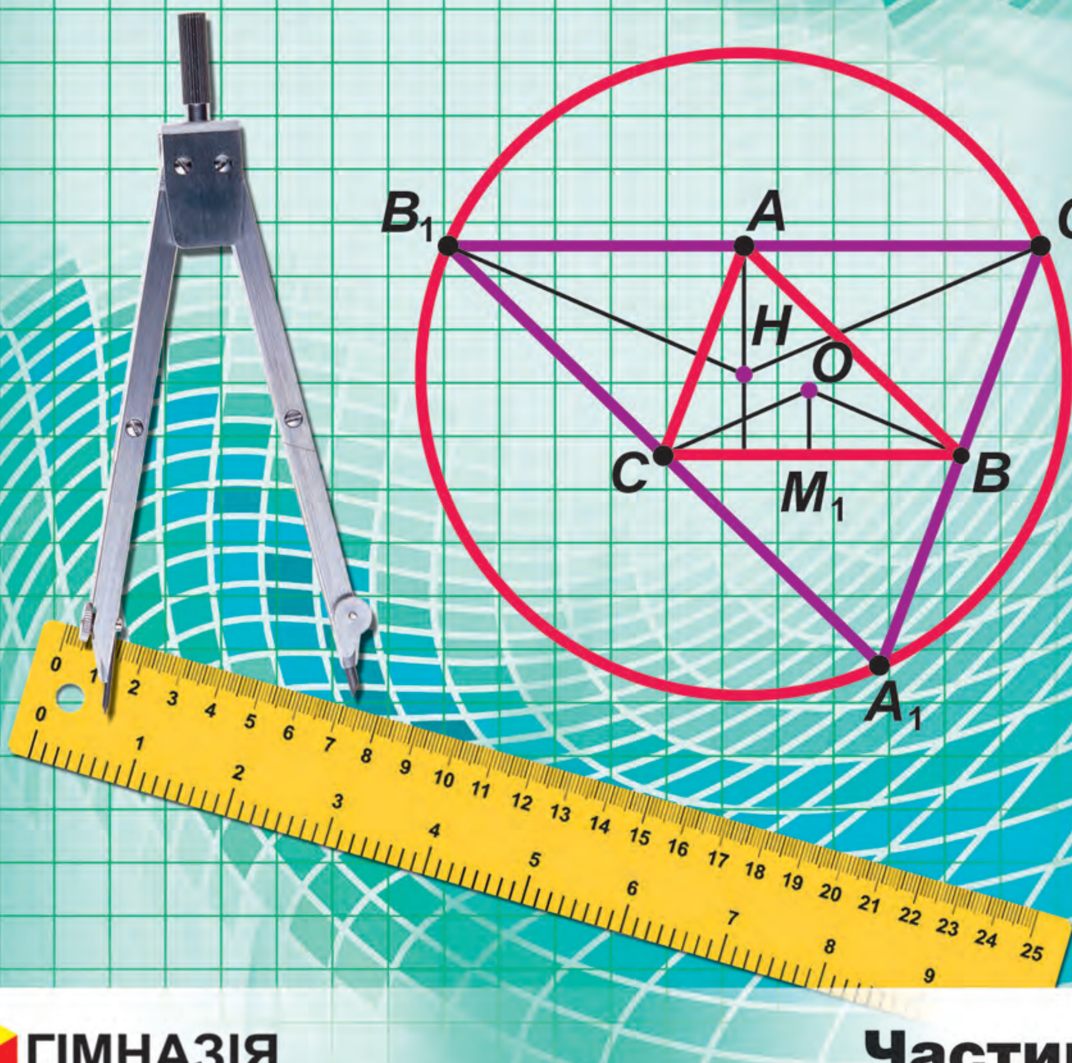
8

Аркадій Мерзляк
Віталій Полонський
Михайло Якір

# ГЕОМЕТРІЯ



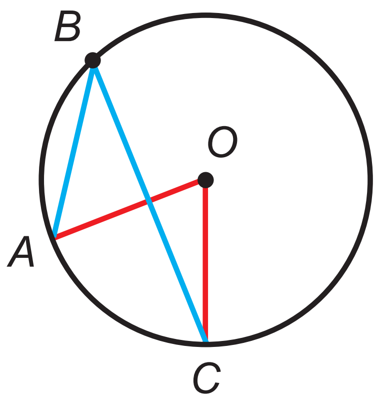

ГІМНАЗІЯ

Частина 2

8
ГЕОМЕТРІЯ
Аркадій Мерзляк, Віталій Полонський, Михайло Якір
8

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

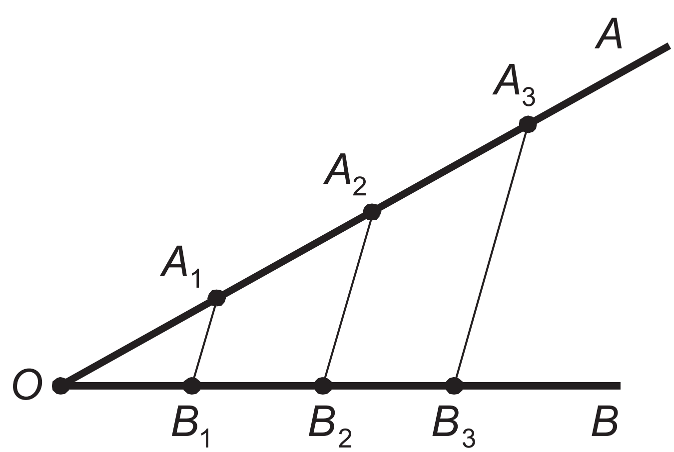
## ЦЕНТРАЛЬНІ ТА ВПИСАНІ КУТИ




$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$

$\angle AOC = \cup AC$

## ТЕОРЕМА ФАЛЕСА



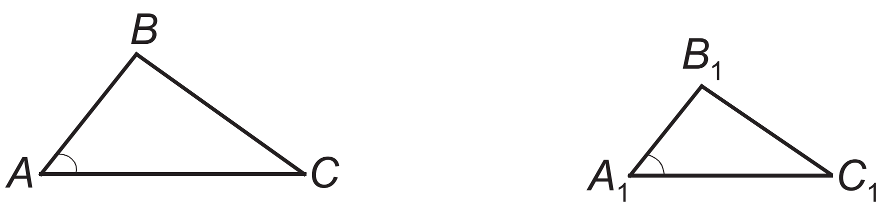

Якщо $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ і $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, то $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## ПЕРША ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

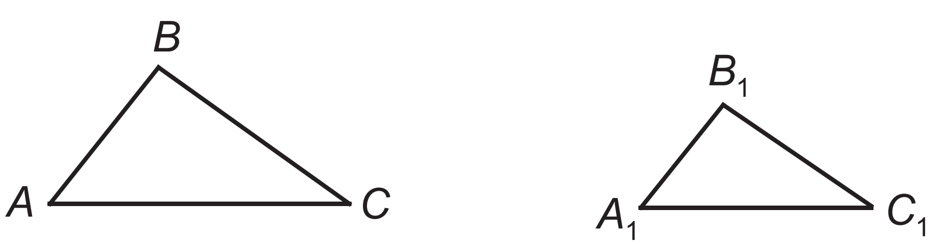

Якщо $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, то $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$

## ДРУГА ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ




Якщо $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$ і $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$

## ТРЕТЯ ОЗНАКА ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ




Якщо $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, то $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

Аркадій Мерзляк
Віталій Полонський
Михайло Якір

# ГЕОМЕТРІЯ

підручник для осіб
з особливими освітніми потребами
(Н 54.1 – Н 54.2)

## 8 клас

(у 2-х частинах)

## ЧАСТИНА 2

Харків
«Гімназія»
2021

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

УДК 373.167.1:512
М52

*Рекомендовано*
*Міністерством освіти і науки України*
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 22.02.2021 № 243)

**Видано за рахунок державних коштів.**
**Продаж заборонено**

**Мерзляк А. Г.**
М52 Геометрія : підруч. для осіб з особлив. освіт. потребами (Н 54.1 – Н 54.2) : 8 кл. (у 2-х ч.) : Ч.2 / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2021. — 120 с. : іл.
ISBN 978-966-474-359-1 (Ч. 2).

**УДК 373.167.1:512**

ISBN 978-966-474-357-7
ISBN 978-966-474-359-1 (Ч. 2)

© А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір, 2021
© ТОВ ТО «Гімназія», оригінал-макет, художнє оформлення, 2021

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

# РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

§3

У цьому параграфі ви ознайомитеся зі знаменитою теоремою Піфагора.

Ви навчитеся за відомими сторонами та кутами прямокутного трикутника знаходити його невідомі сторони та кути.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

# 15. Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику

На рисунку 173 відрізок $CD$ — висота прямокутного трикутника $ABC$ ($\angle ACB = 90°$).

Відрізки $AD$ і $DB$ називають **проєкціями** катетів $AC$ і $CB$ відповідно на гіпотенузу.

**Лема.** ***Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить трикутник на два подібних прямокутних трикутники, кожен з яких подібний даному трикутнику.***

Доведіть лему самостійно.

**Теорема 15.1.** ***Квадрат висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює добутку проєкцій катетів на гіпотенузу. Квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи та проєкції цього катета на гіпотенузу.***

*Доведення.* На рисунку 173 відрізок $CD$ — висота прямокутного трикутника $ABC$ ($\angle ACB = 90°$). Доведемо, що:

$$CD^2 = AD \cdot DB,\ \ AC^2 = AB \cdot AD,\ \ BC^2 = AB \cdot DB.$$

Оскільки $\Delta CBD \sim \Delta ACD$, то $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{BD}{CD}$.

Звідси $CD^2 = AD \cdot DB$.

Оскільки $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, то $\dfrac{AC}{AD} = \dfrac{AB}{AC}$.

Звідси $AC^2 = AB \cdot AD$.

Оскільки $\Delta ABC \sim \Delta CBD$, то $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{AB}{BC}$.

Звідси $BC^2 = AB \cdot DB$. ▲

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

Якщо довжини відрізків на рисунку 173 позначити так: $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $CD = h_c$, $AD = b_c$, $DB = a_c$, то доведені співвідношення набувають вигляду:

$$\boxed{\boldsymbol{h_c^2 = a_c b_c,\ a^2 = a_c c,\ b^2 = b_c c}}$$

Ці рівності називають **метричними співвідношеннями в прямокутному трикутнику**.

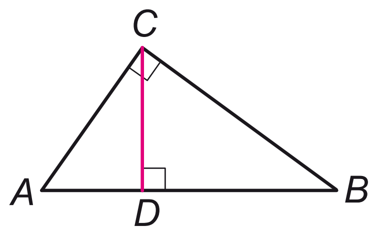



**Рис. 173**

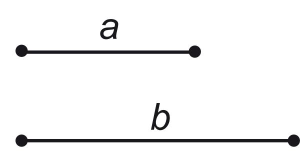



**Рис. 174**

**Приклад.** Дано два відрізки, довжини яких дорівнюють $a$ і $b$ (рис. 174). Побудуйте третій відрізок, довжина якого дорівнює $\sqrt{ab}$.

*Розв'язання.* Розглянемо трикутник $ADC$ ($\angle ACB = 90°$), у якому відрізок $DB$ є висотою (рис. 175).

Маємо: $DB = \sqrt{AB \cdot BC}$. Якщо позначити $AB = a$, $BC = b$, то $DB = \sqrt{ab}$.

Проведений аналіз показує, як провести побудову.

На довільній прямій позначимо точку $A$ та відкладемо послідовно відрізки $AB$ і $BC$ так, що $AB = a$, $BC = b$. Побудуємо коло з діаметром $AC$. Через точку $B$ проведемо пряму, перпендикулярну до прямої $AC$ (рис. 175). Нехай $D$ — одна з точок перетину прямої та кола.

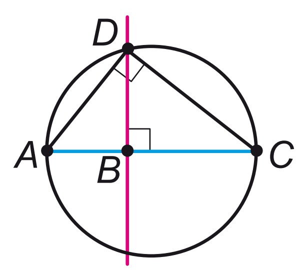



**Рис. 175**

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

Доведемо, що відрізок $DB$ шуканий. Справді, $\angle ACB = 90°$ як вписаний кут, що спирається на діаметр $AC$. Тоді за теоремою 15.1 $DB^2 = AB \cdot BC$, тобто $DB = \sqrt{ab}$. ●

1. Якою формулою пов'язані висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, і проєкції катетів на гіпотенузу?
2. Якою формулою пов'язані катет, гіпотенуза та проєкція цього катета на гіпотенузу?

## ВПРАВИ

**510.**° Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену з вершини прямого кута, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 2 см і 18 см.

**511.**° Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а його проєкція на гіпотенузу — 4 см. Знайдіть гіпотенузу.

**512.**° Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки завдовжки 5 см і 20 см. Знайдіть катети трикутника.

**513.**° Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює 48 см, а проєкція одного з катетів на гіпотенузу — 36 см. Знайдіть сторони даного трикутника.

**514.**• Знайдіть катети прямокутного трикутника, висота якого ділить гіпотенузу на відрізки, один з яких на 3 см менший від цієї висоти, а другий — на 4 см більший за висоту.

**515.**• Знайдіть менший катет прямокутного трикутника та його висоту, проведену до гіпотенузи, якщо більший катет менший від гіпотенузи на 10 см і більший за свою проєкцію на гіпотенузу на 8 см.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**516.**• Перпендикуляр, опущений із точки перетину діагоналей ромба на його сторону, дорівнює 2 см і ділить цю сторону на відрізки, які відносяться як 1 : 4. Знайдіть діагоналі ромба.

**517.**• Перпендикуляр, опущений із точки кола на його діаметр, ділить його на два відрізки, один з яких дорівнює 4 см. Знайдіть радіус кола, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 10 см.

**518.**• Знайдіть периметр рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 25 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.

**519.**•• Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, належить її більшій основі. Знайдіть радіус цього кола, якщо діагональ трапеції дорівнює 20 см, а проєкція діагоналі на більшу основу — 16 см.

**520.**•• Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, яка дорівнює 12 см. Знайдіть середню лінію трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює 10 см.

**521.**•• Знайдіть висоту рівнобічної трапеції, якщо її діагональ перпендикулярна до бічної сторони, а різниця квадратів основ дорівнює 25 см.

**522.**•• У прямокутну трапецію вписано коло. Точка дотику ділить більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 8 см і 50 см. Знайдіть периметр трапеції.

**523.**•• У рівнобічну трапецію вписано коло. Точка дотику ділить бічну сторону на відрізки завдовжки 3 см і 27 см. Знайдіть висоту трапеції.

**524.**•• Дано два відрізки, довжини яких дорівнюють $a$ і $b$. Побудуйте відрізок завдовжки $\sqrt{\frac{ab}{2}}$.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**525.** Периметр паралелограма більший за одну зі сторін на 35 см і більший за другу сторону на 28 см. Знайдіть сторони паралелограма.

**526.** На сторонах $AB$, $BC$, $CD$ і $AD$ квадрата $ABCD$ позначили відповідно точки $M$, $N$, $K$ і $E$ так, що чотирикутник $MNKE$ є прямокутником, сторони якого паралельні діагоналям квадрата. Знайдіть периметр прямокутника $MNKE$, якщо діагональ квадрата $ABCD$ дорівнює 7 см.

**527.** У коло вписано трапецію, діагональ якої ділить кут при більшій основі навпіл. Знайдіть дуги, на які ділять коло вершини трапеції, якщо один з її кутів дорівнює $74°$.

## СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

**528.** У вписаного в коло многокутника вибрали вершину та провели всі діагоналі, яким ця вершина належить. Доведіть, що серед трикутників, що утворилися, не більше ніж один є гострокутним.

## 16. Теорема Піфагора

**Теорема 16.1 (теорема Піфагора).** ***У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.***

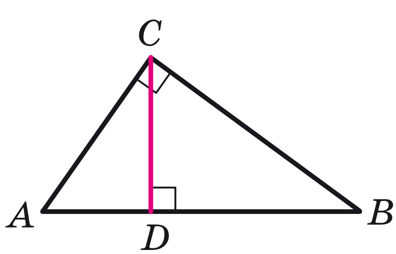



**Рис. 176**

*Доведення.* ⊙ На рисунку 176 зображено прямокутний трикутник $ABC$ $(\angle ACB = 90°)$.

Доведемо, що $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

Проведемо висоту $CD$. Застосувавши теорему 15.1 для катетів $AC$ і $BC$, отримуємо:

$$AC^2 = AB \cdot AD \text{ і } BC^2 = AB \cdot DB.$$

Додавши почленно ці рівності, отримаємо:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB.$$

Далі маємо:

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB) = AB^2. \blacktriangle$$

Якщо в прямокутному трикутнику довжини катетів дорівнюють $a$ і $b$, а довжина гіпотенузи дорівнює $c$, то теорему Піфагора можна виразити такою рівністю:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

Теорема Піфагора дає змогу за двома сторонами прямокутного трикутника знайти його третю сторону:

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2};\ a = \sqrt{c^2 - b^2};\ b = \sqrt{c^2 - a^2}}$$

З рівності $c^2 = a^2 + b^2$ також випливає, що $c^2 > a^2$ і $c^2 > b^2$, звідси $c > a$ і $c > b$, тобто ***гіпотенуза більша за будь-який із катетів***[1].

Із курсу геометрії 7 класу вам знайомі такі поняття, як **перпендикуляр**, **похила** та **проєкція похилої**. Наприклад, на рисунку 176 із точки $C$ до прямої $AB$ проведено перпендикуляр $CD$ і похилі $CA$ і $CB$. Відрізки $AD$ і $DB$ є проєкціями відповідно похилих $AC$ і $CB$ на пряму $AB$.

Із теореми 16.1 випливає, що коли з однієї точки до прямої проведено перпендикуляр і похилу, то похила більша за перпендикуляр.

[1] Іншим способом цей факт було встановлено в курсі геометрії 7 класу.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

1. Сформулюйте теорему Піфагора.
2. Запишіть теорему Піфагора, якщо катети прямокутного трикутника дорівнюють $a$ і $b$, а гіпотенуза дорівнює $c$.
3. Як за двома сторонами прямокутного трикутника знайти його третю сторону?
4. Яка зі сторін прямокутного трикутника є найбільшою?

## ВПРАВИ

**529.°** Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють: 1) 3 см і 4 см; 2) 6 см і 9 см.

**530.°** Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза та другий катет відповідно дорівнюють: 1) 15 см і 12 см; 2) 7 см і $\sqrt{13}$ см.

**531.°** Нехай $a$ і $b$ — катети прямокутного трикутника, $c$ — його гіпотенуза. Знайдіть невідому сторону трикутника, якщо: 1) $a = 5$ см, $b = 12$ см; 2) $a = 1$ см, $c = 2$ см; 3) $b = 3$ см, $c = \sqrt{90}$ см.

**532.°** Сторони прямокутника дорівнюють 9 см і 40 см. Чому дорівнює його діагональ?

**533.°** Одна зі сторін прямокутника дорівнює 7 см, а діагональ — 25 см. Знайдіть сусідню з даною сторону прямокутника.

**534.°** Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 29 см, а висота, проведена до основи, — 21 см. Чому дорівнює основа трикутника?

**535.°** Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 35 см, а його основа — 24 см. Чому дорівнює бічна сторона трикутника?

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**536.**° У колі, радіус якого дорівнює 10 см, проведено хорду завдовжки 16 см. Знайдіть відстань від центра кола до даної хорди.

**537.**° Знайдіть периметр ромба, діагоналі якого дорівнюють 24 см і 32 см.

**538.**° Сторона ромба дорівнює 26 см, а одна з діагоналей — 48 см. Знайдіть другу діагональ ромба.

**539.**° Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 21 см, а другий катет на 7 см менший від гіпотенузи. Знайдіть периметр трикутника.

**540.**° Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 26 см, а катети відносяться як 5 : 12. Знайдіть катети цього трикутника.

**541.**• Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, проведена до нього, — 5 см. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

**542.**• У трикутнику $ABC$ відомо, що $BC = 20$ см, висота $BD$ ділить сторону $AC$ на відрізки $AD = 5$ см і $CD = 16$ см. Знайдіть сторону $AB$.

**543.**• У трикутнику $ABC$ відомо, що $AB = 17$ см, $BC = 9$ см, кут $C$ тупий, висота $AD$ дорівнює 8 см. Знайдіть сторону $AC$.

**544.**• Знайдіть висоту рівностороннього трикутника зі стороною $a$.

**545.**• Знайдіть діагональ квадрата зі стороною $a$.

**546.**• Знайдіть сторону рівностороннього трикутника, висота якого дорівнює $h$.

**547.**• Знайдіть катети прямокутного рівнобедреного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює $c$.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**548.**• Знайдіть довжину невідомого відрізка $x$ на рисунку 177 (розміри дано в сантиметрах).

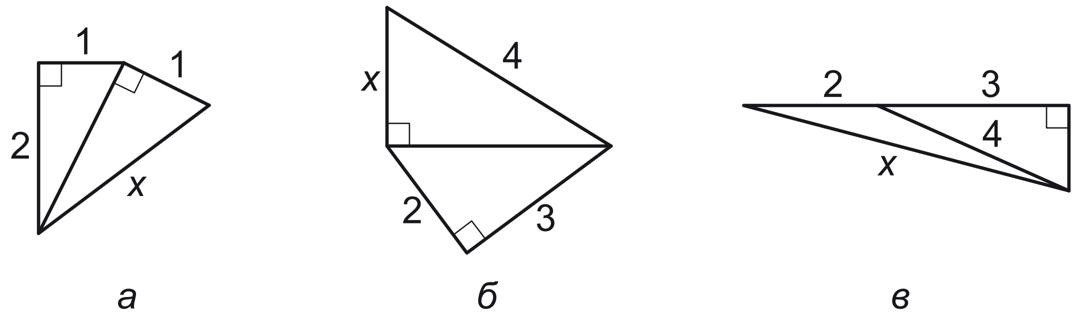



**Рис. 177**

**549.**• Знайдіть довжину невідомого відрізка $x$ на рисунку 178 (розміри дано в сантиметрах).

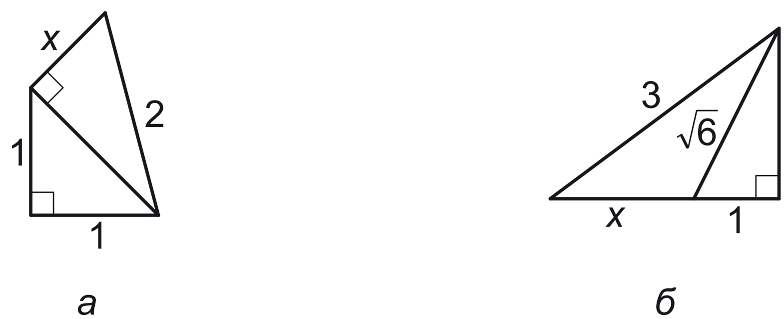



**Рис. 178**

**550.**• У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 8 см. Вона ділить бічну сторону на два відрізки, один з яких, прилеглий до вершини рівнобедреного трикутника, дорівнює 6 см. Знайдіть основу трикутника.

**551.**• Висота рівнобедреного трикутника, опущена на бічну сторону, ділить її на відрізки завдовжки 4 см і 16 см, рахуючи від вершини кута при основі. Знайдіть основу рівнобедреного трикутника.

**552.**• Основа рівнобедреного тупокутного трикутника дорівнює 24 см, а радіус кола, описаного навколо нього, — 13 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**553.°** Висота рівнобедреного гострокутного трикутника, проведена до його основи, дорівнює 8 см, а радіус кола, описаного навколо нього, — 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

**554.°** Основа рівнобедреного трикутника на 2 см більша за бічну сторону. Знайдіть сторони трикутника, якщо висота, проведена до основи, дорівнює 8 см.

**555.°** Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 90 см, а висота, проведена до основи, — 15 см. Знайдіть сторони трикутника.

**556.°** Сторони тупокутного трикутника дорівнюють 29 см, 25 см і 6 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до меншої сторони.

**557.°** Сторони трикутника дорівнюють 36 см, 29 см і 25 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до більшої сторони.

**558.°** Із точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких відносяться як 5 : 6, а проєкції цих похилих на пряму дорівнюють 7 см і 18 см. Знайдіть відстань від даної точки до цієї прямої.

**559.°** Із точки до прямої проведено дві похилі завдовжки 15 см і 27 см. Сума довжин проєкцій цих похилих на пряму дорівнює 24 см. Знайдіть проєкцію кожної похилої.

**560.°** Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить один із його катетів на відрізки 2 см і 6 см. Знайдіть сторони трикутника.

**561.°** Знайдіть сторони паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 16 см і 20 см, якщо одна з діагоналей перпендикулярна до його сторони.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**562.**• Знайдіть периметр прямокутного трикутника, якщо бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 30 см і 40 см.

**563.**• Знайдіть периметр прямокутного трикутника, якщо бісектриса гострого кута ділить протилежний катет на відрізки завдовжки 24 см і 51 см.

**564.**• (*Старовинна арабська задача.*) На протилежних берегах річки ростуть одна проти одної дві пальми. Висота однієї з них дорівнює 30 ліктів, висота другої — 20 ліктів, а відстань між прикорнями пальм — 50 ліктів. На вершечку кожної пальми сидить птах. Раптом обидва птахи побачили рибу, яка з'явилася на поверхні води між пальмами. Вони злетіли з пальм одночасно і, рухаючись з однаковою швидкістю, одночасно схопили рибу. На якій відстані від прикорня вищої пальми з'явилася риба?

**565.**•• Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 12 см і 20 см, а діагональ є бісектрисою тупого кута трапеції. Знайдіть цю діагональ.

**566.**•• Основи прямокутної трапеції дорівнюють 18 см і 12 см, а діагональ є бісектрисою гострого кута трапеції. Знайдіть цю діагональ.

**567.**•• У колі по різні боки від його центра проведено дві паралельні хорди завдовжки 16 см і 32 см. Відстань між хордами дорівнює 16 см. Знайдіть радіус кола.

**568.**•• У колі по один бік від його центра проведено дві паралельні хорди завдовжки 48 см і 24 см. Відстань між хордами дорівнює 12 см. Знайдіть радіус кола.

**569.**•• Радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, дорівнює 12 см, а відстань від вершини рівнобедреного трикутника до центра кола — 20 см. Знайдіть периметр даного трикутника.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**570.••** Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить її більшу основу на відрізки завдовжки 20 см і 25 см, рахуючи від вершини прямого кута. Обчисліть периметр трапеції.

**571.••** Точка дотику кола, вписаного в прямокутну трапецію, ділить її меншу основу на відрізки завдовжки 6 см і 3 см, рахуючи від вершини прямого кута. Обчисліть периметр трапеції.

**572.••** Катети прямокутного трикутника дорівнюють 18 см і 24 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини меншого гострого кута.

**573.••** Медіани $AM$ і $CK$ трикутника $ABC$ перпендикулярні. Знайдіть сторони трикутника, якщо $AM = 9$ см і $CK = 12$ см.

**574.••** У трикутнику $ABC$ медіани $BM$ і $CK$ перпендикулярні та перетинаються в точці $O$. Знайдіть відрізок $AO$, якщо $BM = 36$ см і $CK = 15$ см.

**575.••** (*Задача Бхаскари.*[1])

Над озером тихим, з пів фута[2] заввишки
Підносилась лотоса квітка.
І одного разу поривчастий вітер
Відніс її раптом убік.
Нема більше квітки над тою водою.
Натрапив на неї рибалка завзятий
В двох футах від місця, де та росла.
Отож пропоную тобі запитання:
Яка ж того озера тут глибина?

---

[1] Бха́скара (1114–1185) — індійський математик і астроном.

[2] 1 фут = 30,48 см.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## ГОТУЄМОСЯ ДО ВИВЧЕННЯ НОВОЇ ТЕМИ

**576.** У трикутнику $ABC$ відомо, що $\angle C = 90°$, $AB = 13$ см, $BC = 5$ см, $AC = 12$ см. Знайдіть відношення:

1) катета, прилеглого до кута $A$, і гіпотенузи;
2) катета, протилежного куту $A$, і гіпотенузи;
3) катета, прилеглого до кута $B$, і гіпотенузи;
4) катета, прилеглого до кута $B$, і катета, протилежного цьому куту.

**577.** На одній стороні кута $A$ позначили точки $B$, $C$ і $D$ так, що $AB = BC = 5$ см, $CD = 10$ см (рис. 179). Із точок $B$, $C$ і $D$ опущено перпендикуляри $BE$, $CF$ і $DM$ на другу сторону кута $A$, причому $AE = 4$ см. Знайдіть відношення катета, прилеглого до кута $A$, і гіпотенузи:

1) у трикутнику $AEB$;
2) у трикутнику $AFC$;
3) у трикутнику $AMD$.

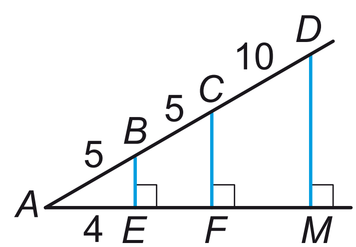



**Рис. 179**

## СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

**578.** У квадраті зі стороною 1 м довільно позначили 51 точку. Доведіть, що серед цих точок існують три, які можна накрити квадратом зі стороною 20 см.

## ПІФАГОР

Ви вивчили знамениту теорему, яка носить ім'я видатного давньогрецького вченого Піфагора.

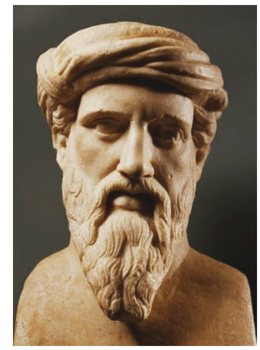
Дослідження стародавніх текстів свідчать, що твердження цієї теореми було відоме задовго до Піфагора. Чому ж

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

її приписують Піфагорові? Скоріш за все тому, що саме Піфагор винайшов доведення цього твердження.

Про життя Піфагора мало що відомо достовірно. Він народився на грецькому острові Самос. За легендами, він багато подорожував, набуваючи знань і мудрощів.

Після того як Піфагор оселився в грецькій колонії Кротон (на півдні Італії), навколо нього сформувалося численне коло відданих учнів та однодумців. Так виник піфагорійський союз (або кротонське братство). Вплив цього союзу був настільки значним, що навіть кілька століть по смерті Піфагора багато великих математиків Стародавнього світу називали себе піфагорійцями.



**Піфагор**
(VI ст. до н. е.)

## 17. Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника

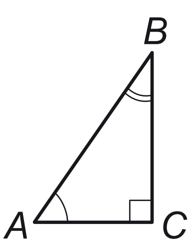



**Рис. 180**

На рисунку 180 зображено прямокутний трикутник $ABC$ ($\angle C = 90°$). Нагадаємо, що катет $BC$ називають **протилежним** куту $A$, а катет $AC$ — **прилеглим** до цього кута.

**Означення. Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.**

Синус кута $A$ позначають так: $\sin A$ (читають: «синус $A$»). Для гострих кутів $A$ і $B$ прямокутного трикутника $ABC$ маємо:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \ \sin B = \frac{AC}{AB}.$$

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

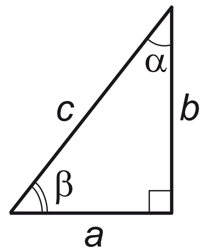



**Рис. 181**

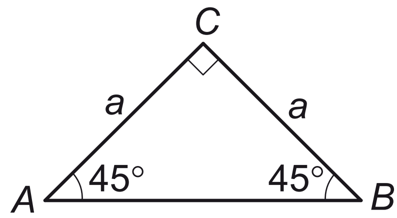



**Рис. 182**

Для прямокутного трикутника, зображеного на рисунку 181, можна записати: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$.

Розглянемо прямокутний рівнобедрений трикутник $ABC$ ($\angle C = 90°$), у якому $AC = BC = a$ (рис. 182).

Маємо: $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

За означенням $\sin A = \frac{BC}{AB}$, звідси $\sin A = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Бачимо, що синус гострого кута прямокутного рівнобедреного трикутника не залежить від розмірів трикутника, бо отримане значення синуса однакове для всіх значень $a$. Оскільки $\angle A = 45°$, то $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Цей запис не пов’язують із конкретним прямокутним рівнобедреним трикутником.

Узагалі, *якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то синуси цих кутів рівні*.

Справді, ці прямокутні трикутники є подібними за першою ознакою подібності трикутників. Тому відношення катета до гіпотенузи одного трикутника дорівнює відношенню відповідного катета до гіпотенузи другого трикутника.

Наприклад, запис $\sin 17°$ можна віднести до всіх кутів, градусні міри яких дорівнюють $17°$. Значення цього синуса

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

можна обчислити один раз, вибравши довільний прямокутний трикутник з гострим кутом 17°.

Отже, ***синус гострого кута залежить тільки від величини цього кута***.

**Означення. Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.**

Косинус кута *A* позначають так: cos *A* (читають: «косинус *A*»). Для гострих кутів *A* і *B* прямокутного трикутника *ABC* (рис. 180) можна записати:

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \ \cos B = \frac{BC}{AB}.$$

Зазначимо, що катет прямокутного трикутника менший від його гіпотенузи, а тому *синус і косинус гострого кута менші від* 1.

**Означення. Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого.**

Тангенс кута *A* позначають так: tg *A* (читають: «тангенс *A*»).

Для гострих кутів *A* і *B* прямокутного трикутника *ABC* (рис. 180) можна записати:

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}, \ \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}.$$

Для прямокутного трикутника, зображеного на рисунку 181, записують: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$.

Як було встановлено, синус кута залежить тільки від величини кута. Міркуючи аналогічно, можна дійти такого висновку:

***косинус і тангенс гострого кута залежать тільки від величини цього кута*.**

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

Узагалі, кожному гострому куту $\alpha$ відповідає єдине число — значення синуса (косинуса, тангенса) цього кута. Тому залежність значення синуса (косинуса, тангенса) гострого кута від величини цього кута є функціональною. Функцію, яка відповідає цій залежності, називають **тригонометричною**. Так, $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, $y = \operatorname{tg}\alpha$ — тригонометричні функції, аргументами яких є гострі кути.

З давніх часів люди складали таблиці наближених значень тригонометричних функцій з деяким кроком, один раз обчислюючи значення тригонометричних функцій для конкретного аргументу. Потім ці таблиці широко використовували в багатьох галузях науки й техніки.

У наш час значення тригонометричних функцій гострих кутів зручно знаходити за допомогою мікрокалькулятора.

Тангенс гострого кута можна виразити через синус і косинус цього самого кута. Розглянемо прямокутний трикутник (рис. 181). Запишемо:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Отже, одержуємо таку формулу:

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

За теоремою Піфагора $a^2 + b^2 = c^2$. Обидві частини цієї рівності поділимо на $c^2$. Маємо: $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. Ураховуючи, що $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, отримаємо:

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$$

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

Прийнято записувати: $(\sin\alpha)^2 = \sin^2\alpha$, $(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$. Звідси маємо:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Цю формулу називають **основною тригонометричною тотожністю**.

Зазначимо, що $\cos\beta = \sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \cos\alpha = \frac{b}{c}$. Оскільки $\beta = 90° - \alpha$, то одержуємо такі формули:

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(90° - \alpha) &= \sin\alpha\\ \sin(90° - \alpha) &= \cos\alpha\end{aligned}}$$

Ми вже знаємо, що $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Знайдемо тепер $\cos 45°$ і $\operatorname{tg} 45°$. Маємо:

$$\cos 45° = \sin(90° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

Знайдемо синус, косинус і тангенс кутів 30° і 60°.

Розглянемо прямокутний трикутник $ABC$, у якому $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (рис. 183).

Нехай $BC = a$. Тоді за властивістю катета, який лежить проти кута 30°, отримуємо, що $AB = 2a$. Із теореми Піфагора випливає, що $AC^2 = AB^2 - BC^2$. Маємо: $AC^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$; $AC = a\sqrt{3}$.

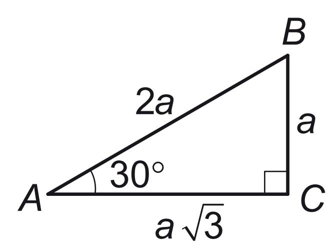



**Рис. 183**

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

Звідси знаходимо: $\sin 30^\circ = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$,

$$\cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Оскільки $60^\circ = 90^\circ - 30^\circ$, то отримуємо:

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

Значення синуса, косинуса і тангенса для кутів 30°, 45° і 60° корисно запам'ятати.

| $\alpha$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ |
|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

?

1. Що називають синусом гострого кута прямокутного трикутника?
2. Що називають косинусом гострого кута прямокутного трикутника?
3. Що називають тангенсом гострого кута прямокутного трикутника?
4. Від чого залежать синус, косинус і тангенс кута?
5. Як пов'язані між собою $\operatorname{tg}\alpha$, $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$?
6. Як пов'язані між собою $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$?
7. Чому дорівнює $\sin(90^\circ - \alpha)$? $\cos(90^\circ - \alpha)$?

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

8. Чому дорівнює sin 45°? cos 45°? tg 45°?
9. Чому дорівнює sin 30°? cos 30°? tg 30°?
10. Чому дорівнює sin 60°? cos 60°? tg 60°?

## ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

**579.•** Побудуйте кут:
1) тангенс якого дорівнює $\frac{4}{5}$;
2) синус якого дорівнює $\frac{2}{3}$.

**580.•** Побудуйте кут:
1) косинус якого дорівнює $\frac{1}{4}$;
2) тангенс якого дорівнює $\frac{1}{2}$.

## ВПРАВИ

**581.°** Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 8 см і 10 см. Знайдіть:
1) синус кута, який лежить проти меншого катета;
2) косинус кута, який прилягає до більшого катета;
3) тангенс кута, протилежного меншому катету.

**582.°** Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 см і 2 см. Знайдіть:
1) тангенс кута, прилеглого до більшого катета;
2) синус кута, протилежного меншому катету;
3) косинус кута, прилеглого до більшого катета.

**583.°** Знайдіть значення виразу:
1) $\cos^2 45° + \mathrm{tg}^2\, 60°$;
2) $2\cos^2 60° - \sin^2 30° + \sin 60°\ \mathrm{tg}\, 30°$.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**584.**° Знайдіть значення виразу:

1) $\cos^2 30° - \sin^2 45°$;

2) $3\,\mathrm{tg}^2\,30° + 4\,\mathrm{tg}\,45° + \cos 30°\,\mathrm{tg}\,60°$.

**585.**° У трикутнику $ABC$ відомо, що $\angle C = 90°$, $BC = 77$ см, $AB = 125$ см. Знайдіть синуси гострих кутів трикутника.

**586.**° У трикутнику $ABC$ відомо, що $\angle C = 90°$, $BC = 41$ см, $AC = 20$ см. Знайдіть косинуси гострих кутів трикутника.

**587.**• Знайдіть $\sin\alpha$ і $\mathrm{tg}\,\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

**588.**• Знайдіть $\cos\beta$ і $\mathrm{tg}\,\beta$, якщо $\sin\beta = \frac{4}{5}$.

**589.**• Синус гострого кута прямокутного трикутника дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Знайдіть синус, косинус і тангенс другого гострого кута цього трикутника.

**590.**• Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 24 см, а бічна сторона — 13 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута між бічною стороною трикутника та висотою, проведеною до його основи.

**591.**• Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 17 см, а висота, проведена до основи, — 8 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута при основі трикутника.

**592.**• Знайдіть кути ромба, діагоналі якого дорівнюють 4 см і $4\sqrt{3}$ см.

**593.**• Знайдіть кути між діагоналлю прямокутника та його сторонами, довжини яких дорівнюють $\sqrt{3}$ см і 3 см.

**594.**• У трапеції $ABCD$ відомо, що $AB = CD = 9$ см, $BC = 10$ см, $AD = 14$ см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута $A$ трапеції.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**595.**• У прямокутній трапеції *ABCD* відомо, що $BC \parallel AD$, $\angle A = 90°$, $AB = 4$ см, $BC = 8$ см, $AD = 12$ см. Знайдіть кути трапеції.

**596.**• Доведіть, що тангенси гострих кутів прямокутного трикутника є взаємно оберненими числами.

**597.**• Доведіть тотожність $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$.

**598.**• Знайдіть значення виразу:

1) $\sin^2 18° + \sin^2 72°$; 2) $\cos^3 36° - \sin^3 54°$.

**599.**•• Катети прямокутного трикутника дорівнюють 30 см і 40 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс кута між медіаною та висотою, проведеними до гіпотенузи.

**600.**•• У трикутнику *ABC* відомо, що $AB = BC$, *BD* і *AM* — висоти трикутника, $BD : AM = 3 : 1$. Знайдіть $\cos C$.

**601.**•• У трикутнику *ABC* відомо, що $AB = BC$, *BD* і *CK* — висоти трикутника, $\cos A = \dfrac{3}{7}$. Знайдіть відношення $CK : BD$.

**602.*** Доведіть, що кути *ABC* і *DEF*, зображені на рисунку 184, рівні.

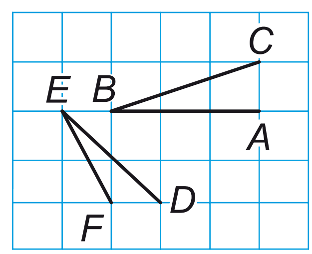



**Рис. 184**

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**603.** Бісектриси кутів *A* і *B* паралелограма *ABCD* перетинаються в точці *M*, $AB = 6$ см. Знайдіть радіус кола, яке проходить через точки *A*, *B* і *M*.

**604.** Хорди *AB* і *BC* кола перпендикулярні, а відстань між їхніми серединами дорівнює 12 см. Знайдіть радіус кола.

**605.** У трикутнику *ABC* відомо, що *BK* — висота, *AM* — бісектриса, $BK = 26$ см, $AB : AC = 6 : 7$. Із точки *M* опущено перпендикуляр *MD* на сторону *AC*. Знайдіть відрізок *MD*.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

**606.** Дано два круги, які не мають спільних точок. Чи існує точка, що не належить жодному з кругів, така, що будь-яка пряма, яка проходить через цю точку, перетинає хоча б один із цих кругів?

## 18. Розв'язування прямокутних трикутників

На рисунку 185 зображено прямокутний трикутник з гострими кутами $\alpha$ і $\beta$, катети якого дорівнюють $a$ і $b$, а гіпотенуза дорівнює $c$.

За означенням синуса гострого кута прямокутного трикутника $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$. Звідси $a = c \sin\alpha$, $b = c \sin\beta$.

Отже, ***катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на синус кута, протилежного цьому катету***.

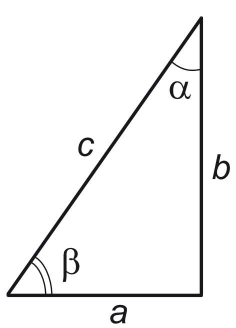



**Рис. 185**

За означенням косинуса гострого кута прямокутного трикутника $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$. Звідси $b = c \cos\alpha$, $a = c \cos\beta$.

Отже, ***катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на косинус кута, прилеглого до цього катета***.

За означенням тангенса гострого кута прямокутного трикутника $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$. Звідси $a = b \operatorname{tg}\alpha$, $b = a \operatorname{tg}\beta$.

Отже, ***катет прямокутного трикутника дорівнює добутку другого катета на тангенс кута, протилежного першому катету***.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

Оскільки $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, то $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Отже, ***катет прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення другого катета на тангенс кута, прилеглого до першого катета*.**

З рівностей $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ і $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ отримуємо: $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ і $c = \frac{b}{\cos\alpha}$.

Отже, ***гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення катета на синус протилежного йому кута;***

***гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення катета на косинус прилеглого до нього кута***.

**Розв'язати прямокутний трикутник** означає знайти його сторони й кути за відомими сторонами та кутами.

Наведені вище правила дають змогу розв'язувати прямокутний трикутник за однією стороною та одним гострим кутом.

У задачах на розв'язування прямокутних трикутників, якщо не обумовлено інше, прийнято такі позначення (див. рис. 185): $c$ — гіпотенуза, $a$ і $b$ — катети, $\alpha$ і $\beta$ — кути, протилежні катетам $a$ і $b$ відповідно.

**Задача 1.** Розв'яжіть прямокутний трикутник за катетом і гострим кутом: $a = 14$ см, $\alpha = 38°$. (Значення тригонометричних функцій знайдіть за допомогою мікрокалькулятора та округліть їх до сотих. Значення довжин сторін округліть до десятих.)

*Розв'язання.* Маємо:

$\beta = 90° - \alpha = 90° - 38° = 52°$;

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

$b = a \operatorname{tg} \beta = 14 \operatorname{tg} 52° \approx 14 \cdot 1{,}28 \approx 17{,}9$ (см);

$$c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{14}{\sin 38°} \approx \frac{14}{0{,}62} \approx 22{,}6 \text{ (см)}.$$

*Відповідь*: $c \approx 22{,}6$ см, $b \approx 17{,}9$ см, $\beta = 52°$.

Зазначимо, що цю задачу можна було розв'язати і в інший спосіб: наприклад, знайти гіпотенузу, використовуючи теорему Піфагора.

**Задача 2.** Розв'яжіть прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою: $a = 26$ см, $c = 34$ см.

*Розв'язання*. Маємо: $\sin \alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{26}{34} = 0{,}7647...$ .

Обчислюємо кут $\alpha$ за допомогою мікрокалькулятора: $\alpha \approx 50°$. Тоді $\beta \approx 40°$.

$b = c \sin \beta \approx 34 \sin 40° \approx 34 \cdot 0{,}643 \approx 21{,}862 \approx 21{,}9$ (см).

*Відповідь*: $b \approx 21{,}9$ см, $\alpha \approx 50°$, $\beta \approx 40°$.

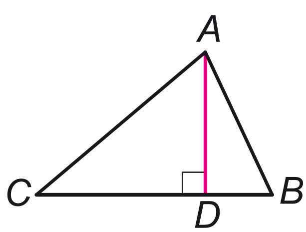



**Рис. 186**

**Задача 3.** Висота $AD$ трикутника $ABC$ (рис. 186) ділить його сторону $BC$ на відрізки $BD$ і $CD$ такі, що $BD = 2\sqrt{3}$ см, $CD = 8$ см. Знайдіть сторони $AB$ і $AC$, якщо $\angle B = 60°$.

*Розв'язання*. Із трикутника $ADB$ $(\angle ADB = 90°)$ отримуємо:

$AD = BD \operatorname{tg} B = 2\sqrt{3} \operatorname{tg} 60° = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$ (см);

$$AB = \frac{BD}{\cos B} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 60°} = 2\sqrt{3} : \frac{1}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Із трикутника $ADC$ $(\angle ADC = 90°)$ отримуємо:

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (см)}.$$

*Відповідь:* $4\sqrt{3}$ см, 10 см.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**Задача 4.** Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює $b$, кут при основі дорівнює $\alpha$. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник.

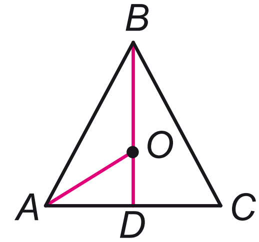



**Рис. 187**

*Розв'язання*. У трикутнику $ABC$ (рис. 187) $AB = BC = b$, $\angle BAC = \alpha$. Проведемо висоту $BD$.

Із трикутника $ADB$ ($\angle ADB = 90°$) отримуємо:

$$AD = AB \cos \angle BAD = b \cos \alpha.$$

Точка $O$ — центр кола, вписаного в трикутник $ABC$. Отже, точка $O$ належить висоті $BD$ і бісектрисі $AO$ кута $BAC$. Оскільки $OD \perp AC$, то вписане коло дотикається до сторони $AC$ у точці $D$. Таким чином, $OD$ — радіус вписаного кола. Відрізок $AO$ — бісектриса кута $BAD$, тому $\angle OAD = \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{\alpha}{2}$.

Із трикутника $ADO$ ($\angle ADO = 90°$) отримуємо:

$$OD = AD \operatorname{tg} \angle OAD = b \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

*Відповідь*: $b \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

?

1. Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомо гіпотенузу та кут, протилежний цьому катету?
2. Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомо гіпотенузу та кут, прилеглий до цього катета?
3. Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомо другий катет і кут, протилежний шуканому катету?
4. Як можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомо другий катет і кут, прилеглий до шуканого катета?
5. Як можна знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо відомо катет і протилежний цьому катету кут?
6. Як можна знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо відомо катет і прилеглий до цього катета кут?

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## ВПРАВИ

**607.°** У трикутнику $ABC$ відомо, що $\angle C = 90°$. Знайдіть сторону:

1) $BC$, якщо $AB = 12$ см, $\sin A = \frac{3}{4}$;
2) $AC$, якщо $AB = 21$ см, $\cos A = 0{,}4$;
3) $AC$, якщо $BC = 4$ см, $\operatorname{tg} A = 1{,}6$;
4) $AB$, якщо $BC = 14$ см, $\cos B = \frac{7}{9}$;
5) $AB$, якщо $AC = 3{,}2$ см, $\sin B = 0{,}16$;
6) $BC$, якщо $AC = 2{,}3$ см, $\operatorname{tg} B = \frac{1}{2}$.

**608.°** У трикутнику $DEF$ відомо, що $\angle E = 90°$. Знайдіть сторону:

1) $DE$, якщо $DF = 18$ см, $\cos D = \frac{2}{9}$;
2) $DF$, якщо $EF = 3{,}5$ см, $\cos F = 0{,}7$;
3) $EF$, якщо $DE = 2{,}4$ см, $\operatorname{tg} D = \frac{11}{12}$.

**609.°** У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 17 см, а синус одного з гострих кутів — $\frac{8}{17}$. Знайдіть катети трикутника.

**610.°** Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а косинус одного з гострих кутів — 0,8. Знайдіть катети трикутника.

**611.°** Катет прямокутного трикутника дорівнює 48 см, а тангенс протилежного кута — $3\frac{3}{7}$. Знайдіть другий катет і гіпотенузу трикутника.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**612.°** У прямокутному трикутнику один із катетів дорівнює 12 см, а тангенс прилеглого кута — 0,75. Знайдіть другий катет і гіпотенузу трикутника.

**613.°** Розв'яжіть прямокутний трикутник:

1) за гіпотенузою та гострим кутом: $c = 28$ см, $\alpha = 48°$;

2) за катетом і гострим кутом: $a = 56$ см, $\beta = 74°$;

3) за катетом і гіпотенузою: $a = 5$ см, $c = 9$ см;

4) за двома катетами: $a = 3$ см, $b = 7$ см.

**614.°** Розв'яжіть прямокутний трикутник за відомими елементами:

1) $a = 34$ см, $\alpha = 55°$;

2) $c = 16$ см, $\beta = 18°$;

3) $b = 12$ см, $c = 13$ см;

4) $a = 4$ см, $b = 14$ см.

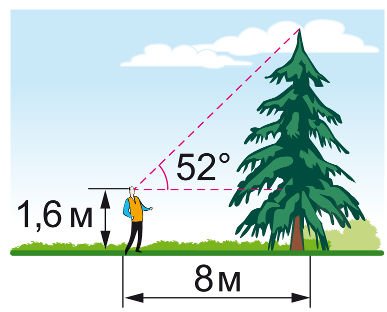



**Рис. 188**

**615.°** Використовуючи дані рисунка 188, знайдіть висоту ялинки.

**616.°** Якої довжини має бути пожежна драбина, щоб нею можна було піднятися на дах будинку заввишки 9 м, якщо ставити її під кутом 70° до поверхні землі?

**617.°** Проїхавши від старту прямолінійною ділянкою шосе 300 м, велосипедист опинився в точці, розташованій на 11 м вище, ніж точка старту. Знайдіть тангенс кута підйому шосе на цій ділянці.

**618.°** Під яким кутом падає на землю сонячний промінь, якщо довжина тіні від вертикальної жердини дорівнює довжині самої жердини?

**619.•** Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 120°, а висота, проведена до основи, — $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторони трикутника.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**620.**• Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 8 см і 12 см, а кут при основі — $45^\circ$. Знайдіть висоту та бічну сторону трапеції.

**621.**• Діагональ паралелограма перпендикулярна до його сторони й дорівнює $a$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо один із його кутів дорівнює $30^\circ$.

**622.**• Сторона ромба дорівнює $a$, а один із його кутів — $60^\circ$. Знайдіть діагоналі ромба.

**623.**• Траншея в перерізі має форму рівнобічної трапеції (рис. 189). Знайдіть кут, який утворюють стінки траншеї з її дном.

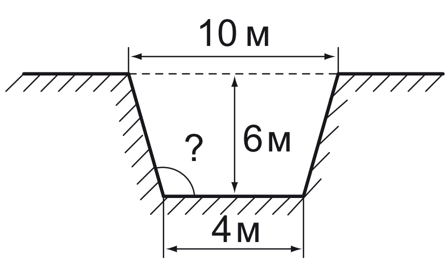



**Рис. 189**

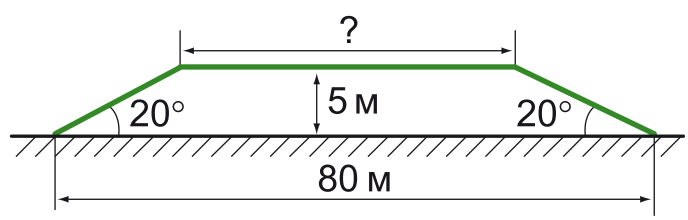



**Рис. 190**

**624.**• Ширина насипу шосейної дороги в нижній його частині дорівнює 80 м (рис. 190), висота насипу — 5 м, а відкоси нахилені до горизонту під кутом $20^\circ$. Знайдіть ширину насипу у верхній його частині.

**625.**• Висота $BD$ трикутника $ABC$ ділить сторону $AC$ на відрізки $AD$ і $CD$ так, що $AD = 12$ см, $CD = 4$ см. Знайдіть сторону $BC$, якщо $\angle A = 30^\circ$.

**626.**• Висота $AF$ ділить сторону $BC$ трикутника $ABC$ на відрізки $BF$ і $CF$. Знайдіть сторону $AC$, якщо $CF = \sqrt{13}$ см, $\angle B = 60^\circ$, а сторона $AB$ дорівнює 18 см.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**627.**• Із точки $D$, що лежить поза прямою $n$, проведено до цієї прямої похилі $DK$ і $DB$, які утворюють з нею кути $45°$ і $60°$ відповідно. Знайдіть довжину проєкції похилої $DK$ на пряму $n$, якщо $DB = 10\sqrt{3}$ см.

**628.**• Із точки $M$, що лежить поза прямою $l$, проведено до цієї прямої похилі $MN$ і $MK$, які утворюють з нею кути $30°$ і $45°$ відповідно. Знайдіть похилу $MK$, якщо проєкція похилої $MN$ на пряму $l$ дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

**629.**• Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює $\beta$, висота, проведена до бічної сторони, — $h$. Знайдіть основу трикутника.

**630.**• Висота, проведена з вершини прямого кута трикутника, дорівнює $h$, гострий кут — $\alpha$. Знайдіть сторони трикутника.

**631.**• Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює $a$. Кут між другим катетом і висотою, проведеною з вершини прямого кута, дорівнює $\varphi$. Знайдіть невідомі сторони трикутника та проведену висоту.

**632.**• Більша діагональ ромба дорівнює $d$, а гострий кут — $\alpha$. Знайдіть сторону та меншу діагональ ромба.

**633.**• Гострий кут ромба дорівнює $\alpha$, радіус вписаного кола — $r$. Знайдіть сторону та діагоналі ромба.

**634.**•• Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони та утворює з основою трапеції кут $30°$. Знайдіть висоту трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює $R$.

**635.**•• Одна зі сторін трикутника дорівнює $a$, прилеглі до неї кути — $45°$ і $60°$. Знайдіть висоту трикутника, проведену до даної сторони.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**636.**•• Основи трапеції дорівнюють 7 см і 15 см, а кути при більшій основі — $30^\circ$ і $60^\circ$. Знайдіть висоту та діагоналі трапеції.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**637.** Периметр паралелограма дорівнює 48 см. Бісектриса тупого кута ділить його сторону у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини гострого кута. Чи може менша сторона паралелограма дорівнювати 7 см?

**638.** Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло, $\angle BAC = 52^\circ$, $\angle DBC = 34^\circ$, $\angle ADB = 17^\circ$. Знайдіть кути чотирикутника.

**639.** Відомо, що $O$ — точка перетину діагоналей $AC$ і $BD$ трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Знайдіть відрізки $BO$ і $OD$, якщо $AO : OC = 7 : 6$ і $BD = 39$ см.

## СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

**640.** Розріжте ромб на чотири чотирикутники так, щоб кожний із них був вписаним у коло й описаним навколо кола.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## ЗАВДАННЯ № 3 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

**1.** Діаметр $AB$ кола із центром $O$ перпендикулярний до хорди $CD$ (рис. 191). Яка з наведених рівностей є неправильною?

А) $AC^2 = AM \cdot AB$;

Б) $CM^2 = AM \cdot MB$;

В) $AD^2 = MB \cdot AB$;

Г) $DM^2 = AM \cdot MB$.

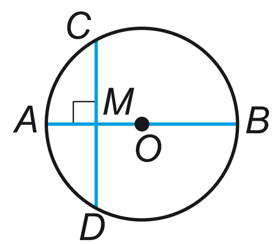
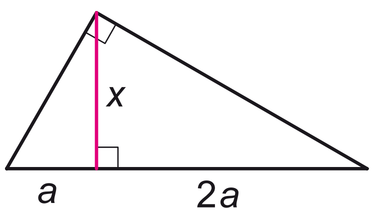


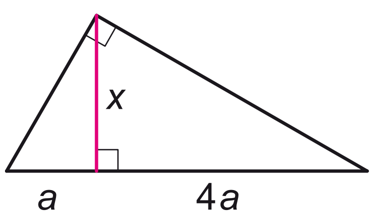

**Рис. 191**

**2.** На якому рисунку довжина відрізка $x$ дорівнює $2a$?

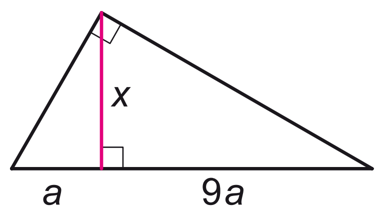
А)



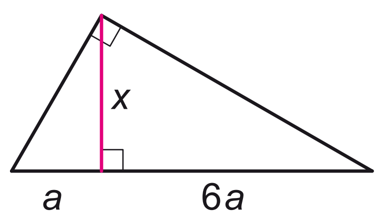

Б)




В)




Г)




**3.** Із теореми Піфагора випливає, що гіпотенуза:

А) дорівнює сумі катетів;

Б) дорівнює сумі квадратів катетів;

В) більша за катет;

Г) дорівнює квадрату суми катетів.

**4.** Довжина відрізка $x$ на рисунку 192 дорівнює:

А) 4;

Б) 3;

В) 5;

Г) $3\sqrt{2}$.

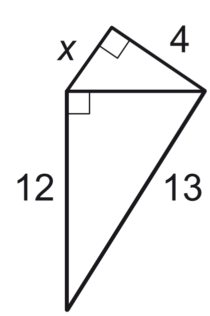



**Рис. 192**

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**5.** Бісектриса рівностороннього трикутника зі стороною *a* дорівнює:

А) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; Б) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; В) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; Г) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

**6.** Радіус кола, описаного навколо квадрата зі стороною *a*, дорівнює:

А) $\frac{a}{2}$; Б) $a\sqrt{2}$; В) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; Г) $2a$.

**7.** Висота рівнобедреного прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює *a*. Тоді його катет дорівнює:

А) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; Б) $a\sqrt{2}$; В) $2a$; Г) $\frac{a}{2}$.

**8.** Нехай $\alpha$ і $\beta$ — гострі кути прямокутного нерівнобедреного трикутника. Яка з наведених рівностей є правильною?

А) $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \cos\alpha$; В) $\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \sin\beta$;

Б) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\beta$; Г) $\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \sin\beta$.

**9.** Нехай $\alpha$ — гострий кут прямокутного трикутника. Яка з даних рівностей не може виконуватися?

А) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; В) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

Б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$; Г) $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

**10.** Довжина відрізка *x* на рисунку 193 дорівнює:

А) $\frac{\sqrt{2}}{2} a \sin\alpha$;

Б) $\frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg}\alpha$;

В) $\frac{a\sqrt{2}}{2} \cos\alpha$;

Г) $a\sqrt{2} \operatorname{tg}\alpha$.

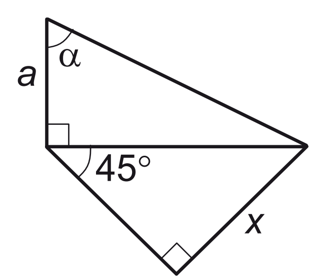



**Рис. 193**

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

# ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

## Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику

Квадрат висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює добутку проєкцій катетів на гіпотенузу.

Квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи та проєкції цього катета на гіпотенузу.

## Теорема Піфагора

У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.

## Синус гострого кута прямокутного трикутника

Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи.

## Косинус гострого кута прямокутного трикутника

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

## Тангенс гострого кута прямокутного трикутника

Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого.

## Тригонометричні формули

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ — основна тригонометрична тотожність

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## Співвідношення між сторонами та значеннями тригонометричних функцій кутів у прямокутному трикутнику

- Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на синус кута, протилежного цьому катету.
- Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на косинус кута, прилеглого до цього катета.
- Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку другого катета на тангенс кута, протилежного першому катету.
- Катет прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення другого катета на тангенс кута, прилеглого до першого катета.
- Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення катета на синус протилежного йому кута.
- Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює частці від ділення катета на косинус прилеглого до нього кута.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

# МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩА МНОГОКУТНИКА

# §4

Вивчивши матеріал цього параграфа, ви дізнаєтеся про формулу, за допомогою якої можна знайти суму кутів опуклого многокутника.

Ви розширите свої уявлення про таку знайому вам величину, як площа.

Ви навчитеся знаходити площу паралелограма, трикутника, трапеції.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## 19. Многокутники

Розглянемо фігуру, яка складається з точок $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., $A_n$ і відрізків $A_1A_2$, $A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_n$, $A_nA_1$ таких, що жодні два сусідніх відрізки не лежать на одній прямій і ніякі два несусідніх відрізки не мають спільних точок (рис. 194).

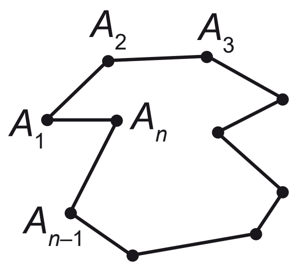



**Рис. 194**

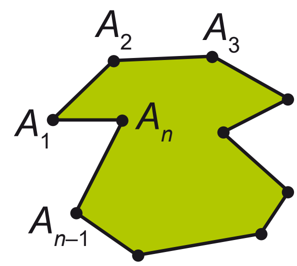



**Рис. 195**

Фігура, утворена цими відрізками, обмежує частину площини, виділену на рисунку 195 зеленим кольором. Цю частину площини разом з відрізками $A_1A_2$, $A_2A_3$, ..., $A_{n-1}A_n$, $A_nA_1$ називають **многокутником**. Точки $A_1$, $A_2$, $A_3$, ..., $A_n$ називають **вершинами** многокутника, а вказані вище відрізки — **сторонами** многокутника.

Сторони, що є сусідніми відрізками, називають **сусідніми сторонами** многокутника. Вершини, які є кінцями однієї сторони, називають **сусідніми вершинами** многокутника.

Дві сусідні сторони многокутника утворюють **кут** многокутника. Наприклад, на рисунку 196 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ є кутами многокутника, а $\varphi$ не є кутом многокутника.

Многокутник називають за кількістю його кутів: трикутник, чотирикутник, п'ятикутник тощо.

Многокутник позначають за його вершинами. Наприклад, на рисунку 197 зображено п'ятикутник *ABCDE*. У позначенні многокутника букви, які стоять поруч, відповідають сусіднім вершинам. Наприклад, п'ятикутник, зображений

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

на рисунку 197, можна також позначити інакше: *CDEAB*, *EABCD*, *EDCBA* тощо.

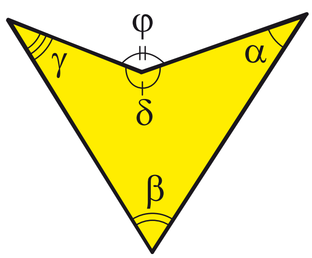



**Рис. 196**

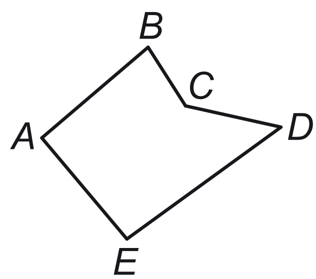



**Рис. 197**

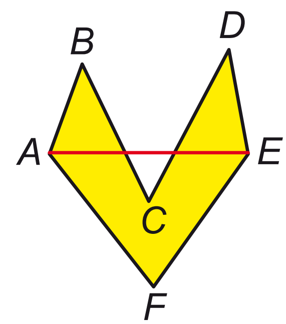



**Рис. 198**

**Периметром** многокутника називають суму довжин усіх його сторін.

Відрізок, який сполучає несусідні вершини многокутника, називають **діагоналлю**. Наприклад, на рисунку 198 відрізок *AE* — діагональ шестикутника *ABCDEF*.

На рисунку 199 зображено многокутник, усі кути якого менші від розгорнутого. Такий многокутник називають **опуклим**. Із сказаного випливає, що будь-який трикутник є опуклим многокутником. Зауважимо, що многокутники, зображені на рисунках 196–198, не є опуклими.

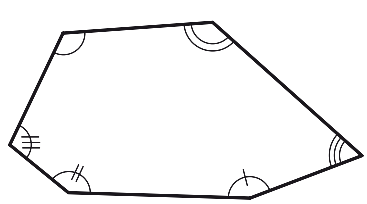


**Рис. 199**

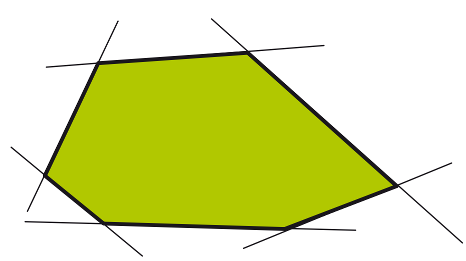


**Рис. 200**

Опуклий многокутник має такі властивості:

1) *опуклий многокутник розташований в одній півплощині відносно будь-якої прямої, що містить його сторону* (рис. 200);

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

2) *опуклий многокутник, відмінний від трикутника, містить будь-яку свою діагональ* (рис. 201).

Якщо многокутник не є опуклим, то він таких властивостей не має (рис. 198, 202).

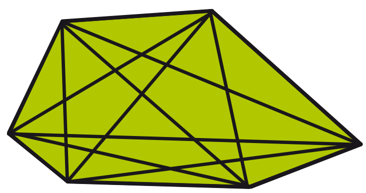


**Рис. 201**

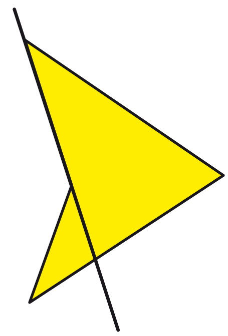


**Рис. 202**

**Теорема 19.1.** ***Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює* 180° (*n* – 2).**

*Доведення.* Для випадку $n = 3$ теорему було доведено в 7 класі (теорема 16.1).

Нехай $n > 3$. На рисунку 203 зображено опуклий $n$-кутник $A_1A_2A_3...A_{n-1}A_n$. Доведемо, що сума всіх його кутів дорівнює $180° (n - 2)$.

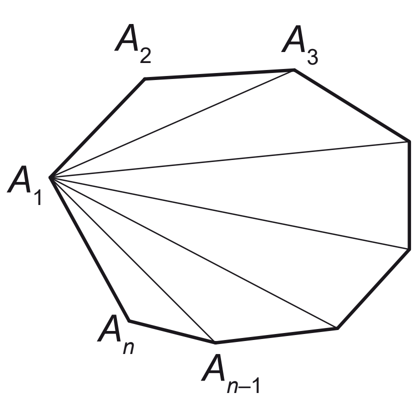



**Рис. 203**

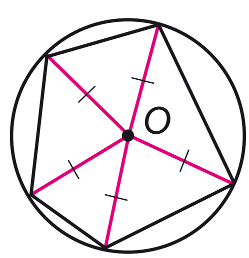



**Рис. 204**

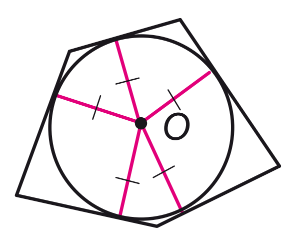



**Рис. 205**

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

Проведемо всі його діагоналі, які виходять із вершини $A_1$. Ці діагоналі розбивають даний многокутник на $(n - 2)$ трикутники. Сума всіх кутів цих трикутників дорівнює сумі кутів $n$-кутника. Оскільки сума кутів кожного трикутника дорівнює $180°$, то шукана сума дорівнює $180° (n - 2)$. ▲

Зазначимо, що наведена теорема є справедливою також для будь-якого многокутника, що не є опуклим.

**Означення. Коло називають описаним навколо многокутника, якщо воно проходить через усі його вершини.**

На рисунку 204 зображено коло, описане навколо многокутника. У цьому разі також говорять, що многокутник **вписаний** у коло.

Центр кола, описаного навколо многокутника, рівновіддалений від усіх його вершин. Отже, цей центр належить серединним перпендикулярам усіх сторін многокутника, вписаного в коло.

Навколо многокутника можна описати коло, якщо існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин. Отже, якщо серединні перпендикуляри всіх сторін многокутника перетинаються в одній точці, то навколо такого многокутника можна описати коло.

**Означення. Коло називають вписаним у многокутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.**

На рисунку 205 зображено коло, вписане в многокутник. У цьому разі також говорять, що многокутник **описаний** навколо кола.

Центр кола, вписаного в многокутник, рівновіддалений від усіх його сторін. Отже, цей центр належить бісектрисам усіх кутів многокутника, описаного навколо кола.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

1. Поясніть, яку фігуру називають многокутником.
2. Що називають периметром многокутника?
3. Що називають діагоналлю многокутника?
4. Який многокутник називають опуклим?
5. Як розташований опуклий многокутник відносно будь-якої прямої, що містить його сторону?
6. Чому дорівнює сума кутів опуклого $n$-кутника?
7. Яке коло називають описаним навколо многокутника?
8. Яка точка є центром кола, описаного навколо многокутника?
9. Яке коло називають вписаним у многокутник?
10. Яка точка є центром кола, вписаного в многокутник?

## ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

**641.**° Накресліть і позначте довільний опуклий семикутник, назвіть усі його вершини та сторони. Проведіть з однієї вершини всі діагоналі, назвіть їх. На скільки трикутників діагоналі розбили семикутник?

**642.**° Накресліть шестикутник, кожний кут якого дорівнює 120°, а кожна сторона — 4 см. Опишіть навколо цього шестикутника коло та впишіть у нього коло.

**643.**° Накресліть п'ятикутник, кожний кут якого дорівнює 108°, а кожна сторона — 3 см. Опишіть навколо цього п'ятикутника коло та впишіть у нього коло.

**644.**° Накресліть коло довільного радіуса, поділіть його на 8 рівних дуг. Використовуючи точки поділу, побудуйте восьмикутник, вписаний у коло.

**645.**° Накресліть коло довільного радіуса, поділіть його на 12 рівних дуг. Використовуючи точки поділу, побудуйте дванадцятикутник, вписаний у коло.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## ВПРАВИ

**646.°** Знайдіть сторони п'ятикутника *ABCDE*, якщо сторона *BC* на 1 см більша за сторону *AB*, *CD* на 2 см більша за *AB*, *DE* на 3 см більша за *AB*, *AE* на 4 см більша за *AB*, а периметр п'ятикутника дорівнює 100 см.

**647.°** Знайдіть суму кутів опуклого: 1) п'ятикутника; 2) восьмикутника; 3) двадцятичотирьохкутника.

**648.°** Знайдіть суму кутів опуклого: 1) дев'ятикутника; 2) шістнадцятикутника.

**649.°** Чи існує опуклий многокутник, сума кутів якого дорівнює: 1) 1800°; 2) 720°; 3) 1600°?

**650.°** Чи існує многокутник, кожний кут якого дорівнює: 1) 150°; 2) 100°?

**651.•** Під час знімання плану земельної ділянки, яка має форму п'ятикутника (рис. 206), отримали такі величини кутів: $\angle A = 116°$; $\angle B = 98°$; $\angle C = 124°$; $\angle D = 102°$; $\angle E = 130°$. Чи правильно було виконано вимірювання?

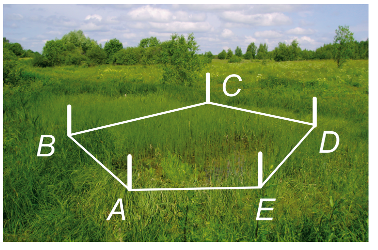



**Рис. 206**

**652.•** Знайдіть кути опуклого шестикутника, якщо вони відносяться як 3 : 3 : 4 : 4 : 5 : 5.

**653.•** Знайдіть кути опуклого семикутника, якщо вони відносяться як 6 : 7 : 8 : 9 : 9 : 10 : 11.

**654.•** Скільки діагоналей можна провести: 1) у дев'ятикутнику; 2) у двадцятикутнику; 3) у *n*-кутнику?

**655.•** В опуклому многокутнику 54 діагоналі. Знайдіть кількість його сторін і суму кутів.

**656.•** Доведіть, що коли всі сторони многокутника, вписаного в коло, рівні, то й усі його кути теж рівні.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**657.•** Доведіть, що коли всі кути многокутника, описаного навколо кола, рівні, то й усі його сторони теж рівні.

**658.••** Усі сторони опуклого п’ятикутника рівні, а кути, прилеглі до однієї зі сторін, — прямі. Знайдіть решту кутів п’ятикутника.

**659.••** Три кути опуклого многокутника дорівнюють по $100°$, а решта — по $120°$. Визначте вид многокутника.

**660.••** Доведіть, що коли кути опуклого шестикутника рівні, то його сторони утворюють три пари паралельних сторін.

**661.••** Доведіть, що коли кути опуклого п’ятикутника рівні, то він не має паралельних сторін.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**662.** У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою тупого кута й ділить середню лінію трапеції на відрізки завдовжки 7 см і 11 см. Знайдіть периметр трапеції.

**663.** Медіана та висота прямокутного трикутника, проведені до гіпотенузи, дорівнюють відповідно 13 см і 12 см. Знайдіть периметр даного трикутника.

**664.** Бісектриса кута $A$ трикутника $ABC$ $(\angle C = 90°)$ ділить катет $BC$ на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть радіус кола, яке проходить через точку $A$, точку $C$ і точку перетину даної бісектриси з катетом $BC$.

## СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

**665.** На колі радіуса 1 позначили 1000 точок. Доведіть, що знайдеться точка, яка належить даному колу, сума відстаней від якої до позначених точок більша за 1000.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## 20. Поняття площі многокутника. Площа прямокутника

З такою величиною, як площа, ви часто стикаєтеся в повсякденному житті: площа квартири, площа дачної ділянки, площа поля тощо.

Досвід підказує вам, що рівні земельні ділянки мають рівні площі; що площа квартири дорівнює сумі площ усіх її приміщень (кімнат, кухні, коридору тощо).

Ви знаєте, що площі земельних ділянок вимірюють у сотках (арах) і гектарах; площі регіонів і держав — у квадратних кілометрах; площу квартири — у квадратних метрах.

На цих практичних знаннях про площу будується означення площі многокутника.

**Означення.** **Площею многокутника називають додатну величину, яка має такі властивості:**

1) **рівні многокутники мають рівні площі;**
2) **якщо многокутник складено з кількох многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників;**
3) **за одиницю виміру площі беруть одиничний квадрат, тобто квадрат зі стороною, яка дорівнює одиниці виміру довжини.**

Виміряти площу многокутника — це означає порівняти його площу з площею одиничного квадрата. У результаті отримують **числове значення площі** даного многокутника. Це число показує, у скільки разів площа даного многокутника відрізняється від площі одиничного квадрата.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

Наприклад, якщо клітинку вашого зошита прийняти за одиничний квадрат, то площа многокутника, зображеного на рисунку 207, дорівнюватиме 11 квадратним одиницям (коротко записують: 11 од.$^2$).

Зазвичай для знаходження площі використовують формули, тобто обчислюють площу многокутника за певними його відомими елементами (сторонами, діагоналями, висотами тощо). Деякі з них ви вже знаєте. Наприклад, ви неодноразово застосовували формулу $S = ab$, де $S$ — площа прямокутника, $a$ і $b$ — довжини його сусідніх сторін.

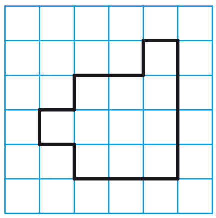


Рис. 207

Для доведення цієї формули буде потрібною така лема.

**Лема.** ***Площа квадрата зі стороною $\frac{1}{n}$ од. ($n$ — натуральне число) дорівнює $\frac{1}{n^2}$ од.$^2$.***

*Доведення.* Розглянемо одиничний квадрат і поділимо його на $n^2$ рівних квадратів зі стороною $\frac{1}{n}$ (рис. 208).

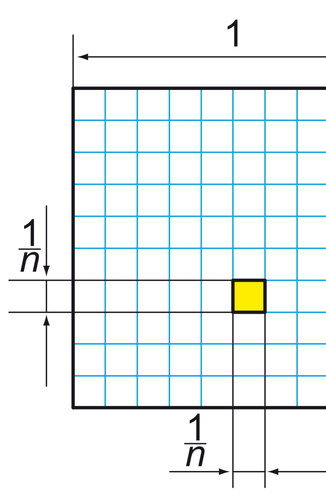



Рис. 208

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

З означення площі многокутника (властивість 1) випливає, що всі ці квадрати мають рівні площі. За властивістю 2 сума площ цих квадратів дорівнює площі одиничного квадрата, тобто 1 од.$^2$. Тому площа кожного маленького квадрата дорівнює $\frac{1}{n^2}$ од.$^2$ ▲

**Теорема 20.1.** ***Площа прямокутника дорівнює добутку довжин його сусідніх сторін.***

*Доведення.* ⊙ На рисунку 209 зображено прямокутник $ABCD$, довжини сусідніх сторін якого дорівнюють $a$ і $b$: $AB = a$, $BC = b$. Доведемо, що площу $S$ прямокутника обчислюють за формулою $S = ab$ для випадку, коли $a$ і $b$ — раціональні числа.

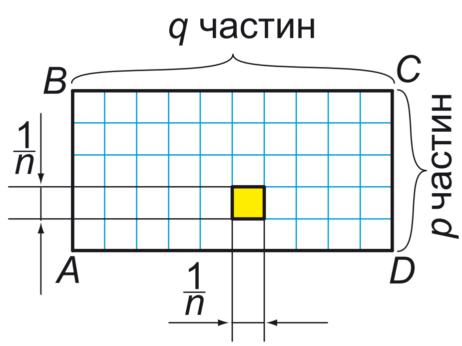



**Рис. 209**

Числа $a$ і $b$ подамо у вигляді звичайних дробів з однаковими знаменниками:

$$a = \frac{p}{n},\ b = \frac{q}{n},$$

де $p$, $q$, $n$ — натуральні числа.

Поділимо сторону $AB$ на $p$ рівних частин, а сторону $BC$ — на $q$ рівних частин. Через точки поділу проведемо прямі, паралельні сторонам прямокутника. Тоді прямокутник буде поділено на $pq$ рівних квадратів зі стороною $\frac{1}{n}$.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

Згідно з лемою площа кожного квадрата дорівнює $\frac{1}{n^2}$. З означення площі (властивість 2) випливає, що площа прямокутника дорівнює сумі площ усіх квадратів, тобто

$$S = \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}}_{pq \text{ доданків}} = pq \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = ab.$$

Розгляд випадку, коли хоча б одне із чисел $a$ або $b$ є ірраціональним, виходить за межі шкільного курсу геометрії. ▲

**Означення.** **Многокутники, які мають рівні площі, називають рівновеликими.**

З означення площі (властивість 1) випливає, що всі рівні фігури рівновеликі. Проте не всі фігури, які мають рівні площі, є рівними. Наприклад, на рисунку 210 зображено два многокутники, кожний з яких складається із семи одиничних квадратів. Ці многокутники рівновеликі, але не рівні.

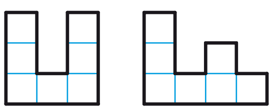


**Рис. 210**

?

1. Що називають площею многокутника?
2. Що означає виміряти площу многокутника?
3. Що показує числове значення площі?
4. Чому дорівнює площа квадрата зі стороною $\frac{1}{n}$ од., де $n$ — натуральне число?
5. Чому дорівнює площа прямокутника?
6. Які многокутники називають рівновеликими?
7. Чи можна стверджувати, що коли дві фігури рівні, то вони рівновеликі?
8. Чи можна стверджувати, що коли дві фігури рівновеликі, то вони рівні?

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## ВПРАВИ

**666.**° Знайдіть сторони прямокутника, якщо одна з них на 5 см більша за другу, а площа прямокутника дорівнює 36 см$^2$.

**667.**° Площа прямокутника дорівнює 270 см$^2$, а його сторони відносяться як 5 : 6. Чому дорівнюють сторони прямокутника?

**668.**° Які з прямокутників, зображених на рисунку 211, рівновеликі?

**669.**° Квадрат зі стороною 12 см і прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює 8 см, рівновеликі. Знайдіть периметр даного прямокутника.

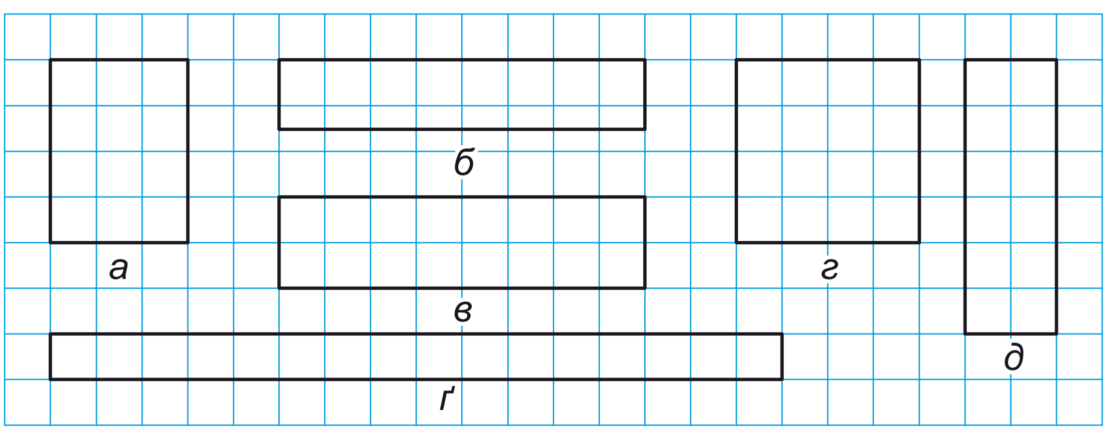



**Рис. 211**

**670.**° Знайдіть периметр квадрата, який рівновеликий прямокутнику зі сторонами 2 см і 32 см.

**671.**° Чи вистачить 5 т гороху, щоб засіяти ним поле, яке має форму прямокутника зі сторонами 500 м і 400 м, якщо на 1 га треба висіяти 260 кг гороху?

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**672.**° Довжина стіни дорівнює 6 м, а висота — 3 м. Чи вистачить п'яти контейнерів кахлю, щоб обкласти ним цю стіну, якщо одна плитка має форму квадрата зі стороною 15 см, а в одному контейнері вміщуються 160 плиток?

**673.**° Витрати емалевої фарби на одношарове покриття становлять 180 г на 1 м$^2$. Чи вистачить 3 кг емалі, щоби пофарбувати стіну завдовжки 6 м і заввишки 3 м?

**674.**° Тиск деякого газу в посудині становить 0,0015 Н/мм$^2$. З якою силою тисне цей газ на стінку посудини прямокутної форми розміром $35 \times 24$ см?

**675.**° Границя міцності сталі деякої марки дорівнює 60 Н/мм$^2$. При якому навантаженні розірветься стержень, поперечний переріз якого є прямокутником зі сторонами 20 мм і 10 мм?

**676.**• Діагональ прямокутника дорівнює $d$ і утворює з однією зі сторін кут $\alpha$. Знайдіть площу прямокутника.

**677.**• Сторона прямокутника дорівнює 15 см і утворює з діагоналлю кут $30^\circ$. Знайдіть площу прямокутника.

**678.**• Знайдіть відношення площ двох квадратів, сторони яких відносяться як: 1) 3 : 4; 2) $2 : \sqrt{5}$.

**679.**• Як відносяться сторони двох квадратів, якщо їхні площі відносяться як: 1) 25 : 36; 2) 3 : 49?

**680.**• Одна зі сторін прямокутника дорівнює 28 см. Як зміниться площа прямокутника, якщо сусідню його сторону зменшити на 5 см?

**681.**• Як зміниться площа прямокутника, якщо:
1) дві його протилежні сторони збільшити в 3 рази;
2) усі його сторони збільшити в 3 рази;
3) дві його протилежні сторони збільшити в 6 разів, а дві інші — зменшити в 3 рази?

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**682.** Як зміниться площа прямокутника, якщо:

1) дві його протилежні сторони зменшити в 4 рази, а дві інші — у 2 рази;
2) дві його протилежні сторони збільшити в 4 рази, а дві інші — зменшити в 4 рази?

**683.** На продовженні сторони *AD* паралелограма *ABCD* за точку *D* позначено точку *M* так, що *AD* = *MD*. Доведіть, що паралелограм *ABCD* і трикутник *ABM* рівновеликі.

**684.** Площа квадрата *ABCD* дорівнює 10 см$^2$ (рис. 212). Чому дорівнює площа прямокутника *BMKD*?

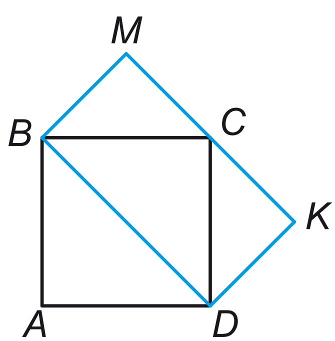



**Рис. 212**

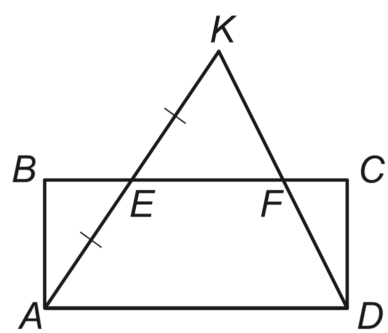



**Рис. 213**

**685.** Доведіть, що коли точка *E* — середина відрізка *AK* (рис. 213), то трикутник *AKD* і прямокутник *ABCD* рівновеликі.

**686.** У скільки разів площа квадрата, описаного навколо кола, більша за площу квадрата, вписаного в це коло?

**687.** Площа прямокутного аркуша паперу, довжини сторін якого виражено цілими числами сантиметрів, дорівнює 12 см$^2$. Скільки квадратів площею 4 см$^2$ можна вирізати із цього аркуша?

**688.** Площа прямокутного аркуша паперу, довжини сторін якого виражено цілими числами сантиметрів, дорівнює 18 см$^2$. Скільки квадратів зі стороною 3 см можна вирізати із цього аркуша?

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**689.•** Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ у відношенні 2 : 7. Знайдіть площу прямокутника, якщо його периметр дорівнює 108 см.

**690.•** Бісектриса кута прямокутника ділить його діагональ у відношенні 1 : 4. Знайдіть периметр прямокутника, якщо його площа дорівнює 36 см$^2$.

**691.*** Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює сумі площ двох даних квадратів.

**692.*** Сторони прямокутника дорівнюють *a* і *b*. Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює площі даного прямокутника.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**693.** Серединний перпендикуляр діагоналі *BD* паралелограма *ABCD* перетинає сторони *AB* і *CD*. Продовження сторін *AD* і *BC* він перетинає в точках *M* і *K* відповідно. Визначте вид чотирикутника *MBKD*.

**694.** Продовження бічних сторін *AB* і *CD* трапеції *ABCD* перетинаються в точці *M*. Знайдіть відрізок *AM*, якщо $AB = 6$ см і $BC : AD = 3 : 4$.

**695.** Знайдіть відстань від точки перетину діагоналей ромба до його сторони, якщо гострий кут ромба дорівнює 30°, а сторона — 8 см.

## СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

**696.** Кожний із двох подібних трикутників розрізали на два трикутники так, що одна з отриманих частин одного трикутника подібна одній із частин другого трикутника. Чи можна стверджувати, що дві інші частини також подібні?

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## 21. Площа паралелограма

**Теорема 21.1.** ***Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони та висоти, яка проведена до цієї сторони.***

*Доведення.* На рисунку 214 зображено паралелограм $ABCD$, площа якого дорівнює $S$, і його висоту $BM$. Доведемо, що $S = BC \cdot BM$.

Проведемо висоту $CN$. Легко показати (зробіть це самостійно), що чотирикутник $MBCN$ — прямокутник. Покажемо, що він рівновеликий даному паралелограму.

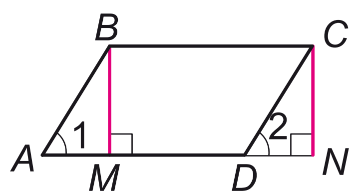



**Рис. 214**

Площа паралелограма дорівнює сумі площ трикутника $ABM$ і трапеції $MBCD$. Площа прямокутника дорівнює сумі площ зазначеної трапеції та трикутника $DCN$. Проте трикутники $ABM$ і $DCN$ рівні за гіпотенузою та гострим кутом (відрізки $AB$ і $CD$ рівні як протилежні сторони паралелограма, кути 1 і 2 рівні як відповідні при паралельних прямих $AB$ і $DC$ та січній $AD$). Отже, ці трикутники рівновеликі. Звідси випливає, що паралелограм $ABCD$ і прямокутник $MBCN$ рівновеликі.

За теоремою 20.1 площа прямокутника дорівнює добутку довжин сторін $BC$ і $BM$. Тоді $S = BC \cdot BM$, де $S$ — площа паралелограма $ABCD$.

Щоб завершити доведення, потрібно розглянути випадки, коли основа $M$ висоти $BM$ не належатиме стороні $AD$

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

(рис. 215) або збігатиметься з вершиною *D* (рис. 216). І в цьому разі паралелограм *ABCD* і прямокутник *MBCN* будуть рівновеликими. Доведіть цей факт самостійно. ▲

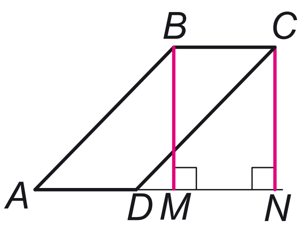



**Рис. 215**

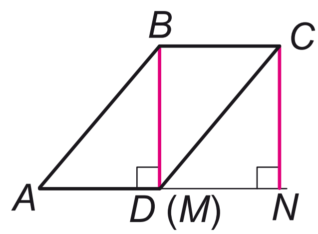



**Рис. 216**

Якщо позначити довжини сторони паралелограма та проведеної до неї висоти відповідно буквами *a* і *h*, то площу *S* паралелограма обчислюють за формулою

$$\boxed{S = ah}$$

1. Чому дорівнює площа паралелограма?
2. За якою формулою обчислюють площу паралелограма?

## ВПРАВИ

**697.**° Знайдіть площу паралелограма, сторона якого дорівнює 14 см, а проведена до неї висота — 6 см.

**698.**° Обчисліть площу паралелограма, зображеного на рисунку 217 (розміри дано в сантиметрах).


*а* *б*

**Рис. 217**

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

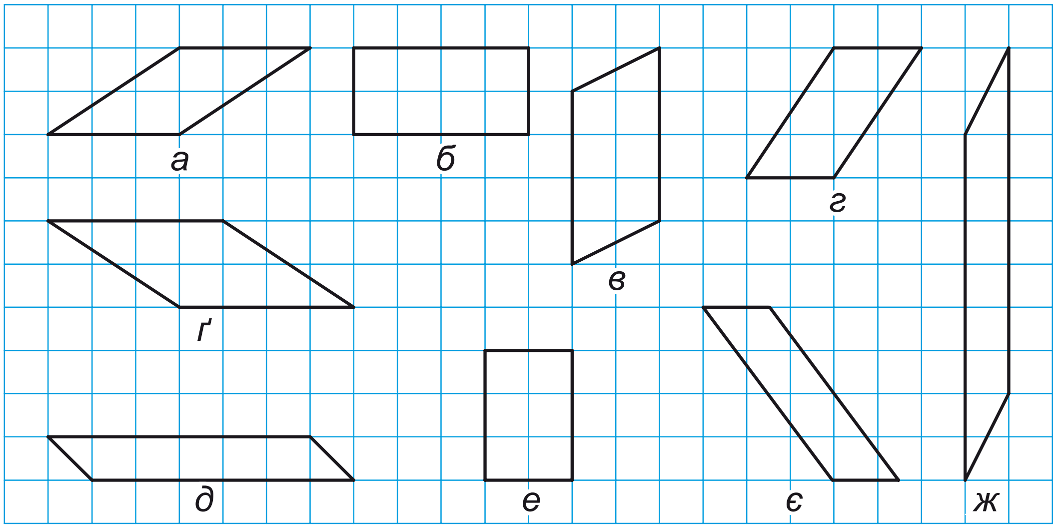



**Рис. 218**

**699.**° Які з паралелограмів, зображених на рисунку 218, рівновеликі?

**700.**° Площа паралелограма *ABCD* (рис. 219) дорівнює *S*. Чому дорівнює площа зафарбованої фігури?

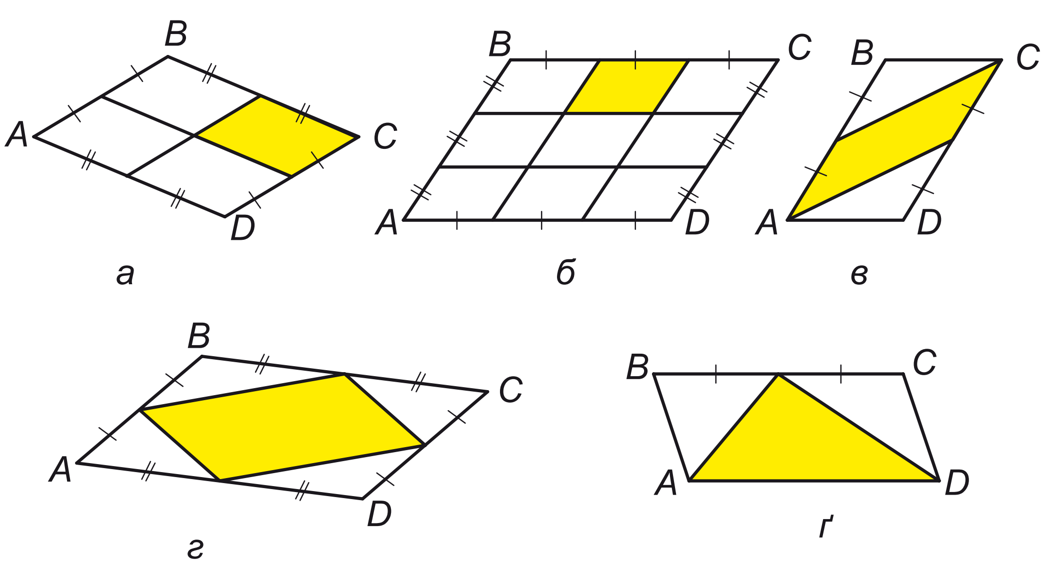



**Рис. 219**

**701.**° Площа паралелограма дорівнює 17 см$^2$, а одна з його сторін — 3,4 см. Знайдіть висоту паралелограма, проведену до цієї сторони.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**702.°** Площа паралелограма дорівнює 40 см², а висоти дорівнюють 5 см і 4 см. Знайдіть сторони цього паралелограма.

**703.°** Заповніть таблицю, де *a* — довжина сторони паралелограма, *h* — довжина висоти, проведеної до цієї сторони, *S* — площа паралелограма:

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a* | 6,2 см | 16 дм | |
| *h* | 7 см | | 0,9 м |
| *S* | | 64 дм² | 5,4 м² |

**704.•** Сторони паралелограма дорівнюють 10 см і 15 см, а одна з висот дорівнює: 1) 6 см; 2) 12 см. Знайдіть другу висоту паралелограма. Скільки розв'язків у кожному випадку має задача?

**705.•** Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 15 см і 25 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до меншої сторони.

**706.•** Знайдіть площу паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 26 см і 24 см, а одна з них перпендикулярна до сторони паралелограма.

**707.•** Діагональ паралелограма, яка дорівнює 18 см, перпендикулярна до однієї зі сторін і утворює кут 30° із другою стороною. Знайдіть площу паралелограма.

**708.•** Сторони паралелограма дорівнюють *a* і *b*, його гострий кут дорівнює $\alpha$. Знайдіть площу паралелограма.

**709.•** Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 60°. Знайдіть площу паралелограма, якщо його висоти дорівнюють 8 см і 12 см.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**710.**• Сторони паралелограма дорівнюють 14 см і 20 см, а кут між його висотами, проведеними з вершини тупого кута, — 45°. Знайдіть площу паралелограма.

**711.**• Знайдіть площу ромба, якщо його висота дорівнює 6 см, а більша діагональ — 10 см.

**712.**• Менша діагональ ромба дорівнює $a$, а один із кутів — 60°. Знайдіть площу ромба.

**713.**• Доведіть, що висоти паралелограма обернено пропорційні сторонам, до яких вони проведені.

**714.**• Сторони паралелограма дорівнюють 9 см і 12 см, а сума двох його нерівних висот дорівнює 14 см. Знайдіть площу паралелограма.

**715.**• Різниця двох сторін паралелограма дорівнює 12 см, а проведені до них висоти дорівнюють 15 см і 10 см. Знайдіть площу паралелограма.

**716.**•• Доведіть, що з усіх паралелограмів зі сторонами $a$ і $b$ найбільшу площу має прямокутник.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**717.** У трикутнику $ABC$ відомо, що $\angle C = 90°$, $AC = 7$ см, $BC = 24$ см, $AM$ — бісектриса. Знайдіть синус, косинус і тангенс кутів $BAC$ і $AMC$.

**718.** У рівнобедреному трикутнику $ABC$ з основою $AC$ медіани $AM$ і $CK$ перетинаються в точці $O$. Доведіть, що трикутник $AOC$ рівнобедрений, і знайдіть його бічні сторони, якщо $AM = 21$ см.

**719.** На медіані $AM$ трикутника $ABC$ позначено точку $D$ так, що $AD : DM = 1 : 3$. Через точку $D$ проведено пряму, паралельну стороні $AC$. У якому відношенні ця пряма ділить сторону $BC$, рахуючи від вершини $C$?

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

**720.** Доведіть, що в опуклому дев'ятикутнику знайдуться дві діагоналі, кут між якими менший від $7°$.

## 22. Площа трикутника

**Теорема 22.1.** ***Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони та проведеної до неї висоти.***

*Доведення.* На рисунку 220 зображено трикутник $ABC$, площа якого дорівнює $S$, і його висоту $BM$. Доведемо, що $S = \frac{1}{2} AC \cdot BM$.

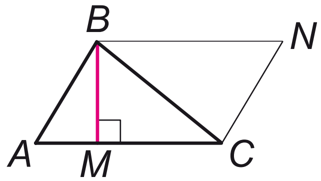


**Рис. 220**

Через вершини $B$ і $C$ трикутника проведемо прямі, паралельні сторонам $AC$ і $AB$ відповідно (рис. 220). Нехай ці прямі перетинаються в точці $N$. Чотирикутник $ABNC$ — паралелограм за означенням. Трикутники $ABC$ і $NCB$ рівні (доведіть це самостійно). Отже, їхні площі також рівні. Тоді площа трикутника $ABC$ дорівнює половині площі паралелограма $ABNC$. Висота $BM$ трикутника $ABC$ є також висотою паралелограма $ABNC$. Звідси $S = \frac{1}{2} AC \cdot BM$. ▲

Якщо скористатися позначеннями для висот і сторін трикутника $ABC$, то згідно з доведеною теоремою маємо:

$$S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c,$$

де $S$ — площа трикутника.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**Наслідок.** ***Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів.***

Доведіть цю теорему самостійно.

**Задача.** Доведіть, що площа ромба дорівнює половині добутку його діагоналей.

*Розв'язання.* На рисунку 221 зображено ромб $ABCD$, площа якого дорівнює $S$. Його діагоналі $AC$ і $BD$ перетинаються в точці $O$. Доведемо, що $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$.

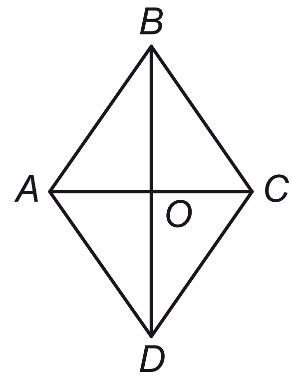



**Рис. 221**

Оскільки діагоналі ромба перпендикулярні, то відрізки $AO$ і $CO$ є висотами трикутників $BAD$ і $BCD$ відповідно. Тоді можна записати:

$$S = S_{BAD} + S_{BCD} = \frac{1}{2} BD \cdot AO + \frac{1}{2} BD \cdot CO =$$

$$= \frac{1}{2} BD (AO + CO) = \frac{1}{2} BD \cdot AC.$$ ●

1. Як знайти площу трикутника, якщо відомо його сторону та висоту, проведену до неї?
2. Як знайти площу прямокутного трикутника, якщо відомо його катети?

## ВПРАВИ

**721.°** Сторона трикутника дорівнює 12 см, а висота, проведена до неї, — 2,5 см. Знайдіть площу трикутника.

**722.°** Знайдіть площу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 10 см і 18 см.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**723.**° Які з трикутників, зображених на рисунку 222, рівновеликі?

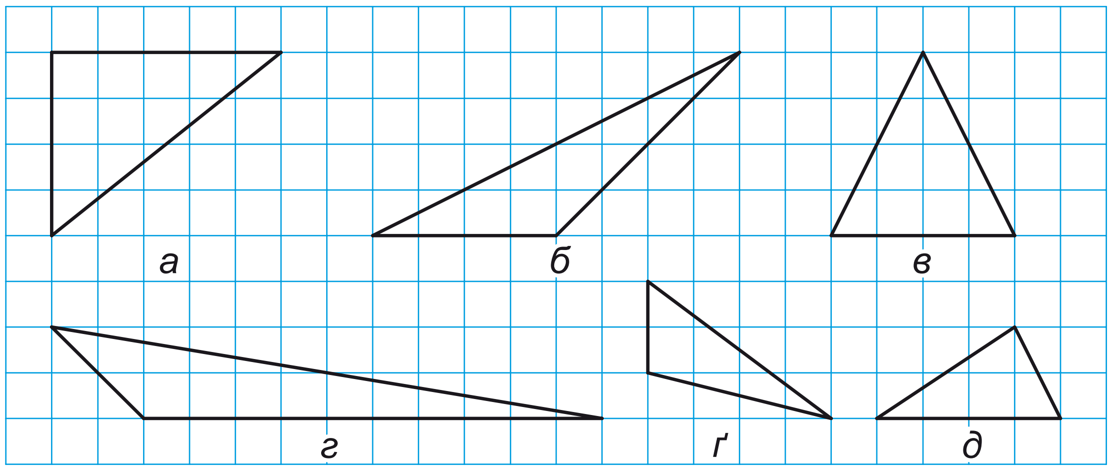



**Рис. 222**

**724.**° Обчисліть площі трикутників, зображених на рисунку 223, якщо довжина сторони клітинки дорівнює одиниці довжини.

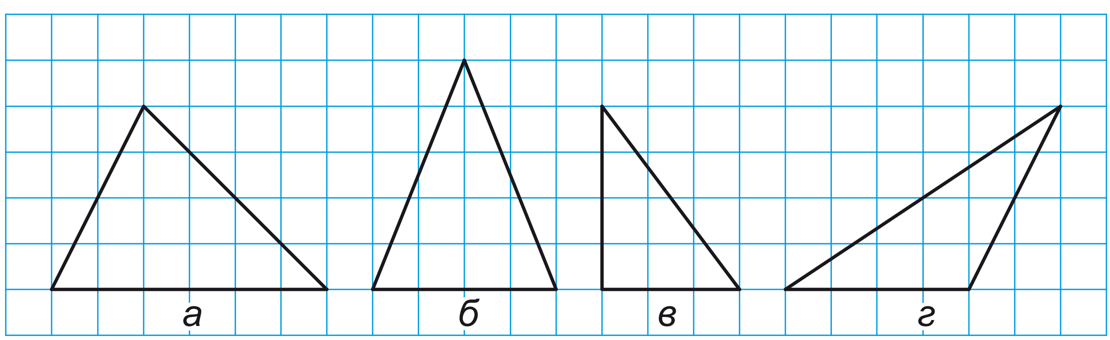



**Рис. 223**

**725.**° Площа трикутника дорівнює 48 см². Знайдіть сторону трикутника, якщо висота, проведена до цієї сторони, дорівнює 8 см.

**726.**° Відомо, що дві сторони трикутника дорівнюють 24 см і 9 см, а висота, проведена до більшої з відомих сторін, — 6 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до меншої з відомих сторін.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**727.**° Заповніть таблицю, де *a* — довжина сторони трикутника, *h* — довжина висоти, проведеної до неї, *S* — площа трикутника:

| | | | |
|---|---|---|---|
| *a* | 2,4 см | 9 дм | |
| *h* | 4 см | | 5 м |
| *S* | | 81 дм$^2$ | 65 м$^2$ |

**728.**° Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, основа якого дорівнює 24 см, а бічна сторона — 13 см.

**729.**° Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 61 см, а висота, проведена до основи, — 60 см. Знайдіть площу трикутника.

**730.**° Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, проведена до гіпотенузи, — 18,5 см. Знайдіть площу трикутника.

**731.**• Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо висота, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки завдовжки 3 см і 27 см.

**732.**• Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 8 см, а проєкція одного з катетів на гіпотенузу — 6 см. Знайдіть площу трикутника.

**733.**• Висота *BD* трикутника *ABC* ділить його сторону *AC* на відрізки *AD* і *CD*. Знайдіть площу трикутника *ABC*, якщо $BC = \sqrt{37}$ см, $\angle A = 30°$, $CD = 5$ см.

**734.**• Висота *AM* трикутника *ABC* ділить його сторону *BC* на відрізки *BM* і *MC*. Знайдіть площу трикутника *ABC*, якщо $AB = 10\sqrt{2}$ см, $AC = 26$ см, $\angle B = 45°$.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**735.**° Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює $b$, а кут при основі дорівнює $\alpha$.

**736.**° Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює $h$, а кут при вершині дорівнює $\beta$. Знайдіть площу трикутника.

**737.**° Знайдіть площу рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює $a$.

**738.**° Знайдіть площу рівнобедреного прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює $c$.

**739.**° Знайдіть висоту прямокутного трикутника, проведену до гіпотенузи, якщо його катети дорівнюють 10 см і 24 см.

**740.**° Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить його гіпотенузу на відрізки завдовжки 8 см і 12 см. Знайдіть площу трикутника.

**741.**° Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 54 см, а висота, проведена до основи, — 9 см.

**742.**° Основа рівнобедреного трикутника відноситься до його висоти, опущеної на основу, як 8 : 3, бічна сторона трикутника дорівнює 40 см. Знайдіть площу трикутника.

**743.**° Доведіть, що площа опуклого чотирикутника, діагоналі якого перпендикулярні, дорівнює половині їхнього добутку.

**744.**° Площа ромба дорівнює 120 см$^2$, а його діагоналі відносяться як 5 : 12. Знайдіть периметр ромба.

**745.**° Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює 25 см, а сума діагоналей — 62 см.

**746.**° Знайдіть площу ромба, сторона якого дорівнює 39 см, а різниця діагоналей — 42 см.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**747.**• Дано пряму $l$ і паралельний їй відрізок $AB$. Доведіть, що всі трикутники $AXB$, де $X$ — довільна точка прямої $l$, рівновеликі.

**748.**• Доведіть, що коли висота одного трикутника дорівнює висоті другого трикутника, то площі даних трикутників відносяться як їхні сторони, до яких проведено ці висоти.

**749.**• Доведіть, що медіана трикутника розбиває його на два рівновеликих трикутники.

**750.**• На стороні $AC$ трикутника $ABC$ позначено точку $M$ так, що $\frac{AM}{MC} = \frac{m}{n}$. Доведіть, що $\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \frac{m}{n}$.

**751.**• У трикутнику провели всі три медіани. Доведіть, що вони розбивають трикутник на шість рівновеликих трикутників.

**752.**• Через вершину $B$ трикутника $ABC$ проведіть дві прямі так, щоб вони розбили даний трикутник на три рівновеликих трикутники.

**753.**• Через вершину паралелограма проведіть прямі так, щоб вони розбили даний паралелограм: 1) на чотири рівновеликих многокутники; 2) п'ять рівновеликих многокутників.

**754.**• Через вершину ромба проведіть дві прямі так, щоб вони розбили даний ромб на три рівновеликих многокутники.

**755.**• Побудуйте трикутник, рівновеликий даному паралелограму.

**756.**• У трикутнику проведено три висоти. Доведіть, що до найбільшої сторони трикутника проведено найменшу висоту.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**757.**•• На стороні $AC$ трикутника $ABC$ позначено точку $M$ так, що $\frac{AM}{MC} = \frac{m}{n}$. Нехай $X$ — довільна внутрішня точка відрізка $BM$. Доведіть, що $\frac{S_{ABX}}{S_{CBX}} = \frac{m}{n}$.

**758.**•• Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить його гіпотенузу на відрізки, один з яких на 14 см більший за другий. Знайдіть площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 4 см.

**759.**•• У прямокутному трикутнику $ABC$ до гіпотенузи $AB$ проведено висоту $CM$. Площа трикутника $ACM$ дорівнює 6 см$^2$, а площа трикутника $BCM$ — 54 см$^2$. Знайдіть сторони трикутника $ABC$.

**760.**•• Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса його гострого кута ділить протилежний катет на відрізки завдовжки 21 см і 35 см.

**761.**•• Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 2 см і 6 см.

**762.**•• Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, ділить його висоту, проведену до основи, на відрізки, довжини яких дорівнюють 34 см і 16 см. Знайдіть площу даного трикутника.

**763.**•• У рівнобедрений трикутник вписано коло. Точка дотику ділить бічну сторону трикутника у відношенні 9 : 8, рахуючи від вершини рівнобедреного трикутника. Знайдіть площу трикутника, якщо радіус вписаного кола дорівнює 16 см.

**764.*** На продовженнях сторін $AB$, $BC$, $AC$ рівностороннього трикутника $ABC$ за точки $B$, $C$ і $A$ відповідно позначено точки $D$, $E$ і $F$ так, що $BD = CE = AF = 2AB$. Знайдіть

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

площу трикутника *DEF*, якщо площа трикутника *ABC* дорівнює 1 см$^2$.

**765.*** У трикутнику *ABC* позначено точку *M* так, що площі трикутників *AMB*, *BMC* і *AMC* рівні. Доведіть, що *M* — точка перетину медіан трикутника *ABC*.

**766.*** На стороні *AC* трикутника *ABC* позначено точку *D*. Проведіть через цю точку пряму так, щоб вона розбила даний трикутник на два рівновеликих многокутники.

**767.*** Доведіть, що сума відстаней від довільної точки рівностороннього трикутника до його сторін є сталою для даного трикутника.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**768.** У рівнобедреному трикутнику *ABC* ($AB = BC$) бісектриса кута *A* перетинає сторону *BC* у точці *M*. Знайдіть кути трикутника *ABC*, якщо $\angle AMB = 117°$.

**769.** У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 18 см і 12 см. Бічна сторона утворює з основою кут 30°. Знайдіть діагональ трапеції.

**770.** Центр кола, вписаного в рівнобічну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони на 12 см і 16 см. Знайдіть периметр трапеції.

## СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

**771.** На площині дано *n* точок ($n > 3$), жодні три з яких не лежать на одній прямій. Доведіть, що існує трикутник з вершинами в даних точках, який не містить жодної з решти ($n - 3$) точок.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## 23. Площа трапеції

**Теорема 23.1.** ***Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ і висоти.***

*Доведення.* На рисунку 224 зображено трапецію $ABCD$ ($AD \parallel BC$), площа якої дорівнює $S$. Відрізок $CN$ — висота цієї трапеції. Доведемо, що $S = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CN$.

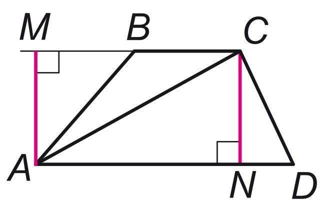



**Рис. 224**

Проведемо діагональ $AC$ і висоту $AM$ трапеції. Відрізки $AM$ і $CN$ є висотами трикутників $ABC$ і $ACD$ відповідно.

Маємо:

$$S = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}BC \cdot AM + \frac{1}{2}AD \cdot CN =$$
$$= \frac{1}{2}BC \cdot CN + \frac{1}{2}AD \cdot CN = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CN. \blacktriangle$$

Якщо позначити довжини основ трапеції та її висоти відповідно буквами $a$, $b$ і $h$, то площу $S$ трапеції обчислюють за формулою

$$\boxed{S = \frac{a+b}{2} \cdot h}$$

**Наслідок.** ***Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії та висоти.***

1. Сформулюйте теорему про площу трапеції.
2. За якою формулою обчислюють площу трапеції?

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## ВПРАВИ

**772.°** Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 7 см і 12 см, а висота — 6 см.

**773.°** Знайдіть площу трапеції, середня лінія якої дорівнює 18 см, а висота — 9 см.

**774.°** Площа трапеції дорівнює 96 см$^2$, а її висота — 3 см. Знайдіть основи трапеції, якщо вони відносяться як 3 : 5.

**775.°** Площа трапеції дорівнює 45 см$^2$, одна з основ — 8 см, а висота — 6 см. Знайдіть другу основу трапеції.

**776.°** Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 14 см і 16 см, а діагональ — 17 см.

**777.°** Чому дорівнює площа прямокутної трапеції, основи якої дорівнюють 9 см і 16 см, а більша бічна сторона — $\sqrt{65}$ см?

**778.°** Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 14 см і 32 см, а бічна сторона — 15 см.

**779.°** На рисунку 225 зображено поперечний переріз траншеї, який має форму трапеції. Обчисліть площу цього поперечного перерізу (розміри дано в метрах).

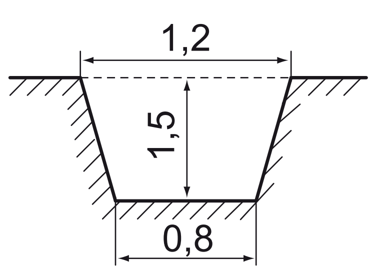
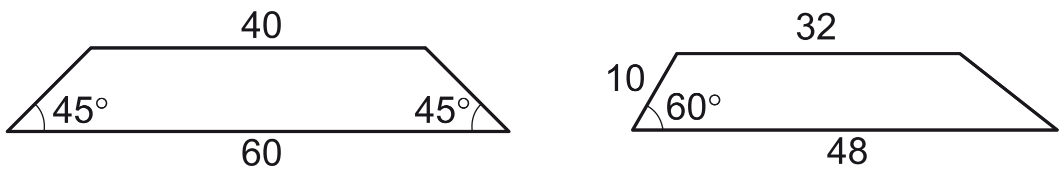



**Рис. 225**

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**780.**° Знайдіть площу трапеції, зображеної на рисунку 226 (розміри дано в сантиметрах).




*а* *б*

**Рис. 226**

**781.**° Знайдіть площу трапеції, зображеної на рисунку 227 (розміри дано в сантиметрах).

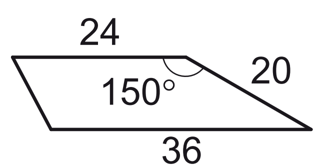



**Рис. 227**

**782.**• У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута й ділить середню лінію трапеції на відрізки завдовжки 6 см і 12 см. Знайдіть площу трапеції.

**783.**• Основи прямокутної трапеції дорівнюють 9 см і 17 см, а діагональ є бісектрисою її тупого кута. Обчисліть площу трапеції.

**784.**• Точка перетину бісектрис гострих кутів при основі трапеції належить другій основі. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють 17 см і 25 см, а висота — 15 см.

**785.**• Точка перетину бісектрис тупих кутів при основі трапеції належить другій основі. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють 10 см і 17 см, а висота — 8 см.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**786.**• Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює $20\sqrt{3}$ см і утворює з основою кут $60^\circ$. Знайдіть площу трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

**787.**• Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 32 см і 50 см. Чому дорівнює площа даної трапеції, якщо в неї можна вписати коло?

**788.**• Менша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 8 см, а гострий кут — $45^\circ$. Знайдіть площу трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

**789.**• Більша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 28 см, а гострий кут — $30^\circ$. Знайдіть площу трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

**790.**• Доведіть, що пряма, яка проходить через середину середньої лінії трапеції та перетинає її основи, розбиває дану трапецію на два рівновеликих многокутники.

**791.**• Побудуйте рівновеликий даній трапеції:
1) паралелограм, відмінний від прямокутника;
2) прямокутник.

**792.**• Побудуйте трикутник, рівновеликий даній трапеції.

**793.**•• Знайдіть площу рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 24 см і 40 см, а діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

**794.**•• Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони, яка дорівнює 15 см. Знайдіть площу трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо неї, дорівнює 12,5 см.

**795.**•• Діагоналі трапеції перпендикулярні, одна з них дорівнює 48 см, а середня лінія трапеції — 25 см. Знайдіть площу трапеції.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**796.••** Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута й перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть площу трапеції, якщо її менша основа дорівнює $a$.

**797.••** У рівнобічну трапецію вписано коло. Одна з її бічних сторін точкою дотику ділиться на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. Знайдіть площу трапеції.

**798.••** У прямокутну трапецію вписано коло радіуса 12 см. Більша з бічних сторін точкою дотику ділиться на два відрізки, більший з яких дорівнює 16 см. Знайдіть площу трапеції.

**799.••** Діагональ рівнобічної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 12 см, а бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

**800.••** Більша діагональ прямокутної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 9 см. Більша бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

**801.••** У трапеції $ABCD$ відомо, що $BC \parallel AD$, точка $M$ — середина сторони $AB$. Знайдіть площу трикутника $CMD$, якщо площа даної трапеції дорівнює $S$.

## ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

**802.** Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 50 см, а периметр трикутника $ABD$ — 40 см. Знайдіть сторони паралелограма, якщо $AD = BD$.

**803.** Коло, побудоване на діагоналі $AC$ ромба $ABCD$ як на діаметрі, проходить через середину сторони $AB$. Знайдіть кути ромба.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**804.** На сторонах $AB$, $BC$ і $AC$ трикутника $ABC$ позначили відповідно точки $M$, $K$ і $D$ так, що $MK \parallel AC$, $DK \parallel AB$, $BK : KC = 3 : 2$. Знайдіть периметр чотирикутника $AMKD$, якщо $AC = 15$ см, $AB = 25$ см.

## СПОСТЕРІГАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУЮЙТЕ, ФАНТАЗУЙТЕ

**805.** Чи можна квадрат зі стороною 1,5 см покрити трьома квадратами зі стороною 1 см?

## РІВНОСКЛАДЕНІ Й РІВНОВЕЛИКІ МНОГОКУТНИКИ

Якщо деякий многокутник можна розрізати на частини та скласти з них інший многокутник, то такі многокутники називають **рівноскладеними**.

Наприклад, якщо прямокутник розрізати вздовж його діагоналі (рис. 228), то отримаємо два рівних прямокутних трикутники, з яких можна скласти рівнобедрений трикутник (рис. 229). Фігури на рисунках 228 і 229 — рівноскладені.

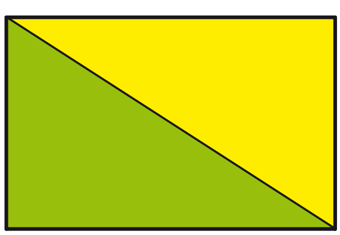


**Рис. 228**

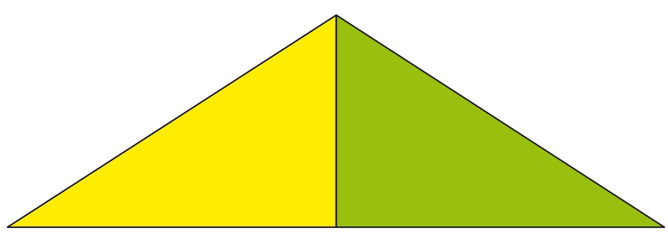


**Рис. 229**

Очевидно, що рівноскладені многокутники є рівновеликими. Цей факт застосовують під час доведення теорем і розв'язування задач. Наприклад, доводячи теорему 21.1, ми фактично розрізали паралелограм на трикутник $ABM$ і трапецію $MBCD$, з яких склали прямокутник $MBCN$ (див. рис. 215).

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

Якщо трикутник розрізати вздовж середньої лінії, то з отриманих трикутника та трапеції можна скласти паралелограм (рис. 230).

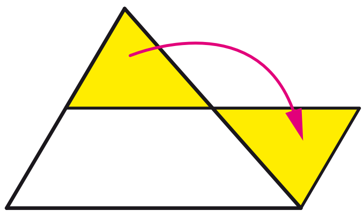


**Рис. 230**

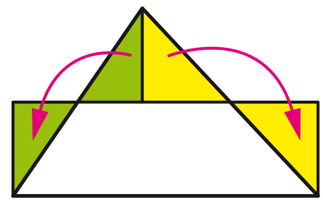


**Рис. 231**

Легко встановити (зробіть це самостійно), що таке розрізання трикутника приводить до ще одного доведення теореми про площу трикутника (теорема 22.1). Цій самій меті слугує розрізання трикутника на частини, з яких можна скласти прямокутник (рис. 231).

Евклід у своїй знаменитій книзі «Начала» формулює теорему Піфагора так:

«Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на катетах».

Якщо показати, що можна розрізати квадрати, побудовані на катетах, на частини та скласти із цих частин квадрат зі стороною, яка дорівнює гіпотенузі, то тим самим буде доведено теорему Піфагора.

На рисунку 232 показано один із можливих способів такого розрізання. Квадрати, побудовані на катетах, розрізано на частини, площі яких дорівнюють $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$. Із цих частин складено квадрат, побудований на гіпотенузі.

З означення площі многокутника випливає, що рівноскладені многокутники є рівновеликими. Проте зовсім неочевидною є така теорема.

**Теорема.** ***Будь-які два рівновеликих многокутники є рівноскладеними.***

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

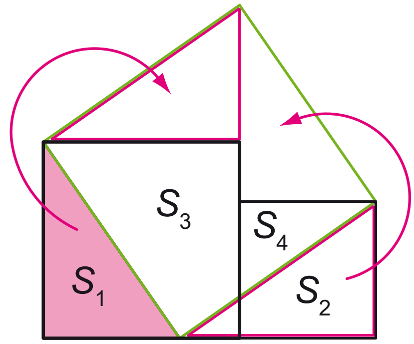



**Рис. 232**

Уперше цей факт довів у 1832 р. угорський математик Фаркаш Бояї. Трохи згодом німецький математик Пауль Гервін знайшов інше доведення. Тому цю теорему називають теоремою Бояї—Гервіна.

## ВПРАВИ

**1.** Доведіть, що трапеція є рівноскладеною з паралелограмом, основа якого дорівнює середній лінії трапеції, а висота — висоті трапеції.

**2.** Доведіть, що площа трапеції дорівнює добутку бічної сторони та перпендикуляра, опущеного на пряму, яка містить цю сторону, із середини другої бічної сторони.

**3.** У чотирикутнику $ABCD$ кути $ABC$ і $ADC$ прямі, а сторони $AB$ і $BC$ рівні (рис. 233). Відомо, що $BH \perp AD$ і $BH = 1$. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$.

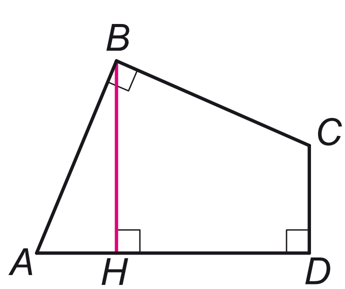



**Рис. 233**

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## ТЕОРЕМА ЧЕВИ

На сторонах $BC$, $CA$ і $AB$ трикутника $ABC$ позначимо довільні точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ (рис. 234). Кожен із відрізків $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ називають **чевіаною** трикутника $ABC$. Така назва пов'язана з ім'ям італійського інженера й математика Джованні Чеви (1648–1734), який відкрив дивовижну теорему.

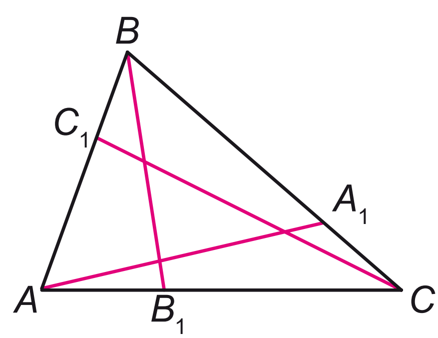



**Рис. 234**

Якщо точки $A_1$, $B_1$, і $C_1$ узято так, що чевіани є бісектрисами, або медіанами, або висотами гострокутного трикутника, то ці чевіани перетинаються в одній точці.

Якщо три прямі перетинаються в одній точці, то їх називають **конкурентними**.

Теорема Чеви дає загальний критерій конкурентності трьох довільних чевіан.

**Теорема.** ***Для того щоб чевіани $AA_1$, $BB_1$ і $CC_1$ трикутника $ABC$ перетиналися в одній точці, необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність***

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \qquad (*)$$

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

*Доведення*. Доведемо спочатку необхідну умову конкурентності: якщо чевіани $AA_1$, $BB_1$ і $CC_1$ перетинаються в одній точці, то виконується рівність (*).

Скориставшись результатом ключової задачі 757, можна записати (рис. 235):

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{S_{ADC}}{S_{BDC}}, \quad \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{ABD}}{S_{ADC}}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{S_{BDC}}{S_{ABD}}.$$

Перемноживши записані рівності, отримаємо рівність (*).

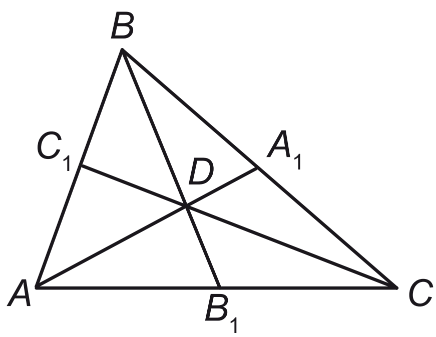



**Рис. 235**

Доведемо тепер достатню умову конкурентності: якщо виконується рівність (*), то чевіани $AA_1$, $BB_1$ і $CC_1$ перетинаються в одній точці.

Нехай чевіани $AA_1$ і $BB_1$ перетинаються в точці $D$, а чевіана, яка проходить через вершину $C$ і точку $D$, перетинає сторону $AB$ у деякій точці $C_2$. З доведеного вище можна записати:

$$\frac{AC_2}{C_2B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

Зіставляючи цю рівність з рівністю (*), доходимо висновку, що $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC_2}{C_2B}$, тобто точки $C_1$ і $C_2$ ділять відрізок $AB$ в одному й тому самому відношенні, а отже, ці точки збігаються. Таким чином, пряма $CD$ перетинає сторону $AB$ у точці $C_1$. ▲

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## ВПРАВИ

**1.** Доведіть, що:

1) медіани трикутника конкурентні;

2) бісектриси трикутника конкурентні;

3) висоти гострокутного трикутника конкурентні.

**2.** Нехай $A_1$, $B_1$, $C_1$ — точки дотику вписаного кола відповідно до сторін $BC$, $AC$, $AB$ трикутника $ABC$. Доведіть, що чевіани $AA_1$, $BB_1$ і $CC_1$ конкурентні.

**3.** Прямі $AP$, $BP$ і $CP$ перетинають сторони трикутника $ABC$ у точках $A_1$, $B_1$ і $C_1$ відповідно. Доведіть, що прямі, які проходять через середини сторін $BC$, $CA$ і $AB$ паралельно прямим $AP$, $BP$ і $CP$ відповідно, конкурентні.

*Вказівка*. Застосуйте теорему Чеви до трикутника, вершини якого є серединами сторін трикутника $ABC$.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## ЗАВДАННЯ № 4 «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

**1.** Скільки сторін в опуклому $n$-кутнику, якщо сума його кутів дорівнює $1260°$?

А) 7; Б) 9; В) 11; Г) 13.

**2.** В опуклому $n$-кутнику 14 діагоналей. Чому дорівнює сума його кутів?

А) $1000°$; Б) $800°$; В) $900°$; Г) $720°$.

**3.** Як зміниться площа прямокутника, якщо кожну з його сторін зменшити в 10 разів?

А) Зменшиться в 100 разів;
Б) зменшиться у 20 разів;
В) зменшиться в 10 разів;
Г) зменшиться в 1000 разів.

**4.** Площа паралелограма дорівнює 80 см$^2$, а одна з його сторін — 16 см. Якої довжини може бути сусідня сторона паралелограма?

А) 2 см; Б) 3 см; В) 4 см; Г) 6 см.

**5.** На стороні $BC$ паралелограма $ABCD$ позначено точку $M$ так, що $BM : MC = 1 : 3$. Чому дорівнює площа трикутника $ABM$, якщо площа паралелограма дорівнює $S$?

А) $\frac{S}{8}$; В) $\frac{S}{16}$;

Б) $\frac{S}{4}$; Г) $\frac{S}{2}$.

**6.** На рисунку 236 площа кожного з маленьких квадратів дорівнює 4 см$^2$. Чому дорівнює площа великого квадрата?

А) 16 см$^2$; В) 32 см$^2$;

Б) 20 см$^2$; Г) 40 см$^2$.

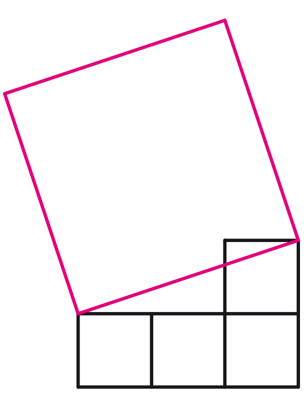


Рис. 236

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**7.** У коло радіуса 1 см вписано квадрат і рівносторонній трикутник. Чому дорівнює відношення площі даного трикутника до площі квадрата?

А) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; Б) $3\sqrt{3}$; В) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; Г) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

**8.** Точки $O_1$ і $O_2$ — центри рівних кіл, які мають тільки одну спільну точку (рис. 237), $BO_2 \perp O_1O_2$, $AB = 10$ см. Чому дорівнює площа трикутника $ABO_2$?

А) 10 см$^2$; Б) 15 см$^2$; В) 18 см$^2$; Г) 20 см$^2$.

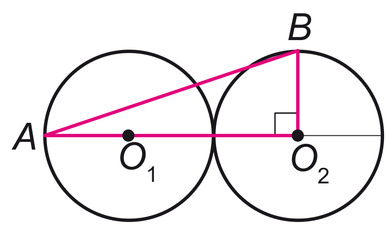



**Рис. 237**

**9.** Дано дві точки $A$ і $B$. Геометричним місцем точок $X$ таких, що площі трикутників $AXB$ дорівнюють даному числу $S$, є:

А) коло з діаметром $AB$;
Б) серединний перпендикуляр відрізка $AB$;
В) пряма, паралельна $AB$;
Г) дві прямі, паралельні $AB$.

**10.** Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні та ділять її середню лінію на три рівні частини. Чому дорівнює площа трапеції, якщо її більша основа дорівнює 12 см?

А) 50 см$^2$; Б) 64 см$^2$; В) 81 см$^2$; Г) 144 см$^2$.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

# ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 4

**Сума кутів опуклого *n*-кутника**

Сума кутів опуклого *n*-кутника дорівнює $180° (n - 2)$.

**Коло, описане навколо многокутника**

Коло називають описаним навколо многокутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

**Коло, вписане в многокутник**

Коло називають вписаним у многокутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

**Площа многокутника**

Площею многокутника називають додатну величину, яка має такі властивості:

1) рівні многокутники мають рівні площі;
2) якщо многокутник складено з кількох многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників;
3) за одиницю виміру площі беруть одиничний квадрат, тобто квадрат зі стороною, яка дорівнює одиниці виміру довжини.

**Площа прямокутника**

Площа прямокутника дорівнює добутку довжин його сусідніх сторін.

**Рівновеликі многокутники**

Многокутники, які мають рівні площі, називають рівновеликими.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## Площа паралелограма

Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони та висоти, яка проведена до цієї сторони.

## Площа трикутника

Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони та проведеної до неї висоти.

## Площа прямокутного трикутника

Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів.

## Площа трапеції

- Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ і висоти.
- Площа трапеції дорівнює добутку її середньої лінії та висоти.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

# Вправи для повторення курсу геометрії 8 класу

## 1. Чотирикутники

**806.** Знайдіть периметр паралелограма, якщо бісектриса одного з його кутів ділить сторону паралелограма на відрізки завдовжки 9 см і 14 см.

**807.** Бісектриса кута $BAD$ паралелограма $ABCD$ перетинає сторону $BC$ у точці $M$ так, що $BM : MC = 5 : 4$. Знайдіть сторони паралелограма, якщо периметр трикутника $BOC$ на 8 см більший за периметр трикутника $COD$, де $O$ — точка перетину діагоналей паралелограма.

**808.** У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $2\angle ADB = \angle A + \angle BDC$. Знайдіть кут $ADB$.

**809.** У паралелограмі $ABCD$ відомо, що $AB = a$, $BC = b$, $a > b$. Кола, вписані в трикутники $ABD$ і $CBD$, дотикаються до діагоналі $BD$ у точках $M$ і $K$ відповідно. Знайдіть відрізок $MK$.

**810.** Скільки різних паралелограмів можна скласти з двох рівних трикутників, якщо вони:

1) різносторонні;
2) рівнобедрені;
3) рівносторонні?

**811.** Чи є правильним твердження:

1) якщо діагоналі чотирикутника рівні, то цей чотирикутник — паралелограм;
2) якщо дві сторони чотирикутника паралельні й точка перетину діагоналей рівновіддалена від цих сторін, то цей чотирикутник — паралелограм;

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

3) якщо дві сторони чотирикутника паралельні, а дві інші — рівні, то цей чотирикутник — паралелограм;
4) якщо бісектриси двох протилежних кутів чотирикутника перпендикулярні до бісектриси його третього кута, то цей чотирикутник — паралелограм;
5) якщо діагональ чотирикутника розбиває його на два рівних трикутники, то цей чотирикутник — паралелограм;
6) якщо кожна діагональ чотирикутника розбиває його на два рівних трикутники, то цей чотирикутник — паралелограм;
7) якщо кожні дві протилежні вершини чотирикутника рівновіддалені від діагоналі, яка сполучає дві інші вершини, то цей чотирикутник — паралелограм?

**812.** Чи є правильним твердження:
1) якщо дві сторони чотирикутника паралельні, а одна з діагоналей розбиває чотирикутник на два рівних трикутники, то цей чотирикутник — паралелограм;
2) якщо дві сторони чотирикутника паралельні, а точка перетину діагоналей ділить одну з них навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм;
3) якщо дві протилежні сторони чотирикутника рівні та діагоналі його рівні, то цей чотирикутник — паралелограм?

**813.** Периметр ромба дорівнює 8 см, а його висота — 1 см. Знайдіть кути ромба.

**814.** Кут при вершині $B$ ромба $ABCD$ дорівнює $40^\circ$, точки $M$ і $K$ — основи перпендикулярів, опущених із вершини $A$ на сторони $BC$ і $CD$ відповідно. Знайдіть кути трикутника $AMK$.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**815.** Перпендикуляр, опущений із вершини $B$ прямокутника $ABCD$ на діагональ $AC$, ділить кут $ABC$ на два кути, величини яких відносяться як 1 : 3. Знайдіть кут між проведеним перпендикуляром і діагоналлю $BD$.

**816.** Серединний перпендикуляр діагоналі прямокутника утворює з його більшою стороною кут 60°. Відрізок цієї прямої, який належить прямокутнику, дорівнює 12 см. Знайдіть більшу сторону прямокутника.

**817.** На діагоналі $AC$ ромба $ABCD$ позначено точки $M$ і $K$ так, що $AM = CK$. Доведіть, що $\angle ABM = \angle CBK$.

**818.** Периметр ромба на 42 см більший за сторону ромба. Знайдіть периметр ромба.

**819.** Чи є правильним твердження:

1) якщо діагоналі чотирикутника рівні, то цей чотирикутник — прямокутник;
2) якщо діагоналі чотирикутника рівні та перпендикулярні, то цей чотирикутник — квадрат;
3) якщо діагоналі чотирикутника перпендикулярні та точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — квадрат;
4) якщо діагоналі чотирикутника рівні, перпендикулярні та точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — квадрат;
5) якщо три сторони чотирикутника рівні, а діагональ є бісектрисою одного з його кутів, то цей чотирикутник — ромб?

У разі ствердної відповіді обґрунтуйте її, у разі заперечної — накресліть чотирикутник, який слугує контрприкладом.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**820.** На сторонах $AB$, $BC$ і $AC$ трикутника $ABC$ позначено точки $D$, $F$ і $E$ відповідно так, що $BD = BF = DE = EF$. Доведіть, що точка $F$ належить бісектрисі кута $BDE$.

**821.** Відстань від середини хорди $AC$ кола до діаметра $AB$ дорівнює 4 см. Знайдіть хорду $BC$, якщо $\angle BAC = 30°$.

**822.** Побудуйте паралелограм за його вершиною та серединами сторін, яким ця вершина не належить.

**823.** Бічна сторона $AB$ і менша основа $BC$ трапеції $ABCD$ дорівнюють відповідно 16 см і 15 см. Який із відрізків перетинає бісектриса кута $BAD$ — основу $BC$ чи бічну сторону $CD$?

**824.** Діагональ рівнобічної трапеції дорівнює більшій основі та утворює з нею кут 40°. Знайдіть кути трапеції.

**825.** Кут між двома січними, які проходять через точку поза колом, дорівнює 35°. Градусна міра більшої дуги кола, що міститься між сторонами цього кута, дорівнює 100°. Знайдіть градусну міру меншої дуги, яка міститься між сторонами даного кута.

**826.** Доведіть, що коли вершина кута лежить поза колом, а кут спирається на діаметр кола, то цей кут гострий.

**827.** Доведіть, що коли вершина кута лежить усередині кола, а кут спирається на діаметр кола, то цей кут тупий або розгорнутий.

**828.** Діагоналі чотирикутника $ABCD$, вписаного в коло, перпендикулярні, $\angle ACB = 10°$, $\angle BDC = 70°$. Знайдіть кути даного чотирикутника.

## 2. Подібність трикутників

**829.** Дві паралельні прямі перетинають одну зі сторін кута з вершиною $M$ у точках $A$ і $C$, а другу — відповідно в точках $B$ і $D$. Знайдіть відрізки $MA$ і $MC$, якщо $MB : BD = 2 : 3$ і $MA + MC = 14$ см.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**830.** Знайдіть відношення основ трапеції, якщо її діагоналі ділять середню лінію трапеції на три рівні частини.

**831.** На медіані $BD$ трикутника $ABC$ позначено точку $M$ так, що $BM : MD = 3 : 2$. Пряма $AM$ перетинає сторону $BC$ у точці $E$. У якому відношенні точка $E$ ділить сторону $BC$, рахуючи від вершини $B$?

**832.** Бісектриса кута $A$ паралелограма $ABCD$ перетинає діагональ $BD$ і сторону $BC$ у точках $E$ і $F$ відповідно, $BE : ED = 2 : 7$. Знайдіть відношення $BF : FC$.

**833.** Медіани $AD$ і $BM$ трикутника $ABC$ перетинаються в точці $O$. Через точку $O$ проведено пряму, яка паралельна стороні $AC$ і перетинає сторону $BC$ у точці $K$. Знайдіть відрізки $BD$, $DK$ і $KC$, якщо $BC = 18$ см.

**834.** Бісектриса $BD$ трикутника $ABC$ ділить сторону $AC$ на відрізки $AD$ і $DC$, довжини яких відносяться як 3 : 5. Знайдіть сторони $AB$ і $BC$, якщо їхня сума дорівнює 56 см.

**835.** Радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, становить $\frac{2}{9}$ висоти, проведеної до основи трикутника. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 72 см.

**836.** Сторони трикутника дорівнюють 2,5 см, 4,5 см і 6 см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, якщо його більша сторона дорівнює 24 см.

**837.** У трикутник $ABC$ вписано ромб $ADEF$ так, що кут $A$ у них спільний, а вершина $E$ належить стороні $BC$. Знайдіть сторону ромба, якщо $AB = a$, $AC = b$.

**838.** Периметр паралелограма дорівнює 72 см, а його висоти відносяться як 5 : 7. Знайдіть сторони паралелограма.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**839.** Дано три точки, які не лежать на одній прямій. Проведіть пряму, рівновіддалену від цих точок. Скільки розв'язків має задача?

**840.** Пряма $MB$ перетинає коло в точках $A$ і $B$ (точка $A$ лежить між точками $M$ і $B$), а пряма $MD$ — у точках $C$ і $D$ (точка $C$ лежить між точками $M$ і $D$). Знайдіть відрізок $AB$, якщо $AB = MC$, $MA = 20$ см, $CD = 11$ см.

**841.** Пряма $AB$ дотикається до кола в точці $B$, а пряма $AC$ перетинає коло в точках $C$ і $D$ (точка $D$ лежить між точками $A$ і $C$). Знайдіть відрізок $CD$, якщо $AB = 6$ см, $AC = 9$ см.

**842.** Хорди $AB$ і $CD$ кола перетинаються в точці $M$, $CM = 4$ см, $DM = 6$ см, відрізок $AM$ на 2 см більший за відрізок $BM$. Знайдіть хорду $AB$.

**843.** На одній стороні кута з вершиною в точці $A$ позначили точки $B$ і $C$, а на другій — точки $D$ і $E$, причому $AB = 10$ см, $AC = 18$ см, $AD : AE = 5 : 9$. Знайдіть відрізок $CE$, якщо $BD = 20$ см.

## 3. Розв'язування прямокутних трикутників

**844.** Медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює 10 см, а відстань між серединою гіпотенузи та основою висоти трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює 6 см. Знайдіть периметр даного трикутника.

**845.** Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 15 см, а висота, проведена до основи, на 6 см менша від основи. Знайдіть основу трикутника.

**846.** Із точки $K$, що лежить поза прямою $a$, проведено до цієї прямої похилі $KA$ і $KB$, які утворюють з нею кути 45°

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

і $30^\circ$ відповідно. Знайдіть проєкцію похилої $KB$ на пряму $a$, якщо $KA = 8\sqrt{6}$ см.

**847.** Перпендикуляр, проведений із точки перетину діагоналей ромба до його сторони, ділить її на відрізки завдовжки 4 см і 25 см. Знайдіть діагоналі ромба.

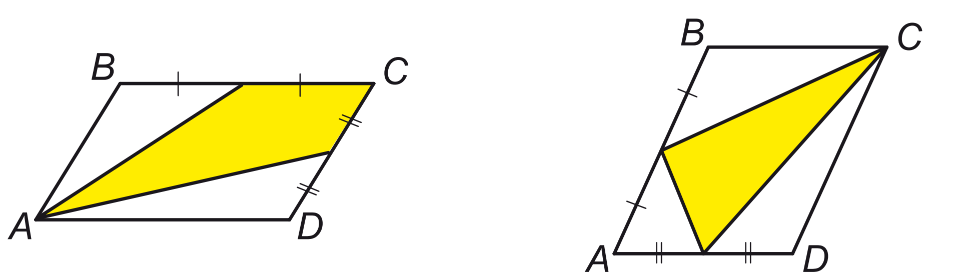
**848.** Коло, центр якого належить гіпотенузі прямокутного трикутника, дотикається до більшого катета й проходить через вершину протилежного гострого кута. Знайдіть радіус кола, якщо катети дорівнюють 5 см і 12 см.

**849.** Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть відстань від вершини меншого гострого кута трикутника до центра вписаного кола.

**850.** Перпендикуляр, опущений із точки кола на його діаметр, ділить діаметр на два відрізки, один з яких на 27 см більший за другий. Знайдіть діаметр кола, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 18 см.

## 4. Многокутники. Площа многокутника

**851.** Площа паралелограма $ABCD$ дорівнює $S$. Знайдіть площу зафарбованої фігури (рис. 238).




а б

**Рис. 238**

**852.** Знайдіть площу паралелограма $ABCD$, якщо $BD \perp AD$, $BD = 16$ см, $\angle A = 45^\circ$.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**853.** Знайдіть площу квадрата, діагональ якого дорівнює $d$.

**854.** Знайдіть площу рівностороннього трикутника, якщо радіус описаного навколо нього кола дорівнює $R$.

**855.** Катет прямокутного трикутника дорівнює $b$, а протилежний йому кут дорівнює $\beta$. Знайдіть площу трикутника.

**856.** Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює $\alpha$, а гіпотенуза дорівнює $c$. Знайдіть площу трикутника.

**857.** Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює 15 см, а висота — $3\sqrt{3}$ см. Знайдіть площу трапеції, якщо один з її кутів дорівнює $150^\circ$.

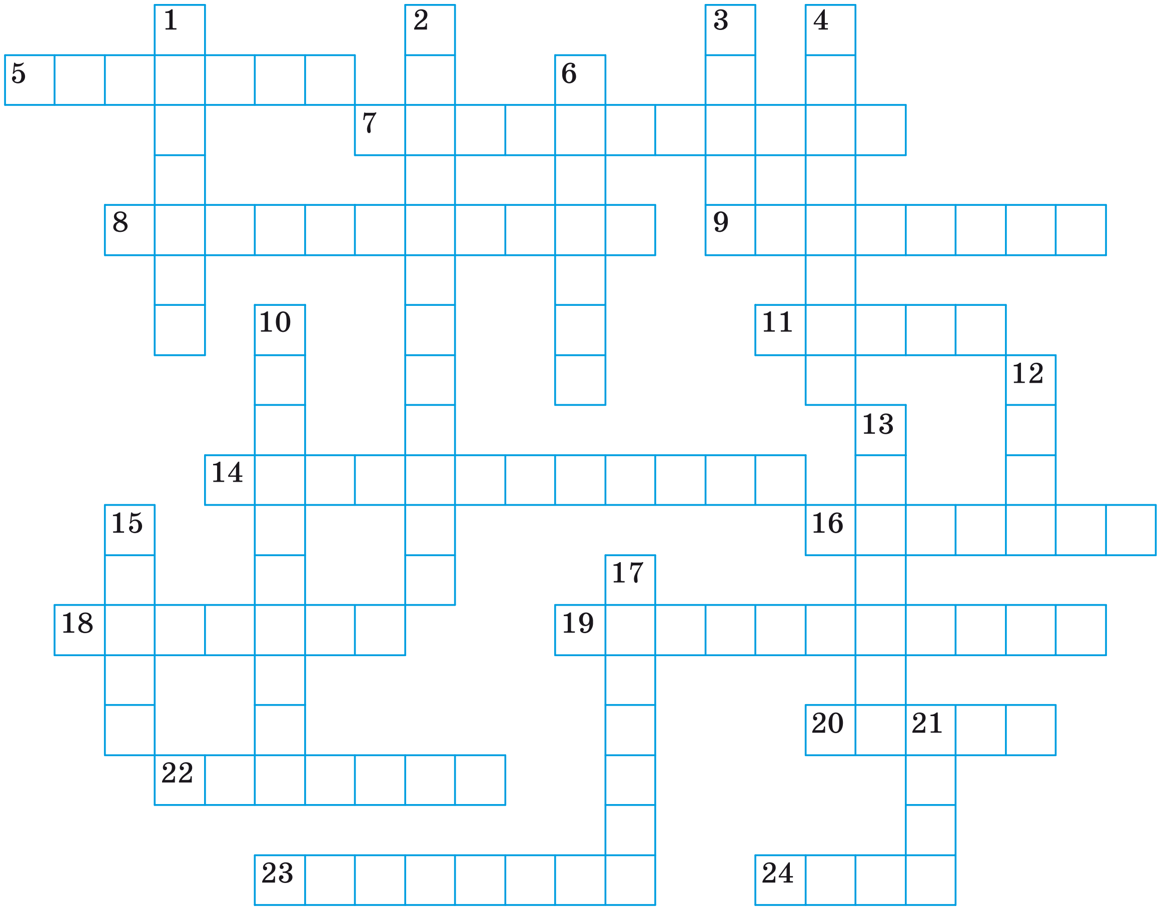
**858.** Діагоналі рівнобічної трапеції є бісектрисами її гострих кутів і точкою перетину діляться у відношенні 5 : 13. Знайдіть площу трапеції, якщо її висота дорівнює 90 см.

**859.** Площа рівнобічної трапеції дорівнює $36\sqrt{2}$ см$^2$, а гострий кут — $45^\circ$. Знайдіть висоту трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

**860.** Розгадайте кросворд.

***По горизонталі:*** **5.** Давньогрецький учений. **7.** Один із видів паралелограма. **8.** Кут, вершиною якого є центр кола. **9.** Чотирикутник, у якого тільки одна пара паралельних сторін. **11.** Відношення катета, протилежного гострому куту прямокутного трикутника, до гіпотенузи. **14.** Геометрична фігура. **16.** Трикутники, кути яких рівні, а сторони пропорційні. **18.** Відношення катета, прилеглого до гострого кута прямокутного трикутника, до гіпотенузи. **19.** Многокутники, які мають рівні площі. **20.** Давньогрецький математик.**22.** Прямокутник, у якого всі сторони рівні. **23.** Сума сторін многокутника.**24.** Одна із частин кола, на які ділять його дві точки.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua




***По вертикалі:*** **1.** Відношення катета, протилежного гострому куту прямокутного трикутника, до прилеглого катета. **2.** Вид чотирикутника. **3.** Сторона прямокутного трикутника. **4.** Кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають це коло.**6.** Пряма, яка проходить через точку кола та перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку. **10.** Сторона прямокутного трикутника, квадрат якої дорівнює сумі квадратів двох інших сторін. **12.** Паралелограм, у якого всі сторони рівні. **13.** Твердження, правильність якого встановлюють за допомогою доведення. **15.** Величина. **17.** Хорда кола, яка проходить через його центр. **21.** Допоміжна теорема.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

# ДРУЖИМО З КОМП'ЮТЕРОМ

У 7 класі ви вже користувалися комп'ютером під час вивчення геометрії. У 8 класі ви вивчатимете більш складні геометричні фігури, а отже, зможете вдосконалити свої вміння, опанувавши складніші інструменти графічних пакетів.

Нагадаємо, що, крім завдань, наведених у цьому розділі, ви зможете застосовувати різноманітні програми, призначені спеціально для засвоєння шкільного курсу геометрії. Ви можете звертатися до глобальної мережі Інтернет для пошуку цих програм та іншої потрібної вам інформації.

У цьому розділі наведено завдання, які ви зможете виконувати за допомогою комп'ютера в міру вивчення відповідних тем. Більшість із них — завдання на побудову геометричних фігур, для яких ви застосовуватимете певний графічний редактор. Крім цих завдань, ви можете виконувати завдання з рубрики «Практичні завдання» та розв'язувати задачі на побудову не лише в зошиті, а й за допомогою комп'ютера. У 7 класі ви дізналися, що в геометрії побудови проводять за допомогою лінійки та циркуля. Тому вам потрібно знайти серед інструментів графічного редактора ті, що виконують функції лінійки та циркуля.

## 15. Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику

**20.** Побудуйте прямокутний трикутник та опустіть висоту на гіпотенузу. Переконайтеся, що виконується лема п. 15.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## 16. Теорема Піфагора

**21.** Часто теорему Піфагора ілюструють, побудувавши квадрати на сторонах прямокутного трикутника. Багато поколінь школярів і школярок називають цей рисунок «Піфагорові штани» й формулюють теорему в жартівливій формі: «Піфагорові штани на всі сторони рівні». Побудуйте цей рисунок.

**22.** Чи є в графічному редакторі інструмент для розрізання фігури на частини, якими надалі можна оперувати окремо?

**23.** Розрізавши на частини квадрати, побудовані на катетах, можна скласти із цих частин квадрат, побудований на гіпотенузі. Для довільного трикутника пошук таких частин — задача непроста. А ось для рівнобедреного трикутника знайти такий спосіб розрізання досить легко. Які це частини? Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник. Створіть такий набір фігур, щоб, переміщуючи їх, можна було скласти або квадрат, побудований на гіпотенузі, або два квадрати, побудовані на катетах.

## 17. Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника

**24.** Опануйте інструменти калькулятора, які дають змогу знаходити тригонометричні функції гострого кута трикутника.

**25.** Знайдіть інструменти для знаходження тригонометричних функцій у мові програмування, яку ви вивчаєте.

## 18. Розв’язування прямокутних трикутників

**26.** Під час розв’язування задач цього пункту користуйтеся калькулятором для обчислень.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## 19. Многокутники

**27.** Сформулюйте який-небудь набір властивостей многокутника (кількість сторін, опуклість, вписаний у коло, описаний навколо кола тощо). Побудуйте многокутник, що має цей набір властивостей. Якими інструментами графічного редактора треба скористатися, щоб забезпечити виконання заданих властивостей?

## 20. Поняття площі многокутника. Площа прямокутника

**28.** Побудуйте квадрат і візьміть його за одиничний. Скопіюйте його кілька разів. З отриманих одиничних квадратів складіть кілька різних рівновеликих прямокутників.

## 21. Площа паралелограма

**29.** Створіть набір фігур, за допомогою яких можна проілюструвати доведення теореми про площу паралелограма. Якою властивістю площі многокутника ми при цьому користуємося?

**30.** Теорема 21.1 є справедливою незалежно від того, яку зі сторін паралелограма з опущеною на неї висотою вибрати для обчислення площі. Створіть набір фігур, за допомогою яких можна проілюструвати це твердження.

## 22. Площа трикутника

**31.** Створіть набори фігур, за допомогою яких можна проілюструвати доведення тверджень теоретичної частини цього параграфа.

## 23. Площа трапеції

**32.** Побудуйте довільну трапецію. Розріжте її на частини так, щоби показати, що формула для обчислення площі трапеції є правильною.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

# ПРОЄКТНА РОБОТА

Ця рубрика адресована передусім тим, хто бажає навчитися самостійно набувати знань, творчо мислити, формувати, висловлювати та відстоювати свою точку зору, висувати гіпотези, знаходити найбільш раціональні та нестандартні рішення.

Першим кроком, який може допомогти в досягненні цих цілей, є участь у проєктній роботі.

**Проєкт — це самостійне дослідження за вибраною темою, яке можна виконувати як індивідуально, так і в групі.**

Дамо кілька порад щодо організації роботи над проєктом та оформлення результатів дослідження.

1. Під час вибору теми потрібно враховувати її актуальність, наявність джерел інформації в літературі та інтернет-ресурсів. При цьому дуже важливе ваше бажання проявити себе дослідником у роботі саме над вибраною темою.
2. Роботу починають зі складання попереднього плану, у якому викладають задум та етапи реалізації задуманого. Після ознайомлення з основними джерелами інформації складають остаточний план за допомогою керівника проєкту.
3. Важливо чітко сформулювати цілі дослідження. Їх можна записати, наприклад, у такий спосіб: вивчити, описати, проаналізувати, довести, порівняти тощо.
4. Роботу завершують підбиттям підсумків дослідження, роблять висновки, накреслюють перспективи подальшого вивчення теми.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

5. Приблизний обсяг роботи — 10–15 сторінок. Додатково можна додати ілюстративний матеріал.
6. Робота може бути оформлена у вигляді реферату, доповіді, комп'ютерної презентації.

Нижче наведено рекомендований список тем, які можна вибрати для проєктної роботи.

1. **Фалес Мілетський — видатний геометр, будівельник, астроном**
2. **Піфагор і його знаменита теорема**
3. **Аксіоматичний метод у геометрії**
4. **Геометрія на клітчастому аркуші**
5. **Граф як геометрична модель логічної задачі**
6. **Чудові точки трикутника**
7. **Властивості зовнівписаного кола**
8. **Метод допоміжного кола**
9. **Рівновеликі та рівноскладені фігури**

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

# ВІДОМОСТІ З КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

## НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

### 1. Точки та прямі

- ✓ *Основна властивість прямої*. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.
- ✓ Дві прямі, які мають спільну точку, називають такими, що перетинаються.
- ✓ Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.

### 2. Відрізок і його довжина

- ✓ Точки $A$ і $B$ прямої $a$ (рис. 239) обмежують частину прямої, яку разом з точками $A$ і $B$ називають відрізком, а точки $A$ і $B$ — кінцями цього відрізка.


**Рис. 239**

- ✓ Два відрізки називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.
- ✓ Рівні відрізки мають рівні довжини, і навпаки, якщо довжини відрізків рівні, то рівні й самі відрізки.
- ✓ *Основна властивість довжини відрізка*. Якщо точка $C$ є внутрішньою точкою відрізка $AB$, то відрізок $AB$ дорівнює сумі відрізків $AC$ і $CB$, тобто $AB = AC + CB$.
- ✓ Відстанню між точками $A$ і $B$ називають довжину відрізка $AB$. Якщо точки $A$ і $B$ збігаються, то вважають, що відстань між ними дорівнює нулю.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## 3. Промінь. Кут

- ✓ Точка *O* прямої *AB* (рис. 240) розбиває пряму на дві частини, кожну з яких разом з точкою *O* називають променем або півпрямою. Точку *O* називають початком променя.
- ✓ Два промені, які мають спільний початок і лежать на одній прямій, називають доповняльними.
- ✓ Два промені *OA* та *OB*, що мають спільний початок (рис. 241), розбивають площину на дві частини, кожну з яких разом із променями *OA* та *OB* називають кутом. Промені *OA* та *OB* називають сторонами кута, а точку *O* — вершиною кута.

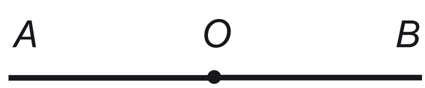



**Рис. 240**

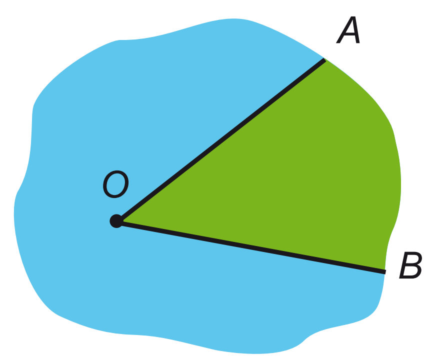



**Рис. 241**

- ✓ Кут, сторонами якого є доповняльні промені, називають розгорнутим.
- ✓ Два кути називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.
- ✓ Бісектрисою кута називають промінь з початком у вершині кута, який ділить цей кут на два рівних кути.

## 4. Вимірювання кутів

- ✓ Кожний кут має певну величину (градусну міру).

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

- Кут, градусна міра якого дорівнює 90°, називають прямим. Кут, градусна міра якого менша від 90°, називають гострим. Кут, градусна міра якого більша за 90°, але менша від 180°, називають тупим.
- Рівні кути мають рівні величини, і навпаки, якщо величини кутів рівні, то рівні й самі кути.
- *Основна властивість величини кута*. Якщо промінь *OC* ділить кут *AOB* на два кути *AOC* і *COB* (рис. 242), то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

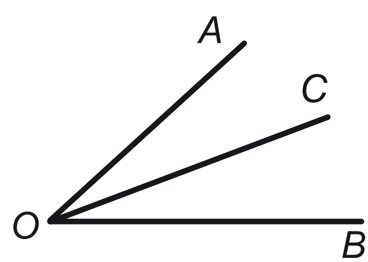



**Рис. 242**

## 5. Суміжні та вертикальні кути

- Два кути називають суміжними, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші є доповняльними променями.
- Сума суміжних кутів дорівнює 180°.
- Два кути називають вертикальними, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін другого.
- Вертикальні кути рівні.

## 6. Перпендикулярні прямі. Серединний перпендикуляр

- Дві прямі називають перпендикулярними, якщо при їхньому перетині утворився прямий кут.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

- Неперпендикулярні прямі при перетині утворюють пару рівних гострих кутів і пару рівних тупих кутів. Величину гострого кута називають кутом між неперпендикулярними прямими.
- Якщо прямі перпендикулярні, то вважають, що кут між ними дорівнює 90°.
- Два відрізки називають перпендикулярними, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.
- На рисунку 243 зображено пряму $a$ та перпендикулярний до неї відрізок $AB$, кінець $B$ якого належить прямій $a$. У такому випадку говорять, що з точки $A$ на пряму $a$ опущено перпендикуляр $AB$. Точку $B$ називають основою перпендикуляра $AB$.

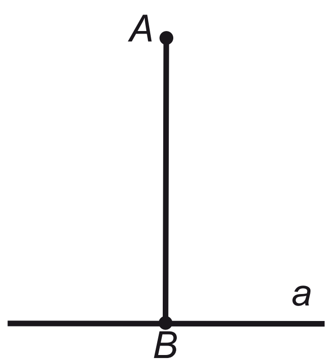



**Рис. 243**

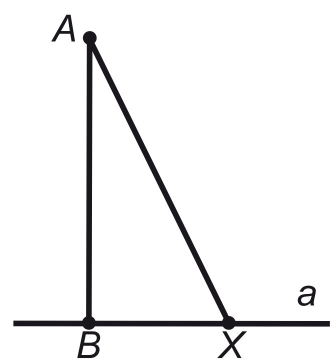



**Рис. 244**

- Довжину перпендикуляра $AB$ називають відстанню від точки $A$ до прямої $a$. Якщо точка $A$ належить прямій $a$, то вважають, що відстань від точки $A$ до прямої $a$ дорівнює нулю.
- Опустимо з точки $A$ на пряму $a$ перпендикуляр $AB$ (рис. 244). Нехай $X$ — довільна точка прямої $a$, відмінна від точки $B$. Відрізок $AX$ називають похилою, проведеною з точки $A$ до прямої $a$.
- Через дану точку проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

- Пряму, яка перпендикулярна до відрізка та проходить через його середину, називають серединним перпендикуляром відрізка.
- Кожна точка серединного перпендикуляра відрізка рівновіддалена від кінців цього відрізка.
- Якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона належить серединному перпендикуляру цього відрізка.

## ТРИКУТНИКИ

### 7. Трикутник і його елементи. Рівні трикутники

- Три точки *A*, *B* і *C*, які не лежать на одній прямій, сполучено відрізками (рис. 245). Утворена фігура обмежує частину площини, яку разом з відрізками *AB*, *BC* і *CA* називають трикутником. Точки *A*, *B*, *C* називають вершинами, а відрізки *AB*, *BC*, *CA* — сторонами трикутника.

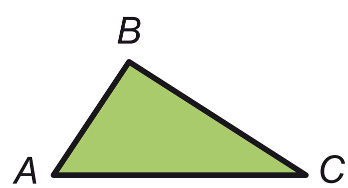


**Рис. 245**

- Трикутник називають і позначають за його вершинами.
- У трикутнику *ABC* кут *B* називають кутом, протилежним стороні *AC*, а кути *A* і *C* — кутами, прилеглими до сторони *AC*.
- Периметром трикутника називають суму довжин усіх його сторін.
- Трикутник називають гострокутним, якщо всі його кути гострі; прямокутним, якщо один із його кутів прямий; тупокутним, якщо один із його кутів тупий.
- Сторону прямокутного трикутника, протилежну прямому куту, називають гіпотенузою, а сторони, прилеглі до прямого кута, — катетами.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

- ✓ *Нерівність трикутника*. Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.
- ✓ Два трикутники називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням. Ті пари сторін і кутів, які суміщаються при накладанні рівних трикутників, називають відповідними сторонами й відповідними кутами.
- ✓ У трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути.
- ✓ У трикутнику проти рівних кутів лежать рівні сторони.
- ✓ У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.

## 8. Висота, медіана, бісектриса трикутника

- ✓ Перпендикуляр, опущений з вершини трикутника на пряму, яка містить протилежну сторону, називають висотою трикутника.
- ✓ Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони, називають медіаною трикутника.
- ✓ Відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони, називають бісектрисою трикутника.

## 9. Ознаки рівності трикутників

- ✓ *Перша ознака рівності трикутників: за двома сторонами та кутом між ними*. Якщо дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам та куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

- *Друга ознака рівності трикутників: за стороною та двома прилеглими до неї кутами*. Якщо сторона та два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.
- *Третя ознака рівності трикутників: за трьома сторонами*. Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

## 10. Рівнобедрений трикутник та його властивості. Рівносторонній трикутник

- Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають рівнобедреним.
- Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають бічними сторонами, а третю сторону — основою рівнобедреного трикутника.
- Вершиною рівнобедреного трикутника називають спільну точку його бічних сторін.
- У рівнобедреному трикутнику:
  1) кути при основі рівні;
  2) бісектриса трикутника, проведена до його основи, є медіаною та висотою трикутника.
- Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають рівностороннім.
- У рівносторонньому трикутнику:
  1) усі кути рівні;
  2) бісектриса, висота й медіана, проведені з однієї вершини, збігаються.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## 11. Ознаки рівнобедреного трикутника

- ✓ Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений.
- ✓ Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.
- ✓ Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.
- ✓ Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений.

# ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ. СУМА КУТІВ ТРИКУТНИКА

## 12. Паралельні прямі

- ✓ Дві прямі називають паралельними, якщо вони не перетинаються.
- ✓ *Основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельності прямих)*. Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.
- ✓ Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.
- ✓ Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.
- ✓ Відстанню між двома паралельними прямими називають відстань від будь-якої точки однієї з прямих до другої прямої.

## 13. Ознаки паралельності двох прямих

- ✓ Якщо дві прямі $a$ і $b$ перетнути третьою прямою $c$, то утвориться вісім кутів (рис. 246). Пряму $c$ називають січною прямих $a$ і $b$.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

Кути 3 і 6, 4 і 5 називають односторонніми.
Кути 3 і 5, 4 і 6 називають різносторонніми.
Кути 6 і 2, 5 і 1, 3 і 7, 4 і 8 називають відповідними.

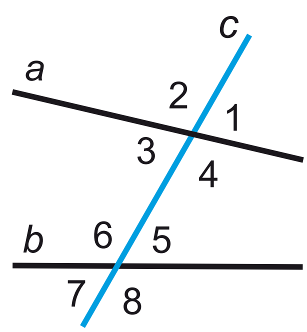



**Рис. 246**

- ✓ Якщо різносторонні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.
- ✓ Якщо сума односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 180°, то прямі паралельні.
- ✓ Якщо відповідні кути, утворені при перетині двох прямих січною, рівні, то прямі паралельні.

## 14. Властивості паралельних прямих

✓ Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то:

- кути, які утворюють пару різносторонніх кутів, рівні;
- кути, які утворюють пару відповідних кутів, рівні;
- сума кутів, які утворюють пару односторонніх кутів, дорівнює 180°.

✓ Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до другої.

## 15. Сума кутів трикутника. Зовнішній кут трикутника

- ✓ Сума кутів трикутника дорівнює 180°.
- ✓ Серед кутів трикутника принаймні два кути гострі.
- ✓ Зовнішнім кутом трикутника називають кут, суміжний із кутом цього трикутника.
- ✓ Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

- Зовнішній кут трикутника більший за кожний із кутів трикутника, не суміжних з ним.

## 16. Ознаки рівності прямокутних трикутників

- *Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та катетом*. Якщо гіпотенуза та катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та катету другого, то такі трикутники рівні.
- *Ознака рівності прямокутних трикутників за двома катетами*. Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам другого, то такі трикутники рівні.
- *Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим гострим кутом*. Якщо катет і прилеглий до нього гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й прилеглому до нього гострому куту другого, то такі трикутники рівні.
- *Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і протилежним гострим кутом*. Якщо катет і протилежний йому гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катету й протилежному йому гострому куту другого, то такі трикутники рівні.
- *Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою та гострим кутом*. Якщо гіпотенуза та гострий кут одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі та гострому куту другого, то такі трикутники рівні.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## 17. Властивості прямокутного трикутника

- ✓ У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за катет.
- ✓ Катет, який лежить проти кута, величина якого дорівнює 30°, дорівнює половині гіпотенузи.
- ✓ Якщо катет дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.

# КОЛО ТА КРУГ

## 18. Геометричне місце точок

- ✓ Геометричним місцем точок (ГМТ) називають множину всіх точок, які мають певну властивість.
- ✓ Серединний перпендикуляр відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.
- ✓ Бісектриса кута є геометричним місцем точок, які належать куту й рівновіддалені від його сторін.

## 19. Коло та круг, їхні елементи

- ✓ Колом називають геометричне місце точок, відстані від яких до заданої точки дорівнюють даному додатному числу. Задану точку називають центром кола.
- ✓ Будь-який відрізок, що сполучає точку кола з його центром, називають радіусом кола.
- ✓ Відрізок, який сполучає дві точки кола, називають хордою кола. Хорду, яка проходить через центр кола, називають діаметром.
- ✓ Діаметр кола вдвічі більший за його радіус.
- ✓ Кругом називають геометричне місце точок, відстані від яких до заданої точки не більші за дане додатне

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

число. Задану точку називають центром круга. Радіус кола, яке обмежує круг, називають радіусом круга. Якщо $X$ — довільна точка круга із центром $O$ та радіусом $R$, то $OX \leqslant R$.

Коло, яке обмежує круг, йому належить.

- ✓ Хорда й діаметр круга — це хорда й діаметр кола, яке обмежує круг.

## 20. Властивості кола

- ✓ Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл.
- ✓ Діаметр кола, який ділить хорду, відмінну від діаметра, навпіл, перпендикулярний до цієї хорди.

## 21. Взаємне розміщення прямої та кола. Дотична до кола

- ✓ Пряма та коло можуть не мати спільних точок, мати дві спільні точки або мати одну спільну точку.
- ✓ Пряму, яка має з колом тільки одну спільну точку, називають дотичною до кола.
- ✓ Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.
- ✓ Якщо пряма, яка проходить через точку кола, перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то ця пряма є дотичною до даного кола.
- ✓ Якщо відстань від центра кола до деякої прямої дорівнює радіусу кола, то ця пряма є дотичною до даного кола.
- ✓ Якщо через дану точку до кола проведено дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## 22. Описане та вписане кола трикутника

- Коло називають описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.

  На рисунку 247 зображено коло, описане навколо трикутника. У цьому разі також говорять, що трикутник вписаний у коло.

- Центр описаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його вершин.

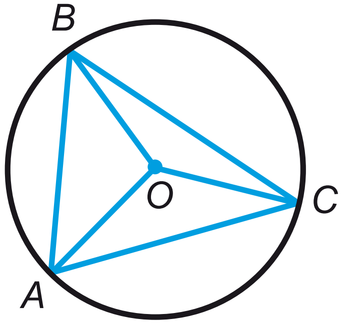



Рис. 247

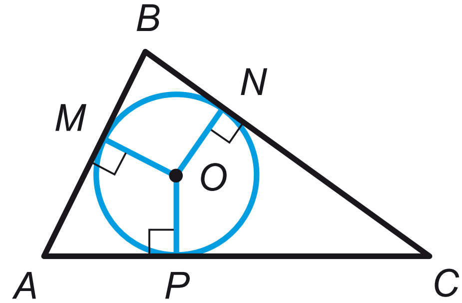



Рис. 248

- Навколо будь-якого трикутника можна описати коло. Центр кола, описаного навколо трикутника, — це точка перетину серединних перпендикулярів сторін трикутника.
- Серединні перпендикуляри сторін трикутника перетинаються в одній точці.
- Коло називають вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.

  На рисунку 248 зображено коло, вписане в трикутник. У цьому разі також говорять, що трикутник описаний навколо кола.

- Центр вписаного кола трикутника рівновіддалений від усіх його сторін.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

- ✓ У будь-який трикутник можна вписати коло. Центр кола, вписаного в трикутник, — це точка перетину бісектрис трикутника.
- ✓ Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.
- ✓ Радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, обчислюють за формулою $r = \frac{a+b-c}{2}$, де $r$ — радіус вписаного кола, $a$ і $b$ — катети, $c$ — гіпотенуза.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

# ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

## § 3. Розв'язування прямокутних трикутників

### 15. Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику

**514.** 15 см, 20 см. **515.** 30 см, 24 см. **516.** $2\sqrt{5}$ см, $4\sqrt{5}$ см. **517.** 14,5 см. **518.** 62 см. **519.** 12,5 см. **520.** 12,8 см. **521.** 2,5 см. **522.** 196 см. *Вказівка*. Доведіть, що кінці бічної сторони трапеції та центр вписаного кола є вершинами прямокутного трикутника. **523.** 18 см. **525.** 7 см, 14 см. **526.** 14 см. **527.** 74°, 74°, 74°, 138°.

### 16. Теорема Піфагора

**542.** 13 см. **543.** 10 см. **544.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **545.** $a\sqrt{2}$. **546.** $\frac{2h}{\sqrt{3}}$. **547.** $\frac{c}{\sqrt{2}}$. **548.** *а*) $\sqrt{6}$ см; *б*) $\sqrt{3}$ см; *в*) $4\sqrt{2}$ см. **549.** *а*) $\sqrt{2}$ см; *б*) 1 см. **550.** $4\sqrt{5}$ см. **551.** $4\sqrt{10}$ см. **552.** $4\sqrt{13}$ см. **553.** $4\sqrt{5}$ см. **554.** 10 см, 10 см, 12 см. **555.** 40 см, 25 см, 25 см. **556.** 20 см. **557.** 20 см. **558.** 24 см. **559.** 1,5 см, 22,5 см. **560.** 8 см, 6 см, 10 см. **561.** 6 см, $2\sqrt{73}$ см. **562.** 168 см. **563.** 200 см. **564.** 20 ліктів. **565.** $8\sqrt{10}$ см. *Вказівка*. Доведіть, що бічна сторона трапеції дорівнює її більшій основі. **566.** $12\sqrt{3}$ см. **567.** $2\sqrt{65}$ см. **568.** $12\sqrt{5}$ см. **569.** 128 см. *Вказівка*. Скористайтеся властивістю бісектриси кута трикутника та знайдіть відношення бічної сторони до половини основи. **570.** 162 см. **571.** 54 см. **572.** $8\sqrt{10}$ см. **573.** 10 см, $4\sqrt{13}$ см, $2\sqrt{73}$ см. **574.** 26 см. **575.** $3\frac{3}{4}$ фута.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## 17. Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника

**595.** 45°, 135°. **598.** 1) 1; 2) 0. **599.** 0,28; 0,96; $\frac{7}{24}$.

**600.** $\frac{1}{6}$. *Вказівка*. З подібності трикутників $AMC$ і $BDC$ випливає, що $\frac{AC}{BC}=\frac{AM}{BD}=\frac{1}{3}$. **601.** $\frac{6}{7}$. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $\frac{KC}{AC}=\frac{BD}{AB}$. **602.** *Вказівка*. Із точки $F$ опустіть перпендикуляр на відрізок $ED$. Знайдіть тангенси кутів $E$ і $B$. **603.** 3 см. **604.** 12 см. **605.** 14 см.

## 18. Розв’язування прямокутних трикутників

**618.** 45°. **621.** $2a$, $a\sqrt{3}$. **622.** $a$, $a\sqrt{3}$. **625.** 8 см. **626.** 16 см. **627.** 15 см. **628.** $4\sqrt{2}$ см. **629.** $\frac{h}{\cos\frac{\beta}{2}}$. **630.** $\frac{h}{\sin\alpha}$, $\frac{h}{\cos\alpha}$, $\frac{h}{\sin\alpha\cos\alpha}$. **631.** $a\operatorname{tg}\varphi$, $\frac{a}{\cos\varphi}$, $a\sin\varphi$. **632.** $\frac{d}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$, $d\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

**633.** $\frac{2r}{\sin\alpha}$, $\frac{2r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\frac{2r}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. **634.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **635.** $\frac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{2}$.

**636.** $2\sqrt{3}$ см, $\sqrt{93}$ см, $\sqrt{181}$ см. **638.** $\angle A=86°$, $\angle B=111°$, $\angle C=94°$, $\angle D=69°$. **639.** 18 см, 21 см.

# § 4. Многокутники. Площа многокутника

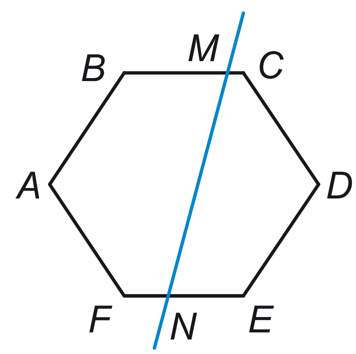
## 19. Многокутники

**654.** 3) $\frac{n(n-3)}{2}$. **655.** 12 сторін, 1800°. **658.** 150°, 60°, 150°.

**659.** П’ятикутник. **660.** *Вказівка*. Нехай $ABCDEF$ — шестикутник, кожний кут якого дорівнює 120°. Якщо провести

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

січну $MN$ (див. рисунок), то сума кутів п'ятикутника $ABMNF$ дорівнюватиме 540°. Тоді сума кутів $BMN$ і $FNM$ дорівнює 180°. **662.** 80 см. **663.** $\left(26+10\sqrt{13}\right)$ см. **664.** $3\sqrt{5}$ см.




**До задачі 660**

## 20. Поняття площі многокутника. Площа прямокутника

**674.** 0,000126 Н. **675.** 12 000 Н. **676.** $d^2 \sin\alpha \cos\alpha$. **677.** $75\sqrt{3}$ см². **686.** У 2 рази. **687.** Жодного, або два, або три. **688.** Жодного або два. **689.** 504 см². **690.** 30 см. **691.** *Вказівка*. Побудуйте прямокутний трикутник, катети якого дорівнюють сторонам даних квадратів. **692.** *Вказівка*. Сторона шуканого квадрата $x=\sqrt{ab}$. **694.** 24 см. **695.** 2 см.

## 21. Площа паралелограма

**704.** 1) Два розв'язки: 4 см і 9 см; 2) один розв'язок: 8 см. **705.** 300 см². **706.** 120 см². **707.** $108\sqrt{3}$ см². **708.** $ab\sin\alpha$. **709.** $64\sqrt{3}$ см². **710.** $140\sqrt{2}$ см². **711.** 37,5 см². **712.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **714.** 72 см². **715.** 360 см². **719.** 1 : 7.

## 22. Площа трикутника

**732.** $\frac{200}{3}$ см². **733.** $11\sqrt{3}$ см². **734.** 170 см². **735.** $b^2\sin\alpha\cos\alpha$. **736.** $h^2 \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. **737.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **738.** $\frac{c^2}{4}$.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

**739.** $\frac{120}{13}$ см. **740.** 96 см$^2$. **741.** 108 см$^2$. **742.** 768 см$^2$. **744.** 52 см. **745.** 336 см$^2$. **746.** 1080 см$^2$. **757.** *Вказівка*. Урахуйте, що трикутники $ABX$ і $AXM$ мають спільну висоту. Таку саму властивість мають і трикутники $CBX$ і $CXM$. **758.** 120 см$^2$. **759.** 20 см, $6\sqrt{10}$ см, $2\sqrt{10}$ см. **760.** 1176 см$^2$. **761.** 9,6 см$^2$. **762.** $\frac{4000}{3}$ см$^2$. *Вказівка*. Скориставшись властивістю бісектриси трикутника, знайдіть відношення бічної сторони та половини основи трикутника. **763.** $\frac{4000}{3}$ см$^2$. **764.** 19 см$^2$. *Вказівка*. Скористайтеся результатами задач 750 і 757. **765.** *Вказівка*. Проведіть прямі $AM$, $BM$ і $CM$ та скористайтеся результатами задачі 757. **766.** *Вказівка*. Проведіть медіану $AM$. Нехай $N$ — точка на стороні $BC$ така, що $AN \parallel DM$. Доведіть, що пряма $DN$ — шукана. **768.** 78°, 78°, 24°. **769.** $2\sqrt{57}$ см. **770.** 80 см.

## 23. Площа трапеції

**782.** $108\sqrt{3}$ см$^2$. **783.** 195 см$^2$. **784.** 840 см$^2$. **785.** 132 см$^2$. **786.** $600\sqrt{3}$ см$^2$. **787.** 1640 см$^2$. **788.** $(32+32\sqrt{2})$ см$^2$. **789.** 294 см$^2$. **793.** 512 см$^2$. **794.** 192 см$^2$. **795.** 336 см$^2$. *Вказівка*. У даній трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) через вершину $C$ проведіть пряму $CF$, паралельну діагоналі $BD$ (точка $F$ належить $AD$), і розгляньте трикутник $ACF$. **796.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. *Вказівка*. Доведіть, що кут при більшій основі трапеції дорівнює 60°. **797.** 156 см$^2$. *Вказівка*. Нехай $O$ — центр кола, вписаного в трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Доведіть, що трикутник $AOB$ є прямокутним, і знайдіть його висоту, проведену

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

з вершини $O$. **798.** 588 см². **799.** 2187 см². *Вказівка*. Доведіть, що діагональ даної трапеції є бісектрисою кута при основі. Далі скористайтеся властивістю бісектриси трикутника. **800.** 936 см². **801.** $\frac{S}{2}$. *Вказівка*. Проведіть середню лінію $MN$ трапеції. Доведіть, що висоти трикутників $MCN$ і $MND$, проведені з вершин $C$ і $D$, дорівнюють половині висоти трапеції. **802.** 15 см, 10 см. **803.** 60°, 120°. **804.** 38 см.

## Вправи для повторення курсу геометрії 8 класу

**806.** 64 см або 74 см. **807.** 10 см, 18 см. **808.** 60°. **809.** $a - b$. **811.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так; 5) ні; 6) так; 7) так. *Вказівка*. Доведіть, що точкою перетину діагоналі діляться навпіл. **812.** 1) Так; 2) так; 3) ні. **813.** 30°, 150°. **814.** 40°, 70°, 70°. **815.** 45°. **816.** 18 см. **818.** 56 см. **821.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см. **823.** $CD$. **824.** 70°, 110°. **825.** 30°. **828.** 80°, 100°, 150°, 30°. **829.** 4 см, 10 см. **830.** 1 : 2. **831.** 3 : 4. **832.** 2 : 5. **833.** 9 см, 3 см, 6 см. **834.** 21 см, 35 см. **835.** 28 см, 28 см, 16 см. **837.** $\frac{ab}{a+b}$. **838.** 21 см, 15 см. **840.** 25 см. **841.** 5 см. **842.** 10 см. **843.** 36 см. **844.** $\left(12\sqrt{5}+20\right)$ см. **845.** 18 см. **846.** 24 см. **847.** $4\sqrt{29}$ см, $10\sqrt{29}$ см. **848.** $\frac{65}{18}$ см. **849.** $2\sqrt{10}$ см. **850.** 45 см. **851.** *а*) $\frac{S}{2}$; *б*) $\frac{3S}{8}$. **852.** 256 см². **853.** $\frac{1}{2}d^2$. **854.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **855.** $\frac{b^2}{2\operatorname{tg}\beta}$. **856.** $\frac{1}{2}c^2\sin\alpha\cos\alpha$. **857.** $72\sqrt{3}$ см². **858.** 24 300 см². **859.** 6 см.

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ «ПЕРЕВІРТЕ СЕБЕ» В ТЕСТОВІЙ ФОРМІ

| Номер завдання | Номер задачі | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 3 | В | Б | В | Б | Г | В | Б | В | Г | Б |
| 4 | Б | В | А | Г | А | Г | Г | Б | Г | В |

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

# ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК



Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

# ЗМІСТ



Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

*Навчальне видання*

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

**ГЕОМЕТРІЯ**
**Підручник для осіб з особливими освітніми потребами**
**(Н 54.1 – Н 54.2)**
**8 клас**
(у 2-х частинах)

ЧАСТИНА 2

*Рекомендовано*
*Міністерством освіти і науки України*

**Видано за рахунок державних коштів.**
**Продаж заборонено**

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

Відповідальна за випуск *Г. Ф. Висоцька*
Редактор *Т. Є. Цента*
Обкладинка *Д. В. Висоцький*
Макет, художнє оформлення,
комп'ютерна обробка ілюстрацій *Д. В. Висоцький*
Технічний редактор *О. В. Гулькевич*
Комп'ютерна верстка *С. І. Северин*
Коректор *А. Ю. Вєнза*

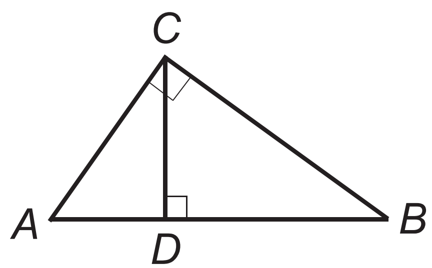
Формат 84×108/16. Ум. друк. арк. 12,60. Обл.-вид. арк. 5,35.
Тираж 1715 прим. Вид. № 85. Зам. №

ТОВ ТО «Гімназія», вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
*E-mail:* contact@gymnasia.com.ua, www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано в друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052, Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ В ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ



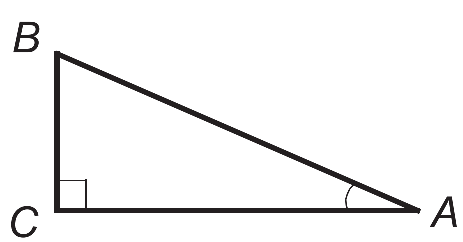

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ (теорема Піфагора)

$CD^2 = AD \cdot DB$

$AC^2 = AB \cdot AD$

$BC^2 = AB \cdot DB$

## СИНУС, КОСИНУС І ТАНГЕНС ГОСТРОГО КУТА ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА




$\sin A = \frac{BC}{AB}$ $\cos A = \frac{AC}{AB}$

$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$

| | $\alpha = 30^\circ$ | $\alpha = 45^\circ$ | $\alpha = 60^\circ$ |
|---|---|---|---|
| $\sin \alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos \alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\operatorname{tg} \alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

## ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

| Друковані літери | | Назви літер |
|---|---|---|
| A | a | а |
| B | b | бе |
| C | c | це |
| D | d | де |
| E | e | е |
| F | f | еф |
| G | g | ге |
| H | h | аш |
| I | i | і |
| J | j | йот |
| K | k | ка |
| L | l | ель |
| M | m | ем |
| N | n | ен |
| O | o | о |
| P | p | пе |
| Q | q | ку |
| R | r | ер |
| S | s | ес |
| T | t | те |
| U | u | у |
| V | v | ве |
| W | w | дубль-ве |
| X | x | ікс |
| Y | y | ігрек |
| Z | z | зет |

## ГРЕЦЬКИЙ АЛФАВІТ

| Друковані літери | | Назви літер |
|---|---|---|
| Α | α | альфа |
| Β | β | бета |
| Γ | γ | гамма |
| Δ | δ | дельта |
| Ε | ε | епсилон |
| Ζ | ζ | дзета |
| Η | η | ета |
| Θ | θ, ϑ | тета |
| Ι | ι | йота |
| Κ | κ | каппа |
| Λ | λ | ламбда |
| Μ | μ | мю |
| Ν | ν | ню |
| Ξ | ξ | ксі |
| Ο | ο | омікрон |
| Π | π | пі |
| Ρ | ρ | ро |
| Σ | σ | сигма |
| Τ | τ | тау |
| Υ | υ | іпсилон |
| Φ | φ | фі |
| Χ | χ | хі |
| Ψ | ψ | псі |
| Ω | ω | омега |

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua

Право для безоплатного розміщення підручника в мережі Інтернет має
Міністерство освіти і науки України http://mon.gov.ua/ та Інститут модернізації змісту освіти https://imzo.gov.ua