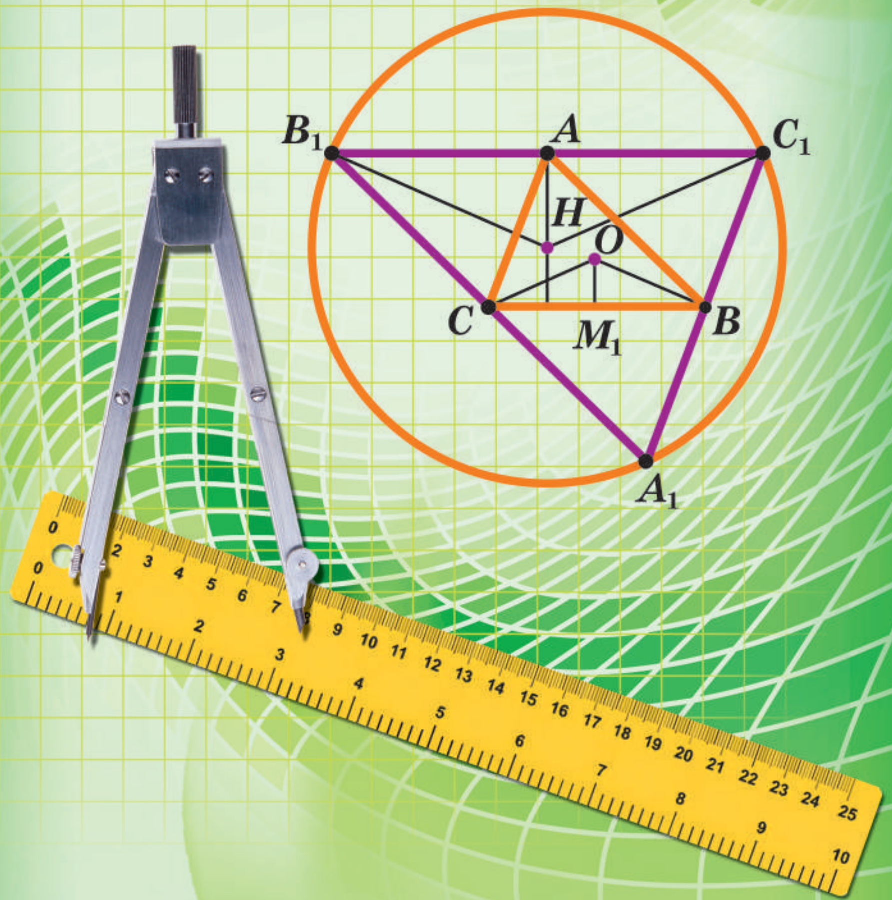
8

Merzljak Arkagyij
Polonszkij Vitalij
Jakir Mihajlo

MÉRTAN



8

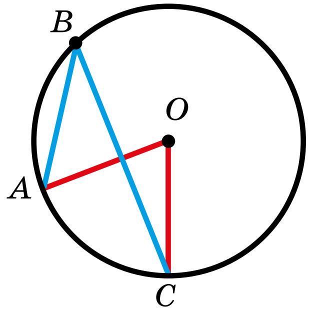
MÉRTAN

Merzljak Arkagyij, Polonszkij Vitalij, Jakir Mihajlo

2021

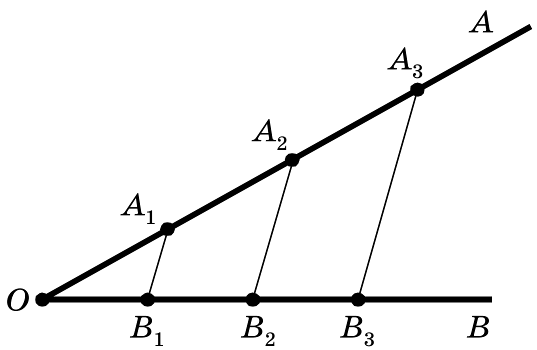
ISBN 978-966-914-358-7

KÖZÉPPONTI ÉS KERÜLETI SZÖGEK



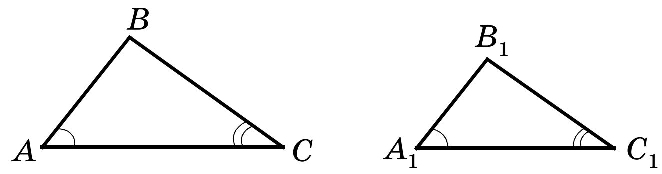
$$ABC\angle = \frac{1}{2} AC\cup$$
$$AOC\angle = AC\cup$$

THALÉSZ TÉTELE



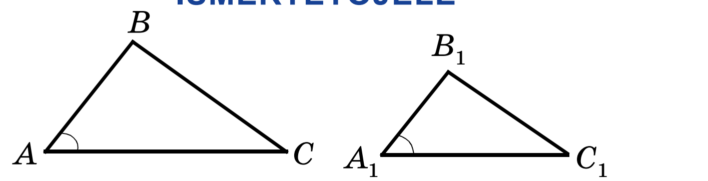
Ha $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ és $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$,
akkor $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$

A HÁROMSZÖGEK HASONLÓSÁGÁNAK ELSŐ ISMERTETŐJELE



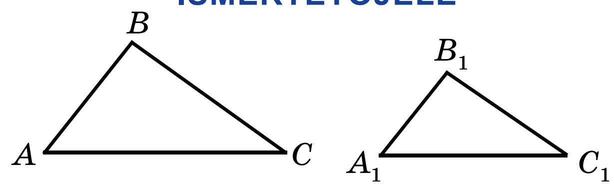
Ha $A\angle = A_1\angle$, $C\angle = C_1\angle$, akkor $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$

A HÁROMSZÖGEK HASONLÓSÁGÁNAK MÁSODIK ISMERTETŐJELE



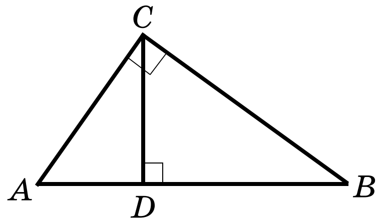
Ha $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ és $A\angle = A_1\angle$, akkor $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$

A HÁROMSZÖGEK HASONLÓSÁGÁNAK HARMADIK ISMERTETŐJELE



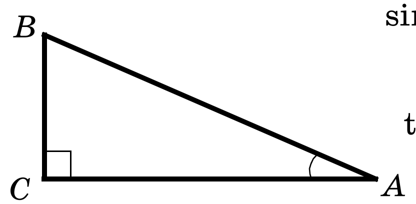
Ha $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, akkor $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$

METRIKUS ÖSSZEFÜGGÉSEK A DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGBEN



$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \text{ (Pitagorasz-tétel)}$$
$$CD^2 = AD \cdot DB$$
$$AC^2 = AB \cdot AD$$
$$BC^2 = AB \cdot DB$$

A DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖG HEGYESSZÖGÉNEK SZINUSZA, KOSZINUSZA, TANGENSE ÉS KOTANGENSE



$$\sin A = \frac{BC}{AB} \qquad \cos A = \frac{AC}{AB}$$
$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC} \qquad \operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}$$

	$\alpha = 30$	$\alpha = 45$	$\alpha = 60°$
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

LATIN ABC

Nyomtatott betűk		Kiejtés
A	a	a
B	b	bé
C	c	cé
D	d	dé
E	e	e
F	f	ef
G	g	gé
H	h	há
I	i	i
J	j	jé
K	k	ká
L	l	el
M	m	em
N	n	en
O	o	o
P	p	pé
Q	q	qu
R	r	er
S	s	esz
T	t	té
U	u	u
V	v	vé
W	w	dupla vé
X	x	iksz
Y	y	ipszilon
Z	z	zé

GÖRÖG ABC

Nyomtatott betűk		Kiejtés
Α	α	alfa
Β	β	béta
Γ	γ	gamma
Δ	δ	delta
Ε	ε	epszilon
Ζ	ζ	zéta
Η	η	éta
Θ	θ, ϑ	téta
Ι	ι	ióta
Κ	κ	kappa
Λ	λ	lambda
Μ	μ	mű
Ν	ν	nű
Ξ	ξ	kszi
Ο	ο	omikron
Π	π	pi
Ρ	ρ	ró
Σ	σ	szigma
Τ	τ	tau
Υ	υ	ipszilon
Φ	φ	fi
Χ	χ	hi
Ψ	ψ	pszi
Ω	ω	ómega

Arkadij Merzljak
Vitalij Polonszkíj
Mihajlo Jakir

MÉRTAN

Tankönyv
a magyar oktatási nyelvű általános
középfokú tanintézetek 8. osztálya számára

Második, átdolgozott kiadás

Ajánlotta Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma

Львів
Видавництво „Світ”
2021

УДК 373.167.1:514
М52

Перекладено за виданням:

Мерзляк А. Г. Геометрія : підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – 2-ге видання, переробл. – Х. : Гімназія, 2021.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 22.02.2021 № 243)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Мерзляк А. Г.
М52 Геометрія : підруч. для 8 кл. з навч. угор. мов. закл. заг. сер. осв. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. ; пер. Ш. Б. Молнар. – 2-ге вид., переробл. – Львів : Світ, 2021. – 208 с. : іл.
ISBN 978-966-914-358-7

УДК 373.167.1:514

ISBN 978-966-914-358-7 (угор.)
ISBN 978-966-474-275-4 (укр.)

Kedves nyolcadikosok!

Ebben a tanévben is folytatjátok a mértannal való ismerkedést. Reméljük, hogy a múlt tanévben megszerettétek ezt a fontos és szép tantárgyat, és ezért fokozott érdeklődéssel fogtok hozzá az új ismeretek elsajátításához. Bízunk benne, hogy a kezetekben tartott tankönyv segítségetekre lesz ebben.

Ismerkedjetek meg a tankönyv felépítésével!

A tankönyv négy fejezetből és azok alfejezeteiből áll. Ezek tartalmazzák az elméleti tananyagot. Fordítsatok különös figyelmet a **félkövér**, a ***félkövér dőlt*** és a *dőlt* betűs szövegrészletekre! Így jelöltük számotokra a meghatározásokat, a szabályokat és a legfontosabb matematikai állításokat.

A hagyományoknak megfelelően az elméleti anyagot a begyakorlásra szánt példák és feladatok követik.

Mindegyik alfejezet végén önálló munkához való feladatokat válogattunk össze, melyek megoldásához csak az elméleti anyag elsajátítása után kezdjetek hozzá. A gyakorlatok között különböző nehézségi fokozatúak vannak: elemi szintű, közepesen nehéz és összetett (különösen a *-gal jelöltek). A tudásotokat tesztfeladatok megoldásával ellenőrizhetitek, melyek minden paragrafus végén megtalálhatók.

Minden alfejezet végére a *Figyeld meg, rajzold le, szerkeszd meg, képzeld el!* megnevezésű feladatokat tettünk, amelyek megoldásához nem feltétlenül matematikai tudásra van szükség, hanem csak a józan eszeteket, találékonyságotokat, leleményességeteket kell használni. Ezek nagyon hasznos feladatok, melyek fejlesztik a térlátást és a kreativitást.

Ha a házi feladat megoldása után még marad szabadidőtök, és szeretnétek többet tudni, akkor oldjátok meg a *Szorgalmi feladatok*at is, amelyek reményeink szerint próbára teszik tudásotokat.

Sok sikert és kitartást kívánunk.

A szerzők

Tisztelt kollégák és kolleginák!

Őszintén reméljük, hogy e tankönyv megbízható segítségükre lesz áldozatos munkájukban. Szeretnénk, ha elnyerné tetszésüket, ezért igyekeztünk változatos és nagy mennyiségű információval szolgálni, amelyet lehetőség szerint különböző módszertani eljárások felhasználásával adhatnak majd át a tanulóknak.

<u>A tanév alatt a tankönyvben található valamennyi feladatot lehetetlen megoldani, de erre nincs is szükség.</u> A bőséges feladatanyag azt szolgálja, hogy a tanár a tanítványa képességeihez, felkészültségéhez mérten válogathasson belőle. Ez az egyéni és differenciált módszerek alkalmazását teszi lehetővé az oktatásban.

Felhívjuk arra is a figyelmet, hogy a tankönyvben szerkesztési feladatok is vannak. Ezek megoldása nem kötelező. Abban az esetben kell megoldani őket, ha ezzel a témakörrel a 7. osztályban a tanulók már megismerkedtek.

Világoskék színnel jelöltük azoknak a feladatoknak a sorszámait, amelyeket házi feladatra ajánlunk, ciklámen színnel pedig azokat különböztettük meg, melyek szóbelileg is megoldhatók. A *Szorgalmi feladatok*at a matematikai szakkörökön és fakultatív órákon lehet felhasználni.

Közösen a mértant egy érthető és vonzó tantárggyá alakíthatjuk.

Ehhez nagyon sok türelmet és alkotói kedvet kívánunk.

EGYEZMÉNYES JELEK:

n° elemi szintű feladatok;

$n^{\bullet}$ közepes nehézségű feladatok;

$n^{\bullet\bullet}$ összetett feladatok;

n^{*} matematikai szakkörökre és fakultatív foglalkozásokra ajánlott feladatok;

kulcsfontosságú feladatok, melyek megoldásait más feladatok megoldása során is alkalmazni kell;

⊙ tételek bizonyítása megfelelő felkészültségű tanulók részére;

tételek bizonyítása kiváló felkészültségű tanulók részére;

a tananyaghoz szorosan nem tartozó tétel bizonyítása;

▲ vége a tétel bizonyításának;

● vége a feladat megoldásának;

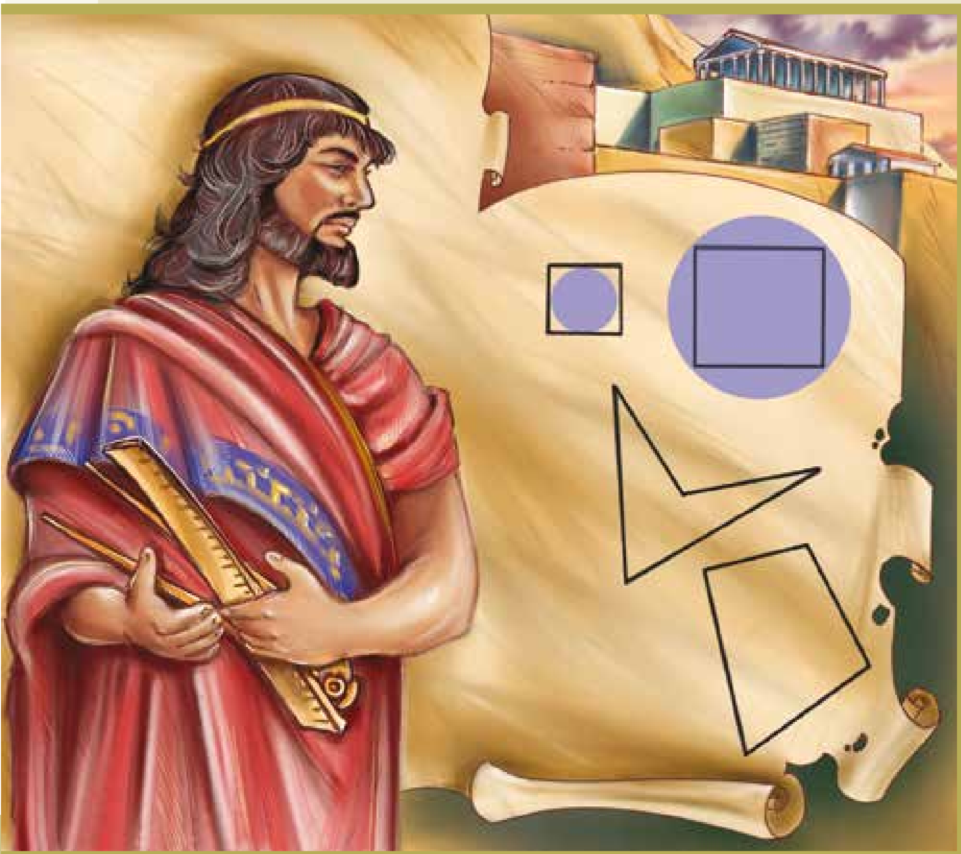

Szorgalmi feladatok

NÉGYSZÖGEK 1.§.

Ebben a paragrafusban egy számotokra már ismert mértani alakzattal, a **négyszög**gel fogunk foglalkozni. Megismerkedünk a négyszögek különböző típusaival: a paralelogrammával, a téglalappal, a rombusszal, a négyzettel, a trapézzal. Elsajátíthatjátok azon jellemző tulajdonságokat, amelyek alapján megkülönböztetjük, illetve kategorizáljuk őket.

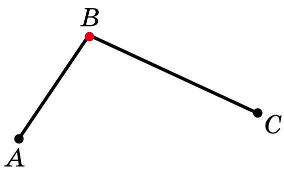
Tanulmányozzuk a háromszög oldalainak felezőpontjait összekötő szakasz tulajdonságait, és meggyőződtök e tulajdonságok kulcsfontosságú szerepéről a feladatmegoldások során.

Hogyan kell megmérni a körívet? Milyen négyszög köré lehet körvonalat rajzolni? Milyen négyszögbe lehet körvonalat rajzolni? Elsajátítva ennek a paragrafusnak a tananyagát, választ kaptok ezekre a kérdésekre is.

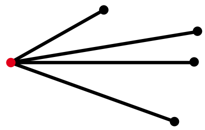


1. A négyszög és elemei

Az 1. ábrán az AB és BC szakaszoknak csak egy közös pontja van, ez a B pont, amely mindkettőjük végpontja. Az ilyen szakaszokat **szomszédos** szakaszoknak nevezzük. A 2. ábrán minden két szakasz szomszédos.



1. ábra



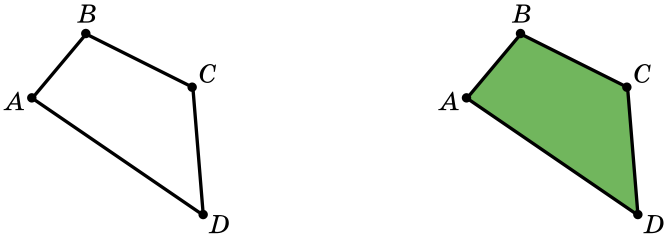
2. ábra

A 3. ábrán az AB és CD szakaszok nem szomszédosak.

a *b*

3. ábra

Megvizsgáljuk azt az alakzatot, amely négy, A, B, C és D pontból és négy, AB, BC, CD és DA szakaszból áll, melyek közül bármelyik kettő nem egy egyenesen fekszik és semelyik két nem szomszédos szakasznak nincs közös pontja (4. a ábra).

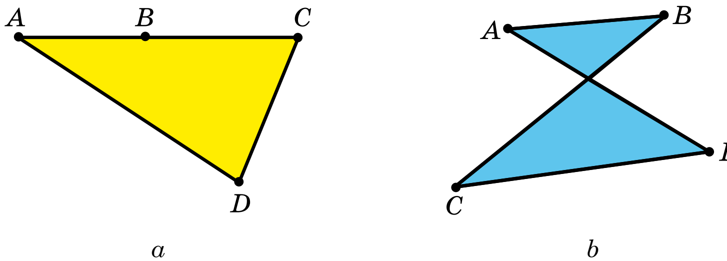


a *b*

4. ábra

A 4. *b* ábrán zölddel jelöltük azt az alakzatot, amelyet ez a négy szakasz határol. A síknak ezt a részét az *AB*, *BC*, *CD* és *DA* szakaszokkal együtt **négyszög**nek nevezzük. Az *A*, *B*, *C* és *D* pontokat a négyszög **csúcsai**nak, az *AB*, *BC*, *CD, DA* szakaszokat pedig a négyszög **oldalai**nak nevezzük.

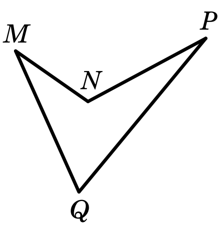
Az 5. ábrán egy olyan alakzat látható, amely négy, *AB*, *BC*, *CD, DA* szakaszból és az általuk határolt síkrészből áll. Viszont ez az alakzat mégsem lesz négyszög. Magyarázzátok meg, miért!



5. ábra

A négyszög azon oldalait, amelyeket szomszédos szakaszok alkotnak, a négyszög **szomszédos oldalai**nak nevezzük. Az egy oldal végpontjait a négyszög **szomszédos csúcsai**nak nevezzük. A nem szomszédos oldalakat a négyszög **szemközti oldalai**nak nevezzük. A nem szomszédos csúcsait pedig a négyszög **szemközti csúcsai**nak nevezzük.

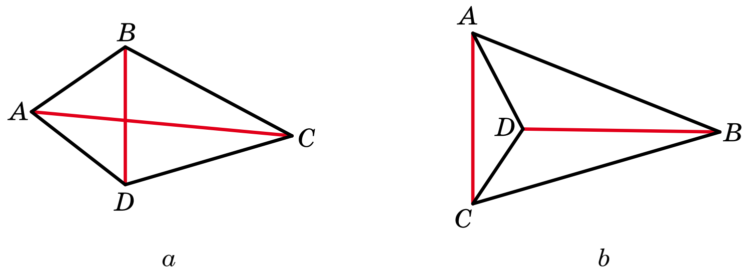
A 6. ábrán lévő négyszög szomszédos oldalai az *MQ* és *MN* szakaszok, szemközti oldalai pedig az *NP* és *MQ*. A *Q* és *P* csúcsok szomszédosak, az *M* és *P* csúcsok pedig szemköztiek.



6. ábra

A négyszöget a csúcsaival jelölik és nevezik meg. Például a 4. *b* ábrán az *ABCD* négyszög látható, a 6. ábrán pedig az *MNPQ* négyszög. A négyszög jelölésekor az egymást követő betűk szomszédos csúcsokat jelölnek. Például a 6. ábrán látható négyszöget jelölhetjük így is: *PQMN* vagy *MQPN* vagy *NPQM* stb.

A négyszög oldalai hosszának összegét a négyszög **kerületé**nek nevezzük.

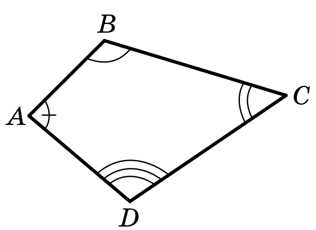


7. ábra

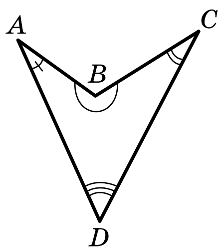
Azt a szakaszt, amely a négyszög szemközti csúcsait köti össze, a négyszög **átlójá**nak nevezzük. A 7. ábrán az *ABCD* négyszög átlói az *AC* és a *BD* szakaszok.

Az *ABC, BCD, CDA, DAB* szögeket (8. ábra) az *ABCD* négyszög **szögei**nek nevezzük. E négyszög mindegyik szöge kisebb az egyenesszögnél. Az ilyen négyszöget **domború**nak nevezzük. Azonban olyan négyszögek is léteznek, amelynek nem minden szöge lesz kisebb az egyenesszögnél. Például a 9. ábrán az *ABCD* négyszög *B* szöge nagyobb 180°-nál. Az ilyen négyszöget **nem domború**nak (**homorú**nak) nevezzük.[1]

Az *ABC* és *ADC* szögeket az *ABCD* négyszög **szemközti szögé**nek nevezzük (8., 9. ábra). A *BAD* és a *BCD* szögek szintén szemközti szögek lesznek.



8. ábra

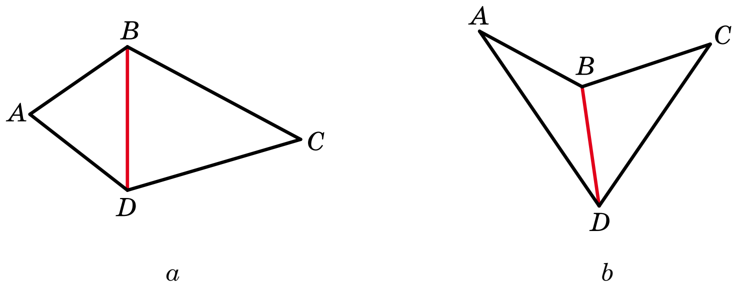


9. ábra

1.1. tétel. ***A négyszög szögeinek összege 360°-kal egyenlő.***

Bizonyítás. ⊙ Meghúzzuk a négyszög átlóját, amely két háromszögre osztja azt (a 10. ábrán ez a *BD* átló). Ekkor az *ABCD* négyszög szögeinek összege az *ABD* és *CBD* háromszögek szögeinek összege lesz. Mivel a háromszög szögeinek összege 180°, ezért a négyszög szögeinek összege 360° lesz. ▲

[1] A domborúság fogalmával részletesebben a 19. pontban ismerkedtek majd meg.

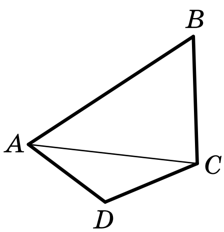


10. ábra

Következmény. ***A négyszögnek csak egy szöge lehet nagyobb, mint az egyenesszög.***

Ezt a tulajdonságot önállóan bizonyítsátok be!

1. feladat. Bizonyítsátok be, hogy a négyszög bármelyik oldalának hossza kisebb a többi három oldal hosszának összegénél!



11. ábra

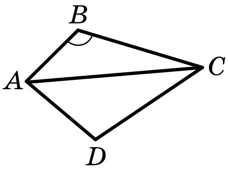
Megoldás. Vizsgáljunk meg egy tetszőleges $ABCD$ négyszöget (11. ábra)! Bizonyítsuk be, hogy $AB < AD + DC + CB$!

Ehhez meghúzzuk az AC átlót. Alkalmazzuk a háromszög-egyenlőtlenséget az AB és AC oldalakra a megfelelő ABC és ADC háromszögekben. A következő egyenlőtlenségeket kapjuk: $AB < AC + CB$, $AC < AD + DC$.

Innen $AB < AC + CB < AD + DC + CB$.

Tehát $AB < AD + DC + CB$.

2. feladat. Szerkesszetek négyszöget két szomszédos oldala és négy szöge alapján, ha a szögei kisebbek az egyenesszögnél![1]



12. ábra

Megoldás. A 12. ábrán látható $ABCD$ négyszögben ismert az AB és BC oldalak hossza és mindegyik szöge.

Az ABC háromszögben ismertek az AB és BC oldalak, valamint a köztük lévő B szög. Tehát ez a háromszög megszerkeszthető. Most már felmérhetjük az AB és CB oldalakra az A és C szöget.

[1] A tankönyvben a szerkesztési feladatok nem kötelezők.

A bemutatott módszerrel meg tudjuk szerkeszteni a keresett négyszöget.

Megszerkesszük a háromszöget két oldala és a közbezárt szög alapján. A 12. ábrán ez az ABC háromszög. Az AB és CB félegyenesekre felmérjük a négyszög két ismert szögét. Az így kapott két félegyenes a D pontban metszi egymást. Az $ABCD$ lesz a keresett négyszög.

1. Magyarázd meg, milyen szakaszok lesznek szomszédosak!
2. Magyarázd meg, milyen alakzatot nevezünk négyszögnek!
3. A négyszög mely oldalait nevezzük szomszédosaknak? Melyeket szemköztieknek?
4. A négyszög mely csúcsait nevezzük szomszédosaknak? Melyeket szemköztieknek?
5. Hogy jelölik a négyszöget?
6. Mit nevezünk a négyszög kerületének?
7. Mit nevezünk a négyszög átlójának?
8. Milyen négyszöget nevezünk domborúnak?
9. Fogalmazd meg a négyszög szögeinek összegéről szóló tételt!

GYAKORLATI FELADATOK

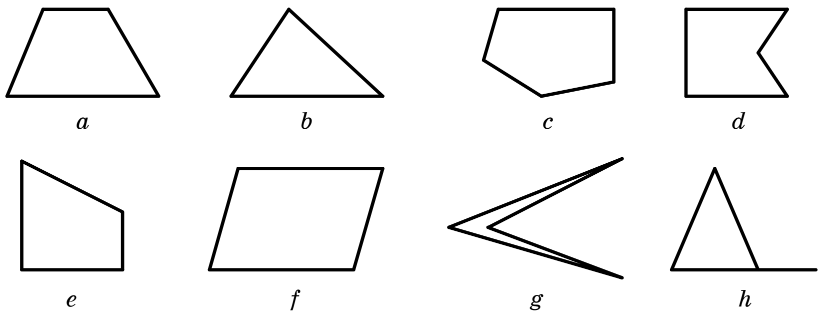
1.° Rajzolj olyan négyszöget, melynek:
1) három tompaszöge van;
2) a szomszédos csúcsoknál lévő szögei derékszögek, a másik kettő pedig nem derékszög;
3) az egyik átlót felezi az átlók metszéspontja, a másik átlót pedig ez a pont nem felezi;
4) átlói merőlegesek!

2.° Rajzolj egy bármilyen négyszöget, jelöld a csúcsait M, K, E, F betűkkel! Mutasd meg a szomszédos oldalpárját, szemközti oldalpárját, szemközti csúcsait! Írd fel háromféleképpen ennek a négyszögnek a jelölését!

3.° Rajzolj olyan négyszöget, melynek:
1) három hegyesszöge van;
2) a két szemközti csúcsnál lévő szögei derékszögek, a másik kettő pedig nem derékszög;
3) az átlók metszéspontja felezi az átlóit!

GYAKORLATOK

4.° A 13. ábrán látható alakzatok közül nevezd meg a négyszögeket!

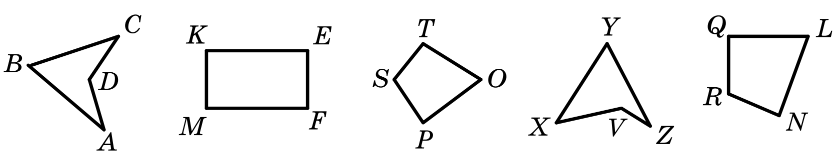


13. ábra

5.° A 14. ábrán látható négyszöget jelöld meg négyféleképpen! Nevezd meg:

1) a négyszög csúcsait;
2) oldalait;
3) szomszédos csúcspárjait;
4) szemközti csúcspárjait;
5) szomszédos oldalpárjait;
6) szemközti oldalpárjait;
7) a négyszög átlóit!

6.° A 15. ábrán látható négyszögek közül nevezd meg a domborúakat!



15. ábra

7.° Mivel egyenlő a négyszög negyedik szögének fokmértéke, ha három szöge 78°, 89° és 93°?

8.° Határozd meg a négyszög szögeit, ha azok egymással egyenlők!

9.° Az $ABCD$ négyszögben adott, hogy $B\angle = 150°$, $A\angle = C\angle = D\angle$. Határozd meg a négyszög ismeretlen szögeit!

10.° A négyszög egyik szöge 2-szer kisebb, mint a másik, 20°-kal kisebb a harmadik szögénél és a negyediknél pedig 40°-kal nagyobb. Határozd meg a négyszög szögeit!

11.° Határozd meg a négyszög szögeit, ha azok úgy aránylanak egymáshoz, mint 2 : 3 : 10 : 21! Domború-e ez a négyszög?

12.° Határozd meg a négyszög szögeit, ha három úgy aránylik egymáshoz, mint 4 : 5 : 7, és a negyedik szöge ezek számtani közepével egyenlő! Domború-e ez a négyszög?

13.° Rendelkezhet-e a négyszög:

1) három derékszöggel és egy hegyesszöggel;
2) három derékszöggel és egy tompaszöggel;
3) négy derékszöggel;
4) négy hegyesszöggel;
5) két derékszöggel és két tompaszöggel;
6) két derékszöggel, egy hegyes- és egy tompaszöggel? Ha igen, akkor rajzolj egy ilyen négyszöget!

14.° A négyszög kerülete 63 cm. Határozd meg az oldalait, ha a másik oldala 2/3-a az első oldalnak, a harmadik 50%-a a másodiknak, a negyedik pedig 150%-a az elsőnek!

15.° Egy négyszög kerülete 64 cm. Határozd meg a négyszög oldalait, ha az egyik oldala 2 cm-rel nagyobb a másiknál, 6 cm-rel kisebb a harmadiknál, valamint 3-szor kisebb a negyedik oldalnál!

16.° Az $ABCD$ négyszög AB és BC oldalai egyenlők, a BD átló ezekhez az oldalakhoz egyenlő szög alatt hajlik. Bizonyítsd be, hogy a CD és AD oldalak is egyenlők!

17.° A négyszög átlói metszéspontjukban felezik egymást. Egyik oldala 6 cm. Mivel egyenlő az ezzel az oldallal szemközti oldal hossza?

18.° Az $MNKP$ négyszögben $MN = NK$, $MP = PK$, $M\angle = 100°$. Határozd meg a K szöget!

19.° Az $ABCD$ négyszög AC átlója az AB és AD oldalakkal egyenlő szögeket alkot, a CB és CD oldalakkal is egyenlő szögeket, $AB = 8$ cm, $BC = 10$ cm. Határozd meg az $ABCD$ négyszög kerületét!

20.• Az ABC háromszögben $A\angle = 44°$, $B\angle = 56°$. A háromszög AK és BM szögfelezői az O pontban metszik egymást. Határozd meg: 1) az $MOKC$; 2) az $AOBC$ négyszögek szögeit!

21.• Az ABC háromszögben $A\angle = 36°$, $B\angle = 72°$. A háromszög AE és BF magasságai a H pontban metszik egymást. Határozd meg: 1) a $CFHE$; 2) az $ACBH$ négyszögek szögeit!

22.• Egy négyszög kerülete 80 cm. Határozd meg a négyszög átlójának a hosszát, ha azoknak a háromszögeknek a kerületei, amelyekre az adott átló felossza a négyszöget 36 cm és 64 cm!

23.• Lehetnek-e a négyszög oldalai: 1) 2 dm, 3 dm, 4 dm, 9 dm; 2) 2 dm, 3 dm, 4 dm, 10 dm?

24.•• Az $ABCD$ négyszögben $A\angle = C\angle = 90°$. Bizonyítsd be, hogy a másik két szögének szögfelezői vagy párhuzamosak, vagy egy egyenesen fekszenek!

25.•• Bizonyítsd be, hogy a domború négyszög két szemközti szögének szögfelezői párhuzamosak, vagy ha egy egyenesen fekszenek, akkor a két másik szöge egymással egyenlő lesz!

26.•• Szerkessz négyszöget, ha adottak az oldalai és egyik szöge!

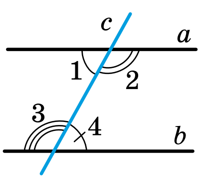
27.•• Szerkessz négyszöget, ha adott a három oldala és két átlója!

28.•• Szerkessz négyszöget, ha adottak az oldalai és az egyik átlója!

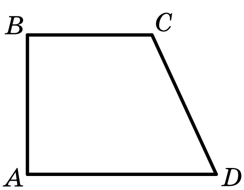
29.* Szerkessz $ABCD$ négyszöget, ha adott az A és B szöge, az AB és BC oldala, valamint az AD és CD oldalai hosszának az összege!

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

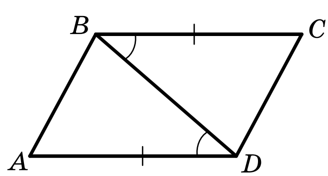
30. A c egyenes az a és b egyeneseket metszi (16. ábra). Nevezzétek meg az így keletkezett egyoldali és különböző oldali szögpárokat! Milyen az a és b egyenesek kölcsönös helyzete a síkon, ha 1) $1\angle = 4\angle$; 2) $1\angle = 20°$, $3\angle = 170°$?



16. ábra



17. ábra



18. ábra

31. Az $ABCD$ négyszögben (17. ábra) $C\angle = 110°$, $D\angle = 70°$. Bizonyítsd be, hogy $BC \parallel AD$!

32. Az $ABCD$ négyszögben $A\angle = B\angle = 90°$, $C\angle = 100°$. Párhuzamosak-e az egyenesek: 1) BC és AD; 2) AB és CD?

33. A 18. ábrán $AD = BC$, $ADB\angle = CBD\angle$. Bizonyítsd be, hogy $AB = CD$ és $AB \parallel CD$!

34. A BK szakasz az ABC háromszög szögfelezője. A DK egyenes párhuzamos az AB-vel, és a BC oldalt egy D pontban metszi, $BDK\angle = 116°$. Határozd meg a BKD szög fokmértékét!

Elevenítsétek fel a 12., 13. és 14. pontokban tanultakat (188. és 189. oldal)!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

35. A fehér síkot fekete festékkel spriccelték le. Bizonyítsd be, hogy a síkon található olyan 1 m-es szakasz, melynek mindkét végpontja azonos színű lesz!

HAJRÁ!

A 29. feladatot csillaggal (*) jelöltük. Ez azt jelenti, hogy a nagyon nehéz feladatok közzé tartozik. Jóllehet ilyen feladatok nem szerepelnek az önálló munkákban és a dolgozatokban, de a tankönyvben több ilyen is található. Felmerül a következő kérdés: Minek kell ilyen nehéz feladatokra időt és energiát pazarolni, ha ezeket nem kötelező megoldani, a magas osztályzatot kevesebb energiával is el lehet érni? Szerintünk a legjobb feleletet erre a kérdésre a *Matematika és a romantika* című könyvben találjuk, melynek szerzője az ismert ukrán mértantudós és pedagógus, Mikola Ivanovics Kovancov. Ő a következőt írta: „Kedves barátaim! Ne sajnáljátok az időt a nehéz és bonyolult matematikai feladatok megoldására. Olyanokhoz is fogjatok hozzá, melyeket több évtizede vagy évszázada nem sikerült senkinek megoldani. Valószínűleg sok csalódás és szenvedés vár rátok ezen az úton, azt hiszitek, hogy hiába töltöttétek el ezzel azt a sok időt. Azonban minden megtörténhet. Az is előfordulhat, hogy egy szép napon eléritek a célotokat, amihez olyan soká és nehezen jutottatok el. Ne legyetek közönyösek, különben a szellemi elégedetlenség állapotába kerültök!”

M. I. Kovancov
(1924–1988)

M. I. Kovancov majdnem 30 évig vezette a Kijevi Nemzeti Egyetem Geometria Tanszékét. Több mint 200 tudományos és tudománynépszerűsítő mű szerzője.

Több tucat kiváló tanítvány került ki Mikola Ivanovics kezei közül, akik ma Ukrajnában és a világ több országában tevékenykednek.

2. Paralelogramma. A paralelogramma tulajdonságai

Meghatározás. Paralelogrammának azt a négyszöget nevezzük, melynek szemközti oldalai párhuzamosak.

A 19. ábrán az $ABCD$ paralelogramma látható. A paralelogramma meghatározása szerint $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

Vizsgáljuk meg a paralelogramma néhány tulajdonságát!

2.1. tétel. ***A paralelogramma szemközti oldalai egyenlők.***

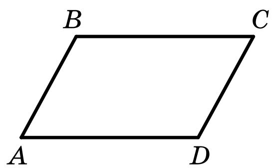
Bizonyítás. ⊙ A 19. ábrán az $ABCD$ paralelogramma látható. Bizonyítsuk be, hogy $AB = CD$ és $BC = AD$!

Meghúzzuk az AC átlót. Bebizonyítjuk, hogy az ABC és CDA háromszögek egybevágók (20. ábra).

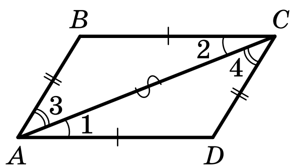
Ezeknek a háromszögeknek az AC oldala közös, az 1-es és 2-es szögek egyenlők, mint a BC és AD párhuzamos egyeneseknél, valamint az AC metsző egyenesnél lévő különböző oldali belső szögek, a 3-as és 4-es szögek szintén egyenlők, mint az AB és CD párhuzamos egyeneseknél és az AC metsző egyenesnél lévő különböző oldali szögek. Tehát az ABC és CDA háromszögek egybevágók a háromszögek egybevágóságának második ismertetőjele alapján. Innen következik, hogy $AB = CD$ és $BC = AD$. ▲

2.2. tétel. ***A paralelogramma szemközti szögei egyenlők.***

Bizonyítás. ⊙ A 19. ábrán az $ABCD$ paralelogramma látható. Bebizonyítjuk, hogy $A\angle = C\angle$ és $B\angle = D\angle$.



19. ábra



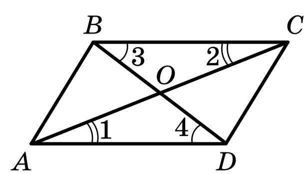
20. ábra

Az előző tétel bizonyításakor megállapítottuk, hogy $ABC\Delta = CDA\Delta$ (20. ábra). Ebből következik, hogy $B\angle = D\angle$. Az 1-es és 2-es szögek, valamint a 3-as és 4-es szögek egyenlőségéből adódik, hogy $1\angle + 3\angle = 2\angle + 4\angle$. Tehát $BAD\angle = BCD\angle$. ▲

2.3. tétel. ***A paralelogramma átlói metszéspontjukban felezik egymást.***

Bizonyítás. ⊙ A 21. ábrán az $ABCD$ paralelogramma látható, melynek átlói az O pontban metszik egymást. Bebizonyítjuk, hogy $AO = OC$ és $BO = OD$.

Vizsgáljuk meg az AOD és COB háromszögeket!

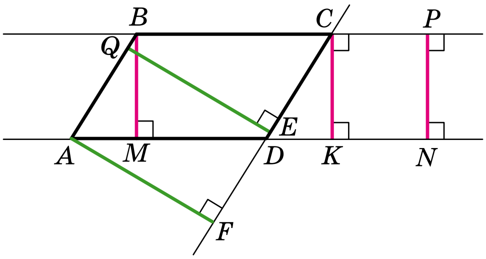


21. ábra

Az 1∠ és 2∠, valamint a 3∠ és 4∠ egyenlők, mint az AD és BC párhuzamos egyenesek és az AC és BD metsző egyenesek különböző oldali belső szögei. A 2.1. tételből kapjuk, hogy $AD = BC$. Tehát az AOD és COB háromszögek egybevágóak a háromszögek egybevágóságának második ismertetőjele alapján. Innen $AO = OC$, $BO = OD$. ▲

Meghatározás. A paralelogramma magasságának nevezzük azt a merőlegest, amelyet a paralelogramma oldalát tartalmazó egyenes bármely pontjából bocsátunk a szemközti oldalt tartalmazó egyenesre.

A 22. ábrán az AF, QE, BM, PN, CK szakaszok mindegyike az $ABCD$ paralelogramma magassága lesz.



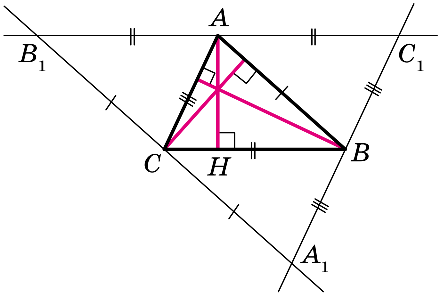
22. ábra

A 7. osztályos tananyagból már tudjátok, hogy két párhuzamos egyenes közül az egyik egyenes minden pontja azonos távolságra lesz a másik egyenestől. Ezért $AF = QE$ és $BM = PN = CK$.

A BM, CK, PN a BC és AD **oldalakra bocsátott magasságok**, az AF, QE pedig az AB és CD oldalakra bocsátott magasságok.

1. feladat. Bizonyítsd be, hogy a háromszög magasságait tartalmazó egyenesek egy pontban metszik egymást!

Megoldás. Az ABC háromszög minden csúcsán keresztül párhuzamost húzunk a szemközti oldallal. Megkapjuk az $A_1B_1C_1$ háromszöget (23. ábra).



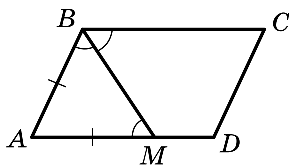
23. ábra

A szerkesztésből következik, hogy az AC_1BC és az $ABCB_1$ négyszögek paralelogrammák lesznek. Ebből adódik, hogy $AC_1 = BC = AB_1$. Tehát az A pont a B_1C_1 szakasz felezőpontja lesz.

Mivel a B_1C_1 és BC egyenesek párhuzamosak, ezért az ABC háromszög AH magassága merőleges lesz a B_1C_1 szakaszra. Ebből következik, hogy az AH egyenes az $A_1B_1C_1$ háromszög B_1C_1 oldalának a felezőmerőlegese. Az előzőhöz hasonlóan bizonyítható, hogy az ABC háromszög másik két magasságát tartalmazó egyenesek is felezőmerőlegesei az $A_1B_1C_1$ háromszög C_1A_1 és A_1B_1 oldalainak. Mivel a háromszög oldalainak felezőmerőlegesei egy pontban metszik egymást, ezzel az állítás be van bizonyítva.

2. feladat. A paralelogramma tompaszögének szögfelezője az oldalát a hegyesszög csúcsától számítva 2 : 1 arányba osztja. Határozzuk meg a paralelogramma oldalait, ha kerülete 60 cm!

Megoldás. Az $ABCD$ paralelogramma (24. ábra) B tompaszögének szögfelezője az AD oldalt M pontban metszi. A feltétel szerint $AM : MD = 2 : 1$.



24. ábra

Az ABM és a CBM szögek egyenlők a feltétel alapján.

A CBM és az AMB szögek egyenlők, mint a BC és AD párhuzamos egyeneseket BM metsző egyenesnél keletkezett különböző oldalakon fekvő szögek.

Ezért $ABM\angle = AMB\angle$. Tehát a BAM háromszög egyenlő szárú, innen következik, hogy $AB = AM$.

Legyen $MD = x$ cm, ekkor $AB = AM = 2x$ cm, $AD = 3x$ cm. Mivel a paralelogramma szemközti oldalai egyenlők, ezért a kerülete $2\,(AB + AD)$. Figyelembe véve, hogy a paralelogramma kerülete 60 cm, a következő egyenletet kapjuk:

$$2\,(2x + 3x) = 60;$$
$$x = 6.$$

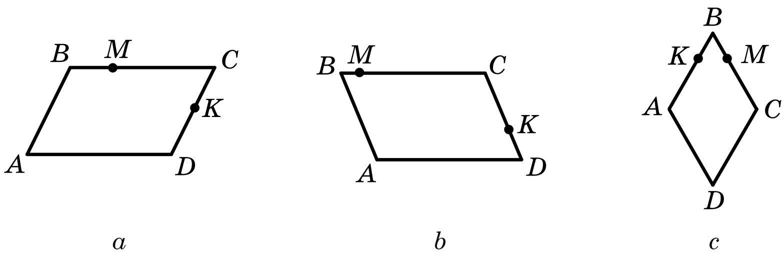
Tehát $AB = 12$ cm, $AD = 18$ cm.

Felelet: 12 cm, 18 cm.

1. Milyen négyszöget nevezünk paralelogrammának?
2. Milyen tulajdonsággal rendelkeznek a paralelogramma szemközti oldalai?
3. Milyen tulajdonsággal rendelkeznek a paralelogramma szemközti szögei?
4. Milyen tulajdonsággal rendelkeznek a paralelogramma átlói?
5. Mit nevezünk a paralelogramma magasságának?

GYAKORLATI FELADATOK

36.° A 25. ábrán $ABCD$ paralelogrammák láthatók. Rajzoljátok át ezeket a füzetbe! A B és M pontokból rajzoljátok meg a magasságokat az AD oldalra, a K pontból pedig az AB oldalra!

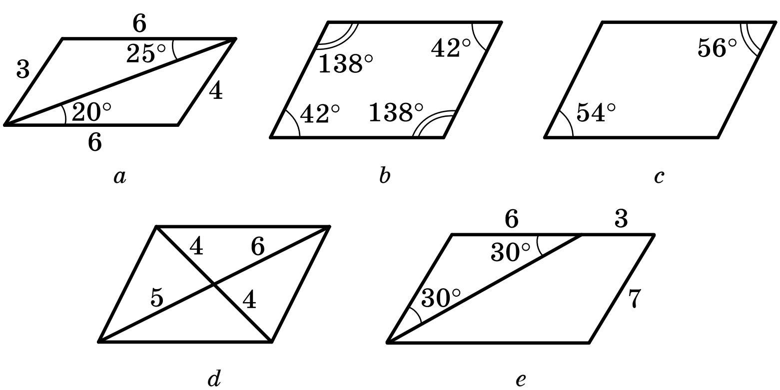


25. ábra

GYAKORLATOK

37.° Két párhuzamos egyenes metsz három másik párhuzamos egyenest. Hány paralelogramma keletkezik így?

38.° A 26. ábrán paralelogrammákat látunk. Határozzátok meg, nem végezve számításokat, hogy melyik ábrán nem helyesen van feltüntetve a szögek mértéke vagy a szakaszok hossza (a szakasz hossza centiméterekben van feltüntetve)!



26. ábra

39.° Elegendő-e 40 cm huzal, ha olyan paralelogrammát szeretnénk készíteni, melynek oldalai: 1) 14 cm és 8 cm; 2) 16 cm és 4 cm; 3) 12 cm és 6 cm?

40.° A paralelogramma kerülete 112 cm. Határozd meg az oldalait, ha 1) az egyik oldala 12 cm-rel kisebb, mint a másik; 2) két oldalának aránya 5 : 9!

41.° Határozd meg a paralelogramma oldalait, ha az egyik oldala 5-ször nagyobb, mint a másik, kerülete pedig 96 cm!

42.° Az $ABCD$ paralelogrammában ismert, hogy $AB = 6$ cm, $AC = 10$ cm, $BD = 8$ cm, O pedig az átlóinak a metszéspontja. Határozd meg a COD háromszög kerületét!

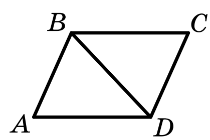
43.° Bizonyítsd be, hogy a paralelogramma két szomszédos szögének összege 180°!

44.° Határozd meg a paralelogramma szögeit, ha:
1) az egyik közülük 70°;
2) ha két szögének összege 100°;
3) ha két szögének különbsége 20°;
4) két szöge úgy aránylik egymáshoz, mint 3 : 7!

45.° Határozd meg a paralelogramma szögeit, ha az egyik közülük:
1) kétszer nagyobb, mint a másik;
2) 24°-kal kisebb a másiknál!

46.° Az ABC háromszögben ismert, hogy $A\angle = 35°$. A BC oldal bármely pontjából két egyenes van húzva, melyek megfelelően párhuzamosak a háromszög AB és AC oldalaival. Állapítsd meg a keletkezett négyszög típusát, és határozd meg a szögeinek fokmértékét!

47.° Határozd meg az $ABCD$ paralelogramma szögeit (27. ábra), ha $ABD\angle = 68°$, $ADB\angle = 47°$!



27. ábra

48.° Az $ABCD$ paralelogrammának AC átlója az AB oldallal 32°-os szöget alkot. $BCD\angle = 56°$. Határozd meg a CAD és D szögeket!

49.° Az $ABCD$ paralelogramma A és B szögének szögfelezői az M pontban metszik egymást. Határozd meg az ABM háromszög M szögének fokmértékét!

50.° A paralelogramma oldalai 6 cm és 10 cm. Lehet-e átlójának hossza 16 cm?

51.• Az $ABCD$ paralelogramma BK magassága az AD oldalt AK és KD szakaszokra osztja úgy, hogy $AK = 4$ cm, $KD = 6$ cm. Határozd meg a paralelogramma szögeit és a kerületét, ha $ABK\angle = 30°$!

52.• A paralelogramma egyik szöge 45°-os. A tompaszögének csúcsából bocsátott magassága 3 cm és ez a paralelogramma oldalát felezi. Határozd meg a paralelogramma oldalait, és a tompaszögének csúcsából bocsátott átló és a paralelogramma oldalai által bezárt szögeket!

53.• Az $ABCD$ paralelogrammában $C\angle = 30°$, a CD oldalra bocsátott BH magasság hossza 7 cm, a paralelogramma kerülete pedig 46 cm. Határozd meg a paralelogramma oldalait!

54.• Adott az $ABCD$ paralelogramma és az MKN háromszög. Egyidejűleg teljesülhetnek-e a következő egyenlőségek: $A\angle = M\angle$, $B\angle = K\angle$, $C\angle = N\angle$?

55.• Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ paralelogramma B és D csúcsa azonos távolságra van az AC egyenestől!

56.• Bizonyítsd be, hogy bármely, a paralelogramma átlóinak a felezőpontjára illeszkedő olyan szakasz esetén, amelynek végpontjai a paralelogramma oldalain helyezkednek el igaz, hogy az átlók felezőpontja egyúttal a szakaszfelező is!

57.• Az $ABCD$ paralelogramma kerülete 24 cm, $ABC\angle = 160°$. Az AC átlója az AD oldalhoz 10°-os szög alatt hajlik. Határozd meg a paralelogramma oldalait!

58.• Az $ABCD$ paralelogramma BD átlója az AB oldallal 65°-ot zár be, $C\angle = 50°$, $AB = 8$ cm. Határozd meg a paralelogramma kerületét!

59.• Határozd meg az $ABCD$ paralelogramma szögeit, ha $BD \perp AB$ és $BD = AB$!

60.• A paralelogramma átlója az oldalaival 30°-os és 90°-os szögeket alkot. Határozd meg a paralelogramma oldalait, ha a kerülete 36 cm!

61.• Az $ABCD$ paralelogrammán kívül a BD átlójával párhuzamosan egy egyenest húztak, amely metszi az AB, BC, CD és AD egyeneseket megfelelően E, M, F és K pontokban. Bizonyítsd be, hogy $MK = EF$!

62.• Az $ABCD$ paralelogramma AC átlójával párhuzamosan egy egyenest húztak, amely metszi az AB és BC oldalakat megfelelően M és N pontokban, az AD és CD egyeneseket pedig megfelelően P és K pontokban. Bizonyítsd be, hogy $PM = NK$!

63.• A paralelogramma egyik szögfelezője és az oldala által közbezárt szög nagysága 24°. Határozd meg a paralelogramma szögeit!

64.• Az $ABCD$ paralelogramma A szögének szögfelezője a BC oldalt az M pontban metszi. Határozd meg az adott paralelogramma kerületét, ha $AB = 12$ cm, $MC = 16$ cm!

65.• A paralelogramma hegyesszögének szögfelezője az oldalát a tompaszög csúcsától számítva 3 : 5 arányban osztja. Határozd meg a paralelogramma oldalait, ha a kerülete 66 cm!

66.• Az $ABCD$ paralelogramma B szögének szögfelezője a CD oldalt a K pontban metszi úgy, hogy a CK szakasz 5-ször hosszabb mint a KD. Határozd meg a paralelogramma oldalait, ha a kerülete 88 cm!

67.° Az $ABCD$ paralelogrammában $AD = 12$ cm, $AB = 3$ cm, B és C szögének szögfelezői az AD oldalát megfelelően E és F pontokban metszik. Határozd meg az EF szakasz hosszát!

68.° Az $ABCD$ paralelogramma BH magassága és az ABC szög szögfelezője közötti szög fokmértéke 24°. Határozd meg a paralelogramma szögeit!

69.° Bizonyítsd be, hogy a paralelogramma tompaszögének csúcsából bocsátott magasságok közötti szög a paralelogramma hegyesszögével lesz egyenlő!

70.° Bizonyítsd be, hogy a paralelogramma hegyesszögének csúcsából bocsátott magasságok közötti szög a paralelogramma tompaszögével lesz egyenlő!

71.° A paralelogramma tompaszögének csúcsából bocsátott magasságok közötti szög fokmértéke 30°. Határozd meg a paralelogramma kerületét, ha magasságai 4 cm és 6 cm!

72.° A paralelogramma hegyesszögének csúcsából bocsátott magasságok közötti szög 150°-os, a paralelogramma oldalainak hossza 10 cm és 18 cm. Határozd meg a paralelogramma magasságait!

73.° Az egyenlő szárú háromszög alapjának bármely pontján át a szárakkal párhuzamos egyenest fektettek. Bizonyítsd be, hogy a keletkezett négyszög kerülete egyenlő lesz az adott háromszög szárai hosszának összegével!

74.° Az ABC háromszög minden csúcsán át a szemközti oldalakkal párhuzamos egyeneseket húztak. Az így keletkezett paralelogrammák kerületeinek összege 100 cm. Határozd meg az ABC háromszög kerületét!

75.° Szerkessz paralelogrammát:
1) két oldala és a köztük lévő szög alapján;
2) két átlója és oldala alapján;
3) oldala, átlója és a köztük lévő szög alapján!

76.° Szerkessz paralelogrammát:
1) két oldala és átlója alapján;
2) két átlója és a köztük lévő szög alapján!

77.°° Adott három, nem egy egyenesre illeszkedő pont. Szerkessz olyan paralelogrammát, melynek csúcsai ezek a pontok! Hány megoldása van a feladatnak?

78.°° A paralelogramma két szomszédos szöge szögfelezőinek metszéspontja a paralelogramma oldalára illeszkedik. Határozd meg a paralelogramma szomszédos oldalai hosszának arányát!

79.°° Az $ABCD$ paralelogramma BC oldalán létezik egy olyan M pont, melyre igazak a $BM = MD = CD$ egyenlőségek. Határozd meg a paralelogramma szögeit, ha $AD = BD$!

80.•• Szerkessz paralelogrammát, ha:
1) adott az oldala, ez oldalra bocsátott magassága és az átlója;
2) adott a két átlója és magassága;
3) adott a hegyesszöge és a két szomszédos oldalához tartozó két magassága!

81.•• Szerkessz paralelogrammát, ha:
1) adott két oldala és magassága;
2) adott az átlója és a két szomszédos oldalához tartozó két magassága!

82.* Az $ABCD$ paralelogramma B csúcsából BE merőlegest húztak az AC átlójára. Az A ponton keresztül egy m egyenest húztak, amely merőleges az AD egyenesre, és a C ponton át pedig egy n egyenest, amely merőleges a CD egyenesre. Bizonyítsd be, hogy az m és n egyenesek metszéspontja a BE egyenesre illeszkedik!

83.* Szerkessz paralelogrammát, ha adott az oldala, az átlóinak összege és az átlók közti szöge!

84.* Az $ABCD$ paralelogrammán kívül az AB és BC oldalakra egyenlő oldalú ABM és BCK háromszögeket szerkesztettek. Bizonyítsd be, hogy az MKD háromszög is egyenlő oldalú lesz!

85.* A szög belsejében lévő ponton át húzz egy egyenest úgy, hogy az egyenes szakasza, amely a szög belsejében helyezkedik el, az adott pontban feleződjön!

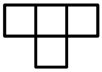
ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

86. Az AB szakasz hossza 24 cm. A C pont az AB egyenesre illeszkedik úgy, hogy $BC = 5AC$. Az AB szakaszon jelöltünk egy D pontot úgy, hogy $AB = 4BD$. Határozd meg a CD szakasz hosszát!

87. Hány különböző:
1) derékszögű háromszög létezik, melynek oldala 5 cm és szöge 45°;
2) egyenlő szárú háromszög létezik, melynek oldala 6 cm és szöge 30°;
3) derékszögű háromszög létezik, melynek oldala 7 cm és szöge 60°?

88. Az $ABCD$ négyszög AC és BD átlói egy körvonal átmérői. Bizonyítsd be, hogy $AB \parallel CD$!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!



28. ábra

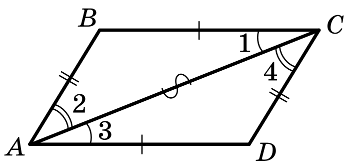
89. Egy 10 × 10-es négyzetrácsos lapot szét lehet-e vágni 25 db, a 28. ábrán látható alakzatra?

3. A paralelogramma ismertetőjelei

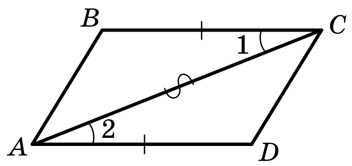
A paralelogramma meghatározása alapján könnyen felismerhetjük a négyszögek között a paralelogrammát. Ezt a célt szolgálja a következő három tétel is, amelyek a paralelogramma ismertetőjeleit taglalják.

3.1. tétel (a 2.1. tétel fordítottja (inverze)). ***Ha egy négyszög szemben fekvő oldalai páronként egyenlők, akkor az ilyen négyszöget paralelogrammának nevezzük.***

Bizonyítás. ⊙ A 29. ábrán látható $ABCD$ négyszögben $AB = CD$ és $BC = AD$. Bebizonyítjuk, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma.



29. ábra



30. ábra

Megrajzoljuk az AC átlót. Az ABC és CDA háromszögek egybevágóak a háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjele alapján. Ebből következik, hogy $1\angle = 3\angle$ és $2\angle = 4\angle$. Az 1-es és 3-as szögek a BC és AD egyenesek valamint az AC metsző egyenes különböző oldali szögei. Tehát $BC \parallel AD$. Hasonlóan a $2\angle = 4\angle$ egyenlőségből következik, hogy $AB \parallel CD$.

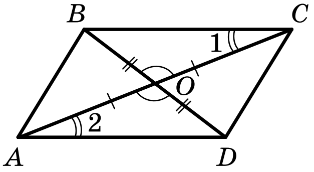
Tehát az $ABCD$ négyszög szemközti oldalai páronként párhuzamosak, tehát ez a négyszög paralelogramma. ▲

3.2. tétel. ***Ha egy négyszög szemben fekvő oldalai egyenlők és párhuzamosak, akkor az ilyen négyszög paralelogramma.***

Bizonyítás. ⊙ A 30. ábrán látható $ABCD$ négyszögben $BC = AD$ és $BC \parallel AD$. Bebizonyítjuk, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma.

Megrajzoljuk az AC átlót. Az ABC és CDA háromszögekben $BC = AD$ a feltétel alapján, az 1-es és 2-es szögek egyenlők, mint a BC és AD egyenesek és az AC metsző egyenes különböző oldali szögei, az AC oldal pedig közös. Tehát az ABC és CDA háromszögek egybevágók a háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele alapján. Ebből következik, hogy $AB = CD$. Tehát az $ABCD$ négyszög mindkét szemközti oldalai páronként egyenlők, tehát a 3.1. tételből következik, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma. ▲

3.3. tétel (a 2.3. tétel fordítottja (inverze)). ***Ha a négyszög átlói metszik és metszéspontjukban felezik egymást, akkor ez a négyszög paralelogramma.***



31. ábra

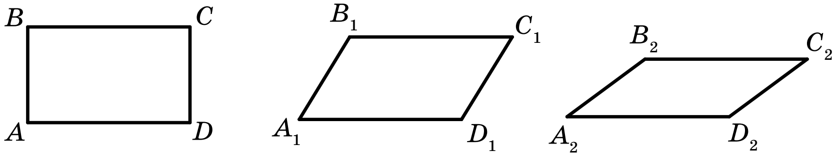
Bizonyítás. A 31. ábrán az $ABCD$ négyszög látható, melynek AC és BD átlói az O pontban metszik egymást, és a tétel feltétele alapján $AO = OC$ és $BO = OD$. Bebizonyítjuk, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma.

Mivel a BOC és DOA szögek mint csúcsszögek egyenlők, az $AO = OC$ és $BO = OD$, ezért a háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele alapján a BOC és DOA háromszögek egybevágók. Ebből következik, hogy $BC = AD$ és $1\angle = 2\angle$. Az 1-es és 2-es szögek a BC és AD egyenesek valamint az AC metsző egyenes által alkotott belső váltószögek. Tehát $BC \parallel AD$.

Ezért az $ABCD$ négyszög két szemközti oldalai egyenlők és párhuzamosak. A 3.2. tétel alapján az $ABCD$ négyszög paralelogramma. ▲

Már tudjátok, hogy a háromszög egyértelműen megadható három oldalával, tehát a háromszög szerkesztése három oldal alapján egyértelműen megoldható. Ez a paralelogrammánál másképp van. A 32. ábrán az $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$ paralelogrammáknak az oldalai egyenlők, vagyis $AB = A_1B_1 = A_2B_2$ és $BC = B_1C_1 = B_2C_2$. De szemmel látható, hogy ezek a paralelogrammák nem egyenlők egymással.

Ez azt jelenti, hogyha négy lécet összekapcsolunk úgy, hogy paralelogramma keletkezzen, ekkor ez a szerkezet nem lesz merev, vagyis alakját az erőhatásokkal szemben nem tartja meg.

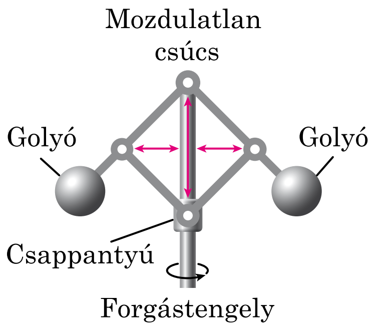


32. ábra

A paralelogrammának ezt a tulajdonságát széleskörűen alkalmazzák a gyakorlatban is. Ennek köszönhetően a villanylámpát olyan pozícióba lehet beállítani, hogy az nekünk legjobban megfeleljen, a széthúzható mobil ajtórácsot a megfelelő pozícióba tudjuk állítani (33. ábra).

A 34. ábrán egy olyan szerkezet látható, amely a gőzgép fontos alkotórésze. A tengely forgási sebességének növelésével – a centrifugális erő hatására – a golyók távolodni fognak a tengelytől, miközben a gőzmennyiséget szabályozó csappantyú megemelkedik. Ezt a szerkezetet a gőzgép feltalálójának tiszteletére **Watt-féle paralelogrammá**nak nevezik.

33. ábra

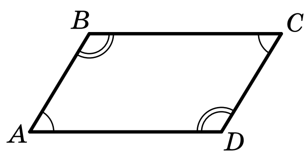


34. ábra

Feladat. Bizonyítsd be, hogyha a négyszögben a szemközti szögek egyenlők, akkor ez paralelogramma lesz!

Megoldás. A 35. ábrán az $ABCD$ négyszög látható, melyben $A\angle = C\angle$, $B\angle = D\angle$. Bebizonyítjuk, hogy az $ABCD$ négyszög paralelogramma.

A négyszög szögeinek összegéről szóló tétel alapján $A\angle + B\angle + C\angle + D\angle = 360°$. Figyelembe véve, hogy $A\angle = C\angle$, $B\angle = D\angle$ azt kapjuk, hogy $A\angle + B\angle = C\angle + D\angle = 180°$.



35. ábra

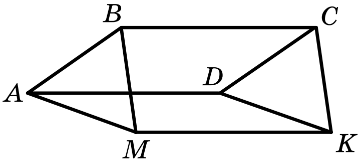
Mivel az A és B szögek egyállású szögek, amelyek az AD és BC egyenesek AB-val történő metszésekor keletkeznek, és ezek összege 180°, tehát $BC \parallel AD$.

Hasonlóan be lehet bizonyítani, hogy $AB \parallel CD$. Tehát az $ABCD$ négyszög paralelogramma.

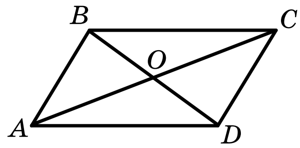
1. A paralelogramma milyen ismertetőjeleit ismeritek? Fogalmazzátok meg őket!
2. A paralelogramma tulajdonságai és ismertetőjelei közül melyek lesznek kölcsönösen fordított tételek?
3. A paralelogramma melyik tulajdonságát alkalmazzák leggyakrabban a gyakorlatban?

GYAKORLATOK

90.° Bizonyítsd be, hogyha a négyszög egyik oldalra illeszkedő szögei 180°-ra egészítik ki egymást, akkor ez a négyszög paralelogramma!



36. ábra



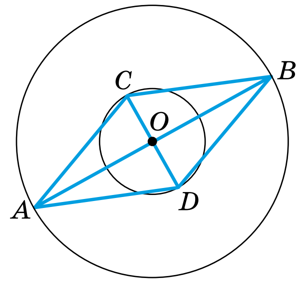
37. ábra

91.° Az *ABCD* és *AMKD* négyszögek paralelogrammák (36. ábra). Bizonyítsd be, hogy a *BMKC* négyszög paralelogramma!

92.° Az *ABD* háromszögnek az *AO*, az *ABC* háromszögnek pedig a *BO* a súlyvonala (37. ábra). Bizonyítsd be, hogy az *ABCD* négyszög paralelogramma!

93.° Az *ABCD* paralelogramma *AC* átlóján felvettek egy *M* és egy *K* pontot úgy, hogy $AM = CK$. Bizonyítsd be, hogy az *MBKD* négyszög paralelogramma!

94.° Két körvonalnak közös az *O* középpontja (38. ábra). Az egyik körlapban meg húztuk az *AB* átlót, a másikban pedig a *CD*-t. Bizonyítsd be, hogy az *ACBD* négyszög paralelogramma!



38. ábra

95.° Az *E* és *F* pontok megfelelően az *ABCD* paralelogramma *BC* és *AD* oldalainak a felezőpontjai. Bizonyítsd be, hogy az *AECF* négyszög paralelogramma!

96.° Az *ABCD* paralelogramma *AB* és *CD* oldalaira *AM* és *CK* egyenlő szakaszokat mértünk. Bizonyítsd be, hogy az *MBKD* négyszög paralelogramma!

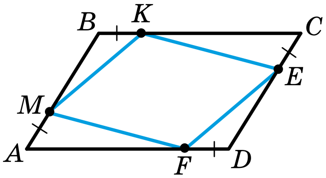
97.° Az *ABCD* paralelogramma (39. ábra) oldalaira *AM*, *BK*, *CE* és *DF* egyenlő szakaszokat mértek fel. Bizonyítsd be, hogy az *MKEF* négyszög paralelogramma!

98.• Az *ABC* háromszög *AM* oldalfelezőjének meghosszabbítására az *AM* szakasszal egyenlő *MK* szakaszt mértek fel. Állapítsd meg az *ABKC* négyszög típusát!

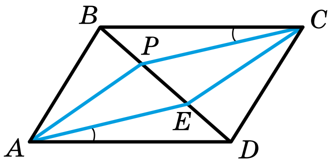
99.• Az *ABCD* négyszögben $AB \parallel CD$, $A\angle = C\angle$. Bizonyítsd be, hogy az *ABCD* négyszög paralelogramma!

100.• Az *ABCD* paralelogramma *A* szögének szögfelezője a *BC* oldalt egy *M* pontban metszi, a *C* szög szögfelezője az *AD* oldalt padig egy *K* pontban. Bizonyítsd be, hogy az *AMCK* négyszög paralelogramma!

101.• A 40. ábrán látható *ABCD* négyszög paralelogramma, $BCP\angle = DAE\angle$. Bizonyítsd be, hogy az *APCE* négyszög is paralelogramma!



39. ábra

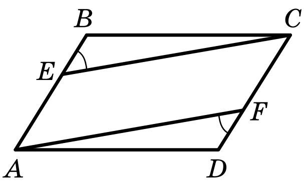


40. ábra

102. A 41. ábrán látható $ABCD$ négyszög paralelogramma, $BEC\angle = DFA\angle$. Bizonyítsd be, hogy az $AECF$ négyszög paralelogramma!

103. Az $ABCD$ paralelogramma B és D csúcsából BM és DK merőlegeseket bocsátottak az AC átlóra. Bizonyítsd be, hogy a $BKDM$ négyszög paralelogramma!

104. Az $ABCD$ paralelogramma A és C szögének szögfelezői a BD átlót megfelelően az E és F pontokban metszik. Bizonyítsd be, hogy az $AECF$ négyszög paralelogramma!



41. ábra

105. Az $MNPK$ paralelogramma NP átlójának O felezőpontján át egyenest fektettek, amely az MN és KP oldalakat megfelelően az A és B pontokban metszi. Bizonyítsd be, hogy az $ANBP$ négyszög paralelogramma!

106. A $CDEF$ paralelogramma átlóinak metszéspontján át két egyenest fektettek, melyek közül az egyik a CD és EF oldalakat megfelelően az A és B pontokban metszi, a másik a DE és CF oldalakat pedig megfelelően az M és K pontokban. Bizonyítsd be, hogy az $AMBK$ négyszög paralelogramma!

107. Az M, N, K és P pontok az $ABCD$ paralelogramma AB, BC, CD és AD oldalainak felezőpontjai. Bizonyítsd be, hogy az AN, BK, CP és DM egyenesek metszéspontjai egy paralelogramma csúcsai lesznek!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

108. Az ABC háromszög AK és BM szögfelezőit tartalmazó egyenesek 74°-os szög alatt metszik egymást. Határozd meg a C szög fokmértékét!

109. Az egyenlő szárú háromszög szárai által bezárt szög fokmértéke 120°, a szárára bocsátott magasság hossza 8 cm. Határozd meg a háromszög alapját!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

110. Az alakzatok területe mérlegeléssel is meghatározható. E célból az alakzatot kartonra rajzoljuk, majd kivágjuk a körvonalak mentén. Ugyanebből az anyagból megfelelő méretű négyzetet vágunk ki. Ezután összehasonlítjuk a két alakzat tömegét. Magyarázd meg, min alapszik ez a módszer!

SZÜKSÉGES ÉS ELÉGSÉGES

A 7. osztályos mértan elsajátítása közben megtanultátok, hogy a tételek többsége két részből áll: a feltételből (ami adott) és a következtetésből (az, amit be kell bizonyítani).

Ha az állítást, amely a feltételt jelenti, megjelöljük A-val, a következtetést pedig B-vel, akkor a tétel megfogalmazását a következőképpen ábrázolhatjuk:

ha *A*, akkor *B*.

Például a 2.3. tételt így is megfogalmazhatjuk:

	A		***B***
Ha	a négyszög paralelogramma,	**akkor**	átlóinak metszéspontja felezi az átlót.

Ekkor a 3.3. tételt, amely a 2.3. tétel fordítottja, így is megfogalmazhatjuk:

	A		***B***
Ha	a négyszög átlóinak metszéspontja felezi az átlót,	**akkor**	a négyszög paralelogramma.

A mindennapi életben gyakran használjuk a *szükséges* és *elégséges* szavakat. Néhány példa erre.

- Ahhoz, hogy meg tudjuk oldani a feladatot, *szükséges* a tételt is tudni.
- Ha a matematikaversenyen minden feladatot helyesen oldottatok meg, ez *elégséges* lesz ahhoz, hogy ti végezzetek az első helyen.

A *szükséges* és *elégséges* szavak a tantételekkel szoros kapcsolatban vannak.

Vizsgáljuk meg a következő tételt:

	A		***B***
Ha	egy természetes szám a 10 többszöröse,	**akkor**	az 5-nek is többszöröse lesz.

Az A feltétel elegendő a B következtetéshez. Ezzel együtt a szám 5-tel való oszthatósága (a B állítás) szükséges ahhoz, hogy a szám osztható legyen 10-zel (A állítás).

Még egy példával illusztráljuk:

	A		***B***
Ha	két szög csúcsszög,	**akkor**	ezek a szögek egyenlők.

Ebben a tételben az A állítás **elégséges feltétele** a B állításnak, vagyis ahhoz, hogy két szög egyenlő legyen *elégséges* az, hogy csúcsszögek legyenek. Ebben a tételben a B állítás **szükséges feltétele** az A állításnak, vagyis ahhoz, hogy két szög csúcsszög legyen az *szükséges*, hogy egyenlők legyenek. Megjegyezzük, hogy a B állítás nem lesz szükséges feltétele az A állításnak. Valóban, ha két szög egyenlő, az nem jelenti azt, hogy csúcsszögek is lesznek.

Tehát bármely **ha *A*, akkor *B*** tételben az A állítás az elégséges feltétele lesz a B állításnak, a B állítás pedig szükséges feltétele az A állításnak.

Ha nemcsak a

ha *A*, akkor *B* állítás az igaz,

hanem a

ha *B*, akkor *A* állítás az igaz,

akkor az A állítás **szükséges** és **elégséges** feltétele a B-nek, és a B állítás szükséges és elégséges feltétele az A-nak.

Például a 3.3. és a 2.3. tételek kölcsönösen fordított tételek. A *szükséges* és *elégséges* nyelven ezt így is megfogalmazhatjuk:

ahhoz, hogy a négyszög paralelogramma legyen, szükséges és elégséges, hogy átlói metsszék és a metszéspontban felezzék egymást.

Ha a tételben szerepelnek a *szükséges* és *elégséges* szavak, az két tételt egyesít: az egyenest és a fordítottat is (egyenes tétel lehet bármelyik a két tétel közül, akkor a másik lesz a fordítottja). Tehát az ilyen tétel bizonyításának két részből kell állnia: az egyenes és a fordított tételeket is bizonyítani kell. Azt a tételt, amely egyesíti az egyenes és a fordított tételt, **kritérium**nak nevezzük.

Néha a *szükséges* és *elégséges* kifejezés helyett az *akkor és csakis akkor*t szokták használni. Például a 2.1. és a 3.1. tételek a következő kritériummá egyesíthetők:

a négyszög akkor és csakis akkor lesz paralelogramma, ha mindkét szemközti oldalpárja megfelelően egyenlő.

Fogalmazzátok meg a 2.2. tétel és a 3. pont kulccsal jelölt feladata alapján a kritériumtételt!

4. Téglalap

A paralelogramma – az egy négyszög, de nyilvánvaló, hogy nem minden négyszög paralelogramma is egyben. Ebben az esetben azt mondják, hogy a paralelogramma a négyszög egy fajtája. A 42. ábra illusztrálja ezt a tényt.

A paralelogrammának külön részesetei is vannak.

Meghatározás. **Téglalapnak nevezzük azt a paralelogrammát, melynek minden szöge derékszög.**

A 43. ábrán az $ABCD$ téglalap látható.

A meghatározásból következik, hogy a téglalap a paralelogramma minden tulajdonságával rendelkezik. *A téglalap*

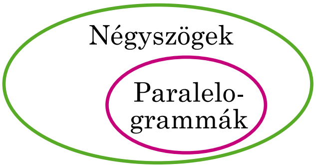
- *szemben lévő oldalai egyenlők;*
- *átlói metszéspontjukban felezik egymást.*

A téglalapnak viszont egyéni tulajdonságai is vannak, amelyekkel a téglalaptól különböző paralelogramma nem rendelkezik. A meghatározásból az is következik, hogy a téglalap szögei egyenlők egymással. Még egy tulajdonságát a következő tétel adja meg.

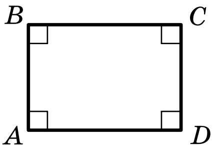
4.1. tétel. ***A téglalap átlói egyenlők egymással.***

Bizonyítás. ⊙ A 44. ábrán az $ABCD$ téglalap látható. Bebizonyítjuk, hogy az AC és BD átlói egyenlők egymással.

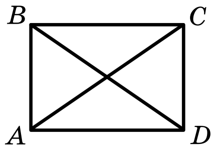
Az ABD és DCA derékszögű háromszögekben az AB és DC befogók egyenlők, az AD befogó pedig közös. Ezért az ABD és DCA háromszögek egybevágóak a két befogójuk alapján. Ebből következik, hogy $BD = AC$. ▲



42. ábra



43. ábra



44. ábra

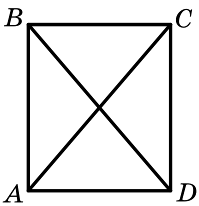
A téglalap meghatározása lehetőséget ad arra, hogy a paralelogrammák közül felismerjük a téglalapokat. Ezt a célt szolgálja a következő két tétel is, melyeket a téglalap ismertetőjeleinek nevezzük.

4.2. tétel. ***Ha a paralelogramma egyik szöge derékszög, akkor az ilyen paralelogramma téglalap.***

Bizonyítsátok be önállóan ezt a tételt!

4.3. tétel. ***Ha a paralelogramma átlói egyenlők egymással, akkor az ilyen paralelogramma téglalap.***

Bizonyítás. ⊙ A 45. ábrán az $ABCD$ paralelogramma látható, melynek AC és BD átlói egyenlők. Bebizonyítjuk, hogy az $ABCD$ paralelogramma téglalap.



45. ábra

Vizsgáljuk meg az ABD és DCA háromszögeket! Ezekben $AB = CD$, $BD = AC$, az AD pedig közös oldal. Tehát ezek a háromszögek egybevágóak a háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjele alapján. Ebből következik, hogy a $BAD\angle = CDA\angle$. Ezek a szögek az AB és DC párhuzamos egyenesek és az AD egyenes metszésekor keletkező egyállású szögek. Tehát $BAD\angle + CDA\angle = 180°$, $BAD\angle = CDA\angle = 90°$. A 4.2. tételből azt kapjuk, hogy az $ABCD$ téglalap. ▲

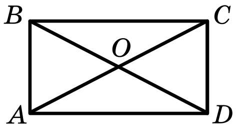
1. Milyen alakzatot nevezünk téglalapnak?
2. Milyen tulajdonságai vannak a téglalapnak?
3. Milyen egyéni tulajdonsággal rendelkeznek a téglalap átlói?
4. Milyen ismertetőjel alapján állapíthatjuk meg, hogy a paralelogramma téglalap?

GYAKORLATI FELADATOK

111.° Rajzolj egy téglalapot! Csak vonalzó alkalmazásával határozd meg azt a pontot, amely egyenlő távolságra lesz a téglalap csúcsaitól!

GYAKORLATOK

112.° Bizonyítsd be, hogy az a négyszög, melynek minden szöge egyenlő, az téglalap lesz!



46. ábra

113.° Az $ABCD$ téglalap átlói (46. ábra) az O pontban metszik egymást. Bizonyítsd be, hogy az AOB és AOD háromszögek egyenlő szárúak!

114.° Az $ABCD$ téglalap átlói (46. ábra) az O pontban metszik egymást, $ABD\angle = 64°$. Határozd meg a COD és AOD szögeket!

115.° Az $ABCD$ téglalap átlói (46. ábra) az O pontban metszik egymást, $ADB\angle = 30°$, $BD = 10$ cm. Határozd meg az AOB háromszög kerületét!

116.° A téglalap átlói közötti szög 60°, a téglalap kisebbik oldala pedig 8 cm. Határozd meg a téglalap átlójának hosszát!

117.• Az $ABCD$ téglalap AC átlójára AM és CK egyenlő szakaszokat mértek (az M pont az A és K pontok között van). Bizonyítsd be, hogy a $BKDM$ négyszög téglalaptól eltérő paralelogramma lesz!

118.• Az $ABCD$ téglalap BD átlójának a B-n túli meghosszabbításán felvettek egy E pontot, a D-n túli meghosszabbításán pedig egy F pontot úgy, hogy $BE = DF$. Bizonyítsd be, hogy az $AECF$ négyszög téglalaptól eltérő paralelogramma lesz!

119.• Az $ABCD$ téglalap BC oldalának felezőpontja az M pont. $MA \perp MD$, a téglalap kerülete pedig 36 cm. Határozd meg a téglalap oldalainak a hosszát!

120.• Az $ABCD$ téglalap kerülete 30 cm. Az A és D szögeinek szögfelezői a BC oldalhoz illeszkedő M pontban metszik egymást. Határozd meg a téglalap oldalainak a hosszát!

121.• Az egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója 55 cm. Az $ABCD$ téglalapot úgy szerkesztették, hogy az A és D csúcsai az átfogóhoz, a másik két csúcsa pedig az adott háromszög befogóihoz illeszkednek. Határozd meg a téglalap oldalait, ha $AB : BC = 3 : 5$!

122.• Az ABC háromszögben $C\angle = 90°$, $AC = BC = 6$ cm. A $CMKN$ téglalap úgy van rajzolva, hogy az M pont az AC befogóra, az N pont a BC befogóra, a K pedig az AB átfogóra illeszkedik. Határozd meg a $CMKN$ téglalap kerületét!

123.• Bizonyítsd be, hogyha a paralelogramma átlói az egyik oldallal egyenlő szögeket alkotnak, akkor ez a paralelogramma téglalap!

124.• Bizonyítsd be, hogy a derékszögű háromszögnek az átfogóhoz tartozó oldalfelezője az átfogó felével egyenlő!

125.• Szerkessz téglalapot:
1) két oldala alapján;
2) az átlója, és az átló és az oldal közötti szöge alapján!

126.• Szerkessz téglalapot:
1) oldala és átlója alapján;
2) az átlója, és az átlók közötti szöge alapján!

127.•• Az $ABCD$ téglalap AC átlójának felezőmerőlegese a BC oldalt az M pontban metszi úgy, hogy $BM : MC = 1 : 2$. Határozd meg, hogy az átló milyen részekre osztja a téglalap szögét!

128.•• Az $ABCD$ téglalapban ismert, hogy $BCA\angle : DCA\angle = 1 : 5$, $AC = 18$ cm. Határozd meg a C pont és a BD átló közötti távolságot!

129.•• Bizonyítsd be, hogy a különböző oldalú paralelogramma szögfelezői egymást metszve egy téglalapot alkotnak!

130.•• Szerkessz téglalapot egy oldala és a vele szemközti – az átlók metszéspontjánál lévő – szög alapján!

131.* Szerkessz téglalapot, ha adott:
1) az átlója és a két oldalának különbsége;
2) a kerülete és az átlója;
3) a kerülete és az átlók közti szöge!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

132. Az ABC háromszögben $C\angle = 48°$, az AK és BM szakaszok pedig a magasságai. Határozd meg az AK és BM egyenesek közötti szög fokmértékét!

133. Az ABC háromszög AC oldalán egy D pontot jelöltünk úgy, hogy $A\angle = CBD\angle$. Határozd meg az ABC szög fokmértékét, ha az ABD és BCD háromszögeknek van még egy egyenlő szögpárja!

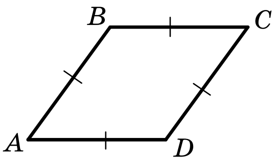
134. Az ABC háromszög egyik szögfelezője az AD szakasz. A C ponton keresztül az AD egyenessel párhuzamosan egy olyan egyenest fektettek, amely az AB egyenest az E pontban metszi. Határozd meg az ACE háromszög fajtáját!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

135. A síkon 1000 pontot jelöltek. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan egyenes, melyhez viszonyítva mindkét félsíkban 500 pont van!

5. Rombusz

Már tudjátok, hogy a téglalap a paralelogramma egyik fajtája. Megismerkedünk a paralelogramma egy másik fajtájával – a rombusszal.



47. ábra

Meghatározás. Rombusznak nevezzük azt a paralelogrammát, melynek minden oldala egyenlő.

A 47. ábrán az $ABCD$ rombusz látható.

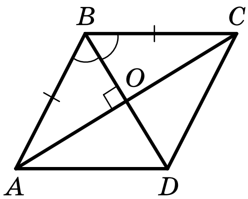
A meghatározásból következik, hogy a rombuszra igaz a paralelogramma minden tulajdonsága. *A rombusznak*

- *a szemközti szögei egyenlők;*
- *az átlói metszéspontjukban felezik egymást.*

A rombusznak azonban saját tulajdonságai is vannak.

5.1. tétel. ***A rombusz átlói merőlegesek egymásra, és felezik a rombusz szögeit.***

Bizonyítás. ⊙ A 48. ábrán az $ABCD$ rombusz látható, melyen az átlók metszéspontja az O pont. Bebizonyítjuk, hogy $BD \perp AC$ és $ABO\angle = CBO\angle$.



48. ábra

Mivel a rombusz meghatározásából következik, hogy minden oldala egyenlő, ezért az ABC háromszög egyenlő szárú ($AB = BC$). A paralelogramma átlóinak tulajdonságából következik az $AO = OC$ egyenlőség. Tehát a BO szakasz az ABC háromszög súlyvonala, vagyis a háromszög magassága és szögfelezője is egyben. Ezért $BD \perp AC$ és $ABO\angle = CBO\angle$. ▲

A rombusznak a paralelogrammától való megkülönböztetését nemcsak a meghatározása segíti, de a következő két tétel is, amelyeket a rombusz ismertetőjeleinek nevezzük.

5.2. tétel. ***Ha a paralelogramma átlói merőlegesek egymásra, akkor az ilyen paralelogramma rombusz.***

5.3. tétel. ***Ha a paralelogramma átlói a szögeinek szögfelezői, akkor ez a paralelogramma rombusz.***

Önállóan bizonyítsd be ezeket a tételeket!

?

1. Milyen alakzatot nevezünk rombusznak?
2. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a rombusz?
3. A rombusz átlóinak milyen egyedi tulajdonságai vannak?
4. Milyen ismertetőjel alapján állapíthatjuk meg, hogy a paralelogramma rombusz is egyben?

GYAKORLATI FELADATOK

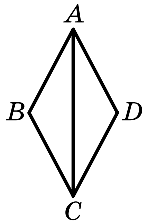
136.° Rajzolj egy rombuszt, melynek oldala 5 cm, egyik szöge pedig 40°. Rajzold meg a hegyesszög csúcsából bocsátott két magasságot, és a tompaszög csúcsából is a két magasságot!

GYAKORLATOK

137.° Bizonyítsd be, hogyha a paralelogramma két szomszédos oldala egyenlő egymással, akkor ez rombusz!

138.° Bizonyítsd be, hogyha a négyszögnek minden oldala egyenlő, akkor ez rombusz!

139.° Az $ABCD$ rombusz AC átlója (49. ábra) az AD oldallal 42°-os szöget alkot. Határozd meg a rombusz mindegyik szögének fokmértékét!



49. ábra

140.° Az $ABCD$ rombuszban $C\angle = 140°$, az átlóinak metszéspontja pedig O. Határozd meg az AOB háromszög szögeit!

141.° A rombusz egyik átlójának a hossza megegyezik az oldalának a hosszával. Határozd meg a rombusz szögeit!

142.° Határozd meg a rombusz szögeit, ha a kerülete 24 cm, a magassága pedig 3 cm!

143.° Határozd meg az $ABCD$ rombusz kerületét, ha $A\angle = 60°$, $BD = 9$ cm!

144.° Az $ABCD$ rombusz D szöge 8-szor nagyobb a CAD szögnél. Határozd meg a BAD szögét!

145.° A rombusz oldala és az átlók által bezárt szögek úgy aránylanak egymáshoz, mint 2 : 7. Határozd meg a rombusz szögeit!

146.° Az $ABCD$ rombusz AB és BC oldalainak felezőpontjai megfelelően az M és a K pontok. Bizonyítsd be, hogy $MD = KD$!

147.° Az $ABCD$ rombusz AB és BC oldalainak felezőpontjai megfelelően az E és az F pontok. Bizonyítsd be, hogy $EAC\angle = FAC\angle$!

148.° Bizonyítsd be, hogy a rombusz magasságai egyenlők egymással!

149.• A rombusz tompaszögének csúcsából bocsátott magasság felezi a rombusz oldalát. A rombusz kisebbik átlója 4 cm. Határozd meg a rombusz szögeit és kerületét!

150.• Bizonyítsd be, hogy a rombusz átlója felezi a rombusz magasságai közötti szöget, ha a magasságokat ugyanabból a csúcsból húzták, mint az átlót!

151.• Az $ABCD$ rombusz AB és AD oldalaira megfelelően AE és AF egyenlő szakaszokat mértek. Bizonyítsd be, hogy $CEF\angle = CFE\angle$!

152.$^{\bullet}$ Az ABC háromszögnek az AM szakasz a szögfelezője. Az M ponton keresztül egyenest húztunk, amely párhuzamos az AC egyenessel és az AB oldalt a K pontban metszi, valamint az AB oldallal párhuzamos egyenest, amely az AC oldalt egy D pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy $AM \perp DK$!

153.$^{\bullet}$ Az $ABCD$ paralelogramma A és B szögének szögfelezői a BC és AD oldalakat megfelelően az F és az E pontokban metszi. Állapítsd meg az $ABFE$ négyszög típusát!

154.$^{\bullet}$ Az ABC háromszögben a BD szögfelező felezőmerőlegese az AB és BC oldalakat megfelelően a K és P pontokban metszi. Állapítsd meg a $BKDP$ négyszög típusát!

155.$^{\bullet}$ Szerkessz rombuszt:
1) adott oldala és szöge alapján;
2) két átlója alapján;
3) magassága és szöge alapján!

156.$^{\bullet}$ Szerkessz rombuszt:
1) adott oldala és átlója alapján;
2) magassága és átlója alapján!

157.$^{\bullet\bullet}$ Az $ABCD$ téglalapban ismert, hogy $AD = 9$ cm, $BDA\angle = 30°$. A BC és AD oldalain megfelelően jelölték az M és K pontokat úgy, hogy az $AMCK$ rombusz legyen. Határozd meg ennek a rombusznak az oldalát!

158.$^{\bullet\bullet}$ Szerkessz rombuszt, ha adott az átlója és az a szöge, melynek a csúcsa az adott átlóra illeszkedik!

159.$^{\bullet\bullet}$ Szerkessz rombuszt, ha adott az átlója és az adott átlóval szemközti szöge!

160.* Szerkessz rombuszt, ha adott:
1) az átlóinak összege, valamint az átló és az oldala közötti szöge;
2) a hegyesszöge és az átlók különbsége;
3) a hegyesszöge, valamint a magasság és az oldalának összege;
4) az oldala és az átlóinak összege;
5) a tompaszöge és az átlóinak összege;
6) az oldala és az átlóinak különbsége!

161.* Adottak az M, N és K pontok. Szerkessz egy $ABCD$ rombuszt, amelyben az M pont az AB oldal felezőpontja, az N és K pontok pedig azon magasságainak a talppontjai, melyeket megfelelően a B csúcsból az AD oldalra, a D csúcsból a BC oldalra bocsátottak!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

162. Az A csúcsú szög száraira AB és AC egyenlő szakaszokat mértek. A B és C pontokon át merőleges egyeneseket húztak, megfelelően az AB és AC oldalakra, melyek a D pontban metszik egymást. Bizonyítsd be, hogy az AD félegyenes a BAC szög szögfelezője!

163. Az ABC háromszög AC oldalának az A ponton túli meghosszabbításán felvettek egy D pontot úgy, hogy $AD = AB$, a C-n túli meghosszabbítására pedig egy E pontot úgy, hogy $CE = BC$. Határozd meg az ABC háromszög szögeit és kerületét, ha DE = 18 cm, $BDA\angle = 15°$, $BEC\angle = 36°$!

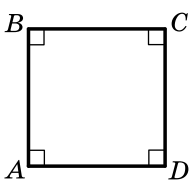
FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

164. Egy négyzetrácsos lapon tetszőlegesen kijelöltek 100 négyzetet. Bizonyítsd be, hogy ezek között legalább 25 olyan négyzet található, melyeknek nincs közös pontja!

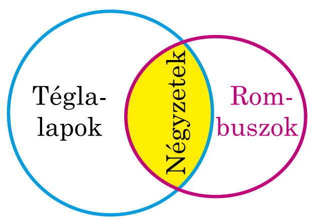
6. Négyzet

Meghatározás. Négyzetnek nevezzük azt a téglalapot, melynek minden oldala egyenlő.

Az 50. ábrán az $ABCD$ négyzet látható.



50. ábra



51. ábra

A meghatározásból következik, hogy a négyzet egy olyan rombusz, melynek minden szöge egyenlő. Tehát a négyzet téglalap és rombusz is egyben. Ezt mutatja be az 51. ábra. Ezért a négyzetre a téglalap és a rombusz minden tulajdonsága igaz. Ebből következik, hogy

- *a négyzet minden szöge derékszög;*
- *a négyzet átlói egyenlők, merőlegesek egymásra és szögeinek szögfelezői is egyben.*

1. Milyen alakzatot nevezünk négyzetnek?
2. Milyen rombusz lesz négyzet?
3. Ismertesd a négyzet tulajdonságait!

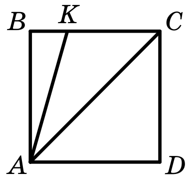
GYAKORLATOK

165.° Bizonyítsd be, hogyha a rombusz egyik szöge derékszög, akkor ez a rombusz négyzet!

166.° Bizonyítsd be, hogyha a téglalapnak a két szomszédos oldala egyenlő, akkor ez a téglalap négyzet!

167.° Az $ABCD$ négyzet BD átlója 5 cm. Mekkora az AC átló hossza? Mivel lesznek egyenlők az AOB háromszög szögei, ha O az átlók metszéspontja?

168.° Az $ABCD$ négyzet BC oldalán felvettek egy K pontot (52. ábra) úgy, hogy $AKB\angle = 74°$. Határozd meg a CAK szög fokmértékét!



52. ábra

169.° Az $ABCD$ négyzet BC oldalán felvettek egy K pontot úgy, hogy $AK = 2BK$. Határozd meg a KAD szög fokmértékét!

170.° Igaz-e az állítás:

1) minden négyzet paralelogramma;
2) minden rombusz négyzet;
3) minden téglalap négyzet;
4) minden négyzet téglalap;
5) minden négyzet rombusz;
6) ha a négyszög átlói egyenlők, akkor az téglalap;
7) ha a négyszög átlói merőlegesek, akkor az rombusz;
8) létezik rombusz, ami téglalap;
9) létezik négyzet, ami nem rombusz;
10) ha a négyszög átlói nem merőlegesek, akkor ez a négyszög nem rombusz;
11) ha a paralelogramma átlói nem egyenlők, akkor ez a paralelogramma nem téglalap;
12) ha a téglalap átlói a szögeit felezi, akkor ez a téglalap négyzet?

171.• A négyzet csúcsain keresztül, az átlóival párhuzamosan, egyeneseket fektettek. Bizonyítsd be, hogy ezek metszéspontjai egy négyzet csúcsai lesznek!

172.• A derékszögű háromszög derékszögének szögfelezője és az átfogójának a metszéspontján át a befogókkal párhuzamos egyeneseket fektettek. Bizonyítsd be, hogy a keletkezett négyszög négyzet!

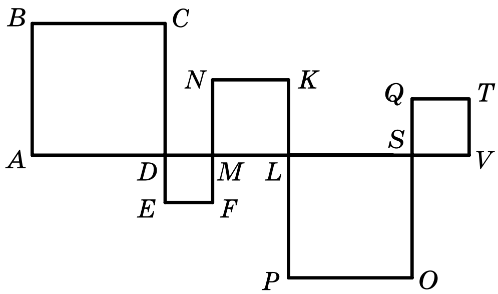
173.• Az $ABCD$ négyzet AB, BC, CD és AD oldalainak a felezőpontjai rendre az M, K, N, P pontok. Bizonyítsd be, hogy az $MKNP$ négyszög négyzet!

174.• Az ABC háromszögben $C\angle = 90°$, $AC = BC = 14$ cm. A $CDEF$ négyzet két csúcsa az ABC háromszög befogóihoz illeszkedik, az E csúcs pedig az AB átfogóra. Határozd meg a $CDEF$ négyzet kerületét!

175.• Az $ABCD$ négyzetben úgy jelöltek egy M pontot, hogy az AMB háromszög egyenlő oldalú legyen. Bizonyítsd be, hogy a CMD háromszög egyenlő szárú!

176.• Bizonyítsd be, hogyha a paralelogramma átlói merőlegesek és egyenlők egymással, akkor az ilyen paralelogramma négyzet!

177.• Az $ABCD$, $DEFM$, $MNKL$, $LPOS$, $SQTV$ négyszögek négyzetek (53. ábra). Határozd meg a négyzetek azon oldalainak az összegét, melyek nem illeszkednek az AV egyenesre, ha az AV szakasz hossza 16 cm!



53. ábra

178.• Szerkessz négyzetet adott oldala alapján!

179.•• Bizonyítsd be, hogy a téglalap szögfelezőinek metszéspontja egy négyzet csúcsai lesznek, ha a téglalap nem négyzet volt!

180.•• Az AMK egyenlő oldalú háromszög M és K csúcsai az $ABCD$ négyzet BC és CD oldalaira illeszkednek. Bizonyítsd be, hogy $MK \parallel BD$!

181.•• Adottak az M és K pontok. Szerkessz egy $ABCD$ négyzetet úgy, hogy az M pont az AB oldal felezőpontja legyen, a K pont pedig a BC oldalé!

182.* A négyzet bármely pontján keresztül két olyan egymásra merőleges egyenest húzunk, melyek mindegyike metszi a négyzet két szemközti oldalát. Bizonyítsd be, hogy az egyenesek négyzetben lévő szakaszai egyenlők!

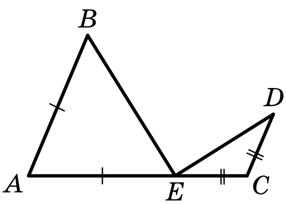
183.* Szerkessz négyzetet, ha adott:
1) az átló és az oldal összege;
2) az átló és az oldal különbsége!

184.* Az $ABCD$ négyzetben az O pontot úgy jelölték ki, hogy $OAD\angle = ODA\angle = 15°$. Bizonyítsd be, hogy a BOC háromszög egyenlő oldalú!

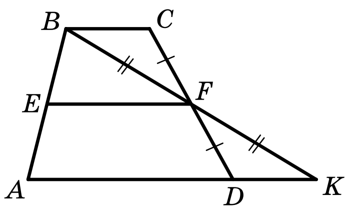
185.* Az $ABCD$ négyzet BC és CD oldalán úgy jelölték meg az M és E pontokat, hogy a BAM és MAE szögek egyenlők legyenek. Bizonyítsd be, hogy $AE = BM + DE$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

186. Az 54. ábrán az $AB \parallel CD$, $AB = AE$, $CD = CE$. Bizonyítsd be, hogy $BE \perp DE$!



54. ábra



55. ábra

187. Az 55. ábrán az $EF \parallel AD$, $BF = KF$, $CF = DF$. Bizonyítsd be, hogy $EF \parallel BC$!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

188. A síkon nyolc pontot úgy helyezz el, hogy bármely szakasz felezőmerőlegesére ezek közül pontosan két pont illeszkedjen, ha a szakaszok végpontjai is az adott pontok lesznek!

7. A háromszög középvonala

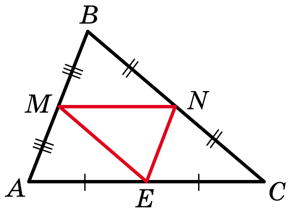
Meghatározás. A háromszög középvonalának nevezzük azt a szakaszt, amely a két oldalának felezőpontját köti össze.

Az 56. ábrán az MN, NE, EM szakaszok az ABC háromszög középvonalai.

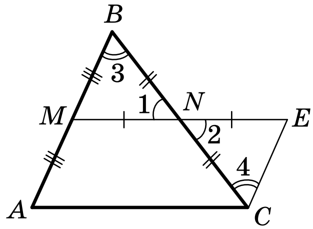
7.1. tétel. ***A háromszög két oldalának felezőpontját összekötő középvonala párhuzamos a harmadik oldalával és ennek felével egyenlő.***

Bizonyítás. Legyen MN szakasz az ABC háromszög középvonala (57. ábra). Bebizonyítjuk, hogy $MN \parallel AC$ és $MN = \frac{1}{2} AC$.

Az MN egyenesen jelöljük az E pontot úgy, hogy $MN = NE$ (57. ábra). Összekötjük az E és C pontokat. Mivel az N pont a BC szakasz felezőpontja, ezért $BN = NC$. Az 1-es és 2-es szögek egyenlők, mert csúcsszögek. Tehát az MBN és ECN háromszögek egybevágók a háromszögek



56. ábra



57. ábra

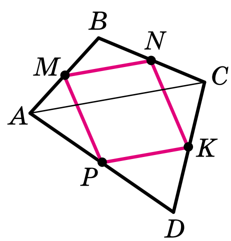
egybevágóságának első ismertetőjele alapján. Innen következik, hogy $MB = EC$ és $3\angle = 4\angle$. Figyelembe véve, hogy $AM = BM$, ezért $EC = AM$. A 3-as és a 4-es szögek különböző oldali szögei az AB-t és EC-t metsző BC egyenesnek. Vagyis $AB \parallel EC$.

Tehát az $AMEC$ négyszög AM és EC oldalai párhuzamosak és egyenlők. Ezért a 3.2. tétel alapján az $AMEC$ négyszög paralelogramma. Innen következik, hogy $ME \parallel AC$, vagyis $MN \parallel AC$.

Mivel $ME = AC$ és $MN = \frac{1}{2}ME$, ezért $MN = \frac{1}{2}AC$. ▲

Feladat. Bizonyítsd be, hogy a négyszög oldalainak a felezőpontjai egy paralelogramma csúcsai!

Megoldás. Az $ABCD$ négyszögben az M, N, K és P pontok az AB, BC, CD és AD oldalainak a megfelelő felezőpontjai (58. ábra).



58. ábra

Az MN szakasz az ABC háromszög középvonala. A háromszög középvonalának tulajdonsága alapján $MN \parallel AC$ és $MN = \frac{1}{2}AC$.

A PK szakasz az ADC háromszög középvonala. A háromszög középvonalának tulajdonsága alapján $PK \parallel AC$, $PK = \frac{1}{2}AC$.

Mivel $MN \parallel AC$ és $PK \parallel AC$, ezért $MN \parallel PK$.

Az $MN = \frac{1}{2}AC$ és $PK = \frac{1}{2}AC$ egyenlőségekből kapjuk, hogy $MN = PK = \frac{1}{2}AC$.

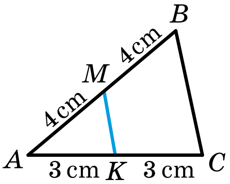
Tehát az $MNKP$ négyszög MN és PK oldalai egyenlők és párhuzamosak, ezért az $MNKP$ négyszög paralelogramma. ●

1. Mit nevezünk a háromszög középvonalának?
2. Hány középvonalat lehet a háromszögbe rajzolni?
3. Milyen tulajdonságokkal rendelkezik a háromszög középvonala?

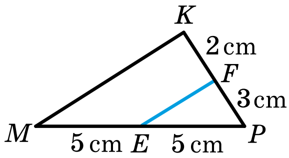
GYAKORLATOK

189.° Középvonala lesz-e az MK szakasz az ABC háromszögnek (59. ábra)?

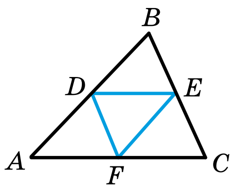
190.° Középvonala lesz-e az EF szakasz az MKP háromszögnek (60. ábra)?



59. ábra



60. ábra



61. ábra

191.° A DE és DF szakaszok az ABC háromszög középvonalai (61. ábra). Középvonala lesz-e az EF szakasz az adott háromszögnek?

192.° A háromszög oldalai 6 cm, 8 cm és 12 cm. Határozd meg a háromszög középvonalait!

193.° Az M és K pontok az ABC háromszög AB és AC oldalainak a felezőpontjai. Határozd meg az ABC háromszög kerületét, ha az MAK háromszög kerülete 17 cm!

194.° Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög középvonalaiból alkotott háromszög kerülete az ABC háromszög kerületének a fele!

195.° Állapítsd meg annak a háromszögnek a fajtáját, melynek középvonalai egyenlők egymással!

196.° Bizonyítsd be, hogy a háromszög középvonalai négy egybevágó háromszögre osztják az adott háromszöget!

197.° Az E és F pontok az ABC háromszög AB és BC oldalainak megfelelő felezőpontjai. Határozd meg az AC oldal hosszát, ha az 7 cm-rel hosszabb, mint az EF szakasz!

198.° Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög DE középvonala (a D és az E pontok megfelelően az AB és BC szakaszokra illeszkednek) és a BM oldalfelezője metszéspontjukban felezik egymást!

199.° Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög AM magassága merőleges az AB és AC szakaszok felezőpontjait összekötő középvonalra!

200.• Határozd meg a háromszög szögeit, ha két középvonala egymással egyenlő és merőlegesek egymásra!

201.• Az egyenlő szárú háromszög alappal párhuzamos középvonalának hossza 6 cm. Határozd meg a háromszög oldalainak hosszát, ha kerülete 46 cm!

202.• A négyszög átlóinak összege 28 cm. Határozd meg annak a négyszögnek a kerületét, melynek csúcsai az eredeti négyszög oldalainak a felezőpontjai lesznek!

203.• A négyszög csúcsai annak a rombusznak a felezőpontjai, melyek átlói 8 cm és 14 cm. Állapítsd meg a négyszög fajtáját, és határozd meg az oldalainak hosszát!

204.• A négyszög csúcsai annak a téglalapnak a felezőpontjai, melyek átlója 12 cm. Állapítsd meg a négyszög fajtáját, és határozd meg az oldalainak hosszát!

205.• Bizonyítsd be, hogy a háromszög csúcsai egyenlő távolságra vannak attól az egyenestől, amely tartalmazza a háromszög középvonalát!

206.•• A háromszög AB és BC oldalain megfelelően jelölték az M és K pontokat úgy, hogy $AM = 3BM$, $CK = 3BK$. Bizonyítsd be, hogy $MK \parallel AC$, és határozd meg az MK szakasz hosszát, ha $AC = 16$ cm!

207.•• A BAD és BCE szögek az ABC háromszög külső szögei. A B csúcsból a BAD és BCE szögek megfelelő szögfelezőire BM és BK merőlegeseket húztak. Határozd meg az MK szakaszt, ha az ABC háromszög kerülete 18 cm!

208.•• Szerkessz háromszöget a három oldalának felezőpontja alapján!

209.•• Szerkessz paralelogrammát a három oldalának felezőpontja alapján!

210.* Az $ABCD$ domború négyszög átlói merőlegesek egymásra. Az AB és AD oldalak felezőpontjain keresztül a DC és BC oldalakra megfelelően merőlegeseket húztak. Bizonyítsd be, hogy az egyenesek metszéspontja az AC egyenesre illeszkedik!

211.* Az $ABCD$ domború négyszög AB és CD oldalai egymással egyenlők. Az AC és BD átlók felezőpontjain egyenest fektettek, amely az AB és CD oldalakat megfelelően az M és N pontokban metszi. Bizonyítsd be, hogy $BMN\angle = CNM\angle$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

212. Az O középpontú körhöz a C ponton át CA és CB érintőket húztak (az A és B érintési pontok lesznek). Az AD szakasz a kör átmérője. Bizonyítsd be, hogy $BD \parallel CO$!

213. Az ABC háromszögben ismert, hogy $AB = BC$, $B\angle = 32°$, AK pedig a háromszög szögfelezője. A K ponton keresztül egy egyenest húztak, amely párhuzamos az AB oldallal, és az AC oldalt az M pontban metszi. Határozd meg az AKM szög fokmértékét!

214. Az $ABCD$ paralelogramma BD átlója a magassága is egyben és a hossza megegyezik a BC oldal hosszával. Határozd meg a paralelogramma CD oldalát, ha a B pont a CD egyenestől 4 cm távolságra van!

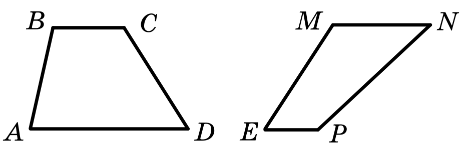
FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

215. Az 1 cm-es egyenlő oldalú háromszögben felvettek öt pontot. Bizonyítsd be, hogy ezek közül a pontok közül ki lehet választani kettőt, melyek között a távolság nem nagyobb, mint 0,5 cm!

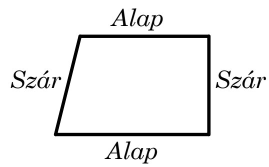
8. A trapéz

Meghatározás. Trapéznak nevezzük azt a négyszöget, amelynek két oldala párhuzamos, a másik kettő pedig nem.

A 62. ábrán látható négyszögek trapézok.



62. ábra



63. ábra

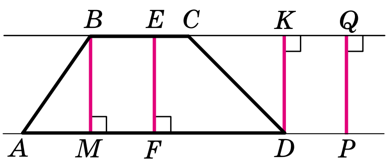
A trapéz párhuzamos oldalait **alapjai**nak nevezzük, a nem párhuzamosakat pedig a trapéz **szárai**nak (63. ábra).

Az $ABCD$ trapézban ($BC \parallel AD$) az A és D szögek az AD **alapnál lévő szögei**, a B és C szögek pedig a BC alapnál lévő szögei lesznek.

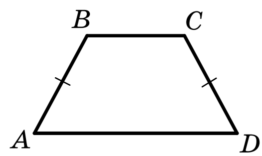
Meghatározás. A trapéz magasságának nevezzük az egyik alapját tartalmazó egyenes bármely pontjából a másik alapot tartalmazó egyenesre bocsátott merőlegest. (Vagyis a trapéz magasságán a két párhuzamos közötti távolságot értjük.)

A 64. ábrán a BM, EF, DK, PQ szakaszok mindegyike az $ABCD$ trapéz magassága. Ezeknek a szakaszoknak a hossza megegyezik a BC és AD egyenesek közötti távolsággal. Ezért $BM = EF = DK = PQ$.

A 65. ábrán az $ABCD$ trapéz látható, melynek AB és CD szárai egyenlők. Az ilyen trapézt **egyenlő szárú**nak nevezzük.

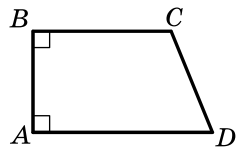


64. ábra



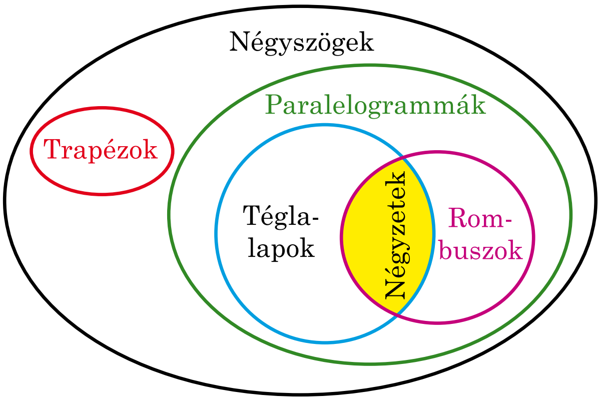
65. ábra

Ha a trapéz egyik szára a magassága is egyben, akkor az ilyen trapézt **derékszögű**nek nevezzük (66. ábra).



66. ábra

A trapéz a négyszögnek egy speciális esete. A négyszög és a speciális esetei közötti összefüggést a 67. ábra szemlélteti.



67. ábra

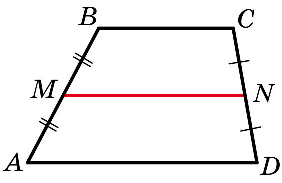
Meghatározás. A trapéz középvonalának nevezzük azt a szakaszt, amely a szárainak felezőpontját köti össze.

A 68. ábrán az $ABCD$ trapéz középvonala az MN szakasz.

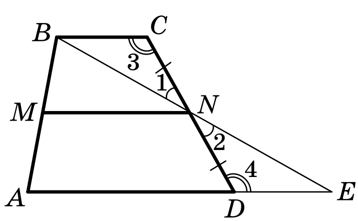
8.1. tétel. ***A trapéz középvonala párhuzamos az alapokkal, és hossza az alapok számtani közepével (félösszegével) egyenlő.***

Bizonyítás. Legyen az MN szakasz az $ABCD$ trapéz középvonala (69. ábra). Bebizonyítjuk, hogy az $MN \parallel AD$ és $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Meghúzzuk a BN egyenest, és az AD egyenessel való metszéspontját megjelöljük E-vel.



68. ábra



69. ábra

Mivel az N pont a CD szakasz felezőpontja, ezért $CN = ND$. Az 1-es és 2-es szögek egyenlők mint csúcsszögek, a 3-as és 4-es szögek pedig a BC és AE párhuzamos egyeneseknek a CD egyenessel való metszésekor keletkezett váltószögek. Tehát a BCN és az EDN háromszögek egybevágók a háromszögek egybevágóságának második ismertetőjele alapján. Innen az következik, hogy $BC = DE$ és $BN = NE$. Ekkor az MN szakasz az ABE háromszög középvonala lesz. Ebből következik, hogy $MN \parallel AE$, vagyis $MN \parallel AD$ és $MN = \frac{1}{2}AE$. Innen azt kapjuk, hogy:

$$MN = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + DE) = \frac{1}{2}(AD + BC). \blacktriangle$$

Feladat (az egyenlő szárú trapéz tulajdonságai). Bizonyítsd be, hogy az egyenlő szárú trapézban

1) az alapjainál lévő szögeik egyenlők;

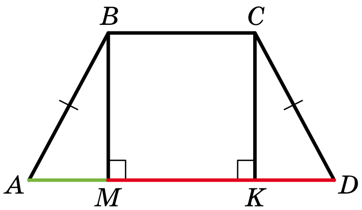
2) átlói egyenlők;

3) a tompaszög csúcsából bocsátott magasság az alapot két olyan részre osztja, melyek közül a kisebbik az alapok különbségének a felével, a nagyobbik pedig az alapok félösszegével (a trapéz középvonalával) egyenlő!

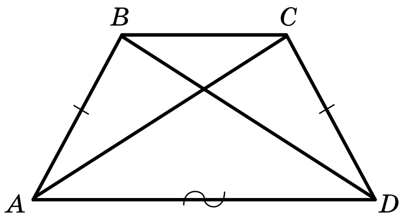
Megoldás. Megvizsgáljuk az $ABCD$ egyenlő szárú trapézt ($AB = CD$).

1) Meghúzzuk a BM és CK magasságokat (70. ábra). Mivel $AB = CD$ és $BM = CK$, ezért az AMB és DKC derékszögű háromszögek egybevágóak a befogójuk és az átfogójuk egyenlősége alapján. Ebből következik, hogy $A\angle = D\angle$.

A következőket kaptuk: $A\angle = D\angle$, $A\angle + ABC\angle = 180°$, $D\angle + DCB\angle = 180°$. Tehát $ABC\angle = DCB\angle$.



70. ábra



71. ábra

2) Megvizsgáljuk az ACD és DBA háromszögeket (71. ábra).

Ezekben $AB = CD$, AD a közös oldaluk, a BAD és CDA szögek, mint az egyenlő szárú trapéz alapon fekvő szögei, egyenlők. Tehát az ACD és DBA háromszögek egybevágók két oldaluk és a köztük lévő szögük alapján. Tehát $AC = BD$.

3) A $BMKC$ négyszögben (70. ábra) $BM \parallel CK$, $BC \parallel MK$, a BMK szög pedig derékszög. Tehát ez a négyszög téglalap. Innen következik, hogy $MK = BC$.

Az AMB és DKC háromszögek egybevágóságából következik, hogy $AM = KD$. Tehát

$$AM = \frac{AD - MK}{2} = \frac{AD - BC}{2};$$

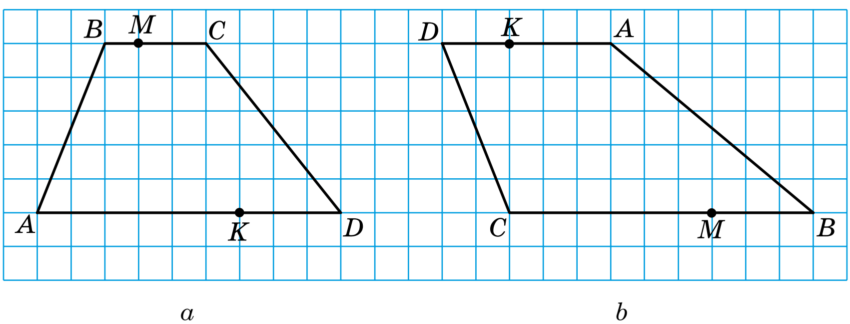
$$MD = AD - AM = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{2AD - AD + BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

1. Mit nevezünk trapéznak?
2. A trapéz mely oldalait nevezzük alapoknak? Szárainak?
3. Mit nevezünk a trapéz magasságának?
4. Sorold fel a trapéz fajtáit!
5. Milyen trapézt nevezünk egyenlő szárúnak?
6. Milyen trapézt nevezünk derékszögűnek?
7. Mit nevezünk a trapéz középvonalának?
8. Fogalmazd meg a trapéz középvonalának tulajdonságáról szóló tantételt!
9. Fogalmazd meg az egyenlő szárú trapéz tulajdonságait!

GYAKORLATI FELADATOK

216.° A négyzetrácsos füzetbe rajzolj:
1) egyenlő szárú trapézt;
2) derékszögű trapézt;
3) olyan trapézt, amely nem derékszögű és nem egyenlő szárú;
4) olyan trapézt, amelynek az alapnál az egyik szöge hegyes, a másik pedig ugyanennél az alapnál tompaszög!

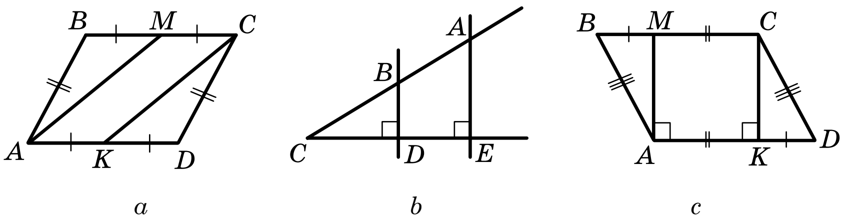
217.° Rajzold át a füzetedbe a 72. ábrát, majd húzd meg a trapéz magasságait megfelelően a B, M, K és D pontokból!



72. ábra

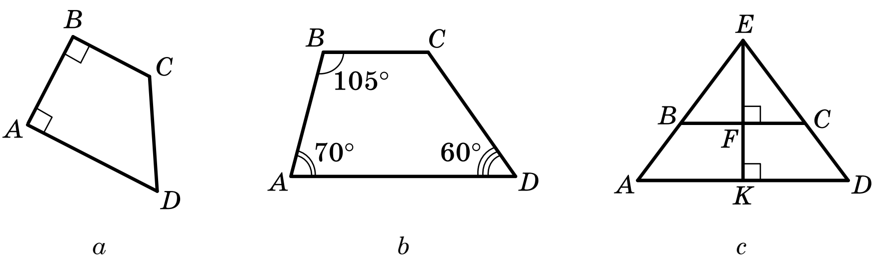
GYAKORLATOK

218.° Keress trapézokat a 73. ábrán! Nevezd meg az alapjait és a szárait!



73. ábra

219.° Trapéz-e a 74. ábrán látható $ABCD$ négyszög? Ha igen, akkor nevezd meg a trapéz alapjait és szárait!



74. ábra

220.° Az egyenlő szárú trapéz kerülete 52 cm, az alapjai pedig 13 cm és 21 cm. Határozd meg a szárát!

221.° A trapéz kerülete 49 cm, szárai pedig 5,6 cm és 7,8 cm. Határozd meg a trapéz alapjait, ha az egyik alapja 7,4 cm-rel nagyobb, mint a másik!

222.° Bizonyítsd be, hogy a trapéz szárain lévő (belső) szögeinek összege 180°!

223.° 1) Határozd meg az $ABCD$ trapéz A és C szögét, ha az alapjai az AD és BC szakaszok, és $B\angle = 132°$, $D\angle = 24°$!

2) Határozd meg az $ABCD$ trapéz szögeit, ha az AB száron lévő A szöge 38°-kal kisebb, mint a B szöge!

224.° Határozd meg az $ABCD$ trapéz szögeit, ha a CD száron lévő szögeire igaz, hogy $C\angle : D\angle = 8 : 7$!

225.° Az egyenlő szárú trapéz egyik szöge 46°. Határozd meg a többi szögét!

226.° Az egyenlő szárú trapéz szemközti szögeinek különbsége 20°. Határozd meg a szögeit!

227.° Az egyenlő szárú trapéz tompaszög csúcsánál lévő szár és a magasság közötti szög 23°. Határozd meg a trapéz szögeit!

228.° Lehet-e a trapéznak

1) három derékszöge;
2) három hegyesszöge;
3) két szemközti tompaszöge;
4) két szemközti derékszöge;
5) két szemközti egyenlő szöge?

229.° Lehetnek-e:

1) a trapéz alapjai egyenlők;
2) a trapéz átlóinak metszéspontja az átlók felezőpontja?

230.° Bizonyítsd be, hogyha a trapéz egyik alapján fekvő szögei egyenlők, akkor az adott trapéz egyenlő szárú!

231.° Bizonyítsd be, hogy az egyenlő szárú trapéz szemközti szögeinek összege 180°! Igaz-e a fordított állítás: ha a trapéz szemközti szögeinek összege 180°, akkor az adott trapéz egyenlő szárú?

232.° A 6 cm-es oldalú szabályos háromszög középvonala egy háromszögre és egy négyszögre osztja azt. Határozd meg a négyszög fajtáját és kerületét!

233.° Az egyenlő szárú trapéz magassága, amelyet a kisebbik alap végpontjából húztunk meg, a nagyobbik alapot egy 6 cm-es és egy 10 cm-es részre osztja. Határozd meg a trapéz alapjait!

234.° Az egyenlő szárú trapéz egyik szöge 60°, szára 18 cm, alapjainak összege pedig 50 cm. Határozd meg a trapéz alapjait!

235.° A derékszögű trapéz alapjai 10 cm és 24 cm, az egyik szöge pedig 45°. Határozd meg a trapéz kisebbik szárát!

236.° A derékszögű trapéz alapjai 7 cm és 15 cm, az egyik szöge pedig 60°. Határozd meg a trapéz nagyobbik szárát!

237.° Az $ABCD$ trapézban ismert, hogy $AB = CD$, $BAC\angle = 20°$, $CAD\angle = 50°$. Határozd meg az ACB és ACD szögeit!

238.° Az $ABCD$ trapézban ismert, hogy $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, $BC = CD$, $ABD\angle = 80°$. Határozd meg a trapéz szögeit!

239.° Az $ABCD$ trapéz kisebbik alapja BC, melynek hossza 6 cm. A B csúcsán keresztül egy egyenest fektettek, amely párhuzamos a CD oldallal, az AD oldalt pedig egy M pontban metszi. Határozd meg a trapéz kerületét, ha az ABM háromszög kerülete 16 cm!

240.° Az $ABCD$ trapéz C csúcsán át egy egyenest fektettek, amely párhuzamos az AB szárával, az AD nagyobbik alapot pedig egy E pontban metszi. Határozd meg a trapéz szögeit, ha $D\angle = 35°$, $DCE\angle = 65°$!

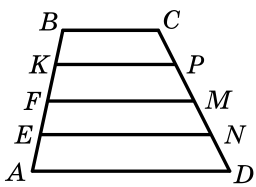
241.° A trapéz alapjai 9 cm és 15 cm. Mivel egyenlő a trapéz középvonala?

242.° A trapéz középvonala 8 cm, az egyik alapja pedig 5 cm. Határozd meg a másik alapjának hosszát!

243.° A trapéz egyik alapja 8 cm-rel hosszabb a másiknál, a középvonala pedig 17 cm-rel egyenlő. Határozd meg a trapéz alapjainak hosszát!

244.° A trapéz alapjainak aránya 3 : 4, a középvonalának hossza pedig 14 cm. Határozd meg a trapéz alapjainak hosszát!

245.° Az $ABCD$ trapéz mindkét szárát négy egyenlő részre osztották fel (75. ábra): $AE = EF = FK = KB$, $DN = NM = MP = PC$. Határozd meg az EN, FM és KP szakaszok hosszát, ha $AD = 19$ cm, $BC = 11$ cm!



75. ábra

246.° A derékszögű trapéz tompaszögének a csúcsából bocsátott magassága a nagyobbik alapját 7 cm-es és 5 cm-es szakaszokra osztja, ha a derékszög csúcsától kezdjük a számolást. Határozd meg a trapéz középvonalát!

247.° A derékszögű trapéz középvonala 9 cm, a derékszög csúcsából bocsátott magassága a nagyobbik alapot olyan szakaszokra osztja, melyek közül az egyik 2-szer hosszabb a másiknál, ha a derékszög csúcsától kezdjük a számolást. Határozd meg a trapéz alapjait!

248.• Az $ABCD$ egyenlő szárú trapéz ($AB = CD$) átlói az O pontban metszik egymást. Bizonyítsd be, hogy $AO = OD$ és $BO = OC$!

249.• Az egyenlő szárú trapéz magassága h, a trapéz szárát az átlóinak metszéspontjából 60°-os szög alatt látni[1]. Határozd meg a trapéz átlóját!

250.• Az egyenlő szárú trapéz alapjai úgy aránylanak egymáshoz, mint 2 : 5, az átlója a tompaszögét pedig felezi. Határozd meg a trapéz oldalait, ha kerülete 68 cm!

[1] Legyen adott egy AB szakasz és egy rajta kívüli M pont, az $AMB\angle = \alpha$. Ebben az estben azt mondjuk, hogy az AB szakasz az M pontból α szög alatt látszik.

251.• Az $ABCD$ trapézban $AB = CD$, $AD = 24$ cm, $ADB\angle = CDB\angle$, a trapéz kerülete pedig 60 cm. Határozd meg a trapéz ismeretlen oldalait!

252.• A trapéz oldalai a, a, a és $2a$. Határozd meg a szögeit!

253.• Az $ABCD$ trapézban az AC átló merőleges a CD szárra, és a BAD szög szögfelezője is egyben. $D\angle = 60°$, a trapéz kerülete pedig 40 cm. Határozd meg a trapéz alapjait!

254.• Az egyenlő szárú trapéz átlója merőleges a trapéz szárára, a kisebbik alapja pedig a szárral egyenlő. Határozd meg a trapéz szögeit!

255.• Milyen feltételek mellett egyenlő az egyenlő szárú trapéz magassága az alapjai különbségének a felével?

256.• Szerkessz egyenlő szárú trapézt alapja, szára és a köztük lévő szöge alapján!

257.• Szerkessz derékszögű trapézt az alapjai és a kisebbik szára alapján!

258.• Szerkessz egyenlő szárú trapézt az alapja, szára és átlója alapján!

259.• Az egyenlő szárú trapéz szára 6 cm, a nagyobbik alapja pedig 10 cm. Határozd meg a trapéz középvonalát, ha egyik szöge 60°!

260.• Az egyenlő szárú trapéz átlója 14 cm és az alappal 60°-os szöget zár be. Határozd meg a trapéz középvonalát!

261.• Az $ABCD$ trapéz középvonala két olyan trapézra osztja az eredeti trapézt, melyeknek a középvonala 15 cm és 19 cm. Határozd meg az $ABCD$ trapéz alapjait!

262.•• Bizonyítsd be, hogyha az egyenlő szárú trapéz átlói merőlegesek egymásra, akkor a magassága a trapéz középvonalával egyenlő!

263.•• Bizonyítsd be, ha az egyenlő szárú trapéz magassága a trapéz középvonalával egyenlő, akkor a trapéz átlói merőlegesek egymásra!

264.•• A derékszögű trapéz átlója olyan két háromszögre osztja azt, melyek közül az egyik a oldalú egyenlő oldalú háromszög. Határozd meg a trapéz középvonalát!

265.•• Az egyenlő szárú trapéz átlója két egyenlő szárú háromszögre osztja a trapézt. Határozd meg a trapéz szögeit!

266.•• Az $ABCD$ trapézban ($BC \parallel AD$) ismert, hogy $AC \perp BD$, $CAD\angle = 30°$, $BD = 8$ cm. Határozd meg a trapéz középvonalát!

267.•• Bizonyítsd be, hogy a trapéz szárainál lévő szögfelezőinek metszéspontja a trapéz középvonala egyenesére illeszkedik!

268.•• Szerkessz trapézt, ha adottak:
1) az alapjai és szárai;
2) az alapja, magassága és átlói;
3) az alapjainak különbsége, szárai és átlója!

269.•• Szerkessz egyenlő szárú trapézt, ha adott az alapja, magassága és szára!

270.•• Szerkessz trapézt, ha adottak:
1) az alapjai és átlói;
2) szárai, középvonala és magassága;
3) alapja, az alapon fekvő szöge és szára;
4) szárai, magassága és az egyik átlója!

271.* Az $ABCD$ paralelogramma B csúcsán át egy egyenest húztunk, amelynek nincs más közös pontja a paralelogrammával. Az A és C csúcsok ettől az egyenestől megfelelően a és b távolságra lesznek. Határozd meg a D pont távolságát ettől az egyenestől!

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

272. A körben AB és CD átmérőket rajzoltunk. Bizonyítsd be, hogy $AC = BD$ és $AC \parallel BD$!

273. Az O középpontú körben AB átmérőt és AC húrt rajzoltunk. Bizonyítsd be, hogy $BOC\angle = 2BAC\angle$!

274. Az O középpontú körvonalat az AB egyenes a C pontban érinti, $AC = BC$. Bizonyítsd be, hogy $OA = OB$!

275. Az O középpontú körvonal AB húrja merőleges az OC sugárra és felezi is egyben. Határozd meg: 1) az AOB szöget; 2) az ACB szöget!

276. Hány közös pontja lesz egy 6 cm és egy 8 cm sugarú körvonalnak, ha a középpontjaik közötti távolság: 1) 15 cm; 2) 14 cm; 3) 10 cm; 4) 2 cm?

Elevenítsétek fel a 19–22. pontokban tanultakat (190–192. oldal)!

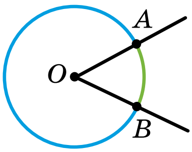
FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

277. A sokszöget háromszögekre osztották, melyeket fekete és fehér színekkel festették be úgy, hogy bármelyik két közös oldalú háromszög különböző színű legyen. Bizonyítsd be, hogy a fekete háromszögek száma nem lesz kisebb, mint a fehér háromszögek számának háromszorosa!

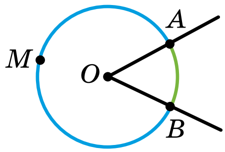
9. Középponti és kerületi szögek

Meghatározás. A körvonal középponti szögének azt a szöget nevezzük, melynek csúcspontja megegyezik a körvonal középpontjával.

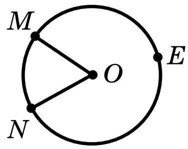
A 76. ábrán az AOB középponti szög látható. Ennek a szögnek a szárai a körvonalat az A és B pontban metszik. A pontok a körvonalat két ívre osztják, melyek az ábrán különböző színnel vannak jelölve. Mindkét ívre érvényes a következő jelölés: $AB\cup$ (így olvassuk: AB ív).



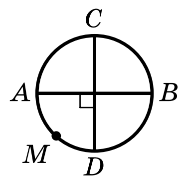
76. ábra



77. ábra



78. ábra



79. ábra

De az $AB\cup$ jellel nem tudjuk megkülönböztetni a 76. ábrán lévő íveket. Ha valamelyik íven felveszünk egy pontot (a 77. ábrán ez az M pont), akkor már világos, hogy az $AMB\cup$ jelölés a *kék* ívet jelöli. Ha az egyik íven egy pont meg van jelölve, akkor az $AB\cup$ jelölésnek az az ív felel meg, amelyikhez az adott pont nem illeszkedik (a 77. ábrán ez a *zöld* ív).

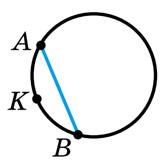
Az AB ív az AOB középponti szöghöz tartozik (77. ábra). Ebben az esetben azt mondják, hogy az AOB középponti szög az AB **ívre támaszkodik**.

A körvonalhoz hasonlóan a körívet is **fokmérték**ben mérjük. *A teljes körvonal fokmértéke* 360°. Ha az MON középponti szög az MN ívre támaszkodik (78. ábra), akkor az MN ív fokmértéke megegyezik az MON szög fokmértékével, és ezt így jelöljük: $MN\cup = MON\angle$ (így olvassuk: az MN ív fokmértéke egyenlő az MON középponti szög fokmértékével). Az MEN ív fokmértéke (78. ábra) egyenlő lesz $360° - MON\angle$.

A 79. ábrán egy olyan körvonal látható, melyben két egymásra merőleges AB és CD átmérő van meghúzva. Ekkor az $AMD\cup = 90°$, $ACD\cup = 360° - 90° = 270°$, $ACB\cup = ADB\cup = 180°$. Az ACB és ADB húrok mindegyikét **félkör**nek nevezzük. A 79. ábrán félkörnek tekinthetjük a CAD és CBD húrokat.

Az ívek végpontjait összekötő húrról azt mondjuk, hogy az ív a húrra támaszkodik. A 80. ábrán az AB húrra támaszkodik az AB és AKB ív is.

Bármilyen húr két olyan ívre támaszkodik, melyek fokmértékének összege 360°.



80. ábra

Meghatározás. A körvonal kerületi szögének azt a szöget nevezzük, melynek csúcsa a körvonal bármely pontja, szárai pedig metszik a körvonalat.

A 81. ábrán az ABC szög kerületi szög lesz. Az AC ív ehhez a szöghöz tartozik, az ABC ív viszont nem tartozik hozzá. Ebben az esetben azt mondják, hogy a kerületi szög az AC **ívre támaszkodik**. Azt is lehet mondani, hogy az ABC kerületi szög az AC **húrra támaszkodik**.

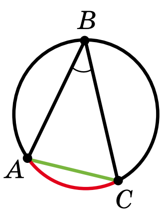
9.1. tétel. ***A kerületi szög fokmértéke egyenlő azon ív fokmértékének a felével, amelyre az támaszkodik.***

Bizonyítás. A 81. ábrán az ABC szög kerületi szög lesz. Bebizonyítjuk, hogy $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

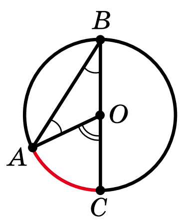
Három esetet fogunk megvizsgálni, attól függően, hogy a körvonal O középpontja az ABC kerületi szöghöz képest hogyan helyezkedik el.

1. eset. Az O pont a kerületi szög egyik szárára illeszkedik, például a BC szárra (82. ábra).

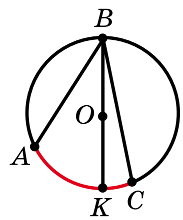
Meghúzzuk az OA sugarat. Az AOC középponti szög az ABO egyenlő szárú háromszög külső szöge (az OA és OB oldalai egyenlők, mint a körvonal sugarai). Ekkor $\angle AOC = \angle A + \angle B$. Azonban $\angle A = \angle B$. Innen következik, hogy $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2} \cup AC$.



81. ábra



82. ábra



83. ábra

2. eset. Az O pont a kerületi szög belső tartományában fekszik, de nem illeszkedik a szárakra (83. ábra).

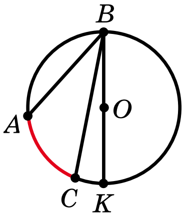
Meghúzzuk a BK átmérőt. Az előző bizonyításból következik, hogy $\angle ABK = \frac{1}{2} \cup AK$, $\angle KBC = \frac{1}{2} \cup KC$. Innen kapjuk, hogy $\angle ABC = \angle ABK + \angle KBC = \frac{1}{2} \cup AK + \frac{1}{2} \cup KC = \frac{1}{2} \cup AKC$.

3. eset. Az O pont a kerületi szög külső tartományában fekszik (84. ábra). A harmadik esetre a bizonyítást végezzétek el önállóan. ▲

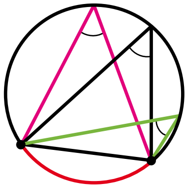
1. következmény. ***Az egy és ugyanazon ívre támaszkodó kerületi szögek egyenlők egymással*** (85. ábra).

2. következmény. ***Az átmérőre támaszkodó kerületi szög derékszög*** (86. ábra).

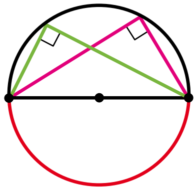
Bizonyítsátok be ezeket a tulajdonságokat.



84. ábra



85. ábra



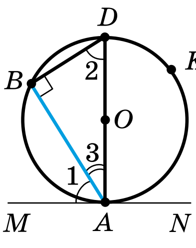
86. ábra

1. feladat (az érintő és a húr közötti szög tulajdonsága). Legyen az AB szakasz az O középpontú körvonal húrja (87. ábra). Az A ponton át meghúzzuk az MN érintőt. Bizonyítsuk be, hogy $MAB\angle = \frac{1}{2}AB\cup$ és $NAB\angle = \frac{1}{2}AKB\cup$.

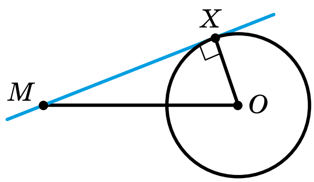
Megoldás. Meghúzzuk az AD átmérőt (87. ábra). Ekkor a B szög 90°-os, mint az AD átmérőre támaszkodó kerületi szög. Az ABD derékszögű háromszögben $2\angle + 3\angle = 90°$. Mivel az MN érintő, ezért $DAM\angle = 90°$. Ekkor $1\angle + 3\angle = 90°$. Ezekből azt kapjuk, hogy $1\angle = 2\angle$.

Tehát $MAB\angle = BDA\angle = \frac{1}{2}AB\cup$.

Innen kapjuk, hogy $NAB\angle = 180° - MAB\angle = 180° - \frac{1}{2}AB\cup = 180° - \frac{1}{2}(360° - AKB\cup) = 180° - 180° + \frac{1}{2}AKB\cup = \frac{1}{2}AKB\cup$.



87. ábra



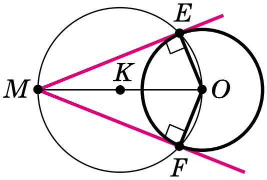
88. ábra

2. feladat. Szerkeszd meg az adott körvonal érintőjét, amely a körön kívüli adott ponthoz illeszkedik!

Megoldás. A 88. ábrán az O középpontú körvonal és az azon kívül elhelyezkedő M pont látható.

Legyen X a körvonalnak az a pontja, hogy az MX egyenes érintő legyen (88. ábra). Ekkor az MXO szög derékszög, amire úgy tekinthetünk, mint az MO átmérőjű körvonal kerületi szögére.

A fenti elemzés mutatja, hogyan kell elvégezni a szerkesztést.



89. ábra

Megszerkesztjük az MO szakaszt, majd megfelezzük azt (89. ábra). Legyen K a középpontja. Megszerkesztjük a K középpontú KO sugarú körvonalat. Megjelöljük az adott és a megszerkesztett körvonalak metszéspontjait E és F betűkkel. Ekkor az ME és MF egyenesek lesznek a keresett érintők.

Valóban, az MEO szög 90°-os, mint az MO átmérőre támaszkodó kerületi szög. Az OE szakasz az adott körvonal sugara. Tehát az érintő ismertetőjele alapján az ME egyenes lesz a keresett érintő.

1. Mit nevezünk a körvonal középponti szögének?
2. Hogyan nevezzük a körvonalnak azokat a részeit, melyeket két ponttal való felosztásakor kapunk?
3. Hogy jelöljük a körvonal ívét?
4. Milyen esetben mondjuk, hogy a középponti szög az ívre támaszkodik?
5. Mivel egyenlő a körvonal fokmértéke?
6. Hogyan kapcsolódik az ív fokmértéke a rá támaszkodó középponti szög fokmértékéhez?
7. Hány ívet köt össze minden húr? Mivel egyenlő ezen ívek fokmértékének összege?
8. Mit nevezünk kerületi szögnek?
9. Milyen esetben mondjuk, hogy a kerületi szög az ívre támaszkodik?
10. Mivel egyenlő a kerületi szög fokmértéke?
11. Milyen tulajdonsággal rendelkeznek az azonos ívre támaszkodó kerületi szögek?
12. Milyen lesz az átmérőre támaszkodó kerületi szög?

GYAKORLATOK

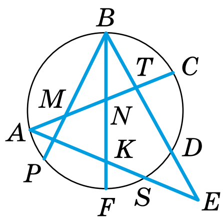
278.° Mivel egyenlő annak a középponti szögnek a fokmértéke, amely egy olyan ívre támaszkodik, amely 1) $\frac{1}{6}$-a a körnek; 2) $\frac{1}{10}$-e a körnek; 3) $\frac{1}{2}$-e a körnek; 4) $\frac{2}{9}$-e a körnek?

279.° Két pont a körvonalat két ívre osztja. Határozd meg a kör két ívének fokmértékét, ha az egyik ív fokmértéke 80°-kal nagyobb a másiknál!

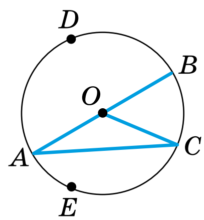
280.° Két pont a körvonalat két ívre osztja. Határozd meg a kör két ívének fokmértékét, ha a keletkezett ívek fokmértékei úgy aránylanak, mint 7 : 11!

281.° Határozd meg az óra kismutatója által leírt ív fokmértékét: 1) 2 óra alatt; 2) 5 óra alatt; 3) 8 óra alatt; 4) 30 perc alatt; 5) 12 óra alatt!

282.° A 90. ábrán lévő szögek közül melyek lesznek kerületi szögek? Mely ívekre támaszkodnak ezek a kerületi szögek?



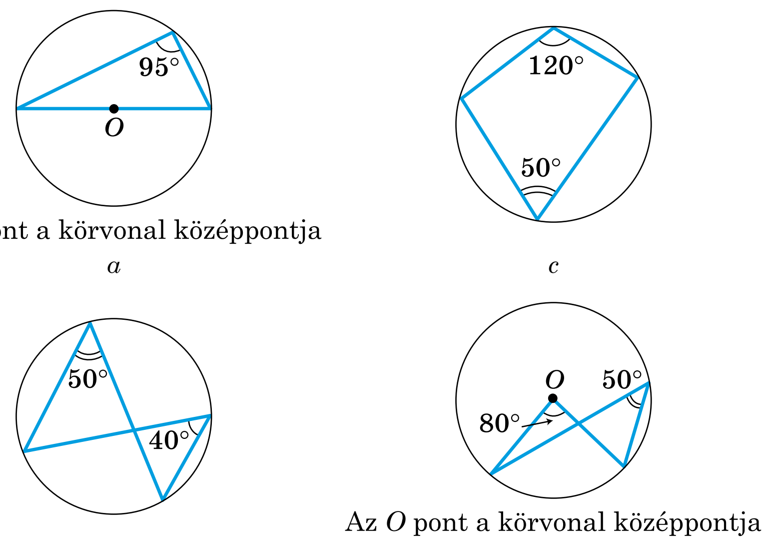
90. ábra



91. ábra

283.° A 91. ábrán egy O középpontú körvonal látható. Határozd meg:
1) a BDC szöget, ha $BAC\angle = 40°$;
2) a BEC szöget, ha $BOC\angle = 70°$;
3) a CE ív fokmértékét, ha $CDE\angle = 80°$;
3) a DBA ív fokmértékét, ha $DBA\cup = 300°$!

284.° Keresd meg a hibákat a 92. ábrán!



Az O pont a körvonal középpontja

a

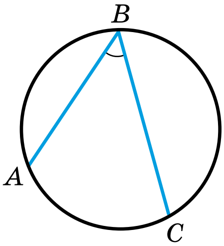
c

b

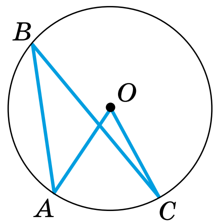
Az O pont a körvonal középpontja

d

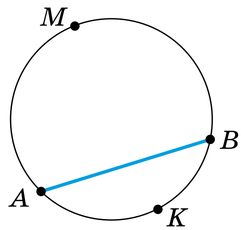
92. ábra



93. ábra



94. ábra



95. ábra

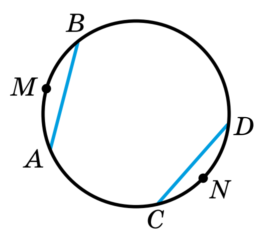
285.° Határozd meg a kerületi szöget, ha a hozzá tartozó ív fokmértéke 1) 84°-os; 2) 110°-os; 3) 230°-os; 4) 340°-os!

286.° A 93. ábrán az $AB\cup = 74^\circ$, $ABC\angle = 68^\circ$. Határozd meg a BC ív fokmértékét!

287.° A 93. ábrán az $AB\cup = 64^\circ$, $BC\cup = 92^\circ$. Határozd meg az ABC szög fokmértékét!

288.° Az AOC középponti szög 25°-kal nagyobb, mint az AC ívre támaszkodó ABC kerületi szög (94. ábra). Határozd meg az AOC és ABC szögek fokmértékét!

289.° Az AB húr a körvonalat olyan két ívre osztja, hogy fokmértékeik aránya $3 : 7$. Milyen szögek alatt látható ez a húr az M és K pontokból (95. ábra)?



96. ábra

290.° A 96. ábrán az AB és CD húrok egyenlők. Bizonyítsd be, hogy $AMB\cup = CND\cup$!

291.° Bizonyítsd be, hogyha a körvonal két íve egyenlő, akkor a végpontjaikat összekötő húrok is egyenlők egymással!

292.° Az A, B és C pontok a körvonalat három olyan ívre osztják, hogy fokmértékeinek aránya $AB\cup : BC\cup : AC\cup = 1 : 2 : 3$. Határozd meg az ABC háromszög szögeit!

293.° Az ABC egyenlő szárú háromszög ($AB = BC$) csúcsai a háromszög köré írt körvonalat három ívre osztják úgy, hogy $AB\cup = 70^\circ$. Határozd meg az ABC háromszög szögeit!

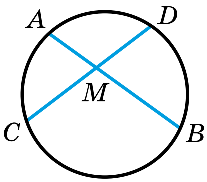
294.° A körvonal AC és BD átmérőit úgy kötötték össze, hogy egy $ABCD$ négyszög keletkezett.
1) Állapítsd meg a négyszög típusát!
2) Határozd meg az AB, BC, CD és AD ívek fokmértékét, ha $ABD\angle = 80^\circ$!

295.° A derékszögű háromszög hegyesszöge 32°. Határozd meg azoknak a köríveknek a fokmértékét, amelyre az adott háromszög csúcsai osztják fel a köré írt körvonalat, valamint ennek a körvonalnak a sugarát, ha a háromszög átmérője 12 cm!

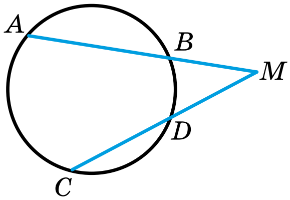
296.• Bizonyítsd be, ha a kerületi szög derékszög, akkor az átmérőre támaszkodik!

297.• A körvonal AB és CD húrjai az M pontban metszik egymást (97. ábra). Bizonyítsd be, hogy $AMC\angle = \frac{1}{2}\,(AC\cup + BD\cup)$!

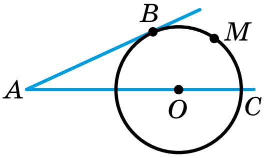
298.• A körvonal AB és CD húrjai nem metszik egymást, az AB és CD egyenesek viszont az M pontban metszik egymást (98. ábra). Bizonyítsd be, hogy $AMC\angle = \frac{1}{2}\,(AC\cup - BD\cup)$!



97. ábra



98. ábra



99. ábra

299.• Az O középpontú körvonalon kívül fekvő A ponton át két egyenest húztunk, melyek közül az egyik érinti a B pontban a körvonalat, a másikra pedig a körvonal középpontja illeszkedik (99. ábra). Ismert, hogy $BMC\cup = 100°$. Határozd meg a BAC szög fokmértékét!

300.• Az ABC háromszög B szögének szögfelezője a háromszög köré írt körvonalat a D pontban metszi. Határozd meg az ADC háromszög szögeit, ha $ABC\angle = 80°$!

301.• Az ABC háromszög köré írt körének AC ívén egy M pontot jelöltek úgy, hogy $AM\cup = 2CM\cup$. Határozd meg az AMC háromszög szögeit!

302.• Az ABC háromszögre úgy szerkesztettek egy körvonalat, hogy az AB oldal a körvonal átmérője lett, és a körvonal az AC és BC oldalakat megfelelően az M és K pontokban metszi. Bizonyítsd be, hogy az AK és BM szakaszok az ABC háromszög magasságai!

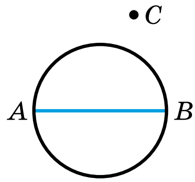
303.• Az ABC háromszögre úgy szerkesztettek egy körvonalat, hogy az AC oldal a körvonal átmérője lett, és a kör az AB oldalt a K pontban metszi úgy, hogy $ACK\angle = BCK\angle$. Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú!

304.• Bizonyítsd be, hogy két párhuzamos húr közötti ívek fokmértékei egyenlők!

305.• Az $ABCD$ négyzet csúcsai egy körvonalra illeszkednek. Az AB íven felvettek egy tetszőleges M pontot. Bizonyítsd be, hogy az $AMD\angle = CMD\angle = CMB\angle$!

306.• Az egyenlő szárú háromszög szárszöge 56°. A háromszög szárára, mint átmérőre félkört szerkesztettek, melyet a háromszög többi oldala három ívre oszt. Határozd meg a keletkezett ívek fokmértékeit!

307.•• Hogyan lehet csak körző használatával meghatározni az adott körvonal középpontját?



100. ábra

308.•• Adott egy körvonal, melyben meghúztuk az AB átmérőt, és a körön kívül egy C pontot jelöltünk (100. ábra). Hogyan lehet csak vonalzó használatával a C ponton át húzni egy olyan egyenest, amely merőleges az AB-vel?

309.•• Két körnek csak az M pont a közös pontja. Az M ponton át két egyenes van húzva, melyek metszik a két adott körvonalat. Az M ponttól különböző metszéspontjaikat húrokkal kötjük össze. Bizonyítsd be, hogy az így kapott húrok párhuzamosak!

310.•• Az ABC háromszög köré írt körvonalhoz a B ponton át egy érintőt húztunk, amely az AC egyenest a D pontban metszi. A BM szakasz az ABC háromszög szögfelezője! Bizonyítsd be, hogy $BD = MD$!

311.* Adott az AB szakasz és az α szög. Határozd meg azoknak az X pontoknak a mértani helyét, ahol $AXB\angle = \alpha$!

312.* Szerkessz háromszöget oldala, az oldallal szemközti szöge és az adott oldalhoz húzott magassága alapján!

313.* Szerkessz háromszöget oldala, az oldallal szemközti szöge és az adott oldalhoz húzott súlyvonala alapján!

314.* Szerkessz paralelogrammát két oldala és az átlók közti szöge alapján!

315.* Szerkessz paralelogrammát szöge és két átlója alapján!

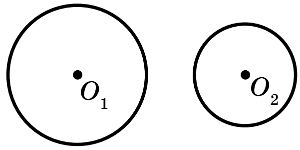
316.* Az ABC derékszögű háromszög AC befogójára mint átmérőre kört szerkesztettek, amely az AB átmérőt az E pontban metszi. Az E ponton át megrajzolták a körvonal érintőjét, amely a CB befogót egy D pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy a BDE háromszög egyenlő szárú!

317.* Adott egy AB szakasz. Határozd meg azon X pontok mértani helyét, ha az AXB háromszög derékszögű!

318.* Az ABC háromszög A szögének szögfelezője a háromszög köré írt körvonalát a D pontban metszi. Az O pont az ABC háromszögbe írt kör középpontja. Bizonyítsd be, hogy $DO = DB = DC$!

319.* Az ABC háromszög A, B és C szögeinek szögfelezői a háromszög köré írt körvonalat megfelelően az A_1, B_1 és C_1 pontokban metszik. Bizonyítsd be, hogy $A_1B_1 \perp CC_1$-re!

320.* A 101. ábrán két körvonal látható, melyeknek a középpontjai O_1 és O_2. Szerkessz egy l egyenest, amely érinti ezeket a köröket úgy, hogy az érintési pontok az O_1O_2 egyeneshez viszonyítva ugyanarra a félsíkra illeszkedjenek (az ilyen egyenest a két adott **kör külső közös érintőjé**nek nevezzük).



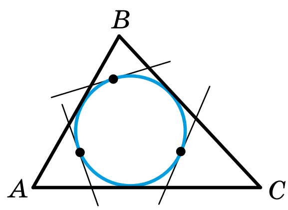
101. ábra

321.* Szerkessz háromszöget:
1) adott oldala, szemközti szöge és a beírt kör sugara alapján;
2) adott oldala, szemközti szöge és a másik oldalához húzott súlyvonala alapján!

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

322. Az ABC háromszög kerülete 30 cm. A háromszögbe írt körvonal az érintési pontban az A ponttól számítva 3 : 2 arányban osztja az AB oldalt, a BC oldal érintési pontja a C csúcstól pedig 5 cm távolságra van. Határozd meg a háromszög oldalait!

323. Az ABC háromszögbe írt körvonalhoz három érintőt húztak (102. ábra). Azoknak a háromszögeknek a kerületei, melyeket ezek az egyenesek vágnak le az adott háromszögből P_1, P_2 és P_3. Határozd meg az ABC háromszög kerületét!



102. ábra

324. Állapítsd meg annak a háromszögnek a fajtáját, melyben a beírt körvonal középpontja az oldalfelezőre illeszkedik!

Elevenítsétek fel a 22. pontban tanultakat (192. oldal)!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

325. A 100 × 100 négyzetrácsos lap sakktáblához hasonlóan van lefestve. A négyzetet kisebb négyzetekre vágták szét úgy, hogy a négyzetek oldalai páratlan számú négyzetekből állnak. Mindegyikben megjelölték a középső négyzetet. Bizonyítsd be, hogy egyenlő számú fehér és fekete négyzetet jelöltek meg!

AZ ÖSSZUKRAJNAI IFJÚ MATEMATIKUSOK ELSŐ TANTÁRGYI VETÉLKEDŐJÉNEK ELSŐ FELADATA

Nagyon reméljük, hogy a 316. feladat tetszett nektek, és átéreztétek a megoldásával járó örömet. Ez a feladat azért is figyelmet érdemel, mert 1961-ben ezzel a feladattal kezdődött az első összukrajnai ifjú matematikusok tantárgyi vetélkedő.

Ukrajnában a matematikaversenyeknek már régi tradíciója van. Az első városi szintű ifjú matematikusok versenyét 1935-ben Kijevben rendezték meg. Több mint 80 éven keresztül a sok tehetséges iskolásnak a matematikai tantárgyi vetélkedők voltak az első lépései a tudományos életben. Ma O. V. Pohorelov, Sz. H. Krein, M. O. Krasznoszelszkij, V. H. Drinfeld neve az egész tudományos világ számára ismert. Ők mindannyian egykor Ukrajna matematikai versenyeinek győztesei voltak.

Nagy megelégedésünkre szolgál, hogy ma is nagyon népszerűek a matematikaversenyek Ukrajnában. Országunkban több tízezer iskolás vesz részt különböző szintű matematikai megmérettetésen. A versenyek szervezésében a legjobb tudósok, módszerészek, tanárok vesznek részt. Az ő lelkesedésüknek és professzionalizmusának köszönhetően Ukrajna csapata eredményesen képviseli országunkat a nemzetközi matematikai versenyeken.

Kedves nyolcadikosok! Azt ajánljuk nektek, hogy ti is vegyetek részt a matematikai versenyeken! Most bemutatjuk az első összukrajnai matematikaverseny feladatait. Próbáljátok ki magatokat!

1. Az ABC derékszögű háromszög AC befogójára mint átmérőre kört szerkesztettek, amely az AB átmérőt az E pontban metszi. Az E ponton át megrajzolták a körvonal érintőjét, amely a CB befogót egy D pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy a BDE háromszög egyenlő szárú!
2. A síkon n darab fogaskereket úgy helyeztek el, hogy az első a másodikhoz, a második a harmadikhoz és így tovább, az utolsó az elsőhöz kapcsolódjon. Milyen esetekben tudnak forogni a kerekei az ilyen rendszernek?
3. Számítsd ki az egyenlő szárú háromszög szögeit, ha a beírt és a körülírt körvonalainak középpontjai szimmetrikusak arra az egyenesre, amely az adott háromszög alapját tartalmazza!
4. Bizonyítsd be, hogy minden n egész szám esetén az $\frac{n^5}{120}-\frac{n^3}{24}+\frac{n}{30}$ szintén egész értéket vesz fel!
5. Szerkessz háromszöget, ha adott a háromszög két oldalára bocsátott magasságok talppontjai, és a harmadik oldalát tartalmazó egyenes!

10. A négyszög beírt és körülírt körvonalai

Meghatározás. **Azt a körvonalat, amely a négyszög minden csúcsán áthalad, a négyszög köré írt körnek nevezzük.**

A 103. ábrán olyan körvonal látható, amely az $ABCD$ négyszög köré van írva. Az ilyen esetekben azt is mondjuk, hogy a négyszög a körbe van írva, a négyszöget pedig **körbeírt négyszög**nek nevezzük.

10.1. tétel. ***Ha a négyszög a körbe van írva, akkor a szemközti szögeinek összege* 180°.** (Az ilyen négyszöget **húrnégyszög**nek is nevezik.)

Bizonyítás. ⊙ Legyen az $ABCD$ négyszög körbeírt (103. ábra). Bebizonyítjuk, hogy $A\angle + C\angle = 180°$ és $B\angle + D\angle = 180°$.

Az A és C szögek kerületi szögek. A kerületi szögek tulajdonságairól szóló tantétel alapján $A\angle = \frac{1}{2}BCD\cup$ és $C\angle = \frac{1}{2}DAB\cup$. Azt kapjuk, hogy $BCD\cup + DAB\cup = 360°$, ekkor $A\angle + C\angle = 180°$.

Hasonlóképpen bizonyítjuk, hogy $B\angle + D\angle = 180°$. ▲

Már megtanultátok, hogy minden háromszög köré kör írható. A háromszögtől eltérően nem minden négyszög rendelkezik ilyen tulajdonsággal. Például nem írható kör a téglalaptól különböző paralelogramma köré. A következő tétel segít abban, hogy felismerjük, mely négyszögek köré írható körvonal.

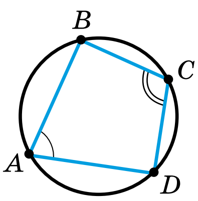
10.2 tétel (a 10.1. tétel inverze). ***Ha egy négyszög szemben fekvő szögeinek összege* 180°, *akkor a négyszög köré kör írható.***

Bizonyítás. ⊛ Megvizsgáljuk az $ABCD$ négyszöget, amelyben $A\angle + C\angle = 180°$. Bebizonyítjuk, hogy lehet kört írni köré.

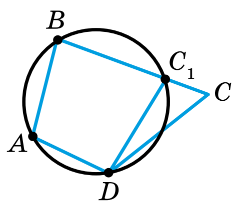
Feltételezzük, hogy nem lehet kört írni e négyszög köré. Az ABD háromszög köré írunk egy körvonalat. A feltételezés szerint a C pont nem illeszkedik ehhez a körvonalhoz. Ekkor két eset lehetséges.

1. *eset.* A C pont az ABD háromszög köré írt körvonalán kívül helyezkedik el (104. ábra).

A BC oldal a körvonalat egy C_1 pontban metszi. Ekkor az ABC_1D négyszög körbe írt lesz. A 10.1. tételből kapjuk, hogy $A\angle + BC_1D\angle = 180°$.



103. ábra



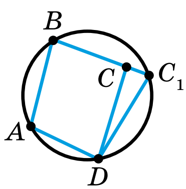
104. ábra

De a feltétel alapján az $A\angle + C\angle = 180°$. Ebből következik, hogy a $BC_1D\angle = C\angle$. Azonban az egyenlőség nem teljesülhet, mivel a háromszög külső szögeiről szóló tétel szerint $BC_1D\angle = C\angle + CDC_1\angle$.

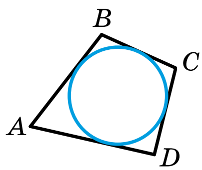
Tehát a C pont nem lehet az ABD háromszög köré írt körvonalán kívül.

2. e s e t. A C pont az ABD háromszög köré írt körvonalon belül helyezkedik el (105. ábra). Az előző gondolatmenetet követve bebizonyítható, hogy a C pont nem lehet a vizsgált körlap belsejében sem. Győződjetek meg erről önállóan!

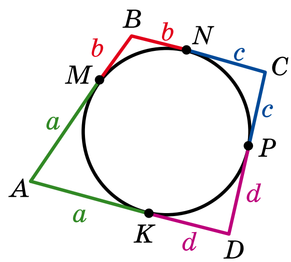
Tehát hamis az a feltételezés, hogy a C pont nem illeszkedik az ABD háromszög köré írt körvonalra, vagyis ellentmondásra jutottunk. ▲



105. ábra



106. ábra



107. ábra

A 10.2. tételre úgy is tekinthetünk, mint négy pont egy körvonalhoz tartozásának feltételére.

Ha a négyszög körbe van írva, akkor létezik egy olyan pont, amely egyenlő távolságra van a négyszög csúcsaitól (a köré írt körvonal középpontja). Ahhoz, hogy meghatározzuk ezt a pontot, elegendő megállapítani a négyszög két szomszédos oldalának felezőmerőlegesét.

M e g h a t á r o z á s. Azt a körvonalat, amely a négyszög minden oldalát érinti, a n é g y s z ö g b e í r t körvonalának nevezzük.

A 106. ábrán egy, az $ABCD$ négyszögbe írt körvonalat látunk. Ebben az esetben a négyszög a kör köré van írva.

10.3. t é t e l. ***Ha a négyszög a kör köré van írva, akkor a szemközti oldalainak az összege egyenlő egymással.***

B i z o n y í t á s. Legyen adva a kör köré írt $ABCD$ négyszög (107. ábra). Bebizonyítjuk, hogy $AB + CD = BC + AD$.

Az M, N, P, K pontok a négyszög és a körvonal érintési pontjai.

Mivel a szakaszok érintők, ezért az egy pontból húzott érintőszakaszok tulajdonsága alapján $AK = AM$, $BM = BN$, $CN = CP$, $DP = DK$. Legyen $AK = a$, $BM = b$, $CN = c$, $DP = d$.

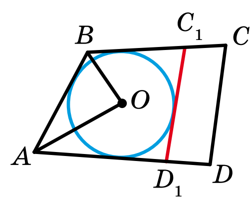
Ekkor $AB + CD = a + b + c + d,$
$BC + AD = b + c + a + d.$
Tehát $AB + CD = BC + AD.$ ▲

Már tudjátok, hogy bármilyen háromszögbe kör írható. Azonban nem minden négyszög rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. Például nem írható kör olyan téglalapba, amely nem négyzet. Annak felismeréséhez, hogy milyen négyszögbe lehet körvonalat íni, a következő tétel szolgál segítségünkre.

10.4. tétel. ***Ha a domború négyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, akkor ebbe a négyszögbe körvonal írható.***

Bizonyítás. Adott az $ABCD$ négyszög, melyben $AB+CD=BC+AD$. Bebizonyítjuk, hogy lehet bele kört írni.

Legyen az A és B szögek szögfelezőinek a metszéspontja az O pont (108. ábra). Akkor az O pont egyenlő távolságra lesz az AB, BC és AD egyenesektől. Tehát létezik egy O középpontú kör, amely érinteni fogja ezt a három oldalt.



108. ábra

Feltételezzük, hogy ez a körvonal nem érinti a CD oldalt. Ekkor két eset lehetséges.

1. eset. A CD oldalnak nincs közös pontja a körrel.

Meghúzzuk a C_1D_1 érintőt, amely párhuzamos a CD-vel (108. ábra). Az ABC_1D_1 négyszög a körvonal köré írt négyszög lesz. Akkor a 10.3. tétel alapján azt kapjuk, hogy:

$$AB + C_1D_1 = BC_1 + AD_1. \qquad (1)$$

Azonban a feltétel alapján

$$AB + CD = BC + AD. \qquad (2)$$

A (2)-es egyenlőségből kivonva az (1)-est:

$$CD - C_1D_1 = BC - BC_1 + AD - AD_1.$$

Innen $CD - C_1D_1 = C_1C + D_1D$; $CD = C_1C + D_1D + C_1D_1$.

Ez az egyenlőség ellentmond, az 1. pontban bebizonyított kulcsos feladat állításának.

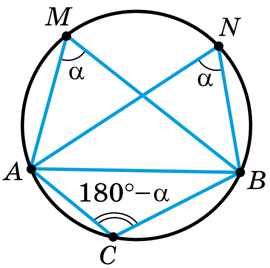
Tehát a CD oldalnak kell, hogy legyen közös pontja a vizsgált körvonallal.

2. eset. A CD oldalnak két közös pontja van a megszerkesztett körrel.

Hasonlóan gondolkozva be lehet bizonyítani, hogy a CD oldalnak nem lehet két közös pontja a szerkesztett körvonallal. Győződjetek meg erről önállóan!

Tehát az a feltételezés, hogy a megszerkesztett körvonal nem érinti a CD oldalt, nem igaz, mert ellentmondást kaptunk. ▲

Ha a négyszög a körvonal köré van írva, akkor létezik egy olyan pont, amely egyenlő távolságra lesz a négyszög oldalaitól (a beírt kör középpontja). Ahhoz, hogy meghatározzuk ezt a pontot, elegendő meghatározni a négyszög két szomszédos szöge szögfelezőjének a metszéspontját.



109. ábra

Feladat (négy pont egy körvonalhoz tartozásának feltétele). Az *A, M, N, B* pontok olyanok, hogy az $AMB\angle = ANB\angle$, eközben az *M* és *N* pontoknak egy félsíkhoz kell tartozniuk az *AB* egyeneshez viszonyítva. Bizonyítsd be, hogy az *A, M, N, B* pontok egy körvonalhoz illeszkednek!

Megoldás. Legyen az $AMB\angle = ANB\angle = \alpha$. Az *AMB* háromszög köré egy körvonalat írunk (109. ábra). Legyen a *C* a körvonal bármely pontja, amely nem az *AMB* ívhez illeszkedik. Akkor az *ACBM* négyszög a körbe van írva. Ebből következik, hogy $C\angle = 180° - \alpha$. Tehát $C\angle + N\angle = 180°$. Vagyis a 10.2. tételből következik,hogy az *ACBN* négyszög köré lehet kört írni. Mivel az *ABC* háromszög köré csak egy kör írható, ezért az *M* pont és az *N* pont is ehhez a körhöz fog illeszkedni.

1. Milyen kört nevezünk a négyszög köré írt körvonalnak?
2. Milyen esetben mondjuk, hogy a négyszög a körbe írt?
3. Milyen tulajdonsággal rendelkeznek a körbe írt négyszögek szögei?
4. Milyen esetben lehet a négyszög köré kört írni?
5. Milyen kört nevezünk négyszögbe írt körvonalnak?
6. Milyen esetben mondjuk, hogy a négyszög a kör köré van írva?
7. Milyen tulajdonsággal rendelkeznek a négyszög kör köré írt oldalai?
8. Milyen feltétel mellett lehet a négyszögbe kört írni?

GYAKORLATI FELADATOK

326.° Rajzolj egy téglalapot, melynek oldalai 2 cm és 3 cm! Írj köré körvonalat!

327.° Rajzolj egy tetszőleges egyenlő szárú trapézt! Írj köré egy körvonalat!

328.° Rajzolj egy egyenlő szárú trapézt, melynek nagyobbik alapja 6 cm, szára 4 cm és a szöge 60°. Írj bele egy körvonalat!

329.° Rajzolj egy tetszőleges négyzetet! Írj bele és köré is egy-egy körvonalat!

GYAKORLATOK

330.° Lehet-e az $ABCD$ négyszög köré körvonalat írni, ha az A, B, C és D szögei megfelelően egyenlők?
1) 90°, 90°, 80°, 100°; 3) 50°, 70°, 130°, 110°;
2) 90°, 80°, 90°, 100°;

331.° Lehet-e az $ABCD$ négyszög köré körvonalat írni, ha az A, B, C és D szögei megfelelően arányosak a következő számokkal:
1) 3, 8, 11, 6; 2) 4, 5, 4, 2?

332.° Bizonyítsd be, hogy kört lehet írni:
1) bármilyen téglalap köré;
2) bármilyen egyenlő szárú trapéz köré!

333.° Mit tudunk a téglalap köré írt kör középpontjáról?

334.° Lehet-e kört írni egy olyan rombusz köré, amely nem négyzet?

335.° Az $ABCD$ téglalapban ismert, hogy $AB = 12$ cm, $CAD\angle = 30°$. Határozd meg annak a körnek a sugarát, amelyet az adott téglalap köré írunk!

336.° Lehet-e kört írni az $ABCD$ négyzetbe, ha az AB, BC, CD, AD oldalai megfelelően arányosak a következő számokkal:
1) 7, 8, 12, 11; 2) 7, 12, 8, 11?

337.° A kör köré írt négyszög két szemközti oldalának összege 18 cm. Határozd meg az adott négyszög kerületét!

338.° Az egyenlő szárú trapéz szára 7 cm. Mivel egyenlő a trapéz kerülete, ha körvonal írható bele?

339.° A $CDEF$ négyszögbe kör írható, $CD = 6$ cm, $DE = 8$ cm, $EF = 12$ cm. Határozd meg a CF oldal hosszát!

340.° Bizonyítsd be, hogy bármilyen rombuszba lehet körvonalat írni. Melyik pont lesz a rombuszba írt körvonal középpontja?

341.° Lehet-e az olyan paralelogrammába kört írni, amely nem rombusz?

342.° Milyen szög alatt látható a trapéz szára a beírt kör középpontjából?

343.° A rombusz egyik szöge 60°, a nagyobbik átlójának hossza pedig 24 cm. Határozd meg az adott rombuszba írt kör sugarát!

344.• Bizonyítsd be, hogyha a téglalapba kör írható, akkor az ilyen téglalap rombusz!

345.• Bizonyítsd be, hogyha a rombusz köré kör írható, akkor az ilyen rombusz négyzet!

346.• Az $ABCD$ négyszög AD oldala a köré írt négyszög átmérője lesz, $ABC\angle = 108°$, $BCD\angle = 132°$. Határozd meg a BAD, ADC, CAD, BDA szögeket!

347.• Határozd meg az $MNKP$ körbe írt négyszög szögeit, ha $MKP\angle = 58°$, $MPN\angle = 34°$, $KMP\angle = 16°$!

348.• Az egyenlő szárú trapéz olyan körbe van írva, melynek középpontja a trapéz egyik alapjára illeszkedik. A trapéz átlói közötti és szárával szemközti szög fokmértéke 56°. Határozd meg a trapéz szögeit!

349.• Az ABC hegyesszögű háromszög BM és CK magasságai egy H pontban metszik egymást. Bizonyítsd be, hogy az A, K, H és M pontok egy körvonalra illeszkednek!

350.• A derékszögű trapézba kört írtak. Az érintési pont a nagyobbik szárát 8 cm-es és 50 cm-es szakaszokra osztja. Határozd meg az adott trapéz kerületét, ha a beírt kör sugara 20 cm!

351.• A derékszögű trapézba kört írtak. Az érintési pont a nagyobbik szárát 3 cm-es és 12 cm-es szakaszokra osztja. Határozd meg a beírt kör sugarát, ha a trapéz kerülete 54 cm!

352.•• A trapéz köré írt körvonal középpontja a trapéz nagyobbik alapjára illeszkedik, a trapéz szára a kisebbik alappal egyenlő. Határozd meg a trapéz szögeit!

353.•• A körbe írt trapéz átlója d. A trapéz szára a köré írt körvonal középpontjából 120°-os szög alatt látható. Határozd meg a trapéz középvonalát!

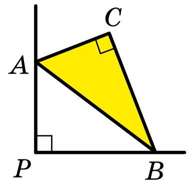
354.•• Az egyenlő szárú trapéz szára és kisebbik alapja is egyaránt 6 cm, az egyik szöge pedig 60°. Határozd meg a trapéz köré írt körvonal sugarát!

355.•• Az ABC derékszögű háromszög AC befogójának tetszőleges M pontjából az AB átfogóra MK merőlegest bocsátottak. Bizonyítsd be, hogy $MKC\angle = MBC\angle$!

356.•• Az A hegyesszög bármely O belső pontjából, amely nem illeszkedik a szög száraira, OB és OC merőlegeseket bocsátottak a száraikra. Bizonyítsd be, hogy $OAB\angle = OCB\angle$!

357.* Az ABC háromszög BK és CM szögfelezői az O pontban metszik egymást. $A\angle = 60°$. Határozd meg a CMK szög fokmértékét!

358.* Az MNK háromszög MA és KB szögfelezői az O pontban metszik egymást, az A, N, B és O pontok egy körvonalra illeszkednek. Határozd meg az N szöget!



110. ábra

359.* Az ABC derékszögű háromszögön kívül az AB átfogóra egy $ABFD$ négyzetet szerkesztettek. Bizonyítsd be, hogy $ACO\angle = OCB\angle$, ahol O a négyzet átlóinak metszéspontja!

360.* Az ABC háromszög C szöge derékszög. Az A és B csúcsait a P csúcsú derékszög szárai mentén csúsztatják (110. ábra). Bizonyítsd be, hogy a C pont egy szakasz mentén fog mozogni!

361.* Bármely M pontból, amely az A csúcsú szögtartományhoz tartozik, de nem illeszkedik a szög száraira, MP és MQ merőlegeseket bocsátanak a szög száraihoz. Az A pontból AK merőlegest húztak a PQ szakaszhoz. Bizonyítsd be, hogy $PAK\angle = MAQ\angle$!

362.* Az ABC hegyesszögű háromszög magasságai CC_1 és AA_1. Bizonyítsd be, hogy a C_1A_1 szakasz felezőmerőlegese az AC szakasz felezőpontján halad át!

363.* Egy olyan trapéz száraira, amelybe kör írható, mint átmérőre két kört szerkesztettek. Bizonyítsd be, hogy a körvonalaknak egy közös pontja van!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

364. Az $ABCD$ paralelogramma AC átlójának felezőpontján át egyenest húztak, amely metszi a BC és AD oldalait. Ez az egyenes az AB és CD szakaszokat megfelelően az M és K pontokban metszi. Állapítsd meg az $AMCK$ négyszög fajtáját!

365. Az AD szakasz az ABC háromszög szögfelezője. A D ponton át egy egyenest húztak, amely az AC oldallal párhuzamos és az AB oldalt az E pontban metszi. Az E ponton át egyenest húztak, amely párhuzamos a BC oldallal és az F pontban metszi az AC-t. Bizonyítsd be, hogy $AE = CF$!

366. Az $ABCD$ rombusz tompaszögéből az AD oldalra bocsátott BM magassága a K pontban metszi az AC átlót, $BKC\angle = 64°$. Határozd meg az ABC szöget!

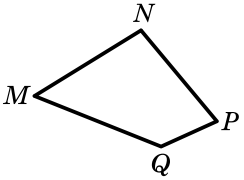
FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

367. Szét lehet-e vágni a négyzetet egy ezerszögű sokszögre és 199 darab ötszögre?

1. SZ. FELADATSOR. ÖNELLENŐRZŐ FELADATOK, TESZTEK

1. Melyik jelölés helyes a 111. ábrán lévő négyszögre?

A) *MPQN*; C) *NPMQ*;
B) *QMNP*; D) *QNPM*.



111. ábra

2. Milyen szögei lehetnek a négyszögnek?

A) Négy tompaszöge;
B) négy hegyesszöge;
C) két tompa – és két derékszöge;
D) két derékszöge, egy hegyes- és egy tompaszöge.

3. A négyszög minden oldalának hossza megegyezik az egyik átlójának hosszával. Milyenek lesznek a négyszög szögei?

A) 60°, 60°, 120°, 120°;
B) 60°, 120°, 90°, 90°;
C) 90°, 90°, 90°, 90°;
D) 150°, 30°, 150°, 30°.

4. A paralelogramma szögfelezője az oldalát felezi. Mivel egyenlők a paralelogramma oldalai, ha a kerülete 30 cm?

A) 5 cm, 10 cm; C) 7 cm, 8 cm;
B) 6 cm, 4 cm; D) 3 cm, 12 cm.

5. A négyszög akkor paralelogramma, ha:

A) két egyenlő oldalpárja van;
B) két pár egyenlő szögpárja van;
C) mindegyik átlója két egybevágó háromszögre osztja;
D) három oldala egyenlő.

6. Melyik hamis a következő állítások közül:

A) az olyan négyszög, amely egyszerre rombusz és téglalap is egyben, az négyzet;
B) az olyan paralelogramma, melynek az átlói egyenlők és merőlegesek, az négyzet;
C) az olyan paralelogramma, melynek minden szöge derékszög és az átlói egyenlők, az négyzet;
D) az olyan rombusz, melynek átlói egyenlők, az négyzet?

7. Az ABC háromszögben az M és N pontok megfelelően az AB és BC oldalaihoz illeszkednek. Az MN szakasz a háromszög középvonala, ha:

A) $MN \parallel AC$;

B) $MN = \frac{1}{2}AC$;

C) $MN = \frac{1}{2}AC$, $BNM\angle = BAC\angle$;

D) $MN = \frac{1}{2}AC$, $BNM\angle = BCA\angle$.

8. Az alábbi tulajdonságok közül melyikkel nem rendelkezik a trapéz:

A) a szemközti szögei egyenlők;

B) az átlói egyenlők és merőlegesek;

C) a nagyobbik alapjánál lévő egyik szöge nagyobb, mint a kisebbik alapjánál lévő egyik szöge;

D) a trapéz középvonala a magasságával egyenlő?

9. A kör kerületi szögei egyenlők, ha:

A) egy húrra támaszkodnak;

B) közös csúccsal rendelkeznek;

C) egy ívre támaszkodnak;

D) közös oldaluk van.

10. A $CDEF$ négyszög köré kör van írva, $CDF\angle = 80°$, $DEC\angle = 30°$. Mivel egyenlő a DCF szög?

A) 50°; C) 70°;

B) 110°; D) 90°.

AZ 1. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

A négyszög szögeinek összege

A négyszög szögeinek összege 360°.

Paralelogramma

Paralelogrammának azt a négyszöget nevezzük, melynek szemközti oldalai páronként párhuzamosak.

A paralelogramma tulajdonságai

- A paralelogramma szemközti oldalai egyenlők.
- A paralelogramma szemközti szögei egyenlők.
- A paralelogramma átlói metszéspontjukban felezik egymást.

A paralelogramma magassága

A paralelogramma magasságának azt a merőlegest nevezzük, amelyet a paralelogramma oldalegyenesének tetszőleges pontjából a szemközti oldalt tartalmazó egyenesre bocsátunk.

A paralelogramma ismertetőjelei

- Ha a négyszög mindkét szemközti oldalpárja egyenlő, akkor az ilyen négyszög paralelogramma.
- Ha a négyszög két szemközti oldala egyenlő és párhuzamos, akkor az ilyen négyszög paralelogramma.
- Ha a négyszög átlói metszéspontjukban felezik egymást, akkor az ilyen négyszög paralelogramma.

Téglalap

Téglalapnak nevezzük azt a paralelogrammát, melynek minden szöge derékszög.

A téglalap alaptulajdonsága

A téglalap átlói egyenlők.

A téglalap ismertetőjelei

- Ha a paralelogramma egyik szöge derékszög, akkor a paralelogramma téglalap.
- Ha a paralelogramma átlói egyenlők, akkor a paralelogramma téglalap.

Rombusz

Rombusznak nevezzük azt a paralelogrammát, melynek minden oldala egyenlő.

A rombusz alaptulajdonsága

A rombusz átlói merőlegesek egymásra, és felezik a rombusz szögeit.

A rombusz ismertetőjelei

- Ha a paralelogramma átlói merőlegesek, akkor az ilyen paralelogramma rombusz.
- Ha a paralelogramma átlói szögeinek szögfelezői lesznek, akkor az ilyen paralelogramma rombusz.

Négyzet

Négyzetnek nevezzük azt a téglalapot, melynek minden oldala egyenlő.

A háromszög középvonala

A háromszög középvonalának a két oldal felezőpontját összekötő szakaszt nevezzük.

A háromszög középvonalának tulajdonsága

A háromszög középvonala párhuzamos a harmadik oldallal, és annak felével egyenlő.

A trapéz

Trapéznak nevezzük azt a négyszöget, melynek két oldala párhuzamos, a másik kettő pedig nem párhuzamos.

A trapéz magassága

A trapéz magasságának azt a merőlegest nevezzük, amelyet az egyik alapját tartalmazó egyenes tetszőleges pontjából bocsátunk a másik alapját tartalmazó egyenesre.

A trapéz középvonala

A trapéz középvonalának a két szára felezőpontját összekötő szakaszt nevezzük.

A trapéz középvonalának tulajdonsága

A trapéz középvonala párhuzamos az alapokkal, és annak számtani közepével (félösszegével) egyenlő.

A kör középponti szöge

Azt a szöget, melynek csúcsa a kör középpontjában van, középponti szögnek nevezzük.

A kör kerületi szöge

Az olyan szöget, melynek csúcsa a körvonalon fekszik, szárai pedig metszik a kört, kerületi szögnek nevezzük.

A kerületi szög fokmértéke

A kerületi szög fokmértéke azon ív fokmértékének a felével egyenlő, amelyre szárai támaszkodnak.

A kerületi szögek tulajdonságai

- Az egyazon ívre támaszkodó kerületi szögek egyenlők.
- Az átmérőre támaszkodó kerületi szög derékszög.

A négyszög köré írt körvonal

A kört négyszög köré írtnak nevezzük, ha a négyszög minden csúcsa illeszkedik a körvonalhoz.

A körbe írt négyszög tulajdonsága

Ha a négyszög körbe írt, akkor a szemközti szögeinek összege 180°-kal egyenlő.

Körvonallal körbeírható négyszög ismertetőjele

Ha a négyszögben a szemközti szögek összege 180°-kal egyenlő, akkor köré írható körvonal.

A négyszögbe írt körvonal

A körvonalat négyszögbe írtnak mondjuk, ha érinti a négyszög minden oldalát.

A kör köré írt négyszög tulajdonsága

Ha a négyszög a körvonal köré van írva, akkor a szemközti oldalainak összege egyenlő.

Ismertetőjele annak a négyszögnek, amelybe körvonalat lehet írni

Ha a domború négyszög szemközti oldalainak összege egyenlő, akkor ebbe a négyszögbe körvonal írható.

A HÁROMSZÖGEK HASONLÓSÁGA

2.§.

Elsajátítva ennek a paragrafusnak az anyagait, megismerkedtek azon szakaszok tulajdonságaival, melyeket párhuzamos egyenesek a szög száraiból metszenek ki.

Megtanuljátok kiválasztani a háromszögek közül azokat, melyeknek az alakjai megegyeznek, de a méretei nem.

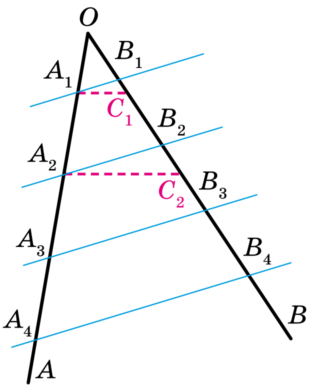
Megismerkedtek az egymást metsző húrok tulajdonságaival, és a körvonalhoz egy pontból húzott érintő és a metsző egyenes tulajdonságával.

Megtanuljátok azt is, hogy milyen háromszögeket nevezünk hasonlóknak, és elsajátítjátok a tulajdonságainak az alkalmazását is.

11. Thalész tétele. Az arányos szakaszok tétele

11.1. tétel (Thalész-tétel). ***Ha a szög szárait metsző párhuzamos egyenesek a szög egyik szárából egyenlő szakaszokat metszenek ki, akkor a másik szárból is egyenlő szakaszokat fognak kimetszeni.***

Bizonyítás. Legyen az AOB az adott szög (112. ábra). Ismert, hogy $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_{3\ 4} = \ldots$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_3B_3 \parallel A_4B_4$, … . Bizonyítsuk be, hogy $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \ldots$.



112. ábra

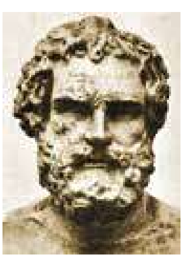
Tegyük fel, hogy $OB_1 \neq B_1B_2$. Legyen az OB_2 szakasz felezőpontja C_1. Ekkor az A_1C_1 szakasz az A_2OB_2 háromszög középvonala lesz. Ebből következik, hogy $A_1C_1 \parallel A_2B_2$. Tehát az A_1 ponton keresztül két párhuzamos egyenest fektettünk az A_2B_2-vel, ami ellentmond az egyenesek párhuzamossági axiómájának. Ezzel ellentmondást kaptunk. Tehát az $OB_1 = B_1B_2$.

Tegyük fel, hogy a $B_1B_2 \neq B_2B_3$. Legyen a B_1B_3 szakasz felezőpontja a C_2 pont. Ekkor az A_2C_2 szakasz az $A_3A_1B_1B_3$ trapéz középvonala lesz. Ebből következik, hogy $A_2C_2 \parallel A_3B_3$. Tehát az A_2 ponton keresztül két, az A_3B_3 egyenessel párhuzamos egyenes halad át. Ellentmondást kaptunk. Tehát $B_1B_2 = B_2B_3$.

Hasonlóképpen bizonyítjuk, hogy $B_2B_3 = B_3B_4$ stb. ▲

Meghatározás. Két szakasz arányának a hosszainak az arányát nevezzük, ha azok ugyanabban a mértékegységben vannak megadva.

Ha például $AB = 8$ cm, $CD = 6$ cm, akkor az AB és a CD szakaszok aránya $\frac{8}{6}$. Ezt így írjuk fel: $\frac{AB}{CD} = \frac{8}{6}$, vagyis $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{3}$.

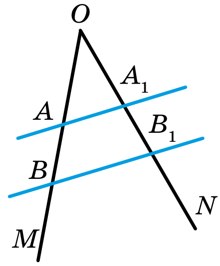


Milétoszi Thalész
(Kr. e. 624 körül – Kr. e. 546 körül)

Ógörög filozófus és tudós, kereskedő és államférfi. Kis-Ázsiában, az Égei-tenger partján elterülő Milétosz városában született.

Ha $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{CD}{C_1D_1}$, akkor azt mondják, hogy az AB és CD megfelelően arányosak az A_1B_1 és C_1D_1 szakaszokkal.

Hasonlóan lehet több szakasz arányosságáról is beszélni. Például, ha $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{CD}{C_1D_1} = \dfrac{MN}{M_1N_1}$, akkor azt mondjuk, hogy az AB, CD, MN szakaszok megfelelően arányosak az A_1B_1, C_1D_1, M_1N_1 szakaszokkal.



113. ábra

11.2. tétel (arányos szakaszok tétele). ***Ha a szög szárait párhuzamos egyenesek metszik, akkor az egyik száron keletkezett szakaszok megfelelően arányosak a másik száron keletkezett szakaszokkal.***

Ennek a tételnek a bizonyítása nem tartozik az iskolai geometria tananyagához. Mi csak ennek egy részesetét bizonyítjuk be.

Az MON szög szárait AA_1 és BB_1 párhuzamos egyenesekkel metsszük (113. ábra). Bebizonyítjuk, hogy

1) $\dfrac{OA}{OA_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$; 2) $\dfrac{OA}{OA_1} = \dfrac{OB}{OB_1}$; 3) $\dfrac{OB}{OB_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$.

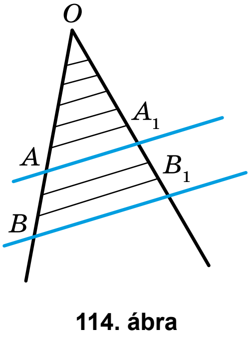
Ezek közül az elsőt bizonyítjuk csak be (a többi bizonyítása ehhez hasonlóan történik).

Az OA és AB szakaszokhoz létezzen egy olyan l szakasz, hogy mindkettőnek a hossza valahányszorosa lesz az l szakasznak. Vagyis: $OA = ml$, $AB = nl$, ahol m és n valamely természetes szám.

Ekkor az OA és AB szakaszt fel lehet osztani megfelelően m és n egyenlő, l hosszúságú szakaszokra.

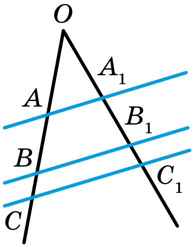
A kapott szakaszok végpontjain keresztül a BB_1 egyenessel párhuzamos egyeneseket fektetünk (114. ábra). Thalész tétele szerint ezek az egyenesek az OA_1 és A_1B_1 szakaszokat megfelelően m és n egyenlő szakaszokra osztja. Legyen ezeknek a szakaszoknak a hossza l_1. Innen következik, hogy $OA_1 = ml_1$, $A_1B_1 = nl_1$.

Tehát $\dfrac{OA}{AB} = \dfrac{ml}{nl} = \dfrac{m}{n}$, $\dfrac{OA_1}{A_1B_1} = \dfrac{ml_1}{nl_1} = \dfrac{m}{n}$. Ebből következik, hogy $\dfrac{OA}{AB} = \dfrac{OA_1}{A_1B_1}$. $\dfrac{OA}{OA_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1}$.



114. ábra

Miért nem tekinthető a fenti gondolatmenet a tétel teljes bizonyításának? Azért, mert nem bármilyen két szakaszra létezik olyan szakasz, amelyre igaz lenne, hogy mindkét szakasz hossza egész számú többszöröse lesz a mi szakaszunk



115. ábra

hosszának. Az OA és az OB szakaszok olyanok is lehetnek, hogy nem létezik ilyen szakasz. Ennek a résznek a bizonyítása nem tartozik az iskolai tananyag keretébe. ▲

Ha a 113. ábrát kiegészítjük a CC_1 egyenessel, amely párhuzamos a BB_1 egyenessel (115. ábra), akkor a fentiekhez hasonló gondolatmenettel megkapjuk, hogy például $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$.

A 11.2. tétel akkor is igaz marad, ha a szög szárai helyett bármilyen egyeneseket veszünk.

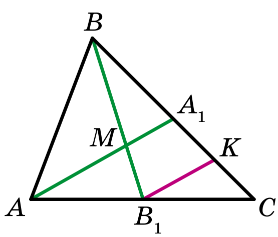
11.3. tétel. ***A háromszög mindhárom oldalfelezője egy pontban metszi egymást és ez a pont mindegyik oldalfelezőt a háromszög csúcsától számítva 2 : 1 arányban osztja.***

Bizonyítás. A 116. ábrán az ABC háromszög AA_1 és BB_1 oldalfelezői az M pontban metszik egymást. Bebizonyítjuk, hogy a CC_1 oldalfelező is átmegy az M ponton és $\frac{BM}{MB_1}=\frac{AM}{MA_1}=\frac{CM}{MC_1}=\frac{2}{1}$.

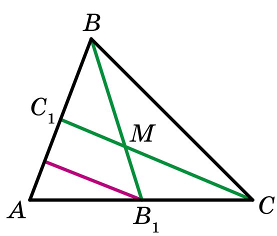
Meghúzzuk a $B_1K \parallel AA_1$ szakaszt. Mivel $AB_1 = B_1C$, ezért Thalész tétele alapján $A_1K=KC$, vagyis $\frac{A_1C}{A_1K}=\frac{2}{1}$. Mivel $BA_1=A_1C$, ezért $\frac{BA_1}{A_1K}=\frac{2}{1}$. Az arányos szakaszok tételéből következik, hogy $\frac{BM}{MB_1}=\frac{BA_1}{A_1K}=\frac{2}{1}$.

Tehát az AA_1 súlyvonal metszi a BB_1 oldalfelezőt, és a B ponttól számítva 2 : 1 arányban osztja (117. ábra).

Ez azt jelenti, hogy mindhárom oldalfelező egy ponton megy át. Bebizonyítottuk, hogy a BB_1 oldalfelezőt ez a pont 2 : 1 arányban osztja. Hasonlóképpen bizonyítható, hogy ez a pont az AA_1 és CC_1 súlyvonalakat is 2 : 1 arányban osztja. ▲

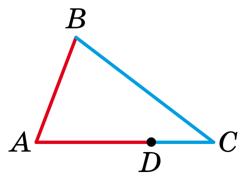


116. ábra



117. ábra

A 118. ábrán az ABC háromszög látható. A D pont az AC oldalára illeszkedik. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az AB és BC oldalak **szomszédai** lesznek megfelelően az AD és DC szakaszoknak.



118. ábra

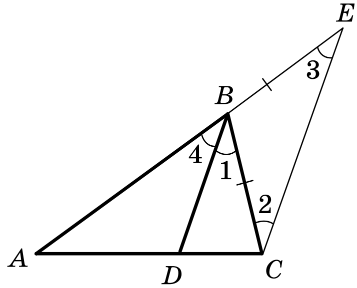
11.4. tétel (a háromszög szögfelezőjének tulajdonsága vagy szögfelező-tétel). ***A háromszög szögfelezője a háromszög oldalát a szomszédos oldalak arányában osztja.***

Bizonyítás. A 119. ábrán az ABC háromszögnek BD a szögfelezője. Bebizonyítjuk, hogy $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$.

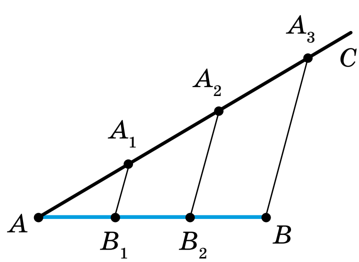
A C ponton keresztül olyan egyenest húzunk, amely párhuzamos a BD egyenessel. Ez az egyenes az AB-t egy E pontban metszi. Az 1-es és 2-es szögek egyenlők, mint a BD és CE párhuzamosakat egy BC metsző egyenes által keletkezett különböző oldali szögei; a 3-as és 4-es egyenlők, mint a megfelelő BD és CE párhuzamosakat egy AE metsző egyenes által keletkezett megfelelő szögei. Mivel BD az ABC háromszög szögfelezője, ezért $4\angle = 1\angle$. Innen következik, hogy $2\angle = 3\angle$. Az arányos szakaszok tételéből következik, hogy $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BE}$. Mivel $BE = BC$, ezért $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$. ▲

Feladat. Ossz fel egy szakaszt három egyenlő részre!

Megoldás. Az AB szakasz A pontján keresztül egy olyan AC félegyenest húzunk, amely nem az AB egyenes része (120. ábra). Felveszünk ezen a félegyenesen egy tetszőleges A_1 pontot, aztán az A_2 és A_3 pontokat úgy jelöljük ki, hogy $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$. Meghúzzuk az A_3B szakaszt. Az A_1 és A_2 pontokon keresztül olyan egyeneseket fektetünk, melyek párhuzamosak az A_3B-vel. Ezek az egyenesek az AB szakaszt megfelelően a B_1 és B_2 pontokban metszik. Thalész tétele alapján $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$. ●



119. ábra



120. ábra

1. Fogalmazd meg Thalész tételét!
2. Mit nevezünk két szakasz arányának?
3. Milyen esetekben mondják azt, hogy az AB és CD szakaszok arányosak az A_1B_1 és C_1D_1 szakaszokkal?
4. Fogalmazd meg az arányos szakaszok tételét!
5. Fogalmazd meg a háromszög oldalfelezői metszéspontjáról szóló tételt!
6. Fogalmazd meg a háromszög szögfelező-tételét!

GYAKORLATI FELADATOK

368.° Rajzolj egy tetszőleges szakaszt, és oszd fel öt egyenlő részre!

369.° Rajzolj egy tetszőleges szakaszt, és oszd fel hét egyenlő részre!

370.° Rajzolj egy tetszőleges AB szakaszt, és helyezd el rajta úgy a C pontot, hogy $AC : CB = 2 : 7$!

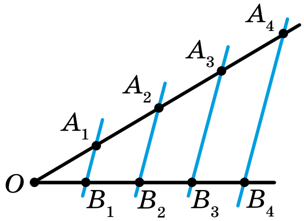
371.° Rajzolj egy tetszőleges CD szakaszt, és jelöld rajta az E pontot úgy, hogy $CE : ED = 1 : 5$!

GYAKORLATOK

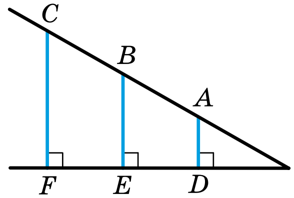
372.° A 121. ábrán $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $OB_1 = 3$ cm. Határozd meg a B_1B_2, OB_3, B_1B_4 szakaszok hosszát!

373.° A 122. ábrán $AB = BC$, $EF = 5$ cm. Határozd meg az ED szakasz hosszát!

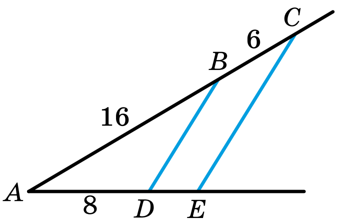
374.° Határozd meg az AB és CD szakaszok arányát, ha hosszaik megfelelően 12 cm és 18 cm! Megváltozik-e ez az arány, ha a szakaszok hosszait deciméterekben vagy milliméterekben adjuk meg?



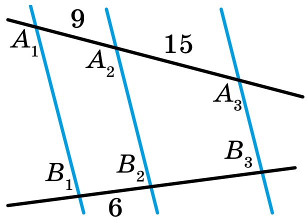
121. ábra



122. ábra



123. ábra



124. ábra

375.° Megfelelően arányosak-e az AB és CD szakaszok az EF és MK szakaszokkal, ha:
1) $AB = 16$ cm, $CD = 6$ cm, $EF = 24$ cm, $MK = 9$ cm;
2) $AB = 8$ cm, $CD = 20$ cm, $EF = 10$ cm, $MK = 35$ cm?

376.° Az AB, CD, EF, MK, PS szakaszok közül válasszatok ki négyet úgy, hogy kettő közülük arányos legyen a másik kettővel, ha $AB = 3$ cm, $CD = 16$ cm, $EF = 18$ cm, $MK = 36$ cm, $PS = 6$ cm!

377.° A 123. ábrán $BD \parallel CE$, $AB = 16$ cm, $BC = 6$ cm, $AD = 8$ cm. Határozd meg a DE szakasz hosszát!

378.° A 124. ábrán $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = 9$ cm, $A_2A_3 = 15$ cm, $B_1B_2 = 6$ cm. Határozd meg a B_2B_3 szakasz hosszát!

379.° A 125. ábrán $DE \parallel AC$, $BE = 10$ cm, a BD szakasz kétszer hosszabb, mint az AD. Határozd meg a BC szakasz hosszát!

380.° Az egyenes, amely párhuzamos az ABC háromszög BC oldallal, az AB oldalt M pontban, az AC oldalt pedig K pontban metszi, $AM = 9$ cm, $BM = 6$ cm, $KC = 8$ cm. Határozd meg az AK szakasz hosszát!

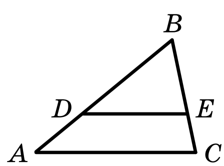
381.° Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög középvonala, amely az AC oldallal párhuzamos, felezi azt a szakaszt, amely összeköti a B csúcsot az AC oldal bármely pontjával!

382.° A téglalap átlóinak metszéspontja a hosszabbik oldalától 7 cm távolságra van. Határozd meg a téglalap kisebbik oldalának hosszát!

383.° Az egyenlő oldalú háromszög magassága 12 cm. Mekkora távolságra van a háromszög oldalaitól a szögfelezők metszéspontja?

384.° Az ABC háromszög CD súlyvonala 9 cm. Határozd meg a CO és OD szakaszok hosszát, ahol az O pont az ABC háromszög oldalfelezőinek a metszéspontja!

385.° A BD szakasz az ABC háromszög szögfelezője, $AB = 40$ cm, $AD = 30$ cm, $CD = 12$ cm. Határozd meg a BC oldal hosszát!



125. ábra

386.° Az AM szakasz az ABC háromszög szögfelezője, $AB = 48$ cm, $AC = 32$ cm, $BM = 18$ cm. Határozd meg a BC oldal hosszát!

387.• Az egyenest nem metsző szakasz végpontjai az adott egyenestől 8 cm és 14 cm távolságra van. Határozd meg a szakasz felezőpontjának a távolságát az egyenestől!

388.• A BC húr felezőpontja az AC átmérőtől 3 cm távolságra van, $BAC\angle = 30°$. Határozd meg az AB húr hosszát!

389.• Az $ABCD$ rombuszban a BM szakasz az AD oldalra bocsátott magasság, $A\angle = 45°$, $AM = 8$ cm. Határozd meg a rombusz átlóinak metszéspontja és az AD oldala közötti távolságot!

390.• Az ABC háromszögben adott, hogy $AB = BC$, $AC = 8$ cm, AD – oldalfelező, BE – magasság, $BE = 12$ cm. A D pontból az AC oldalra DF merőlegest bocsátottak. Határozd meg a DF szakasz hosszát, és az ADF szög fokmértékét!

391.• Az ABC háromszög AC oldala 24 cm. Az AB oldalt négy egyenlő részre osztották, és az osztópontokból az AC egyenessel párhuzamos egyeneseket húztak. Határozd meg ezeknek az egyeneseknek a háromszög belsejébe eső szakaszát!

392.• A trapéz alapjai 16 cm és 28 cm. Az egyik szárát három egyenlő részre osztották, és az osztópontokban az alappal párhuzamos egyeneseket fektettek. Határozd meg ezeknek az egyeneseknek a trapéz belsejébe eső szakaszát!

393.• A DEF háromszög DE oldalát három egyenlő részre osztották és az osztópontokból a DF egyenessel párhuzamos egyeneseket húztak. Határozd meg ezeknek az egyeneseknek a háromszög belsejébe eső szakaszát, ha $DF = 15$ cm!

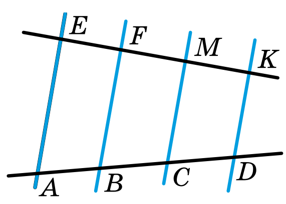
394.• Bizonyítsd be, hogy a trapéz középvonala az átlóit felezi!

395.• Az $ABCD$ trapéz MK középvonala az AC átlót az E pontban metszi, $ME = 4$ cm, $EK = 6$ cm. Határozd meg a trapéz alapjainak a hosszát!

396.• A trapéz átlói a középvonalát E és F pontokban metszi. Bizonyítsd be, hogy $ME = KF$!

397.• A trapéz alapjai 12 cm és 22 cm. Határozd meg azokat a szakaszokat, melyekre az átlók a középvonalat felosztják!

398.• A 126. ábrán $AE \parallel BF \parallel CM \parallel DK$, $AB = 25$ cm, $BC = 20$ cm, $CD = 35$ cm, $EK = 48$ cm. Határozd meg az EF, FM és MK szakaszok hosszát!



126. ábra

399.• Az ABC háromszög AC oldalához illeszkedő D ponton keresztül az AB egyenessel párhuzamos egyenest fektettünk, amely a BC oldalt egy E pontban metszi. Határozd meg a BE szakasz hosszát, ha $AD : DC = 5 : 7$, $BC = 36$ cm!

400.• Az $ABCD$ paralelogramma AB és AD oldalainak a megfelelő felezőpontjai M és K pontok lesznek. Bizonyítsd be, hogy a BK és DM egyenesek metszéspontja az AC átlóhoz illeszkedik!

401.• Bizonyítsd be, hogyha a háromszög két súlyvonala egyenlő, akkor ez a háromszög egyenlő szárú!

402.• Az ABC háromszögben ($AB = BC$) meghúztuk az AM oldalfelezőt és a BH magasságot. Határozd meg a BH magasság hosszát, ha $AM = 45$ cm, $CAM\angle = 30°$!

403.• Adott az AB szakasz és egy O pont, amely nem illeszkedik az AB egyeneshez. Szerkessz háromszöget, melynek az AB szakasz az egyik oldala, az O pont pedig a súlyvonalainak metszéspontja!

404.• A BD szakasz az ABC háromszög szögfelezője, $AB = 28$ cm, $BC = 20$ cm, $AC = 36$ cm. Határozd meg az AD és CD szakaszok hosszát!

405.• Az ABC háromszögbe egy $CDEF$ rombuszt írtak úgy, hogy a C szögük közös, a D, E és F csúcsai pedig a háromszög AC, AB és BC oldalaihoz megfelelően illeszkednek. Határozd meg az AC és BC oldalak hosszát, ha $AE = 30$ cm, $BE = 12$ cm, a háromszög kerülete pedig 105 cm!

406.• A háromszög oldalai 39 cm, 65 cm és 80 cm, a háromszög legnagyobb oldalához illeszkedő körvonal pedig a másik két oldalt érinti. Milyen részekre fogja osztani a körvonal középpontja a háromszög oldalát?

407.• Az ABC egyenlő szárú háromszög AC alapjának felezőpontja a D pont. Az AB oldalán úgy jelöltek egy M pontot, hogy $AM : MB = 2 : 7$. Milyen arányban osztja a BD egyenes a CM szakaszt?

408.• A DEF egyenlő szárú háromszög alapjára meghúzták az EC magasságot, az EF szárán pedig felvettek egy A pontot. Az EC és a DA szakaszok az O pontban metszik egymást úgy, hogy $AO : OD = 3 : 8$. Határozd meg az $EA : AF$ arány értékét!

409.• Az egyenlő szárú háromszög alapjára bocsátott magassága 42 cm, az alapja és a szára úgy aránylanak egymáshoz, mint 6 : 11. Határozd meg az ebbe a háromszögbe írt körvonal sugarát!

410.• Az egyenlő szárú háromszög szára 60 cm. A beírt kör középpontja az alapra bocsátott súlyvonalát 12 : 5 arányban osztja. Határozd meg a háromszög alapját!

411.•• Az ABC háromszög BC oldalán egy M pontot jelöltek úgy, hogy $BM : MC = 3 : 10$. Milyen arányban osztja az AM szakasz az ABC háromszög BK súlyvonalát?

412.•• Az ABC háromszög AB oldalán úgy jelöltek egy M pontot, hogy $AM : MB = 4 : 3$. Milyen arányban osztja: 1) a BK súlyvonal a CM szakaszt; 2) a CM szakasz a BK súlyvonalat?

413.•• Bizonyítsd be, hogy a trapéz átlóinak a felezőpontjait összekötő szakasz párhuzamos a trapéz alapjaival, és azok fél különbségével egyenlő!

414.•• Adottak az a, b, c szakaszok. Szerkessz egy x szakaszt úgy, hogy $a : x = b : c$!

415.•• Az adott szög O belső pontján át rajzolj egy szakaszt, melynek végpontjai a szög száraira illeszkednek és az O pont: 1) ennek a szakasznak a felezőpontja; 2) a szakaszt 2 : 3 arányban osztja!

416.•• Szerkessz háromszöget:

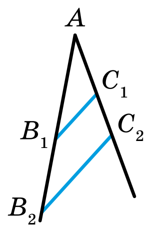
1) oldala és azon szögek alapján, amelyek ezen oldal és a két másik oldal oldalfelezői között van;
2) két súlyvonala és a köztük lévő szöge alapján;
3) egy oldalhoz húzott magassága és a súlyvonala, valamint ezen oldal és a másik oldalhoz húzott súlyvonal közötti szöge alapján;
4) három súlyvonala alapján!

417.•• Szerkessz háromszöget:

1) oldala és a másik két oldalra húzott súlyvonala alapján;
2) az egyik oldalára bocsátott magassága és a másik két oldalhoz húzott súlyvonalai alapján!

418.•• Az A szög szárain B_1, B_2 és C_1, C_2 pontokat jelöltek úgy, hogy $\frac{AB_1}{B_1B_2} = \frac{AC_1}{C_1C_2}$ (127. ábra). Bizonyítsd be, hogy $B_1C_1 \parallel B_2C_2$!

419.* Az ABC háromszög B csúcsánál lévő külső szögének szögfelezője az AC félegyenest a D pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy $AB : BC = AD : CD$!



127. ábra

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

420. Az $ABCD$ négyzet oldala a. A B középpontú, a sugarú körvonal AC húrján egy E pontot jelöltek úgy, hogy $BEC\angle = 75°$. Határozd meg az AE szakasz hosszát!

421. A trapéz átlója merőleges az alapjaihoz, tompaszöge 120°, a mellette lévő szára 12 cm, nagyobbik alapja pedig 16 cm. Határozd meg a trapéz középvonalát!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

422. Az egyenlő oldalú háromszöget öt, tőle kisebb egymással egybevágó egyenlő oldalú háromszöggel takarták le. Bizonyítsd be, hogy ehhez a letakaráshoz elegendő négy ilyen háromszög is!

12. Hasonló háromszögek

A 128. ábrán a mértantankönyv kicsinyített borítóját látjátok. A mindennapi életben gyakran találkozunk olyan tárgyakkal, melyek alakra egyformák, de a méretük különböző (129. ábra).

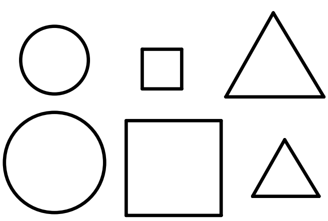
128. ábra

129. ábra

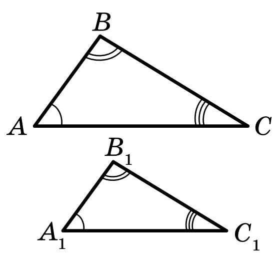
Azokat a mértani alakzatokat, melyeknek az alakjuk egyforma, **hasonlók**nak nevezzük. Például hasonló két bármilyen kör, két négyzet, két egyenlő oldalú háromszög (130. ábra).

A 131. ábrán az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögek láthatók, melyeknél $A\angle = A_1\angle$, $B\angle = B_1\angle$, $C\angle = C_1\angle$.

Az AB és A_1 B_1 oldalak a C és C_1 egyenlő szögekkel szemben vannak. Ezeket az oldalakat **megfelelő** oldalaknak nevezzük. Szintén megfelelő oldalak lesznek a BC és B_1C_1, valamint a CA és C_1A_1 oldalak is.



130. ábra



131. ábra

Meghatározás. Két háromszöget hasonlónak mondunk, ha a szögei megfelelően egyenlők egymással, és az egyik háromszög oldalai a másik háromszög megfelelő oldalaival arányosak.

Például a 132. ábrán az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögek láthatók, melyekben $A\angle = A_1\angle$, $B\angle = B_1\angle$, $C = C_1\angle$ és $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = 2$. A meghatározás értelmében ezek a háromszögek hasonlók lesznek. Ezt így jelölik: $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$ (így olvassuk: az ABC háromszög hasonló az $A_1B_1C_1$ háromszöggel).

A 2-es számot, amely a megfelelő oldalak arányával egyenlő, **hasonlósági együtthatónak** nevezzük. Azt mondjuk, hogy az ABC háromszög hasonló az $A_1B_1C_1$ háromszöggel, és a hasonlósági együttható 2-vel lesz egyenlő. Ez így írjuk le: $ABC\Delta \overset{2}{\sim} A_1B_1C_1\Delta$.

Mivel az $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA} = \frac{1}{2}$, ezért azt is lehet mondani, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög hasonló az ABC háromszöggel, és a hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$-del egyenlő. Ezt így írják: $A_1B_1C_1\Delta \overset{1/2}{\sim} ABC\Delta$.

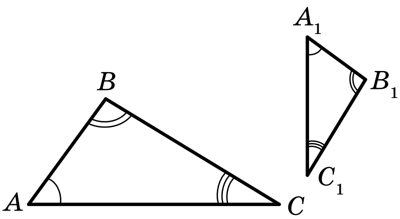
Az egybevágó háromszögek meghatározásából következik, hogy bármilyen két egybevágó háromszög hasonló, és a hasonlósági együttható 1-gyel lesz egyenlő.

Ha $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$ és $A_1B_1C_1\Delta \sim A_2B_2C_2\Delta$, akkor $ABC\Delta \sim A_2B_2C_2\Delta$. Bizonyítsátok be önállóan ezt a tulajdonságot!

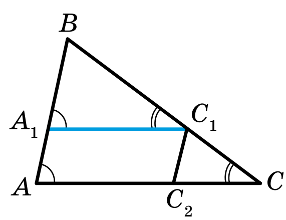
Lemma[1] a háromszögek hasonlóságáról. ***Az egyenes, amely párhuzamos a háromszög egyik oldalával és a másik két oldalt metszi, az eredeti háromszögből egy vele hasonló háromszöget metsz ki.***

Bizonyítás. A 133. ábrán az ABC háromszög látható, az A_1C_1 szakasz párhuzamos az AC oldallal. Bebizonyítjuk, hogy $ABC\Delta \sim A_1BC_1\Delta \sim ABC\Delta$.

Az A és A_1, C és C_1 szögek egyenlők, mint az A_1C_1 és az AC párhuzamos egyenesek az AB és CB metsző egyenesnél keletkezett megfelelő szögek. Tehát a háromszögek megfelelő szögei egyenlők.



132. ábra



133. ábra

[1] *Lemmá*nak nevezzük a kisegítő tételt, amelyet más tételek bizonyításánál alkalmazunk.

Bebizonyítjuk, hogy a BA és BC szakaszok megfelelően arányosak a BA_1 és BC_1 oldalakkal.

Az arányos szakaszok tételéből (11.2. tétel) következik, hogy $\frac{BA}{BC}=\frac{BA_1}{BC_1}$. Ebből pedig az, hogy $\frac{BA}{BA_1}=\frac{BC}{BC_1}$.

Meghúzzuk a C_1C_2 egyenest úgy, hogy $C_1C_2 \parallel AB$. Innen azt kapjuk, hogy $\frac{BC}{BC_1}=\frac{AC}{AC_2}$. A meghatározás szerint az $AA_1C_1C_2$ négyszög paralelogramma. Tehát $AC_2=A_1C_1$. Amiből azt kapjuk, hogy $\frac{BC}{BC_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$.

Bebizonyítottuk, hogy $\frac{BA}{BA_1}=\frac{BC}{BC_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$.

Tehát az A_1BC_1 és az ABC háromszögek megfelelő szögei egyenlők, a megfelelő oldalai pedig arányosak lesznek. A meghatározás értelmében tehát ezek a háromszögek hasonlók. ▲

Feladat. Bizonyítsd be, hogy a hasonló háromszögek kerületeinek aránya a hasonlósági együtthatóval egyenlő.

Megoldás. Legyen az $A_1B_1C_1$ és az ABC háromszögek hasonlók, a hasonlósági együttható pedig k. Ekkor $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{A_1C_1}{AC}=k$. Innen $A_1B_1=k\cdot AB$, $B_1C_1=k\cdot BC$, $A_1C_1=k\cdot AC$.

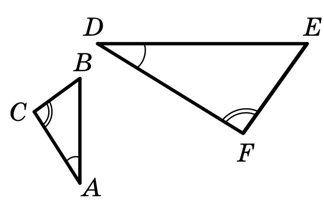
Jelöljük az $A_1B_1C_1$ háromszög kerületét P_1-gyel, az ABC háromszögét pedig P-vel. Ekkor azt kapjuk, hogy

$P_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = k\cdot AB + k\cdot BC + k\cdot AC = k\,(AB + BC + AC) = kP$. Vagyis $\frac{P_1}{P}=k$. ●

1. Milyen két háromszöget nevezünk hasonlónak?
2. Hogyan kell meghatározni a hasonlósági együtthatót két hasonló háromszög esetében?
3. Fogalmazzátok meg a hasonló háromszögek lemmáját!

GYAKORLATOK

423.° A 134. ábrán az ABC és DEF hasonló háromszögek láthatók, melyeknek az egyenlő szögeit azonos számú ívekkel jelöltük. A háromszögek mely ívei lesznek arányosak? Írd fel a megfelelő egyenlőségeket!



134. ábra

424.° Hasonlóak-e az ABC és MNK háromszögek, ha $A\angle = 40°$, $B\angle = 82°$, $M\angle = 40°$, $K\angle = 58°$, $AB = 2{,}4$ cm, $BC = 2{,}1$ cm, $AC = 3{,}9$ cm, $MN = 3{,}2$ cm, $NK = 2{,}8$ cm, $MK = 5{,}2$ cm?

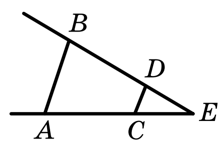
425.° Adott, hogy $DEF\Delta \overset{0,3}{\sim} MCP\Delta$, miközben a DE oldalnak az MC oldal felel meg, a DF oldalnak pedig az MP. $MC = 12$ cm, $MP = 8$ cm, $EF = 4{,}5$ cm. Határozd meg a háromszögek ismeretlen oldalait!

426.° Adott, hogy $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$. Miközben az $A\angle = A_1\angle$, $B\angle = B_1\angle$, $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 10$ cm, $A_1B_1 = 9$ cm. Határozd meg a B_1C_1 és az A_1C_1 oldalakat!

427.° Határozd meg az $A_1B_1C_1$ háromszög szögeit, ha $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$, az AB oldalnak az A_1B_1 oldal felel meg, a BC-nek pedig a B_1C_1 oldal, $A\angle = 25°$, $B\angle = 70°$!

428.° Az MK és DE, a KT és EF oldalak az MKT és DEF hasonló háromszögek megfelelő oldalai, $MK = 18$ cm, $KT = 16$ cm, $MT = 28$ cm, $MK : DE = 4 : 5$. Határozd meg a DEF háromszög oldalait!

429.° A 135. ábrán $AB \parallel CD$. Keress ezen a rajzon hasonló háromszögeket! Írd fel azokat az aránypárokat, amelyek a következő arányokkal kezdődnek:
1) $\frac{AE}{CE}$; 2) $\frac{CD}{AB}$; 3) $\frac{AB}{AE}$.

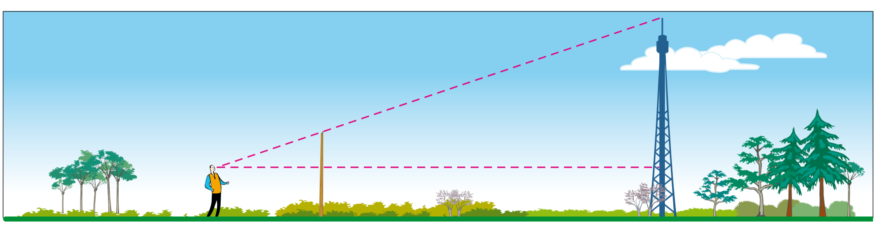


135. ábra

430.° Az ABC háromszögben az AC oldallal párhuzamos egyenes az AB oldalt a D pontban, a BC oldalt pedig az E pontban metszi. Határozd meg:
1) a BD szakasz hosszát, ha $AB = 16$ cm, $AC = 20$ cm, $DE = 15$ cm;
2) az AD oldal hosszát, ha $AB = 28$ cm, $BC = 63$ cm, $BE = 27$ cm!

431.° Az ABC háromszögben adott, hogy $AB = 6$ cm. Az AB oldal M pontján át egy egyenest húztak, amely párhuzamos a BC oldallal, és az AC oldalt egy K pontban metszi. Határozd meg az ABC háromszög ismeretlen oldalait, ha $AM = 4$ cm, $MK = 8$ cm, $AK = 9$ cm!

432.° Határozd meg a torony magasságát (136. ábra), ha a megfigyelő az oszloptól és a toronytól megfelelően 1,5 m és 39 m távolságra áll, az oszlop magassága 3 m, a megfigyelő magassága pedig 1,8 m!



136. ábra

433.° Az $ABCD$ trapéz AB és CD szárainak meghosszabbításai az E pontban metszik egymást. Határozd meg a CE szakasz hosszát, ha $DE = 40$ cm, $BC : AD = 4 : 5$!

434.° Az $ABCD$ trapéz AB és CD szárainak meghosszabbításai az M pontban metszik egymást. Határozd meg a trapéz kisebbik alapját, ha a nagyobbik AD alapja 42 cm, $AB = 9$ cm, $BM = 54$ cm!

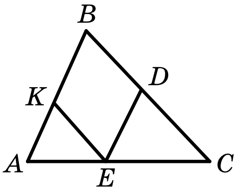
435.° A hasonló háromszögek definícióját alkalmazva bizonyítsd be, hogy bármilyen két egyenlő oldalú háromszög hasonló egymással!

436.• Az M és K pontok az $ABCD$ négyzet CD és AD oldalainak megfelelő felezőpontjai. A hasonló háromszögek definícióját alkalmazva bizonyítsd be, hogy $MDK\Delta \backsim BCD\Delta$!

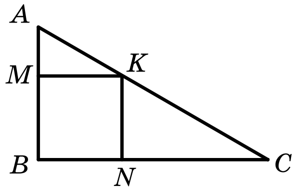
437.• A háromszög oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint: 5 : 4 : 7. Határozd meg ehhez a háromszöghöz hasonló háromszög oldalait, melynek: 1) a kerülete 64 cm; 2) a kisebbik oldala 24 cm!

438.• Az adott háromszög oldalai 15 cm, 25 cm és 35 cm. Határozd meg az ehhez a háromszöghöz hasonló háromszög oldalait, ha: 1) a kerülete 45 cm; 2) a legnagyobb és legkisebb oldal különbsége 16 cm!

439.• A 137. ábrán az ABC háromszög látható, melyben egy $BDEK$ rombusz van beírva. Határozd meg a rombusz oldalát, ha $AB = 10$ cm, $BC = 15$ cm!



137. ábra



138. ábra

440.• A 138. ábrán az ABC derékszögű háromszög ($B\angle = 90°$) látható, amelybe egy $BMKN$ négyzet van beírva. Határozd meg a CN szakasz hosszát, ha $BM = 6$ cm, $AB = 10$ cm!

441.• Két körvonalnak, melynek a középpontjai O_1 és O_2 és a megfelelő sugarai 8 cm és 12 cm, csak egy közös A pontja van (az A pont az O_1 és az O_2 pontja között helyezkedik el). A közös külső érintőjük az O_1O_2 egyenest a B pontban metszi. Határozd meg a B pont és a körvonalak középpontjai közötti távolságokat!

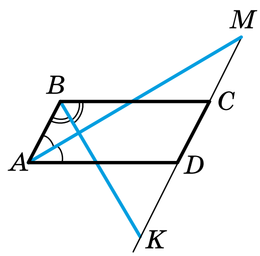
442.•• Az egyenlő szárú háromszög kerülete 48 cm. Az alapjára bocsátott magasság felezőpontján át a szárával párhuzamosan egy egyenest fektettünk. Határozd meg annak a háromszögnek a kerületét, amelyet ez az egyenes metsz ki az adott háromszögből!

443.•• Az egyenlő szárú háromszögbe, melynek alapja 12 cm, szára 18 cm, kör van írva. Határozd meg a kör érintési pontjainak a háromszög száraihoz mért távolságait!

444.* Az ABC háromszögben adott, hogy $AB = 8$ cm, $BC = 12$ cm, $ABC\angle = 120°$, BD pedig a háromszög szögfelezője. Határozd meg a BD szakasz hosszát!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

445. Az $ABCD$ paralelogramma BC oldala 2-szer nagyobb, mint az AB oldala. Az A és B szögek szögfelezői a CD oldal egyenesét megfelelően az M és a K pontokban metszik (139. ábra). Határozd meg a paralelogramma oldalait, ha $MK = 18$ cm!



139. ábra

446. Az $ABCD$ téglalap átlói az O pontban metszik egymást, az AOD szög 60°-kal nagyobb, mint az AOB szög, $AC = 24$ cm. Határozd meg a COD háromszög kerületét!

447. A körvonal középpontja az ABC háromszög AB oldalához illeszkedik, a B pont pedig magára a körvonalra. Ez a körvonal a C pontban érinti az AC oldalt, az AB oldalt pedig a D pontban metszi, miközben $AD : BD = 1 : 2$. Határozd meg: 1) az ABC háromszög szögeit; 2) a BCD háromszög szögeit!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

448. A síkon megjelöltek 25 pontot úgy, hogy bármilyen három pont között lesz két olyan, melyek között a távolság kisebb, mint egy. Bizonyítsd be, hogy létezik egy olyan egységsugarú körlap, amelyhez az adott pontok közül legalább 13 pont fog illeszkedni!

13. A háromszögek hasonlóságának első ismertetőjele

Ha az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögekre teljesülnek az $A\angle = A_1\angle$, $B\angle = B_1\angle$, $C\angle = C_1\angle$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$ feltételek, akkor a meghatározás szerint ezek a háromszögek hasonlók.

Lehet-e kevesebb feltétellel meghatározni a háromszögek hasonlóságát? Erre a kérdésre a háromszögek hasonlóságának ismertetőjelei adják meg a választ.

13.1. tétel (a háromszögek hasonlóságának első ismertetőjele: két szöge alapján). ***Ha az egyik háromszög két szöge egyenlő a másik háromszög két szögével, akkor az ilyen háromszögek hasonlók.***

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögeket, melyekben $A\angle = A_1\angle$, $B\angle = B_1\angle$. Bebizonyítjuk, hogy az $ABC\Delta \backsim A_1B_1C_1\Delta$.

Ha $AB = A_1B_1$, akkor az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögek egybevágók a háromszögek egybevágóságának második ismertetőjele alapján, tehát ezek a háromszögek hasonlók.

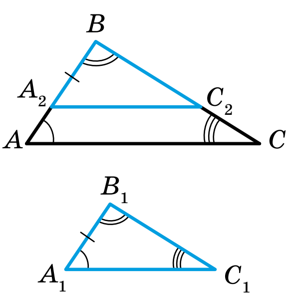
Legyen például $AB > A_1B_1$. A BA oldalra rámérjük a BA_2 szakaszt, melynek hossza egyenlő a B_1A_1 szakasz hosszával. Az A_2 ponton keresztül A_2C_2 egyenest húzunk, amely párhuzamos az AC-vel (140. ábra).

Az A és a BA_2C_2 szögek az A_2C_2 és az AC párhuzamos egyenesek az AA_2 metsző egyenes által keletkezett megfelelő szögei. Ebből következik, hogy $A\angle = BA_2C_2\angle$. De az $A\angle = A_1\angle$. Ezekből kapjuk, hogy $A_1\angle = BA_2C_2\angle$. Tehát az A_2BC_2 és $A_1B_1C_1$ háromszögek egybevágóak a háromszögek egybevágóságának második ismertetőjele alapján. A hasonló háromszögekről szóló lemma alapján $A_2BC_2\Delta \backsim ABC\Delta$. Tehát $ABC\Delta \backsim A_1B_1C_1\Delta$. ▲

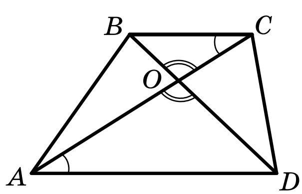
1. feladat. Az $ABCD$ trapéz ($BC \parallel AD$) középvonala 24 cm, átlóinak metszéspontja pedig O. Határozd meg a trapéz alapjait, ha $AO : OC = 5 : 3$!

Megoldás. Vizsgáljuk meg az AOD és COB háromszögeket (141. ábra). Az AOD és BOC szögek egyenlők mint csúcsszögek, a CAD és az ACB szögek egyenlők, mint a BC és AD párhuzamos egyenesek és az AC metsző egyenes által keletkezett különböző oldali szögei. Tehát az AOD és a COB háromszögek hasonlók két szögük alapján.

Vagyis $\frac{AD}{BC} = \frac{AO}{CO} = \frac{5}{3}$.



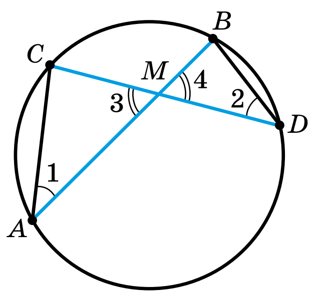
140. ábra



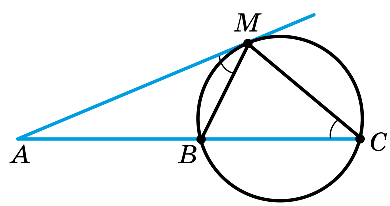
141. ábra

Legyen $BC = 3x$ cm, ekkor $AD = 5x$ cm.
Mivel a trapéz középvonala 24 cm, ezért $BC + AD = 48$ cm.
Vagyis: $3x + 5x = 48$, innen $x = 6$.
Tehát $BC = 18$ cm, $AD = 30$ cm.
Felelet: 18 cm, 30 cm.

2. feladat (az egymást metsző húrok tulajdonsága). Bizonyítsd be, hogyha a körvonal AB és CD húrjai az M pontban metszik egymást, akkor $AM \cdot MB = DM \cdot MC$ (142. ábra)!



142. ábra



143. ábra

Megoldás. Vizsgáljuk meg az ACM és DBM háromszögeket. A 3-as és a 4-es szögek egyenlők, mint csúcsszögek, az 1-es és 2-es szögek egyenlők, mint az egyazon ívre támaszkodó kerületi szögek.Tehát az ACM és DBM háromszögek hasonlók a háromszögek hasonlóságának első ismertetőjele alapján. Vagyis $\frac{AM}{DM} = \frac{MC}{MB}$. Innen $AM \cdot MB = DM \cdot MC$.

3. feladat (az érintő és a metsző egyenes tulajdonsága). Bizonyítsd be, hogyha az A pontból AM érintőt (M az érintési pont) és egy olyan metsző egyenest húzunk, amely a körvonalat B és C pontokban metszi (143. ábra), akkor $AM^2 = AC \cdot AB$!

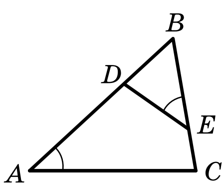
Megoldás. Vizsgáljuk meg az AMB és ACM háromszögeket. Ezeknek az A szögük közös. Az érintő és a metsző közötti szög tulajdonsága alapján (lásd 1. feladat 9. pont) $AMB\angle = \frac{1}{2} MB\cup$. Mivel az MCB kerületi szög az MB húrra támaszkodik, ezért $MCB\angle = \frac{1}{2} MB\cup$. Innen következik, hogy $AMB\angle = MCB\angle$. Tehát az AMB és az ACM háromszögek hasonlók a háromszögek hasonlóságának első ismertetőjele alapján.

Vagyis $\frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM}$. Innen $AM^2 = AC \cdot AB$.

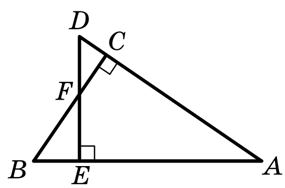
1. Fogalmazd meg a háromszögek hasonlóságának első ismertetőjelét!
2. Fogalmazd meg az egymást metsző húrok tulajdonságát!
3. Fogalmazd meg az egy ponton átmenő érintő és a metsző egyenes tulajdonságát!

GYAKORLATOK

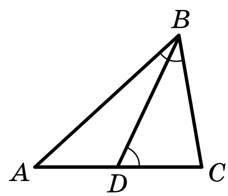
449.° A 144. ábrán a $BAC\angle = BED\angle$. Hasonlóak-e az ABC és EDB háromszögek? Amennyiben igen, akkor nevezd meg a megfelelő oldalpárokat!



144. ábra



145. ábra

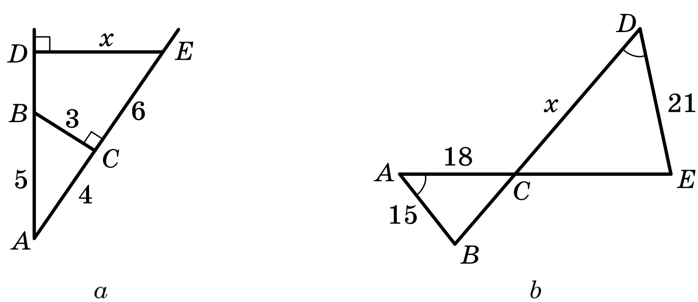


146. ábra

450.° A 145. ábrán a $DE \perp AB$, $BC \perp AD$. Nevezd meg az ábrán látható valamennyi hasonló háromszögpárt!

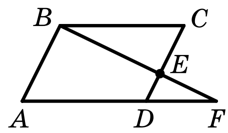
451.° A 146. ábrán az $ABC\angle = BDC\angle$. Mely háromszögek lesznek hasonlók? Írd fel a megfelelő oldalaik arányainak az egyenlőségét!

452.° Nevezd meg a 147. ábrán lévő hasonló háromszögeket! Határozd meg az x értékét (ha a méretek cm-ben vannak megadva)!



147. ábra

453.° Az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögekben ismert, hogy $A\angle = A_1\angle$, $B\angle = B_1\angle$, $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm, $A_1B_1 = = 9$ cm, $A_1C_1 = 18$ cm. Határozd meg az adott háromszögek ismeretlen oldalait!



148. ábra

454.° Az $ABCD$ paralelogramma CD oldalán felvettek egy E pontot (148. ábra), a BE és AD egyenesek az F pontban metszik egymást, $CE = 8$ cm, $DE = 4$ cm, $BE = 10$ cm, $AD = 9$ cm. Határozd meg az EF és FD szakaszok hosszát!

455.° Az $ABCD$ trapézban ($BC \parallel AD$) ismert, hogy $AD = 20$ cm, $BC = 15$ cm, O az átlók metszéspontja, $AO = 16$ cm. Határozd meg az OC szakasz hosszát!

456.° Az $ABCD$ trapézban, melynek az alapjai BC és AD szakaszok, átlói az O pontban metszik egymást. Határozd meg az AD alapját, ha $BO : OD = 3 : 7$, $BC = 18$ cm!

457.° Hasonló-e a két derékszögű háromszög, ha az egyikben van egy 38°-os szög, a másiknak pedig egy 52°-os szöge van?

458.° Bizonyítsd be, hogy két egyenlő szárú háromszög akkor lesz hasonló, ha az alappal szemközti szögeik egyenlők egymással!

459.° Ki lehet-e jelenteni, hogy két egyenlő szárú háromszög hasonló:
1) egyenlő hegyesszögük alapján; 2) derékszögük alapján;
3) egyenlő tompaszögük alapján?

460.° Az egyik egyenlő szárú háromszög alapja és szára közötti szöge egyenlő a másik egyenlő szárú háromszög alapja és szára közötti szögével. Az első háromszög szára és az alapja megfelelően 18 cm-rel és 10 cm-rel egyenlő, a másik alapja pedig 8 cm. Határozd meg a második háromszög szárát!

461.° A háromszög derékszögének csúcsából az átfogóra meghúztuk a magasságot. Hány hasonló háromszög keletkezett ekkor?

462.° A paralelogramma oldalainak hossza 20 cm és 14 cm, a nagyobbik oldalra bocsátott magassága pedig 7 cm. Határozd meg a kisebbik oldalra húzott magasságot!

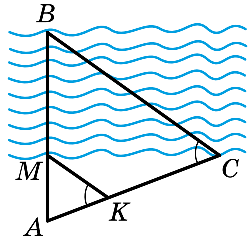
463.• Az $ABCD$ trapéz, melynek alapjai BC és AD, átlóinak metszéspontja az O pont, $BO = 4$ cm, $OD = 20$ cm, $AC = 36$ cm. Határozd meg az AO és OC szakaszok hosszát!

464.• Az $ABCD$ trapézban ($BC \parallel AD$) ismert, hogy $AD = 18$ cm, $BC = 14$ cm, $AC = 24$ cm. Határozd meg azoknak a szakaszoknak a hosszát, amelyeket az AC átló O ponttal történő felosztásakor kapunk!

465.• Bizonyítsd be, hogy a hasonló háromszögek megfelelő csúcsaiból húzott szögfelezők aránya megegyezik a megfelelő oldalai arányával!

466.• Bizonyítsd be, hogy a hasonló háromszögek megfelelő csúcsaiból húzott magasságok aránya megegyezik a megfelelő oldalai arányával!

467.• Az $ABCD$ trapéz, melynek alapjai BC és AD megfelelően 28 cm-rel és 63 cm-rel egyenlők, az $ABC\angle = ACD\angle$. Határozd meg az AC átló hosszát!



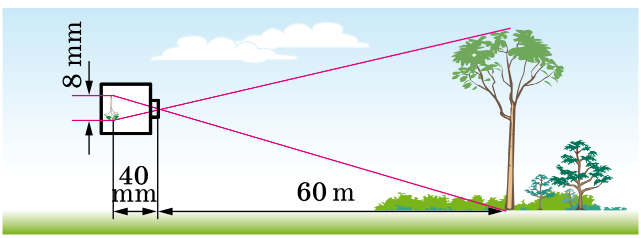
149. ábra

468.• Az ABC háromszög AC oldalán úgy jelölték a D pontot, hogy $ABD\angle = C\angle$, $AB = 20$ cm, $BC = 28$ cm, $AC = 40$ cm. Határozd meg az ABD háromszög ismeretlen oldalait!

469.• A derékszögű háromszög átfogója 20 cm, a nagyobbik befogója pedig 16 cm. Határozd meg azokat a szakaszokat, melyekre az átfogó felezőmerőlegese felossza a nagyobbik befogót!

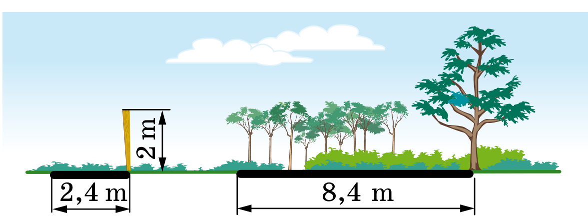
470.• A 149. ábra segítségével magyarázd meg, hogyan lehet meghatározni a folyó BM szélességét, a háromszögek hasonlóságát alkalmazva!

471.• A fa 60 méterre van a fényképezőgép objektívétől, a filmen 8 mm-es lesz a magassága (150. ábra). Az objektív és a kép közötti távolság 40 mm. Milyen magas a fa?



150. ábra

472.• Határozd meg a fa magasságát, ha az árnyékának hossza 8,4 m, a 2 m magas oszlop árnyéka pedig 2,4 m (151. ábra)!



151. ábra

473. Metszheti-e az egyenes az egyenlő szárú háromszög két oldalát úgy, hogy az eredetivel hasonló háromszöget vágjon le belőle, és eközben az egyenes ne legyen párhuzamos a harmadik oldallal?

474. Az AB és CD húrok az M pontban metszik egymást, $AM = 6$ cm, $BM = 14$ cm, $CM = 12$ cm. Határozd meg a DM szakasz hosszát!

475. Az MK és NP húrok az F pontban metszik egymást, $MF = 9$ cm, $KF = 12$ cm, és az NF szakasz 3-szor hosszabb, mint a PF szakasz. Határozd meg az NP húr hosszát!

476. A K pont a körvonal AC húrját felezi, a DE húrt pedig 2 cm-es és 32 cm-es részekre osztja. Határozd meg az AC húr hosszát!

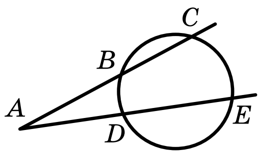
477. Az E pont a körvonal CD húrját 15 cm-es és 16 cm-es részekre osztja. Határozd meg a kör sugarát, ha az E pont a kör középpontjától 4 cm távolságra lesz!

478. A P pont a körvonal MK húrját 8 cm-es és 12 cm-es részekre osztja. Határozd meg a P pont és a kör középpontja közötti távolságot, ha a kör sugara 11 cm!

479. Az A pontból a körhöz AM érintőt húztunk (M az érintési pont) és egy olyan metsző egyenest, amely a körvonalat K és P pontokban metszi (a K pont az A és a P pontok között van). Határozd meg a KP szakasz hosszát, ha $AM = 12$ cm, $AP = 18$ cm!

480. A körön kívüli A ponton keresztül két egyenest húztak, az egyik érinti a körvonalat egy B pontban, a másik pedig C és D pontokban metszi a kört (a C pont az A és D pontok között helyezkedik el), $AB = 18$ cm, $AC : CD = 4 : 5$. Határozd meg az AD szakasz hosszát!

481. A körön kívüli A ponton keresztül két egyenest húztak. Az egyik B és C pontokban (a B pont az A és C pontok között helyezkedik el), a másik pedig D és E pontokban (a D pont az A és E pontok között helyezkedik el) metszi a kört.



152. ábra

1) Bizonyítsd be, hogy $AB \cdot AC = AD \cdot AE$.

2) Határozd meg az AE szakasz hosszát, ha $AB = 18$ cm, $BC = 12$ cm és $AD : DE = 5 : 7$!

482. A körben, melynek sugara 8 cm, AB húrt húztak. Az AB egyenesen az AB szakaszon kívül úgy jelöltek egy C pontot, hogy $AC : BC = 1 : 4$. Határozd meg a C pont és a kör középpontja közötti távolságot, ha $AB = 9$ cm!

483. Az ABC háromszögbe úgy írtak egy négyzetet, hogy ennek a szomszédos csúcsai az AC oldalra illeszkednek, a két másik pedig megfelelően az AB és AC oldalakra. Határozd meg a négyzet oldalát, ha $AC = a$, az AC oldalra bocsátott magassága pedig h-val lesz egyenlő!

484.•• Az ABC háromszögben ismert, hogy $BC = 72$ cm, az AD magasság pedig 24 cm. Ebbe a háromszögbe egy $MNKP$ téglalap van írva, melynek M és P csúcsai a BC oldalra illeszkednek, az N és K megfelelően az AB és AC oldalakra. Határozd meg a téglalap oldalait, ha $MP : MN = 9 : 5$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

485. Határozd meg a paralelogramma szögeit, ha az egy csúcsból húzott magasságai közötti szöge: 1) 20°; 2) 130°!

486. Két körvonal, melynek sugarai egyenlők, középpontjai pedig az O_1 és O_2 pontok, az A és B pontokban metszik egymást. Az O_1O_2 szakasz a körvonalakat a C és D pontokban metszi. Bizonyítsd be, hogy az $ACBD$ négyszög rombusz!

487. A derékszögű trapéz egyik szöge 135°, a középvonala 21 cm, az alapjainak aránya pedig 5 : 2. Határozd meg a trapéz kisebbik szárát!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

488. Hogyan kell két egyforma domború négyszöget úgy részekre darabolni, hogy ezekből a részekből paralelogrammát lehessen összerakni?

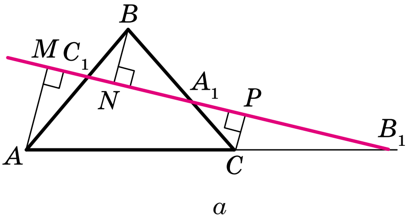
MENELAOSZ-TÉTEL

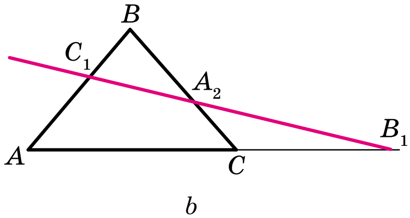
Azokat a pontokat, amelyek egy egyenesre illeszkednek, **kollineáris** pontoknak nevezzük. Két pont mindig kollineáris lesz.

A következőkben megismerkedtek egy olyan tétellel, amely három pont kollinearitásának kritériuma. Ez a tétel egy ógörög matematikus és csillagász, Alexandriai Menelaosz (i. u. I–II. sz.) nevét viseli.

Menelaosz-tétel. ***Az ABC háromszög AB és AC oldalán megfelelően a C_1 és A_1 pontokat jelölik, az AC oldal meghosszabbításán pedig a B_1 pontot. Ahhoz, hogy az A_1, B_1, C_1 pontok egy egyenesre illeszkedjenek, szükséges és elégséges, hogy a következő egyenlőség teljesüljön:***

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (*)$$





153. ábra

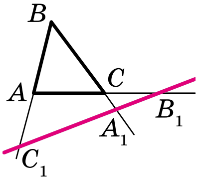
Bizonyítás. Először bebizonyítjuk a kollinearitás szükséges feltételét: ha az A_1, B_1, C_1 pontok egy egyenesre illeszkednek, akkor teljesül a (*) egyenlőség.

Az ABC háromszög csúcsaiból AM, BN és CP merőlegeseket bocsátunk a C_1B_1 egyenesre (153. *a* ábra). Mivel az $MC_1A\angle = NC_1B\angle$, ezért az AMC_1 és BNC_1 háromszögek hasonlók a háromszögek hasonlóságának első ismertetőjele alapján. Innen $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AM}{BN}$. A BNA_1 és a CPA_1 háromszögek hasonlóságából kapjuk a $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BN}{CP}$ egyenlőséget. A B_1CP és a B_1AM háromszögek hasonlóságából pedig a $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CP}{AM}$ egyenlőséget kapjuk meg. Az $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AM}{BN}$, $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BN}{CP}$, $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CP}{AM}$ aránypárok bal és jobb oldalát tagonként összeszorozva a következő egyenlőséget kapjuk: $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AM}{BN}\cdot\frac{BN}{CP}\cdot\frac{CP}{AM}=\mathbf{1}.$

Most a kollinearitás elégséges feltételét bizonyítjuk be: ha teljesül a (*), akkor az A_1, B_1, C_1 pontok egy egyenesre illeszkednek.

A C_1B_1 egyenes metszi az ABC háromszög BC oldalát egy A_2 pontban (153. *b* ábra). Mivel a C_1, A_2, B_1 pontok egy egyenesre illeszkednek, ezért a fentebb bizonyítottból következik, hogy $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\mathbf{1}.$

Összehasonlítva ezt az egyenlőséget a (*)-gal, arra a következtetésre jutunk, hogy $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BA_2}{A_2C}$, vagyis az A_2 és A_1 pontok ugyanolyan arányban osztják a BC szakaszt, tehát ezek a pontok egybeesnek. Ebből következik, hogy a C_1B_1 egyenes az A_1 pontban metszi a BC egyenest. ▲

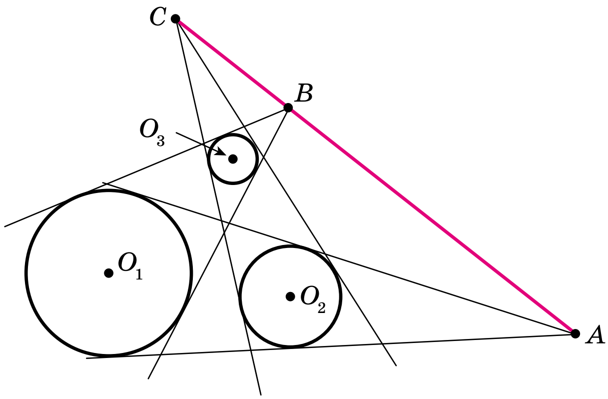


154. ábra

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a tétel akkor is érvényes, ha az A_1, B_1, C_1 pontok nem az ABC háromszög oldalaira, hanem az oldal egyeneseire illeszkednek (154. ábra).

GYAKORLATOK

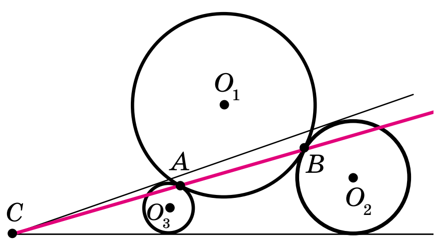
1. Három kör közös érintői az A, B, C pontokban metszik egymást (155. ábra). Bizonyítsd be, hogy ezek a pontok kollineárisak!
Útmutatás. Alkalmazd a Menelaosz-tételt az $O_1O_2O_3$ háromszögre és az A, B, C pontokra, melyek az oldal egyeneseihez illeszkednek!



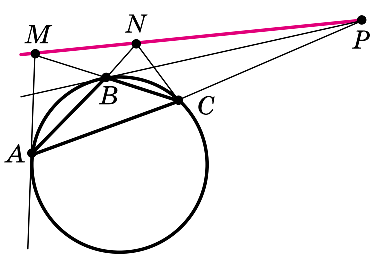
155. ábra

2. Az O_1 középpontú körvonal a B és az A pontokban érinti azt a két körvonalat, melynek középpontjai O_2 és O_3 pontok (156. ábra). Bizonyítsd be, hogy a C pont, amely az O_2 és O_3 középpontú körvonalak közös érintőinek a metszéspontja, az AB egyeneshez illeszkedik!

3. Az A, B, C pontokon át a körhöz érintőket húznak (157. ábra). Bizonyítsd be, hogy az M, N és P pontok kollineárisak!
Útmutatás. Alkalmazzuk Menelaosz tételét az ABC háromszögre, és a 13. pont 3. kulcsos feladatát!



156. ábra



157. ábra

4. Az egyenes metszi az ABC háromszög AB és BC oldalait és az AC oldalát tartalmazó egyenest megfelelően a D, E, F pontokban. Bizonyítsd be, hogy a DC, AE, BF szakaszok felezőpontjai egy egyeneshez illeszkednek (ezt az egyenest *Gauss egyenesé*nek nevezik).
Útmutatás. Alkalmazzuk Menelaosz tételét arra a háromszögre, melynek csúcsai az ABC háromszög oldalainak a felezőpontjai lesznek!

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

Kiemelkedő német matematikus, csillagász, fizikus és geodéta. A munkásságában egyesítette az elméleti és a gyakorlati matematikai kutatásokat. Gauss munkái nagy befolyással voltak az algebra, a számelmélet, a geometria, az elektromosság és mágnesesség elméletének fejlődésére.

PTOLEMAIOSZ-TÉTEL

Ptolemaiosz-tétel. ***A körbe írt négyszög (húrnégyszög) átlóinak a szorzata egyenlő a szemközti oldalak szorzatainak összegével.***

Bizonyítás. A 158. ábrán az $ABCD$ körbe írt négyszög látható. Bebizonyítjuk, hogy $AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AC$.

Klaudiosz Ptolemaiosz
(kb. 100 – kb. 178)

Ókori görög matematikus és csillagász. A geocentrikus világkép megteremtője. Matematikai elméletet dolgozott ki az égitestek, bolygók mozgásáról, amely lehetővé tette a bolygók helyének meghatározását. A korszerű koordináta-rendszer alapjainak megteremtője.

Az AC átlón megjelölünk egy K pontot úgy, hogy $1\angle = 2\angle$. A 3-as és 4-es szögek egyenlők, mint az azonos ívre támaszkodó kerületi szögek. Tehát az ABK és DBC háromszögek hasonlók a háromszögek hasonlóságának első ismertetőjele alapján (3-as és 4-es szögek egyenlők, mint az azonos ívre támaszkodó kerületi szögek). Innen $\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{DC}$, vagyis

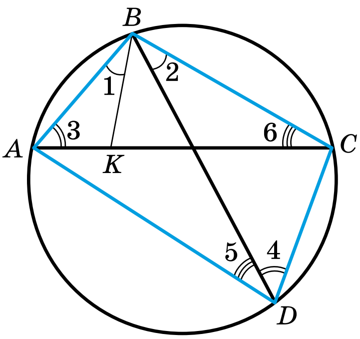
$$AB \cdot DC = BD \cdot AK. \qquad (1)$$

Mivel $1\angle = 2\angle$, ezért $ABD\angle = KBC\angle$. Az 5-ös és 6-os szögek egyenlők, mint azonos ívre támaszkodó kerületi szögek. Ezért a $KBC\Delta \sim ABD\Delta$. Innen következik, hogy $\frac{BC}{BD} = \frac{KC}{AD}$, vagyis

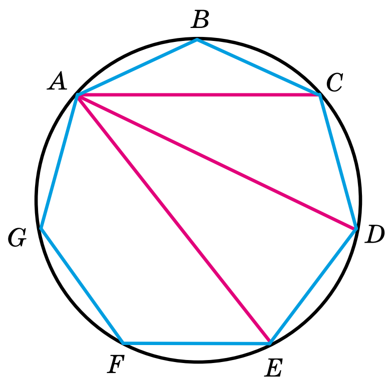
$$BC \cdot AD = BD \cdot KC. \qquad (2)$$

Összeadva az (1) és (2) egyenlőségeket, a következőt kapjuk:
$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD \cdot AK + BD \cdot KC$, vagyis

$$AB \cdot DC + BC \cdot AD = BD\,(AK + KC) = BD \cdot AC. \ \blacktriangle$$



158. ábra



159. ábra

GYAKORLATOK

1. Legyen M az ABC egyenlő oldalú háromszög köré írt körének tetszőleges pontja. Bizonyítsd be, hogy az MA, MB, MC szakaszok közül az egyik egyenlő a másik kettő összegével!
2. Az A, B, C, D pontok a körvonal olyan pontjai, melyre teljesül az $AB\cup = BC\cup = CD\cup$ egyenlet. Bizonyítsd be, hogy $AC^2 = AB \cdot (BC + AD)$!
3. A 159. ábrán a körbe egy $ABCDEFG$ hétszög van írva. Bizonyítsd be, hogy $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{1}{AB}$.

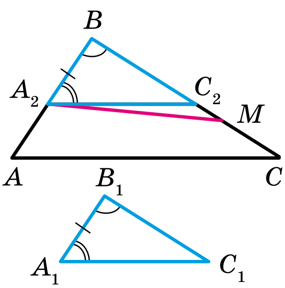
14. A háromszögek hasonlóságának 2. és 3. ismertetőjele

14.1. tétel (a háromszögek hasonlóságának második ismertetőjele: két oldaluk és a közbezárt szögük által). ***Ha az egyik háromszög két oldala arányos a másik háromszög két oldalával, és az ezen oldalak által bezárt szögek egyenlők, akkor ezek a háromszögek hasonlók.***

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögeket, melyekben az $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$ és $B\angle = B_1\angle$. Bebizonyítjuk, hogy $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$.

Ha $k = 1$, akkor az $AB = A_1B_1$ és $BC = B_1C_1$, tehát az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek egybevágók a háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele alapján, ezért a háromszögek hasonlók is.

Legyen például $k > 1$, vagyis $AB > A_1B_1$ és $BC > B_1C_1$. A BA és BC oldalakon felvesszük az A_2 és C_2 pontokat úgy, hogy $BA_2 = A_1B_1$ és $BC_2 = B_1C_1$ (160. ábra). Ekkor $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$.



160. ábra

Bebizonyítjuk, hogy $A_2C_2 \parallel AC$. Feltételezzük az ellenkezőjét. Ekkor a BC oldalon jelölünk egy M pontot úgy, hogy $A_2M \parallel AC$. Ebből azt kapjuk, hogy $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BM}$. De $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2}$, ekkor $\frac{BC}{BC_2} = \frac{BC}{BM}$, vagyis a $BC_2 = BM$. Tehát az M és C_2 pontokkal ugyanaz a pont van jelölve. Vagyis $A_2C_2 \parallel AC$.

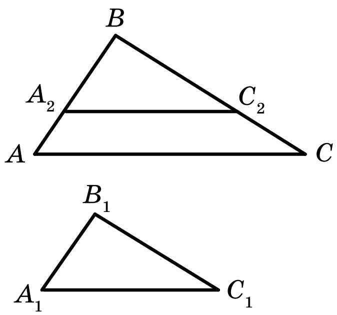
A hasonló háromszögekről szóló lemmából kapjuk, hogy $ABC\Delta \sim A_2BC_2\Delta$. Az A_2BC_2 és az $A_1B_1C_1$ háromszögek egybevágók a háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele alapján. Ebből következik, hogy $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$. ▲

14.2. tétel (a háromszögek hasonlóságának harmadik ismertetőjele: három oldala alapján). ***Ha az egyik háromszög három oldala arányos a másik háromszög három oldalával, akkor az ilyen háromszögek hasonlóak lesznek.***

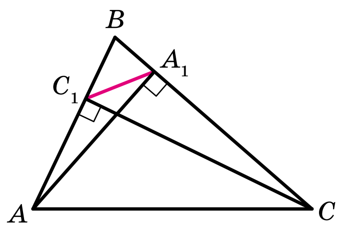
Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögeket, melyekben az $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$. Bebizonyítjuk, hogy $ABC\Delta \sim A_1B_1C_1\Delta$.

Ha $k = 1$, akkor az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek egybevágók a háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjele alapján, ezért a háromszögek hasonlók is.

Legyen például $k > 1$. A BA és BC oldalakon felvesszük az A_2 és C_2 pontokat úgy, hogy $BA_2 = A_1B_1$ és $BC_2 = B_1C_1$ (161. ábra). Ekkor $\frac{AB}{BA_2} = \frac{BC}{BC_2} = k$. Az ABC és A_2BC_2 háromszögeknek a B szöge közös, és a szög szárain lévő oldalak arányosak a száraival. Tehát a háromszögek hasonlóságának második ismertetőjele alapján ezek a háromszögek hasonlók, és a hasonlósági együttható k. Ekkor $\frac{CA}{C_2A_2} = k$. Figyelembe véve a feltételt $\frac{CA}{C_1A_1} = k$ azt kapjuk, hogy $A_1C_1 = A_2C_2$. Tehát az A_2BC_2 és az $A_1B_1C_1$ háromszögek egybevágóak a háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjele alapján. Mivel az $ABC\Delta \backsim A_2BC_2\Delta$, ebből arra következtetünk, hogy $ABC\Delta \backsim A_1B_1C_1\Delta$. ▲



161. ábra



162. ábra

Feladat. Bizonyítsd be, hogy a hegyesszögű háromszög magasságainak talppontjait összekötő szakasz az eredeti háromszöggel hasonló háromszöget metsz ki belőle!

Megoldás. A 162. ábrán az AA_1 és CC_1 szakaszok az ABC háromszög magasságai. Be kell bizonyítani, hogy $A_1BC_1\Delta \backsim ABC\Delta$!

Az ABA_1 és CBC_1 derékszögű háromszögekben a B hegyesszög közös. Tehát az ABA_1 és CBC_1 háromszögek hasonlók a háromszögek hasonlóságának első ismertetőjele alapján. Innen következik, hogy $\frac{AB}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$. Ebből következik, hogy $\frac{AB}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$. A B szög az ABC és az A_1BC_1 háromszögek közös szöge. Tehát az ABC és az A_1BC_1 háromszögek hasonlók a háromszögek hasonlóságának második ismertetőjele alapján. ●

1. Fogalmazd meg a háromszögek hasonlóságának második ismertetőjelét!
2. Fogalmazd meg a háromszögek hasonlóságának harmadik ismertetőjelét!

GYAKORLATOK

489.° Az A szög egyik szárára AB és AD szakaszokat, a másik szárra pedig AC és AE szakaszokat mértünk fel. Hasonlóak-e az ABC és ADE háromszögek, ha $AB = 4$ cm, $AD = 20$ cm, $AC = 10$ cm, $AE = 8$ cm?

490.° Az ABC háromszög AB és AC oldalain megfelelően D és E pontokat vettünk fel (163. ábra) úgy, hogy $AD = \frac{4}{7}AC$, $AE = \frac{4}{7}AB$. Határozd meg a DE szakasz hosszát, ha $BC = 21$ cm!

491.° Az ABC háromszögben ismert, hogy $AB = 21$ cm, $AC = 42$ cm, $BC = 28$ cm (164. ábra). Az AB és BC oldalainak a B ponton túli meghosszabbítására BM és BK szakaszokat mértünk, $BM = 8$ cm, $BK = 6$ cm. Határozd meg a KM szakasz hosszát!

492.° Az AB és a CD szakaszok az O pontban metszik egymást (165. ábra), $AO = 24$ cm, $BO = 16$ cm, $CO = 15$ cm, $OD = 10$ cm, $ACO\angle = 72°$. Határozd meg a BDO szöget!

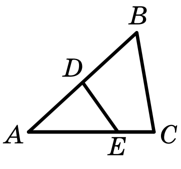
493.° Az ABC háromszög AC és BC oldalaira megfelelően M és K pontokat vettek fel úgy, hogy $CM = 15$ cm, $CK = 12$ cm. Határozd meg az MK szakasz hosszát, ha $AC = 20$ cm, $BC = 25$ cm, $AB = 3$ cm!

494.° Hasonlóak-e az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögek, ha:
1) $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm, $AC = 14$ cm, $A_1B_1 = 9$ cm, $B_1C_1 = 15$ cm, $A_1C_1 = 21$ cm?
2) $AB = 1{,}3$ cm, $BC = 2{,}5$ cm, $AC = 3{,}2$ cm, $A_1B_1 = 26$ cm, $B_1C_1 = 50$ cm, $A_1C_1 = 60$ cm?

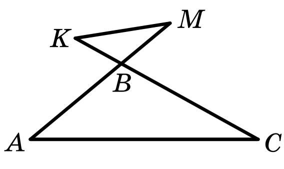
495.° Hasonló-e a két háromszög, ha az egyik oldalai úgy aránylanak egymáshoz, mint 3 : 8 : 9, a másik háromszög oldalai pedig 24 cm, 9 cm, 27 cm-rel egyenlők?

496.• Az ABC és az $A_1B_1C_1$ háromszögekben ismert, hogy $A\angle = A_1\angle$, az AB és AC oldalak mindegyike 0,6-od része az A_1B_1 és A_1C_1 oldalaknak. Határozd meg a BC és B_1C_1 oldalak hosszát, ha ezek összege 48 cm!

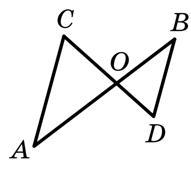
497.• A DEF és MKN háromszögekben ismert, hogy $E\angle = K\angle$, a DE és EF oldalak mindegyike 2,5-szerese megfelelően az MK és KN oldalaknak. Határozd meg a DF és MN oldalakat, ha ezek különbsége 30 cm!



163. ábra



164. ábra



165. ábra

498.• Az ABC háromszög AB és AC oldalain úgy vették fel a D és F pontokat, hogy $AD : DB = AE : EC = 3 : 5$. Határozd meg a DE szakasz hosszát, ha $BC = 16$ cm!

499.• Fapálcikákból három hasonló háromszöget készítettek. Mindegyikben a legnagyobb oldalt kék színűre, a legkisebbet pedig sárga színűre festették. A kék színű pálcikákból egy háromszöget alkottak, a sárgákból pedig egy másikat. Hasonlók-e ezek a háromszögek?

500.•• Az ABC háromszögben adott, hogy $AC = a$, $AB = BC = b$, AM és CK pedig a háromszög szögfelezői. Határozd meg az MK szakasz hosszát!

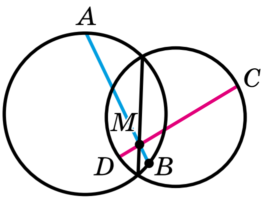
501.•• Az ABC háromszögben adott, hogy $AB = 8$ cm, $BC = 12$ cm, $AC = 16$ cm. Az AC oldalon jelöltek egy D pontot úgy, hogy $CD = 9$ cm. Határozd meg a BD szakasz hosszát!

502.* Az A pontból két, AM és AN félegyenest húztak. Az AM félegyenesen H és B pontokat jelöltek, az AN félegyenesen pedig C és D pontokat úgy, hogy $AH \cdot AB = AC \cdot AD$. Bizonyítsd be, hogy a H, B, C és D pontok egy körvonalra illeszkednek!

503.* Az ABC háromszög BM oldalfelezőjén felvettek egy K pontot úgy, hogy $MKC\angle = BCM\angle$. Bizonyítsd be, hogy $AKM\angle = BAM\angle$!

504.* Az AB és CD szakaszok az M pontban metszik egymást. Ismert, hogy $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Bizonyítsd be, hogy az A, B, C és D pontok egy körvonalra illeszkednek!

505.* Két egymást metsző körvonal közös húrján jelöltek egy M pontot és ezen a ponton keresztül AB és CD húrokat húztak (166. ábra). Bizonyítsd be, hogy $DAB\angle = BCD\angle$!



166. ábra

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

506. Az $ABCD$ paralelogramma kerülete 46 cm. $BAD\angle = ADB\angle$. Határozd meg a paralelogramma oldalait, ha a BCD háromszög kerülete 32 cm!

507. Az $ABCD$ négyzet BD átlóján jelöltek egy F pontot úgy, hogy $DE = AD$. Az E ponton át egy egyenest húztak, amely merőleges a BD egyenesre és az AB oldalt az F pontban metszi. Bizonyítsd be, hogy $AF = FE = BE$!

508. Az $ABCD$ trapézban adott, hogy $B\angle = 90°$, $C\angle = 150°$, $BC = 5$ cm. Határozd meg a CD oldal hosszát, ha a trapéz C csúcsából bocsátott magassága a trapézt egy háromszögre és egy négyzetre osztja!

Elevenítsétek fel a 7. pontban (186. oldal) és a 17. pontban (190. oldal) foglaltakat!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

509. A körvonalon 999 pontot kék színnel jelöltek, egy pontot pedig pirossal. Olyan sokszögeket rajzoltak a körbe, melynek csúcsai a jelölt pontok lesznek. Melyik sokszögből van több, olyanokból melyeknek a csúcsai között piros színű csúcs is van, vagy olyanokból, melyekben nincs piros csúcs?

EULER-EGYENES

A háromszög oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja a háromszög köré írt körvonal középpontja, melyet O betűvel jelölünk.

A háromszög szögfelezőinek metszéspontja a háromszögbe írt körvonal középpontja, melyet J betűvel jelölünk.

A háromszög magasságait tartalmazó egyeneseknek a metszéspontját **magasságpont**nak nevezzük. Ezt H betűvel jelöljük.

A háromszög súlyvonalainak metszéspontját a háromszög **súlypontjá**nak nevezzük. Ezt M betűvel jelöljük.

Az O, J, H, M pontokat a háromszög **különleges (csodálatos) pontjai**nak nevezzük. Ezen emocionális jelző alkalmazása ezekre a pontokra teljesen indokolt, mert ezek a pontok sok szép tulajdonsággal rendelkeznek. Már az is egy csoda, hogy bármilyen háromszögnek vannak ilyen pontjai.

Megvizsgálunk a sok közül egy ilyen tételt, amely a háromszög csodálatos pontjairól szól.

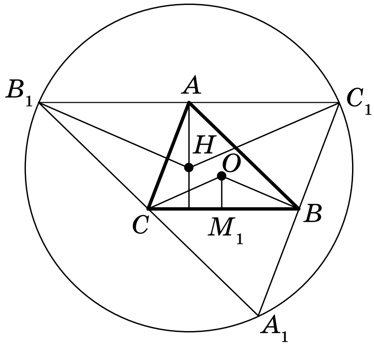
Tétel. ***Bármilyen háromszögben a köré írt körvonal középpontja, súlypontja és a magasságpontja egy egyenesbe esik.***

Ezt az egyenest **Euler-egyenes**nek nevezzük.

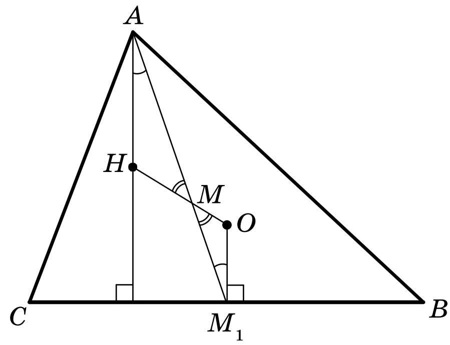
Bizonyítás. Az egyenlő szárú háromszög esetében a bizonyítandó állítás szemmel látható.

Leonhard Euler
(1707–1783)

Kiemelkedő matematikus, fizikus, csillagász.



167. ábra



168. ábra

Ha az adott ABC háromszög derékszögű ($C\angle = 90°$), akkor C lesz a magasságpontja, a körülírt kör középpontja pedig az AB átfogó felezőpontja. Nyilvánvaló, hogy a tételben felsorolt három pont az átfogóra bocsátott súlyvonalra fog illeszkedni.

Bebizonyítjuk a tételt a hegyesszögű különböző oldalú háromszögekre is.

Lemma. ***Ha H az ABC háromszög magasságainak a metszéspontja, OM_1 pedig a körülírt körvonal O középpontjából a BC oldalra bocsátott merőleges, akkor $AH = 2OM_1$*** (167. ábra).

Bizonyítás. Elvégzünk egy kiegészítő szerkesztést a már általatok ismert 2. pontbeli kulcsos feladat megoldásánál: az ABC háromszög minden csúcsán át a szemközti oldalakkal párhuzamos egyeneseket fektetünk. Az $A_1B_1C_1$ háromszöget kapjuk (167. ábra). A kulcsos feladatban már bizonyított, hogy az ABC háromszög H magasságpontja az $A_1B_1C_1$ háromszög köré írt körének a középpontja. Ebben a körben a B_1HC_1 szög középponti szög, a B_1AC_1 pedig kerületi szög. Mivel mindkét szög egy és ugyanarra a húrra támaszkodik, ezért $B_1HC_1\angle = 2B_1A_1C_1\angle$. A BAC és $B_1A_1C_1$ szögek egyenlők, mint az ABA_1C paralelogramma szemközti szögei, ezért $BOC\angle = 2BAC\angle = 2B_1A_1C_1\angle = B_1HC_1\angle$. Mivel a $B_1C_1 = 2BC$, ezért a B_1HC_1 és a COB háromszögek hasonlóak, a hasonlósági koefficiens pedig 2. Mivel az AH és OM_1 szakaszok a hasonló háromszögek megfelelő magasságai, ezért $AH = 2OM_1$.

Bebizonyítjuk most az alaptételt.

Mivel az M_1 pont az ABC háromszög BC oldalának a felezőpontja, ezért az AM_1 az ABC háromszög súlyvonala (168. ábra). Legyen M az AM_1 és HO szakaszok metszéspontja. Mivel $AH \parallel OM$, ezért a $HAM\angle = OM_1M\angle$. Az AMH és M_1MO szögek egyenlők, mint csúcsszögek.

Tehát a HAM és OM_1M háromszögek hasonlók a háromszögek hasonlóságának első ismertetőjele alapján. Innen következik, hogy $\frac{AM}{MM_1} = \frac{AH}{OM_1} = 2$. Tehát az M pont az AM_1 súlyvonalat 2 : 1 arányban osztja az A ponttól számítva. Vagyis az M pont az ABC háromszög súlypontja.

A tompaszögű háromszög esetében a tétel bizonyítása hasonlóan történik. ▲

Figyeljetek fel arra is, hogy nemcsak azt bizonyítottuk be, hogy az O, M, H pontok egy egyeneshez illeszkednek, de bebizonyítottuk azt is, hogy

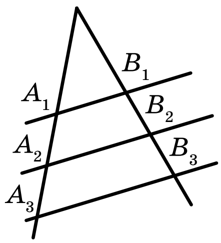
$$HM = 2MO,$$

amely a háromszög csodálatos pontjainak egy másik tulajdonsága!

GYAKORLATOK

1. Adott két pont, melyek az adott egyeneshez képest egy félsíkban helyezkednek el. Szerkessz háromszöget, melynek egyik oldala az egyenesen fekszik, valamint a körülírt kör középpontja és a magasságpontja az adott pontok lesznek!
2. Szerkessz ABC háromszöget három adott pontja alapján: az A csúcsa, a H magasságpontja és a körülírt kör O középpontja!
3. Az ABC hegyesszögű háromszög A szögfelezője merőleges a háromszög Euler egyenesére. Bizonyítsd be, hogy az $A\angle = 60°$!
   Útmutatás. Bizonyítsd be, hogy $HA = OA$!

2. SZ. FELADATSOR. ÖNELLENŐRZŐ FELADATOK, TESZTEK



169. ábra

1. A 169. ábrán $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_1A_2 = \frac{1}{2}$ A_1A_3. Ebből következik, hogy:

A) $A_1A_2 = B_1B_2$; C) $A_1A_3 = B_1B_3$;

B) $B_1B_3 = 2B_2B_3$; D) $A_1A_2 = B_2B_3$.

2. Az ABC háromszög AA_1 és BB_1 súlyvonalai az M pontban metszik egymást. A következő egyenlőségek közül melyik igaz egy tetszőleges ABC háromszögre?

A) $AM : MB_1 = BM : MA_1$;

B) $MA_1 = \frac{1}{3}MB$;

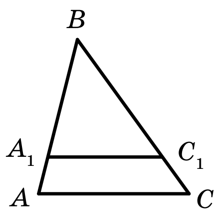
C) $MA_1 = \frac{1}{2}AM$;

D) $MB_1 = \frac{1}{2}BB_1$.

3. A 170. ábrán $A_1C_1 \parallel AC$. Ekkor:

A) $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{BA_1}{A_1A}$; C) $\frac{BC}{BC_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$;

B) $\frac{BA_1}{AB} = \frac{CB}{BC_1}$; D) $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BA_1}{AB}$.



170. ábra

4. Az ABC háromszögben adott, hogy $AB = 8$ cm, $BC = 4$ cm, $AC = 9$ cm. Milyen arányban osztja a BB_1 szögfelezőt a beírt kör középpontja a B csúcstól számítva?

A) 2 : 3; C) 4 : 3;

B) 2 : 1; D) 3 : 4.

5. Az $ABCD$ paralelogramma BC oldalának M pontján át a CD egyenessel párhuzamosan egy egyenest húztak. Ez az egyenes a BD és AD szakaszokat megfelelően K és F pontokban metszi. Adott, hogy $BM : FD = 2 : 1$. Mivel egyenlő a $KD : BK$ arány?

A) 2 : 1; C) 1 : 3;

B) 1 : 2; D) 4 : 1.

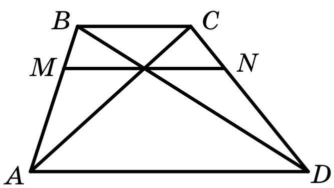
6. Az ABC háromszögben adott, hogy $AB = 14$ cm, $BC = 21$ cm. Az AB oldalon az A csúcstól 4 cm-re D pontot jelöltek, melyen keresztül az AC oldallal párhuzamos egyenest húztak. Határozd meg, milyen szakaszokra osztja ez az egyenes a BC oldalt!

A) 12 cm, 9 cm; C) 15 cm, 6 cm;

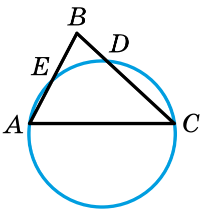
B) 18 cm, 3 cm; D) 14 cm, 7 cm.

7. Az $ABCD$ trapéz átlóinak metszéspontján át MN szakaszt húztak, amely párhuzamos az alapjaival (171. ábra). Hány hasonló háromszög látható a rajzon?

A) 4; B) 6; C) 3; D) 5.



171. ábra



172. ábra

8. A nem egyenlő szárú ABC háromszög A és C csúcsán át körvonalat húztak, amely a BA és BC oldalakat megfelelően E és D pontokban metszi (172. ábra). Melyik igaz a következő egyenlőségek közül?

A) $\frac{BC}{BD} = \frac{BA}{BC}$; B) $\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA}$; C) $\frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC}$; D) $\frac{BD}{DE} = \frac{BC}{AC}$.

9. Az AB húr a CD húrt a felezőpontjában metszi, és a metszésponttal 4 cm-es és 25 cm-es szakaszokra osztódik. Határozd meg a CD húr hosszát!

A) 10 cm; C) 100 cm;
B) 5 cm; D) 20 cm.

10. Az ABC háromszögben adott, hogy $AB = 10$ cm, $BC = 4$ cm, $CA = 8$ cm. Az AC oldalán egy D pontot jelöltek úgy, hogy $AD = 6$ cm. Határozd meg a BD szakasz hosszát!

A) 5 cm; C) 6 cm;
B) 4 cm; D) 7 cm.

A 2. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Thalész-tétel

Ha a szög szárait metsző párhuzamos egyenesek a szög egyik szárából egyenlő szakaszokat metszenek ki, akkor a másik szárból is egyenlő szakaszokat fognak kimetszeni.

Az arányos szakaszok tétele

Ha a szög szárait párhuzamos egyenesek metszik, akkor az egyik száron keletkezett szakaszok megfelelően arányosak a másik száron keletkezett szakaszokkal.

A háromszög súlyvonalainak tulajdonsága

A háromszög mindhárom súlyvonala egy pontban metszi egymást, és ez a pont mindegyik súlyvonalat a háromszög csúcsától számítva 2 : 1 arányban osztja.

A háromszög szögfelezőinek tulajdonsága

A háromszög szögfelezője a háromszög oldalát a szomszédos oldalak arányában osztja.

Hasonló háromszögek

Két háromszöget hasonlónak mondunk, ha a szögei megfelelően egyenlők egymással, és az egyik háromszög oldalai a másik háromszög megfelelő oldalaival arányosak.

Lemma a háromszögek hasonlóságáról

Az az egyenes, amely párhuzamos a háromszög egyik oldalával és a másik két oldalt metszi, az eredeti háromszögből egy vele hasonló háromszöget metsz ki.

A háromszögek hasonlóságának első ismertetőjele

Ha az egyik háromszög két szöge egyenlő a másik háromszög két szögével, akkor az ilyen háromszögek hasonlók.

A háromszögek hasonlóságának második ismertetőjele

Ha az egyik háromszög két oldala arányos a másik háromszög két oldalával, és ezen oldalak által bezárt szögek egyenlők, akkor ezek a háromszögek hasonlók.

A háromszögek hasonlóságának harmadik ismertetőjele

Ha az egyik háromszög három oldala arányos a másik háromszög három oldalával, akkor az ilyen háromszögek hasonlók.

3.§. A DERÉKSZÖGŰ HÁROMSZÖGEK MEGOLDÁSA

Ebben a paragrafusban megismerkedtek a híres Pitagorasz-tétellel. Megtanuljátok a derékszögű háromszög ismert oldalai és szögei alapján meghatározni az ismeretlen oldalait és szögeit.

15. Metrikus összefüggések a derékszögű háromszögben

A 173. ábrán a CD szakasz az ABC derékszögű háromszög magassága ($ACB\angle = 90°$).

Az AD és DB szakaszokat az AC és CB befogók **vetületei**nek nevezzük.

Lemma. ***A derékszögű háromszög átfogójára bocsátott magassága a háromszöget két hasonló háromszögre osztja, melyek közül mindegyik hasonló az eredeti háromszöggel.***

Bizonyítsd be önállóan ezt a lemmát!

15.1. tétel. ***A derékszögű háromszög átfogójára bocsátott magasságának négyzete a befogók átfogóra eső vetületeinek szorzatával egyenlő (magasságtétel). A befogó négyzete az átfogó és ennek a befogónak az átfogóra eső vetületének a szorzatával lesz egyenlő (befogótétel).***

Bizonyítás. A 173. ábrán a CD szakasz az ABC derékszögű háromszög magassága ($ACB\angle = 90°$). Bebizonyítjuk, hogy $CD_2 = AD \cdot DB$, $AC_2 = AB \cdot AD$, $BC_2 = AB \cdot DB$.

$$CD^2 = AD \cdot DB,\ AC^2 = AB \cdot AD,\ BC^2 = AB \cdot DB.$$

Mivel $CBD\Delta \sim ACD\Delta$, ezért $\frac{CD}{AD} = \frac{BD}{CD}$. Innen megkapjuk, hogy $CD^2 = AD \cdot DB$.

Mivel $ABC\Delta \sim ACD\Delta$, ezért $\frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC}$. Innen megkapjuk, hogy $AC^2 = AB \cdot AD$.

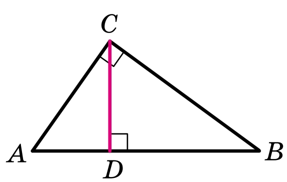
Mivel $ABC\Delta \sim CBD\Delta$, ezért $\frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BC}$. Innen megkapjuk, hogy $BC^2 = AB \cdot DB$. ▲

Jelöljük a 173. ábrán lévő szakaszokat a következőképpen: $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $CD = h_c$, $AD = b_c$, $DB = a_c$! Ekkor a bebizonyított összefüggések a következőképpen írhatók fel:

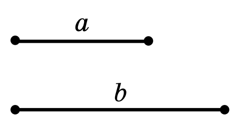
$$\boxed{h_c^2 = a_c b_c,\ a^2 = a_c c,\ b^2 = b_c c}.$$

Ezeket az egyenlőségeket a **derékszögű háromszögekre vonatkozó arányossági tételek**nek nevezzük.

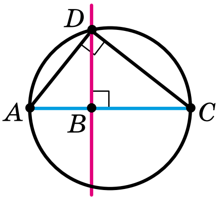
Példa. Adott két szakasz, melyeknek hossza a és b (174. ábra). Rajzolj egy harmadik szakaszt, melynek hossza $\sqrt{ab}$!



173. ábra



174. ábra



175. ábra

Megoldás. Megvizsgáljuk az ADC háromszöget ($ADC\angle = 90°$), melyben a DB szakasz a háromszög magassága (175. ábra)! Tehát $DB = \sqrt{AB \cdot BC}$. Ha $AB = a$, $BC = b$, akkor $DB = \sqrt{ab}$.

A fenti gondolatmenet alapján elvégezhetjük a szerkesztést.

Egy tetszőleges egyenesen jelöljünk egy A pontot és mérjük fel rá az AB és BC szakaszokat úgy, hogy $AB = a$, $BC = b$! Megrajzolunk egy AC átmérőjű körvonalat (175. ábra). Legyen a D pont a körvonal és az egyenes egyik metszéspontja.

Bebizonyítjuk, hogy DB a keresett szakasz. Valóban, $ADC\angle = 90°$, mint az AC átmérőre támaszkodó kerületi szög. A 15.1. tétel alapján $DB^2 = AB \cdot BC$, vagyis $DB = \sqrt{ab}$. ●

1. Milyen összefüggés van a derékszögű háromszög átfogójára bocsátott magassága és a befogóinak az átfogóra eső vetületei között?
2. Milyen képlet kapcsolja össze a derékszögű háromszög befogóját, átfogóját és a befogónak az átfogóra eső vetületét?

GYAKORLATOK

510.° Határozd meg a derékszögű háromszög derékszögének csúcsából az átfogóra bocsátott magasságát, ha az az átfogót 2 cm-es és 18 cm-es szakaszokra osztja!

511.° A derékszögű háromszög befogója 6 cm, ennek a vetülete az átfogóra 4 cm. Határozd meg az átfogó hosszát!

512.° A derékszögű háromszögben az átfogóra bocsátott magasság az átfogót 5 cm-es és 20 cm-es szakaszokra osztja. Határozd meg a háromszög befogóit!

513.° A derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság 48 cm, az egyik befogó vetülete az átfogóra 36 cm. Határozd meg az adott háromszög oldalait!

514.• Határozd meg a derékszögű háromszög befogóit, melynek a magassága az átfogót olyan részekre osztja, melyek egyike 3 cm-rel rövidebb ennél a magasságnál, a másik pedig 4 cm-rel hosszabb a magasságánál!

515.• Határozd meg a derékszögű háromszög kisebbik befogóját és az átfogójára bocsátott magasságát, ha a nagyobbik befogója az átfogónál 10 cm-rel hosszabb, az átfogóra eső vetületénél pedig 8 cm-rel hosszabb!

516.• A rombusz átlóinak metszéspontjából az oldalára bocsátott merőleges hossza 2 cm és a rombusz oldalát olyan részekre osztja, melyeknek aránya 1 : 4. Határozd meg a rombusz átlóit!

517.• A körvonal pontjából az átmérőjére bocsátott merőleges két olyan szakaszra osztja azt, melyek közül az egyik 4 cm. Határozd meg a kör sugarát, ha a merőleges hossza 10 cm!

518.• Határozd meg az egyenlő szárú trapéz kerületét, melynek alapjai 7 cm és 25 cm, az átmérői pedig merőlegesek a száraira!

519.•• Az egyenlő szárú trapéz köré írt körvonalának középpontja a nagyobbik alapjára illeszkedik. Határozd meg a kör sugarát, ha a trapéz átlója 20 cm, az átló vetülete a nagyobbik alapra 16 cm!

520.•• Az egyenlő szárú trapéz átlója merőleges a 12 cm-es szárára. Határozd meg a trapéz középvonalát, ha a trapéz köré írt kör sugara 10 cm!

521.•• Határozd meg az egyenlő szárú trapéz magasságát, ha az átlója merőleges a szárára, az alapjai négyzeteinek különbsége pedig 25 cm!

522.•• A derékszögű trapézba kör van írva. A nagyobbik szárát az érintési pont 8 cm-es és 50 cm-es szakaszokra osztja. Határozd meg a trapéz kerületét!

523.•• Az egyenlő szárú trapézba kör van írva. A trapéz szárát az érintési pont 3 cm-es és 27 cm-es szakaszokra osztja. Határozd meg a trapéz magasságát!

524.•• Adott két szakasz, melyeknek a hossza a és b. Szerkessz egy $\sqrt{\dfrac{ab}{2}}$ hosszúságú szakaszt!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

525. A paralelogramma kerülete az egyik oldalánál 35 cm-rel, a másiknál pedig 28 cm-rel hosszabb. Határozd meg a paralelogramma oldalait!

526. Az $ABCD$ négyzet AB, BC, CD és AD oldalain megfelelően jelölték az M, N, K és E pontokat úgy, hogy az $MNKE$ négyszög olyan téglalap lett, melynek oldalai párhuzamosak a négyzet átlóival.

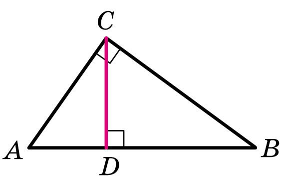
Határozd meg az *MNKE* téglalap kerületét, ha az *ABCD* négyzet átlója 7 cm!

527. A körbe írt trapéz átlója a nagyobbik alapnál lévő szögét felezi. Határozd meg azoknak az íveknek a fokmértékét, melyekre a trapéz csúcsai osztják fel a kört, ha az egyik szöge 74°!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

528. A körbe írt sokszögnek egyik csúcsát kiválasztjuk, és ebből a csúcsból meghúzzuk az összes átlót, melynek ez a csúcs az egyik végpontja. Bizonyítsd be, hogy a keletkezett háromszögek között legfeljebb egy hegyesszögű háromszög van!

16. Pitagorasz-tétel



176. ábra

16.1. tétel (Pitagorasz-tétel). ***A derékszögű háromszög átfogójának négyzete a befogók négyzetének összegével egyenlő.***

Bizonyítás. ⊙ A 176. ábrán az *ABC* derékszögű háromszög ($ACB\angle = 90°$) látható. Bebizonyítjuk, hogy $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

Megrajzoljuk a *CD* magasságot. A 15.1. tételt alkalmazva az *AC* és *BC* befogókra, a következő egyenlőségeket kapjuk: $AC^2 = AB \cdot AD$ és $BC^2 = AB \cdot DB$. Tagonként összeadva ezeket az egyenlőségeket:

$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot DB$ egyenlőséget kapjuk.

Ebből pedig $AC^2 + BC^2 = AB \cdot (AD + DB) = AB^2$. ▲

Ha a derékszögű háromszög befogóinak hossza a és b, az átfogó pedig c-vel egyenlő, akkor a Pitagorasz-tételt a következő képlettel lehet felírni:

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}.$$

A Pitagorasz-tétel segítségével kiszámíthatjuk a derékszögű háromszög adott két oldala alapján a harmadik oldalt.

$$\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2};\ a = \sqrt{c^2 - b^2};\ b = \sqrt{c^2 - a^2}}$$

A $c^2 = a^2 + b^2$ egyenlőségből az is következik, hogy $c_2 > a_2$ és $c^2 > b^2$, ebből pedig az, hogy $c > a$ és $c > b$, vagyis ***az átfogó bármely befogónál nagyobb***[1].

A 7-ik osztályos mértan tananyagból ismerjük a **merőleges**, **ferde** és a **ferde vetületé**nek fogalmait. Például a 176. ábrán a *C* pontból az *AB* egyenesre a *CD* merőlegest és a *CA* továbbá a *CB* ferdéket húztuk. Az *AD* és a *DB* szakaszok az *AC* és a *CB* ferdék vetületei az *AB* egyenesre.

A 16.1 tételből következik, hogyha egy adott pontból egy egyeneshez merőlegest és ferdét is húzunk, akkor a ferde nagyobb, mint a merőleges.

1. Fogalmazd meg a Pitagorasz-tételt!
2. Írd fel a Pitagorasz-tételt, ha a derékszögű háromszög befogói a és b, az átfogója pedig c!
3. Hogyan kell a derékszögű háromszög két oldala alapján meghatározni a harmadik oldalt?
4. A derékszögű háromszög melyik oldala a legnagyobb?

GYAKORLATOK

529.° Határozd meg a derékszögű háromszög átfogóját, ha befogói: 1) 3 cm és 4 cm; 2) 6 cm és 9 cm!

530.° Határozd meg a derékszögű háromszög befogóját, ha az átfogója és a másik befogója: 1) 15 cm és 12 cm; 2) 7 cm és $\sqrt{13}$ cm!

531.° Legyen a és b a derékszögű háromszög befogói, c pedig az átfogója. Határozd meg a háromszög ismeretlen oldalát, ha: 1) $a = 5$ cm, $b = 12$ cm; 2) $a = 1$ cm, $c = 2$ cm; 3) $b = 3$ cm, $c = \sqrt{90}$ cm!

532.° A téglalap oldalai 9 cm és 40 cm. Mekkora az átlójának hossza?

533.° A téglalap egyik oldala 7 cm, az átlója pedig 25 cm. Határozd meg a téglalap másik oldalának hosszát!

534.° Az egyenlő szárú háromszög szára 29 cm, az alapra bocsátott magassága pedig 21 cm. Mekkora a háromszög alapja?

535.° Az egyenlő szárú háromszög alapjára bocsátott magassága 35 cm, az alapja 24 cm. Mivel egyenlő a háromszög szára?

[1] Ezt a tényt már a 7. osztályban más módszerrel megállapítottuk.

536.° Egy 10 cm-es sugarú körben egy 16 cm-es húrt húztak. Határozd meg a kör középpontja és a húr közötti távolságot!

537.° Határozd meg annak a rombusznak a kerületét, melynek átlói 24 cm és 32 cm!

538.° A rombusz oldala 26 cm, az egyik átlója pedig 48 cm. Határozd meg a rombusz másik átlóját!

539.° A derékszögű háromszög egyik befogója 21 cm, a másik befogó 7 cm-rel rövidebb az átfogónál. Határozd meg a háromszög kerületét!

540.° A derékszögű háromszög átfogója 26 cm, befogói úgy aránylanak egymáshoz, mint 5 : 12. Határozd meg a háromszög befogóit!

541.• A derékszögű háromszög befogója 6 cm, ehhez az oldalhoz tartozó súlyvonala pedig 5 cm. Határozd meg a háromszög átfogóját!

542.• Az ABC háromszögben adott, hogy $BC = 20$ cm, az AC oldalra bocsátott BD magassága ezt az oldalát $AD = 5$ cm és $CD = 16$ cm szakaszokra osztja. Határozd meg az AB oldal hosszát!

543.• Az ABC háromszögben adott, hogy $AB = 17$ cm, $BC = 9$ cm, a C szöge tompaszög, az AD magasság pedig 8 cm. Határozd meg az AC oldalt!

544.• Határozd meg az egyenlő oldalú háromszög magasságát, ha az oldala a!

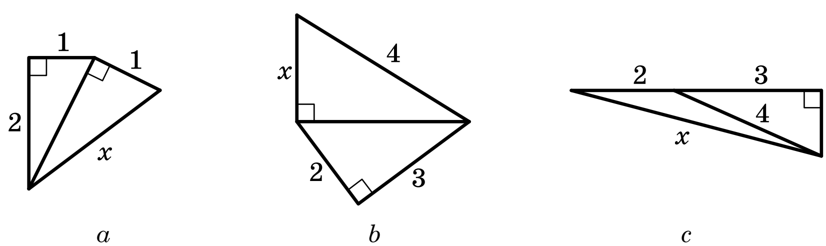
545.• Határozd meg az a oldalú négyzet átlóját!

546.• Határozd meg az egyenlő oldalú háromszög oldalát, ha a háromszög magassága h!

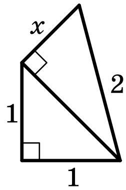
547.• Határozd meg az egyenlő szárú derékszögű háromszög befogóit, ha az átfogója c!

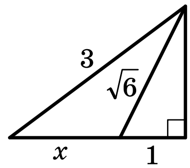
548.• Határozd meg a 177. ábrán az ismeretlen x szakasz hosszát (a mértékegység cm-ben van megadva)!

549.• Határozd meg a 178. ábrán az ismeretlen x szakasz hosszát (a mértékegység cm-ben van megadva)!



177. ábra





178. ábra

550.• Az egyenlő szárú háromszög szárára bocsátott magassága 8 cm. Ez a szárat két olyan szakaszra osztja, melyek közül a szárszögénél lévő 6 cm. Határozd meg a háromszög alapját!

551.• Az egyenlő szárú háromszög szárára bocsátott magassága a szárat 4 cm-es és 16 cm-es szakaszokra osztja, az alap szögének csúcsától számítva. Határozd meg az egyenlő szárú háromszög alapját!

552.• Az egyenlő szárú tompaszögű háromszög alapja 24 cm, a köré írt körvonal sugara 13 cm. Határozd meg a háromszög szárát!

553.• Az egyenlő szárú hegyesszögű háromszög alapjára bocsátott magassága 8 cm, a köré írt körvonal sugara 5 cm. Határozd meg a háromszög szárát!

554.• Az egyenlő szárú háromszög alapja 2 cm-rel hosszabb a száránál. Határozd meg a háromszög oldalait, ha az alapra bocsátott magassága 8 cm!

555.• Az egyenlő szárú háromszög kerülete 90 cm, az alapra bocsátott magassága 15 cm. Határozd meg a háromszög oldalait!

556.• A tompaszögű háromszög oldalai 29 cm, 25 cm és 6 cm. Határozd meg a háromszög kisebbik oldalra bocsátott magasságát!

557.• A háromszög oldalai 36 cm, 29 cm és 25 cm. Határozd meg a nagyobbik oldalra bocsátott magasságát!

558.• Egy pontból az egyeneshez két ferdét húztunk, amelyek hosszainak az aránya 5 : 6, a ferdék vetületei az egyenesre 7 cm-es és 18 cm-es hosszú szakaszok. Határozd meg az adott pont és az egyenes közötti távolságot!

559.• Egy pontból az egyenesre két ferdét húztunk, amelyek hosszai 15 cm és 27 cm. Ezen ferdék vetületeinek összege 24 cm. Határozd meg a ferdék vetületeit!

560.• A derékszögű háromszögbe írt körvonal érintési pontja az egyik befogót 2 cm-es és 6 cm-es szakaszokra osztja. Határozd meg a háromszög oldalait!

561.• Határozd meg a paralelogramma oldalait, melynek átlói 16 cm és 20 cm, ha az egyik átlója merőleges az oldalára!

562.• Határozd meg a derékszögű háromszög kerületét, ha a derékszög szögfelezője az átmérőt 30 cm-es és 40 cm-es szakaszokra osztja!

563.• Határozd meg a derékszögű háromszög kerületét, ha a hegyesszög szögfelezője a szemközti befogót 24 cm-es és 51 cm-es szakaszokra osztja!

564.• (*Ókori arab feladat.*) A folyó szemközti partján egymással szemben két pálmafa nő. Az egyik 30 könyök, a másik 20 könyök magas, a pálmafák közötti távolság pedig 50 könyök. Mindkét pálmafa tetején egy-egy madár ül. Mindkét madár észrevett egy halat a pálmák között a víz felszínén. Egyidejűleg repültek a halhoz és egyforma volt a sebességük is, és egyszerre is érték el a halat. A magasabb pálma tövétől milyen távolságra tűnt fel a hal?

565.•• Az egyenlő szárú trapéz alapjai 12 cm és 20 cm, az átlója a tompaszögének szögfelezője. Határozd meg a trapéz átlóját!

566.•• Az egyenlő szárú trapéz alapjai 18 cm és 12 cm, az átlója a hegyesszögének szögfelezője. Határozd meg a trapéz átlóját!

567.•• A kör középpontja különböző oldalain párhuzamosan két húrt húztak, ezek 16 cm-esek és 32 cm-esek. A húrok közötti távolság 16 cm. Határozd meg a kör sugarát!

568.•• A kör középpontjától egy oldalra párhuzamosan két húrt húztak, ezek 48 cm-esek és 24 cm-esek. A húrok közötti távolság 12 cm. Határozd meg a kör sugarát!

569.•• Az egyenlő szárú háromszögbe írt kör sugara 12 cm, a szárszög csúcsa és a körvonal középpontja közötti távolság pedig 20 cm. Határozd meg a háromszög kerületét!

570.•• A derékszögű trapézba írt körvonal érintési pontja a nagyobbik alapot 20 cm-es és 25 cm-es szakaszokra osztja, ha a derékszög csúcsától kezdjük a számolást. Határozd meg a trapéz kerületét!

571.•• A derékszögű trapézba írt körvonal érintési pontja a kisebbik alapot 6 cm-es és 3 cm-es szakaszokra osztja, ha a derékszög csúcsától kezdjük a számolást. Határozd meg a trapéz kerületét!

572.•• A derékszögű háromszög befogói 18 cm és 24 cm. Határozd meg a háromszög kisebbik szögének szögfelezőjét!

573.•• Az ABC háromszög AM és CK súlyvonalai merőlegesek egymásra. Határozd meg a háromszög oldalait, ha $AM = 9$ cm és $CK = 12$ cm!

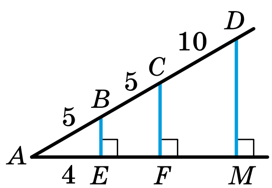
574.•• Az ABC háromszög BM és CK súlyvonalai merőlegesek egymásra és az O pontban metszik egymást. Határozd meg az AO szakasz hosszát, ha $BM = 36$ cm és $CK = 15$ cm!

575.•• (*Bhaskara*[1] *feladata.*) Egy csendes tó felszine felett fél lábbal[2]
Lótusz virága nyílott.
Egyszer hirtelen szélvihar támadt, mely félresodorta őt,
S nincs már a virág a helyén.
Ügyes halász talált rá kétlábnyi távolságra attól a helytől,
Hol egykor nyílott a lótusz.
Kérdéssel fordulok hozzád:
Milyen a tónak mélysége ott?

FELKÉSZÜLÉS AZ ÚJ TÉMÁHOZ

576. Az ABC háromszögben adott, hogy $C\angle = 90°$, $AB = 13$ cm, $BC = 5$ cm, $AC = 12$ cm. Határozd meg:
1) az A szög melletti befogónak és az átfogónak;
2) az A szöggel szemközti befogónak és az átfogónak;
3) a B szög melletti befogónak és az átfogónak;
4) a B szög melletti befogónak és ezzel a szöggel szemközti befogónak az arányát!

577. Az A szög egyik szárán úgy jelölték a B, C és D pontokat, hogy $AB = BC = 5$ cm, $CD = 10$ cm (179. ábra). A B, C és D pontokból BE, CF és DM merőlegeseket húztak az A szög másik szárára úgy, hogy $AE = 4$ cm. Határozd meg a szög melletti befogó és az átfogó arányát:
1) az AEB háromszögben;
2) az AFC háromszögben;
3) az AMD háromszögben!



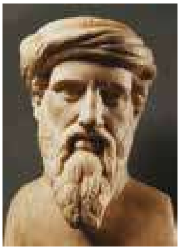
179. ábra

[1] *Bhaskara* (1114 – 1185) – indiai matematikus, csillagász
[2] 1 *láb* = 30,48 cm

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

578. Az 1 m oldalú négyzetbe 51 tetszőleges pontot jelöltek. Bizonyítsd be, hogy ezen pontok között létezik három olyan, amelyeket le lehet takarni egy 20 cm oldalú négyzettel!

PITAGORASZ



Pitagorasz (i. e. VI. sz.)

Egy nagyon nevezetes tétellel ismerkedtetek meg, amely egy híres ógörög tudós, Pitagorasz nevét viseli.

Az ókori szövegek arról tanúskodnak, hogy ennek a tételnek az állítása már jóval Pitagorasz előtt ismert volt. Miért nevezték el mégis Pitagoraszról? Több mint valószínű, hogy azért, mert Pitagorasz bizonyította be elsőként ezt az állítást.

Pitagorasz életéről keveset tudunk biztosan. Az egyik görög szigeten, Számoszon született. A legenda szerint sokat utazott azért, hogy minél több tudást szerezzen.

Ezután a görög Krotón kolóniába (Dél-Olaszország) telepedett le, ahol odaadó tanítványaiból és munkatársaiból egy társaság alakult. Így jött létre a pitagorasz filozófiai iskola (vagy a krotóni testvériség). Ennek a szövetségnek a hatása olyan jelentős volt, hogy Pitagorasz halála után több száz évvel is sok híres matematikus pitagorasznak tartotta magát.

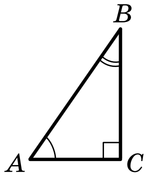
17. A derékszögű háromszög hegyesszögének trigonometrikus függvényei

A 180. ábrán az ABC derékszögű háromszög látható ($C\angle = 90°$). Emlékeztetőül: a BC befogót az A szöggel **szemközti** befogónak, az AC befogót pedig a szög **melletti** befogónak nevezzük.

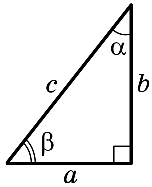
Meghatározás. A derékszögű háromszög hegyesszögének szinusza egyenlő a szöggel szemközti befogó és az átfogó hányadosával.

Az A szög szinuszát $\sin A$-val jelöljük, és szinusz A-nak olvassuk. Az ABC derékszögű háromszögben az A és B hegyesszögekre azt kapjuk, hogy:

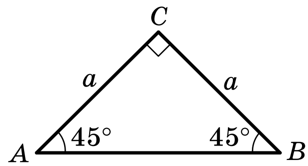
$$\sin A = \frac{BC}{AB}; \ \sin B = \frac{AC}{AB}.$$



180. ábra



181. ábra



182. ábra

A 181. ábrán lévő derékszögű háromszög esetén a képlet így módosul: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$.

Megvizsgáljuk az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszöget ($C\angle = 90°$), melyben $AC = AB = a$ (182. ábra).

Ebből következik, hogy $AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. A meghatározás alapján $\sin A = \frac{BC}{AB}$, innen pedig $\sin A = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Látható, hogy az egyenlő szárú derékszögű háromszög hegyesszögének szinusza nem függ a háromszög oldalának hosszától, mivel a szinusz értéke a tetszőleges értékénél ugyanaz a szám lesz. Mivel $A\angle = 45°$, ezért $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ezt a felírást nem egy konkrét egyenlő szárú derékszögű háromszögre vonatkoztatják.

Általánosítva, *ha az egyik derékszögű háromszög hegyesszöge megegyezik egy másik derékszögű háromszög hegyesszögével, akkor ezeknek a szögeknek a szinusza egyenlő.*

Valóban, ezek a háromszögek hasonlók a háromszögek hasonlóságának első ismertetőjele alapján. Ezért az egyik háromszög befogójának és átfogójának az aránya megegyezik a másik háromszög megfelelő befogója és az átfogó arányával.

Például a $\sin 17°$ értéke minden 17°-os szögre megegyezik. Ezt a szinusz értéket elegendő egyszer kiszámítani, egy tetszőleges derékszögű háromszög esetére, melynek hegyesszöge 17°.

Tehát ***a hegyesszög szinusza csak a szög fokmértékétől függ.***

Meghatározás. A derékszögű háromszög hegyesszögének koszinusza egyenlő a szög melletti befogó és az átfogó hányadosával.

Az A szög koszinuszát így jelöljük: $\cos A$ és így olvassuk: koszinusz A.

Az ABC derékszögű háromszögben (180. ábra) az A és B hegyesszögekre felírható:

$$\cos A = \frac{AC}{AB};\ \cos B = \frac{BC}{AB}.$$

Megállapíthatjuk, hogy a derékszögű háromszögekben a befogó mindig kisebb az átfogónál, ezért a *hegyesszög szinusza és koszinusza kisebb* 1*-nél*.

Meghatározás. A derékszögű háromszög hegyesszögének tangense egyenlő a szöggel szembeni befogó és a szög melletti befogó hányadosával.

Az A szög tangensét tg A-val jelöljük, és tangens A-nak olvassuk.

Az ABC háromszögben (180. ábra) az A és B hegyesszögekre felírható:

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC};\ \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}.$$

A 181. ábrán látható derékszögű háromszögre felírható:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c};\ \cos\beta = \frac{a}{c};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b};\ \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}.$$

Ahogy azt már korábban megállapítottuk, a szög szinusza csak a szög mértékétől függ. Hasonlóan gondolkodva, a következő megállapításra juthatunk:

a hegyesszög koszinusza és tangense csak a szög mértékétől függ.

Minden α hegyesszögnek egyetlen szám felel meg – ez a szög szinusza (koszinusza, tangense). Ezért a hegyesszög szinusza (koszinusza, tangense) és a szög mértéke között függvényszerű kapcsolat van. Az ezt az összefüggést kifejező függvényt **trigonometrikus** függvénynek nevezzük. Így az $y = \sin\alpha$, $y = \cos\alpha$, $y = \operatorname{tg}\alpha$ olyan trigonometrikus függvények, melyeknek argumentuma hegyesszög.

Régen az emberek táblázatokat állítottak össze, melyek a trigonometrikus függvények közelítő értékeit tartalmazta, a táblázatban egy bizonyos léptékkel számították ki a konkrét argumentumú trigonometrikus függvények értékeit. Később ezeket a táblázatokat széleskörűen alkalmazták több tudományágban és a technikában is.

Ma már a trigonometrikus függvények értékeit célszerű zsebszámológép segítségével meghatározni.

A hegyesszög tangense kifejezhető az adott szög szinusza és koszinusza által. Vizsgáljunk meg egy derékszögű háromszöget (181. ábra)! Felírjuk:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Tehát a következő képletet kapjuk:

$$\boxed{\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}.$$

A Pitagorasz-tétel alapján $a^2 = b^2 + c^2$. Az egyenlőség mindkét oldalát elosztva c^2-tel, a következőt kapjuk: $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$ Figyelembe véve, hogy $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, megkapjuk a képletet:

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$$

A következő jelöléseket szokás alkalmazni: $(\sin\,\alpha)^2 = \sin^2\,\alpha$, $(\cos\,\alpha)^2 = \cos^2\,\alpha$. Innen kapjuk, hogy:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}.$$

Ezt a képletet nevezzük **trigonometrikus alapazonosság**nak.

Megjegyezzük, hogy $\cos\,\beta = \sin\,\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\,\beta = \cos\,\alpha = \frac{b}{c}$. Mivel $\beta = 90° - \alpha$, ezért a következő képleteket kapjuk:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos\,(90° - \alpha) & = \sin\,\alpha \\ \sin\,(90° - \alpha) & = \cos\,\alpha \end{array}}.$$

Már tudjuk, hogy $\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Meghatározzuk $\cos 45°$ és $\mathrm{tg}\ 45°$ értékeit:

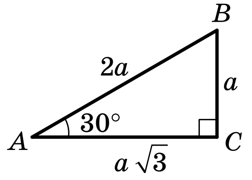
$$\cos 45° = \sin\,(90° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\mathrm{tg}\ 45° = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$

Meghatározzuk a 30°-os és a 60°-os szögek szinusz, koszinusz és tangens értékeit.

Vizsgáljuk meg az ABC derékszögű háromszöget, melyben $C\angle = 90°$, $A\angle = 30°$ (183. ábra)!

Legyen $BC = a$. Ekkor a 30°-os szöggel szembeni befogó tulajdonsága alapján $AB = 2a$. A Pitagorasz-tételből következik, hogy $AC^2 = AB^2 - BC^2$. Vagyis: $AC^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$; $AC = a\sqrt{3}$.



183. ábra

Innen meghatározzuk:

$$\sin 30° = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\text{tg } 30° = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Mivel 60° = 90° – 30°, ezért a következőt kapjuk:

$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2};$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

A 30°-os, 45°-os és 60°-os szögek szinusz, koszinusz, tangens értékeit érdemes megjegyezni.

α	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\text{tg } \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

?

1. Mit nevezünk a derékszögű háromszög hegyesszöge szinuszának?
2. Mit nevezünk a derékszögű háromszög hegyesszöge koszinuszának?
3. Mit nevezünk a derékszögű háromszög hegyesszöge tangensének?
4. Mitől függ a szög szinusza, koszinusza és tangense?
5. Hogyan függnek össze a tg α, sin α és cos α értékei?
6. Hogyan függnek össze sin α és cos α értékei?
7. Mivel egyenlő a sin $(90° - \alpha)$? cos $(90° - \alpha)$?
8. Mivel egyenlő sin 45°? cos 45°? tg 45°?
9. Mivel egyenlő sin 30°? cos 30°? tg 30°?
10. Mivel egyenlő sin 60°? cos 60°? tg 60°?

GYAKORLATI FELADATOK

579.• Rajzolj olyan szöget, amelynek:
1) tangense $\frac{4}{5}$; 2) szinusza $\frac{2}{3}$!

580.• Rajzolj olyan szöget, amelynek:
1) koszinusza $\frac{1}{4}$; 2) tangense $\frac{1}{2}$!

GYAKORLATOK

581.° A derékszögű háromszög befogója és átfogója megfelelően 8 cm és 10 cm. Határozd meg:
1) a kisebbik befogóval szemben lévő szög szinuszát;
2) a nagyobbik befogó mellett lévő szög koszinuszát;
3) a kisebbik befogóval szemben lévő szög tangensét!

582.° A derékszögű háromszög befogói 3 cm és 2 cm. Határozd meg:
1) a nagyobbik befogó melletti szög tangensét;
2) a kisebbik befogóval szemközti szög szinuszát;
3) a nagyobbik befogó melletti szög koszinuszát!

583.° Határozd meg a kifejezés értékét:
1) $\cos^2 45° + \mathrm{tg}^2\, 60°$; 2) $2\cos^2 60° - \sin^2 30° + \sin 60°\ \mathrm{tg}\, 30°$!

584.° Határozd meg a kifejezés értékét:
1) $\cos^2 30° - \sin^2 45°$; 2) $3\,\mathrm{tg}^2\, 30° + 4\,\mathrm{tg}\, 45° + \cos 30°\ \mathrm{tg}\, 60°$!

585.° Az ABC háromszögben adott: $C\angle = 90°$, $BC = 77$ cm, $AB = 125$ cm. Határozd meg a háromszög hegyesszögeinek szinuszait!

586.° Az ABC háromszögben adott: $C\angle = 90°$, $BC = 41$ cm, $AC = 20$ cm. Határozd meg a háromszög hegyesszögeinek koszinuszait!

587.• Határozd meg a $\sin\alpha$ és $\mathrm{tg}\,\alpha$ értékeit, ha $\cos\alpha = \frac{1}{3}$!

588.• Határozd meg a $\cos\beta$ és $\mathrm{tg}\,\beta$ értékeit, ha $\sin\beta = \frac{4}{5}$!

589.• A derékszögű háromszög hegyesszögének sinusa $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Határozd meg a háromszög másik hegyesszögének szinuszát, koszinuszát és tangensét!

590.• Az egyenlő szárú háromszög alapja 24 cm, a szára pedig 13 cm. Határozd meg a háromszög szára és az alapjára bocsátott magassága közötti szögének szinuszát, koszinuszát és tangensét!

591.• Az egyenlő szárú háromszög szára 17 cm, az alapra bocsátott magassága pedig 8 cm. Határozd meg az alapjánál lévő szögének szinuszát, koszinuszát és tangensét!

592.• Határozd meg a rombusz szögeit, ha átlóinak hossza 4 cm és $4\sqrt{3}$ cm!

593.• Határozd meg a téglalap átlója és az oldalai közötti szögeket, ha az oldalai $\sqrt{3}$ cm és 3 cm!

594.• Az $ABCD$ trapézban ismert, hogy $AB = CD = 9$ cm, $BC = 10$ cm, $AD = 14$ cm. Határozd meg a trapéz A szögének szinuszát, koszinuszát és tangensét!

595.• Az $ABCD$ derékszögű trapézban adott, hogy $BC \parallel AD$, $A\angle = 90°$, $AB = 4$ cm, $BC = 8$ cm, $AD = 12$ cm. Határozd meg a trapéz szögeit!

596.• Bizonyítsd be, hogy a derékszögű háromszög hegyesszögeinek tangense kölcsönösen fordított (reciprok) számok!

597.• Bizonyítsd be az azonosságot: $1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$!

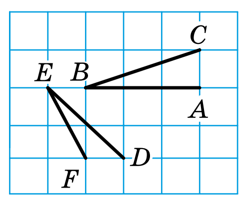
598.• Határozd meg a kifejezés értékét:
1) $\sin^2 18° + \sin^2 72°$;
2) $\cos^3 36° - \sin^3 54°$!

599.•• A derékszögű háromszög befogóinak hossza 30 cm és 40 cm. Határozd meg a súlyvonal és az átfogóra bocsátott magasság közötti szög szinuszát, koszinuszát és tangensét!

600.•• Az ABC háromszögben adott, hogy $AB = BC$, BD és AM a háromszög magasságai, valamint $BD : AM = 3 : 1$. Határozd meg a $\cos C$-t!

601.•• Az ABC háromszögben adott, hogy $AB = BC$, BD és CK a háromszög magasságai, $\cos A = \dfrac{3}{7}$. Határozd meg a $CK : BD$ arány értékét!

602.* Bizonyítsd be, hogy a 184. ábrán lévő ABC és DEF szögek egyenlők!



184. ábra

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

603. Az $ABCD$ paralelogramma A és B szögeinek szögfelezői az M pontban metszik egymást, $AB = 6$ cm. Határozd meg a kör sugarát, amelyre az A, B és M pontok illeszkednek!

604. Az AB és BC húrok merőlegesek, és a felezőpontjai közötti távolság 12 cm. Határozd meg a kör sugarát!

605. Az ABC háromszögben BK – magasság, AM – szögfelező, $BC = 26$ cm, $AB : AC = 6 : 7$. Az M pontból MD merőlegest bocsátottak az AC oldalára. Határozd meg az MD szakasz hosszát!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

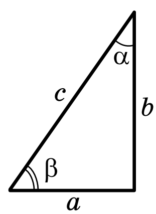
606. Adott két körlap, melyeknek nincs közös pontja. Létezik-e olyan, egyik körlaphoz sem illeszkedő pont, hogy bármilyen egyenes, amely ezen a ponton átmegy, metszi legalább az egyik körlapot?

18. A derékszögű háromszögek megoldása

A 185. ábrán egy derékszögű háromszög látható, melynek hegyesszögei α és β, a szemközti befogói megfelelően a és b, az átfogója pedig c.

A derékszögű háromszög hegyesszögének szinusza $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$. Ezekből következik, hogy $a = c\sin\alpha$, $b = c\sin\beta$.

Tehát ***a derékszögű háromszög befogója az átfogó és ezzel a befogóval szemközti szög szinuszának szorzatával egyenlő.***



185. ábra

A derékszögű háromszög hegyesszögének koszinusza $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$. Ezekből következik, hogy $b = c\cos\alpha$, $a = c\cos\beta$.

Tehát ***a derékszögű háromszög befogója az átfogó és az adott befogón fekvő szög koszinuszának szorzatával egyenlő.***

A derékszögű háromszög hegyesszögének tangense: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$. Ezekből következik, hogy $a = b\operatorname{tg}\alpha$, $b = a\operatorname{tg}\beta$.

Tehát ***a derékszögű háromszög befogója a másik befogó és az első befogóval szemközti szög tangensének szorzatával egyenlő.***

Mivel $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, ezért $b = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Tehát ***a derékszögű háromszög befogója a másik befogó és az első befogóval szemközti szög tangensének hányadosával egyenlő.***

A $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ és $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ egyenlőségekből a következőket kapjuk: $c = \frac{a}{\sin\alpha}$ és $c = \frac{b}{\cos\alpha}$.

Tehát ***a derékszögű háromszög átfogója a befogó és a szemközti szög szinuszának hányadosával egyenlő;***

a derékszögű háromszög átfogója a befogó és a rajta lévő szög koszinuszának hányadosával egyenlő.

A derékszögű háromszöget megoldani annyit jelent, mint meghatározni ismeretlen oldalait és szögeit az ismert oldalai és szögei által. A fenti szabályok lehetőséget adnak arra, hogy megoldjuk a derékszögű háromszöget, ha ismert egy oldala és az egyik hegyesszöge.

A derékszögű háromszögek megoldásáról szóló feladatokban, ha másképp nem jelzik, akkor a következő jelölést alkalmazzák (185. ábra): c az átfogó, a és b befogók, α és β megfelelően az a és b befogókkal szemközti szögei.

1. feladat. Határozd meg a derékszögű háromszög ismeretlen oldalait és szögeit befogója és a hegyesszöge alapján: $a = 14$ cm, $\alpha = 38°$! (A trigonometrikus függvények értékeit zsebszámológéppel számítjuk ki, és két tizedesjegyre kerekítjük. Az oldalak hosszát egy tizedesjegyre kerekítjük.)

Megoldás.
$\beta = 90° - \alpha = 90° - 38° = 52°$;
$b = a \operatorname{tg} \beta = 14 \operatorname{tg} 52° \approx 14 \cdot 1{,}28 \approx 17{,}9$ (cm);
$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{14}{\sin 38°} \approx \frac{14}{0{,}62} \approx 22{,}6$ (cm).

Felelet: $c \approx 22{,}6$ cm, $b \approx 17{,}9$ cm, $\beta = 52°$.

Ezt a feladatot másképp is meg lehetett volna oldani: például a Pitagorasz-tétel alkalmazásával meghatározni az átfogót.

2. feladat. A derékszögű háromszög befogója $a = 26$ cm, átfogója pedig $c = 34$ cm. Határozd meg a derékszögű háromszög ismeretlen oldalát és szögeit!

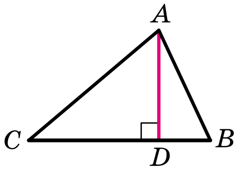
Megoldás. $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{26}{34} = 0{,}7647...$.

Kalkulátorral meghatározzuk az α szög mértékét: $\alpha \approx 50°$.

Ekkor $\beta \approx 40°$.

$b = c \sin\beta \approx 34 \sin 40° \approx 34 \cdot 0{,}643 \approx$
$\approx 21{,}862 \approx 21{,}9$ (cm).

Felelet: $b \approx 21{,}9$ cm, $\alpha \approx 50°$, $\beta \approx 40°$.



186. ábra

3. feladat. Az ABC háromszög AD magassága a BC alapját BD és CD szakaszokra osztja (186. ábra), $BD = 2\sqrt{3}$ cm, $CD = 8$ cm. Határozd meg a háromszög AB és AC oldalát, ha $B\angle = 60°$!

Megoldás. Az ADB háromszögből ($ADB\angle = 90°$) azt kapjuk, hogy:

$$AD = BD \text{ tg } B = 2\sqrt{3} \text{ tg } 60° = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6 \text{ (cm)};$$

$$AB = \frac{BD}{\cos B} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 60°} = 2\sqrt{3} : \frac{1}{2} = 4\sqrt{3} \text{ (cm)}.$$

Az ADC háromszögből ($ADC\angle = 90°$) azt kapjuk, hogy:

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ (cm)}.$$

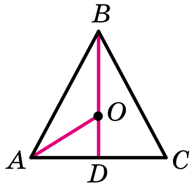
Felelet: $4\sqrt{3}$ cm, 10 cm.

4. feladat. Az egyenlő szárú háromszög szára b, az alapnál lévő szöge pedig α. Határozd meg a háromszögbe írt kör sugarát!

Megoldás. Az ABC háromszögben (187. ábra) $AB = BC = b$, $BAC\angle = \alpha$. Meghúzzuk a BD magasságot.

Az ADB háromszögből ($ADB\angle = 90°$) azt kapjuk, hogy: $AD = AB \cos BAD\angle = b \cos \alpha$.

Az O pont az ABC háromszögbe írt körvonal középpontja. Tehát az O pont a BD magasságra és a BAC szög AO szögfelezőjére illeszkedik. Mivel $OD \perp AC$, ezért a beírt kör a D pontban érinti az AC oldalt. Tehát az OD szakasz a beírt kör sugara. Az AO szakasz a BAD szög szögfelezője, ezért $OAD\angle = \frac{1}{2} BAD\angle = \frac{\alpha}{2}$.



187. ábra

Az ADO háromszögből ($ADO\angle = 90°$) azt kapjuk, hogy:

$$OD = AD \text{ tg } OAD\angle = b \cos \alpha \text{ tg } \frac{\alpha}{2}.$$

Felelet: $b \cos \alpha \text{ tg } \frac{\alpha}{2}$.

1. Hogyan lehet meghatározni a derékszögű háromszög befogóját az átfogója és a befogóval szemközti szög alapján?
2. Hogyan lehet meghatározni a derékszögű háromszög befogóját az átfogója és a befogó melletti szög alapján?
3. Hogyan lehet meghatározni a derékszögű háromszög befogóját a befogója és a keresett befogóval szemközti szög alapján?
4. Hogyan lehet meghatározni a derékszögű háromszög befogóját a befogója és a keresett befogó melletti szög alapján?
5. Hogyan lehet meghatározni a derékszögű háromszög átfogóját a befogója és az adott befogóval szemközti szög alapján?
6. Hogyan lehet meghatározni a derékszögű háromszög átfogóját a befogója és az adott befogón fekvő szög alapján?

GYAKORLATOK

607.° Az ABC háromszögben $C\angle = 90°$. Határozd meg:

1) BC oldalát, ha $AB = 12$ cm, $\sin A = \frac{3}{4}$;
2) AC oldalát, ha $AB = 21$ cm, $\cos A = 0{,}4$;
3) AC oldalát, ha $BC = 4$ cm, $\operatorname{tg} A = 1{,}6$;
4) AB oldalát, ha $BC = 14$ cm, $\cos B = \frac{7}{9}$;
5) AB oldalát, ha $AC = 3{,}2$ cm, $\sin B = 0{,}16$;
6) BC oldalát, ha $AC = 2{,}3$ cm, $\operatorname{tg} B = \frac{1}{2}$.

608.° A DEF háromszögben $E\angle = 90°$. Határozd meg:

1) DE oldalát, ha $DF = 18$ cm, $\cos D = \frac{2}{9}$;
2) DF oldalát, ha $EF = 3{,}5$ cm, $\cos F = 0{,}7$;
3) EF oldalát, ha $DE = 2{,}4$ cm, $\operatorname{tg} D = \frac{11}{12}$!

609.° A derékszögű háromszög átfogója 17 cm, az egyik hegyesszögének szinusza $\frac{8}{17}$. Határozd meg a derékszögű háromszög befogóit!

610.° A derékszögű háromszög átfogója 10 cm, az egyik hegyesszögének koszinusza 0,8. Határozd meg a derékszögű háromszög befogóit!

611.° A derékszögű háromszög befogója 48 cm, a szemközti szögének tangense $3\frac{3}{7}$. Határozd meg a háromszög másik befogóját és átfogóját!

612.° A derékszögű háromszög befogója 12 cm, a befogó melletti szögének tangense 0,75. Határozd meg a háromszög másik befogóját és átfogóját!

613.° Oldd meg a derékszögű háromszöget, ha adott:

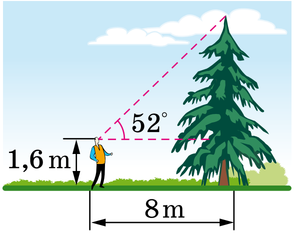
1) az átfogója és hegyesszöge: $c = 28$ cm, $\alpha = 48°$;
2) a befogója és hegyesszöge: $a = 56$ cm, $\beta = 74°$;
3) a befogója és átfogója: $a = 5$ cm, $c = 9$ cm;
4) a két befogója: $a = 3$ cm, $b = 7$ cm!

614.° Oldd meg a derékszögű háromszöget, ha ismertek a megfelelő elemei:

1) $a = 34$ cm, $\alpha = 55°$;
2) $c = 16$ cm, $\beta = 18°$;
3) $b = 12$ cm, $c = 13$ cm;
4) $a = 4$ cm, $b = 14$ cm!

615.° A 188.ábra adatait alkalmazva, határozd meg a fenyőfa magasságát!

616.° Egy tűzoltólétrával egy 9 m magas épületre kell felmászni. Milyen hosszú kell hogy legyen a létra, ha a talajtól számítva 70°-os szög alatt kell kitámasztani?



188. ábra

617.° Miután a kerékpáros megtett 300 métert egy egyenes lejtőn, 11 méterrel volt magasabban annál a pontnál, ahonnan megkezdte az útját. Határozd meg az út emelkedési szögének tangensét!

618.° Milyen szög alatt esik a földre a napsugár, ha a függőleges oszlop árnyéka olyan hosszú, mint amilyen az oszlop magassága?

619.• Az egyenlő szárú háromszög szárszöge 120°, az alapjára bocsátott magasság hossza $3\sqrt{3}$ cm. Határozd meg a háromszög oldalait!

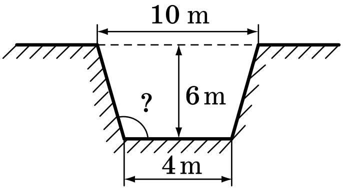
620.• Az egyenlő szárú trapéz alapjai 8 cm és 12 cm, az alapon fekvő szöge pedig 45°. Határozd meg a trapéz magasságát és szárát!

621.• A paralelogramma a hosszúságú átlója merőleges a szárára. Határozd meg a paralelogramma oldalait, ha az egyik szöge 30°!

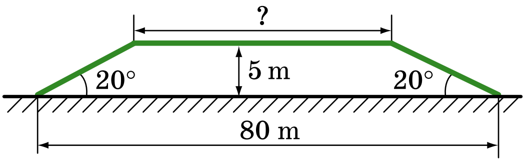
622.• A rombusz oldala a, az egyik szöge pedig 60°. Határozd meg a rombusz átlóit!

623.• Az árok keresztmetszete egyenlő szárú trapéz alakú (189. ábra). Határozd meg az árok oldala és az alja közötti szöget!

624.• A töltés magassága 5 m, aljának szélessége 80 m (190. ábra), az oldala pedig 20°-os szöget zár be az alapjával. Határozd meg a töltés tetejének szélességét!



189. ábra



190. ábra

625.$^{\bullet}$ Az ABC háromszög BD magassága az AC oldalt AD és CD szakaszokra osztja úgy, hogy $AD = 12$ cm, $CD = 4$ cm. Határozd meg a BC szakasz hosszát, ha az $A\angle = 30°$!

626.$^{\bullet}$ Az ABC háromszög AF magassága a BC oldalt BF és CF szakaszokra osztja úgy, hogy $CF = \sqrt{13}$ cm, $B\angle = 60°$, az AB oldal pedig 18 cm!

627.$^{\bullet}$ Az n egyeneshez nem illeszkedő D pontból az egyeneshez DK és DB ferdéket húztak, melyek megfelelően 45°-os és 60°-os szöget zárnak be vele. Határozd meg a DK ferde n egyenesre való vetületének hosszát, ha $DB = 10\sqrt{3}$ cm!

628.$^{\bullet}$ Az l egyeneshez nem illeszkedő M pontból az egyeneshez MN és MK ferdéket húztak, melyek megfelelően 30°-os és 45°-os szöget zárnak be vele. Határozd meg az MK ferde hosszát, ha az MN ferde l egyenesre való vetülete $4\sqrt{3}$ cm!

629.$^{\bullet}$ Az egyenlő szárú háromszög szárszöge β, a szárához tartozó magassága pedig h. Határozd meg a háromszög alapját!

630.$^{\bullet}$ A derékszögű háromszög derékszögének csúcsából bocsátott magassága h, hegyesszöge α. Határozd meg a háromszög oldalait!

631.$^{\bullet}$ A derékszögű háromszög egyik befogója a. A derékszög csúcsából bocsátott magasság és a másik befogó közötti szög pedig φ. Határozd meg a háromszög ismeretlen oldalát és a magasságot!

632.$^{\bullet}$ A rombusz nagyobbik átlója d, hegyesszöge pedig α. Határozd meg a rombusz oldalát és a kisebbik átlóját!

633.$^{\bullet}$ A rombusz hegyesszöge α, a beírt körvonal sugara pedig r. Határozd meg a rombusz oldalát és átlóit!

634.$^{\bullet\bullet}$ Az egyenlő szárú trapéz átlója merőleges a szárára, és a trapéz alapjával 30°-os szöget zár be. Határozd meg a trapéz magasságát, ha a trapéz köré írt körvonal sugara R!

635.$^{\bullet\bullet}$ A háromszög egyik oldala a, ez oldal melletti szögei 45° és 60°. Határozd meg a háromszögnek adott oldalra bocsátott magasságát!

636.$^{\bullet\bullet}$ A trapéz alapjai 7 cm és 15 cm, a nagyobbik alapnál lévő szögei pedig 30° és 60°. Határozd meg a trapéz magasságát és átlóit!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

637. A paralelogramma kerülete 48 cm. A tompaszögének szögfelezője az oldalát 2 : 1 arányba osztja a hegyesszög csúcsától számítva. Lehet-e a paralelogramma kisebbik oldalának hossza 7 cm?

638. Az $ABCD$ négyszög körbe van írva, vagyis húrnégyszög. $BAC\angle = 52°$, $DBC\angle = 34°$, $ADB\angle = 17°$. Határozd meg a négyszög szögeit!

639. Adott, hogy az $ABCD$ trapéz ($BC \parallel AD$), az AC és BD átlóinak metszéspontja pedig az O pont. Határozd meg a BO és OD szakaszok hosszát, ha $AO : OC = 7 : 6$ és $BD = 39$ cm!

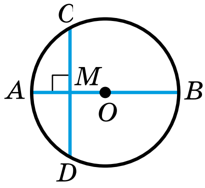
FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

640. Egy rombuszt vágj szét négy négyszögre úgy, hogy mindegyik körbe írt és kör köré írt is legyen egyszerre!

3. SZ. FELADATSOR. ÖNELLENŐRZŐ FELADATOK, TESZTEK

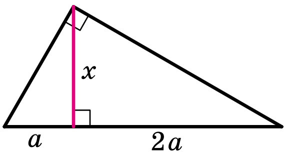
1. Az O középpontú körvonal AB átmérője merőleges a CD húrra (191. ábra). A következő egyenlőségek közül melyik nem igaz?

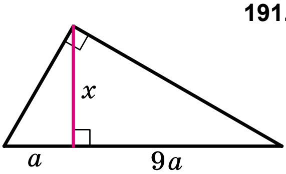
A) $AC^2 = AM \cdot AB$; C) $AD^2 = MB \cdot AB$;
B) $CM^2 = AM \cdot MB$; D) $DM^2 = AM \cdot MB$.

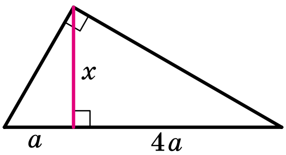


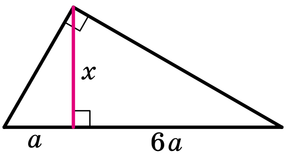
191. ábra

2. Melyik ábrán lesz a szakasz x hossza $2a$?

A)


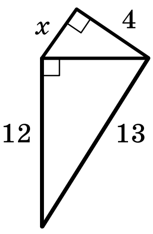
C)


B)


D)


3. A Pitagorasz-tételből következik, hogy az átfogó:
A) a befogók összegével egyenlő;
B) a befogók négyzetének összegével egyenlő;
C) nagyobb, mint a befogó;
D) egyenlő a befogók összegének négyzetével.

4. A 192. ábrán a szakasz x hossza egyenlő:
A) 4; B) 3; C) 5; D) $3\sqrt{2}$.



192. ábra

5. Az a hosszúságú egyenlő oldalú háromszög szögfelezője egyenlő:

A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; B) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$; C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

6. Az a hosszúságú négyzet köré írt körvonal sugara egyenlő:

A) $\frac{a}{2}$; B) $a\sqrt{2}$; C) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; D) $2a$.

7. Az egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogóra bocsátott magassága a-val egyenlő. Akkor a befogója:

A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; B) $a\sqrt{2}$; C) $2a$; D) $\frac{a}{2}$.

8. Legyen α és β a nem egyenlő szárú derékszögű háromszög hegyesszögei. Melyik igaz a következő egyenlőségek közül?

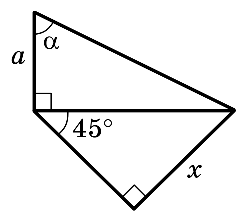
A) $\sin\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\alpha = \cos\alpha$;
C) $\sin\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta = \sin\beta$;
B) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \mathrm{tg}\,\beta$;
D) $\cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta = \sin\beta$.

9. Legyen α a derékszögű háromszög hegyesszöge. A következők közül melyik egyenlőség nem áll fenn?

A) $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$;
C) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
B) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$;
D) $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

10. A 193. ábrán az x hosszúságú szakasz egyenlő:

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\sin\alpha$;
C) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cos\alpha$;
B) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$;
D) $a\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha$.



193. ábra

A 3. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

A derékszögű háromszögre vonatkozó arányossági tételek

A derékszögű háromszög átfogójára bocsátott magasságának négyzete a befogók átfogóra eső vetületeinek szorzatával egyenlő (magasságtétel).

A befogó négyzete az átfogó és ennek a befogónak az átfogóra eső vetületének a szorzatával lesz egyenlő (befogótétel).

A Pitagorasz-tétel

A derékszögű háromszög átfogójának négyzete a befogók négyzetének összegével egyenlő.

A derékszögű háromszög hegyesszögének szinusza

A derékszögű háromszög hegyesszögének szinusza egyenlő a szöggel szemközti befogó és az átfogó hányadosával.

A derékszögű háromszög hegyesszögének koszinusza

A derékszögű háromszög hegyesszögének koszinusza egyenlő a szög melletti befogó és az átfogó hányadosával.

A derékszögű háromszög hegyesszögének tangense

A derékszögű háromszög hegyesszögének tangense egyenlő a szöggel szembeni befogó és a szög melletti befogó hányadosával.

Trigonometrikus képletek

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \mathbf{1}$ – a trigonometria alapazonossága

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$

A derékszögű háromszög oldalai és szögeinek trigonometrikus függvényei közötti összefüggések

- A derékszögű háromszög befogója az átfogó és ezzel a befogóval szemközti szög szinuszának szorzatával egyenlő.
- A derékszögű háromszög befogója az átfogó és az adott befogó melletti szög koszinuszának szorzatával egyenlő.
- A derékszögű háromszög befogója a másik befogó és az első befogóval szemközti szöge tangensének szorzatával egyenlő.
- A derékszögű háromszög befogója a másik befogó és az első befogó melletti szöge tangensének szorzatával egyenlő.
- A derékszögű háromszög átfogója a befogó és a szemközti szög szinuszának hányadosával egyenlő.
- A derékszögű háromszög átfogója a befogó és a rajta lévő szög koszinuszának hányadosával egyenlő.

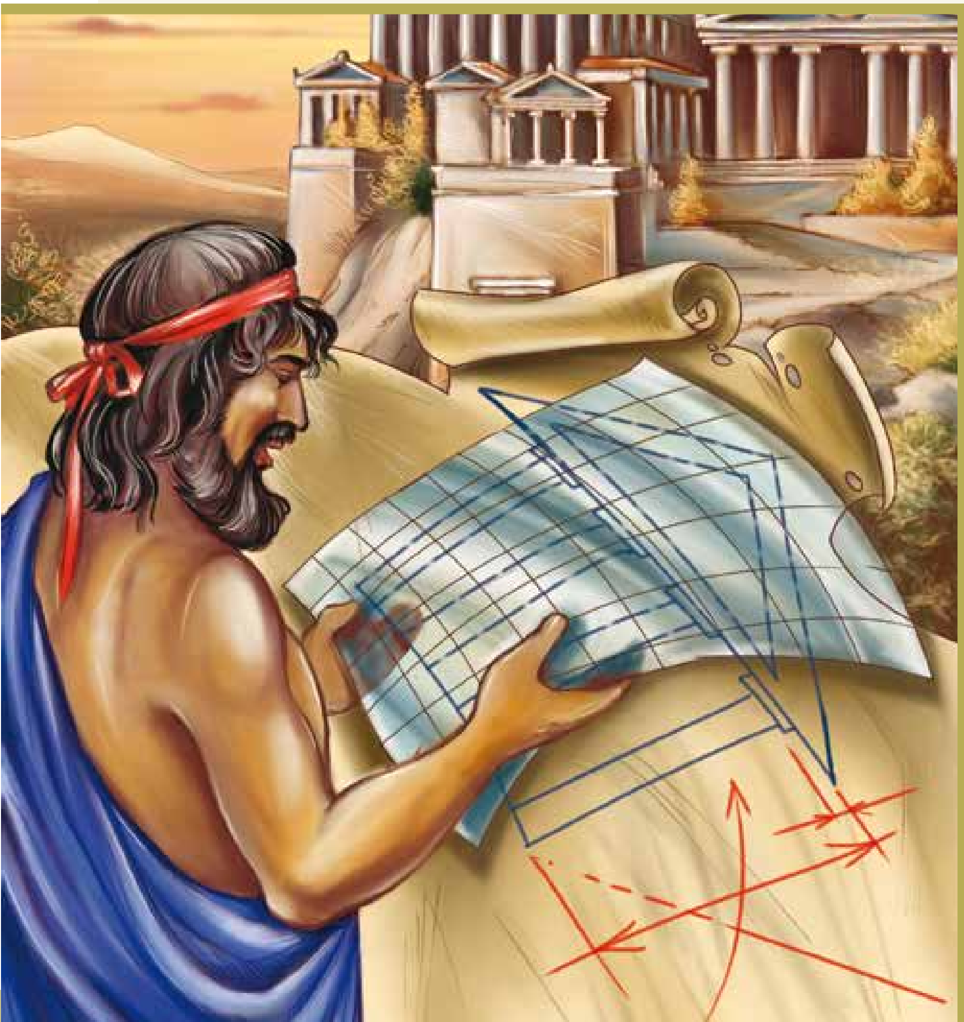
SOKSZÖGEK. A SOKSZÖG TERÜLETE

4.§.

Ebben a paragrafusban megismerkedtek a domború sokszög átlóinak számát meghatározó képlettel.

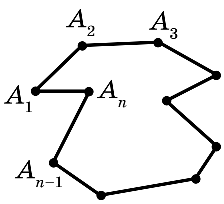
Részletesebben foglalkozunk a terület jellemzőivel.

Megtanuljátok meghatározni a paralelogramma, a háromszög és a trapéz területét.

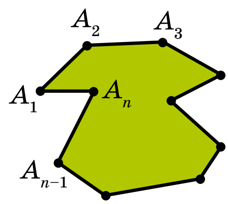


19. Sokszögek

Vizsgáljuk meg azt az alakzatot, amely az $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ pontokból és az $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n, A_nA_1$ olyan szakaszokból áll, melyek közül egyetlen két szomszédos szakasz sem fekszik egy egyenesen és egyetlen nem szomszédos szakasznak sincs közös pontja (194. ábra)!



194. ábra



195. ábra

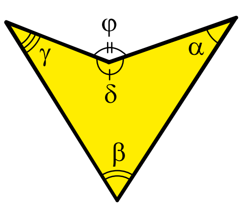
Ezekből a szakaszokból alkotott alakzat a sík egy részét határolja, melyet a 195. ábrán zöld színnel jelöltek. A síknak ezt a részét az A_1A_2, $A_2A_3, ..., A_{n-1}A_n, A_nA_1$ szakaszokkal együtt **sokszög**nek nevezzük. Az $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ pontokat a sokszög **csúcsai**nak, a fenti szakaszokat pedig a sokszög **oldalai**nak mondjuk.

A szomszédos szakaszokat a sokszög szomszédos oldalainak nevezzük. Azokat a csúcsokat, melyek egy adott oldal végpontjai, a sokszög **szomszédos csúcsai**nak nevezzük.

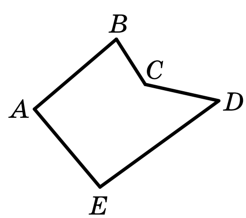
A sokszög két szomszédos oldala a sokszög szögét alkotja. Például a 196. ábrán α, β, γ, δ a sokszög szögei lesznek, a φ viszont nem szöge a sokszögnek.

A sokszöget a szögei számával nevezik meg: háromszög, négyszög, ötszög stb.

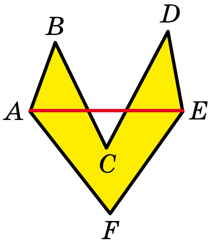
A sokszöget a csúcsaival jelölik. Például a 197. ábrán az *ABCDE* ötszög látható. A sokszög jelölésében a szomszédos betűk szomszédos csúcsoknak felelnek meg. Például a 197. ábrán lévő ötszöget a következőképpen is jelölhetjük: *CDEAB, EABCD, EDCBA* stb.



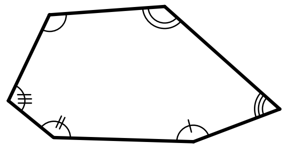
196. ábra



197. ábra



198. ábra



199. ábra

Az oldalak hosszúságának összegét a sokszög **kerületé**nek nevezzük.

A sokszög nem szomszédos csúcsait összekötő szakaszt átlónak nevezzük. Például a 198. ábrán az AE szakasz az $ABCDEF$ hatszög átlója.

A 199. ábrán egy sokszög látható, melynek minden szöge kisebb az egyenesszögnél. Az ilyen sokszöget **domború**nak nevezzük. A fentiekből következik, hogy bármilyen háromszög domború sokszög. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a 196–198. ábrákon látható sokszögek nem domborúak.

A domború sokszög a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

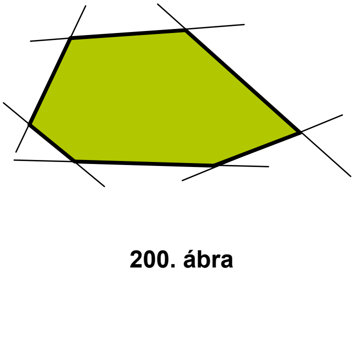
1) *a domború sokszög bármely, az egyik oldalát tartalmazó egyeneshez viszonyítva ugyanazon félsíkban fekszik* (200. ábra);

2) *a háromszögtől különböző domború sokszög bármelyik átlóját tartalmazza* (201. ábra).

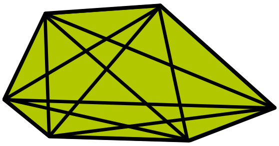
Ha a sokszög nem domború, akkor ezekkel a tulajdonságokkal nem rendelkezik (198., 202. ábra).

19.1. tétel. ***A domború n-szög szögeinek összege* 180° (*n* – 2).**

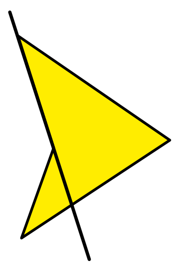
Bizonyítás. Az $n = 3$ esetét a 7. osztályban már bizonyítottuk (16.1. tétel).



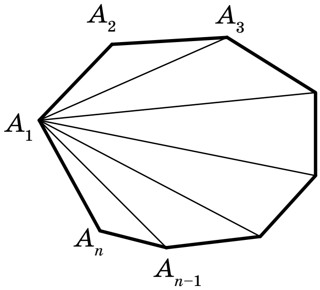
200. ábra



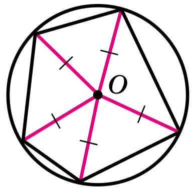
201. ábra



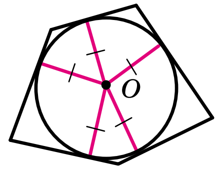
202. ábra



203. ábra



204. ábra



205. ábra

Legyen $n > 3$. A 203. ábrán az $A_1A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ domború sokszög látható. Bebizonyítjuk, hogy szögeinek összege $180° (n - 2)$.

Meghúzzuk az A_1 csúcsból induló összes átlóját. Ezek az átlók az adott sokszöget $(n - 2)$ háromszögre osztja. Ezeknek a háromszögeknek a szögei összege adja meg a sokszög szögeinek összegét. Mivel minden háromszög szögeinek összege $180°$, ezért a keresett összeg $180° (n - 2)$ lesz. ▲

Megjegyezzük, hogy a fenti tétel olyan sokszögekre is igaz, melyek nem domborúak.

Meghatározás. A sokszög köré írt körvonalnak azt a körvonalat nevezzük, amelyhez a sokszög minden csúcsa illeszkedik.

A 204. ábrán egy körvonal látható, amely egy sokszög köré van írva. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a sokszög **a körbe van írva**.

A sokszög köré írt körvonal középpontja egyenlő távolságra van a sokszög minden csúcsától. Tehát ez a középpont a körbe írt sokszög minden oldalfelező merőlegeséhez illeszkedik.

A sokszög köré kört lehet írni, ha létezik egy olyan pont, amely egyenlő távolságra lesz a sokszög minden csúcsától. Tehát, ha a sokszög oldalainak felezőmerőlegesei egy pontban metszik egymást, akkor a sokszög köré kör írható.

Meghatározás. Azt a körvonalat, amely a sokszög minden oldalát érinti, sokszögbe írt körvonalnak nevezzük.

A 205. ábrán egy olyan körvonal látható, amely a sokszögbe van írva. Ebben az esetben is azt mondják, hogy a sokszög a **kör köré van írva**.

A sokszögbe írt körvonal középpontja egyenlő távolságra van a sokszög oldalaitól. Tehát a középpontnak illeszkednie kell a kör köré írt sokszög mindegyik szögfelezőjéhez.

1. Magyarázd meg, milyen alakzatot nevezünk sokszögnek!
2. Mit nevezünk a sokszög kerületének?
3. Mit nevezünk a sokszög átlójának?
4. Milyen sokszöget nevezünk domborúnak?
5. Hogyan helyezkedik el a domború sokszög az oldalát tartalmazó egyeneshez viszonyítva?
6. Mivel egyenlő a domború n-szög szögeinek összege?
7. Milyen körvonalat nevezünk a sokszög köré írt körnek?
8. Melyik pont lesz a sokszög köré írt körének középpontja?
9. Milyen körvonalat nevezünk a sokszögbe írt körnek?
10. Melyik pont lesz a sokszögbe írt kör középpontja?

GYAKORLATI FELADATOK

641.° Rajzolj, és jelölj meg egy tetszőleges domború hétszöget, nevezd meg minden csúcsát és oldalát! Húzd meg az egyik csúcsából az összes átlóját, majd nevezd meg azokat! Hány háromszögre osztják fel ezek az átlók a hétszöget?

642.° Rajzolj egy olyan hatszöget, melynek minden szöge 120°, és minden oldala 4 cm! Írj a hatszög köré és a hatszögbe is egy körvonalat!

643.° Rajzolj egy ötszöget, melynek minden szöge 108°, és minden oldala 3 cm! Írj az ötszög köré is és az ötszögbe is egy körvonalat!

644.° Rajzolj egy tetszőleges sugarú kört, oszd fel 8 egyenlő ívre! Az osztópontokat felhasználva szerkessz egy körbe írt nyolcszöget!

645.° Rajzolj egy tetszőleges sugarú kört, oszd fel 12 egyenlő ívre! Az osztópontokat felhasználva szerkessz egy körbe írt tizenkétszöget.

GYAKORLATOK

646.° Határozd meg az $ABCDE$ ötszög oldalait, ha a BC oldala 1 cm-rel nagyobb, mint az AB, a CD 2 cm-rel nagyobb, mint az AB, a DE 3 cm-rel nagyobb, mint az AB, az AE 4 cm-rel nagyobb, mint az AB, és az ötszög kerülete 100 cm!

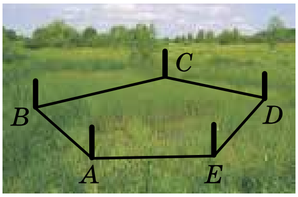
647.° Határozd meg a domború: 1) ötszög; 2) nyolcszög; 3) huszonnégyszög szögeinek összegét!

648.° Határozd meg a domború: 1) kilencszög; 2) tizenhatszög szögeinek összegét!

649.° Létezik-e olyan domború sokszög, amely szögeinek összege 1) 1800°; 2) 720°; 3) 1600°?

650.° Létezik-e olyan domború sokszög, melynek minden szöge: 1) 150°; 2) 100°?

651.• Az ötszög alakú földrészleg kijelölése során (206. ábra) a következő szögeket kapták: $A\angle = 116°$, $B\angle = 98°$, $C\angle = 124°$, $D\angle = 102°$, $E\angle = 130°$. Helyesen végezték-e el a mérést?



206. ábra

652.• Határozd meg a domború hatszög szögeit, ha ezek úgy aránylanak egymáshoz, mint 3 : 3 : 4 : 4 : 5 : 5!

653.• Határozd meg a domború hétszög szögeit, ha ezek úgy aránylanak egymáshoz, mint 6 : 7 : 8 : 9 : 9 : 10 : 11!

654.• Hány átlója van a: 1) kilencszögnek; 2) húszszögnek; 3) n-szögnek?

655.• A domború sokszögnek 54 átlója van. Határozd meg az oldalainak számát, és a szögeinek összegét!

656.• Bizonyítsd be, hogyha a körbe írt sokszög oldalai egyenlők, akkor a szögei is egyenlők!

657.• Bizonyítsd be, hogyha a kör köré írt sokszög szögei egyenlők, akkor az oldalai is egyenlők!

658.•• A domború ötszög minden oldala egyenlő, és az egyik oldalán fekvő szögek derékszögek. Határozd meg az ötszög többi szögét!

659.•• A domború sokszög három szöge 100°, a többi pedig 120°. Állapítsd meg a sokszög típusát!

660.•• Bizonyítsd be, hogyha a domború hatszög szögei egyenlők, akkor az oldalai három pár párhuzamos szakaszt képeznek!

661.•• Bizonyítsd be, hogyha a domború ötszög szögei egyenlők, akkor nincsenek párhuzamos oldalai!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

662. Az egyenlő szárú trapéz átlója a tompaszögének a szögfelezője is egyben, és a trapéz középvonalát 7 cm-es és 11 cm-es szakaszokra osztja. Határozd meg a trapéz kerületét!

663. A derékszögű háromszög átfogójára húzott oldalfelező és magasság megfelelően 13 cm és 12 cm. Határozd meg a trapéz kerületét!

664. Az ABC háromszög ($C\angle = 90°$) A szögének szögfelezője a BC befogót 6 cm-es és 10 cm-es szakaszokra osztja. Határozd meg annak a körnek a sugarát, amely átmegy az A, C pontokon, az adott szögfelező és a BC szakasz metszéspontján!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

665. Az 1 sugarú körvonalon 1000 pontot jelöltek. Bizonyítsd be, hogy találunk olyan pontot, amely a körvonalhoz illeszkedik, és a pont valamint a jelölt pontok közötti távolságok összege nagyobb, mint 1000!

20. A sokszög területének fogalma. A téglalap területe

A terület fogalmával már többször találkoztatok a mindennapi életben: a lakás területe, a nyaraló területe, a mező területe stb.

A tapasztalat azt sugallja, hogy az egyenlő földrészlegeknek a területeik is egyenlők; a lakás területe egyenlő a helyiségek (szobák, konyha, közlekedő stb.) területeinek összegével.

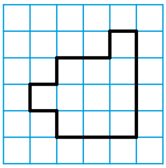
Már tudjátok, hogy a földrészleg területét árban (szotekben) és hektárban, a régiók és az országok területét négyzetkilométerekben, a lakás területét pedig négyzetméterekben mérik.

A terület meghatározása ezekre a gyakorlati ismeretekre épül.

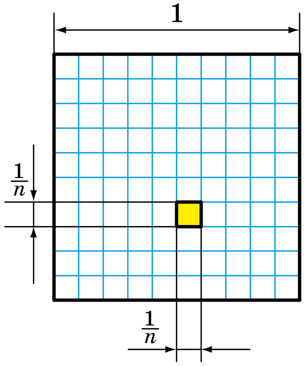
Meghatározás. **A sokszög területének azt a pozitív mennyiséget nevezzük, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:**

1) **az egyenlő sokszögek területei is egyenlők;**
2) **ha egy sokszöget részsokszögekre vágunk szét, akkor a részek területének összege a sokszög területével egyenlő;**
3) **a terület egységének az egységnyi oldalú négyzet területét tekintjük, vagyis annak a négyzetnek a területét, amelynek az oldala egyenlő a hosszegységgel.**

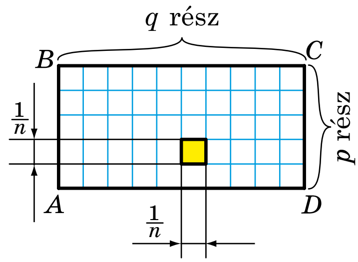
Meghatározni a sokszög területét annyit jelent, mint összehasonlítani azt az egységnyi négyzet területével. Ennek eredményeként a sokszög területének a **számbeli értékét (mérőszám)** kapjuk meg. Ez a szám azt jelenti, hogy az adott sokszög hányszor nagyobb az egységnyi oldalhosszúságú négyzet területénél.



207. ábra



208. ábra



209. ábra

Például, ha a négyzetrácsos füzet egy négyzetét tekintjük területegységnek, akkor a 207. ábrán látható sokszög területe 11 területegység lesz (röviden 11 egys.^{2}).

A terület meghatározására képleteket alkalmaznak, vagyis a sokszög területét ismert elemei (oldalai, átlói, magassága stb.) alapján számítják ki. Ezek közül néhányat már ismertek. Például már többször használtátok az $S = ab$ képletet, ahol S a téglalap területe, a és b a szomszédos oldalainak hossza.

Ennek a képletnek a bizonyítására a következő lemma szükséges.

Lemma. ***Az $\frac{1}{n}$ oldalú négyzet (n – természetes szám) területe $\frac{1}{n^2}$ területegység lesz.***^{2}

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az egységnyi oldalú négyzetet, melyet n^2 egyenlő területű négyzetre osztunk, melynek az oldala $\frac{1}{n}$ (208. ábra)!

A sokszög területének meghatározásából (1. tulajdonság) következik, hogy e négyzetek területei egyenlők. A 2. tulajdonság alapján e négyzetek területeinek összege egyenlő az egységnyi négyzet területével, vagyis 1 egys.^{2}. Ezért mindegyik kis négyzet területe $\frac{1}{n^2}$ egys.^{2}. ▲

20.1. tétel. ***A téglalap területe a két szomszédos oldalának szorzatával egyenlő.***

Bizonyítás. A 209. ábrán látható $ABCD$ téglalap szomszédos oldalainak hossza a és b: $AB = a$, $BC = b$. Bebizonyítjuk, hogy a téglalap S területét az $S = ab$ képlettel határozhatjuk meg abban az esetben, ha az a és b racionális számok.

Az a és b számokat közös nevezőjű törtként adjuk meg:

$$a = \frac{p}{n},\ b = \frac{q}{n},$$

ahol p, q, n természetes számok.

Az AB szakaszt p, a BC szakaszt pedig q egyenlő részre osztjuk. Az osztópontokon keresztül a téglalap oldalaival párhuzamos egyeneseket húzunk. Ekkor a téglalap pq darab $\frac{1}{n}$ oldalú egyenlő négyzetre lesz felosztva.

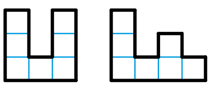
A lemma alapján mindegyik négyzet területe $\frac{1}{n^2}$-tel egyenlő. A terület meghatározása alapján (2. tulajdonság) a téglalap területe egyenlő a téglalapot alkotó négyzetek területeinek összegével, vagyis

$$S = \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}}_{pq \text{ összeadandó}} = pq \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = ab.$$

Ha az a vagy b közül az egyik irracionális szám, ez az eset már nem tartozik az iskolai mértan tantárgy kereteibe. ▲

Meghatározás. Azokat a sokszögeket, melyeknek egyenlő a területe, egyenlő nagyságú sokszögeknek nevezzük.

A terület meghatározásából (1. tulajdonság) következik, hogy az egybevágó alakzatok egyenlő nagyságúak. Például a 210. ábrán két sokszög látható, melyek mindegyike hét egységnyi területű négyzetből áll. Ezek a sokszögek egyenlő nagyságúak, de nem egybevágók.



210. ábra

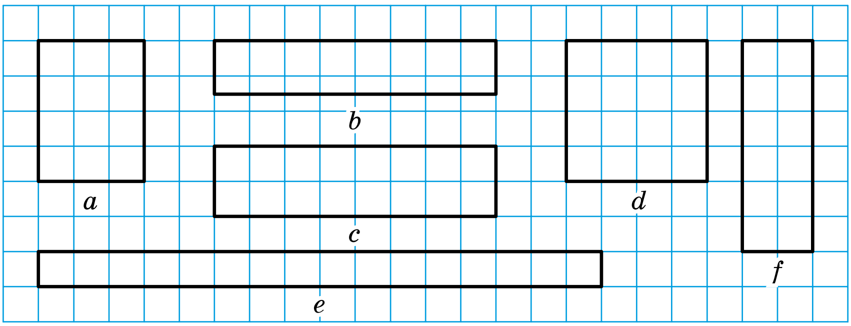
1. Mit nevezünk a sokszög területének?
2. Mit értünk azon, hogy megmérjük a sokszög területét?
3. Mit mutat a terület mérőszáma?
4. Mivel egyenlő annak a négyzetnek a területe, melynek oldala egység, ha n természetes szám?
5. Mivel egyenlő a téglalap területe?
6. Milyen sokszögeket nevezünk egyenlő nagyságúaknak?
7. Ki lehet-e jelenteni, hogyha két alakzat egybevágó, akkor egyenlő nagyságú is?
8. Ki lehet-e jelenteni, hogyha két alakzat egyenlő nagyságú, akkor egybevágó is?

GYAKORLATOK

666.° Határozd meg téglalap oldalait, ha az egyik oldala 5 cm-rel nagyobb, mint a másik, és a téglalap területe 36 cm²!

667.° A téglalap területe 270 cm², oldalainak aránya pedig 5 : 6. Mennyivel egyenlők a téglalap oldalai?

668.° A 211. ábrán lévő téglalapok közül, melyek egyenlő nagyságúak?



211. ábra

669.° A 12 cm oldalú négyzet és az a téglalap, melynek az egyik oldala 8 cm, egyenlő nagyságúak. Határozd meg a téglalap kerületét!

670.° Határozd meg annak a négyzetnek a kerületét, amely egyenlő nagyságú a 2 cm és 32 cm oldalú téglalappal!

671.° Elegendő-e 5 tonna borsó, hogy elvessék egy olyan mezőn, amely téglalap alakú és oldalai 500 m és 400 m, ha 1 ha-nyi terület bevetéséhez 260 kg vetőmag szükséges?

672.° A fal hossza 6 m, magassága 3 m. Elegendő-e a fal burkolásához 5 láda 15 cm oldalhosszúságú négyzet alakú csempe, ha egy ládában 160 csempe van?

673.° Egyszeri felhordás esetén a festékből 180 g szükséges 1 m² falfelületre. Elegendő-e 3 kg festék egy 6 m széles és 3 m magas fal lefestéséhez?

674.° Egy edény falára gyakorolt gáznyomás 0,0015 N/m². Mekkora erővel nyomja a gáz annak a téglalap alakú edénynek a falát, melynek mérete 35 × 24 cm?

675.° Az acél szakítószilárdsága 60 N/mm². Milyen terhelés alatt szakad el az az acélrúd, amelynek keresztmetszete egy 20 mm és 10 mm oldalú téglalap?

676.• A téglalap d átlója az egyik oldalával α szöget alkot. Határozd meg a téglalap területét!

677.• A téglalap 15 cm-es oldala az átlójával 30°-os szöget zár be. Határozd meg a téglalap területét!

678.• Határozd meg két négyzet területének arányát, ha oldalaik úgy aránylanak egymáshoz, mint: 1) 3 : 4; 2) $2 : \sqrt{5}$.

679.• Hogyan aránylanak egymáshoz a négyzet oldalai, ha a területeinek aránya: 1) 25 : 36; 2) 3 : 49?

680.• A téglalap egyik oldala 28 cm. Hogyan változik meg a téglalap területe, ha szomszédos oldalát 5 cm-rel csökkentjük?

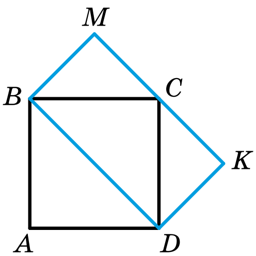
681.• Hogyan változik meg a téglalap területe, ha
1) két szemközti oldalát 3-szorosára növeljük;
2) minden oldalát 3-szorosára növeljük;
3) két szemközti oldalát 6-szorosára növeljük, a másik két oldalát pedig 3-szorosára csökkentjük?

682.• Hogyan változik meg a téglalap területe, ha
1) két szemközti oldalát 4-szeresére csökkentjük, a másik kettőt pedig 2-szeresére;
2) két szemközti oldalát 4-szeresére növeljük, a másik kettőt pedig 4-szeresére csökkentjük?

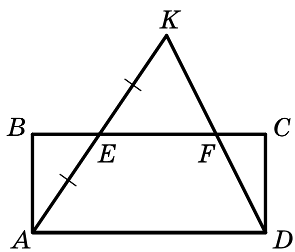
683.• Az $ABCD$ paralelogramma AD oldalának D ponton túli meghosszabbításán felveszünk egy M pontot úgy, hogy $AD = MD$. Bizonyítsd be, hogy az $ABCD$ paralelogramma és az ABM háromszög egyenlő nagyságúak!

684.• Az $ABCD$ négyzet területe 10 cm² (212. ábra). Mivel egyenlő a $BMKD$ téglalap területe?

685.• Bizonyítsd be, hogyha az E pont az AK szakasz felezőpontja (213. ábra), akkor az AKD háromszög és az $ABCD$ téglalap egyenlő nagyságú!



212. ábra



213. ábra

686.• Hányszor nagyobb a körvonal köré írt négyzet területe a körbe írt négyzet területénél?

687.• A téglalap alakú papírlap oldalai egész számú centiméterekben van megadva, területe 12 cm^2 . Hány 4 cm^2-es négyzetet lehet egy ilyen lapból kivágni?

688.• A téglalap alakú papírlap oldalai egész számú centiméterekben van megadva, területe 18 cm^2 . Hány 3 cm oldalhosszúságú négyzetet lehet egy ilyen lapból kivágni?

689.• A téglalap szögfelezője az átlóját 2 : 7 arányban osztja. Határozd meg a téglalap területét, ha kerülete 108 cm!

690.• A téglalap szögfelezője az átlóját 1 : 4 arányban osztja. Határozd meg a téglalap kerületét, ha területe 36 cm^2!

691.* Szerkessz olyan négyzetet, melynek területe két adott négyzet területének összegével egyenlő!

692.* A téglalap oldalai a és b. Szerkessz olyan négyzetet, melynek területe megegyezik az adott téglalap területével!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

693. Az $ABCD$ paralelogramma BD átlójának felezőmerőlegese az AB és CD oldalait metszi. Az AD és BC oldalak meghosszabbítását a BD átló megfelelően az M és K pontokban metszi. Állapítsd meg az $MBKD$ négyszög fajtáját!

694. Az $ABCD$ trapéz AB és CD szárainak meghosszabbításai az M pontban metszik egymást. Határozd meg az AM szakasz hosszát, ha $AB = 6$ cm és $BC : AD = 3 : 4$!

695. Határozd meg a rombusz átlóinak metszéspontja és az oldala közötti távolságot, ha a rombusz hegyesszöge 30°-os, az oldala pedig 8 cm!

FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

696. Két hasonló háromszög mindegyikét két háromszögre vágtak szét úgy, hogy az egyik része hasonló legyen a másik háromszög valamely részével. Lehet-e azt állítani, hogy a másik két rész szintén hasonló egymáshoz?

21. A paralelogramma területe

21.1. tétel. ***A paralelogramma területe az oldala és erre az oldalra bocsátott magasságának szorzatával egyenlő.***

Bizonyítás. A 214. ábrán az $ABCD$ paralelogramma látható, melynek területe S, a magassága pedig BM. Bebizonyítjuk, hogy $S = BC \cdot BM$.

Meghúzzuk a CN magasságot. Könnyen bebizonyítható (végezzétek el önállóan!), hogy az $MBCN$ négyszög téglalap. Bebizonyítjuk, hogy az így kapott téglalap egyenlő nagyságú az adott paralelogrammával.

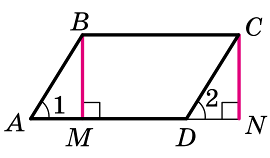
A paralelogramma területe egyenlő az ABM háromszög és az $MBCD$ trapéz területének összegével.

A téglalap területe egyenlő az említett trapéz és a DCN háromszög területének összegével. Azonban az ABM és DCN háromszögek egybevágók az átfogójuk és a hegyesszögűk alapján (az AB és CD szakaszok egyenlők, mint a paralelogramma szemközti oldalai, az 1-es és 2-es szögek egyenlők, mint az AB és DC párhuzamos és az AD metsző egyenes által alkotott megfelelő szögek). Tehát ezek a háromszögek egyenlő nagyságúak. Ebből következik, hogy az $ABCD$ paralelogramma és az $MBCN$ téglalap egyenlő nagyságúak.

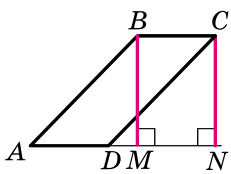
A 20.1. tétel alapján a téglalap területe egyenlő a BC és BM oldalainak szorzatával. Tehát

$S = BC \cdot BM$, ahol S az $ABCD$ paralelogramma területe.

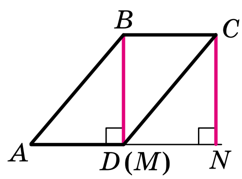
A bizonyítás befejezéséhez még azt az esetet is meg kell vizsgálni, amikor az M pont nem illeszkedik az AD szakaszhoz (215. ábra) vagy a D csúcshoz (216. ábra). Ebben az esetben is az $ABCD$ paralelogramma és az $MBCN$ téglalap egyenlő nagyságú. Bizonyítsátok be ezt önállóan! ▲



214. ábra



215. ábra



216. ábra

Ha a paralelogramma oldalát és a hozzá tartozó magasságát a-val és h-val jelöljük, akkor a paralelogramma S területét a következő képlettel számíthatjuk ki:

$$\boxed{S = ah}.$$

1. Mivel egyenlő a paralelogramma területe?
2. Milyen képlettel számítható ki a paralelogramma területe?

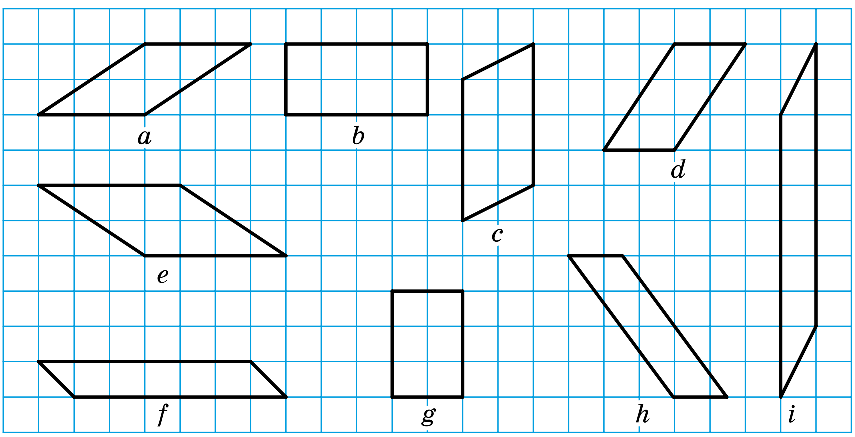
GYAKORLATOK

697.° Határozd meg a paralelogramma területét, ha oldala 14 cm, a hozzá tartozó magasság pedig 6 cm!

698.° Határozd meg a 217. ábrán látható paralelogrammák területeit (a méretek centiméterekben vannak megadva)!

217. ábra

699.° A 218. ábrán lévő paralelogrammák közül melyek lesznek egyenlő nagyságúak?

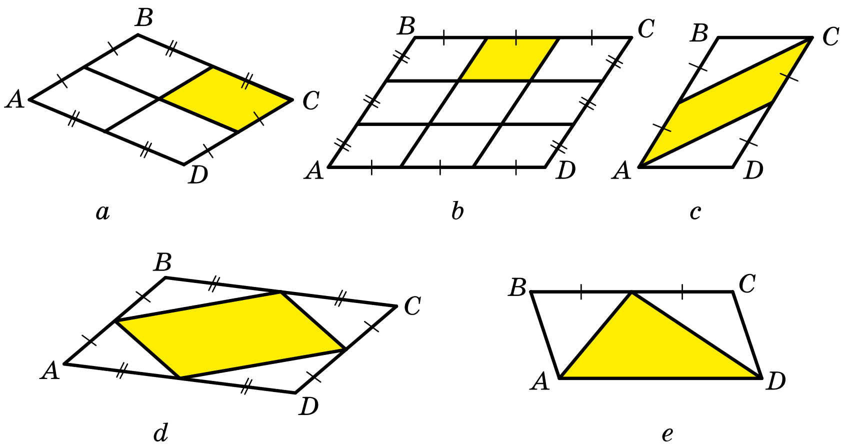


218. ábra

700.° Az *ABCD* paralelogramma (219. ábra) területe *S*. Mivel egyenlő a színezett rész területe?

701.° A paralelogramma területe 17 cm², az egyik oldala pedig 3,4 cm. Határozd meg a paralelogrammának erre az oldalra bocsátott magasságát!

702.° A paralelogramma területe 40 cm², magasságai 5 cm és 4 cm. Határozd meg a paralelogramma oldalait!



219. ábra

703.° Töltsd ki a táblázatot, ha a a paralelogramma oldala, h erre az oldalra bocsátott magassága, S pedig a paralelogramma területe!

a	6,2 cm	16 dm	
h	7 cm		0,9 m
S		64 dm^2	5,4 m^2

704.• A paralelogramma oldalai 10 cm és 15 cm, az egyik magassága pedig: 1) 6 cm; 2) 12 cm. Határozd meg a paralelogramma másik magasságát! Minden esetre vonatkozóan hány megoldása van a feladatnak?

705.• Határozd meg a paralelogramma területét, ha oldalai 15 cm és 25 cm, és az egyik átlója merőleges a kisebbik oldalra!

706.• Határozd meg a paralelogramma területét, ha átlói 26 cm és 24 cm, és az egyik merőleges a paralelogramma oldalára!

707.• A paralelogramma 18 cm hosszúságú átlója merőleges az egyik oldalára, a másik oldalával pedig 30°-os szöget zár be. Határozd meg a paralelogramma területét!

708.• A paralelogramma oldalai a és b, hegyesszöge α. Határozd meg a paralelogramma területét!

709.• A paralelogramma tompaszögének csúcsából bocsátott magasságok 60°-os szöget zárnak be egymással. Határozd meg a paralelogramma területét, ha a magasságai 8 cm és 12 cm!

710.• A paralelogramma oldalai 14 cm és 20 cm, a tompaszög csúcsából bocsátott magasságok 45°-os szöget zárnak be egymással. Határozd meg a paralelogramma területét!

711.• Határozd meg a rombusz területét, ha a magassága 6 cm, a nagyobbik átlója pedig 10 cm!

712.• A rombusz kisebbik átlója a, az egyik szöge pedig 60°. Határozd meg a rombusz területét!

713.• Bizonyítsd be, hogy a paralelogramma magassága fordítottan arányos azzal az alappal, amelyre a magasságot húztuk!

714.• A paralelogramma oldalai 9 cm és 12 cm, két nem egyenlő magasságának összege pedig 14 cm. Határozd meg a paralelogramma területét!

715.• A paralelogramma két oldalának különbsége 12 cm, az ezekre az oldalakra bocsátott magasságai pedig 15 cm és 10 cm. Határozd meg a paralelogramma területét!

716.•• Bizonyítsd be, hogy minden a és b oldalú paralelogramma közül a téglalapnak legnagyobb a területe!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

717. Az ABC háromszögben adott, hogy $C\angle = 90°$, $AC = 7$ cm, $BC = 24$ cm, AM a szögfelező. Határozd meg a BAC és az AMC szögek szinuszát, koszinuszát, tangensét!

718. Az ABC egyenlő szárú háromszög alapja AC, az AM és CK súlyvonalai az O pontban metszik egymást. Bizonyítsd be, hogy az AOC háromszög egyenlő szárú, és határozd meg az oldalait, ha $AM = 21$ cm!

719. Az ABC háromszög AM súlyvonalán úgy jelöltek meg egy D pontot, hogy $AD : DM = 1 : 3$. A D ponton keresztül egy egyenest húztak, amely párhuzamos az AC oldallal. A C csúcstól számítva milyen arányban osztja fel ez az egyenes a BC oldalt?

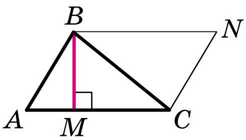
FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

720. Bizonyítsd be, hogy a domború kilencszögben található két olyan átló, melyek közötti szög kisebb, mint 7°!

22. A háromszög területe

22.1. tétel. ***A háromszög területe egyenlő az oldala és az oldalhoz tartozó magasság szorzatának felével.***

Bizonyítás. ⊙ A 220. ábrán az ABC háromszög látható, melynek területe S, a magassága pedig BM. Bebizonyítjuk, hogy $S = \frac{1}{2}AC \cdot BM$.



220. ábra

A B és C csúcson keresztül az AC és AB oldalakkal párhuzamos egyeneseket fektetünk (220. ábra). Ezek az egyenesek az N pontban metszik egymást. A paralelogramma meghatározása értelmében az $ABNC$ négyszög paralelogramma. Az ABC és NCB háromszögek egybevágóak (bizonyítsátok ezt be önállóan!). Tehát a területeik egyenlők. Ezért az ABC háromszög területe az $ABNC$ paralelogramma területének felével egyenlő. Az ABC háromszög BM magassága egyúttal az $ABNC$ paralelogramma magassága is. Ebből következik, hogy $S = \frac{1}{2}AC \cdot BM$. ▲

Ha alkalmazzuk a háromszög oldalainak és szögeinek a jelölését, akkor a bizonyított tételekből kapjuk, hogy:

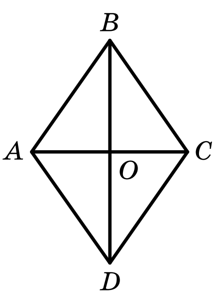
$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c,$$

ahol S a háromszög területe.

Következmény. ***A derékszögű háromszög területe egyenlő a befogók szorzatának felével.***

Bizonyítsátok be ezt a tételt önállóan!

Feladat. Bizonyítsd be, hogy a rombusz területe egyenlő az átlók szorzatának felével!



221. ábra

Megoldás. A 221. ábrán az $ABCD$ rombusz látható, melynek területe S. Az AC és BD átlói az O pontban metszik egymást. Bebizonyítjuk, hogy $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$.

Mivel a rombusz átlói merőlegesek egymásra, ezért az AO és CO szakaszok a BAD és BCD háromszögek magasságai. Ezért felírható:

$$S = S_{BAD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}BD \cdot AO + \frac{1}{2}BD \cdot CO = \frac{1}{2}BD\,(AO + CO) = \frac{1}{2}BD \cdot AC.$$ ●

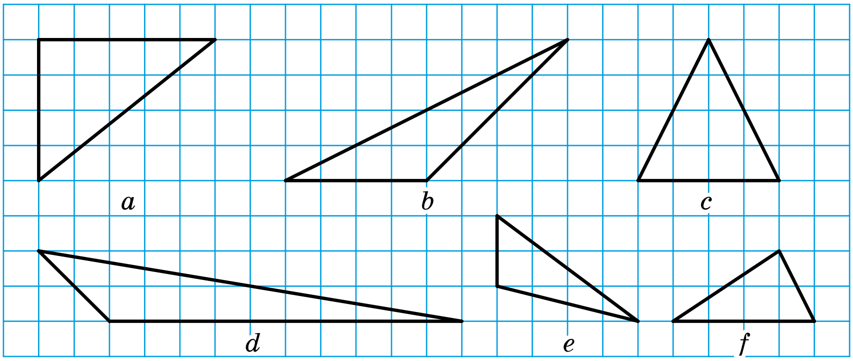
1. Hogyan kell meghatározni a háromszög területét, ha ismert az oldala és a hozzá tartozó magassága?
2. Hogyan kell meghatározni a derékszögű háromszög területét, ha ismertek a befogói?

GYAKORLATOK

721.° A háromszög oldala 12 cm, erre az oldalra bocsátott magassága 2,5 cm. Határozd meg a háromszög területét!

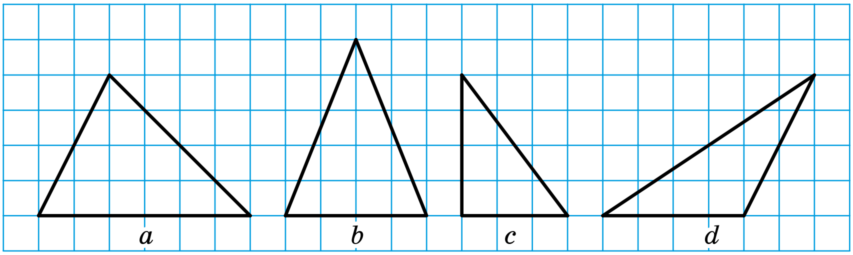
722.° Határozd meg a derékszögű háromszög területét, ha befogói 10 cm és 18 cm!

723.° A 222. ábrán látható háromszögek közül, melyek egyenlő nagyságúak?



222. ábra

724.° Határozd meg a 223. ábrán lévő háromszögek területeit, ha a négyzetrács oldala egy hosszegységnyi!



223. ábra

725.° A háromszög területe 48 cm² . Határozd meg a háromszög oldalát, ha erre az oldalra bocsátott magassága 8 cm!

726.° Ismert, hogy a háromszög oldalai 24 cm és 9 cm, ezek közül a nagyobbik oldalhoz tartozó magasság 6 cm. Határozd meg a kisebb ismert oldalra bocsátott magasságát!

727.° Töltsd ki a táblázatot, ha a a háromszög oldala, h az ehhez az oldalhoz tartozó magassága, S pedig a háromszög területe!

a	2,4 cm	9 dm	
h	4 cm		5 m
S		81 dm²	65 m²

728.° Határozd meg az egyenlő szárú háromszög területét, ha alapja 24 cm, a szára pedig 13 cm!

729.° Az egyenlő szárú háromszög szára 61 cm, az alapra bocsátott magassága 60 cm. Határozd meg a háromszög területét!

730.° A derékszögű háromszög egyik befogója 12 cm, az átfogóhoz tartozó súlyvonal 18,5 cm. Határozd meg a háromszög területét!

731.• Határozd meg a derékszögű háromszög területét, ha az átfogójára bocsátott magassága az átfogót 3 cm-es és 27 cm-es részekre osztja!

732.• A derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága 8 cm, az egyik befogójának átfogóra bocsátott vetülete pedig 6 cm. Határozd meg a háromszög területét!

733.• Az ABC háromszög BD magassága a háromszög AC oldalát AD és CD szakaszokra osztja. Határozd meg az ABC háromszög területét, ha $BC = \sqrt{37}$ cm, $A\angle = 30°$, $CD = 5$ cm!

734.• Az ABC háromszög AM magassága a háromszög BC oldalát BM és MC szakaszokra osztja. Határozd meg az ABC háromszög területét, ha $AB = 10\sqrt{2}$ cm, $AC = 26$ cm, $B\angle = 45°$!

735.• Határozd meg annak az egyenlő szárú háromszögnek a területét, melynek szára b, az alapnál lévő szöge pedig α!

736.• Az egyenlő szárú háromszög alapjához tartozó magassága h, a szárszöge pedig b. Határozd meg a háromszög területét!

737.• Határozd meg az egyenlő oldalú háromszög területét, ha az oldala a!

738.• Határozd meg az egyenlő szárú derékszögű háromszög területét, ha az átfogója c!

739.• Határozd meg a derékszögű háromszög átfogóra bocsátott magasságát, ha a befogói 10 cm és 24 cm!

740.• A derékszögű háromszögbe írt kör érintési pontja az átfogót 8 cm-es és 12 cm-es szakaszokra osztja. Határozd meg a háromszög területét!

741.• Határozd meg az egyenlő szárú háromszög területét, ha a kerülete 54 cm, az alapra bocsátott magassága pedig 9 cm!

742.• Az egyenlő szárú háromszög alapja és az alaphoz tartozó magasság úgy aránylanak egymáshoz, mint 8 : 3. A háromszög szára 40 cm. Határozd meg a háromszög területét!

743.• Bizonyítsd be, hogy a domború négyszög területe egyenlő az átlók szorzatának felével, ha átlói merőlegesek egymásra!

744.• A rombusz területe 120 cm^2, az átlói úgy aránylanak egymáshoz, mint 5 : 12. Határozd meg a rombusz kerületét!

745.• Határozd meg a rombusz területét, ha oldala 25 cm, átlóinak összege pedig 62 cm!

746.• Határozd meg a rombusz területét, ha oldala 39 cm, átlóinak különbsége pedig 42 cm!

747.• Adott az l egyenes, és a vele párhuzamos AB szakasz. Bizonyítsd be, hogy az összes AXB háromszög, ahol X az l egyenes tetszőleges pontja, egyenlő nagyságú!

748.• Bizonyítsd be, hogyha az egyik háromszög magassága megegyezik a másik háromszög magasságával, akkor a területeik aránya egyenlő azon oldalaiknak arányával, melyekhez az adott magasságok tartoznak!

749.• Bizonyítsd be, hogy a súlyvonal a háromszöget két egyenlő nagyságú háromszögre osztja!

750.• Az ABC háromszög AC oldalán felvettek egy M pontot úgy, hogy $\frac{AM}{MC}=\frac{m}{n}$. Bizonyítsd be, hogy $\frac{S_{ABM}}{S_{CBM}}=\frac{m}{n}$!

751.• A háromszögben meghúzták a három súlyvonalat. Bizonyítsd be, hogy ezek hat egyenlő nagyságú háromszögre osztják az adott háromszöget!

752.• Az ABC háromszög B csúcsán át húzzál két egyenest úgy, hogy ezek három egyenlő nagyságú háromszögre osszák az eredeti háromszöget!

753.• A paralelogramma csúcsán át úgy fektess egyeneseket, hogy ezek az adott paralelogrammát: 1) négy egyenlő nagyságú sokszögre; 2) öt egyenlő nagyságú sokszögre osszák fel!

754.• A rombusz csúcsán át fektess két olyan egyenest, melyek az adott rombuszt három egyenlő nagyságú sokszögre osszák!

755.• Szerkessz olyan háromszöget, amely egyenlő nagyságú az adott paralelogrammával!

756.• A háromszögben meg van húzva mind a három magasság. Bizonyítsd be, hogy a legnagyobb oldalhoz a legkisebb magasság tartozik!

757.•• Az ABC háromszög AC oldalán úgy jelöltek egy M pontot, hogy $\frac{AM}{MC}=\frac{m}{n}$. Legyen X pont a BM szakasz egy tetszőleges pontja. Bizonyítsd be, hogy $\frac{S_{ABX}}{S_{CBX}}=\frac{m}{n}$!

758.•• A derékszögű háromszögbe írt körvonal érintési pontja az átfogót olyan szakaszokra osztja, melyek közül az egyik 14 cm-rel nagyobb a másiknál. Határozd meg a háromszög területét, ha a beírt kör sugara 4 cm!

759.•• Az ABC derékszögű háromszögben az AB átfogóhoz a CM magasság tartozik. Az ACM háromszög területe 6 cm^2, a BCM háromszögé pedig 54 cm^2. Határozd meg az ABC háromszög oldalait!

760.•• Határozd meg a derékszögű háromszög területét, ha a hegyesszög szögfelezője a szemközti befogót 21 cm-es és 35 cm-es szakaszokra osztja!

761.•• Határozd meg a derékszögű háromszög területét, ha a derékszög szögfelezője az átfogót 2 cm-es és 6 cm-es szakaszokra osztja!

762.•• Az egyenlő szárú háromszögbe írt körvonal középpontja az alapra bocsátott magasságát 34 cm-es és 16 cm-es szakaszokra osztja. Határozd meg az adott háromszög területét!

763.•• Az egyenlő szárú háromszögbe körvonal van írva. Az érintési pont a háromszög szárát a csúcsától számítva 9 : 8 arányban osztja. Határozd meg a háromszög területét, ha a beírt kör sugara 16 cm!

764.* Az ABC egyenlő oldalú háromszög AB, BC, AC oldalainak B, C és A pontokon túli meghosszabbítására megfelelően a D, E és F pontokat jelölték úgy, hogy $BD = CE = AF = 2AB$. Határozd meg a DEF háromszög területét, ha az ABC háromszög területe 1 cm^2!

765.* Az ABC háromszögben jelöltek egy M pontot úgy, hogy az AMB, BMC és AMC háromszögek területei egyenlők. Bizonyítsd be, hogy az M pont az ABC háromszög súlyvonalainak metszéspontja!

766.* Az ABC háromszög AC oldalán jelöltek egy D pontot. Ezen a ponton át húzz egy egyenest úgy, hogy az adott háromszöget egyenlő nagyságú sokszögekre ossza fel!

767.* Bizonyítsd be, hogy az egyenlő oldalú háromszög bármely pontja és az oldalai közötti távolságok összege az adott háromszögre nézve egy állandó mennyiség!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

768. Az ABC egyenlő szárú háromszögben ($AC = BC$) az A szög szögfelezője a BC oldalt egy M pontban metszi. Határozd meg az ABC háromszög szögeit, ha $AMB\angle = 117°$!

769. Az egyenlő szárú trapéz alapjai 18 cm és 12 cm. Szára az alappal 30°-os szöget zár be. Határozd meg a trapéz átlóját!

770. Az egyenlő szárú trapézba írt kör középpontja a trapéz szárának végpontjaitól 12 cm és 16 cm távolságra van. Határozd meg a trapéz kerületét!

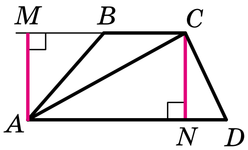
FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

771. A síkon adott n pont ($n > 3$), közülük bármely három nem egy egyenesre illeszkedik. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan háromszög, melynek csúcsai az adott pontok lesznek, amelyhez egyetlen egy pont sem fog tartozni az ($n - 3$) pont közül!

23. A trapéz területe

23.1. tétel. ***A trapéz területe az alapok számtani közepének és magasságának szorzatával egyenlő.***

Bizonyítás. A 224. ábrán látható $ABCD$ trapéz ($AD \parallel BC$) területe S. A CN szakasz a trapéz magassága. Bebizonyítjuk, hogy $S = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CN$.



224. ábra

Meghúzzuk az AC átlóját és a trapéz AM magasságát. Az AM és CN szakaszok az ABC és ACD háromszögek magasságai.

$$S = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}BC \cdot AM + \frac{1}{2}AD \cdot CN =$$

$$= \frac{1}{2}BC \cdot CN + \frac{1}{2}AD \cdot CN = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CN. \blacktriangle$$

Ha a trapéz alapjait és a magasságát megfelelően a, b és h betűkkel jelöljük, akkor a trapéz S területét a következő képlettel számíthatjuk ki:

$$\boxed{S = \frac{a+b}{2} \cdot h}.$$

Következmény. ***A trapéz magassága középvonalának és magasságának szorzatával egyenlő.***

1. Fogalmazd meg a trapéz területéről szóló tételt!
2. Milyen képlettel lehet kiszámítani a trapéz területét?

GYAKORLATOK

772.° Határozd meg a trapéz területét, ha az alapjai 7 cm és 12 cm, a magassága pedig 6 cm!

773.° Határozd meg a trapéz területét, ha középvonala 18 cm, a magassága pedig 9 cm!

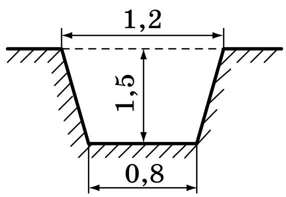
774.° A trapéz területe 96 cm^2, a magassága pedig 3 cm. Határozd meg a trapéz alapjait, ha ezek úgy aránylanak egymáshoz, mint 3 : 5!

775.° A trapéz területe 45 cm^2, az egyik alapja 8 cm, magassága pedig 6 cm. Határozd meg a trapéz másik alapját!

776.° Határozd meg az egyenlő szárú trapéz területét, ha alapjai 14 cm és 16 cm, átlója pedig 17 cm!

777.° Mivel egyenlő annak a derékszögű trapéznak a területe, melynek alapjai 14 cm és 16 cm, a nagyobbik szára pedig $\sqrt{65}$ cm?

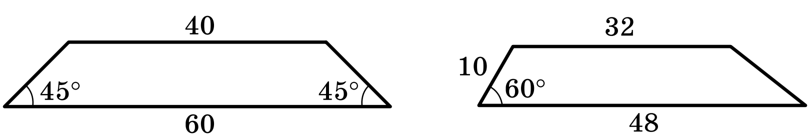
778.° Határozd meg az egyenlő szárú trapéz területét, ha alapjai 14 cm és 32 cm, a szára pedig 15 cm!



225. ábra

779.° A 225. ábrán egy trapéz alakú árok keresztmetszete látható. Határozd meg az árok keresztmetszetének területét (méretei méterben vannak megadva)!

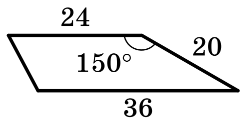
780.° Határozd meg a 226. ábrán lévő trapézok területeit (méreteik centiméterben vannak megadva)!



a *b*

226. ábra

781.° Határozd meg a 227. ábrán lévő trapéz területét (méreteit centiméterekben adtuk meg)!



227. ábra

782.• Az egyenlő szárú trapéz átlója a hegyesszög szögfelezője, és a középvonalát 6 cm-es és 12 cm-es részekre osztja. Határozd meg a trapéz területét!

783.• A derékszögű trapéz egyik átlója egyúttal a tompaszögének szögfelezője. Határozd meg a trapéz területét, ha alapjai 9 cm és 17 cm!

784.• A trapéz alapnál lévő hegyesszögeinek szögfelezői a másik alaphoz illeszkedő pontban metszik egymást. Határozd meg a trapéz területét, ha szárai 17 cm és 25 cm, magassága pedig 15 cm!

785.• A trapéz alapnál lévő tompaszögeinek szögfelezői a másik alaphoz illeszkedő pontban metszik egymást. Határozd meg a trapéz területét, ha szárai 10 cm és 17 cm, magassága pedig 8 cm!

786.• Az egyenlő szárú trapéz szára $20\sqrt{3}$ cm és az alappal 60°-os szöget alkot. Mekkora a trapéz területe, ha kör írható bele?

787.• Az egyenlő szárú trapéz alapjai 32 cm és 50 cm. Mekkora a trapéz területe, ha kör írható bele?

788.• A derékszögű trapéz kisebbik alapja 8 cm, hegyesszöge pedig 45°. Határozd meg a trapéz területét, ha kör írható bele!

789.• A derékszögű trapéz nagyobbik alapja 28 cm, hegyesszöge 30°. Határozd meg a trapéz területét, ha kör írható bele!

790.• Bizonyítsd be, hogy az az egyenes, amelyre a trapéz középvonalának felezőpontja illeszkedik és metszi az alapjait, az adott trapézt két egyenlő nagyságú sokszögre osztja!

791.• Szerkessz az adott trapézzal egyenlő nagyságú:
1) paralelogrammát, amely nem téglalap;
2) téglalapot!

792.• Szerkessz az adott trapézzal egyenlő nagyságú háromszöget!

793.•• Határozd meg az egyenlő szárú trapéz területét, ha alapjai 24 cm és 40 cm, az átlója pedig merőleges a szárára!

794.•• Az egyenlő szárú trapéz átlója merőleges a 15 cm hosszúságú szárra. Határozd meg a trapéz területét, ha a köréírt körének sugara 12,5 cm!

795.•• A trapéz merőleges átlói közül az egyik 48 cm, a középvonala pedig 25 cm. Határozd meg a trapéz területét!

796.•• Az egyenlő szárú trapéz átlója egyúttal hegyesszögének szögfelezője, és merőleges a szárára. Határozd meg a trapéz területét, ha a kisebbik alapja a!

797.•• Az egyenlő szárú trapézba kör van írva. Az érintési pont az egyik szárat 4 cm-es és 9 cm-es szakaszokra osztja. Határozd meg a trapéz területét!

798.•• A derékszögű trapézba egy12 cm sugarú kör van írva. A nagyobbik szárat az érintési pont két szakaszra osztja, melyek közül a nagyobb 16 cm. Határozd meg a trapéz területét!

799.•• Az egyenlő szárú trapéz átlója a tompaszög csúcsából bocsátott magasságát 15 cm-es és 12 cm-es szakaszokra osztja, a trapéz szára pedig egyenlő a kisebbik alapjával. Határozd meg a trapéz területét!

800.•• A derékszögű trapéz nagyobbik átlója a tompaszög csúcsából bo- csátott magasságát 15 cm-es és 9 cm-es szakaszokra osztja. A nagyobbik szára a trapéz kisebbik alapjával egyenlő. Határozd meg a trapéz területét!

801.•• Az $ABCD$ trapézban adott, hogy $BC \parallel AD$, az M pont az AB szakasz felezőpontja. Határozd meg a CMD háromszög területét, ha az adott trapéz területe S!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

802. Az $ABCD$ paralelogramma kerülete 50 cm, az ABD háromszög kerülete pedig 40 cm. Határozd meg a paralelogramma oldalait, ha $AD = BD$!

803. Az $ABCD$ rombusz AC átlója annak a körvonalnak az átmérője, amely átmegy az AB szakasz felezőpontján. Határozd meg a rombusz szögeit!

804. Az ABC háromszög AB, BC és AC oldalain megfelelően felvették az M, K és D pontokat úgy, hogy $MK \parallel AC$, $DK \parallel AB$, $BK : KC = 3 : 2$. Határozd meg az $AMKD$ négyszög kerületét, ha $AC = 15$ cm, $AB = 25$ cm!

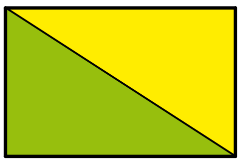
FIGYELD MEG, RAJZOLD LE, SZERKESZD MEG, KÉPZELD EL!

805. Az 1,5 cm oldalhosszúságú négyzetet le lehet-e takarni három 1 cm oldalhosszúságú négyzettel?

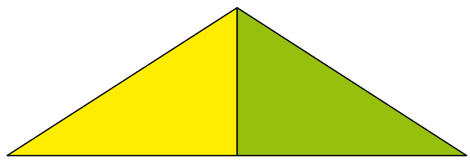
AZ EGYMÁSBA ÁTDARABOLHATÓ ÉS EGYENLŐ NAGYSÁGÚ SOKSZÖGEK

Ha egy sokszöget szét lehet darabolni olyan részekre, melyekből egy másik sokszöget lehet összerakni, akkor ezeket **egymásba átdarabolható sokszögek**nek nevezzük.

Ha egy téglalapot az átlója mentén kettévágjuk (228. ábra), akkor két olyan egybevágó derékszögű háromszöget kapunk, melyekből összerakható egy egyenlő szárú háromszög (229. ábra). A 228. és 229. ábrán lévő alakzatok egymásba átdarabolhatóak lesznek.



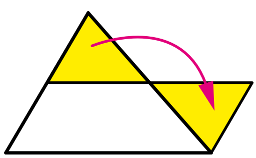
228. ábra



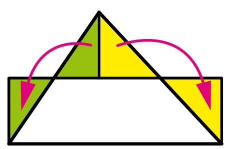
229. ábra

Szemmel látható, hogy az egymásba átdarabolható alakzatok egyenlő nagyságúak is. Ezt a tényt alkalmazzák a tételek bizonyításakor, és a feladatok megoldása során is. Például a 21.1. tétel bizonyítása során a paralelogrammát az ABM háromszögre és az $MBCD$ trapézra vágtuk szét, melyekből kialakítottuk az $MBCN$ téglalapot (lásd a 215. ábrát).

Ha a háromszöget a középvonala mentén kettévágjuk, akkor egy háromszöget és egy trapézt kapunk, melyekből össze lehet rakni egy paralelogrammát (230. ábra).



230. ábra



231. ábra

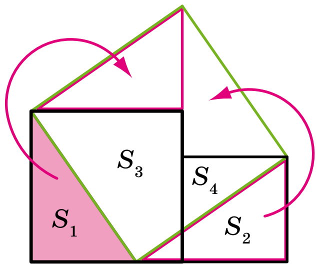
Könnyen megállapítható (önállóan végezzétek el!, hogy a háromszög feldarabolásával a háromszög területének képletét egy másik módszerrel is megkaphatjuk (22.1. tétel). Ugyanezt a célt szolgálja a háromszög feldarabolása, melynek segítségével téglalapot kapunk (231. ábra).

Eukleidész az *Elemek* című könyvében a következőképpen fogalmazza meg a Pitagorasz-tételt:

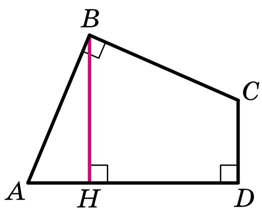
„A derékszögű háromszögekben a derékszöggel szemközti oldalra emelt négyzet területe egyenlő a derékszöget közrefogó oldalakra emelt négyzetek összegével."

Ha bebizonyítjuk, hogy a befogókra emelt négyzeteket szét lehet darabolni olyan részekre, amelyekből egy olyan négyzetet lehet összerakni, melynek az oldala megegyezik az átfogó hosszával, akkor ezzel a Pitagorasz-tételt is bebizonyítottuk.

A 232. ábrán a szétdarabolás egy lehetséges módját mutatjuk be. A befogókra emelt négyzeteket S_1, S_2, S_3, S_4 területű részekre vágjuk szét. Ezekből a részekből egy, az átfogóra emelt négyzetet rakunk össze.



232. ábra



233. ábra

A sokszög területének meghatározásából következik, hogy az egymásba átdarabolható sokszögek területei egyenlők egymással. A következő tétel azonban nem ilyen egyértelmű.

Tétel. ***Két azonos területű sokszög átdarabolható egymásba.***

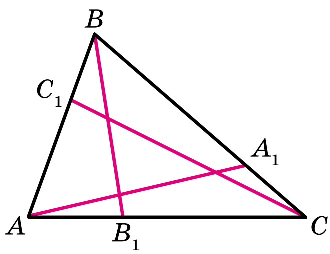
Ezt a tételt először 1832-ben bizonyította be Bolyai Farkas magyar matematikus. Nem sokkal később Paul Gerwien német matematikus egy másik bizonyítását adta meg. Ezért ezt a tételt **Bolyai-Gerwien-**tételnek nevezzük.

GYAKORLATOK

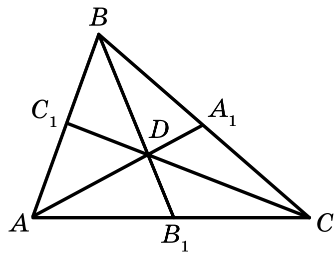
1. Bizonyítsd be, hogy a trapéz átdarabolható egy olyan paralelogrammává, melynek alapja a trapéz középvonalával egyenlő, magassága pedig a trapéz magasságával!
2. Bizonyítsd be, hogy a trapéz területe egyenlő a trapéz szárának és a trapéz másik szára felezőpontjából bocsátott merőleges szakasz hosszának szorzatával, melyet az adott oldalt tartalmazó egyenesre húzunk!
3. Az $ABCD$ négyszögben az ABC és ADC szögek derékszögek, az AB és BC oldalak egyenlők (233. ábra). Adott, hogy $BH \perp AD$ és $BH = 1$. Határozd meg az $ABCD$ négyszög területét!

CEVA-TÉTEL

Az ABC háromszög BC, CA és AB oldalain jelöljünk tetszőleges A_1, B_1, C_1 pontokat (234. ábra). Ezeket az AA_1, BB_1, CC_1 szakaszokat az ABC háromszög **Ceva-szakaszai**nak nevezzük, amit Giovanni Benedetto Ceva (1648–1734) olasz mérnökről és matematikusról neveztek el, aki egy csodálatos tételt fedezett fel.



234. ábra



235. ábra

Ha az A_1, B_1, C_1 pontokat úgy jelöljük, hogy a Ceva-szakaszok szögfelezői vagy oldalfelezői vagy magasságai egy hegyesszögű háromszögnek, akkor a Ceva-szakaszok egy pontban metszik egymást.

Ha három egyenes egy pontban metszi egymást, akkor ezeket **összefutó egyenesek**nek nevezzük.

A Ceva-tétel fogalmazza meg azt a feltételt, mikor tekinthető három tetszőleges Ceva-szakasz összefutó egyenesnek.

Tétel. ***Ahhoz, hogy az ABC háromszög AA_1, BB_1, CC_1 Ceva-szakaszai egy pontban metsszék egymást, szükséges és elégséges, hogy a következő egyenlőség teljesüljön*:**

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (*)$$

Bizonyítás. Először bebizonyítjuk az egyenesek összefutásának szükséges feltételét: ha az AA_1, BB_1, CC_1 Ceva-szakaszok egy pontban metszik egymást, akkor teljesülnie kell a (*) egyenlőségnek.

Alkalmazva a 757. kulcsos feladat eredményét, felírható a következő egyenlőség (235. ábra):

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{ADC}}{S_{BDC}},\quad \frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}},\quad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{BDC}}{S_{ABD}}.$$

Egymással összeszorozva ezeket az egyenlőségeket, megkapjuk a (*) egyenlőséget.

Most bebizonyítjuk az egyenesek összefutásának elégséges feltételét: ha tejesül a (*) egyenlőség, akkor az AA_1, BB_1 , CC_1 Ceva-szakaszok egy pontban metszik egymást.

Legyen az AA_1 és BB_1 Ceva-szakaszok metszéspontja D, és a C csúcsra valamint a D pontra illeszkedő Ceva-szakasz az AB szakaszt egy C_2 pontban metszi. A fenti bebizonyítás alapján felírható, hogy:

$$\frac{AC_2}{C_2B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Ennek az egyenlőségnek a bal oldalát egyenlővé téve a (*) egyenlőség bal oldalával, a következőt kapjuk: $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC_2}{C_2B}$, vagyis a C_1 és C_2 pontok az AB szakaszt ugyanolyan arányban osztják fel, azaz egybeesnek. Tehát a CD egyenes az AB oldalt a C_1 pontban metszi.▲

GYAKORLATOK

1. Bizonyítsd be, hogy
1) a háromszög súlyvonalai összefutó egyenesek;
2) a háromszög szögfelezői összefutó egyenesek;
3) a háromszög magasságai összefutó egyenesek!

2. Legyen A_1, B_1, C_1 pontok az ABC háromszögbe írt körvonalának a BC, AC, AB oldalaihoz tartozó érintési pontjai. Bizonyítsd be, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 Ceva-szakaszok összefutó egyenesek lesznek!

3. Az AP, BP és CP egyenesek az ABC háromszög oldalait megfelelően az A_1, B_1 és C_1 pontokban metszik. Bizonyítsd be, hogy a BC, CA és AB szakaszok felezőpontjain áthaladó egyenesek, melyek megfelelően párhuzamosak az AP, BP és CP egyenesekkel, összefutó egyenesek lesznek!

Útmutatás. Alkalmazd a Ceva-tételt arra a háromszögre, melynek csúcsai az ABC háromszög oldalainak felezőpontjai!

4. SZ. FELADATSOR. ÖNELLENŐRZŐ FELADATOK, TESZTEK

1. Hány oldalú a domború n-szög, ha szögeinek összege 1260°?

A) 7; B) 9; C) 11; D) 13.

2. A domború n-szögnek 14 átlója van. Mennyivel egyenlő a szögeinek összege?

A) 1000°; B) 800°; C) 900°; D) 720°.

3. Hogyan változik meg a téglalap területe, ha minden oldalát tizedére csökkentjük?

A) 100-adára csökken;
B) 20-adára csökken;
C) 10-edére csökken;
D) 1000-redére csökken.

4. A paralelogramma területe 80 cm², az egyik oldala pedig 16 cm. Milyen lehet a paralelogramma szomszédos oldalának hossza?

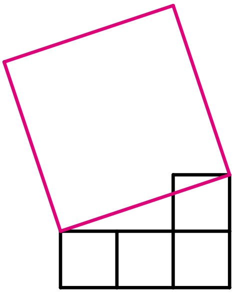
A) 2 cm; B) 3 cm; C) 4 cm; D) 6 cm.

5. Az $ABCD$ paralelogramma BC oldalán jelöltünk egy M pontot úgy, hogy $BM : MC = 1 : 3$. Mivel egyenlő az ABM háromszög területe, ha a paralelogramma területe S?

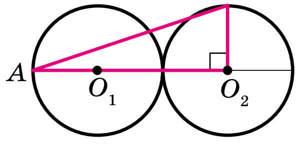
A) $\frac{S}{8}$; B) $\frac{S}{4}$; C) $\frac{S}{16}$; D) $\frac{S}{2}$.

6. A 236. ábrán mindegyik kis négyzet területe 4 cm². Mennyi a nagy négyzet területe?

A) 16 cm²; B) 20 cm²; C) 32 cm²; D) 40 cm².



236. ábra



237. ábra

7. Az 1 cm-es sugarú körbe egy négyzetet és egy egyenlő oldalú háromszöget írtak. Mivel egyenlő az adott háromszög és a négyzet területeinek aránya?

A) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; B) $3\sqrt{3}$; C) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; D) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

8. Az O_1 és O_2 pontok két egyenlő nagyságú kör középpontjai, melyeknek egy közös pontjuk van (237. ábra), $BO_2 \perp O_1O_2$, $AB = 10$ cm. Mivel egyenlő az ABO_2 háromszög területe?

A) 10 cm^2; B) 15 cm^2; C) 18 cm^2; D) 20 cm^2.

9. Adott két A és B pont. Az olyan X pontok mértani helye, melyekre az AXB háromszögek területei az adott S számmal egyenlők:

A) egy AB átmérőjű kör;
B) az AB szakasz felezőmerőlegese;
C) az AB egyenessel párhuzamos egyenes;
D) két egyenes, melyek párhuzamosak az AB-vel.

10. Az egyenlő szárú trapéz átlói merőlegesek egymásra, és a trapéz középvonalát három egyenlő részre osztják. Mivel egyenlő a trapéz területe, ha a nagyobbik alapja 12 cm?

A) 50 cm^2; B) 64 cm^2; C) 81 cm^2; D) 144 cm^2.

A 4. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

A domború n-szög szögeinek összege

A domború n-szög szögeinek összege $180°(n - 2)$.

A sokszög köré írt körvonal

A sokszög köré írt körvonalnak azt a körvonalat nevezzük, amelyhez a sokszög minden csúcsa illeszkedik.

A sokszögbe írt körvonal

Azt a körvonalat, amely a sokszög minden oldalát érinti, a sokszögbe írt körvonalnak nevezzük.

A sokszög területe

A sokszög területének azt a pozitív mennyiséget nevezzük, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1) az egybevágó sokszögek területei egyenlők;
2) ha egy sokszöget egymásba átdarabolható sokszögekre vágunk szét, akkor a részek területének összege a sokszög területével egyenlő;

3) a terület egységének az egységnyi oldalú négyzet területét tekintjük, vagyis annak a négyzetnek a területét, amelynek oldala egységnyi hosszúságú.

A téglalap területe

A téglalap területe a két szomszédos oldalának szorzatával egyenlő.

Egyenlő nagyságú sokszögek

Azokat a sokszögeket, melyeknek egyenlő a területe, egyenlő nagyságú sokszögeknek nevezzük.

A paralelogramma területe

A paralelogramma területe az oldala és erre az oldalra bocsátott magasságának szorzatával egyenlő.

A háromszög területe

A háromszög területe egyenlő az oldala és az oldalhoz tartozó magasság szorzatának felével.

A derékszögű háromszög területe

A derékszögű háromszög területe egyenlő a befogók szorzatának felével.

A trapéz területe

- A trapéz területe az alapok számtani közepének és a magasságának szorzatával egyenlő.
- A trapéz területe a középvonalának és a magasságának szorzatával egyenlő.

A 8. OSZTÁLYOS TANANYAG ISMÉTLŐ GYAKORLATAI

1. Négyszögek

806. Határozd meg a paralelogramma kerületét, ha az egyik szögének szögfelezői a paralelogramma oldalát 9 cm-es és 14 cm-es szakaszokra osztja!

807. Az $ABCD$ paralelogramma BAD szögének szögfelezője a BC oldalt az M pontban metszi úgy, hogy $BM : MC = 5 : 4$. Határozd meg a paralelogramma oldalait, ha a BOC háromszög kerülete 8 cm-rel hosszabb, mint a COD háromszögé, ahol az O pont a paralelogramma átlóinak a felezőpontja!

808. Az $ABCD$ paralelogrammában adott, hogy $2ADB\angle = A\angle + BDC\angle$. Határozd meg az ADB szöget!

809. Az $ABCD$ paralelogrammában $AB = a$, $BC = b$, $a > b$. Az ABD és CBD háromszögekbe írt körvonalak a BD átlót megfelelően az M és K pontokban metszik. Határozd meg az MK szakaszt!

810. Hány különböző paralelogrammát lehet összerakni két egybevágó háromszögből, ha ezek: 1) egyenlő oldalúak; 2) egyenlő szárúak; 3) különböző oldalúak?

811. Igaz-e az állítás:

1) ha a négyszög átlói egyenlők, akkor ez a négyszög paralelogramma;
2) ha a négyszög két oldala párhuzamos egymással és az átlóinak metszéspontja egyenlő távolságra van ezektől az oldalaktól, akkor ez a négyszög paralelogramma;
3) ha a négyszög két oldala párhuzamos, a másik kettő pedig egyenlő, akkor ez a négyszög paralelogramma;
4) ha a négyszög két szemközti szögének szögfelezője merőleges a harmadik szögének szögfelezőjére, akkor ez a négyszög paralelogramma;
5) ha a négyszöget az átlója két egybevágó háromszögre osztja, akkor ez a négyszög paralelogramma;
6) ha a négyszöget minden átlója két egybevágó háromszögre osztja, akkor ez a négyszög paralelogramma;
7) ha a négyszög minkét szemközti csúcsa egyenlő távolságra van attól az átlótól, amely a másik két csúcsát köti össze, akkor ez a négyszög paralelogramma?

812. Igaz-e az állítás:

1) ha a négyszög két szemközti oldala párhuzamos egymással, és az egyik átlója két egybevágó háromszögre osztja a négyszöget, akkor ez a négyszög paralelogramma;

2) ha a négyszög két oldala párhuzamos egymással, és az átlók felezőpontja az egyik átlót felezi, akkor ez a négyszög paralelogramma;
3) ha a négyszög két szemközti oldala egyenlő és az átlói is egyenlők, akkor ez a négyszög paralelogramma?

813. A rombusz kerülete 8 cm, a magassága pedig 1 cm. Határozd meg a rombusz szögeit!

814. Az $ABCD$ rombusz B szöge 40°-os, az M és K pontok az A csúcsból bocsátott BC és CD merőlegesek megfelelő talppontjai. Határozd meg az AMK háromszög szögeit!

815. Az $ABCD$ téglalap A csúcsából az AC átlóra bocsátott merőleges az ABC szöget olyan részekre osztja, melyek aránya 1 : 3. Határozd meg az adott merőleges és a BD átló közötti szöget!

816. A téglalap átlójának felezőmerőlegese a nagyobbik oldallal 60°-os szöget alkot. Ennek az egyenesnek a téglalap belsejébe eső szakasza 12 cm. Határozd meg a téglalap nagyobbik oldalát!

817. Az $ABCD$ rombusz AC átlóján úgy jelölték az M és K pontokat, hogy $AM = CK$. Bizonyítsd be, hogy $ABM\angle = CBK\angle$!

818. A rombusz kerülete 42 cm-rel hosszabb a rombusz oldalánál. Határozd meg a rombusz kerületét!

819. Igaz-e az állítás:
1) ha a négyszög átlói egyenlők, akkor ez a négyszög téglalap;
2) ha a négyszög átlói egyenlők és merőlegesek, akkor ez a négyszög négyzet;
3) ha a négyszög átlói merőlegesek és a metszéspontjukban felezik egymást, akkor ez a négyszög négyzet;
4) ha a négyszög átlói egyenlők, merőlegesek és a metszéspontjukban felezik egymást, akkor ez a négyszög négyzet;
5) ha a négyszög három oldala egyenlő, az átló pedig az egyik szögének szögfelezője, akkor ez a négyszög rombusz?

Ha egyetértesz az állítással, akkor indokold meg azt, ha nem értesz egyet, akkor rajzolj egy olyan négyszöget, amellyel cáfolod az állítást!

820. Az ABC háromszög AB, BC, AC oldalain megfelelően jelölték a D, F és E pontokat úgy, hogy $BD = BF = DE = EF$. Bizonyítsd be, hogy az F pont a BDE szög szögfelezőjéhez illeszkedik!

821. A kör AC húrjának felezőpontja és az AB átmérője közötti távolság 4 cm. Határozd meg a BC húr hosszát, ha $BAC\angle = 30°$!

822. Szerkessz paralelogrammát adott csúcsa és ezt a csúcsot nem tartalmazó oldalainak felezőpontjai által!

823. Az $ABCD$ trapéz AB szára és a BC alapja megfelelően 16 cm és 15 cm. Melyik szakasz metszi a BAD szög szögfelezőjét: a BC alapja vagy a CD szára?

824. Az egyenlő szárú trapéz átlójának hossza egyenlő a hosszabbik alapjával, és 40°-os szöget zár be vele. Határozd meg a trapéz szögeit!

825. A körvonalon kívül lévő ponton áthaladó metsző egyenesek közötti szög 35°. E szög a szárai között keletkező ívek közül a nagyobb, 100°-os. Határozd meg az adott szög szárai közé eső kisebbik ív fokmértékét!

826. Bizonyítsd be, hogyha a szög csúcsa a körön kívül fekszik, és a szög az átmérőre támaszkodik, akkor ez hegyesszög!

827. Bizonyítsd be, hogyha a szög csúcsa a körben helyezkedik el, és a szög az átmérőre támaszkodik, akkor ez tompaszög vagy egyenesszög!

828. Az $ABCD$ körbe írt négyszög átlói merőlegesek, $ACB\angle = 10°$, $BDC\angle = 70°$. Határozd meg az adott négyszög szögeit!

2. A háromszögek hasonlósága

829. Két párhuzamos egyenes az A és C pontokban metszi az M csúcsú szög egyik szárát, a másik szárát pedig megfelelően a B és D pontokban. Határozd meg az MA és MC szakaszokat, ha $MB = BD = 2 : 3$ és $MA + MC = 14$ cm!

830. Határozd meg a trapéz alapjainak arányát, ha az átlói a trapéz középvonalát három egyenlő részre osztja!

831. Az ABC háromszög BD súlyvonalán felvettek egy M pontot úgy, hogy $BM : MD = 3 : 2$. Az AM egyenes a BC oldalt egy E pontban metszi. Milyen arányban osztja fel az E pont a BC oldalt a B csúcstól számítva!

832. Az $ABCD$ paralelogramma A szögének szögfelezője a BD átlót és a BC oldalt megfelelően az E és F pontokban metszi, $BE : ED = 2 : 7$. Határozd meg a $BF : FC$ arány értékét!

833. Az ABC háromszög AD és BM oldalfelezői az O pontban metszik egymást. Az O ponton át az AC oldallal párhuzamosan egy egyenest fektettek, amely a BC oldalt a K pontban metszi. Határozd meg a BK, DK és KC szakaszok hosszát, ha $BC = 18$ cm!

834. Az ABC háromszög BD szögfelezője az AC oldalt AD és DC szakaszokra osztja. Ezek a szakaszok úgy aránylanak egymáshoz, mint 3 : 5. Határozd meg az AB és BC oldalait, ha összegük 56 cm!

835. Az egyenlő szárú háromszögbe írt kör sugara $\frac{2}{9}$-ed része a háromszög alapjára bocsátott magasságának. Határozd meg a háromszög oldalait, ha a kerülete 72 cm!

836. A háromszög oldalai 2,5 cm, 4,5 cm és 6 cm. Határozd meg annak a hasonló háromszögnek az oldalait, amelynek legnagyobb oldala 24 cm!

837. Az ABC háromszögbe $ADEF$ rombuszt írtak úgy, hogy az A szögük közös, az E csúcsa a BC oldalra illeszkedik. Határozd meg a rombusz oldalait, ha $AB = a$, $AC = b$!

838. A paralelogramma kerülete 72 cm, magasságainak aránya pedig 5 : 7. Határozd meg a paralelogramma oldalait!

839. Adott három pont, melyek nem illeszkednek egy egyenesre. Fektess egy egyenest, amely egyenlő távolságra lesz ezektől a pontoktól! Hány megoldása van a feladatnak?

840. Az MB egyenes a kört az A és B pontokban metszi (az A pont az M és B között helyezkedik el), az MD egyenes pedig a C és D pontokban (a C pont az M és D pontok között helyezkedik el). Határozd meg az AB szakaszt, ha $AB = MC$, $MA = 20$ cm, $CD = 11$ cm!

841. Az AB egyenes a B pontban érinti az adott kört, az AC egyenes a C és D pontokban metszi azt (a D pont az A és C pontok között helyezkedik el). Határozd meg a CD szakasz hosszát, ha $AB = 6$ cm, $AC = 9$ cm!

842. Az AB és CD húrok az M pontban metszik egymást, $CM = 4$ cm, $DM = 6$ cm, az AM szakasz 2 cm-rel hosszabb a BM szakasznál. Határozd meg az AB húrt!

843. Az A csúcsú szög egyik szárán B és C pontokat jelöltek, a másik szárán pedig a D és E pontokat, miközben $AB = 10$ cm, $AC = 18$ cm, $AD : AE = 5 : 9$. Határozd meg a CE szakasz hosszát, ha $BD = 20$ cm!

3. A derékszögű háromszögek

844. A derékszögű háromszög átfogójára húzott súlyvonal hossza 10 cm. Az átfogó felezőpontja és az átfogóra bocsátott magasság talppontja közötti távolság 6 cm. Határozd meg a háromszög kerületét!

845. Az egyenlő szárú háromszög szára 15 cm, az alapra bocsátott magassága 6 cm-rel kisebb, mint az alapja. Határozd meg a háromszög alapját!

846. Az a egyenesre nem illeszkedő K pontból KA és KB ferdéket húztak, amelyek megfelelően 45° és 30°-os szöget zárnak be vele. Határozd meg a KB ferde vetületét az a egyenesre, ha $KA = 8\sqrt{6}$ cm!

847. A rombusz átlóinak metszéspontjából az oldalára bocsátott merőleges az adott oldalt 4 cm-es és 25 cm-es részekre osztja. Határozd meg a rombusz átlóit!

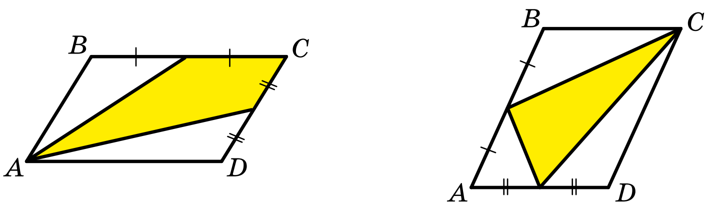
848. A derékszögű háromszög átfogójára illeszkedő kör középpontja érinti a nagyobbik befogót, és ezzel a befogóval szemközti szög csúcsa illeszkedik a körvonalra. Határozd meg a kör sugarát, ha befogói 5 cm és 12 cm!

849. A derékszögű háromszög átfogói 6 cm és 8 cm. Határozd meg a kisebbik hegyesszögének csúcsa és a beírt kör középpontja közötti távolságot!

850. A körvonal egyik pontjából az átmérőjére bocsátott merőleges az átmérőt két olyan részre osztja, melyek közül az egyik 27 cm-rel nagyobb, mint a másik. Határozd meg a körvonal átmérőjét, ha a merőleges hossza 18 cm!

4. Sokszögek. A sokszög területe

851. Az $ABCD$ paralelogramma területe S. Határozd meg a festett rész területét (238. ábra)!



a *b*

238. ábra

852. Határozd meg az $ABCD$ paralelogramma területét, ha $BD \perp AD$, $BD = 16$ cm, $A\angle = 45°$!

853. Határozd meg a négyzet területét, ha átlója d!

854. Határozd meg az egyenlő oldalú háromszög területét, ha a köré írt körvonalának sugara R!

855. A derékszögű háromszög befogója b, ezzel a befogóval szemközti szöge pedig β. Határozd meg a háromszög területét!

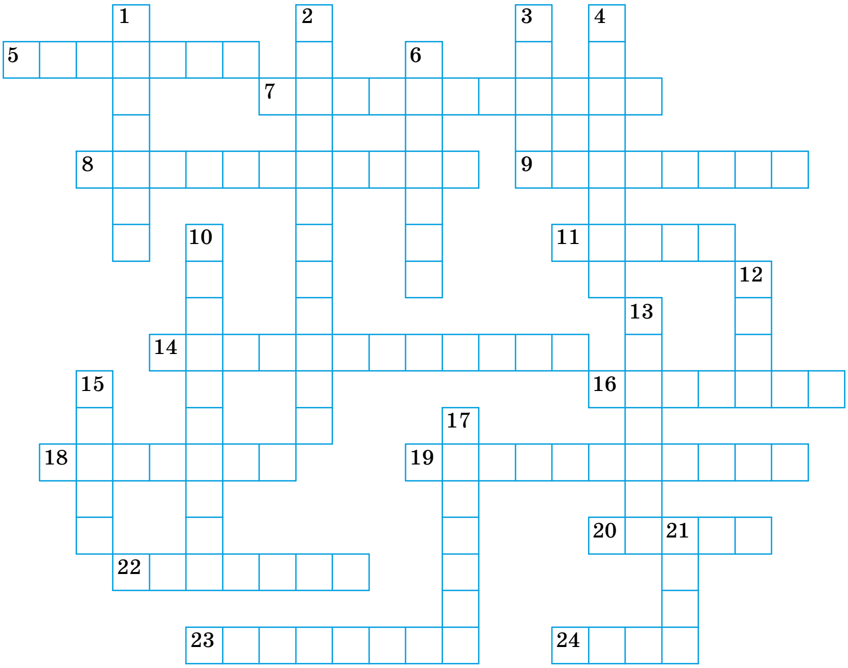
856. A derékszögű háromszög hegyesszöge α, átfogója pedig c. Határozd meg a háromszög területét!

857. Az egyenlő szárú trapéz kisebbik alapja 15 cm, a magassága pedig $3\sqrt{3}$ cm. Határozd meg a trapézt területét, ha egyik szöge 150°!

858. Az egyenlő szárú trapéz átlói a hegyesszögeinek szögfelezői, és a metszéspontjuk 5 : 13 arányban osztja őket. Határozd meg a trapéz területét, ha a magassága 90 cm!

859. Az egyenlő szárú trapéz területe $36\sqrt{2}$ см², hegyesszöge pedig 45°. Határozd meg a trapéz magasságát, ha belé körvonal írható!

860. Oldd meg a keresztrejtvényt! A válaszoknak az ukrán nyelvű megfelelőjét írd a megfelelő kockába!



Vízszintes:
5. Ógörög tudós.
7. A paralelogramma egyik fajtája.
8. Szög, melynek csúcspontja megegyezik egy körvonal központjával.
9. Négyszög, melynek csak egy pár párhuzamos oldala van.
11. Derékszögű háromszög hegyesszögével szemközti befogó és az átfogó hányadosa.
14. Mértani alakzat.
16. Háromszögek, melyeknek szögei egyenlőek az oldalai pedig arányosak.
18. Derékszögű háromszög hegyesszög melletti befogó és átfogó hányadosa.
19. Egyenlő területű sokszögek.

20. Ógörög matematikus.
22. Egyenlő oldalú téglalap.
23. Sokszög szögeinek összege.
24. Két ponttal elválasztott körvonal egyik része.

Függőleges:
1. Derékszögű háromszög hegyesszög szembeni befogó és a melletti befogó hányadosa.
2. Négyszög fajtája.
3. Derékszögű háromszög oldala.
4. Szög, melynek csúcspontja megegyezik a körvonal bármelyik pontjával, a szárai pedig a körvonalat metszik.
6. Egyenes, mely a körvonal pontján halad át és merőleges az erre a pontra húzott sugárra.
10. Derékszögű hűromszög oldala, melynek négyzete egyenlő a másik két oldal négyzetének összegével.
12. Paralelogramma, melynek minden oldala egyenlő.
13. Állítás, melynek helyességéről bizonyítás útján győződünk meg.
15. Mennyiség.
17. Körvonal húrja, mely a körvonal központján halad át.
21. Segédtétel.

DOLGOZUNK A SZÁMÍTÓGÉPPEL

A 7. osztályban már alkalmaztunk számítógépet a mértani ismeretek elsajátítása során. A 8. osztályban már bonyolultabb mértani alakzatokkal ismerkedhetünk meg, tehát továbbfejleszthetjük tudásunkat, képességeinket különböző grafikai szoftverek használatával.

Figyelmetekbe ajánljuk azt is, hogy ebben a részben lévő feladatokon kívül különböző más programokat is alkalmazhattok. Olyanokat, amelyek kifejezetten az iskolai szintű mértani tananyag elsajátítását segítik elő. Ezeket a programokat és más szükséges információt a világhálón, az interneten is kereshetitek.

Ebben a fejezetben számítógép segítségével megoldható feladatokat találtok. A többségük geometriai szerkesztési feladat. Megoldásukhoz az adott grafikai szerkesztő programot kell alkalmazni. Ezeken kívül még választhattok a *Gyakorlati feladatok*ból is olyan szerkesztési feladatokat, amelyeket nemcsak füzetben, de számítógépen is meg tudtok oldani. A 7. osztályban megtanultátok, hogy a mértani szerkesztéseket vonalzó és körző segítségével kell elkészíteni. Ezért a grafikai szerkesztő programok között olyanokat kell keresni, amelyek a vonalzó és a körző funkcióit látják el.

1. A négyszög és elemei

1. Szerkesszetek az adott paragrafus tananyagát illusztráló négyszögeket!

2. Paralelogramma. A paralelogramma tulajdonságai

2. Állapítsátok meg, a paralelogramma mely tulajdonságait kell alkalmazni, hogy helyesen szerkesszük meg az adott alakzatot! A grafikai szerkesztő program eszközei közül melyeket kell ehhez alkalmazni? Rajzoljatok egy paralelogrammát, és szerkesszétek meg két, egy csúcsból induló magasságát! A szerkesztő program melyik eszközét kell használni, hogy az adott oldalra merőlegest bocsássunk?

3. A paralelogramma ismertetőjelei

3. Képzeljetek magatok elé egy négyszöget! Milyen módszerrel tudjátok leellenőrizni, hogy paralelogramma-e a négyszög? A grafikai szerkesztő program melyik eszközét kell ehhez alkalmazni?

4. Téglalap

4. Határozzátok meg azt a módszert, amely lehetőséget ad arra, hogy a grafikai szerkesztő program alkalmazásával gyorsan szerkesszünk téglalapot!

5. Rombusz

5. A rombusz mely tulajdonsága segít abban, hogy gyorsan és helyesen szerkesszünk egy rombuszt?

6. Szerkesszetek két egymást metsző egymásra merőleges szakaszt! Tekintsétek a szakaszokat egy négyszög átlóinak, és rajzoljátok meg ezt a négyszöget! Biztos, hogy rombuszt fogunk kapni? Milyen feltétellel kell kiegészíteni a feladatot, hogy a kapott négyszög biztos, hogy rombusz legyen?

6. Négyzet

7. Határozzátok meg azt a módszert, amely lehetőséget ad arra, hogy a grafikai szerkesztő program alkalmazásával gyorsan megszerkeszszük a négyzetet!

7. A háromszög középvonala

8. A grafikai szerkesztő program melyik eszközét kell alkalmazni ahhoz, hogy megszerkesszük a szakasz felezőpontját?
9. Rajzoljatok egy tetszőleges négyszöget! Végezzétek el azt a szerkesztést, amely illusztrálja a 7. pont kulcsos feladatának a megoldását! Hogyan ellenőriznétek le, hogy az adott négyszög oldalainak felezőpontjait összekötő szakaszok paralelogrammát alkotnak?

8. A trapéz

10. Szerkesszetek egy trapézt! A grafikai szerkesztő program melyik eszközét kell alkalmazni ahhoz, hogy a trapéz párhuzamos oldalait megszerkesszük? Hogy egyenlő szárú trapézt szerkesszünk? Hogy derékszögű trapézt szerkesszünk?

9. Középponti és kerületi szögek

11. Rajzoljatok egy körvonalat és szerkesszetek néhány olyan kerületi szöget, amelyek egyazon ívre támaszkodnak. A grafikai szerkesztő eszközeit alkalmazva határozzátok meg fokmértékeiket!
12. Rajzoljatok egy körvonalat és szerkesszetek középponti és kerületi szögeket, amelyek egyazon ívre támaszkodnak! Ellenőrizétek, hogyan függnek egymástól ezeknek a szögeknek a mértékei!

10. A négyszög beírt és körülírt körvonalai

13. Határozzátok meg olyan rajzok elkészítésére szolgáló optimális szerkesztési módszert, melynek segítségével szerkeszthető körvonal, a körbe írt és a kör köré írt négyszög! A körvonalhoz húzott érintő mely tulajdonsága teszi lehetővé, hogy ábrázoljunk egy kör köré írt négyszöget?

11. Thalész-tétel. Az arányos szakaszok tétele

14. Szerkesszetek olyan rajzokat, amelyek illusztrálják a Thalész-tétel és az arányos szakaszok tételét! Mérjétek meg a szükséges szakaszok méretét, és ellenőrizzétek, hogy teljesülnek-e a tételek állításai! Milyen pontossággal lehet megmérni a szakaszok hosszait annak a grafikai szerkesztő programnak a segítségével, melyet használtok?

15. Képzeljétek el, hogy az általatok használt grafikai szerkesztő programban nincs lehetőség párhuzamos egyenesek szerkesztésére. Hogyan tudnátok a Thalész-tétel alkalmazásával párhuzamos egyeneseket szerkeszteni?

12. Hasonló háromszögek

16. Keressétek meg a grafikai szerkesztő programnak azokat az eszközeit, melyek lehetőséget biztosítanak arra, hogy olyan alakzatokat rajzoljatok, melyeknek az alakja megegyezik, de méreteik különbözőek! Ezeknek az eszközöknek az alkalmazásával szerkesszetek hasonló háromszögeket!

17. Szerkesszetek grafikai illusztrációt a hasonló háromszögekről szóló lemmához! Alkalmazva a megfelelő eszközöket, bizonyítsátok be, hogy az ábrázolt háromszögek tényleg hasonlóak!

13. A háromszögek hasonlóságának első ismertetőjele

18. Szerkesszetek két különböző hosszúságú szakaszt! Képzeljétek el, hogy ezek a szakaszok a hasonló háromszögek megfelelő oldalai lesznek! Az egyik szakaszt véve a háromszög oldalának, rajzoljatok egy tetszőleges háromszöget! Szerkesszétek meg azt a háromszöget, melynek egyik oldala a másik szakasz, és a megrajzolt háromszöghöz hasonló lesz; alkalmazzátok a háromszögek hasonlóságának első ismertetőjelét!

14. A háromszögek hasonlóságának 2. és 3. ismertetőjele

19. Gondoljatok ki önállóan és oldjátok meg azt a feladatot, amely illusztrálja a háromszögek hasonlóságának második és harmadik ismertetőjelét!

15. Metrikus összefüggések a derékszögű háromszögben

20. Szerkesszetek egy derékszögű háromszöget, és rajzoljátok meg az átfogóra bocsátott magasságot! Teljesül-e a 15. pontbeli lemma? Győződjetek meg róla!

16. Pitagorasz-tétel

21. A Pitagorasz-tételt úgy szokták illusztrálni, hogy a derékszögű háromszög oldalaira négyzeteket rajzolnak. Több emberöltőn keresztül ezt a rajzot Pitagóra nadrágnak nevezték az iskolások, és a tételt zsargonnyelven így fogalmazták meg: „A Pitagóra nadrág minden irányban egyenlő.” Készítsétek el ezt a rajzot!

22. Tartalmaz-e a grafikai szerkesztő az alakzat feldarabolására szolgáló olyan eszközt, amellyel a darabokkal később külön is tudunk műveletet végezni?

23. A befogókra emelt négyzeteket feldarabolva a részekből elő lehet állítani az átfogóra emelt négyzetet. Bármilyen háromszögre ezt elkészíteni nem egy egyszerű feladat. De az egyenlő szárú háromszögre találni egy ilyen szétdarabolást elég könnyű. Milyenek lesznek ezek a részek? Szerkesszetek egy egyenlő szárú derékszögű háromszöget! Készítsetek alakzatok készletét, melyből kirakható az átfogóra szerkesztett négyzet és a befogókra szerkesztett két négyzet is!

17. A derékszögű háromszög hegyesszögének trigonometrikus függvényei

24. Ismerkedjetek meg azokkal a számológépekkel, melyekkel vissza lehet keresni a szögfüggvények értékeit!

25. Határozzátok meg a szögfüggvények értékeit a számotokra ismert programozási nyelven!

18. A derékszögű háromszögek megoldása

26. Az ehhez a ponthoz tartozó feladatok megoldása során alkalmazzatok számológépet!

19. Sokszögek

27. Fogalmazzátok meg a sokszögek néhány tulajdonságát (oldalainak száma, domborúság, a körbe írt, kör köré írt stb.)! Szerkesszetek olyan sokszöget, amely rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal! A grafikai szerkesztő program mely eszközeinek alkalmazásával érhető el az adott tulajdonságok teljesülése?

20. A sokszög területének fogalma. A téglalap területe

28. Szerkesszetek egy egységnyi területű négyzetet! Másoljátok le néhányszor ezt! Az egységnégyzet segítségével rakjatok ki néhány, egyenlő nagyságú téglalapot!

21. A paralelogramma területe

29. Készítsetek néhány alakzatot, melyek segítségével illusztrálni lehet a paralelogramma területéről szóló tételt! A terület milyen tulajdonságát alkalmaztuk eközben?

30. A 21.1. tétel igaz lesz, függetlenül attól, hogy a paralelogramma melyik oldalára bocsátjuk a magasságot. Készítsetek néhány olyan alakzatot, amelyekkel illusztrálni lehet ezt az állítást!

22. A háromszög területe

31. Készítsetek néhány alakzatot, melyek segítségével illusztrálni lehet a paragrafus tételeinek bizonyítását!

23. A trapéz területe

32. Szerkesszetek egy tetszőleges trapézt! Vágjátok olyan darabokra, hogy igazolni lehessen ezekkel a trapéz területének képletét!

PROJEKTMUNKA

Ez a feladattípus elsősorban azoknak szól, akik szeretnék elsajátítani az önálló tanulás módszereit, fejleszteni akarják kreativ gondolkodásukat, a saját álláspontjuk megformázását és megvédését; meg akarják tanulni, hogyan kell a hipotéziseket felállítani, s mindezekhez ismerni akarják a racionális, de nem feltétlenül szabványos megoldásokat is.

A felsorolt célok elérése érdekében első lépésként érdemes részt venni egy projekmunkában.

A projekt – önálló kutatás egy kiválasztott témakörben, amit csoportosan vagy egyedül végezhetsz.

Adunk néhány tanácsot arra vonatkozóan, hogyan kell megszervezni a munkát, illetve a kutatás eredményeit hogyan és milyen formában kell előadni.

1. A téma kiválasztásánál figyelembe kell venni annak aktualitását, az információs források meglétét a szakirodalomban és az interneten egyaránt.
2. A munkát egy előzetes terv megformálásával kezdd, amely tervnek tartalmaznia kell az elgondolást és a kutatási cél eléréséhez vezető munkaszakaszokat! Az alapvető szakirodalmi források feldolgozása után elkészítheted a végleges kutatási tervet a projektvezető segítségével.
3. Fontos világosan megfogalmazni a kutatás céljait. Például ily módon írhatod le a célokat: kutatom, leírom, elemezem, bebizonyítom, összehasonlítom stb.
4. A munkát a kutatás összefoglalójával szokás befejezni, a szerző levonja a megfelelő következtetéseket és a téma kutatásának további lehetőségeit is felvázolja.
5. A munka terjedelme 10–15 oldal. Mellékletként illusztrációkat adhatunk a munkához.
6. A munkát szakdolgozat, előadás vagy számítógépes prezentáció formájában lehet elkészíteni.

Az alábbiakban a projektmunkához javasolt témákat soroljuk fel.

1. **Miletoszi Thálész – kiemelkedő csillagász, építész, matematikus**
2. **Pitagorasz és híres tétele**
3. **A mértan axiomatikus módszere**
4. **Mértan a kockás lapon**
5. **A gráf, mint a logikai feladat mértani modellje**
6. **A háromszög csodálatos pontjai**
7. **A körülírt körvonal tulajdonságai**
8. **A segédkörvonal módszere**
9. **Az egymásba átdarabolható és egyenlő alakzatok**

A 7. OSZTÁLYOS MÉRTAN ÖSSZEFOGLALÁSA

Legegyszerűbb geometriai alakzatok és tulajdonságaik

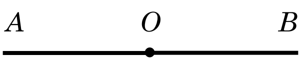
1. Pont és az egyenes

- ✓ Az *egyenes alaptulajdonsága*. Bármilyen két ponton keresztül egy és csakis egy egyenes húzható.
- ✓ Két egyenes, melyeknek van közös pontja, egymást metsző egyeneseknek nevezzük.
- ✓ Bármilyen két egymást metsző egyenesnek csak egy közös pontja van.

2. Szakasz és a szakasz hossza

- ✓ Az a egyenes A és B pontjai (248. ábra) közötti részét az A és B pontokkal együtt szakasznak nevezzük, az A és B pontokat pedig a szakasz végpontjainak.

248. ábra



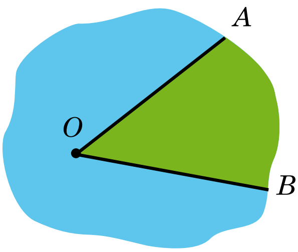
249. ábra

- ✓ Két szakasz egyenlő, ha egymásra helyezve fedik egymást.
- ✓ Egyenlő szakaszoknak a hosszuk egyenlő, és fordítva, ha a szakaszok hossza egyenlő, akkor a szakaszok is egyenlők.
- ✓ A *szakasz hosszának alaptulajdonsága*. Ha a C pont az AB szakasz belső pontja, akkor az AB szakasz egyenlő az AC és CB szakaszok összegével, vagyis $AB = AC + CB$.
- ✓ Az A és B pontok közötti távolságot az AB szakasz hosszának nevezzük. Ha az A és B pontok egybeesnek, akkor a köztük lévő távolság nullával egyenlő.

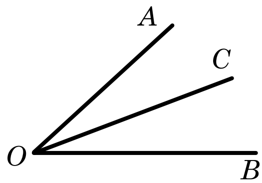
3. Félegyenes. Szög

- ✓ Az O pont az AB egyenest két részre osztja (249. ábra), ezek mindegyikét az O ponttal együtt félegyenesnek nevezzük. Az O pont a félegyenes kezdőpontja.
- ✓ Két félegyenest, melyeknek a kezdőpontja közös és egy egyenesen fekszenek, kiegészítő félegyeneseknek nevezzük.

- Az OA és OB félegyeneseknek közös kezdőpontjuk van (250. ábra), a síkot két részre osztják, mindkét részt az OA és OB félegyenesekkel együtt szögnek nevezzük. Az OA és OB félegyeneseket a szög szárainak nevezzük, az O pontot pedig a szög csúcsának.



250. ábra



251. ábra

- Azt a szöget, melynek szárai kiegészítő félegyenesek, egyenesszögnek nevezzük.
- Két szöget egyenlőknek nevezzük, ha egymásra fektetve fedésbe hozhatók.
- A szög szögfelezőjének azt a félegyenest nevezzük, melynek kezdőpontja a szög csúcsa lesz, és az adott szöget két egyenlő részre osztja.

4. Szögmérés

- Minden szögnek meghatározott mértéke (fokmértéke) van.
- Azt a szöget, melynek fokmértéke 90°, derékszögnek nevezzük. Azt a szöget, melynek fokmértéke kisebb, mint 90°, hegyesszögnek nevezzük. Azt a szöget, melynek fokmértéke nagyobb, mint 90°, de kisebb, mint 180°, tompaszögnek nevezzük.
- Egyenlő szögeknek a fokmértéke is egyenlő, és fordítva, ha a szögek fokmértékei egyenlők, akkor ezek a szögek is egyenlők.
- A *szög mértékének alaptulajdonsága*. Ha az OC félegyenes az AOB szöget AOC és COB szögekre osztja (251. ábra), akkor $AOB\angle = AOC\angle + COB\angle$.

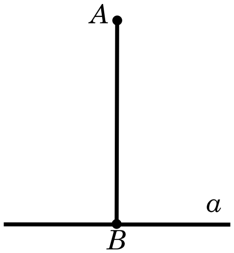
5. Mellékszögek és csúcsszögek

- Két szöget mellékszögeknek nevezzük, ha az egyik száruk közös, a másik két szár pedig kiegészítő félegyenes.

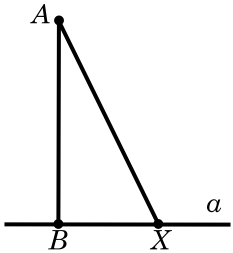
- ✓ A mellékszögek összege 180°.
- ✓ Két szöget csúcsszögeknek nevezzük, ha az egyik szög szárai a másik szög szárainak kiegészítő félegyenesei.
- ✓ A csúcsszögek egyenlők.

6. Merőleges egyenesek. Felezőmerőleges

- ✓ Két egyenes merőleges egymásra, ha metszéspontjuknál derékszög keletkezett.
- ✓ A nem merőleges egyeneseknél, a metszéspontjuknál egy pár hegyesszög és egy pár tompaszög keletkezik. A hegyesszög mértékét nevezzük a nem merőleges egyenesek közötti szögnek.
- ✓ Ha az egyenesek merőlegesek egymásra, akkor a köztük lévő szöget 90°-nak tekintjük.
- ✓ Két szakaszt merőlegesnek nevezzük, ha merőleges egyeneseken fekszenek.
- ✓ A 252. ábrán az a egyenes és a rá merőleges AB szakasz látható, melynek B pontja az a egyeneshez illeszkedik. Ebben az esetben azt mondják, hogy az A pontból AB merőlegest bocsátanak az a egyenesre. A B pontot az AB merőleges talppontjának nevezzük.



252. ábra



253. ábra

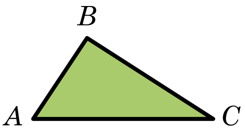
- ✓ Az AB merőleges hosszát az A pont és az a egyenes közötti távolságnak nevezzük. Ha az A pont illeszkedik az a egyeneshez, akkor az A pont és az a egyenes közötti távolság nullával egyenlő.
- ✓ Az A pontból az a egyenesre AB merőlegest állítunk (253. ábra). Legyen X az a egyenes B-től különböző pontja. Az AX szakaszt ferdének nevezzük, amely az A pontból van húzva az a egyeneshez.
- ✓ Az adott ponton át az adott egyeneshez csak egy merőleges húzható.

- ✓ Azt egyenest, amely merőleges a szakaszra, és a szakasz felezőpontjához illeszkedik, a szakasz felezőmerőlegesének nevezzük.
- ✓ A felezőmerőleges minden pontja egyenlő távolságra van a szakasz végpontjaitól.
- ✓ Ha a pont egyenlő távolságra van a szakasz végpontjaitól, akkor az adott szakasz felezőmerőlegeséhez illeszkedik.

Háromszögek

7. Háromszög és elemei. Egybevágó háromszögek

- ✓ Az A, B és C három, nem egy egyenesen fekvő pontot szakaszokkal kötöttek össze (254. ábra). A kapott alakzat határolja a sík egy részét, és ezt a részt az AB, BC és CA szakaszokkal együtt háromszögnek nevezzük. Az A, B, C pontokat a háromszög csúcsainak, az AB, BC, CA szakaszokat a háromszög oldalainak nevezzük. A háromszöget a csúcsaival jelöljük és ezekkel is nevezzük meg.



254. ábra

- ✓ Az ABC háromszögben a B szöget az AC oldallal szemközti szögnek, az A és C szögeket pedig az AC oldal melletti szögeknek nevezzük.
- ✓ A háromszög kerületének az oldalhosszak összegét nevezzük.
- ✓ A háromszöget hegyesszögűnek mondjuk, ha minden szöge hegyesszög; derékszögűnek akkor mondjuk, ha egyik szöge derékszög; tompaszögűnek pedig akkor, ha egyik szöge tompaszög.
- ✓ A derékszögű háromszög derékszögével szemközi oldalát átfogónak, a derékszög melletti oldalait pedig befogóknak nevezzük.
- ✓ *Háromszög-egyenlőtlenség*. A háromszög mindegyik oldala kisebb, mint a másik két oldalának összege.
- ✓ Két háromszöget egybevágónak nevezünk, ha mozgással fedésbe hozhatók. Azokat az oldalpárokat és szögpárokat, amelyek a mozgatás után fedik egymást, megfelelő oldalaknak és szögeknek nevezzük.
- ✓ A háromszögben egyenlő oldalakkal szemben egyenlő szögek vannak.
- ✓ A háromszögben egyenlő szögekkel szemben egyenlő oldalak vannak.
- ✓ A háromszögben nagyobb oldallal szemben nagyobb szög fekszik, és fordítva, nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.

8. A háromszög magassága, súlyvonala és szögfelezője

- ✓ A háromszög csúcsából a szemközti oldal egyenesére bocsátott merőlegest a háromszög magasságának nevezzük.
- ✓ Azt a szakaszt, amely a háromszög csúcsát és a szemközti oldal felezőpontját köti össze, súlyvonalnak nevezzük.
- ✓ A háromszög szögfelezőjének azt a szakaszt nevezzük, amely az adott szög szögfelező egyenesének a háromszögben lévő része.

9. A háromszögek egybevágóságának ismertetőjelei

- ✓ *A háromszögek egybevágóságának első ismertetőjele*: *két oldala és közbezárt szögük alapján*. Ha az egyik háromszög két oldala és a közbezárt szöge megfelelően egyenlő a másik háromszög két oldalával és közbezárt szögével, akkor az ilyen háromszögek egybevágók lesznek.
- ✓ *A háromszögek egybevágóságának második ismertetőjele*: *egy oldala és rajta fekvő két szöge alapján*. Ha az egyik háromszög oldala és a rajta fekvő két szöge megfelelően egyenlő a másik háromszög oldalával és a rajta fekvő két szögével, akkor az ilyen háromszögek egybevágók lesznek.
- ✓ *A háromszögek egybevágóságának harmadik ismertetőjele*: *három oldala alapján*. Ha az egyik háromszög három oldala megfelelően egyenlő a másik háromszög három oldalával, akkor az ilyen háromszögek egybevágók lesznek.

10. Egyenlő szárú háromszög és tulajdonságai. Egyenlő oldalú háromszög

- ✓ Azt a háromszöget, melynek két oldala egyenlő, egyenlő szárú háromszögnek nevezzük.
- ✓ Az egyenlő szárú háromszög egyenlő oldalait a háromszög szárainak, a harmadik oldalát pedig a háromszög alapjának nevezzük.
- ✓ Az egyenlő szárú háromszög csúcsának a szárainak közös pontját nevezzük.
- ✓ Az egyenlő szárú háromszögben:
  1) az alapon lévő szögek egyenlők;
  2) az alapra húzott szögfelező egyúttal a háromszög súlyvonala és magassága is.
- ✓ Azt a háromszöget, melynek mind a három oldala egyenlő, egyenlő oldalú háromszögnek nevezzük.

✓ Az egyenlő oldalú háromszögben:

1) minden szög egyenlő;
2) az egy csúcsból húzott szögfelező, magasság és súlyvonal egybeesik.

11. Az egyenlő szárú háromszög ismertetőjelei

✓ Ha a háromszögben két szög egyenlő, akkor ez a háromszög egyenlő szárú.

✓ Ha a háromszög súlyvonala egyúttal magassága is, akkor ez a háromszög egyenlő szárú.

✓ Ha a háromszög szögfelezője egyúttal a magassága is, akkor ez a háromszög egyenlő szárú.

✓ Ha a háromszög súlyvonala egyúttal a szögfelezője is, akkor ez a háromszög egyenlő szárú.

Párhuzamos egyenesek. A háromszög szögeinek összege

12. Párhuzamos egyenesek

✓ Két egyenest párhuzamosnak nevezünk, ha nem metszik egymást.

✓ Az egyenesek párhuzamosságának alaptulajdonsága (az egyenesek párhuzamosságának axiómája). Az adott egyeneshez nem illeszkedő ponton át csak egy olyan egyenes fektethető, amely párhuzamos az adott egyenessel.

✓ Két egyenes, melyek merőlegesek egy harmadik egyenesre, párhuzamosak egymással.

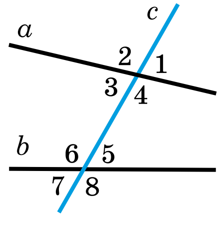
✓ Ha két egyenes párhuzamos egy harmadikkal, akkor egymással is párhuzamosak.

✓ Két párhuzamos egyenes közötti távolságnak az egyik egyenes bármely pontja és a másik egyenes közötti távolságot nevezzük.

13. Két egyenes párhuzamosságának ismertetőjelei

✓ Ha két, a és b egyenes metsz egy harmadik, c egyenest, akkor nyolc szög keletkezik (255. ábra). A c egyenest az a és b egyenesek metsző egyenesének nevezzük.

A 3-as és 6-os, 4-es és 5-ös szögeket egyoldali szögeknek nevezzük.



255. ábra

A 3-as és 5-ös, 4-es és 6-os szögeket különböző oldali szögeknek nevezzük.

A 6-os és 2-es, 5-ös és 1-es, 3-as és 7-es, 4-es és 8-as szögeket megfelelő szögeknek nevezzük.

✓ Ha két egyenesnek a metsző egyenessel való metszésekor keletkezett különböző oldali szögei egyenlők, akkor ezek az egyenesek párhuzamosak.

✓ Ha két egyenesnek a metsző egyenessel való metszésekor keletkezett egyoldali szögeinek összege 180°, akkor ezek az egyenesek párhuzamosak.

✓ Ha két egyenesnek a metsző egyenessel való metszésekor keletkezett megfelelő szögei egyenlők, akkor ezek az egyenesek párhuzamosak.

14. A párhuzamos egyenesek tulajdonságai

✓ Ha két párhuzamos egyenest egy metsző egyenes metsz:
- a különböző oldalon fekvő szögpárak egyenlők;
- a megfelelő szögpárak egyenlők;
- az egyoldali szögpárak összege 180°.

✓ Ha az egyenes merőleges két párhuzamos egyenes közül az egyikre, akkor a másikra is merőleges.

15. A háromszög szögeinek összege. A háromszög külső szöge

✓ A háromszög szögeinek összege 180°.

✓ A háromszög szögei között legalább két hegyesszög van.

✓ A háromszög külső szögének a háromszög belső szöge mellékszögét nevezzük.

✓ A háromszög külső szöge egyenlő a vele mellékszöget nem alkotó belső szögek összegével.

✓ A háromszög külső szöge nagyobb bármelyik vele mellékszöget nem alkotó belső szögénél.

16. A derékszögű háromszög egybevágóságának ismertetőjelei

✓ *A derékszögű háromszögek egybevágóságának ismertetőjele az átfogója és az egyik befogója alapján.* Ha az egyik derékszögű háromszög átfogója és a befogója megfelelően egyenlő a másik háromszög átfogójával és befogójával, akkor ezek a háromszögek egybevágóak.

- ✓ *A derékszögű háromszögek egybevágóságának ismertetőjele két befogója alapján.* Ha az egyik derékszögű háromszög két befogója megfelelően egyenlő a másik háromszög két befogójával, akkor ezek a háromszögek egybevágóak.
- ✓ *A derékszögű háromszögek egybevágóságának ismertetőjele befogója és ezen befogó melletti hegyesszöge alapján.* Ha az egyik derékszögű háromszög befogója és rajta fekvő szöge megfelelően egyenlő a másik háromszög befogójával és rajta fekvő szögével, akkor ezek a háromszögek egybevágóak.
- ✓ *A derékszögű háromszögek egybevágóságának ismertetőjele befogója és szemközti hegyes szöge alapján.* Ha az egyik derékszögű háromszög befogója és a szemközti hegyesszöge megfelelően egyenlő a másik háromszög befogójával és szemközti hegyesszögével, akkor ezek a háromszögek egybevágóak.
- ✓ *A derékszögű háromszögek egybevágóságának ismertetőjele átfogója és hegyesszöge alapján.* Ha az egyik derékszögű háromszög befogója és rajta fekvő szöge megfelelően egyenlő a másik derékszögű háromszög befogójával és rajta fekvő szögével, akkor ezek a háromszögek egybevágóak.

17. A derékszögű háromszög tulajdonságai

- ✓ A derékszögű háromszög átfogója nagyobb, mint a befogója.
- ✓ A derékszögű háromszög 30°-os szöggel szemközti befogója az átfogó felével egyenlő.
- ✓ Ha a derékszögű háromszög befogója az átfogó felével egyenlő, akkor az adott befogóval szemközti szöge 30°-os.

Körvonal és körlap

18. A pontok mértani helye

- ✓ A pontok mértani helyének (PMH) nevezzük az adott tulajdonsággal rendelkező összes pontok halmazát.
- ✓ A szakasz felezőmerőlegesének azon pontok mértani helyét nevezzük, melyek egyenlő távolságra vannak a szakasz végpontjaitól.
- ✓ A szög szögfelezőjének azon pontok mértani helyét nevezzük, melyek a szöghöz tartoznak, és egyenlő távolságra vannak a szög száraitól.

19. Körvonal és körlap, és ezek elemei

- ✓ Körvonalnak nevezzük azoknak a pontoknak a mértani helyét, melyek egyenlő távolságra vannak egy adott ponttól. Az adott pontot a kör középpontjának nevezzük.
- ✓ Bármilyen szakaszt, amely a körvonal egy pontját a középponttal köti össze, a kör sugarának nevezzük.
- ✓ Azt a szakaszt, amely a körvonal két pontját köti össze, a kör húrjának nevezzük. Azt a húrt, amely keresztülmegy a körvonal középpontján, átmérőnek nevezzük.
- ✓ A kör átmérője kétszer nagyobb a sugaránál.
- ✓ Körlapnak nevezzük azon pontok mértani helyét, melyek egy adott ponttól adott pozitív számnál nem nagyobb távolságra vannak. Az adott pontot a körlap középpontjának nevezzük. Annak a körnek a sugarát, amely a körlapot határolja, a körlap sugarának nevezzük. Ha az X az O középpontú és R sugarú körlap bármely pontja, akkor $OX \leqslant R$. A körlapot határoló körvonal része a körlapnak.
- ✓ A körlap húrja és átmérője az őt határoló körvonal húrja és átmérője lesz.

20. A körvonal tulajdonságai

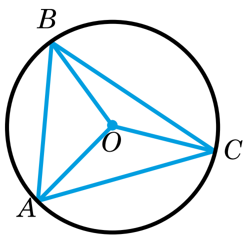
- ✓ A körvonal átmérője, amely merőleges a húrra, felezi azt.
- ✓ Ha a kör átmérője felezi az átmérőtől különböző húrt, akkor merőleges erre a húrra.

21. Az egyenes és a körvonal kölcsönös helyzete. A kör érintője

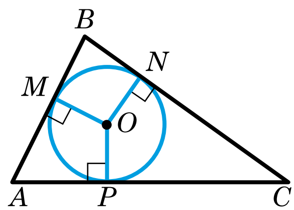
- ✓ Az egyenesnek és a körnek lehet két közös pontja, lehet egy közös pontja és lehet olyan is, hogy nincs közös pontjuk.
- ✓ Azt az egyenest, melynek a körrel csak egy közös pontja van, a kör érintőjének nevezzük.
- ✓ A kör érintője merőleges az érintési ponthoz húzott sugárra.
- ✓ Ha az egyenes, amely a körvonal egy pontján halad át merőleges a sugárra, akkor ez az adott kör érintője lesz.
- ✓ Ha a kör középpontja és az adott egyenes közötti távolság a kör sugarával egyenlő, akkor ez az egyenes a kör érintője lesz.
- ✓ Ha egy adott pontból a körhöz két érintőt húznak, akkor az adott pontot az érintési pontokkal összekötő szakaszok egymással egyenlők.

22. A háromszög köré és a háromszögbe írt körvonalak

- ✓ Azt a kört, amelyhez a háromszög minden csúcsa illeszkedik, a háromszög köré írt körnek nevezzük.
  A 256. ábrán egy olyan körvonal látható, amely a háromszög köré van írva. Ebben az esetben azt is mondhatjuk, hogy a háromszög van a körbe írva.



256. ábra



257. ábra

- ✓ A háromszög köré írt körvonal középpontja egyenlő távolságra van mindegyik csúcsától.
- ✓ Bármilyen háromszög köré írható kör. A háromszög köré írt kör középpontja az oldalfelező merőlegeseinek metszéspontja lesz.
- ✓ A háromszög oldalfelező merőlegesei egy pontban metszik egymást.
- ✓ A körvonalat a háromszögbe írtnak nevezzük, ha a háromszög mindegyik oldalát érinti.
  A 257. ábrán egy olyan körvonal látható, amely a háromszögbe van írva. Ilyenkor úgy is mondhatjuk, hogy a háromszög van a kör köré írva.
- ✓ A háromszögbe írt körvonal középpontja egyenlő távolságra van az oldalaitól.
- ✓ Bármilyen háromszögbe lehet kört írni. A háromszögbe írt kör középpontja a háromszög szögfelezőinek a metszéspontja lesz.
- ✓ A háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást.
- ✓ A derékszögű háromszögbe írt körvonal sugara az $r = \frac{a+b-c}{2}$ képlettel számítható ki, ahol r a beírt kör sugara, a és b a háromszög befogói, c pedig az átfogója.

FELELETEK ÉS ÚTMUTATÁSOK

1. §. Négyszögek

1. A négyszög és elemei

14. 18 cm, 12 cm, 6 cm, 27 cm. **15.** 10 cm, 8 cm, 16 cm, 30 cm. **20.** 1) 72°, 130°, 78°, 80°; 2) 22°, 230°, 28°, 80°. **22.** 10 cm. **26.** *Útmutatás*. Szerkesszetek háromszöget a négyszög két szomszédos oldala és az ismert köztük lévő szöge alapján! A háromszög harmadik oldala a keresett négyszög átlója lesz. **29.** *Útmutatás*. Szerkesszetek *ABC* háromszöget az *AB* és *BC* oldalai, valamint a köztük lévő *B* szög alapján! Az *ACD* háromszögben ismert az *AC* oldal, a *CAD* szög ($CAD\angle = BAD\angle - BAC\angle$) és az *AD* és *CD* oldalak összege. Háromszög szerkesztését az oldala, az oldal melletti szöge és a másik két oldalának összege alapján már a 7. osztályban áttekintettük. **34.** 32°.

2. Paralelogramma. A paralelogramma tulajdonságai

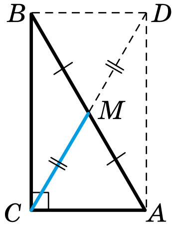
49. 90°. **53.** 9 cm, 14 cm. **57.** $AB = BC = CD = AD = 6$ cm. **58.** 32 cm. **59.** 45°, 135°. **60.** 6 cm, 12 cm. **64.** 80 cm. **65.** 9 cm, 24 cm. **66.** 20 cm, 24 cm. **67.** 6 cm. **68.** 48°, 132°. **71.** 40 cm. **72.** 5 cm, 9 cm. **74.** 25 cm. **77.** 3. **78.** 2 : 1. **79.** 72°, 108°. **82.** *Útmutatás*. A keresett pont az *ABC* háromszög magasságainak metszéspontja lesz. **84.** *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy $MAD\Delta = DKC\Delta = MBK\Delta$! **85.** *Útmutatás*. Szerkesszetek paralelogrammát, melynek egyik csúcsa egybeesik az adott szög csúcsával, a két másik csúcs a szög száraihoz illeszkedik, és a paralelogramma átlóinak metszéspontja egybeessen az adott ponttal! **86.** 24 cm vagy 14 cm!

3. A paralelogramma ismertetőjelei

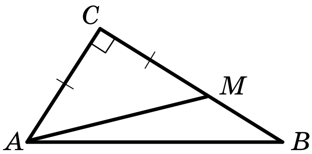
108. 32°. **109.** 16 cm.

4. Téglalap

119. 6 cm, 12 cm. **120.** 5 cm, 10 cm. **121.** 15 cm, 25 cm. **122.** 12 cm. **124.** *Útmutatás*. Legyen *CM* az *ABC* derékszögű háromszög *AB* átfogójára bocsátott súlyvonal (239. ábra). A *CM* szakasz *M* utáni meghosszabbítására mérjétek fel az *MD* szakaszt, amely a *CM*-mel egyenlő. Állapítsátok meg az *ACBD* négyszög típusát, és alkalmazzátok ezen típusú négyszögek tulajdonságait! **127**. 30°, 60°. *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy az



239. ábra

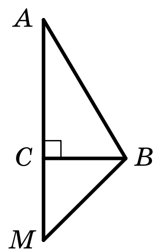


240. ábra

ABM derékszögű háromszögben az *AM* átfogó kétszer nagyobb, mint a *BM* befogó! **128.** 4,5 cm. **131.** 1) *Útmutatás*. A feladat megoldása során alkalmazzuk a derékszögű háromszög szerkesztésének azt a módszerét, amely az átfogó és a befogók különbségével történik! A 240. ábrán az *ACB* háromszög látható, melyben ismert az *AB* átfogó és a befogók különbsége. A *BC* befogón megjelöljük az *M* pontot úgy, hogy $CM = AC$. Ekkor $BM = BC - AC$. Ebből következik, hogy $AMB\angle = 135°$. Tehát az *AMB* háromszöget meg lehet szerkeszteni az *AB* és *MB* valamint az *AMB* szöge alapján. **132.** 48°. **133.** 90°. **134.** Az *ACE* háromszög egyenlő szárú.

5. Rombusz

157. 6 cm. **160.** 1) *Útmutatás*. A feladatot derékszögű háromszög szerkesztése a befogóinak összege és a hegyesszöge alapján kell megoldani. A 241. ábrán az *ABC* derékszögű háromszög látható, melyben ismert az *A* szög és az *AC* és *CB* befogóinak összege. Ekkor $AM = AC + CB$, $CMB\angle = 45°$. Az *AMB* háromszöget meg lehet szerkeszteni az *AM* oldala és a rajta fekvő két szöge alapján. **161.** *Útmutatás*. Az *NK* szakasz felezőpontja az *O* pont, amely a rombusz átlóinak a felezőpontja. Tehát az *MO* egyenes a *BC* és *AD* oldalaival párhuzamos. Az *MO* szakasz hossza a rombusz oldalának a fele lesz. **163.** 30°, 72°, 78°; 18 cm.



241. ábra

6. Négyzet

174. 28 cm. **177.** 48 cm. **180.** *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy $AC \perp MK$! **181.** *Útmutatás*. Szerkesszetek egyenlő szárú derékszögű háromszöget, melynek átfogója *MK*! **182.** *Útmutatás*. Szerkesszetek két derékszögű háromszöget, melyeknek az egyik oldala a négyzet oldalával egyenlő, és az átfogói az adott szakaszok! Bizonyítsd be ezeknek a háromszögeknek az egybevágóságát! **184.** *Útmutatás*. Szerkesszetek egy BO_1C egyenlő oldalú háromszöget, melyben az O_1 pont a négyzethez illeszkedik! Bizonyítsátok be, hogy $O_1AD\angle = O_1DA\angle = 15°$! Ebből következik, hogy az O és O_1 pontok egybeesnek. **185.** *Útmutatás*. A CD szakasz D utáni meghosszabbításán jelölj egy M_1 pontot úgy, hogy $DM_1 = BM$. Bizonyítsátok be, hogy $EAM_1\angle = EM_1A\angle$!

7. A háromszög középvonala

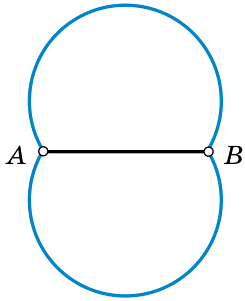
202. 28 cm. **206**. $MK = 4$ cm. *Útmutatás*. Húzzátok meg az ABC háromszög középvonalát! **207**. 9 cm. *Útmutatás*. Vizsgáld meg azt a háromszöget, melynek az MK szakasz a középvonala! **210.** *Útmutatás*. Legyenek az M, K és F pontok az AB, AD és AC szakaszok megfelelő felezőpontjai. Állapítsd meg, milyen egyeneshez fog tartozni az MKF háromszög magassága! **211.** *Útmutatás*. Legyen az E, F és K pontok az AC, BC és BD szakaszok megfelelő felezőpontjai. Bizonyítsátok be, hogy az EFK háromszög egyenlő szárú! **213.** 37°. **214.** 8 cm.

8. A trapéz

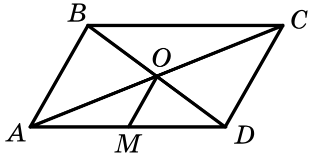
234. 16 cm, 34 cm. **236.** 16 cm. **237.** 50°, 60°. **239.** 28 cm. **247.** 7,2 cm, 10,8 cm. **249.** $2h$. **250.** 8 cm, 20 cm, 20 cm, 20 cm. **251.** 12 cm, 12 cm, 12 cm. **252.** 60°, 120°. **253.** 8 cm, 16 cm. **254.** 60°, 120°. **255.** Ha a trapéz hegyesszöge 45°. **260.** 7 cm. **261.** 13 cm, 21 cm. **264.** $\frac{3a}{4}$. **265.** 72°, 108°. **266.** 8 cm. *Útmutatás*. A C csúcson keresztül fektessetek egy egyenest, amely párhuzamos a BD egyenessel! Legyen az E pont ennek az egyenesnek és az AD egyenesnek a metszéspontja. Vizsgáljátok meg az ACE háromszöget! **267**. *Útmutatás*. A szögfelezők metszéspontja annak a derékszögű háromszögnek a csúcsa, melynek az átfogója a trapéz szára. Vizsgáljátok meg ennek a háromszögnek a súlyvonalát, melyet az átfogóhoz húztak, és bebizonyítjuk, hogy az párhuzamos a trapéz alapjaival! **268.** 1) *Útmutatás*. Fektessetek a kisebbik alap egyik csúcsához illeszkedő egyenest, amely párhuzamos a trapéz szárával! A feladat olyan feladatra vezethető vissza, amelyben háromszöget kell szerkeszteni három oldala alapján; 2) *Útmutatás*. Fektessetek a kisebbik alap egyik csúcsához illeszkedő egyenest, amely párhuzamos a trapéz átlójával! A feladat olyan feladatra vezethető vissza, amelyben háromszöget kell szerkeszteni két oldala és a harmadik oldalhoz húzott magasság alapján. **271.** $a + b$. *Útmutatás*. Legyen az O pont a paralelogramma átlóinak metszéspontja. Szerkesszetek AM, OK és CE merőlegeseket a B pontra illeszkedő egyenesre, és bizonyítsátok be, hogy $OK = \frac{a+b}{2}$! **275.** 1) 120°; 2) 120°!

9. Középponti és kerületi szögek

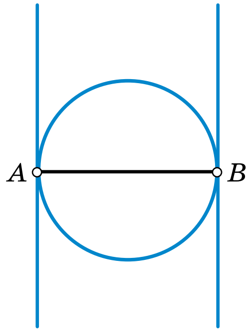
297. *Útmutatás*. Húzzatok meg egy BC húrt, és használjátok fel azt, hogy az AMC szög a BMC háromszög külső szöge! **298.** *Útmutatás*. Húzzatok meg egy BC húrt, és használjátok fel azt, hogy az ABC szög a BMC háromszög külső szöge! **299.** 10°. **300.** 40°, 40°, 100°. **301.** 120°, 20°, 40°. **306.** 56°, 56°, 68°. **308.** *Útmutatás*. Az ABC háromszög A és B csúcsából húzzátok meg a magasságait! **309.** *Útmutatás*. A körvonalak közös pontján át húzzátok meg a közös érintőjét! Alkalmazva a 9. pont kulcsos feladatának eredményeit, bizonyítsátok be, hogy a vizsgált húrok párhuzamosak a közös érintővel! **310.** *Útmutatás*. $MBD\angle = MBC\angle + CBD\angle = MBA\angle + BAC\angle = BMD\angle$. **311.** A keresett pontok mértani helye két ív lesz, melyek a 242. ábrán láthatók az A és B pontok kivételével. *Útmutatás*. Húzzátok meg az AC és BC félegyeneseket úgy, hogy $BAC\angle = ABC\angle = 90° - \frac{\alpha}{2}$! Legyen a C pont ezeknek a félegyeneseknek a metszéspontja. Az $ACB\angle = \alpha$. Írjatok az ABC háromszög köré egy körvonalat! Egy hasonló szerkesztést elvégezve az AB egyeneshez képest a másik félsíkban ABC_1 háromszöget kapunk, amely köré szintén írjatok körvonalat. A keresett ponthalmaz az ACB és az AC_1B ív, az A és B pontok kivételével. **313.** *Útmutatás*. Alkalmazzátok a 311. feladat eredményeit! **314.** *Útmutatás*. Legyen O az $ABCD$ paralelogramma átlóinak a metszéspontja, az M pont az AD szakasz felezőpontja (243. ábra). Ekkor $OM = \frac{1}{2}AB$. Az AOD háromszög megszerkeszthető (lásd a 313. feladatot). **316.** *Útmutatás*. Alkalmazzátok az 1. pont 9. kulcsos feladatát! **317.** A keresett pontok mértani helye a 244. ábrán kékkel van jelölve.



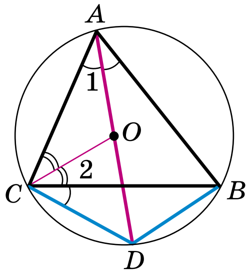
242. ábra



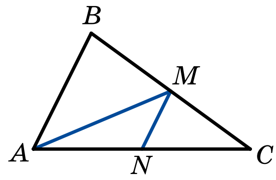
243. ábra



244. ábra



245. ábra



246. ábra

318. *Útmutatás*. $DCB\angle = DAB\angle = 1\angle$ (245. ábra). Ekkor $OCD\angle = 1\angle + 2\angle$, $COD\angle = 1\angle + ACO\angle$. De $ACO\angle = 2\angle$. Tehát $OCD\angle = COD\angle$. **319.** *Útmutatás*. Legyen az AA_1 és a CC_1 szakaszok metszéspontja M. Számítsátok ki a C_1MB_1 szöget, alkalmazva a 297. feladat eredményeit! **320.** *Útmutatás*. Szerkesszetek körvonalat, melynek a középpontja O_1 és a sugara az adott körök sugarainak a különbsége! Az O_2 ponton keresztül a szerkesztett körnek húzzátok meg az érintőjét! **321.** 1) *Útmutatás*. Legyen O az ABC háromszögbe írt körvonal középpontja, melyben ismert a B szög és az AC oldal. Bizonyítsátok be, hogy $AOC\angle = 90° + \frac{1}{2}B\angle$! Az AOC háromszögben ismert az AC oldal, az AOC szög és az O csúcsból bocsátott magasság (a beírt kör sugara). Lásd a 312. feladatot; 2) *Útmutatás*. A 246. ábrán az ABC háromszög látható, melyben ismert az AC oldal, a B szög és a BC oldalra bocsátott súlyvonal. Húzzátok meg az ABC háromszög MN középvonalát! Ekkor $NMC\angle = B\angle$. Szerkesszétek meg a pontok mértani helyének módszerével azokat az X pontokat, melyekre $NXC = B\angle$! **322**. 9 cm, 10 cm, 11 cm. **323.** $P_1 + P_2 + P_3$. **324.** Derékszögű vagy egyenlő szárú.

10. A négyszög beírt és körülírt körvonalai

342. 90°. **343.** 6 cm. **347.** 88°, 74°, 92°, 106°. **348**. 62°, 118°. **350.** 196 cm. **351.** 6 cm. **352.** 60°, 120°. **353.** $\frac{d}{2}$. *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy a trapéz átlója és a nagyobbik alapja közötti szög 60°! Ezután alkalmazzátok a 8. pont kulcsos feladatát. **354.** 6 cm. *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy a trapéz köré írt kör középpontja a nagyobbik alap felezőpontja! **355.** *Útmutatás*. A $CMKB$ négyszög köré írjatok kört! **357**. 30°. *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy az $AMOK$ négyszög köré lehet körvonalat írni, és alkalmazzátok azt, hogy a háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást! **358.** 60°. *Útmutatás*. Megjelölve az $N\angle = \alpha$, fejezzétek ki az α-án keresztül az AOB szöget! **359**. *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy az $ACBO$ négyszög köré lehet kört írni! **360.** *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy a CPB szög nem változtatja meg az értékét! **361.** *Útmutatás*. Alkalmazzátok azt, hogy az APK és AMQ háromszögekben az APQ és AMQ hegyesszögek egyenlők! **362.** *Útmutatás*. Az A, C, A_1 és C_1 pontok az AC átmérőjű körvonalhoz illeszkednek. Azt használjátok fel, hogy a húr felezőmerőlegeséhez a kör középpontja illeszkedik. **363.** *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy az adott trapéz középvonala egyenlő a megszerkesztett körök sugarainak az összegével! **366.** 128°.

2. §. A háromszögek hasonlósága

11. Thalész tétele. Az arányos szakaszok tétele

386. 30 cm. **388.** 12 cm. **389.** 4 cm. **390.** 6 cm, 45°. **392.** 20 cm, 24 cm. **393.** 5 cm, 10 cm. **395.** 8 cm, 12 cm. **397.** 6 cm, 5 cm, 6 cm. **398.** 15 cm, 12 cm, 21 cm. **399.** 15 cm. **402.** 45 cm. **404.** 21 cm, 15 cm. **405.** 45 cm, 18 cm. **406.** 30 cm, 50 cm. **407.** 7 : 9. **408.** 3 : 5. **409.** 9 cm. **410.** 50 cm. **411.** 3 : 5. *Útmutatás*. A K ponton keresztül fektessetek egyenest, amely párhuzamos az AM egyenessel! **412.** 1) 3 : 7. *Útmutatás*. Az M ponton keresztül fektessetek egyenest, amely párhuzamos a BK egyenessel! 2) 2 : 3. *Útmutatás*. A K ponton keresztül fektessetek egyenest, amely párhuzamos a CM egyenessel! **413.** *Útmutatás*. Használjátok fel azt, hogy a trapéz középvonala az átlóját felezi! **415.** 2) *Útmutatás*. Legyen adott az ABC szög. Húzzatok egy OK egyenest a BC szárral párhuzamosan (a K pont az AB szárhoz illeszkedik)! A KA félegyenesen jelöljetek egy M pontot úgy, hogy $MK : KB = 2 : 3$! **416.** 3) *Útmutatás*. Szerkesszétek meg a BDK derékszögű háromszöget, melyben a BD befogó az adott magassággal egyenlő, a BK átfogó pedig az adott súlyvonallal! Az adott szög és a BKD szög segítségével határozzátok meg a háromszög két súlyvonala közötti szög mértékét! 4) *Útmutatás*. Legyen ABC a keresett háromszög, az AA_1, BB_1 és CC_1 súlyvonalai az M pontban metszik egymást. Az MB_1 félegyenesen jelöljetek egy F pontot úgy, hogy $MB_1 = B_1F$! Az MCF háromszöget három oldala alapján meg lehet szerkeszteni. **417.** 2) *Útmutatás*. Legyen ABC a keresett háromszög, az AA_1 és CC_1 súlyvonalai az M pontban metszik egymást. Az AMC háromszöget meg lehet szerkeszteni két oldala és a harmadik oldalra bocsátott magassága alapján. **419.** *Útmutatás*. Fektessetek egyenest a C ponton keresztül, amely párhuzamos a BD egyenessel! Metssze az egyenes az AB oldalt az E pontban! Bizonyítsátok be, hogy $BC = BE$, és alkalmazzátok az arányos szakaszok tételét! **420.** a. **421.** 11 cm.

12. Hasonló háromszögek

432. 33 m. **439.** 6 cm. **440.** 9 cm. **441.** 40 cm, 60 cm. **442.** 36 cm. **443.** 8 cm. **444.** 4,8 cm. *Útmutatás*. Az A csúcson keresztül fektessetek a BD egyenessel párhuzamos egyenest! **445.** 6 cm, 12 cm. **446.** 36 cm. **447.** 1) 30°, 30°, 120°; 2) 30°, 60°, 90°.

13. A háromszögek hasonlóságának első ismertetőjele

463. 6 cm, 30 cm. **464.** 10,5 cm, 13,5 cm. **467.** 42 cm. **468.** 10 cm, 14 cm. **469.** 12,5 cm, 3,5 cm. **471.** 12 m. **475.** 24 cm. **476.** 16 cm. **477.** 16 cm. **478.** *Útmutatás*. A P ponton keresztül húzzátok meg a kör átmérőjét, és alkalmazzátok a 2. pont 13. kulcsos feladatát! **479.** 10 cm. **480.** 27 cm. **481.** 2) 36 cm. **482.** 10 cm. **483.** $\frac{ah}{a+h}$. **484.** 27 cm, 15 cm. **485.** 1) 20°, 160°; 2) 50°, 130°. **487.** 18 cm.

14. A háromszögek hasonlóságának 2. és 3. ismertetőjele

496. 18 cm, 30 cm. **497.** 50 cm, 20 cm. **498.** 6 cm. **500.** $\frac{ab}{a+b}$. *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy $KBM\Delta \backsim ABC\Delta$, a hasonlósági együttható pedig $\frac{b}{a+b}$ lesz! **501.** 6 cm. *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy $ABC\Delta \backsim BDC\Delta$! **502.** *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy $AHC\Delta \backsim ABD\Delta$, a háromszögek hasonlóságának második ismertetőjele alapján! **503.** *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy a BMC és CMK háromszögek hasonlóságából az ABM és KAM háromszögek hasonlósága következik! **505.** *Útmutatás*. Legyen a körök metszéspontjai E és F pontok. A két AB és EF, CD és EF húrpárra alkalmazzátok a 2. pont 13. kulcsos feladatát! **506.** 9 cm, 14 cm. **508.** 10 cm.

3. §. A derékszögű háromszögek megoldása

15. Metrikus összefüggések a derékszögű háromszögben

514. 15 cm, 20 cm. **515.** 30 cm, 24 cm. **516.** $2\sqrt{5}$ cm, $4\sqrt{5}$ cm. **517.** 14,5 cm. **518.** 62 cm. **519.** 12,5 cm. **520.** 12,8 cm. **521.** 2,5 cm. **522.** 196 cm. *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy a trapéz szárának végpontjai és a beírt kör középpontja egy derékszögű háromszög csúcsai! **523.** 18 cm. **525.** 7 cm, 14 cm. **526.** 14 cm. **527.** 74°, 74°, 74°, 138°.

16. Pitagorasz-tétel

542. 13 cm. **543.** 10 cm. **544.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **545.** $a\sqrt{2}$. **546.** $\frac{2h}{\sqrt{3}}$. **547.** $\frac{c}{\sqrt{2}}$. **548.** *a*) $\sqrt{6}$ cm; *b*) $\sqrt{3}$ cm; *c*) $4\sqrt{2}$ cm. **549.** *a*) $\sqrt{2}$ cm; *b*) 1 cm. **550.** $4\sqrt{5}$ cm. **551.** $4\sqrt{10}$ cm. **552.** $4\sqrt{13}$ cm. **553.** $4\sqrt{5}$ cm. **554.** 10 cm, 10 cm, 12 cm. **555.** 40 cm, 25 cm, 25 cm. **556.** 20 cm. **557.** 20 cm. **558.** 24 cm. **559.** 1,5 cm, 22,5 cm. **560.** 8 cm, 6 cm, 10 cm. **561.** 6 cm, $2\sqrt{73}$ cm. **562.** 168 cm. **563.** 200 cm. **564.** 20 könyöknyi. **565.** $8\sqrt{10}$ cm. *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy a trapéz szára egyenlő a nagyobbik alapjával! **566.** $12\sqrt{3}$ cm. **567.** $2\sqrt{65}$ cm. **568.** $12\sqrt{5}$ cm. **569.** 128. cm. *Útmutatás*. Alkalmazzátok a háromszög szögfelezőjének tulajdonságát, és határozzátok meg a szárának és az alap felének az arányát! **570.** 162 cm. **571.** 54 cm. **572.** $8\sqrt{10}$ cm. **573.** 10 cm, $4\sqrt{13}$ cm, $2\sqrt{73}$ cm. **574.** 26 cm. **575.** $3\frac{3}{4}$ láb.

17. A derékszögű háromszög hegyesszögének trigonometrikus függvényei

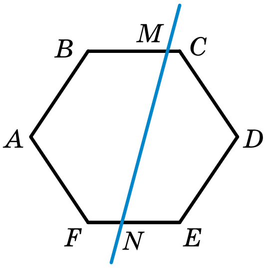
595. 45°, 135°. **598.** 1) 1; 2) 0. **599.** 0,28; 0,96; $\frac{7}{24}$. **600.** $\frac{1}{6}$. *Útmutatás*. Az AMC és BDC háromszögek hasonlóságából következik, hogy $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{BD} = \frac{1}{3}$. **601.** $\frac{6}{7}$. *Útmutatás*. Alkalmazzátok azt, hogy $\frac{KC}{AC} = \frac{BD}{AB}$! **602.** *Útmutatás*. Az F pontból az ED szakaszra bocsássatok egy merőlegest! Határozzátok meg az E és B szögek tangensét! **603.** 3 cm. **604.** 12 cm. **605.** 14 cm.

18. A derékszögű háromszögek

618. 45°. **621.** $2a$, $a\sqrt{3}$. **622.** a, $a\sqrt{3}$. **625.** 8 cm. **626.** 16 cm. **627.** 15 cm. **628.** $4\sqrt{2}$ cm. **629.** $\frac{h}{\cos\frac{\beta}{2}}$. **630.** $\frac{h}{\sin\alpha}$, $\frac{h}{\cos\alpha}$, $\frac{h}{\sin\alpha\cos\alpha}$. **631.** $a \operatorname{tg} \varphi$, $\frac{a}{\cos\varphi}$, $a \sin \varphi$. **632.** $\frac{d}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$, $d \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. **633.** $\frac{2r}{\sin\alpha}$, $\frac{2r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $\frac{2r}{\cos\frac{\alpha}{2}}$. **634.** $\frac{R\sqrt{3}}{2}$. **635.** $\frac{a(3-\sqrt{3})}{2}$. **636.** $2\sqrt{3}$ cm, $\sqrt{93}$ cm, $\sqrt{181}$ cm. **638.** $A\angle = 86°$, $B\angle = 111°$, $C\angle = 94°$, $D\angle = 69°$. **639.** 18 cm, 21 cm.

4. §. Sokszögek. A sokszög területe

19. Sokszögek



247. ábra

654. 3) $\frac{n(n-3)}{2}$. **655.** 12 oldala, 1800°. **658.** 150°, 60°, 150°. **659.** Ötszög. **660.** *Útmutatás*. Legyen *ABCDEF* egy olyan hatszög, melynek mindegyik szöge 120°. Ha meghúzzuk az *MN* metsző egyenest (247. ábra), akkor az *ABMNF* ötszög szögeinek összege 540°. Akkor a *BMN* és *FNM* háromszögek szögeinek összege 180°. **662.** 80 cm. **663.** $(26+10\sqrt{13})$ cm. **664.** $3\sqrt{5}$ cm.

20. A sokszög területének fogalma. A téglalap területe

674. 0,000126 N. **675.** 12 000 N. **676.** $d^2 \sin\alpha \cos\alpha$. **677.** $75\sqrt{3}$ cm². **686.** Kétszer. **687.** Egyetlen egy sem, vagy kettő vagy három. **688.** Egyetlen egy sem, vagy kettő. **689.** 504 cm². **690.** 30 cm. **691.** *Útmutatás*. Szerkesszetek olyan derékszögű háromszöget, melynek befogói az adott négyzetek oldalai! **692.** *Útmutatás*. A keresett négyzet oldala $x=\sqrt{ab}$. **694.** 24 cm. **695.** 2 cm.

21. A paralelogramma területe

704. 1) Két megoldása van: 4 cm és 9 cm; 2) egy megoldása van: 8 cm. **705.** 300 cm². **706.** 120 cm². **707.** $108\sqrt{3}$ cm². **708.** $ab \sin\alpha$. **709.** $64\sqrt{3}$ cm². **710.** $140\sqrt{2}$ cm². **711.** 37,5 cm². **712.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **714.** 72 cm². **715.** 360 cm². **719.** 1 : 7.

22. A háromszög területe

732. $\frac{200}{3}$ cm². **733.** $11\sqrt{3}$ cm². **734.** 170 cm². **735.** $b^2 \sin\alpha \cos\alpha$. **736.** $h^2 \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. **737.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **738.** $\frac{c^2}{4}$. **739.** $\frac{120}{13}$ cm. **740.** 96 cm². **741.** 108 cm². **742.** 768 cm². **744.** 52 cm. **745.** 336 cm². **746.** 1080 cm². **757.** *Útmutatás*. Vegyétek figyelembe, hogy az *ABX* és *AXM* háromszögeknek közös a magassága! Ugyanilyen tulajdonsággal rendelkeznek a *CBX* és *CXM* háromszögek is. **758.** 120 cm². **759.** 20 cm, $6\sqrt{10}$ cm, $2\sqrt{10}$ cm. **760.** 1176 cm². **761.** 9,6 cm². **762.** $\frac{4000}{3}$ cm². *Útmutatás*. Alkalmazzátok a háromszög szögfelezőjének a tulajdonságát, határozzátok meg a háromszög szárának és az alap felének az arányát! **763.** $\frac{4000}{3}$ cm². **764.** 19 cm². *Útmutatás*. Használjátok fel a 750. és a 757. feladat eredményeit! **765.** *Útmutatás*. Húzzátok meg az AM, BM és CM egyeneseket, és alkalmazzátok a 757. feladat eredményeit! **766.** *Útmutatás*. Húzzátok meg az AM súlyvonalat! Legyen N a BC oldalon lévő pont olyan, hogy $AN \parallel DM$. Bizonyítsátok be, hogy a DN lesz a keresett egyenes! **768.** 78°, 78°, 24°. **769.** $2\sqrt{57}$ cm. **770.** 80 cm.

23. A trapéz területe

782. $108\sqrt{3}$ cm². **783.** 195 cm². **784.** 840 cm². **785.** 132 cm². **786.** $600\sqrt{3}$ cm². **787.** 1640 cm². **788.** $(32+32\sqrt{2})$ cm². **789.** 294 cm². **793.** 512 cm². **794.** 192 cm². **795.** 336 cm². *Útmutatás*. Az $ABCD$ trapézban ($BC \parallel AD$) a C csúcsán keresztül fektessetek egy olyan CF egyenest, amely párhuzamos a BD átlóval (az F pont az AD-hez illeszkedik), és vizsgáljátok meg az ACF háromszöget! **796.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy a trapéz nagyobbik alapjánál 60°-os szög van! **797.** 156 cm². *Útmutatás*. Legyen az O pont az $ABCD$ trapézba írt körvonal középpontja ($BC \parallel AD$)! Bizonyítsátok be, hogy az AOB háromszög derékszögű, és határozzátok meg az O csúcsából bocsátott magasságát! **798.** 588 cm². **799.** 2187 cm². *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy az adott trapéz átlója az alapnál lévő szögének a szögfelezője! Ezután alkalmazzátok a háromszög szögfelezőjének tulajdonságát! **800.** 936 cm². **801.** $\frac{S}{2}$. *Útmutatás*. Húzzátok meg a trapéz MN középvonalát! Bizonyítsátok be, hogy az MCN és MND háromszögek C és D csúcsból bocsátott magasságai a trapéz magasságának felével egyenlők! **802.** 15 cm, 10 cm. **803.** 60°, 120°. **804.** 38 cm.

A 8. osztályos tananyag ismétlő gyakorlatai

806. 64 cm vagy 74 cm. **807.** 10 cm, 18 cm. **808.** 60°. **809.** $a - b$. **811.** 1) Nem; 2) igen; 3) nem; 4) igen; 5) nem; 6) igen; 7) igen. *Útmutatás*. Bizonyítsátok be, hogy az átlók metszéspontjukban felezik egymást! **812.** 1) Igen; 2) igen; 3) nem. **813.** 30°, 150°. **814.** 40°, 70°, 70°. **815.** 45°; **816.** 18 cm. **818.** 56 cm. **821.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm. **823.** *CD*. **824.** 70°, 110°. **825.** 30°. **828.** 80°, 100°, 150°, 30°. **829.** 4 cm, 10 cm. **830.** 1 : 2. **831**. 3 : 4. **832.** 2 : 5. **833.** 9 cm, 3 cm, 6 cm. **834.** 21 cm, 35 cm. **835.** 28 cm, 28 cm, 16 cm. **837.** $\frac{ab}{a+b}$. **838.** 21 cm, 15 cm. **840.** 25 cm. **841.** 5 cm. **842.** 10 cm. **843.** 36 cm. **844.** $(12\sqrt{5}+20)$ cm. **845.** 18 cm. **846.** 24 cm. **847.** $4\sqrt{29}$ cm, $10\sqrt{29}$ cm. **848.** $\frac{65}{18}$ cm. **849.** $2\sqrt{10}$ cm. **850.** 45 cm. **851.** a) $\frac{S}{2}$; b) $\frac{3S}{8}$. **852.** 256 cm^2. **853.** $\frac{1}{2}d^2$. **854.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **855.** $\frac{b^2}{2\,\mathrm{tg}\,\beta}$. **856.** $\frac{1}{2}c^2 \sin\alpha \cos\alpha$. **857.** $72\sqrt{3}$ cm^2. **858.** 24 300 cm^2. **859.** 6 cm.

Az *Önellenőrző feladatok*, *tesztek* feladatainak helyes feleletei

Feladatlap sorszáma	Feladatok száma									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	B	D	A	A	C	C	D	A	C	C
2	B	C	C	C	B	C	D	B	D	A
3	C	B	C	B	D	C	B	C	D	B
4	B	C	A	D	A	D	D	B	D	C

SZÓTÁR – СЛОВНИК

Arányos szakaszok tétele (77) – теоре́ма про пропорці́йні ві́дрізки
Befogó vetülete az átfogóra (133) – прое́кція ка́тета на гіпотену́зу
Derékszögű trapéz (45) – прямоку́тна трапе́ція
Derékszögű háromszög hegyesszögének koszinusza (123) – ко́синус го́строго кута́ прямоку́тного трику́тника
– **hegyesszögének kotangense** (124) – кота́нгенс го́строго кута́ прямоку́тного трику́тника
– **hegyesszögének szinusza** (122) – сину́с го́строго кута́ прямоку́тного трику́тника
– **hegyesszögének tangense** (123) – та́нгенс го́строго кута́ прямоку́тного трику́тника
– **területe** (155) – пло́ща го́строго кута́ прямоку́тного трику́тника
Domború négyszög (8) – чотирику́тник опу́клий
– ***n*-szög szögeinek összege** (141) – су́ма куті́в опу́клого *n*-ку́тника
– **sokszög** (141) – многоку́тник
– **sokszögek tulajdonságai** (141) – власти́вості многоку́тника
Egyenlő nagyságú sokszögek (147) – многоку́тники рівновели́кі
– **szárú trapéz tulajdonságai** (46) – власти́вості рівнобі́чної трапе́ції
Félkör(53) – півко́ло
Háromszög középvonala (40) – сере́дня лі́нія трику́тника
– **szögfelezőjének tulajdonsága** (79) – власти́вість бісектри́си трику́тника
– **területe** (155) – пло́ща трику́тника
– **hasonlóságának ismertetőjelei** (91,102) – озна́ки поді́бності трику́тників
– **hasonlóságának lemmája** (86) – ле́ма про поді́бні трику́тники
Hasonló háromszögek (85) – поді́бні трику́тники
Hasonlósági tényező (86) – коефіціє́нт поді́бності
Kerületi szög (54) – окружни́й ку́т
Két szakasz aránya (76) – відно́шення дво́х ві́дрізків
Kör köré írt négyszög (64) –чотирику́тник, опи́саний навко́ло ко́ла
– – **írt sokszög** (142) – многоку́тник, опи́саний навко́ло ко́ла
– – **sokszög** (142) – многоку́тник
– – **szögek tulajdonságai** (54) – власти́вості куті́в, опи́саних навко́ло ко́ла
Körív (53) – дуга́ ко́ла
Körív fokmértéke (53) – гра́дусна мі́ра дуги́ ко́ла
– **vége** (53) – кіне́ць дуги́
Középponti szög (53) – кут ко́ла центра́льний
Megfelelő oldalak (85) – сто́рони відпові́дні
Négyszög (7) – чотирику́тник
– **átlója** (8) – діагона́ль чотирику́тника
– **csúcsai** (7) – верши́ни чотирику́тника
– **köré írt körvonal** (63) – чотирику́тник, впи́саний у ко́ло
– **oldalai** (7) – сто́рони чотирику́тника

– **szemközti csúcsai** (7) – протилéжні верши́ни чотирику́тника
– **szemközti oldalai** (7) – стóрони відповíдні чотирику́тника
– **szomszédos csúcsai** (7) – сусíдні кути́ чотирику́тника
– **szomszédos oldalai** (7) – сусíдні стóрони чотирику́тника
– **szöge** (8) – ку́т чотирику́тника
– **szögeinek összege** (8) – су́ма кутíв чотирику́тника
Négyszögbe írt körvonal (64) – кóло, впи́сане в чотирику́тник
Négyzet (37) – квадрáт
– **tulajdonságai** (37) – власти́вості квадрáта
Nem domború négyszög (8) – неопу́клий чотирику́тник
– **sokszög** (141) – неопу́клий многоку́тник
Összefüggések a derékszögű háromszögben (113) – метри́чні співвіднóшення в прямоку́тному трику́тнику
Paralelogramma (15) – паралелогрáм
– **ismertetőjelei** (23) – ознáки паралелогрáма
– **magassága** (16) – висотá паралелогрáма
– **területe** (151) – плóща паралелогрáма
– **tulajdonságai** (15) – власти́вості паралелогрáма
Pitagorasz-tétel (116) – теорéма Піфагóра
Rombusz (34) – ромб
– **ismertetőjelei** (34) – ознáки рóмба
– **tulajdonságai** (34) – власти́вості рóмба
Sokszög (140) – многоку́тник
– **átlója** (141) – діагонáль многоку́тника
– **csúcsai** (140) – верши́ни многоку́тника
– **kerülete** (141) – пери́метр многоку́тника
– **köré írt körvonal** (142) – кóло, опи́сане навкóло многоку́тника
– **oldalai** (140) – стóрони многоку́тника
– **szomszédos csúcsai** (140) – сусíдні верши́ни многоку́тника
– **szomszédos oldalai** (140) – сусíдні стóрони многоку́тника
– **szöge** (140) – кут многоку́тника
– **területe** (145) – плóща многоку́тника
Sokszögbe írt körvonal (142) – кóло, впи́сане в многоку́тник
Szomszédos szakaszok (6) – сусíдні відрíзки
Téglalap (30) – прямоку́тник
– **ismertetőjelei** (31) – ознáки прямоку́тника
– **területe** (146) – плóща прямоку́тника
– **tulajdonságai** (30) – власти́вості прямоку́тника
Thalész-tétel (76) – теорéма Фалéса
Trapéz (44) – трапéція
– **alapja** (44) – оснóва трапéції
– **alapjánál lévő szöge** (44) – кути́ при оснóві трапéції
– **középvonala** (45) – серéдня лíнія трапéції
– **magassága** (44) – висотá трапéції
– **szára** (44) – бічнá сторонá трапéції
– **területe** (160) – плóща трапéції
Trigonometriai alapazonosság (125) – основнá тригонометри́чна тотóжність
Trigonometrikus függvények (124) – тригонометри́чні фу́нкції

TARTALOM

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ
Підручник для 8 класу
з навчанням угорською мовою
закладів загальної середньої освіти

2-ге видання, перероблене

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

Переклад з української мови

Перекладач *Молнар Шандор Бертолонович*

Угорською мовою

Редактор *Х. І. Зикань*
Обкладинка *Д. В. Висоцький*
Макет, художнє оформлення,
комп’ютерна обробка ілюстрацій *Д. В. Висоцький*
Коректор *Г. М. Тирканич*

Формат 60×90/16.
Ум. друк. арк. 13,00. Обл.-вид. арк. 12,28.
Тираж 1971 пр. Зам. № 21-298

Державне підприємство
„Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ”
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи серія ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua, e-mail: office@svit.gov.ua

Друк ПрАТ «Білоцерківська книжкова фабрика»
09100, Київська обл., м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, буд. 4
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
серія ДК № 5454 від 14.08.2017