 5x = 48$. Звідси $x = 6$.

Отже, $BC = 18$ см, $AD = 30$ см.

Відповідь: 18 см, 30 см.

Задача 2 (властивість хорд, які перетинаються). Доведіть, що коли хорди AB і CD кола перетинаються в точці M, то $AM \cdot MB = DM \cdot MC$ (рис. 142).

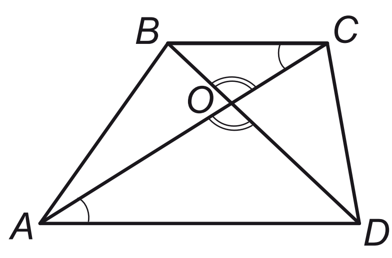


Рис. 141

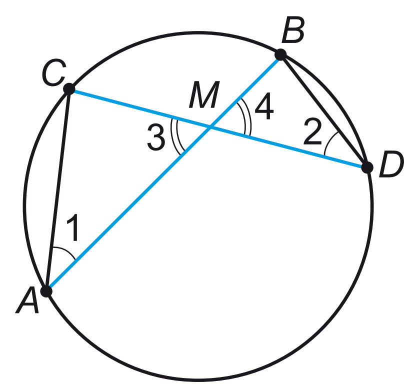


Рис. 142

Розв'язання. Розглянемо трикутники ACM і DBM. Кути 3 і 4 рівні як вертикальні, кути 1 і 2 рівні як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу. Отже, трикутники

ACM і *DBM* подібні за першою ознакою подібності трикутників.

Тоді $\dfrac{AM}{DM} = \dfrac{MC}{MB}$. Звідси $AM \cdot MB = DM \cdot MC$. ●

Задача 3 (властивість дотичної та січної). Доведіть, що коли через точку *A* до кола проведено дотичну *AM* (*M* — точка дотику) і пряму (січну), яка перетинає коло в точках *B* і *C* (рис. 143), то $AM^2 = AC \cdot AB$.

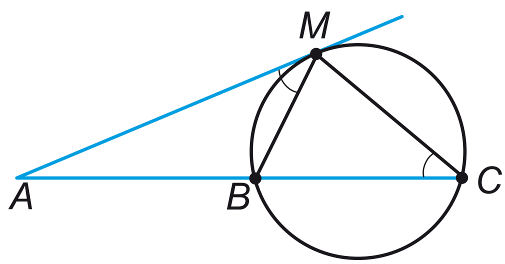


Рис. 143

Розв'язання. Розглянемо трикутники *AMB* і *ACM*. У них кут *A* спільний. За властивістю кута між дотичною та хордою (див. ключову задачу 1 п. 9) $\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MB$. Кут *MCB* вписаний. Він спирається на дугу *MB*, тому $\angle MCB = \frac{1}{2} \cup MB$. Звідси $\angle AMB = \angle MCB$. Отже, трикутники *AMB* і *ACM* подібні за першою ознакою подібності трикутників.

Тоді $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AB}{AM}$. Звідси $AM^2 = AC \cdot AB$. ●

1. Сформулюйте першу ознаку подібності трикутників.
2. Сформулюйте властивість хорд, які перетинаються.
3. Сформулюйте властивість дотичної та січної, проведених до кола через одну точку.

ВПРАВИ

449.° На рисунку 144 $\angle BAC = \angle BED$. Чи подібні трикутники ABC і EDB? У разі ствердної відповіді вкажіть пари відповідних сторін.

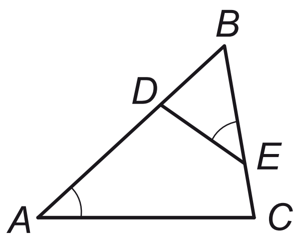


Рис. 144

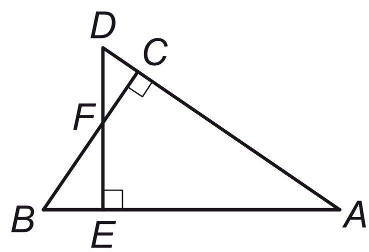


Рис. 145

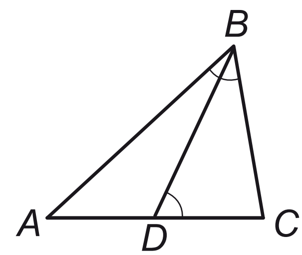
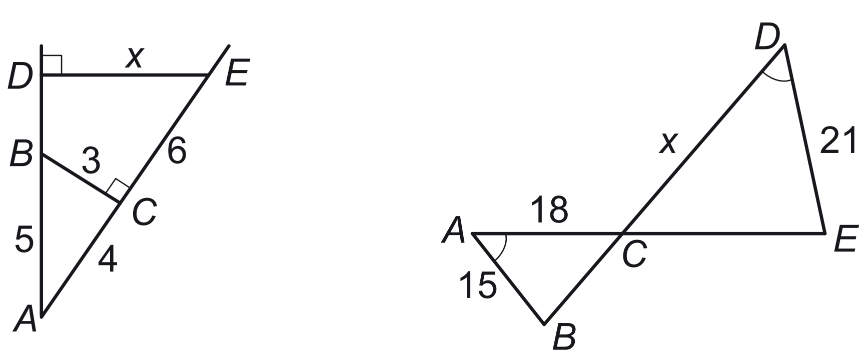


Рис. 146

450.° На рисунку 145 $DE \perp AB$, $BC \perp AD$. Укажіть усі пари подібних трикутників, які зображено на цьому рисунку.

451.° На рисунку 146 $\angle ABC = \angle BDC$. Які трикутники на цьому рисунку подібні? Запишіть рівність відношень їхніх відповідних сторін.

452.° Укажіть пари подібних трикутників, зображених на рисунку 147, знайдіть довжину відрізка x (розміри дано в сантиметрах).



а *б*

Рис. 147

453.° У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ відомо, що $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $A_1C_1 = 18$ см. Знайдіть невідомі сторони даних трикутників.

454.° На стороні CD паралелограма $ABCD$ (рис. 148) позначено точку E, прямі BE і AD перетинаються в точці F, $CE = 8$ см, $DE = 4$ см, $BE = 10$ см, $AD = 9$ см. Знайдіть відрізки EF і FD.

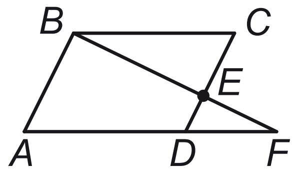


Рис. 148

455.° У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) відомо, що $AD = 20$ см, $BC = 15$ см, O — точка перетину діагоналей, $AO = 16$ см. Знайдіть OC.

456.° Діагоналі трапеції $ABCD$ з основами BC і AD перетинаються в точці O. Знайдіть основу AD, якщо $BO : OD = 3 : 7$, $BC = 18$ см.

457.° Чи подібні два прямокутних трикутники, якщо серед кутів одного з них є кут, який дорівнює $38°$, а серед кутів другого — кут, який дорівнює $52°$?

458.° Доведіть, що два рівнобедрених трикутники подібні, якщо кути, протилежні їхнім основам, рівні.

459.° Чи можна стверджувати, що два рівнобедрених трикутники подібні, якщо в них є: 1) по рівному гострому куту; 2) по прямому куту; 3) по рівному тупому куту?

460.° Кут між бічною стороною та основою одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту між бічною стороною та основою другого рівнобедреного трикутника. Бічна сторона та основа першого трикутника дорівнюють 18 см і 10 см відповідно, а основа другого — 8 см. Знайдіть бічну сторону другого трикутника.

461.° Із вершини прямого кута трикутника опущено висоту на гіпотенузу. Скільки подібних трикутників утворилося при цьому?

462.° Сторони паралелограма дорівнюють 20 см і 14 см, висота, проведена до більшої сторони, дорівнює 7 см. Знайдіть висоту паралелограма, проведену до меншої сторони.

463.• У трапеції $ABCD$ з основами BC і AD діагоналі перетинаються в точці O, $BO = 4$ см, $OD = 20$ см, $AC = 36$ см. Знайдіть відрізки AO і OC.

464.• У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) відомо, що $AD = 18$ см, $BC = 14$ см, $AC = 24$ см. Знайдіть відрізки, на які точка перетину діагоналей ділить діагональ AC.

465.• Доведіть, що в подібних трикутниках бісектриси, проведені з вершин відповідних кутів, відносяться як відповідні сторони.

466.• Доведіть, що в подібних трикутниках висоти, проведені з вершин відповідних кутів, відносяться як відповідні сторони.

467.• Основи BC і AD трапеції $ABCD$ дорівнюють відповідно 28 см і 63 см, $\angle ABC = \angle ACD$. Знайдіть діагональ AC.

468.• На стороні AC трикутника ABC позначили точку D таку, що $\angle ABD = \angle C$, $AB = 20$ см, $BC = 28$ см, $AC = 40$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутника ABD.

469.• Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 20 см, а більший катет — 16 см. Знайдіть відрізки, на які серединний перпендикуляр гіпотенузи ділить більший катет.

470.• Поясніть за допомогою рисунка 149, як можна знайти ширину BM річки, використовуючи подібність трикутників.

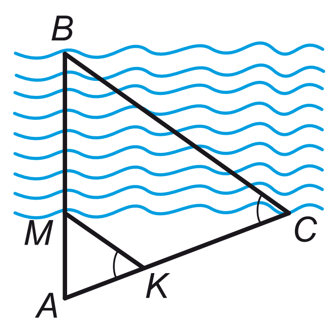


Рис. 149

471.• Зображення дерева, віддаленого на 60 м від об'єктива фотоапарата, має на плівці висоту 8 мм (рис. 150). Відстань від об'єктива до зображення дорівнює 40 мм. Яка висота дерева?

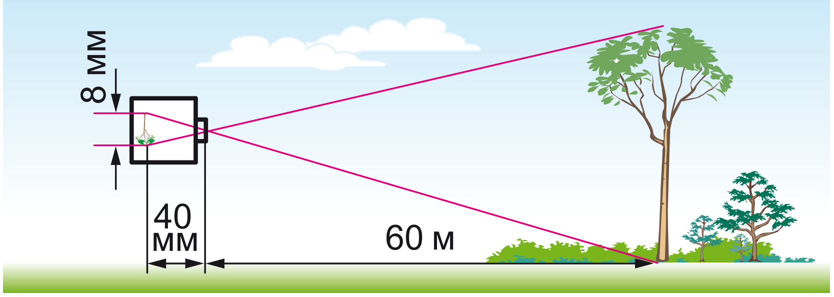


Рис. 150

472.• Знайдіть висоту дерева, якщо довжина його тіні дорівнює 8,4 м, а довжина тіні від вертикального стовпа заввишки 2 м у той самий час доби дорівнює 2,4 м (рис. 151).

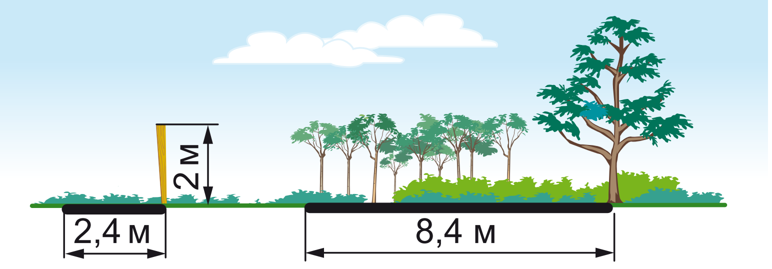


Рис. 151

473.• Чи може пряма перетинати дві сторони рівнобедреного трикутника, відтинаючи від нього трикутник, йому подібний, і не бути паралельною третій стороні?

474.• Хорди AB і CD кола перетинаються в точці M, $AM = 6$ см, $BM = 14$ см, $CM = 12$ см. Знайдіть відрізок DM.

475.• Хорди MK і NP кола перетинаються в точці F, $MF = 9$ см, $KF = 12$ см, а відрізок NF у 3 рази довший за відрізок PF. Знайдіть довжину хорди NP.

476.° Точка K ділить хорду AC кола навпіл, а хорду DE — на відрізки завдовжки 2 см і 32 см. Знайдіть довжину хорди AC.

477.•• Точка E ділить хорду CD кола на відрізки завдовжки 15 см і 16 см. Знайдіть радіус кола, якщо відстань від точки E до центра кола дорівнює 4 см.

478.•• Точка P ділить хорду MK кола на два відрізки завдовжки 8 см і 12 см. Знайдіть відстань від точки P до центра кола, якщо його радіус дорівнює 11 см.

479.•• Через точку A проведено до кола дотичну AM (M — точка дотику) і січну, яка перетинає коло в точках K і P (точка K лежить між точками A і P). Знайдіть відрізок KP, якщо $AM = 12$ см, $AP = 18$ см.

480.•• Через точку A, яка лежить поза колом, проведено дві прямі, одна з яких дотикається до кола в точці B, а друга перетинає коло в точках C і D (точка C лежить між точками A і D), $AB = 18$ см, $AC : CD = 4 : 5$. Знайдіть відрізок AD.

481.•• Через точку A, що лежить поза колом (рис. 152), проведено дві прямі, одна з яких перетинає коло в точках B і C (точка B лежить між точками A і C), а друга — у точках D і E (точка D лежить між точками A і E).

1) Доведіть, що $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

2) Знайдіть відрізок AE, якщо $AB = 18$ см, $BC = 12$ см і $AD : DE = 5 : 7$.

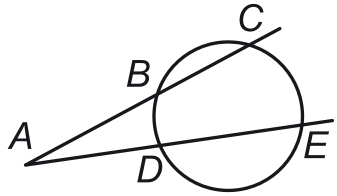


Рис. 152

482.•• У колі, радіус якого дорівнює 8 см, проведено хорду AB. На прямій AB поза відрізком AB позначили точку C таку, що $AC : BC = 1 : 4$. Знайдіть відстань від точки C до центра кола, якщо $AB = 9$ см.

483.•• У трикутник ABC вписано квадрат так, що дві його сусідні вершини належать стороні AC, а дві інші — сторонам AB і BC відповідно. Знайдіть сторону квадрата, якщо $AC = a$, а висота, проведена до сторони AC, дорівнює h.

484.•• У трикутнику ABC відомо, що $BC = 72$ см, AD — висота, $AD = 24$ см. У даний трикутник вписано прямокутник $MNKP$ так, що вершини M і P належать стороні BC, а вершини N і K — сторонам AB і AC відповідно. Знайдіть сторони прямокутника, якщо $MP : MN = 9 : 5$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

485. Знайдіть кути паралелограма, якщо кут між його висотами, проведеними з однієї вершини, дорівнює: 1) $20°$; 2) $130°$.

486. Два кола із центрами O_1 і O_2, радіуси яких рівні, перетинаються в точках A і B. Відрізок O_1O_2 перетинає дані кола в точках C і D. Доведіть, що чотирикутник $ACBD$ — ромб.

487. Один із кутів прямокутної трапеції дорівнює $135°$, середня лінія — 21 см, а основи відносяться як $5 : 2$. Знайдіть меншу бічну сторону трапеції.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

488. Як два рівних опуклих чотирикутники розрізати на частини, з яких можна скласти паралелограм?

ТЕОРЕМА МЕНЕЛАЯ

Точки, які належать одній прямій, називають **колінеарними**. Дві точки колінеарні завжди.

У цьому оповіданні ви дізнаєтеся про одну знамениту теорему, яка слугує критерієм колінеарності трьох точок. Ця теорема носить ім'я давньогрецького математика й астронома Менелая Александрійського (I–II ст. н. е.).

Теорема Менелая. ***На сторонах AB і BC трикутника ABC позначено відповідно точки C_1 і A_1, а на продовженні сторони AC — точку B_1. Для того щоб точки A_1, B_1, C_1 лежали на одній прямій, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність***

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (*)$$

Доведення. Спочатку доведемо необхідну умову колінеарності: якщо точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій, то виконується рівність (*).

Із вершин трикутника ABC опустимо перпендикуляри AM, BN і CP на пряму C_1B_1 (рис. 153, *а*).

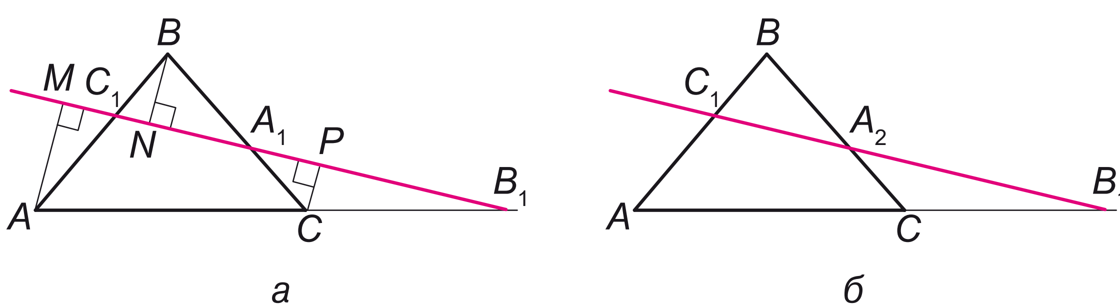


Рис. 153

Оскільки $\angle MC_1A = \angle NC_1B$, то трикутники AMC_1 і BNC_1 подібні за першою ознакою подібності трикутників. Звідси

$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AM}{BN}$. Із подібності трикутників BNA_1 і CPA_1 отримуємо: $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BN}{CP}$. Із подібності трикутників B_1CP і B_1AM випливає рівність $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CP}{AM}$. Перемноживши почленно ліві та праві частини пропорцій $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AM}{BN}$, $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BN}{CP}$, $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CP}{AM}$, отримуємо рівність $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AM}{BN}\cdot\frac{BN}{CP}\cdot\frac{CP}{AM}=1$.

Тепер доведемо достатню умову колінеарності: якщо виконується рівність (*), то точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій.

Нехай пряма C_1B_1 перетинає сторону BC трикутника ABC у деякій точці A_2 (рис. 153, *б*). Оскільки точки C_1, A_2, B_1 лежать на одній прямій, то з доведеного вище можна записати: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$. Зіставляючи цю рівність з рівністю (*), доходимо висновку, що $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BA_2}{A_2C}$, тобто точки A_2 і A_1 ділять відрізок BC в одному й тому самому відношенні, а отже, ці точки збігаються. Звідси випливає, що пряма C_1B_1 перетинає сторону BC у точці A_1. ▲

Зауважимо, що теорема залишається справедливою і тоді, коли точки A_1, B_1, C_1 лежать не на сторонах трикутника ABC, а на їхніх продовженнях (рис. 154).

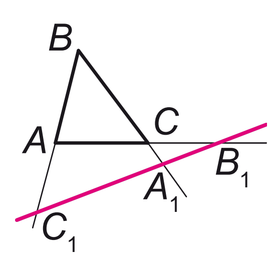


Рис. 154

ВПРАВИ

1. Спільні дотичні до трьох кіл перетинаються в точках A, B і C (рис. 155). Доведіть, що ці точки колінеарні.
Вказівка. Застосуйте теорему Менелая до трикутника $O_1O_2O_3$ та точок A, B, C, які лежать на продовженнях його сторін.

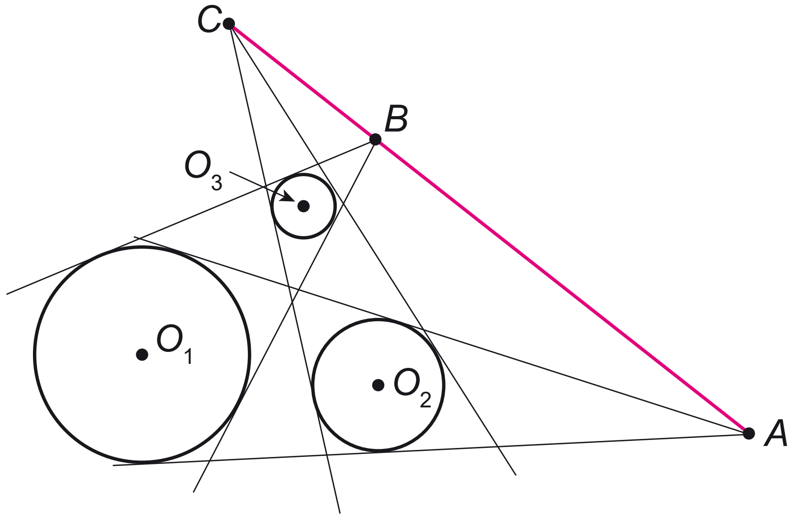


Рис. 155

2. Коло із центром O_1 дотикається до двох кіл із центрами O_2 і O_3 у точках B і A відповідно (рис. 156). Доведіть, що

Карл Фрідріх Гаусс
(1777–1855)
Видатний німецький математик, астроном, фізик, геодезист.
У його творчості органічно поєднувалися дослідження з теоретичної та прикладної математики. Праці Гаусса справили значний вплив на подальший розвиток алгебри, теорії чисел, геометрії, теорії електрики та магнетизму.

точка C — точка перетину спільних дотичних до кіл із центрами O_2 і O_3 — належить прямій AB.

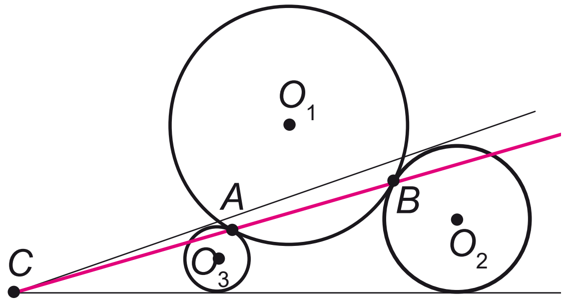


Рис. 156

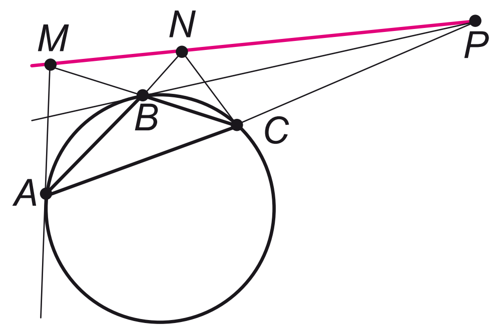


Рис. 157

3. У точках A, B, C проведено дотичні до кола (рис. 157). Доведіть, що точки M, N і P колінеарні.
Вказівка. Застосовуючи теорему Менелая до трикутника ABC, скористайтеся ключовою задачею 3 п. 13.

4. Пряма перетинає сторони AB, BC і продовження сторони AC трикутника ABC відповідно в точках D, E, F. Доведіть, що середини відрізків DC, AE, BF лежать на одній прямій (цю пряму називають *прямою Гаусса*).
Вказівка. Застосуйте теорему Менелая до трикутника, вершини якого є серединами сторін трикутника ABC.

ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ

Теорема Птолемея. ***Добуток діагоналей вписаного в коло чотирикутника дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.***

Доведення. На рисунку 158 зображено вписаний у коло чотирикутник $ABCD$. Доведемо, що $AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AC$.

На діагоналі AC позначимо точку K так, що $\angle 1 = \angle 2$. Кути 3 і 4 рівні як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу.

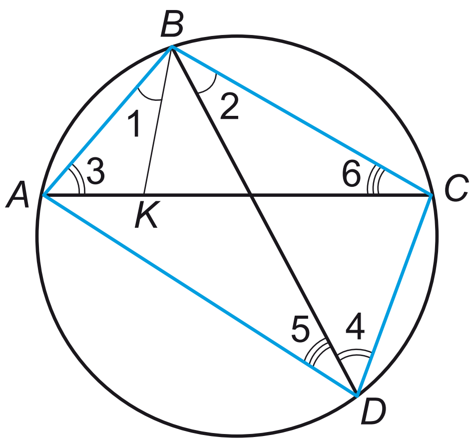


Рис. 158

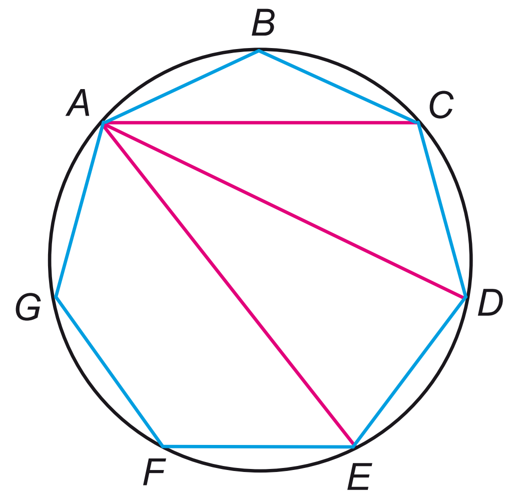


Рис. 159

Отже, трикутники ABK і DBC подібні за першою ознакою подібності трикутників (кути 3 і 4 рівні як вписані, що спираються на одну й ту саму дугу). Звідси $\frac{AB}{BD}=\frac{AK}{DC}$, тобто

$$AB \cdot DC = BD \cdot AK. \qquad (1)$$

Оскільки $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle ABD = \angle KBC$. Кути 5 і 6 рівні як вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу. Тому $\Delta KBC \sim \Delta ABD$. Звідси $\frac{BC}{BD}=\frac{KC}{AD}$, тобто

$$BC \cdot AD = BD \cdot KC. \qquad (2)$$

Клавдій Птолемей

(бл. 100 — бл. 178)

Давньогрецький математик і астроном. Автор геоцентричної моделі Всесвіту. Розробив математичну теорію руху планет, яка дає змогу обчислювати їхнє положення. Створив прообраз сучасної системи координат.

Додавши рівності (1) і (2), отримаємо:

$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AK + BD \cdot KC$, тобто

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD(AK + KC) = BD \cdot AC.$$ ▲

ВПРАВИ

1. Нехай M — довільна точка кола, описаного навколо рівностороннього трикутника ABC. Доведіть, що один із відрізків MA, MB, MC дорівнює сумі двох інших.

2. На колі позначено точки A, B, C, D так, що $\cup AB = \cup BC = \cup CD$. Доведіть, що $AC^2 = AB \cdot (BC + AD)$.

3. На рисунку 159 зображено вписаний у коло семикутник $ABCDEFG$, у якого всі сторони рівні. Доведіть, що $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}$.

14. Друга та третя ознаки подібності трикутників

Теорема 14.1 (друга ознака подібності трикутників: за двома сторонами та кутом між ними). ***Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника та кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.***

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$ і $\angle B = \angle B_1$. Доведемо, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Якщо $k = 1$, то $AB = A_1B_1$ і $BC = B_1C_1$, а отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за першою ознакою рівності трикутників, тому ці трикутники подібні.

Нехай, наприклад, $k > 1$, тобто $AB > A_1B_1$ і $BC > B_1C_1$. На сторонах BA і BC позначимо відповідно точки A_2 і C_2 так, що $BA_2 = A_1B_1$ і $BC_2 = B_1C_1$ (рис.160). Тоді $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$.

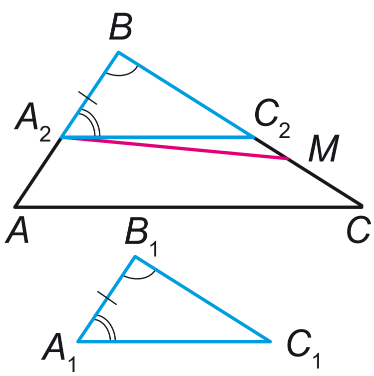


Рис. 160

Покажемо, що $A_2C_2 \parallel AC$. Припустимо, що це не так. Тоді на стороні BC позначимо точку M таку, що $A_2M \parallel AC$. Маємо: $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BM}$. Але $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$, тоді $\frac{BC}{BC_2} = \frac{BC}{BM}$, тобто $BC_2 = BM$. Отже, буквами M і C_2 позначено одну й ту саму точку. Тоді $A_2C_2 \parallel AC$.

За лемою про подібні трикутники отримуємо, що $\Delta ABC \backsim \Delta A_2BC_2$. Трикутники A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$ рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$. ▲

Теорема 14.2 (третя ознака подібності трикутників: за трьома сторонами). ***Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні***.

Доведення. ⊙ Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$. Доведемо, що $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Якщо $k = 1$, то трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників, а отже, ці трикутники подібні.

Нехай, наприклад, $k > 1$. На сторонах BA і BC позначимо відповідно точки A_2 і C_2 такі, що $BA_2 = A_1B_1$, $BC_2 = B_1C_1$ (рис. 161). Тоді $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2} = k$. У трикутниках ABC і A_2BC_2 кут B спільний, прилеглі до нього сторони пропорційні. Отже, за другою ознакою подібності трикутників ці трикутники подібні, причому коефіцієнт подібності дорівнює k. Тоді $\frac{CA}{C_2A_2} = k$. Ураховуючи, що за умовою $\frac{CA}{C_1A_1} = k$, отримуємо: $A_1C_1 = A_2C_2$. Отже, трикутники A_2BC_2 і $A_1B_1C_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників. З урахуванням того, що $\Delta ABC \sim \Delta A_2BC_2$, отримуємо: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. ▲

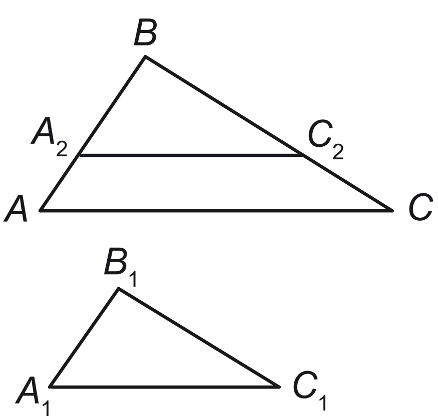


Рис. 161

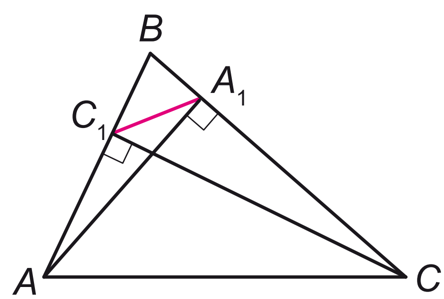


Рис. 162

Задача. Доведіть, що відрізок, який сполучає основи двох висот гострокутного трикутника, відтинає трикутник, подібний даному.

Розв'язання. На рисунку 162 відрізки AA_1 і CC_1 — висоти трикутника ABC. Доведемо, що $\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC$.

У прямокутних трикутниках ABA_1 і CBC_1 гострий кут B спільний. Отже, трикутники ABA_1 і CBC_1 подібні за першою ознакою подібності трикутників.

Звідси $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BA_1}{BC_1}$. Тоді $\dfrac{AB}{BA_1} = \dfrac{BC}{BC_1}$. Кут B спільний для трикутників ABC і A_1BC_1. Отже, трикутники ABC і A_1BC_1 подібні за другою ознакою подібності трикутників. ●

1. Сформулюйте другу ознаку подібності трикутників.
2. Сформулюйте третю ознаку подібності трикутників.

ВПРАВИ

489.° На одній стороні кута A відкладено відрізки AB і AD, а на другій — відрізки AC і AE. Чи подібні трикутники ABC і ADE, якщо $AB = 4$ см, $AD = 20$ см, $AC = 10$ см, $AE = 8$ см?

490.° На сторонах AB і AC трикутника ABC (рис. 163) позначили відповідно точки D і E так, що $AD = \dfrac{4}{7}AC$, $AE = \dfrac{4}{7}AB$. Знайдіть відрізок DE, якщо $BC = 21$ см.

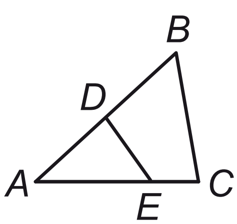


Рис. 163

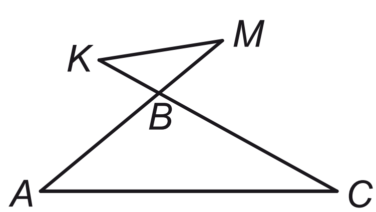


Рис. 164

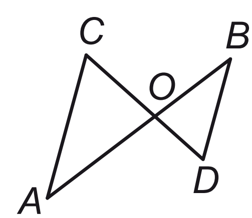


Рис. 165

491.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = 21$ см, $AC = 42$ см, $BC = 28$ см (рис. 164). На продовженнях відрізків AB і BC за точку B відкладено відповідно відрізки BM і BK, $BM = 8$ см, $BK = 6$ см. Знайдіть відрізок KM.

492.° Відрізки AB і CD перетинаються в точці O (рис. 165), $AO = 24$ см, $BO = 16$ см, $CO = 15$ см, $OD = 10$ см, $\angle ACO = 72°$. Знайдіть кут BDO.

493.° На сторонах AC і BC трикутника ABC позначили відповідно точки M і K так, що $CM = 15$ см, $CK = 12$ см. Знайдіть відрізок MK, якщо $AC = 20$ см, $BC = 25$ см, $AB = 30$ см.

494.° Чи подібні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, якщо:
1) $AB = 6$ см, $BC = 10$ см, $AC = 14$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $B_1C_1 = 15$ см, $A_1C_1 = 21$ см;
2) $AB = 1{,}3$ см, $BC = 2{,}5$ см, $AC = 3{,}2$ см, $A_1B_1 = 26$ см, $B_1C_1 = 50$ см, $A_1C_1 = 60$ см?

495.° Чи подібні два трикутники, якщо сторони одного відносяться як 3 : 8 : 9, а сторони другого дорівнюють 24 см, 9 см, 27 см?

496.• У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ відомо, що $\angle A = \angle A_1$, кожна зі сторін AB і AC становить 0,6 сторін A_1B_1 і A_1C_1 відповідно. Знайдіть сторони BC і B_1C_1, якщо їхня сума дорівнює 48 см.

497.• У трикутниках DEF і MKN відомо, що $\angle E = \angle K$, а кожна зі сторін DE і EF у 2,5 раза більша за сторони MK і KN відповідно. Знайдіть сторони DF і MN, якщо їхня різниця дорівнює 30 см.

498.• На сторонах AB і AC трикутника ABC позначили відповідно точки D і E так, що $AD : DB = AE : EC = 3 : 5$. Знайдіть відрізок DE, якщо $BC = 16$ см.

499.• З дерев'яних паличок виготовили три подібні різносторонні трикутники. У кожному з них більшу сторону пофарбували в блакитний колір, а меншу — у жовтий. З блакитних паличок склали один трикутник, а з жовтих — другий. Чи будуть ці трикутники подібні?

500.•• У трикутнику ABC відомо, що $AC = a$, $AB = BC = b$, AM і CK — бісектриси трикутника. Знайдіть відрізок MK.

501.•• У трикутнику ABC відомо, що $AB = 8$ см, $BC = 12$ см, $AC = 16$ см. На стороні AC позначено точку D так, що $CD = 9$ см. Знайдіть відрізок BD.

502.* Із точки A проведено два промені AM і AN. На промені AM позначено точки H і B, а на промені AN — точки C і D так, що $AH \cdot AB = AC \cdot AD$. Доведіть, що точки H, B, C і D лежать на одному колі.

503.* На медіані BM трикутника ABC позначили точку K так, що $\angle MKC = \angle BCM$. Доведіть, що $\angle AKM = \angle BAM$.

504.* Відрізки AB і CD перетинаються в точці M. Відомо, що $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Доведіть, що точки A, B, C і D лежать на одному колі.

505.* На спільній хорді двох кіл, що перетинаються, позначили точку M і через неї провели хорди AB і CD (рис. 166). Доведіть, що $\angle DAB = \angle BCD$.

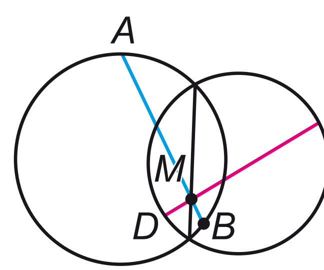


Рис. 166

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

506. Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 46 см, $\angle BAD = \angle ADB$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо периметр трикутника BCD дорівнює 32 см.

507. На діагоналі BD квадрата $ABCD$ позначили точку E так, що $DE = AD$. Через точку E проведено пряму, яка перпендикулярна до прямої BD і перетинає сторону AB у точці F. Доведіть, що $AF = FE = BE$.

508. У трапеції $ABCD$ відомо, що $\angle B = 90°$, $\angle C = 150°$, $BC = 5$ см. Знайдіть сторону CD, якщо висота трапеції, проведена з вершини C, розбиває дану трапецію на трикутник і квадрат.

Поновіть у пам'яті зміст пункту 7 на с. 101 і пункту 17 на с. 107 частини 2 підручника.

СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

509. На колі позначили 999 точок синім олівцем та одну точку червоним олівцем. Яких многокутників з вершинами в позначених точках більше: тих, що містять червону точку, чи тих, що її не містять?

ПРЯМА ЕЙЛЕРА

Точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника — це центр кола, описаного навколо трикутника. Позначимо цю точку буквою O.

Точка перетину бісектрис трикутника — це центр вписаного кола. Позначимо цю точку буквою J.

Точку перетину прямих, які містять висоти трикутника, називають **ортоцентром** трикутника. Позначимо цю точку буквою H.

Точку перетину медіан трикутника називають **центроїдом** трикутника. Позначимо цю точку буквою M.

Точки O, J, H, M називають **чудовими точками** трикутника. Використання такого емоційного епітета цілком обґрунтовано. Адже цим точкам притаманна ціла низка красивих властивостей. Хіба не чудово вже те, що вони є в будь-якому трикутнику?

Розглянемо одну з багатьох теорем про чудові точки трикутника.

Теорема. ***У будь-якому трикутнику центр описаного кола, центроїд і ортоцентр лежать на одній прямій.***

Цю пряму називають **прямою Ейлера**.

Доведення. Для рівнобедреного трикутника твердження, що доводиться, є очевидним.

Якщо даний трикутник ABC прямокутний ($\angle C = 90°$), то його ортоцентр — це точка C, центр описаного кола — середина гіпотенузи AB. Тоді зрозуміло, що всі три точки, про які йдеться в теоремі, належать медіані, проведеній до гіпотенузи.

Доведемо теорему для гострокутного різностороннього трикутника.

Лема. ***Якщо H — ортоцентр трикутника ABC, OM_1 — перпендикуляр, опущений із центра O описаного кола на сторону BC, то $AH = 2OM_1$*** (рис. 167).

Доведення. Виконаємо додаткову побудову, уже знайому вам з розв'язання ключової задачі пункту 2: через кожну вершину трикутника ABC проведемо пряму, паралельну протилежній стороні. Отримаємо трикутник $A_1B_1C_1$ (рис. 167). У зазначеній ключовій задачі було показано, що ортоцентр H трикутника ABC є центром описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$.

Леонард Ейлер
(1707–1783)

Видатний математик, фізик, механік, астроном.

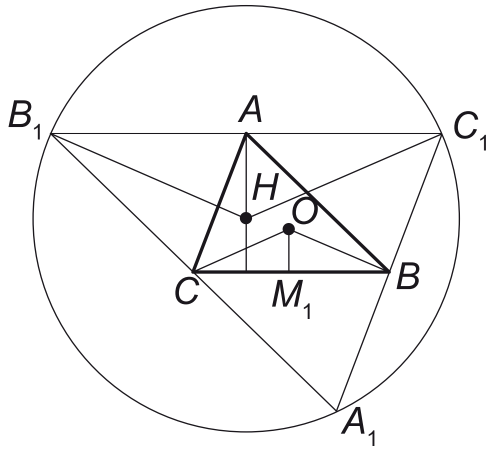


Рис. 167

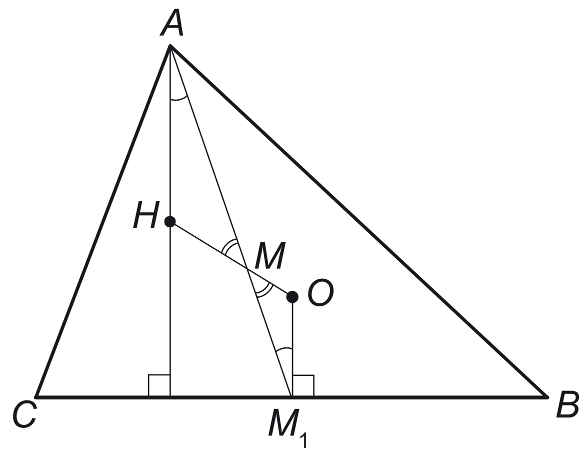


Рис. 168

Для цього кола кут B_1HC_1 є центральним, а кут $B_1A_1C_1$ — вписаним. Оскільки обидва кути спираються на одну й ту саму дугу, то $\angle B_1HC_1 = 2\angle B_1A_1C_1$. Кути BAC і $B_1A_1C_1$ рівні як протилежні кути паралелограма ABA_1C, тому $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\angle B_1A_1C_1 = \angle B_1HC_1$. Оскільки $B_1C_1 = 2BC$, то рівнобедрені трикутники B_1HC_1 і COB подібні з коефіцієнтом подібності 2. Оскільки відрізки AH і OM_1 — відповідні висоти подібних трикутників, то $AH = 2OM_1$.

Доведемо тепер основну теорему.

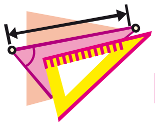
Оскільки точка M_1 — середина сторони BC, то відрізок AM_1 — медіана трикутника ABC (рис. 168). Нехай M — точка перетину відрізків AM_1 і HO. Оскільки $AH \parallel OM_1$, то $\angle HAM = \angle OM_1M$. Кути AMH і M_1MO рівні як вертикальні. Отже, трикутники HAM і OM_1M подібні за першою ознакою подібності трикутників. Звідси $\frac{AM}{MM_1} = \frac{AH}{OM_1} = 2$. Отже, точка M поділяє медіану AM_1 у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини A. Звідси точка M — центроїд трикутника ABC.

Доведення для випадку тупокутного трикутника аналогічне. ▲

Звернемо увагу на те, що ми не лише встановили факт належності точок O, M, H одній прямій, а й довели рівність

$$HM = 2MO,$$

яка є ще однією властивістю чудових точок трикутника.



ВПРАВИ

1. Дано дві точки, які лежать в одній півплощині відносно даної прямої. Побудуйте трикутник, одна зі сторін якого лежить на даній прямій, а центр описаного кола та ортоцентр є двома даними точками.

2. Побудуйте трикутник ABC за трьома даними точками: вершиною A, ортоцентром H і центром O описаного кола.

3. Бісектриса кута A гострокутного трикутника ABC перпендикулярна до прямої Ейлера цього трикутника. Доведіть, що $\angle A = 60°$.

Вказівка. Доведіть, що $HA = OA$.

ЗАВДАННЯ № 2 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

1. На рисунку 169 $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = \frac{1}{2}A_1A_3$.

Звідси випливає, що:

А) $A_1A_2 = B_1B_2$;
Б) $B_1B_3 = 2B_2B_3$;
В) $A_1A_3 = B_1B_3$;
Г) $A_1A_2 = B_2B_3$.

2. Якщо медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці M, то яка з даних рівностей є правильною для будь-якого трикутника ABC?

А) $AM : MB_1 = BM : MA_1$;
Б) $MA_1 = \frac{1}{3}MB$;
В) $MA_1 = \frac{1}{2}AM$;
Г) $MB_1 = \frac{1}{2}BB_1$.

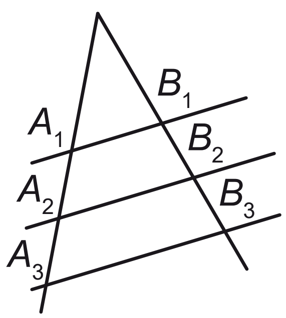


Рис. 169

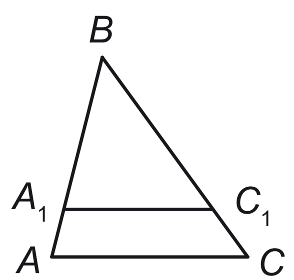


Рис. 170

3. На рисунку 170 $A_1C_1 \parallel AC$. Тоді:

А) $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BA_1}{A_1A}$;
Б) $\frac{BA_1}{AB} = \frac{CB}{BC_1}$;
В) $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$;
Г) $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BA_1}{AB}$.

4. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 8$ см, $BC = 4$ см, $AC = 9$ см. У якому відношенні центр вписаного кола ділить бісектрису BB_1, рахуючи від вершини B?

А) 2 : 3; Б) 2 : 1; В) 4 : 3; Г) 3 : 4.

5. Через точку M сторони BC паралелограма $ABCD$ проведено пряму, яка паралельна стороні CD. Ця пряма перетинає відрізки BD і AD у точках K і F відповідно. Відомо, що $BM : FD = 2 : 1$. Чому дорівнює відношення $KD : BK$?

А) 2 : 1; Б) 1 : 2; В) 1 : 3; Г) 4 : 1.

6. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 14$ см, $BC = 21$ см. На стороні AB на відстані 4 см від вершини A позначено точку D, через яку проведено пряму, паралельну стороні AC. Знайдіть відрізки, на які ця пряма ділить сторону BC.

А) 12 см, 9 см; В) 15 см, 6 см;

Б) 18 см, 3 см; Г) 14 см, 7 см.

7. Відрізок MN проведено через точку перетину діагоналей нерівнобедреної трапеції $ABCD$ паралельно її основам (рис. 171). Скільки пар подібних трикутників зображено на рисунку?

А) 4; Б) 6; В) 3; Г) 5.

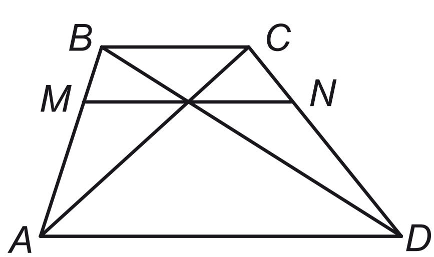


Рис. 171

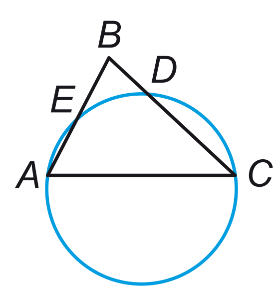


Рис. 172

8. Через вершини A і C нерівнобедреного трикутника ABC проведено коло, яке перетинає сторони BA і BC у точках E і D відповідно (рис. 172). Яка з даних рівностей є правильною?

А) $\frac{BC}{BD} = \frac{BA}{BC}$; В) $\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC}$;

Б) $\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA}$; Г) $\frac{BD}{DE} = \frac{BC}{AC}$.

9. Хорда AB перетинає хорду CD у її середині та ділиться цією точкою на відрізки, які дорівнюють 4 см і 25 см. Знайдіть хорду CD.

А) 10 см; Б) 5 см; В) 100 см; Г) 20 см.

10. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 10$ см, $BC = 4$ см, $CA = 8$ см. На стороні AC позначено точку D таку, що $AD = 6$ см. Знайдіть відрізок BD.

А) 5 см; Б) 4 см; В) 6 см; Г) 7 см.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Теорема Фалеса

Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки й на другій його стороні.

Теорема про пропорційні відрізки

Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута, то відрізки, що утворилися на одній стороні кута, пропорційні відповідним відрізкам, що утворилися на другій стороні кута.

Властивість медіан трикутника

Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини трикутника.

Властивість бісектриси трикутника

Бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.

Подібні трикутники

Два трикутники називають подібними, якщо їхні кути відповідно рівні та сторони одного трикутника пропорційні відповідним сторонам другого трикутника.

Лема про подібні трикутники

Пряма, яка паралельна стороні трикутника та перетинає дві інших його сторони, відтинає від даного трикутника йому подібний.

Перша ознака подібності трикутників: за двома кутами

Якщо два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

Друга ознака подібності трикутників: за двома сторонами та кутом між ними

Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника та кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.

Третя ознака подібності трикутників: за трьома сторонами

Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

ДРУЖИМО З КОМП'ЮТЕРОМ

У 7 класі ви вже користувалися комп'ютером під час вивчення геометрії. У 8 класі ви вивчатимете більш складні геометричні фігури, а отже, зможете вдосконалити свої вміння, опанувавши складніші інструменти графічних пакетів.

Нагадаємо, що, крім завдань, наведених у цьому розділі, ви зможете застосовувати різноманітні програми, призначені спеціально для засвоєння шкільного курсу геометрії. Ви можете звертатися до глобальної мережі Інтернет для пошуку цих програм та іншої потрібної вам інформації.

У цьому розділі наведено завдання, які ви зможете виконувати за допомогою комп'ютера в міру вивчення відповідних тем. Більшість із них — завдання на побудову геометричних фігур, для яких ви застосовуватимете певний графічний редактор. Крім цих завдань, ви можете виконувати завдання з рубрики «Практичні завдання» та розв'язувати задачі на побудову не лише в зошиті, а й за допомогою комп'ютера. У 7 класі ви дізналися, що в геометрії побудови проводять за допомогою лінійки та циркуля. Тому вам потрібно знайти серед інструментів графічного редактора ті, що виконують функції лінійки та циркуля.

1. Чотирикутник та його елементи

1. Побудуйте чотирикутники, що ілюструватимуть теоретичні відомості цього параграфа.

2. Паралелограм. Властивості паралелограма

2. Визначте, якими властивостями паралелограма треба скористатися, щоби правильно зобразити цю фігуру. Які інструменти графічного редактора треба для цього застосувати? Нарисуйте паралелограм і побудуйте дві його висоти, що виходять з однієї вершини. Який інструмент ви використаєте, щоб опустити висоту на задану сторону?

3. Ознаки паралелограма

3. Уявіть собі, що зображено чотирикутник. У який спосіб ви можете перевірити, чи є він паралелограмом? Якими інструментами графічного редактора можна для цього скористатися?

4. Прямокутник

4. Знайдіть у графічному редакторі засіб, що дає змогу швидко будувати різні прямокутники.

5. Ромб

5. Яка властивість ромба дає змогу швидко й правильно побудувати ромб?

6. Побудуйте два перпендикулярних відрізки, що перетинаються. Уявіть собі, що вони є діагоналями чотирикутника, і побудуйте цей чотирикутник. Чи обов’язково ви отримаєте ромб? Якою умовою треба доповнити це завдання, щоб отриманий чотирикутник неодмінно виявився ромбом?

6. Квадрат

7. Знайдіть у графічному редакторі засіб, який дає змогу швидко будувати різні квадрати.

7. Середня лінія трикутника

8. Який інструмент графічного редактора ви використаєте, щоб знайти середину відрізка?

9. Нарисуйте довільний чотирикутник. Виконайте побудову, яка проілюструє ключову задачу п. 7. Як ви перевірите, що відрізки, які сполучають середини сторін даного чотирикутника, утворили паралелограм?

8. Трапеція

10. Побудуйте трапецію. Якими інструментами графічного редактора ви скористаєтеся, щоб забезпечити паралельність сторін трапеції? щоби побудувати рівнобічну трапецію? щоби побудувати прямокутну трапецію?

9. Центральні та вписані кути

11. Нарисуйте коло та побудуйте кілька вписаних кутів, які спираються на одну й ту саму дугу. Користуючись інструментами графічного редактора, визначте їхні градусні міри.

12. Нарисуйте коло, побудуйте центральний і вписаний кути, які спираються на одну й ту саму дугу. Перевірте, як співвідносяться величини цих кутів.

10. Описане та вписане кола чотирикутника

13. Знайдіть оптимальний спосіб побудови рисунків, на яких мають бути зображені коло, вписані в коло та описані навколо кола чотирикутники. Яка властивість дотичної до кола дає змогу правильно зобразити описаний чотирикутник?

11. Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки

14. Побудуйте рисунки, що ілюструють теорему Фалеса та теорему про пропорційні відрізки. Виміряте довжини потрібних відрізків і перевірте, чи виконуються для них твердження цих теорем. Наскільки точно можна виміряти відрізки засобами графічного редактора, яким ви користуєтеся?

15. Уявіть собі, що у вашому графічному редакторі немає інструмента, який дає змогу будувати паралельні прямі. Як ви можете побудувати паралельні прямі, спираючись на теорему Фалеса?

12. Подібні трикутники

16. Опануйте інструменти графічного редактора, які дають змогу зображати фігури, що мають однакову форму, але різні розміри. Побудуйте за допомогою цих інструментів подібні трикутники.

17. Побудуйте графічну ілюстрацію до леми про подібні трикутники. Користуючись зазначеними інструментами, покажіть, що зображені трикутники справді є подібними.

13. Перша ознака подібності трикутників

18. Побудуйте два відрізки різної довжини. Уявіть собі, що це відповідні сторони подібних трикутників. Узявши перший із цих відрізків як сторону, побудуйте довільний трикутник. Побудуйте подібний йому трикутник, узявши другий відрізок як його сторону; застосуйте для цього першу ознаку подібності трикутників.

14. Друга та третя ознаки подібності трикутників

19. Придумайте самостійно та виконайте завдання, яке дало б змогу за допомогою комп’ютера продемонструвати другу та третю ознаки подібності трикутників.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

§ 1. Чотирикутники

1. Чотирикутник та його елементи

14. 18 см, 12 см, 6 см, 27 см. **15.** 10 см, 8 см, 16 см, 30 см. **20.** 1) $72°$, $130°$, $78°$, $80°$; 2) $22°$, $230°$, $28°$, $80°$. **22.** 10 см. **26.** *Вказівка*. Побудуйте трикутник за двома сусідніми сторонами чотирикутника та відомим кутом між ними. Третя сторона цього трикутника є діагоналлю шуканого чотирикутника. **29.** *Вказівка*. Побудуйте трикутник ABC за двома сторонами AB і BC та кутом B між ними. У трикутнику ACD відомо сторону AC, прилеглий кут CAD ($\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC$) і суму сторін AD і CD. Побудову трикутника за стороною, прилеглим кутом і сумою двох інших його сторін було розглянуто в курсі геометрії 7 класу. **34.** $32°$.

2. Паралелограм. Властивості паралелограма

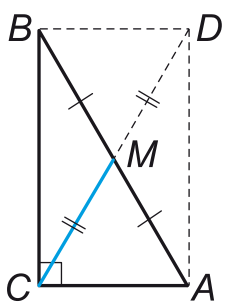
49. $90°$. **53.** 9 см, 14 см. **57.** $AB = BC = CD = AD = 6$ см. **58.** 32 см. **59.** $45°$, $135°$. **60.** 6 см, 12 см. **64.** 80 см. **65.** 9 см, 24 см. **66.** 20 см, 24 см. **67.** 6 см. **68.** $48°$, $132°$. **71.** 40 см. **72.** 5 см, 9 см. **74.** 25 см. **77.** 3. **78.** 2 : 1. **79.** $72°$, $108°$. **82.** *Вказівка*. Шукана точка є точкою перетину висот трикутника ABC. **84.** *Вказівка*. Доведіть, що $\Delta MAD = \Delta DKC = \Delta MBK$. **85.** *Вказівка*. Побудуйте паралелограм, одна вершина якого збігається з вершиною даного кута, дві інші вершини лежать на сторонах кута, а точка перетину діагоналей паралелограма збігається з даною точкою. **86.** 24 см або 14 см.

3. Ознаки паралелограма

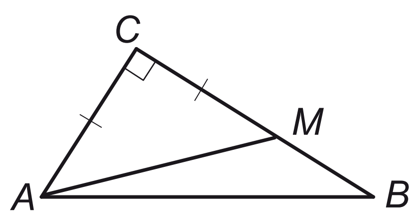
108. $32°$. **109.** 16 см.

4. Прямокутник

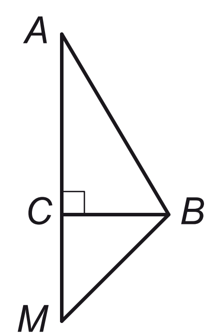
119. 6 см, 12 см. **120.** 5 см, 10 см. **121.** 15 см, 25 см. **122.** 12 см. **124.** *Вказівка*. Нехай *CM* — медіана прямокутного трикутника *ABC*, проведена до гіпотенузи *AB* (див. рисунок). На продовженні відрізка *CM* за точку *M* відкладіть відрізок *MD*, який дорівнює *CM*. Визначте вид чотирикутника *ACBD* і скористайтеся властивостями чотирикутників такого виду. **127.** 30°, 60°. *Вказівка*. Покажіть, що в прямокутному трикутнику *ABM* гіпотенуза *AM* у 2 рази більша за катет *BM*. **128.** 4,5 см.



До задачі 124



До задачі 131



До задачі 160

131. 1) *Вказівка*. Задача зводиться до побудови прямокутного трикутника за гіпотенузою та різницею катетів. На рисунку зображено прямокутний трикутник *ACB*, у якому відомо гіпотенузу *AB* і різницю катетів. На катеті *BC* позначено точку *M* так, що $CM = AC$. Тоді $BM = BC - AC$. Звідси $\angle AMB = 135°$. Отже, можна побудувати трикутник *AMB* за сторонами *AB* і *MB* та кутом *AMB*. **132.** 48°. **133.** 90°. **134.** Трикутник *ACE* рівнобедрений.

5. Ромб

157. 6 см. **160.** 1) *Вказівка*. Задача зводиться до побудови прямокутного трикутника за сумою катетів і гострим кутом. На рисунку зображено прямокутний трикутник *ABC*, у якому відомо кут A та суму катетів AC і CB. Тоді $AM = AC + CB$, $\angle CMB = 45°$. Трикутник AMB можна побудувати за стороною AM і двома прилеглими кутами. **161.** *Вказівка*. Середина відрізка NK — точка O є точкою перетину діагоналей ромба. Тоді пряма MO паралельна сторонам BC і AD. Довжина відрізка MO дорівнює половині сторони ромба. **163.** 30°, 72°, 78°; 18 см.

6. Квадрат

174. 28 см. **177.** 48 см. **180.** *Вказівка*. Доведіть, що $AC \perp MK$. **181.** *Вказівка*. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою MK. **182.** *Вказівка*. Побудуйте два прямокутних трикутники, у кожному з яких один катет дорівнює стороні квадрата, а гіпотенузи є даними відрізками. Доведіть рівність цих трикутників. **184.** *Вказівка*. Побудуйте рівносторонній трикутник BO_1C так, щоб точка O_1 належала квадрату. Покажіть, що $\angle O_1AD = \angle O_1DA = 15°$. Звідси випливає, що точки O і O_1 збігаються. **185.** *Вказівка*. На продовженні відрізка CD за точку D позначте точку M_1 так, щоб $DM_1 = BM$. Доведіть, що $\angle EAM_1 = \angle EM_1A$.

7. Середня лінія трикутника

202. 28 см. **206.** $MK = 4$ см. *Вказівка*. Проведіть середню лінію трикутника ABC. **207.** 9 см. *Вказівка*. Розгляньте трикутник, для якого відрізок MK є середньою лінією. **210.** *Вказівка*. Нехай точки M, K і F — середини відрізків AB, AD і AC відповідно. Визначте, яким прямим належать висоти трикутника MKF. **211.** *Вказівка*. Нехай точки E, F і K — середини відрізків AC, BC і BD відповідно. Доведіть, що трикутник EFK рівнобедрений. **213.** 37°. **214.** 8 см.

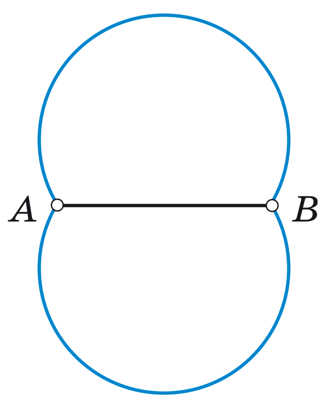
8. Трапеція

234. 16 см, 34 см. **236.** 16 см. **237.** 50°, 60°. **239.** 28 см. **247.** 7,2 см, 10,8 см. **249.** $2h$. **250.** 8 см, 20 см, 20 см, 20 см. **251.** 12 см, 12 см, 12 см. **252.** 60°, 120°. **253.** 8 см, 16 см. **254.** 60°, 120°. **255.** Якщо гострий кут трапеції дорівнює 45°. **260.** 7 см. **261.** 13 см, 21 см. **264.** $\frac{3a}{4}$. **265.** 72°, 108°. **266.** 8 см. *Вказівка*. Проведіть через вершину C пряму, паралельну прямій BD. Нехай E — точка перетину проведеної прямої з прямою AD. Розгляньте трикутник ACE. **267.** *Вказівка*. Точка перетину бісектрис — вершина прямокутного трикутника, гіпотенузою якого є бічна сторона трапеції. Розгляньте медіану цього трикутника, проведену до гіпотенузи, і доведіть, що вона паралельна основам трапеції. **268.** 1) *Вказівка*. Через одну з вершин меншої основи проведіть пряму, паралельну бічній стороні трапеції. Задачу зведено до побудови трикутника за трьома сторонами; 2) *Вказівка*. Через одну з вершин меншої основи проведіть пряму, паралельну діагоналі трапеції. Задачу зведено до побудови трикутника за двома сторонами та висотою, проведеною до третьої сторони. **271.** $a + b$. *Вказівка*. Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма. Проведіть перпендикуляри AM, OK і CE до прямої, яка проходить через точку B, і покажіть, що $OK = \frac{a+b}{2}$. **275.** 1) 120°; 2) 120°.

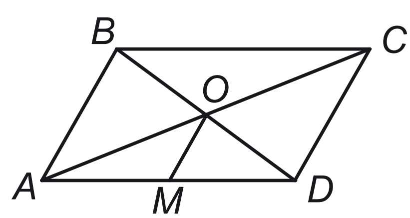
9. Центральні та вписані кути

297. *Вказівка*. Проведіть хорду BC і скористайтеся тим, що кут AMC — зовнішній кут трикутника BMC. **298.** *Вказівка*. Проведіть хорду BC і скористайтеся тим, що кут ABC — зовнішній кут трикутника BMC. **299.** 10°. **300.** 40°, 40°, 100°.

301. 120°, 20°, 40°. **306.** 56°, 56°, 68°. **308.** *Вказівка*. Опустіть із вершин A і B висоти трикутника ABC. **309.** *Вказівка*. Через спільну точку кіл проведіть їхню спільну дотичну. Скориставшись ключовою задачею п. 9, доведіть, що розглядувані хорди паралельні спільній дотичній. **310.** *Вказівка*. $\angle MBD = \angle MBC + \angle CBD = \angle MBA + \angle BAC = \angle BMD$. **311.** Шукане ГМТ — дві дуги, зображені на рисунку, за винятком точок A і B. *Вказівка*. Проведіть два промені AC і BC так, що $\angle BAC = \angle ABC = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Нехай ці промені перетинаються в точці C. Очевидно, що $\angle ACB = \alpha$. Опишіть коло навколо трикутника ABC. Виконавши аналогічну побудову в іншій півплощині відносно прямої AB, отримайте трикутник ABC_1, навколо якого теж опишіть коло. Дуги ACB і AC_1B, за винятком точок A і B, є шуканим ГМТ. **313.** *Вказівка*. Скористайтеся результатами задачі 311.

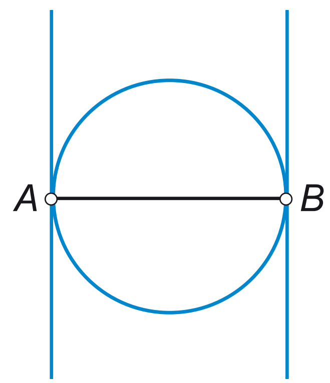


До задачі 311

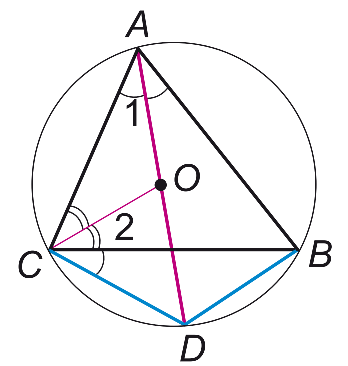


До задачі 314

314. *Вказівка*. Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, точка M — середина сторони AD (див. рисунок). Тоді $OM = \frac{1}{2}AB$. Трикутник AOD можна побудувати (див. задачу 313). **316.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 1 п. 9. **317.** Шукане ГМТ виділено на рисунку синім кольором (див. рисунок). **318.** *Вказівка*. $\angle DCB = \angle DAB = 1$ (див. рисунок). Тоді $\angle OCD = \angle 1 + \angle 2$, $\angle COD = \angle 1 + \angle ACO$. Проте $\angle ACO = \angle 2$. Отже, $\angle OCD = \angle COD$.

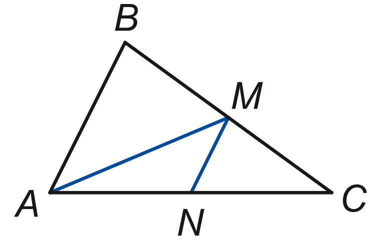


До задачі 317



До задачі 318

319. *Вказівка*. Нехай відрізки AA_1 і CC_1 перетинаються в точці M. Обчисліть кут C_1MB_1, скориставшись результатами задачі 297. **320.** *Вказівка*. Побудуйте коло із центром у точці O_1 і радіусом, який дорівнює різниці радіусів даних кіл. Проведіть через точку O_2 дотичну до побудованого кола. **321.** 1) *Вказівка*. Нехай точка O — центр вписаного кола трикутника ABC, у якому відомо кут B і сторону AC. Доведіть, що $\angle AOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B$. У трикутнику AOC відомо сторону AC, кут AOC і висоту, проведену з вершини O (радіус вписаного кола). Далі див. задачу 312; 2) *Вказівка*. На рисунку зображено трикутник ABC, у якому відомо сторону AC, кут B і медіану, проведену до сторони BC. Проведіть середню лінію MN трикутника ABC. Тоді $\angle NMC = \angle B$. Побудуйте ГМТ точок X таких, що $\angle NXC = \angle B$. **322.** 9 см, 10 см, 11 см. **323.** $P_1 + P_2 + P_3$. **324.** Прямокутний або рівнобедрений.



До задачі 321 (1)

10. Описане та вписане кола чотирикутника

342. 90°. **343.** 6 см. **347.** 88°, 74°, 92°, 106°. **348.** 62°, 118°. **350.** 196 см. **351.** 6 см. **352.** 60°, 120°. **353.** $\frac{d}{2}$. *Вказівка*. Доведіть, що кут між діагоналлю та більшою основою трапеції дорівнює 60°. Далі скористайтеся ключовою задачею п. 8. **354.** 6 см. *Вказівка*. Доведіть, що центр кола, описаного навколо трапеції, є серединою більшої основи. **355.** *Вказівка*. Опишіть коло навколо чотирикутника *CMKB*. **357.** 30°. *Вказівка*. Доведіть, що навколо чотирикутника *AMOK* можна описати коло, і скористайтеся тим, що бісектриси трикутника перетинаються в одній точці. **358.** 60°. *Вказівка*. Позначивши $\angle N = \alpha$, виразіть через α кут *AOB*. **359.** *Вказівка*. Доведіть, що навколо чотирикутника *ACBO* можна описати коло. **360.** *Вказівка*. Доведіть, що кут *CPB* не змінює своєї величини. **361.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що в прямокутних трикутниках *APK* і *AMQ* гострі кути *APQ* і *AMQ* рівні. **362.** *Вказівка*. Точки *A*, *C*, A_1 і C_1 лежать на колі з діаметром *AC*. Скористайтеся тим, що серединний перпендикуляр хорди проходить через центр кола. **363.** *Вказівка*. Доведіть, що середня лінія даної трапеції дорівнює сумі радіусів побудованих кіл. **366.** 128°.

§ 2. Подібність трикутників

11. Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки

386. 30 см. **388.** 12 см. **389.** 4 см. **390.** 6 см, 45°. **392.** 20 см, 24 см. **393.** 5 см, 10 см. **395.** 8 см, 12 см. **397.** 6 см, 5 см, 6 см. **398.** 15 см, 12 см, 21 см. **399.** 15 см. **402.** 45 см. **404.** 21 см, 15 см. **405.** 45 см, 18 см. **406.** 30 см, 50 см.

407. 7 : 9. **408.** 3 : 5. **409.** 9 см. **410.** 50 см. **411.** 3 : 5. *Вказівка*. Проведіть через точку K пряму, паралельну прямій AM. **412.** 1) 3 : 7. *Вказівка*. Проведіть через точку M пряму, паралельну прямій BK; 2) 2 : 3. *Вказівка*. Проведіть через точку K пряму, паралельну прямій CM. **413.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що середня лінія трапеції ділить діагональ навпіл. **415.** 2) *Вказівка*. Нехай дано кут ABC. Проведіть пряму OK, паралельну променю BC (точка K належить стороні AB). На промені KA позначте точку M таку, що $MK : KB = 2 : 3$. **416.** 3) *Вказівка*. Побудуйте прямокутний трикутник BDK, у якому катет BD дорівнює даній висоті, а гіпотенуза BK — даній медіані. За даним кутом і кутом BKD знайдіть кут між двома медіанами трикутника; 4) *Вказівка*. Нехай ABC — шуканий трикутник, медіани AA_1, BB_1 і CC_1 якого перетинаються в точці M. На промені MB_1 позначте точку F так, щоб $MB_1 = B_1F$. Трикутник MCF можна побудувати за трьома сторонами. **417.** 2) *Вказівка*. Нехай ABC — шуканий трикутник, медіани AA_1 і CC_1 якого перетинаються в точці M. Трикутник AMC можна побудувати за двома сторонами та висотою, проведеною до третьої сторони. **419.** *Вказівка*. Проведіть через точку C пряму, паралельну прямій BD. Нехай проведена пряма перетинає сторону AB у точці E. Доведіть, що $BC = BE$, і скористайтеся теоремою про пропорційні відрізки. **420.** a. **421.** 11 см.

12. Подібні трикутники

432. 33 м. **439.** 6 см. **440.** 9 см. **441.** 40 см, 60 см. **442.** 36 см. **443.** 8 см. **444.** 4,8 см. *Вказівка*. Через вершину A проведіть пряму, паралельну прямій BD. **445.** 6 см, 12 см. **446.** 36 см. **447.** 1) 30°, 30°, 120°; 2) 30°, 60°, 90°.

13. Перша ознака подібності трикутників

463. 6 см, 30 см. **464.** 10,5 см, 13,5 см. **467.** 42 см. **468.** 10 см, 14 см. **469.** 12,5 см, 3,5 см. **471.** 12 м. **475.** 24 см. **476.** 16 см. **477.** 16 см. **478.** 5 см. *Вказівка*. Проведіть через точку P діаметр кола та скористайтеся ключовою задачею 2 п. 13. **479.** 10 см. **480.** 27 см. **481.** 2) 36 см. **482.** 10 см. **483.** $\frac{ah}{a+h}$. **484.** 27 см, 15 см. **485.** 1) 20°, 160°; 2) 50°, 130°. **487.** 18 см.

14. Друга та третя ознаки подібності трикутників

496. 18 см, 30 см. **497.** 50 см, 20 см. **498.** 6 см. **500.** $\frac{ab}{a+b}$. *Вказівка*. Доведіть, що $\Delta KBM \backsim \Delta ABC$ із коефіцієнтом подібності $\frac{b}{a+b}$. **501.** 6 см. *Вказівка*. Доведіть, що $\Delta ABC \backsim \Delta BDC$. **502.** *Вказівка*. Доведіть, що $\Delta AHC \backsim \Delta ABD$ за другою ознакою подібності трикутників. Звідси $\angle ACH = \angle ABD$. **503.** *Вказівка*. Доведіть, що з подібності трикутників BMC і CMK випливає подібність трикутників ABM і KAM. **505.** *Вказівка*. Нехай кола перетинаються в точках E і F. Для двох пар хорд AB і EF, CD і EF застосуйте ключову задачу 2 п. 13. **506.** 9 см, 14 см. **508.** 10 см.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

Номер завдання	Номер задачі									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	Б	Г	А	А	В	В	Г	А	В	В
2	Б	В	В	В	Б	В	Г	Б	Г	А

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Бічна сторона трапеції 58

Вершини чотирикутника 9
— — протилежні 9
— — сусідні 9
Висота паралелограма 20
— трапеції 59
Відношення двох відрізків 103
Властивість бісектриси трикутника 106
Властивості квадрата 49
— кутів, вписаних у коло 73
— паралелограма 19
— прямокутника 40
— рівнобічної трапеції 61
— ромба 44

Градусна міра дуги кола 71

Діагональ чотирикутника 10
Дуга кола 70

Квадрат 49
Кінець дуги 71
Коефіцієнт подібності 116
Коло, вписане в чотирикутник 86
—, описане навколо чотирикутника 84
Кут, вписаний у коло 72
— кола центральний 70
— чотирикутника 10
Кути при основі трапеції 58

Лема про подібні трикутники 116

Ознаки паралелограма 30
— подібності трикутників 123, 137
— прямокутника 40
— ромба 45
Основа трапеції 58

Паралелограм 19
Периметр чотирикутника 10
Півколо 71
Подібні трикутники 115
Прямокутник 39

Ромб 44

Середня лінія трапеції 60
— — трикутника 53
Сторони відповідні 115
— чотирикутника 9
— — протилежні 9
— — сусідні 9
Сума кутів чотирикутника 11
Сусідні відрізки 8

Теорема про пропорційні відрізки 103
— Фалеса 102
Трапеція 58
— прямокутна 59
— рівнобічна 59

Чотирикутник 9
—, вписаний у коло 84
— неопуклий 10
—, описаний навколо кола 87
— опуклий 10

ЗМІСТ

Від авторів 3
Умовні позначення 6

§ 1. Чотирикутники 7

1. Чотирикутник та його елементи 8
   - Дерзайте! 18
2. Паралелограм. Властивості паралелограма 19
3. Ознаки паралелограма 30
   - Необхідно і достатньо 37
4. Прямокутник 39
5. Ромб 44
6. Квадрат 49
7. Середня лінія трикутника 53
8. Трапеція 58
9. Центральні та вписані кути 70
   - Перша задача першої Всеукраїнської олімпіади юних математиків 83
10. Описане та вписане кола чотирикутника 84

Завдання № 1 «Перевірте себе» в тестовій формі 95
Головне в параграфі 1 97

§ 2. Подібність трикутників 101

11. Теорема Фалеса. Теорема про пропорційні відрізки 102
12. Подібні трикутники 115

13. Перша ознака подібності трикутників 123
- Теорема Менелая 132
- Теорема Птолемея 135

14. Друга та третя ознаки подібності трикутників 137
- Пряма Ейлера 143

Завдання № 2 «Перевірте себе» в тестовій формі..... 147

Головне в параграфі 2 149

Дружимо з комп'ютером 151

Відповіді та вказівки до вправ 155

Відповіді до завдань «Перевірте себе» в тестовій формі 164

Предметний покажчик 165

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ
Підручник для осіб з особливими освітніми потребами
(Н 54.1 – Н 54.2)
8 клас
(у 2-х частинах)

ЧАСТИНА 1

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

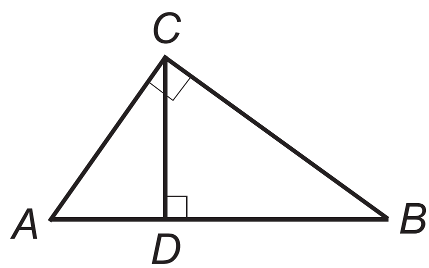
Відповідальна за випуск *Г. Ф. Висоцька*
Редактор *Т. Є. Цента*
Обкладинка *Д. В. Висоцький*
Макет, художнє оформлення,
комп'ютерна обробка ілюстрацій *Д. В. Висоцький*
Технічний редактор *О. В. Гулькевич*
Комп'ютерна верстка *С. І. Северин*
Коректор *А. Ю. Вєнза*

Формат 84×108/16. Ум. друк. арк. 17,64. Обл.-вид. арк. 7,73.
Тираж 1715 прим. Вид. № 84. Зам. №

ТОВ ТО «Гімназія», вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua, www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано в друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052, Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ В ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ



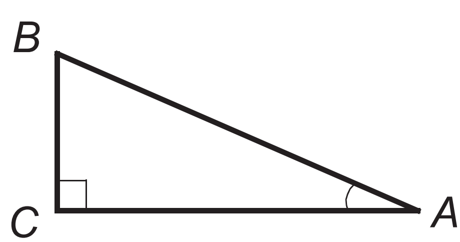
$AB^2 = AC^2 + BC^2$ (теорема Піфагора)

$CD^2 = AD \cdot DB$

$AC^2 = AB \cdot AD$

$BC^2 = AB \cdot DB$

СИНУС, КОСИНУС І ТАНГЕНС ГОСТРОГО КУТА ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА



$\sin A = \dfrac{BC}{AB}$ $\cos A = \dfrac{AC}{AB}$

$\operatorname{tg} A = \dfrac{BC}{AC}$

	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

Друковані літери		Назви літер
A	a	а
B	b	бе
C	c	це
D	d	де
E	e	е
F	f	еф
G	g	ге
H	h	аш
I	i	і
J	j	йот
K	k	ка
L	l	ель
M	m	ем
N	n	ен
O	o	о
P	p	пе
Q	q	ку
R	r	ер
S	s	ес
T	t	те
U	u	у
V	v	ве
W	w	дубль-ве
X	x	ікс
Y	y	ігрек
Z	z	зет

ГРЕЦЬКИЙ АЛФАВІТ

Друковані літери		Назви літер
Α	α	альфа
Β	β	бета
Γ	γ	гамма
Δ	δ	дельта
Ε	ε	епсилон
Ζ	ζ	дзета
Η	η	ета
Θ	θ, ϑ	тета
Ι	ι	йота
Κ	κ	каппа
Λ	λ	ламбда
Μ	μ	мю
Ν	ν	ню
Ξ	ξ	ксі
Ο	ο	омікрон
Π	π	пі
Ρ	ρ	ро
Σ	σ	сигма
Τ	τ	тау
Υ	υ	іпсилон
Φ	φ	фі
Χ	χ	хі
Ψ	ψ	псі
Ω	ω	омега