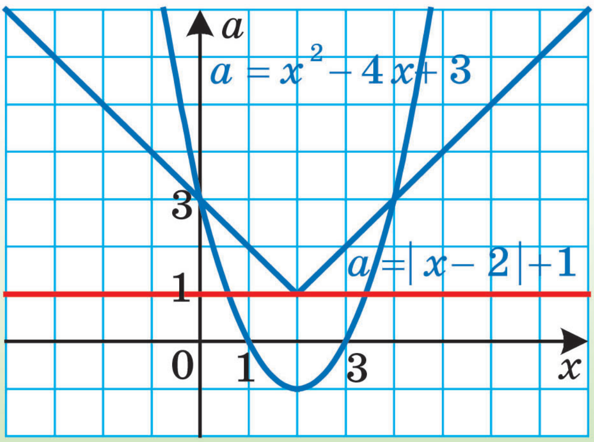
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

9

АЛГЕБРА

ДЛЯ ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ



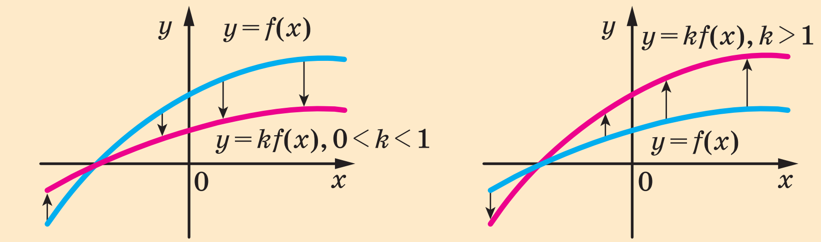
ГІМНАЗІЯ

«Моя любов — Україна і математика» — викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника науковцеві Михайлу Пилиповичу Кравчуку (1892–1942).

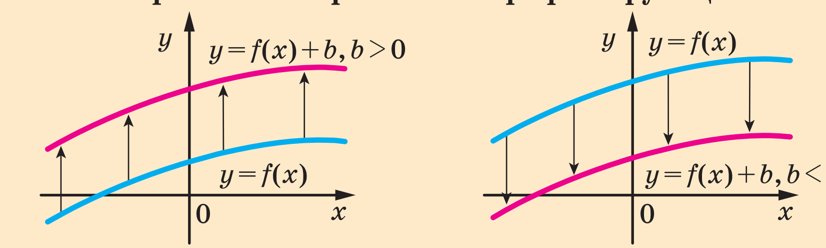
Ми сподіваємося, що це патріотичне висловлювання видатного українського математика стане для вас надійним дороговказом на шляху до професіоналізму.

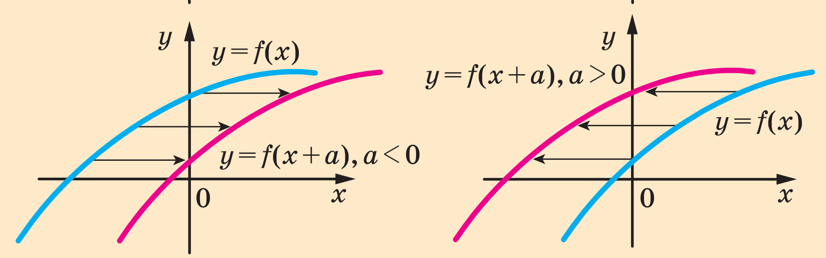
Перетворення графіків функцій

Розтягнення від осі абсцис і стискання до осі абсцис

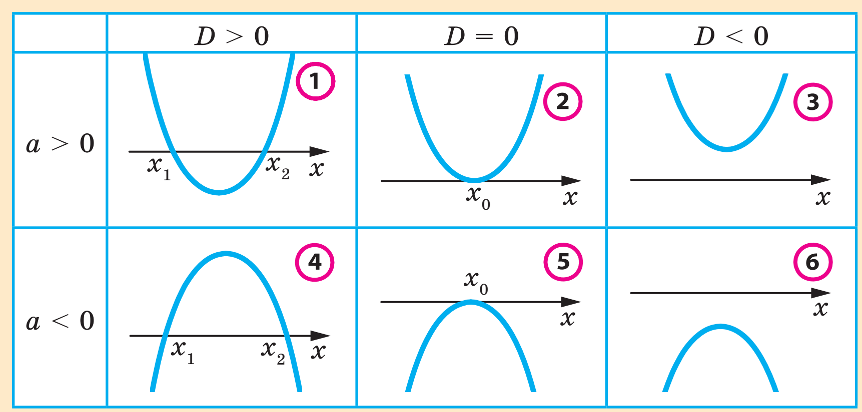


Паралельне перенесення графіка функції





Розміщення графіка квадратичної функції відносно осі абсцис



А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

АЛГЕБРА

ДЛЯ ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ
З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ

підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Харків
«Гімназія»
2017

УДК 373.167.1:512
М52

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 20.03.2017 № 417)
Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

О. П. Свєтной, доцент кафедри математики та методики її навчання Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського», кандидат фізико-математичних наук;
І. П. Завірюха, методист з математики РНМЦ Дніпровського району міста Києва;
Т. В. Богдан, учитель Сєвєродонецької загальноосвітньої школи І–ІІІ ступенів № 18 Луганської області

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 416 с. : іл.
ISBN 978-966-474-294-5.

УДК 373.167.1:512

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович, ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА
для загальноосвітніх навчальних закладів
з поглибленим вивченням математики
підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Відповідальний за випуск *Д. В. Москаленко*
Літературний редактор *Т. Є. Цента.* Технічний редактор *О. В. Гулькевич*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Коректор *Т. Є. Цента.* Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 26,00. Обл.-вид. арк. 21,96. Тираж 18 803 прим. Замовлення №

ТОВ ТО «Гімназія», вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua, www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем», вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

ISBN 978-966-474-294-5

Від авторів

ЛЮБІ ДІТИ!

Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, вибравши нелегкий шлях — навчатися в математичному класі. У цьому навчальному році ви продовжите вивчати математику за програмою для класів з поглибленим вивченням математики. Сподіваємося, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на сім параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Вивчаючи його, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі.

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, непростий. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Дерзайте! Бажаємо успіху!

ШАНОВНІ КОЛЕГИ ТА КОЛЕЖАНКИ!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з поглибленим вивченням математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає великих зусиль учителя, який формує навчальний матеріал по крихтам, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які на розсуд учителя (з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу) можна розв'язувати усно.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка та факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

Умовні позначення

n°	завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;
$n^{\bullet}$	завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;
$n^{\bullet\bullet}$	завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;
n^{*}	задачі для математичних гуртків і факультативів;
	ключові задачі, результат яких може бути використаний під час розв'язування інших задач;
n (m)	задача, яка пропонується в різних пунктах для розв'язування різними способами (номер m указує місцезнаходження цієї задачі в іншому пункті);
◄	закінчення доведення теореми, розв'язування прикладу;
	рубрика «Коли зроблено уроки».

§ 1 ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ АЛГЕБРИ 8 КЛАСУ

1. Задачі на повторення курсу алгебри 8 класу

1.1. Які множини є рівними:

1) $A = \{x \mid x = 5n - 1,\ n \in \mathbb{Z}\}$;
2) $B = \{x \mid x = 10n + 9,\ n \in \mathbb{Z}\}$;
3) $C = \{x \mid x = 5n + 4,\ n \in \mathbb{Z}\}$;
4) $D = \{x \mid x = 10n - 1,\ n \in \mathbb{Z}\}$?

1.2. Яка множина є перерізом множин A і B, якщо A — множина прямокутників, B — множина описаних чотирикутників?

1.3. Яка множина є перерізом множин A і B, якщо A — множина ромбів, B — множина вписаних чотирикутників?

1.4. Яка множина є об'єднанням множин A і B, якщо

$$A = \{x \mid x = 4n,\ n \in \mathbb{Z}\},\quad B = \{x \mid x = 4n + 2,\ n \in \mathbb{Z}\}?$$

1.5. Яка множина є об'єднанням множин A і B, якщо

$$A = \{x \mid x = 6n,\ n \in \mathbb{Z}\},\quad B = \{x \mid x = 6n - 3,\ n \in \mathbb{Z}\}?$$

1.6. Замість знака * запишіть знак $\cup$ або $\cap$ так, щоб утворилася правильна рівність:

1) $A * \varnothing = A$;
2) $A * \varnothing = \varnothing$.

1.7. Відомо, що $A \subset B$. Замість знака * запишіть знак $\cup$ або $\cap$ так, щоб утворилася правильна рівність:

1) $A * B = B$;
2) $A * B = A$.

1.8. Використовуючи діаграми Ейлера, проілюструйте такі властивості операцій над множинами:

1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

1.9. Використовуючи діаграми Ейлера, проілюструйте такі властивості операцій над множинами:

1) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

1.10. У класі 35 учнів. Із них 20 відвідують математичний гурток, 11 — гурток із фізики, а 10 учнів не відвідують ці гуртки. Скільки фізиків захоплюються математикою?

1.11. Квадрату, площа якого дорівнює 6 см², належать три многокутники, площа кожного з яких дорівнює 3 см². Доведіть, що серед цих многокутників знайдуться два, площа спільної частини яких не менша ніж 1 см².

1.12. Яких п’ятицифрових чисел більше: тих, у яких цифри записано в порядку зростання, чи тих, у яких цифри записано в порядку спадання?

1.13. Знайдіть область визначення виразу:

1) $\dfrac{1}{2x^2-x-1}$; 2) $\dfrac{1}{x-\dfrac{2}{x-1}}$; 3) $\dfrac{x+1}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x+1}}$.

1.14. Побудуйте графік функції:

1) $y=\dfrac{9x^2-6x+1}{3x-1}$; 2) $y=\dfrac{2x^2+5x+2}{x+2}$; 3) $y=\dfrac{x-1}{|x-1|+1-x}$.

1.15. Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-4x+3}$; 3) $\dfrac{a^4+9a^2+25}{a^2+a+5}$;

2) $\dfrac{9x^3+3x^2+3x+1}{3x^2-2x-1}$; 4) $\dfrac{x^{71}+x^{70}+\ldots+x+1}{x^{23}+x^{22}+\ldots+x+1}$.

1.16. Знайдіть усі натуральні значення n, при яких є цілим числом значення виразу:

1) $\dfrac{2n+11}{n+3}$; 2) $\dfrac{n^3-3n^2+2n-3}{n^2+2}$.

1.17. Спростіть вираз:

$$\frac{1}{x(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+8)}+\frac{1}{(x+8)(x+12)}+\frac{1}{(x+12)(x+16)}.$$

1.18. Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{2x}{1-3y}+\dfrac{2x}{3y+1}\right):\dfrac{4x^2+14x}{9y^2+1-6y}$;

2) $\dfrac{x^3-y^3}{2y}\left(\dfrac{2y}{4-2y-2x+xy}+\dfrac{2xy+4y}{(x-y)(x^2-4)}\right)$;

3) $\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{2}{a+b}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right):\dfrac{(a+b)^2}{ab}$;

4) $\dfrac{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}}{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}}\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$.

1.19. Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{x^2}{x-y}-y\right)\cdot\left(x+\frac{y^2}{x+y}\right)^{-1}$;

2) $\left(\frac{a}{8}+\frac{1}{6a}+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{a+2}{12a}\right)^{-1}\cdot(3a+2)^{-1}$;

3) $\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)^{-1}\left(\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{x}{x-y}\right)^{-2}$;

4) $\left(\frac{x+9}{x+7}\right)^{-1}+\left(\frac{x+7}{x^2+81-18x}+\frac{x+5}{x^2-81}\right)\left(\frac{x+3}{x-9}\right)^{-2}$.

1.20. Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases}\frac{3x-1}{4}+\frac{x+1}{3}\geqslant\frac{4x+1}{4},\\ \frac{5x-2}{2}+\frac{x-8}{3}\leqslant x;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{2x}{3}-1<1+4x,\\ 3x-6>-2(1-x),\\ 3(2x-1)>1-2x.\end{cases}$

1.21. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $ax+2>x$;

2) $ax+a^2\geqslant 2x+4$.

1.22. Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+1)^2(x-2)\geqslant 0$;

2) $(x+1)(x-2)^2>0$;

3) $|x^2-4|(x-1)\geqslant 0$;

4) $|x^2-9|(x+2)<0$.

1.23. Для кожного значення параметра a розв'яжіть нерівність:

1) $|x^2-4x+3|(x-a)\geqslant 0$;

2) $|x^2+3x+2|(x-a)<0$.

1.24. Розв'яжіть рівняння:

1) $||x-1|-1|=2$;

2) $|2x-1|=x+2$;

3) $|3x-2|=|2x-3|$;

4) $|x-4|+|x+1|=5$;

5) $|x+2|-|x-1|=3$;

6) $\frac{|x+1|-|x-1|}{x}=1$.

1.25. Розв'яжіть нерівність:

1) $|3x-4|<2$;

2) $|x-2|<-2x$;

3) $|4x+5|>x+8$;

4) $|x|-|x-3|\leqslant 2x$.

1.26. Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x+2}$;

2) $f(x)=\frac{x^4-x^2}{x^2-1}$;

3) $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{якщо } x<2,\\ \frac{1}{2}x+3, & \text{якщо } x\geqslant 2.\end{cases}$

1.27. Побудуйте графік рівняння:

1) $\frac{y-x^2}{x^2-x}=0$; 2) $\frac{y+x^2}{y+x}=0$; 3) $\frac{y^2-x^4}{x^2-1}=0$.

1.28. Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x^2+x-2}=0$;

2) $(x^2-4x+3)\sqrt{x-2}=0$;

3) $(x^2+3x-4)\left(\sqrt{x}-2\right)=0$.

1.29. Знайдіть усі пари чисел $(x;\ y)$, які задовольняють рівняння:

1) $\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{y-2}=0$;

2) $\sqrt{x^2-6x+5}+\sqrt{y^2-y-2}=0$;

3) $\sqrt{x+y}+\sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-1}=0$.

1.30. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння:

1) $(a-1)\sqrt{x-3}=0$;

2) $(x^2-4x+3)\sqrt{x-a}=0$;

3) $(x^2+4x-5)\left(\sqrt{x}-a\right)=0$.

1.31. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{14-6\sqrt{5}}+\sqrt{14+6\sqrt{5}}$;

2) $\sqrt{43+6\sqrt{50}}-\sqrt{43-6\sqrt{50}}$;

3) $\sqrt{6-\sqrt{17-12\sqrt{2}}}$;

4) $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

1.32. Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a-2+2\sqrt{a-3}}$;

2) $\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-4}}$, якщо $x>2$;

3) $\sqrt{2a-4+2\sqrt{a^2-4a+3}}-\sqrt{a-1}$;

4) $\frac{\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}}-1}{\sqrt{x+2}}$.

1.33. Спростіть вираз:

1) $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)(a-b)}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{ab}}{a-b}$;

2) $a:\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)+b:\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)$;

3) $\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2$;

4) $\dfrac{\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\dfrac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}$.

1.34. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $2x^2 - x - 5 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $x_1^2 + x_2^2$; 2) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; 3) $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}$.

1.35. Складіть квадратне рівняння, корені якого на 3 більші за відповідні корені рівняння $x^2 + 4x - 7 = 0$.

1.36. При яких значеннях параметра a сума коренів рівняння $x^2 - (a^2 + 2a)x - a = 0$ дорівнює 3?

1.37. При яких значеннях параметра a добуток коренів рівняння $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ дорівнює 2?

1.38. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3}{x^2-9}-\frac{1}{9-6x+x^2}=\frac{3}{2x^2+6x}$;

2) $\frac{2x-7}{x^2-9x+14}-\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-1}$;

3) $\frac{x^2-3x-6}{x}-\frac{8x}{x^2-3x-6}=-2$.

1.39. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x - 1)(x - 7)(x - 4)(x + 2) = 40$;

2) $(12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) = 5$;

3) $(x + 6)(x + 3)(x - 1)(x - 2) = 12x^2$;

4) $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$;

5) $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$;

6) $(x^2 - x + 1)^4 - 10x^2(x^2 - x + 1)^2 + 9x^4 = 0$;

7) $(x + 5)^4 + (x + 3)^4 = 2$;

8) $x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=7$.

1.40. Доведіть, що при будь-якому цілому значенні n значення виразу $n(n + 1)(2n + 1)$ кратне 6.

1.41. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ є натуральним числом.

1.42. Чи існують такі натуральні числа n і k, що значення виразу $5^n + 1$ кратне значенню виразу $5^k - 1$?

1.43. Натуральне число $n > 1$ не ділиться націло ні на 2, ні на 3. Доведіть, що число $n^2 - 1$ кратне 24.

1.44. Доведіть, що не існує такого натурального числа p, для якого числа $p + 5$ і $p + 10$ є простими.

1.45. Знайдіть усі пари натуральних чисел $(m; n)$ таких, що $m! + 12 = n^2$.

1.46. Знайдіть усі двоцифрові натуральні числа, будь-який натуральний степінь яких закінчується двома цифрами, які утворюють це двоцифрове число.

1.47. Доведіть, що при всіх натуральних значеннях n дріб $\frac{2n^2+5n+3}{3n^2+10n+8}$ є нескоротним.

1.48. Квадратний тричлен $x^2 + ax + b$ має цілі корені, більші за 2. Доведіть, що число $a + b + 1$ складене.

1.49. Остання цифра десяткового запису числа $n^2 + 8n$ дорівнює 4. Яка передостання цифра в записі цього числа?

§ 2 КВАДРАТИЧНА ФУНКЦІЯ

- У цьому параграфі ви повторите й розширите свої знання про функцію та її властивості.
- Навчитеся, використовуючи графік функції $y = f(x)$, будувати графіки функцій $y = kf(x)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$.
- Дізнаєтесь, яку функцію називають квадратичною, яка фігура є її графіком, вивчите властивості квадратичної функції.
- Навчитеся застосовувати властивості квадратичної функції.

2. Функція

У повсякденному житті нам часто доводиться спостерігати процеси, у яких зміна однієї величини (незалежної змінної) призводить до зміни другої величини (залежної змінної). Вивчення цих процесів потребує створення їхніх математичних моделей. Однією з таких найважливіших моделей є **функція.**

Із цим поняттям ви ознайомилися в 7 класі. Нагадаємо й уточнимо основні відомості.

Нехай X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. **Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y.**

Іншими словами, **функція — це правило, яке кожному елементу множини X ставить у відповідність єдиний елемент множини Y.**

Зазвичай незалежну змінну позначають буквою x, залежну — буквою y, функцію (правило) — буквою f.

Якщо розглядають функцію f із незалежною змінною x і залежною змінною y, то говорять, що змінна y **функціонально залежить** від змінної x. Цей факт позначають так: $y = f(x)$.

Незалежну змінну ще називають **аргументом функції.**

Множину всіх значень, яких набуває аргумент, тобто множину X, називають **областю визначення функції** і позначають $D(f)$ або $D(y)$.

Так, областю визначення оберненої пропорційності $y = \frac{2}{x}$ є множина $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Також можна записати: $D(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ або $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Значення залежної змінної ще називають **значенням функції**. Значення функції f, яке відповідає значенню x_0 аргументу x, позначають $f(x_0)$. Наприклад, $f(7)$ — це значення функції при $x = 7$. Також прийнято називати число $f(x_0)$ **значенням функції** f у **точці** x_0.

Множину всіх значень, яких набуває залежна змінна, тобто множину Y, називають **областю значень функції** і позначають $E(f)$ або $E(y)$. Так, областю значень функції $y = \sqrt{x}$ є проміжок $[0; +\infty)$, тобто $E(y) = [0; +\infty)$.

Елементами множин $D(f)$ і $E(f)$ можуть бути об'єкти найрізноманітнішої природи.

Так, якщо кожному многокутнику поставити у відповідність його площу, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина многокутників, а область значень — множина додатних чисел.

Якщо кожній людині поставити у відповідність день тижня, у який вона народилася, то можна говорити про функцію, область визначення якої — множина людей, а область значень — множина днів тижня.

Якщо $D(f) \subset \mathbb{R}$ і $E(f) \subset \mathbb{R}$, то функцію f називають **числовою**.

Якщо областю визначення функції f є множина X, а областю значень — множина Y, то функцію f також називають **відображенням множини X на множину Y**. Слова «відображення» і «функція» є синонімами. Проте термін «відображення» частіше використовують тоді, коли при заданні функції хочуть наголосити, які саме множини є областю визначення та областю значень. Наприклад, нумерація елементів деякої зліченної множини A — це відображення множини A на множину $\mathbb{N}$.

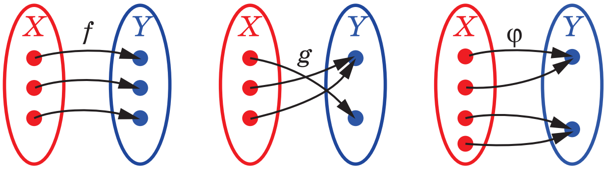


Рис. 2.1

На рисунку 2.1 проілюстровано відображення множини X на множину Y (точками позначено елементи множин). У відображенні f кожний елемент множини Y є відповідним деякому єдиному елементу множини X. Таке відображення називають **взаємно однозначним відображенням множини X на множину Y**. Кожне з відображень g і φ не є взаємно однозначним відображенням множини X на множину Y.

Наприклад, функція $y = \sqrt{x-1}$ є взаємно однозначним відображенням множини $X = [1; +\infty)$ на множину $Y = [0; +\infty)$. Зауважимо, що функція $y = x^2$ не є взаємно однозначним відображенням множини $X = \mathbb{R}$ на множину $Y = [0; +\infty)$. Справді, наприклад, елемент 4 множини Y є відповідним двом елементам множини X: -2 і 2.

Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення та правило, за яким можна за кожним значенням незалежної змінної знайти значення залежної змінної.

Функцію можна задати одним із таких способів:
- описово;
- за допомогою формули;
- за допомогою таблиці;
- графічно.

Розглянемо кілька прикладів функцій, заданих описово.

↳ Кожному раціональному числу поставимо у відповідність число 1, а кожному ірраціональному — число 0. Функцію, задану таким чином, називають **функцією Діріхле** та позначають $y = \mathfrak{D}(x)$. Пишуть:

$$\mathfrak{D}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, \text{ якщо } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Зауважимо, що $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = \{0, 1\}$.

↳ Кожному дійсному числу x поставимо у відповідність найбільше ціле число, яке не перевищує числа x. Із курсу алгебри 7 класу ви знаєте, що задану функцію називають **цілою частиною числа** x і позначають $y = [x]$. Наприклад, $[\sqrt{2}] = 1$, $[2] = 2$, $[-\sqrt{2}] = -2$. Зауважимо, що $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = \mathbb{Z}$.

↳ Кожному дійсному числу x поставимо у відповідність різницю між цим числом та його цілою частиною. Задану функцію називають **дробовою частиною числа** x і позначають $y = \{x\}$. Маємо: $\{x\} = x - [x]$. Наприклад, $\{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - [\sqrt{2}] = \sqrt{2} - 1$, $\{2\} = 2 - [2] = 2 - 2 = 0$, $\{-\sqrt{2}\} = -\sqrt{2} - [-\sqrt{2}] = -\sqrt{2} - (-2) = 2 - \sqrt{2}$. Зауважимо, що $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = [0; 1)$.

↳ Кожному від'ємному дійсному числу поставимо у відповідність число -1, кожному додатному дійсному числу — число 1, нулю — число 0. Функцію, задану таким чином, називають **сигнум** (від латин. *signum* — знак) і позначають $y = \operatorname{sgn} x$.

Пишуть: $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

Зауважимо, що $D(y) = \mathbb{R}$, $E(y) = \{-1, 0, 1\}$.

Значення цієї функції характеризує знак відповідного аргументу.

Легко перевірити справедливість такої рівності: $x \cdot \operatorname{sgn} x = |x|$. Зробіть це самостійно.

Розглянемо функцію f, у якої $D(f) = \mathbb{N}$. Вважатимемо, що $f(n) = 1$, якщо десятковий запис числа π містить n цифр 4, що йдуть поспіль, і $f(n) = 0$, якщо цей запис такої властивості не має. Звернемо увагу на те, що значення функції f обчислювати нелегко. Наприклад, ми не знаємо, чому дорівнює $f(10\,000\,000\,000)$. Проте область визначення та правило задані, а отже, заданою є і сама функція.

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. Якщо при цьому не вказано область визначення, то вважають, що областю визначення функції є множина значень аргументу, при яких формула має зміст.

Наприклад, якщо функцію задано формулою $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, то її областю визначення є область визначення виразу $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, тобто проміжок $(1; +\infty)$.

Значення однієї функції можуть слугувати значеннями аргументу іншої функції.

Наприклад, розглянемо функції $f(x) = 2x - 1$ і $g(x) = x^2 + x + 1$. Тоді $f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2(x^2 + x + 1) - 1 = 2x^2 + 2x + 1$. Отже, можна говорити, що формула $y = 2x^2 + 2x + 1$ задає функцію $y = f(g(x))$.

Якщо для будь-якого $x \in M$ усі значення функції g слугують значеннями аргументу функції f, то говорять, що задано **складену функцію** $y = f(g(x))$ з областю визначення M.

Існують функції, які на різних підмножинах області визначення задаються різними формулами. Наприклад,

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ 2x - 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

Такі функції називають **кусково заданими**.

Спосіб задання функції однією або кількома формулами називають **аналітичним**.

У тих випадках, коли область визначення функції є скінченною множиною та кількість її елементів не дуже велика, зручно використовувати табличний спосіб задання функції. Цей спосіб досить часто використовують на практиці. Так, результатом запису спостережень за якою-небудь характеристикою процесу (температурою, швидкістю, тиском і т. п.) є таблиця, яка задає функціональну залежність цієї величини від часу.

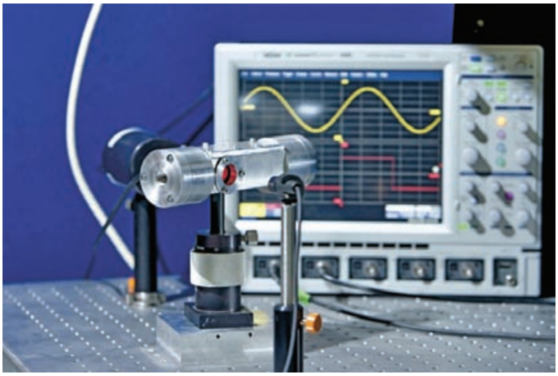
Означення. Графіком числової функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f.

Сказане означає, що коли якась фігура є графіком функції f, то виконуються дві умови:

1) якщо x_0 — деяке значення аргументу, а $f(x_0)$ — відповідне значення функції, то точка з координатами $(x_0; f(x_0))$ належить графіку;
2) якщо $(x_0; y_0)$ — координати довільної точки графіка, то x_0 і y_0 — відповідні значення незалежної і залежної змінних функції f, тобто $y_0 = f(x_0)$.

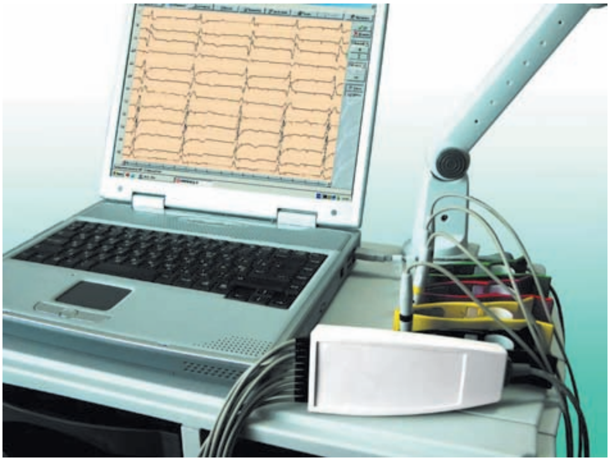
Фігура на координатній площині може бути графіком деякої функції, якщо будь-яка пряма, перпендикулярна до осі абсцис, має із цією фігурою не більше однієї спільної точки. Наприклад, коло не може слугувати графіком жодної функції.

Графічний спосіб задання функції широко застосовують при дослідженні реальних процесів. Існують прилади, які видають оброблену інформацію у вигляді графіків.



Осцилограф

Так, у медицині використовують електрокардіограф. Цей прилад рисує криві, які характеризують роботу серця.



Електрокардіограф

У таблиці наведено функції, які ви вивчали в 7 і 8 класах.

Функція	$D(y)$	$E(y)$	Графік
$y = kx + b$	$(-\infty; +\infty)$	Якщо $k \neq 0$, то $E(y) = (-\infty; +\infty)$; якщо $k = 0$, то $E(y) = \{b\}$	Пряма
$y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	Гіпербола
$y = x^2$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Парабола
$y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Вітка параболи

ПРИКЛАД 1 Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{x^2(x-1)}$.

Розв'язання. Область визначення даної функції — це множина розв'язків нерівності $x^2(x-1) \geqslant 0$.

Ця нерівність рівносильна сукупності $\left[\begin{array}{l} x^2 = 0, \\ x - 1 \geqslant 0. \end{array}\right.$

Розв'язки цієї сукупності утворюють множину $\{0\} \cup [1; +\infty)$.

Відповідь: $\{0\} \cup [1; +\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 2 Знайдіть область значень функції $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$.

Розв'язання. Нехай a — довільний елемент області значень даної функції, тобто $a \in E(y)$. Тоді задача зводиться до знаходження всіх значень параметра a, при яких рівняння $\dfrac{2x}{1+x^2} = a$ має розв'язки.

Це рівняння рівносильне такому:

$$2x = a + ax^2, \text{ звідки } ax^2 - 2x + a = 0.$$

Якщо $a = 0$, то отримане рівняння має корінь $x = 0$. Отже, число 0 входить в область значень функції.

Якщо $a \neq 0$, то це рівняння є квадратним, і наявність коренів визначається умовою $D \geqslant 0$.

Маємо: $D = 4 - 4a^2$. Залишається розв'язати нерівність $4 - 4a^2 \geqslant 0$. Отримуємо:

$$4a^2 \leqslant 4, \quad a^2 \leqslant 1, \quad |a| \leqslant 1.$$

Множиною розв'язків останньої нерівності є проміжок $[-1; 1]$.

Відповідь: $[-1; 1]$. ◄

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік функції $y = \{x\}$.

Розв'язання. Спочатку доведемо важливі властивості цілої та дробової частин числа.

Якщо $k \in \mathbb{Z}$, то $[x + k] = [x] + k$.

Нехай $[x] = c$. Тоді за означенням цілої частини числа $c \leqslant x < c + 1$. Звідси $c + k \leqslant x + k < (c + k) + 1$. Отже, $[x + k] = c + k = [x] + k$.

Якщо $k \in \mathbb{Z}$, то $\{x + k\} = \{x\}$.

Маємо: $\{x + k\} = x + k - [x + k] = x + k - ([x] + k) = x - [x] = \{x\}$.

Доведена властивість дробової частини числа показує, що значення функції $y = \{x\}$ не зміниться, якщо до її аргументу додати ціле число. А цей факт у свою чергу дає змогу стверджувати, що на кожному з проміжків виду $[k; k + 1)$, де $k \in \mathbb{Z}$, графік функції $y = \{x\}$ має однаковий вигляд. Тому достатньо побудувати його, наприклад, на проміжку $[0; 1)$, а потім отриману фігуру «розмножити».

Якщо $x \in [0; 1)$, то $[x] = 0$ і $\{x\} = x - [x] = x$, тобто при $x \in [0; 1)$ маємо $y = x$.

Шуканий графік зображено на рисунку 2.2. ◄

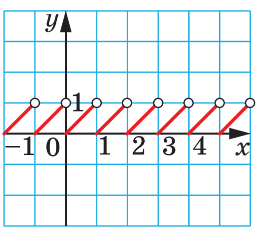


Рис. 2.2

ПРИКЛАД 4 Знайдіть функцію f таку, що $D(f) = \mathbb{R}$ і для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(2x - 1) = x^2$.

Розв'язання. Нехай $2x - 1 = t$. Оскільки змінна x набуває будь-яких дійсних значень, то й змінна t також набуває будь-яких дійсних значень. Маємо: $x = \frac{t+1}{2}$. Тоді $f(t) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^2$ для будь-якого $t \in \mathbb{R}$.

Ми встановили, що коли функція f, яка задовольняє умову $f(2x - 1) = x^2$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$, існує, то вона має вигляд $f(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$. Залишилося показати, що знайдена функція задовольняє умову задачі.

Маємо: $D(f) = \mathbb{R}$ і $f(2x-1) = \left(\frac{(2x-1)+1}{2}\right)^2 = x^2$.

Відповідь: $f(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$. ◄

?

1. Що називають функцією?
2. Як записують, що змінна y функціонально залежить від змінної x?
3. Що називають аргументом функції?
4. Що називають областю визначення функції та як її позначають?
5. Що називають значенням функції?
6. Що називають областю значень функції та як її позначають?
7. Яку функцію називають числовою?
8. Як інакше можна назвати функцію з областю визначення X і областю значень Y?
9. Яке відображення називають взаємно однозначним відображенням множини X на множину Y?
10. Що треба вказати, щоб функція вважалася заданою?
11. Назвіть способи задання функції.
12. Що вважають областю визначення функції, якщо її задано формулою та при цьому не вказано область визначення?
13. Що називають графіком функції?

ВПРАВИ

2.1.° Кожному натуральному числу, більшому за 10, але меншому від 20, поставили у відповідність остачу при діленні цього числа на 5.

1) Яким способом задано цю функцію?

2) Яка область значень цієї функції?
3) Задайте цю функцію таблично.

2.2.° Заповніть таблицю.

Значення аргументу x	Значення функції		
	$f(x) = [x]$	$g(x) = \{x\}$	$\varphi(x) = \mathfrak{D}(x)$
3,2			
−3,2			
$\sqrt{3}$			
$-\sqrt{3}$			

2.3.° На рисунку 2.3 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 5]$. Користуючись графіком, знайдіть:
1) $f(-3{,}5)$; $f(-2{,}5)$; $f(-1)$; $f(2)$;
2) значення x, при яких $f(x) = -2{,}5$; $f(x) = -2$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;
3) область значень функції.

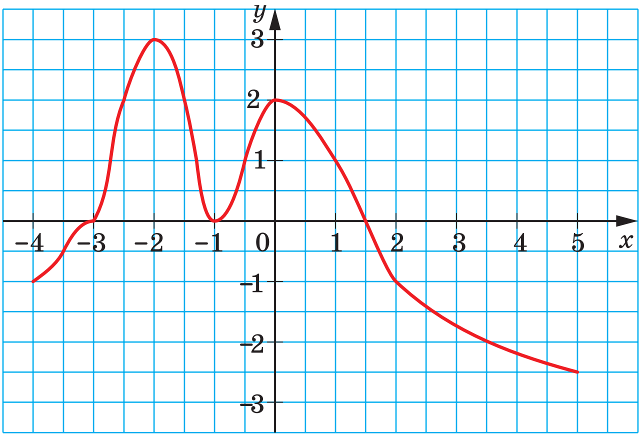


Рис. 2.3

2.4.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

1) $f(x) = \frac{1}{6}x - 7$;
2) $f(x) = \frac{20 + 4x}{3x - 5}$;
3) $g(x) = 9 - x^2$;
4) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 3$.

2.5.° Знайдіть, не виконуючи побудови, точки перетину з осями координат графіка функції:

1) $h(x) = 9 - 10x$; 2) $p(x) = 4x^2 + x - 3$; 3) $s(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$.

2.6.° Дано функцію $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, \text{ якщо } x \leqslant -1, \\ x^2 - 5, \text{ якщо } -1 < x < 4, \\ 11, \quad \text{ якщо } x \geqslant 4. \end{cases}$

Знайдіть: 1) $f(-3)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(6{,}4)$.

2.7.° Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} 6, \text{ якщо } x \leqslant -3, \\ x^2, \text{ якщо } -3 < x < 1, \\ x, \text{ якщо } x \geqslant 1. \end{cases}$

2.8.° Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{x}, \text{ якщо } x < -2, \\ -x, \text{ якщо } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x > 0. \end{cases}$

2.9.° Побудуйте графік функції $y = \operatorname{sgn} x$.

2.10.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{x - 2} + \frac{x + 2}{x - 5}$; 3) $f(x) = \sqrt{x + 3} + \frac{1}{x^2 - 9}$;

2) $f(x) = \frac{x}{|x| - 7}$; 4) $f(x) = \frac{\sqrt{x - 4}}{\sqrt{x + 2}} + \frac{4x - 3}{x^2 - 7x + 6}$.

2.11.° Знайдіть область визначення функції:

1) $f(x) = \sqrt{x + 4} + \frac{2}{x + 1}$; 2) $f(x) = \sqrt{8 - x} + \frac{4}{x^2 - 8x}$.

2.12.° Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = \sqrt{x} - 1$; 4) $f(x) = |x + 2| + 2$;

2) $f(x) = 5 - x^2$; 5) $f(x) = \sqrt{-x^2}$;

3) $f(x) = -7$; 6) $f(x) = \sqrt{x - 2} + \sqrt{2 - x}$.

2.13.° Знайдіть область значень функції:

1) $f(x) = x^2 + 3$; 2) $f(x) = 6 - \sqrt{x}$; 3) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$.

2.14.° Чи є функція взаємно однозначним відображенням множини $D(y)$ на множину $E(y)$:

1) $y = 2x + 1$; 2) $y = |x|$; 3) $y = \sqrt{x}$?

2.15.° Чи є функція взаємно однозначним відображенням множини $D(y)$ на множину $E(y)$:

1) $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = 2$?

2.16.° Кожному многокутнику поставили у відповідність його периметр. Чи є описане відображення множини многокутників на множину додатних дійсних чисел взаємно однозначним?

2.17.° Дано функції $f(x) = 1 - 3x$ і $g(x) = x^2 - 1$. Задайте формулою функцію:

1) $y = f(x + 1)$; 3) $y = f(g(x))$; 5) $y = f(f(x))$;
2) $y = g\left(\frac{1}{x}\right)$; 4) $y = g(f(x))$; 6) $y = g(g(x))$.

2.18.° Дано функції $f(x) = \sqrt{x+1}$ і $g(x) = x^2 - 2x$. Задайте формулою функцію:

1) $y = f(3x)$; 3) $y = f(g(x))$; 5) $y = f(f(x))$;
2) $y = g(-x)$; 4) $y = g(f(x))$; 6) $y = g(g(x))$.

2.19.° Задайте формулою яку-небудь функцію, областю визначення якої є:

1) множина дійсних чисел, крім чисел 1 і 2;
2) множина всіх чисел, не менших від 5;
3) множина всіх чисел, не більших за 10, крім числа -1;
4) множина, яка складається з одного числа -4.

2.20.° Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

1) $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$; 2) $f(x) = \frac{12x - 72}{x^2 - 6x}$; 3) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 9}$.

2.21.° Знайдіть область визначення функції та побудуйте її графік:

1) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$; 2) $f(x) = \frac{x^3}{x}$.

2.22.• Функцію f задано описом: кожному цілому числу поставлено у відповідність остачу при діленні цього числа на 3. Знайдіть $f(2)$, $f(0)$, $f(-17)$, $f(21)$. Знайдіть $E(f)$. Доведіть, що $f(x) = f(x + 3)$ для будь-якого $x \in \mathbb{Z}$.

2.23.• Функцію g задано описом: кожному цілому числу поставлено у відповідність остачу при діленні цього числа на 4. Знайдіть $g(3)$, $g(0)$, $g(-21)$, $g(32)$. Знайдіть $E(g)$. Доведіть, що $g(x) = g(x + 4)$ для будь-якого $x \in \mathbb{Z}$.

2.24.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{4 - |x|} + \frac{1}{x + 2}$; 2) $y = \sqrt{|x| - 3} + \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$;

3) $y=\sqrt{(x-1)^2(x-2)}$;

4) $y=\sqrt{|x+1|(x-3)}$;

5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2(x+2)}}$;

6) $y=\sqrt{\operatorname{sgn} x}$.

2.25.$^{\bullet}$ Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-|x|}}+\dfrac{1}{x-2}$;

2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-1}}+\sqrt{x+4}$;

3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2(x+3)}}$;

4) $y=\sqrt{(x+4)^2(x-3)}$;

5) $y=\sqrt{|x+5|(x+2)}$;

6) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sgn} x}}$.

2.26.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть область значень функції:

1) $y = 3x^2 - 2x + 1$;

2) $y = -2x^2 + 3x - 4$;

3) $y=\dfrac{3x+1}{2x+3}$;

4) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$;

5) $y=x+\dfrac{9}{x}$.

2.27.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть область значень функції:

1) $y = 5x^2 - x + 1$;

2) $y = -3x^2 - x - 2$;

3) $y=\dfrac{2x-1}{5x+4}$;

4) $y=\dfrac{2x}{x^2-4}$;

5) $y=4x+\dfrac{1}{x}$.

2.28.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік функції $y=\left(\sqrt{(x+2)^2x}\right)^2-x^3-4x^2$.

2.29.$^{\bullet\bullet}$ Відомо, що $D(f) = [-1;\ 4]$. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = f(-x)$;

2) $y = f(2x)$;

3) $y = f(1 - x)$;

4) $y = f(x^2)$;

5) $y = f(|x|)$;

6) $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2.30.$^{\bullet\bullet}$ Відомо, що $D(g) = [-9;\ 1]$. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = g(x + 1)$;

2) $y=g\left(\dfrac{1}{3}x\right)$;

3) $y = g(x^2)$;

4) $y = g(|x|)$;

5) $y=g\left(\sqrt{x}\right)$;

6) $y=g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

2.31.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\dfrac{1}{\mathfrak{D}(x)}$;

2) $y=\dfrac{1}{[x]}$;

3) $y=\dfrac{1}{\{x\}}$;

4) $y=\sqrt{-\mathfrak{D}(x)}$;

5) $y=\sqrt{\mathfrak{D}(x)-1}$.

2.32.•• Знайдіть область значень функції:

1) $y = \mathfrak{D}([x])$; 2) $y = \mathfrak{D}(\{x\})$; 3) $y = x\,\mathfrak{D}(x)$.

2.33.•• Знайдіть область значень функції:

1) $y = [\mathfrak{D}(x)]$; 2) $y = \{\mathfrak{D}(x)\}$.

2.34.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \mathfrak{D}(\mathfrak{D}(x))$; 2) $y = \{[x]\}$; 3) $y = \sqrt{1-[x]^2}$.

2.35.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = [\{x\}]$; 2) $y = \sqrt{\{x\}(\{x\}-1)}$.

2.36.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{sgn}(x + 1)$; 2) $y = \operatorname{sgn}(1 - x^2)$.

2.37.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \operatorname{sgn}(1 - x)$; 2) $y = \operatorname{sgn}(x^2 - 4)$.

2.38.•• Функцію задано описом: кожному цілому числу поставлено у відповідність остачу при діленні квадрата цього числа на 5. Побудуйте графік цієї функції.

2.39.•• Функцію задано описом: кожному цілому числу поставлено у відповідність остачу при діленні квадрата цього числа на 3. Побудуйте графік цієї функції.

2.40.•• Знайдіть функцію f таку, що $D(f) = \mathbb{R}$ і для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(3x - 1) = x + 2$.

2.41.•• Знайдіть функцію g таку, що $D(g) = \mathbb{R}$ і для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $g(4 - x) = 3x + 1$.

2.42.* Знайдіть функцію f таку, що $D(f) = \mathbb{R}$ і для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $f(x) + 2f(-x) = x + 1$.

2.43.* Знайдіть функцію f таку, що $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ і для будь-якого $x \in D(f)$ виконується рівність $f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \frac{1}{x}$.

2.44.* Знайдіть функцію f таку, що $D(y) = \mathbb{R}$ і для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується рівність $2f(x) - f(1 - x) = x + 3$.

2.45.* Дано функцію $f(x) = x^2 + 2x$. Розв'яжіть рівняння

$$f(f(f(x))) = 0.$$

2.46.* Дано функцію $f(x) = x^2 + 10x + 20$. Розв'яжіть рівняння

$$f(f(f(x))) = x.$$

2.47.* Дано функцію $f(x) = x^2 - x + 1$. Розв'яжіть рівняння

$$f(f(x)) = x.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

2.48. Скоротіть дріб $\frac{9x^3+3x^2+3x+1}{3x^2-2x-1}$.

2.49. Розв'яжіть рівняння $|2x-1| = x+2$.

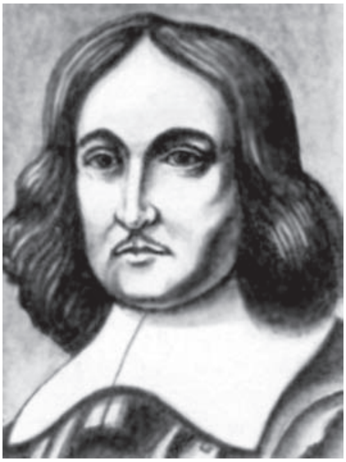
2.50. Побудуйте графік рівняння $\frac{y-x^2}{x^2-x}=0$.

2.51. Спростіть вираз $\left(\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\frac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2$.

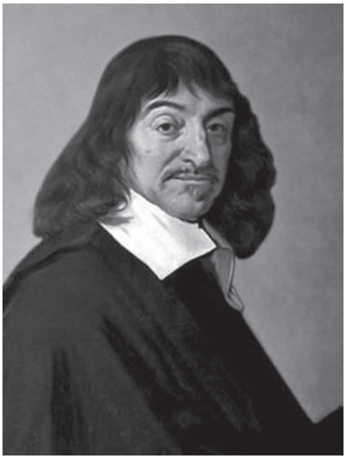
З історії розвитку поняття функції

Означення функції, яким ви користуєтеся на даному етапі вивчення математики, з'явилося порівняно нещодавно — у XIX ст. Воно формувалося більше 200 років під впливом бурхливих суперечок видатних математиків кількох поколінь.

Досліджувати функціональні залежності між величинами почали ще стародавні вчені. Цей пошук знайшов відображення у відкритті формул для обчислення площ і об'ємів деяких фігур. Прикладами табличного задання функцій можуть слугувати астрономічні таблиці вавилонян, стародавніх греків і арабів.



П'єр Ферма́
(1601–1665)



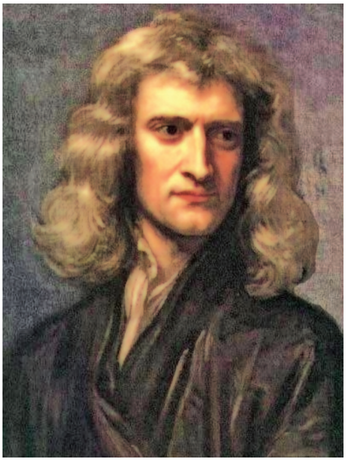
Рене Декарт
(1596–1650)

Готфрід Вільгельм Лейбніц
(1646–1716)

Йоганн Бернуллі
(1667–1748)

Проте лише в першій половині XVII ст. своїм відкриттям методу координат видатні французькі математики П’єр Ферма́ і Рене Декарт заклали основи для виникнення поняття функції. У своїх працях вони досліджували зміну ординати точки залежно від зміни її абсциси.

Значну роль у формуванні поняття функції відіграли роботи великого англійського вченого Ісаака Ньютона. Під функцією він розумів величину, яка змінює своє значення з плином часу.



Ісаак Ньютон
(1643–1727)

Термін «функція» (від латин. *functio* — здійснення, виконання) запровадив німецький математик Готфрід Лейбніц. Він і його учень, швейцарський математик Йоганн Бернуллі, під функцією розуміли формулу, яка пов’язує одну змінну з іншою, тобто ототожнювали функцію з одним зі способів її задання.

Подальшому розвиткові поняття функції багато в чому сприяло з’ясування істини в багаторічному спорі видатних математиків Леонарда Ейлера і Жана Лерона д’Аламбера, одним із предметів якого було з’ясування сутності цього поняття. У результаті

Леонард Ейлер
(1707–1783)

Жан Лерон д'Аламбер
(1717–1783)

було сформовано більш загальний погляд на функцію як залежність однієї змінної величини від другої, у якому це поняття жорстко не пов'язувалося зі способом задання функції.

У 30-х рр. XIX ст. ідеї Ейлера набули подальшого розвитку в роботах видатних учених: російського математика Миколи Лобачевського та німецького математика Петера Густава Лежена Діріхле.

Микола Лобачевський
(1792–1856)

Петер Діріхле
(1805–1859)

Саме тоді з'явилося таке означення: *змінну величину y називають функцією змінної величини x, якщо кожному значенню величини x відповідає єдине значення величини y.*

Таке означення функції можна й сьогодні зустріти в шкільних підручниках. Проте більш сучасний погляд — це трактування функції як *правила, за допомогою якого за значенням незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної.*

Коли на межі XIX і XX ст. виникла теорія множин і стало зрозумілим, що елементами області визначення та області значень зовсім не обов'язково мають бути числа, то під функцією стали розуміти *правило, яке кожному елементу множини X ставить у відповідність єдиний елемент множини Y.*

За допомогою поняття множини можна дати означення функції, не використовуючи термін «правило».

Якщо множини X і Y — відповідно область визначення і область значень функції f, то тим самим задається множина

$$\{(x;\ y) \mid x \in X,\ y \in Y,\ y = f(x)\}.$$

Упорядковані пари, які складають цю множину, характеризуються тим, що у них перші компоненти є різними.

Справедливе й обернене твердження: будь-яка множина упорядкованих пар, перші компоненти яких є різними, задає деяку функцію, область визначення якої — множина перших компонентів пар, область значень — множина других компонентів пар. Правило, яке кожному елементу області визначення ставить у відповідність єдиний елемент області значень, визначається самими упорядкованими парами.

Сказане демонструє, що можна прийняти таке означення.

Означення. Функція — це множина упорядкованих пар з різними першими компонентами.

Так, множина $\{(1; 3), (5; -7), (2; 6), (-3; 6)\}$ є деякою функцією f, у якої $D(f) = \{1, 5, 2, -3\}$, $E(f) = \{3, -7, 6\}$. Пишуть: $f = \{(1; 3), (5; -7), (2; 6), (-3; 6)\}$. Із цього запису, наприклад, випливає, що $f(5) = -7$.

Наприклад, множини f і g, де

$$f = \{(x;\ 2x - 1) \mid x \in \mathbb{R}\},$$

$$g = \left\{\left(x;\ \frac{1}{x}\right) \middle|\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\right\},$$

є відповідно лінійною функцією та оберненою пропорційністю.

3. Зростання і спадання функції. Найбільше і найменше значення функції

Часто про властивості об'єкта можна робити висновки за його зображенням: фотографією, рентгенівським знімком, рисунком тощо.

«Зображенням» функції може слугувати її графік. Покажемо, як графік функції дає змогу визначити певні її властивості.

На рисунку 3.1 зображено графік деякої функції $y = f(x)$.

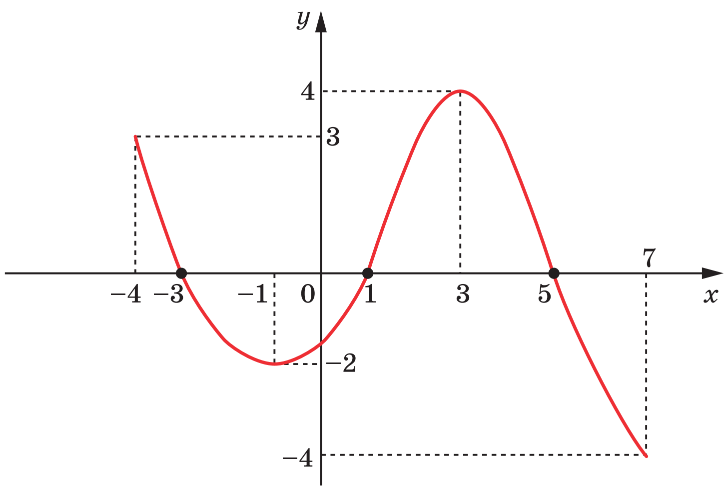


Рис. 3.1

Її областю визначення є проміжок $[-4; 7]$, а областю значень — проміжок $[-4; 4]$.

При $x = -3$, $x = 1$, $x = 5$ значення функції дорівнюють нулю.

Означення. **Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають *нулем функції*.**

Так, числа -3, 1, 5 є нулями даної функції.

Зауважимо, що на проміжках $[-4; -3)$ і $(1; 5)$ графік функції f розташований над віссю абсцис, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — під віссю абсцис. Це означає, що на проміжках $[-4; -3)$ і $(1; 5)$ функція набуває додатних значень, а на проміжках $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ — від'ємних.

Означення. **Проміжок, на якому функція набуває значень однакового знака, називають проміжком знакосталості функції.**

Проміжки $[-4; -3)$, $(1; 5)$, $(-3; 1)$ і $(5; 7]$ є проміжками знакосталості розглядуваної функції. Зазначимо, що, наприклад, проміжки $(0; 5)$ і $[1; 5)$ не є проміжками знакосталості даної функції.

Зауваження. Під час пошуку проміжків знакосталості функції вказують ті проміжки, які не є власними підмножинами жодних інших проміжків знакосталості. Наприклад, на проміжку $(-2; -1)$ функція f набуває від'ємних значень (рис. 3.1), але до відповіді потрібно включити проміжок $(-3; 1)$, який містить проміжок $(-2; -1)$.

Зі збільшенням x від -4 до -1 графік функції «йде вниз», тобто значення функції зменшуються. Говорять, що на проміжку $[-4; -1]$ **функція є спадною.** Зі збільшенням x від -1 до 3 графік функції «йде вгору», тобто значення функції збільшуються. Говорять, що на проміжку $[-1; 3]$ **функція є зростаючою.**

Означення. **Функцію f називають зростаючою на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.**

Означення. **Функцію f називають спадною на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.**

Часто використовують і такі формулювання.

Означення. **Функцію f називають зростаючою (спадною) на множині $M \subset D(f)$, якщо для будь-яких значень аргументу із цієї множини більшому значенню аргументу відповідає більше (менше) значення функції.**

Якщо функція є зростаючою (спадною) на множині M, то також прийнято говорити, що ця функція **зростає (спадає)** на множині M.

Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають **зростаючою.** Якщо функція спадає на всій області визначення, то її називають **спадною.**

Наприклад, на рисунку 3.2 зображено графік функції $y = \sqrt{x}$. Ця функція є

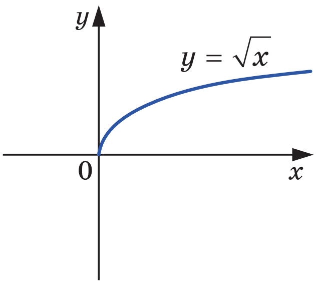


Рис. 3.2

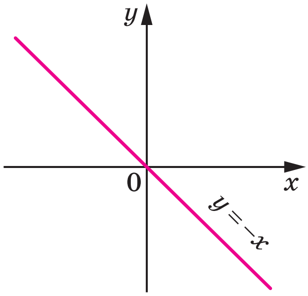


Рис. 3.3

зростаючою. На рисунку 3.3 зображено графік спадної функції $y = -x$. На рисунку 3.1 зображено графік функції, яка не є ні зростаючою, ні спадною.

Використовуючи означення зростаючої та спадної на множині M функції, легко довести таку теорему (зробіть це самостійно).

Теорема 3.1. ***Якщо функція f є зростаючою (спадною) і $f(x_1) = f(x_2)$, то $x_1 = x_2$.***

Наслідок. ***Якщо функція f є зростаючою (спадною), то відображення множини $D(f)$ на множину $E(f)$ є взаємно однозначним відображенням.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що функція $y = x^n$, де n — парне натуральне число, спадає на проміжку $(-\infty; 0]$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з проміжку $(-\infty; 0]$, причому $x_2 > x_1$. Доведемо, що $x_2^n < x_1^n$. Тим самим покажемо, що на проміжку $(-\infty; 0]$ більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.

Маємо: $x_2 > x_1$, $-x_2 < -x_1$. Обидві частини останньої нерівності є невід'ємними числами. Тоді за властивістю числових нерівностей можна записати, що $(-x_2)^n < (-x_1)^n$. Оскільки n — парне число, то $x_2^n > x_1^n$. ◄

Якщо функція є зростаючою (спадною) на деякому проміжку, то цей проміжок називають **проміжком зростання (спадання)** функції.

Так, у прикладі 1 доведено, що проміжок $(-\infty; 0]$ є проміжком спадання функції $y = x^n$, де n — парне натуральне число. Аналогічно можна довести, що проміжок $[0; +\infty)$ є проміжком зростання цієї функції.

Зауваження. У задачах на пошук проміжків зростання і спадання функції вказують ті проміжки, які не є власними підмножинами жодних інших проміжків зростання і спадання, аналогічно тому, як це робиться під час пошуку проміжків знакосталості.

Існують функції, визначені на $\mathbb{R}$, які не є зростаючими (спадними) на жодному проміжку області визначення. Наприклад, такою функцією є константа. Ще одним прикладом такої функції є функція Діріхле.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що функція $f(x) = \frac{1}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу з проміжку $(0; +\infty)$, причому $x_2 > x_1$. Тоді за властивістю числових нерівностей $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$. Отже, дана функція спадає на проміжку $(0; +\infty)$.

Аналогічно можна довести, що функція f спадає на проміжку $(-\infty; 0)$. ◄

Ми показали, що функція $f(x) = \frac{1}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Об'єднання цих проміжків дорівнює $D(f)$. Проте не можна стверджувати, що дана функція спадає на всій області визначення, тобто є спадною. Справді, якщо, наприклад, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, то з нерівності $x_2 > x_1$ не випливає, що $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$.

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що лінійна функція $f(x) = kx + b$ є зростаючою при $k > 0$ і спадною при $k < 0$.

Розв'язання. Маємо: $D(f) = \mathbb{R}$. Нехай x_1 і x_2 — довільні значення аргументу, причому $x_2 > x_1$.

Запишемо:

$$f(x_2) - f(x_1) = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1).$$

Оскільки $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$.

Тоді якщо $k > 0$, то $k(x_2 - x_1) > 0$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$. Отже, при $k > 0$ дана функція є зростаючою.

Якщо $k < 0$, то $k(x_2 - x_1) < 0$, тобто $f(x_2) < f(x_1)$. Отже, при $k < 0$ дана функція є спадною. ◄

Теорема 3.2. ***Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною) на множині $M \subset D(f)$, то функція $y = -f(x)$ є спадною (зростаючою) на множині M.***

Доведення. Нехай, наприклад, функція $y = f(x)$ є зростаючою на множині M. Тоді для будь-яких x_1 і x_2, які належать множині M і таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$. Звідси $-f(x_2) < -f(x_1)$. Отже, функція $y = -f(x)$ є спадною на множині M.

Аналогічно можна довести, що коли функція $y = f(x)$ спадає на множині M, то функція $y = -f(x)$ зростає на множині M. ◄

Теорема 3.3. ***Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є зростаючими (спадними) на множині $M \subset D(f) \cap D(g)$, то функція $y = f(x) + g(x)$ є зростаючою (спадною) на множині M.***

Наприклад, функція $y = -2x + 3$ є спадною, функція $y = x^4$ спадає на проміжку $(-\infty; 0]$. Тоді функція $y = -2x + 3 + x^4$ спадає на проміжку $(-\infty; 0]$.

Теорема 3.4. ***Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є зростаючими (спадними) на множині $M \subset D(f) \cap D(g)$, причому $f(x) \geqslant 0$ і $g(x) \geqslant 0$ для будь-якого $x \in M$, то функція $y = f(x)\,g(x)$ є зростаючою (спадною) на множині M.***

Наприклад, функція $y = \sqrt{x}$ є зростаючою, функція $y = x^2$ зростає на проміжку $[0; +\infty)$. На цьому проміжку розглядувані функції набувають невід'ємних значень. Тоді функція $y = x^2\sqrt{x}$ зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

Теорема 3.5. ***Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною) на множині M і на цій множині функція f набуває значень однакового знака, то функція $y = \frac{1}{f(x)}$ є спадною (зростаючою) на множині M.***

Наприклад, функція $y = \sqrt{x}$ є зростаючою. Проміжок $(0; +\infty)$ є проміжком знакосталості цієї функції. Тоді функція $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ є спадною.

Використовуючи означення зростаючої і спадної на множині M функцій, а також властивості числових нерівностей, доведіть теореми 3.3–3.5 самостійно.

Теорема 3.6. ***Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною), то рівняння $f(x) = a$, де a — деяке число, має не більше одного кореня.***

Доведення. Нехай числа x_1 і x_2 є коренями рівняння $f(x) = a$. Тоді $f(x_1) = a$, $f(x_2) = a$. Звідси $f(x_1) = f(x_2)$. Із теореми 3.1 випливає, що $x_1 = x_2$. Отримали суперечність. Отже, рівняння $f(x) = a$ має не більше одного кореня. ◄

Наслідок. ***Якщо одна з функцій $y = f(x)$ або $y = g(x)$ є зростаючою на множині $M = D(f) \cap D(g)$, а друга — спадною на множині M, то рівняння $f(x) = g(x)$ має не більше одного кореня.***

Доведення. Нехай функція $y = f(x)$ є зростаючою, а функція $y = g(x)$ — спадною на множині M. Тоді за теоремою 3.2 функція $y = -g(x)$ є зростаючою на множині M. За теоремою 3.3 функція $y = f(x) - g(x)$ є зростаючою на множині M. Тоді за теоремою 3.6 рівняння $f(x) - g(x) = 0$ має не більше одного кореня.

Випадок, коли функція $y = f(x)$ є спадною, а функція $y = g(x)$ — зростаючою на множині M, можна розглянути аналогічно. ◄

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть рівняння $x^5 + \sqrt{2x-1} = 2$.

Розв'язання. Легко довести (зробіть це самостійно), що функції $f(x) = x^5$ і $g(x) = \sqrt{2x-1}$ є зростаючими. Отже, за теоремою 3.3 функція $y = f(x) + g(x)$ є зростаючою. Тоді теорема 3.6 дає змогу стверджувати, що дане рівняння має не більше одного кореня.

Нескладно помітити, що число 1 є коренем даного рівняння. Ураховуючи вищесказане, цей корінь є єдиним.

Відповідь: 1. ◄

Теорема 3.7. ***Якщо функція f є зростаючою, то рівняння $f(f(x)) = x$ рівносильне рівнянню $f(x) = x$.***

Доведення. Нехай x_0 — корінь рівняння $f(x) = x$, тобто $f(x_0) = x_0$. Тоді $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$, тобто x_0 — корінь рівняння $f(f(x)) = x$.

Нехай x_1 — корінь рівняння $f(f(x)) = x$, тобто $f(f(x_1)) = x_1$. Доведемо, що $f(x_1) = x_1$. Припустимо, що це не так. Тоді $f(x_1) > x_1$ або $f(x_1) < x_1$.

Розглянемо випадок, коли $f(x_1) > x_1$ (випадок, коли $f(x_1) < x_1$, можна розглянути аналогічно). Оскільки f — зростаюча функція, то $f(f(x_1)) > f(x_1)$. Але $f(f(x_1)) = x_1$. Звідси $f(x_1) < x_1$. Отримали суперечність.

Отже, $f(x_1) = x_1$, тобто x_1 — корінь рівняння $f(x) = x$. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{2+\sqrt{2+x}} = x$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{2+x}$. Дане рівняння можна подати у такому вигляді:

$$f(f(x)) = x, \text{ де } f(x) = \sqrt{2+x}.$$

Оскільки функція f є зростаючою, то це рівняння рівносильне рівнянню $f(x) = x$, тобто рівнянню $\sqrt{2+x} = x$.

Піднесемо обидві частини цього рівняння до квадрату і перейдемо до рівняння-наслідку:

$$2 + x = x^2.$$

Звідси $\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -1. \end{array}\right.$

Перевіркою встановлюємо, що коренем початкового рівняння є тільки число 2.

Відповідь: 2. ◄

Означення. **Число $f(x_0)$ називають найбільшим значенням функції f на множині $M \subset D(f)$, якщо існує таке число x_0, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$.**

Пишуть: $\max\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Означення. **Число $f(x_0)$ називають найменшим значенням функції f на множині $M \subset D(f)$, якщо існує таке число x_0, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$.**

Пишуть: $\min\limits_{M} f(x) = f(x_0)$.

Розглянемо кілька прикладів.

Для $f(x) = \sqrt{x}$ і $M = [0;\ 4]$ маємо:

$$\min\limits_{[0;\ 4]} f(x) = \min\limits_{[0;\ 4]} \sqrt{x} = f(0) = 0, \quad \max\limits_{[0;\ 4]} f(x) = f(4) = 2 \ \text{(рис. 3.4).}$$

Для $f(x) = |x|$ і $M = [-1;\ 2]$ маємо:

$$\min\limits_{[-1;\ 2]} f(x) = f(0) = 0, \quad \max\limits_{[-1;\ 2]} f(x) = f(2) = 2 \ \text{(рис. 3.5).}$$

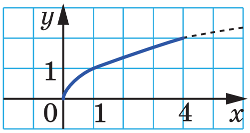


Рис. 3.4

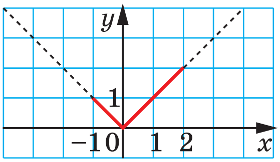


Рис. 3.5

Якщо c — деяке число і $f(x) = c$ для будь-якого $x \in M \subset D(f)$, то це число є і найбільшим, і найменшим значенням функції f на множині M.

Не будь-яка функція на заданій множині $M \subset D(f)$ має найменше або найбільше значення. Так, для функцій $f(x) = x^2$ і $f(x) = \{x\}$ отримуємо, що $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = 0$, а найбільшого значення на множині $\mathbb{R}$ ці функції не мають.

Функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ на множині $M = (0;\ +\infty)$ не має ні найбільшого, ні найменшого значень.

Часто при знаходженні найбільшого і найменшого значень функції зручно користуватися такими очевидними фактами:

- якщо функція f зростає на відрізку $[a; b]$, то $\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(a)$, $\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(b)$ (рис. 3.6);
- якщо функція f спадає на відрізку $[a; b]$, то $\min\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(b)$, $\max\limits_{[a;\, b]} f(x) = f(a)$ (рис. 3.7).

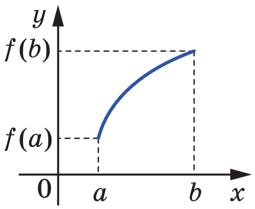


Рис. 3.6

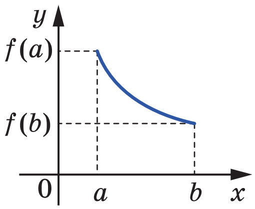


Рис. 3.7

ПРИКЛАД 6 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 + 3x + 2$ на відрізку $[-2; 1]$.

Розв'язання. Функції $y = x^3$ і $y = 3x + 2$ є зростаючими. За теоремою 3.3 зростаючою є і задана функція f. Отже,

$$\min_{[-2;\, 1]} f(x) = f(-2) = -12, \quad \max_{[-2;\, 1]} f(x) = f(1) = 6. \blacktriangleleft$$

ПРИКЛАД 7 Доведіть, що при всіх $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$ виконується нерівність:

$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-x) \leqslant 1.$$

Розв'язання. Розглянемо різницю лівої та правої частин нерівності:

$$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)-1=x(1-y-z)-yz+y+z-1.$$

Доведемо, що ця різниця набуває тільки недодатних значень.

Вважаючи y і z параметрами, розглянемо функцію $f(x) = (1 - y - z)x - yz + y + z - 1$. Функція f, $D(f) = \mathbb{R}$, є лінійною, і її графіком є пряма. Тоді графіком функції f, $D(f) = [0; 1]$, є відрізок, абсциси кінців якого дорівнюють 0 і 1. Отже, найбільшого значення функція f, $D(f) = [0; 1]$, набуває на одному з кінців відрізка. Маємо:

$$f(0) = -yz + y + z - 1 = -(y-1)(z-1) \leqslant 0,$$

$$f(1) = 1 - y - z - yz + y + z - 1 = -yz \leqslant 0.$$

Отже, $f(0) \leqslant 0$, $f(1) \leqslant 0$. Тому $\max\limits_{[0;\, 1]} f(x) \leqslant 0$. Це означає, що для будь-якого $x \in [0; 1]$ виконується нерівність $f(x) \leqslant 0$. Отже, вираз $x(1 - y - z) - yz + y + z - 1$ набуває тільки недодатних значень. $\blacktriangleleft$

Нехай для будь-якого $x \in D(f) \cap D(g)$ виконуються нерівності $f(x) \leqslant A$ і $g(x) \geqslant A$, тоді рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases}$$

Це очевидне міркування є ключем до розв'язування цілої низки рівнянь.

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть рівняння $|x+1| + |x-1| = \sqrt{4-x^2}$.

Розв'язання

Розглянемо функції $f(x) = |x+1| + |x-1|$ і $g(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Оскільки $4 - x^2 \leqslant 4$, то $\sqrt{4-x^2} \leqslant 2$. Тоді для будь-якого $x \in D(g)$ виконується нерівність $g(x) \leqslant 2$.

Розглянемо на координатній прямій точки $A(x)$, $B(-1)$ і $C(1)$ (рис. 3.8). Тоді значення виразу $|x+1| + |x-1|$ дорівнює сумі $AB + AC$. Оскільки $BC = 2$, то при будь-якому положенні точки A на координатній прямій виконується нерівність $AB + AC \geqslant 2$, тобто $|x+1| + |x-1| \geqslant 2$. Тоді для будь-якого $x \in D(f)$ виконується нерівність $f(x) \geqslant 2$.

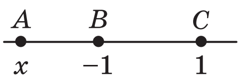


Рис. 3.8

Отримуємо, що задане рівняння рівносильне системі:

$$\begin{cases} |x+1| + |x-1| = 2, \\ \sqrt{4-x^2} = 2. \end{cases}$$

Друге рівняння системи має єдиний корінь 0, який також є коренем першого рівняння системи.

Відповідь: 0. ◄

1. Яке значення аргументу називають нулем функції?
2. Поясніть, що називають проміжком знакосталості функції.
3. Яку функцію називають зростаючою (спадною) на множині M?
4. Яку функцію називають зростаючою (спадною)?
5. Функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною). Скільки коренів може мати рівняння $f(x) = a$, де a — деяке число?
6. Яке число називають найбільшим (найменшим) значенням функції на множині M?

ВПРАВИ

3.1.° На рисунку 3.9 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині $\mathbb{R}$. Які з даних тверджень є правильними:

1) функція спадає на проміжку $(-\infty; -9]$;
2) $f(x) < 0$ при $-5 \leqslant x \leqslant 1$;
3) функція зростає на проміжку $[-2; +\infty)$;
4) $f(x) = 0$ при $x = -5$ і при $x = 1$;
5) функція на області визначення набуває найменшого значення при $x = -2$?

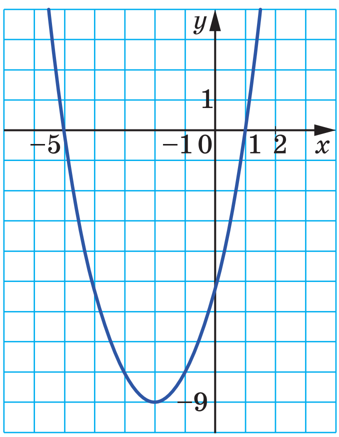


Рис. 3.9

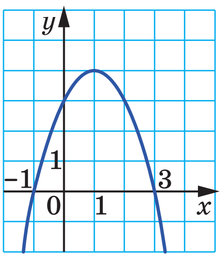


Рис. 3.10

3.2.° На рисунку 3.10 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині $\mathbb{R}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) значення x, при яких $y < 0$;
3) проміжок спадання функції;
4) область значень функції.

3.3.° На рисунку 3.11 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині $\mathbb{R}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) проміжки знакосталості функції;
3) проміжки зростання та проміжки спадання функції;
4) $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)$, $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)$;
5) $\min\limits_{[-2;\, 1]} f(x)$, $\max\limits_{[-2;\, 1]} f(x)$;

6) $\min\limits_{[-1;\ 4]} f(x)$, $\max\limits_{[-1;\ 4]} f(x)$;

7) $\max\limits_{(-2;\ 0)} f(x)$, $\min\limits_{(-2;\ 0)} f(x)$.

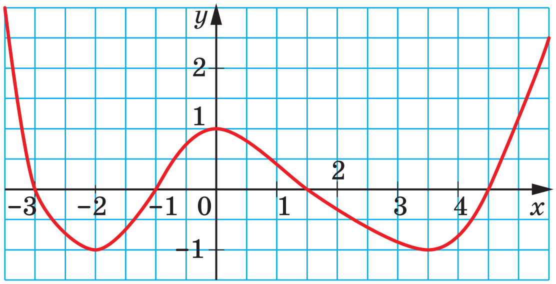


Рис. 3.11

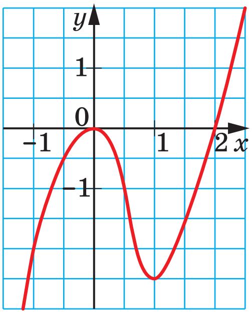


Рис. 3.12

3.4.° На рисунку 3.12 зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на множині $\mathbb{R}$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) проміжки знакосталості функції;
3) проміжки зростання та проміжки спадання функції;
4) $\max\limits_{[0;\ 2]} f(x)$, $\min\limits_{[0;\ 2]} f(x)$;
5) $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)$, $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)$;
6) $\max\limits_{[-1;\ 0)} f(x)$, $\min\limits_{[-1;\ 0)} f(x)$.

3.5.° Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} 2x + 8, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ x^2, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ -2x + 8, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі даної функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання та проміжки спадання.

3.6.° Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x}, & \text{якщо } x < -1, \\ \dfrac{x}{4}, & \text{якщо } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{4}{x}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

Користуючись побудованим графіком, укажіть нулі даної функції, її проміжки знакосталості, проміжки зростання та проміжки спадання.

3.7.° Зростаючою чи спадною є функція:

1) $y = 9x - 4$; 3) $y = 12 - 3x$;
2) $y = -4x + 10$; 4) $y = -x$?

3.8.° Знайдіть нулі функції:

1) $y = \sqrt{x^2 - 1}$; 4) $y = x^2 + 1$; 7) $y = |x| - x$;
2) $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$; 5) $y = \sqrt{x - 1} \cdot \sqrt{x + 1}$; 8) $y = \{x\}$;
3) $y = x^3 - 4x$; 6) $y = x\sqrt{x - 1}$; 9) $y = \mathfrak{D}(x)$.

3.9.° Знайдіть нулі функції:

1) $y = \sqrt{x^2 - 4}$; 4) $y = |x| + x$; 7) $y = x\,\mathfrak{D}(x)$;
2) $y = -5$; 5) $y = \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{x - 2}}$; 8) $y = \operatorname{sgn}(2x - 1)$.
3) $y = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$; 6) $y = [x]$;

3.10.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = x^2 - 2x + 1$; 3) $y = \sqrt{x - 1}$; 5) $y = \sqrt{x(x - 1)^2}$;
2) $y = \dfrac{9}{3 - x}$; 4) $y = |x + 1|$; 6) $y = \{x\}$.

3.11.° Знайдіть проміжки знакосталості функції:

1) $y = -x^2 - 1$; 4) $y = |x| - 1$; 7) $y = [x]$.
2) $y = x^2 + 4x + 4$; 5) $y = |x^2 - 4|$;
3) $y = \sqrt{x} + 2$; 6) $y = \sqrt{(x - 1)(x - 3)^2}$;

3.12.° При якому найбільшому цілому значенні параметра n функція $y = (8 - 3n)\,x - 7$ є зростаючою?

3.13.° При яких значеннях параметра m функція $y = mx - m - 3 + 2x$ є спадною?

3.14.° Знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання функції $y = \{x\}$.

3.15.° Доведіть, що функція є зростаючою:

1) $y = \sqrt{x - 1}$; 2) $y = \sqrt{2x + 1}$.

3.16.° Доведіть, що функція є зростаючою:

1) $y = \sqrt{x - 3} + 2$; 2) $y = \sqrt{3x - 1} - 1$.

3.17.• Функція $y = f(x)$ є спадною. Зростаючою чи спадною є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = 3f(x)$; 2) $y = \dfrac{1}{3}f(x)$; 3) $y = -f(x)$; 4) $y = f(x) + 5$?

3.18.° Функція $y = f(x)$ зростає на множині $\mathbb{R}$. Зростаючою чи спадною на множині $\mathbb{R}$ є функція (відповідь обґрунтуйте):

1) $y = \frac{1}{2} f(x)$; 2) $y = -3f(x)$; 3) $y = f(-x)$; 4) $y = f(x + 5)$?

3.19.° Доведіть, що функція $y = x^n$, де $n \in \mathbb{N}$, n — непарне, є зростаючою.

3.20.° Знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання функції $y = x^2 + 1$.

3.21.° Знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання функції $y = -x^2 - 4$.

3.22.° Доведіть, що функція:

1) $y = \frac{6}{3 - x}$ зростає на проміжку $(3; +\infty)$;

2) $y = x^2 - 4x + 3$ спадає на проміжку $(-\infty; 2]$.

3.23.° Доведіть, що функція:

1) $y = \frac{7}{x + 5}$ спадає на проміжку $(-5; +\infty)$;

2) $y = 6x - x^2$ зростає на проміжку $(-\infty; 3]$.

3.24.° Доведіть, що функція $y = \frac{k}{x}$ спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$ при $k > 0$ та зростає на кожному із цих проміжків при $k < 0$.

3.25.° Знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання функції $y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

3.26.° Знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання функції $y = \frac{1}{-x^2 - 4}$.

3.27.° Знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання функції $y = |x - a|$.

3.28.° Доведіть, що функція є зростаючою:

1) $y = x^5 + x$; 3) $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x}$; 5) $y = x\sqrt{-x}$;

2) $y = x^4 + \sqrt{x}$; 4) $y = x\sqrt{x}$; 6) $y = \left(\sqrt{x} + 1\right)^2$.

3.29.° Доведіть, що функція є спадною:

1) $y = -x + \frac{1}{\sqrt{x}}$; 2) $y = \sqrt{2 - x} + \sqrt{-x}$; 3) $y = -x\sqrt{-x}$; 4) $y = -x\sqrt{x}$.

3.30.° Функція $y = f(x)$ є зростаючою. Чи можна стверджувати, що зростаючою є функція: 1) $y = (f(x))^2$; 2) $y = (f(x))^3$?

3.31.• Знайдіть $\max\limits_{M} f(x)$ і $\min\limits_{M} f(x)$, якщо:

1) $f(x) = x^2 - 6x + 10$, $M = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$, $M = D(f)$.

3.32.• Знайдіть $\max\limits_{M} f(x)$ і $\min\limits_{M} f(x)$, якщо:

1) $f(x) = -x^2 - 8x - 3$, $M = \mathbb{R}$; 2) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, $M = D(f)$.

3.33.•• Знайдіть:

1) $\min\limits_{\mathbb{R}} \left(|x-1| + |x-3|\right)$; 2) $\max\limits_{\mathbb{R}} \left(|x+2| - |x|\right)$; 3) $\max\limits_{\mathbb{R}} \dfrac{1}{x^2+1}$.

3.34.•• Функції f і g визначені на множині $\mathbb{R}$. Зростаючою чи спадною є функція $y = f(g(x))$, якщо:

1) f і g — зростаючі функції;
2) f і g — спадні функції?

3.35.•• Функції f і g визначені на множині $\mathbb{R}$. Зростаючою чи спадною є функція $y = f(g(x))$, якщо:

1) f — зростаюча, g — спадна;
2) f — спадна, g — зростаюча?

3.36.•• При яких значеннях параметра a функція $y = x\,|x - a|$ є зростаючою?

3.37.•• При яких значеннях параметра a функція $y = (x - 1)(x - a)^2$ є зростаючою?

3.38.•• При яких значеннях параметра a функція $y = |x - a|$ зростає на проміжку $[2; +\infty)$?

3.39.•• При яких значеннях параметра a функція $y = |x + a|$ спадає на проміжку $(-\infty; -1]$?

3.40.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^5 + x^3 + x = -3$;
2) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} + \sqrt{x+13} = 9$;
3) $x^3 + 2x\sqrt{x-1} = 12$.

3.41.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^7 + x^5 + x = 4$;
2) $2\sqrt{x} + \sqrt{x-5} + \sqrt{2x+7} = 13$;
3) $4x^3 + 3x\sqrt{4x-1} = 2$.

3.42.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} = 23 - 2x$; 2) $x^3 + \sqrt{x} = \dfrac{2}{x}$.

3.43.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + \sqrt{x} = \dfrac{12}{x} + 15$; 2) $\dfrac{17}{x^2+1} = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

3.44.•• Розв'яжіть рівняння $|x+1|-|x|=\sqrt{x^4+1}$.

3.45.•• Розв'яжіть рівняння $|x-1|-|x+2|=\sqrt{9-x^2}$.

3.46.* Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^7-y=y^7-x, \\ x^2+xy+y^2=12. \end{cases}$$

3.47.* Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^4-\sqrt{y}=y^4-\sqrt{x}, \\ x^2+y^2=2. \end{cases}$$

3.48.* Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 2\sqrt{x+y}+(x+y)^4=3, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

3.49.* Доведіть, що при всіх $x \in [1; 2]$, $y \in [1; 2]$ виконується нерівність $3(x+y) \geqslant 2xy+4$.

3.50.* Доведіть, що при всіх $x_1 \in [0; 1]$, $x_2 \in [0; 1]$, ..., $x_n \in [0; 1]$ виконується нерівність:

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)+(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \leqslant 2^n.$$

3.51.* Доведіть, що при всіх $a \in [0; 1]$, $b \in [0; 1]$, $c \in [0; 1]$ виконується нерівність:

$$abc+2 \geqslant a+b+c.$$

3.52.* Розв'яжіть рівняння $\sqrt{6+\sqrt{6+x}}=x$.

3.53.* Розв'яжіть рівняння $(x^3+1)^3=8(2x-1)$.

3.54.* Функція f є такою, що для будь-якого $x \in \mathbb{R}$

$$f(x^2)-(f(x))^2 \geqslant \frac{1}{4}.$$

Чи може функція f бути зростаючою або спадною?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

3.55. Розв'яжіть рівняння

$$\frac{3}{x^2-9}-\frac{1}{9-6x+x^2}=\frac{3}{2x^2+6x}.$$

3.56. Знайдіть усі пари чисел $(x; y)$, які задовольняють рівняння $\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{y-2}=0$.

3.57. Побудуйте графік функції $y=\dfrac{2x^2+5x+2}{x+2}$.

3.58. Розв'яжіть нерівність $(x+1)(x-2)^2>0$.

4. Парні та непарні функції

Означення. **Функцію f називають парною, якщо для будь-якого $x \in D(f)$ є правильною рівність $f(-x) = f(x)$.**

Означення. **Функцію f називають непарною, якщо для будь-якого $x \in D(f)$ є правильною рівність $f(-x) = -f(x)$.**

Наприклад, функція $f(x) = x^2$ — парна, а функція $g(x) = x^3$ — непарна. Справді, $D(f) = D(g) = \mathbb{R}$. Для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконуються рівності $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ і $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$.

Виконання рівностей $f(-x) = f(x)$ і $f(-x) = -f(x)$ для будь-якого $x \in D(f)$ означає, що множина $D(f)$ має таку властивість: якщо $x_0 \in D(f)$, то $-x_0 \in D(f)$. У цьому разі множину називають **симетричною відносно початку координат.**

З наведених означень випливає, що коли область визначення функції не є симетричною відносно початку координат, то ця функція не може бути парною (непарною).

Наприклад, область визначення функції $y = \dfrac{1}{x-1}$ не є симетричною відносно початку координат. Тому ця функція не є ні парною, ні непарною.

У функції $f(x) = x^3 + x^2$ її область визначення $D(f) = \mathbb{R}$ симетрична відносно початку координат. Проте ця функція не є ні парною, ні непарною. Справді,

$$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 = -x^3 + x^2; \quad -f(x) = -x^3 - x^2.$$

Існують деякі значення x, наприклад 0, при яких $f(-x) = f(x)$ або $f(-x) = -f(x)$, проте ці рівності виконуються не для всіх $x \in \mathbb{R}$. Наприклад, при $x = 1$ маємо: $f(x) = 2$, а $f(-x) = 0$.

ПРИКЛАД 1 Дослідіть на парність функцію

$$f(x) = \frac{|x-2|}{1+x} + \frac{|x+2|}{1-x}.$$

Розв'язання. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ і } x \neq 1\}$. Отже, область визначення функції f симетрична відносно початку координат.

Для будь-якого $x \in D(f)$ маємо:

$$f(-x) = \frac{|-x-2|}{1+(-x)} + \frac{|-x+2|}{1-(-x)} = \frac{|x+2|}{1-x} + \frac{|x-2|}{1+x} = f(x).$$

Отже, функція f є парною. ◄

ПРИКЛАД 2 Дослідіть на парність функцію

$$f(n)=\frac{2^n-1}{2^n+1},\quad D(f)=\mathbb{Z}.$$

Розв'язання. Множина $\mathbb{Z}$ є симетричною відносно початку координат.

Для будь-якого $n\in\mathbb{Z}$ маємо:

$$f(-n)=\frac{2^{-n}-1}{2^{-n}+1}=\frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2^n}+1}=\frac{\frac{1-2^n}{2^n}}{\frac{1+2^n}{2^n}}=-\frac{2^n-1}{2^n+1}=-f(n).$$

Отже, функція f є непарною. ◄

Теорема 4.1. ***Якщо точка M (a; b) належить графіку парної функції f, то точка M_1 ($-a$; b) також належить її графіку[1].***

Доведення. Якщо точка M (a; b) належить графіку функції f, то $f(a)=b$. Оскільки функція f є парною, то $f(-a)=f(a)=b$. Це означає, що точка M_1 ($-a$; b) також належить графіку функції f (рис. 4.1). ◄

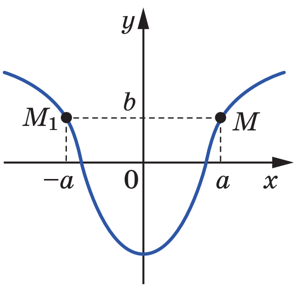


Рис. 4.1

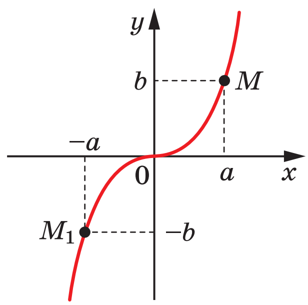


Рис. 4.2

Теорема 4.2. ***Якщо точка M (a; b) належить графіку непарної функції f, то точка M_1 ($-a$; $-b$) також належить її графіку[2]*** (рис. 4.2).

Доведіть цю теорему самостійно.

---

[1] Про такий графік говорять, що вісь ординат є його віссю симетрії, або графік є симетричним відносно осі ординат. Про фігури, які мають вісь симетрії, ви дізнаєтесь у курсі геометрії 9 класу.

[2] Про такий графік говорять, що початок координат є його центром симетрії, або графік є симетричним відносно початку координат. Про фігури, які мають центр симетрії, ви дізнаєтесь у курсі геометрії 9 класу.

Теорема 4.3. ***Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є парними (непарними) і $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$, то функція $y = f(x) \pm g(x)$ є парною (непарною).***

Теорема 4.4. ***Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є парними (непарними) і $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$, то функція $y = f(x)\,g(x)$ є парною. Якщо одна з функцій f або g є парною, а друга — непарною, то функція $y = f(x)\,g(x)$ є непарною.***

Використовуючи означення парної та непарної функцій, доведіть теореми 4.3 і 4.4 самостійно.

Очевидно, що *функція $y = 0$, у якої $D(y) = \mathbb{R}$, одночасно є і парною, і непарною функцією*. Покажемо, що *інших функцій з областю визначення $\mathbb{R}$, які є одночасно і парними, і непарними, не існує*.

Нехай функція f, визначена на множині $\mathbb{R}$, є і парною, і непарною. Тоді для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконуються рівності $f(-x) = f(x)$ і $f(-x) = -f(x)$. Звідси $f(x) = -f(x)$, тобто $2f(x) = 0$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$. Отже, функція f така, що $f(x) = 0$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 4.5. ***Кожну функцію f, область визначення якої симетрична відносно початку координат, можна єдиним способом подати у вигляді суми парної і непарної функцій.***

Доведення. Розглянемо функції $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ і $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$. Легко встановити (переконайтеся в цьому самостійно), що функція g — парна, а функція h — непарна. Зауважимо, що $f(x) = g(x) + h(x)$. Отже, ми подали функцію f у вигляді суми парної та непарної функцій.

Доведемо, що таке подання можна здійснити єдиним способом. Нехай це не так, тобто знайдуться парні функції g_1 і g_2 і непарні функції h_1 і h_2 такі, що для будь-якого $x \in D(f)$ виконуються рівності:

$$f(x) = g_1(x) + h_1(x),$$
$$f(x) = g_2(x) + h_2(x).$$

Звідси для будь-якого $x \in D(f)$ виконується рівність

$$g_1(x) - g_2(x) = h_2(x) - h_1(x).$$

Нехай $\varphi(x) = g_1(x) - g_2(x)$. За теоремою 4.3 функція φ — парна.

З другого боку, $\varphi(x) = h_2(x) - h_1(x)$, а отже, за теоремою 4.3 функція φ — непарна. Звідси випливає, що для будь-якого $x \in D(f)$ функція φ — константа, яка дорівнює нулю. Отже, для будь-якого $x \in D(f)$ виконується рівність $g_1(x) = g_2(x)$ і $h_2(x) = h_1(x)$. ◄

ПРИКЛАД 3 При яких значеннях параметра a рівняння $2ax^4 + |x| + x^2 = a^2 - 1$ має єдиний корінь?

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = 2ax^4 + |x| + x^2 - a^2 + 1$. Вона є парною. Тому коли рівняння $f(x) = 0$ має корінь x_0, то воно також має корінь $-x_0$. Для того щоб рівняння мало єдиний корінь, повинна виконуватися рівність $x_0 = -x_0$, тобто $x_0 = 0$. Тоді необхідно, щоб число 0 було коренем даного рівняння.

Підставимо число 0 у задане рівняння. Отримуємо: $a^2 - 1 = 0$. Звідси $a = 1$ або $a = -1$.

При цих значеннях параметра a число 0 є коренем заданого рівняння. Проте це не означає, що рівняння не має інших коренів, відмінних від нуля. Тому потрібно з'ясувати, скільки коренів має початкове рівняння при $a = 1$ і $a = -1$.

При $a = 1$ маємо: $2x^4 + |x| + x^2 = 0$. Оскільки $2x^4 \geqslant 0$, $|x| \geqslant 0$ і $x^2 \geqslant 0$, то це рівняння має єдиний корінь 0.

При $a = -1$ маємо: $-2x^4 + |x| + x^2 = 0$. Це рівняння, крім кореня 0, має і інші корені, наприклад число 1. Отже, значення $a = -1$ не підходить.

Відповідь: $a = 1$. ◄

?

1. Яку функцію називають парною (непарною)?
2. Яку множину називають симетричною відносно початку координат?
3. Яку властивість має графік парної (непарної) функції?
4. Як можна подати функцію, область визначення якої симетрична відносно початку координат?

ВПРАВИ

4.1.° Функція f є парною. Чи може виконуватися рівність:

1) $f(2) - f(-2) = 1$; 2) $f(5)\, f(-5) = -2$; 3) $\dfrac{f(1)}{f(-1)} = 0$?

4.2.° Функція f є парною. Чи обов'язково виконується рівність $\dfrac{f(1)}{f(-1)} = 1$?

4.3.° Функція f є непарною. Чи може виконуватися рівність:

1) $f(1) + f(-1) = 1$; 2) $f(2)\, f(-2) = 3$; 3) $\dfrac{f(-2)}{f(2)} = 0$?

4.4.° Доведіть, що функція є парною:

1) $f(x) = 171$;
2) $f(x) = x^n$, де $n \in \mathbb{N}$ і n — парне;
3) $f(x) = -3x^2 + |x| - 1$;
4) $f(x) = \sqrt{4-x} + \sqrt{4+x}$;
5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5} + \sqrt{x^2 + 3x + 5}$;
6) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1-x} - \sqrt{x+1}}$;
7) $f(x) = \dfrac{|5x-2| + |5x+2|}{x^2 - 1}$;
8) $f(x) = \dfrac{1}{(3x-1)^7} - \dfrac{1}{(3x+1)^7}$;
9) $f(x) = (x+2)\,|x-4| - (x-2)\,|x+4|$.

4.5.° Доведіть, що функція є непарною:

1) $g(x) = x^n$, де $n \in \mathbb{N}$ і n — непарне;
2) $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$;
3) $g(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}$;
4) $g(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}$;
5) $g(x) = \dfrac{|4x-1| - |4x+1|}{x^4 - 1}$;
6) $g(x) = \dfrac{3x+2}{x^2 - x + 1} + \dfrac{3x-2}{x^2 + x + 1}$.

4.6.° Дослідіть на парність функцію:

1) $y = \dfrac{x}{x}$;
2) $y = \dfrac{x-1}{x-1}$;
3) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2-1}$;
4) $y = \sqrt{x^2 - 1}$;
5) $y = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1}$;
6) $y = \mathfrak{D}(x)$;
7) $y = x\,\mathfrak{D}(x)$;
8) $y = \operatorname{sgn} x$.

4.7.• Парні функції f і g такі, що функція $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ визначена. Дослідіть на парність функцію h.

4.8.• Непарні функції f і g такі, що функція $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ визначена. Дослідіть на парність функцію h.

4.9.$^\bullet$ Одна з функцій f або g є парною, друга — непарною. Відомо, що функція $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ визначена. Дослідіть на парність функцію h.

4.10.$^\bullet$ Функції f і g такі, що функція $y = f(g(x))$ визначена. Дослідіть її на парність, якщо:
1) f і g — парні функції;
2) f і g — непарні функції;
3) f — парна функція, а g — непарна;
4) f — непарна функція, а g — парна.

4.11.$^\bullet$ Непарна функція f така, що $0 \in D(f)$. Знайдіть $f(0)$.

4.12.$^\bullet$ Непарна функція f має 4 нулі. Доведіть, що $0 \notin D(f)$.

4.13.$^\bullet$ Непарна функція f має 7 нулів. Знайдіть $f(0)$.

4.14.$^\bullet$ Парна функція f має 7 нулів. Знайдіть $f(0)$.

4.15.$^\bullet$ Дослідіть на парність функцію $f(n)=\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n$, $D(f)=\mathbb{Z}$.

4.16.$^\bullet$ Дослідіть на парність функцію $f(n)=\left(\sqrt{2}+1\right)^n-\left(\sqrt{2}-1\right)^n$, $D(f)=\mathbb{Z}$.

4.17.$^\bullet$ Парна функція f, визначена на $\mathbb{R}$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Визначте, зростаючою чи спадною є функція f на проміжку $(-\infty; 0]$.

4.18.$^\bullet$ Непарна функція f, визначена на $\mathbb{R}$, зростає на проміжку $[0; +\infty)$. Визначте, зростаючою чи спадною є функція f на проміжку $(-\infty; 0]$.

4.19.$^\bullet$ Функція f є парною і $\min\limits_{[1;\ 3]} f(x)=2$, $\max\limits_{[1;\ 3]} f(x)=5$. Знайдіть $\min\limits_{[-3;\ -1]} f(x)$, $\max\limits_{[-3;\ -1]} f(x)$.

4.20.$^\bullet$ Функція f є непарною і $\min\limits_{[2;\ 5]} f(x)=1$, $\max\limits_{[2;\ 5]} f(x)=3$. Знайдіть $\min\limits_{[-5;\ -2]} f(x)$, $\max\limits_{[-5;\ -2]} f(x)$.

4.21.$^{\bullet\bullet}$ Парна функція f визначена на проміжку $[-5; 5]$ та на кінцях цього проміжку досягає найбільшого і найменшого значень. Знайдіть $f(-0,2) - f(1)$.

4.22.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $y = (x - 1)^4 + a(x + 1)^4$ є: 1) парною; 2) непарною.

4.23.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях параметра a рівняння $ax^6+1=a^2\sqrt{1-|x|}$ має єдиний корінь?

4.24.* Після розкриття дужок і зведення подібних доданків у виразі $(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{20})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{20})$ отримали многочлен. Доведіть, що цей многочлен не містить одночленів непарного степеня.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

4.25. Спростіть вираз $\sqrt{a - 2 + 2\sqrt{a-3}}$.

4.26. Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 2, \\ \frac{1}{2}x + 3, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$

4.27. Складіть квадратне рівняння, корені якого на 3 більші за відповідні корені рівняння $x^2 + 4x - 7 = 0$.

4.28. Розв'яжіть рівняння $(x - 1)(x - 7)(x - 4)(x + 2) = 40$.

5. Як побудувати графіки функцій $y = kf(x)$ і $y = f(kx)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$

У 8 класі ви ознайомилися з функцією $y = x^2$ і дізналися, що її графіком є фігура, яку називають параболою (рис. 5.1).

Покажемо, як можна, використовуючи графік функції $y = x^2$, побудувати графік функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$.

Побудуємо, наприклад, графік функції $y = 2x^2$.

Складемо таблицю значень функцій $y = x^2$ і $y = 2x^2$ при одних і тих самих значеннях аргументу:

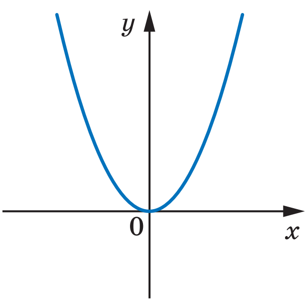


Рис. 5.1

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = 2x^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18

Ця таблиця підказує, що кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0; 2y_0)$ графіка функції $y = 2x^2$.

А кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = 2x^2$ є відповідною єдиній точці $\left(x_1; \frac{y_1}{2}\right)$ графіка функції $y = x^2$. Таким чином, між множинами точок графіків функцій $y = x^2$ і $y = 2x^2$ установлено взаємно однозначну відповідність. Тому всі точки графіка функції $y = 2x^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою та з ординатою, помноженою на 2 (рис. 5.2).

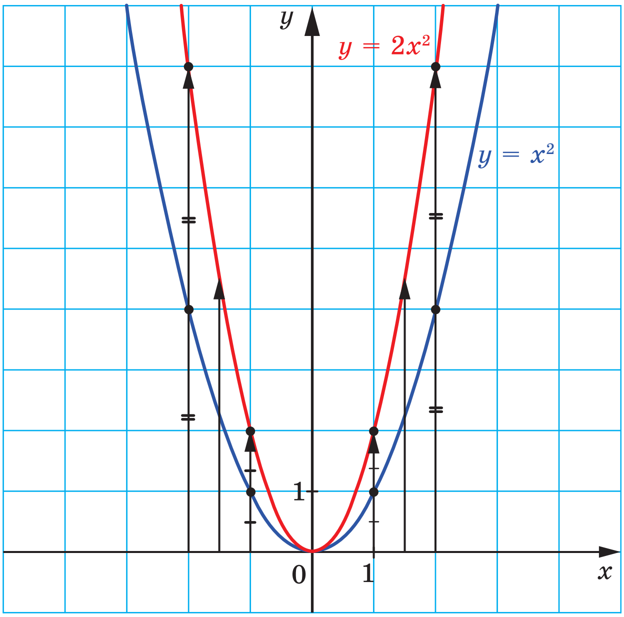


Рис. 5.2

Використовуючи графік функції $y = x^2$, побудуємо графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$.

Усі точки графіка функції $y = \frac{1}{2}x^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою та з ординатою, помноженою на $\frac{1}{2}$ (рис. 5.3).

Розглянуті приклади підказують, як, використовуючи графік функції $y = f(x)$, можна побудувати графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$.

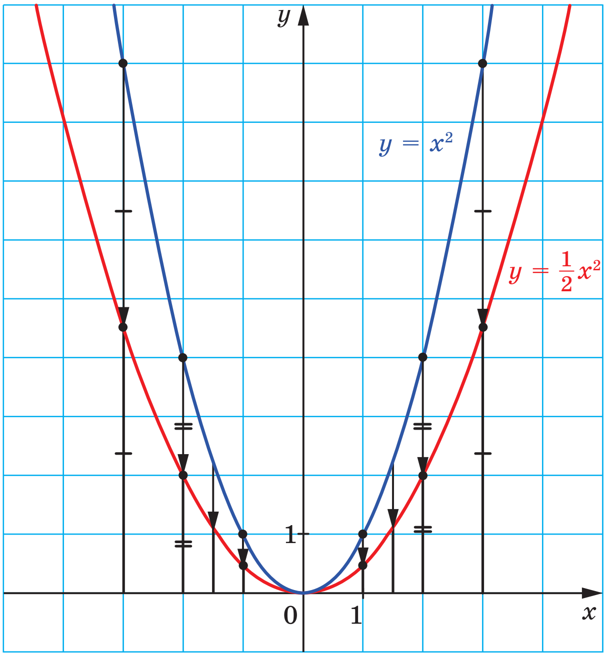


Рис. 5.3

Графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою абсцисою та з ординатою, помноженою на k.

На рисунках 5.4, 5.5 показано, як «працює» це правило для побудови графіків функцій $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ і $y = \frac{3}{x}$.

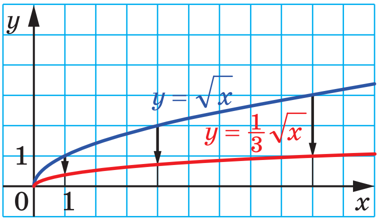


Рис. 5.4

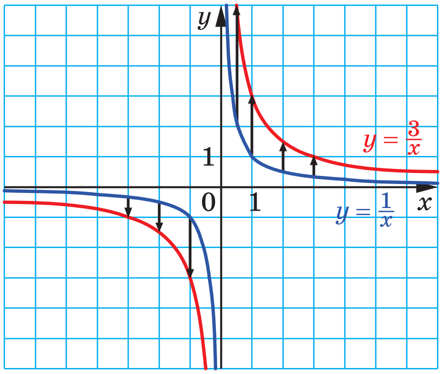


Рис. 5.5

Говорять, що графік функції $y = kf(x)$ отримано в результаті **розтягнення** графіка функції $y = f(x)$ **у k разів від осі абсцис**, якщо $k > 1$, або в результаті **стискання** графіка функції $y = f(x)$ **в $\frac{1}{k}$ раза до осі абсцис**, якщо $0 < k < 1$.

Так, графік функції $y = \frac{3}{x}$ отримано в результаті розтягнення графіка функції $y = \frac{1}{x}$ у 3 рази від осі абсцис, а графік функції $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ отримано в результаті стискання графіка функції $y = \sqrt{x}$ у 3 рази до осі абсцис.

Розглянемо функції $y = x^2$ і $y = -x^2$. Кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0; -y_0)$ графіка функції $y = -x^2$. А кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = -x^2$ є відповідною єдиній точці $(x_1; -y_1)$ графіка функції $y = x^2$. Таким чином, між множинами точок графіків функцій $y = x^2$ і $y = -x^2$ установлено взаємно однозначну відповідність. Тому всі точки графіка функції $y = -x^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою та з ординатою, помноженою на -1 (рис. 5.6).

Також говорять, що графік функції $y = -x^2$ отримано в результаті **перетворення симетрії відносно осі абсцис** графіка функції $y = x^2$.

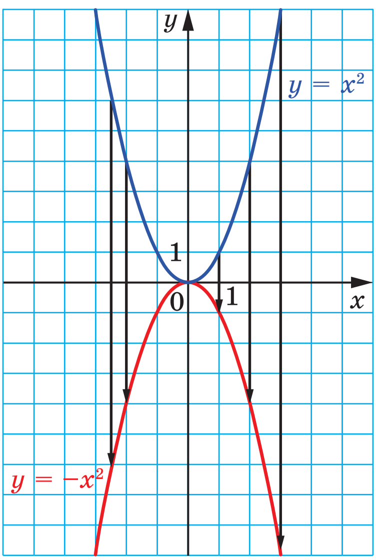


Рис. 5.6

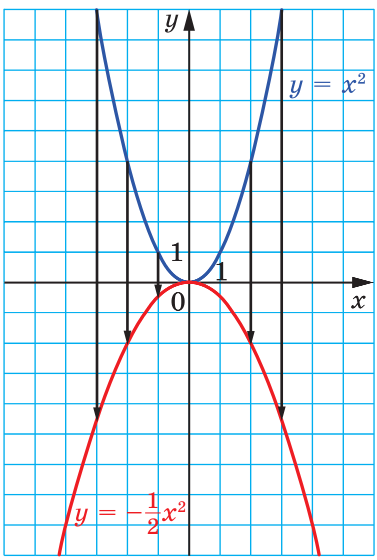


Рис. 5.7

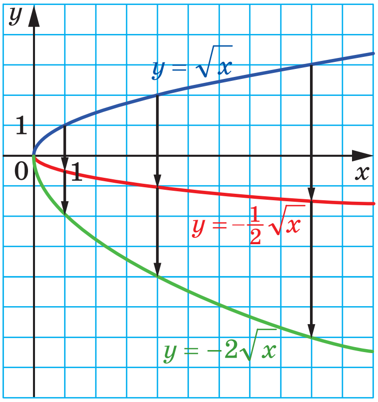


Рис. 5.8

Тепер стає зрозумілим, що правило побудови графіка функції $y = kf(x)$, де $k < 0$, є таким самим, як і для випадку, коли $k > 0$.

Наприклад, на рисунку 5.7 показано, як за допомогою графіка функції $y = x^2$ можна побудувати графік функції $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Рисунок 5.8 ілюструє, як за допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$ можна побудувати графіки функцій $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ і $y = -2\sqrt{x}$.

Зауважимо, що при $k \neq 0$ функції $y = f(x)$ і $y = kf(x)$ мають одні й ті самі нулі. Отже, графіки цих функцій перетинають вісь абсцис в одних і тих самих точках (рис. 5.9).

На рисунку 5.10 зображено графіки функцій $y = ax^2$ при деяких значеннях параметра a. Кожний із цих графіків, як і графік

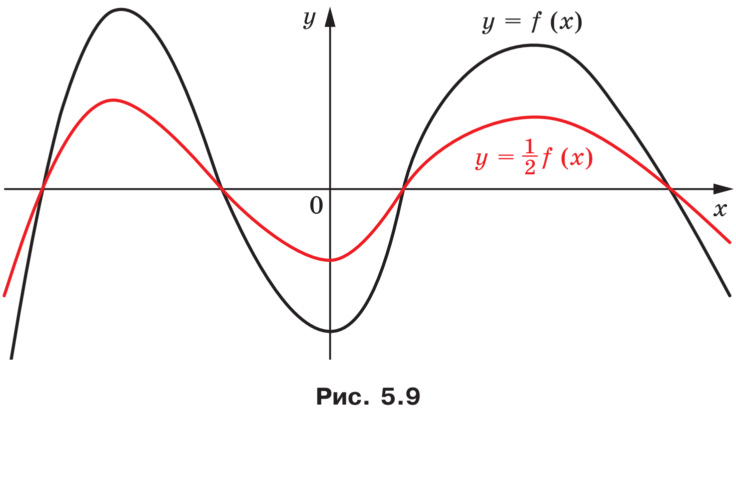


Рис. 5.9

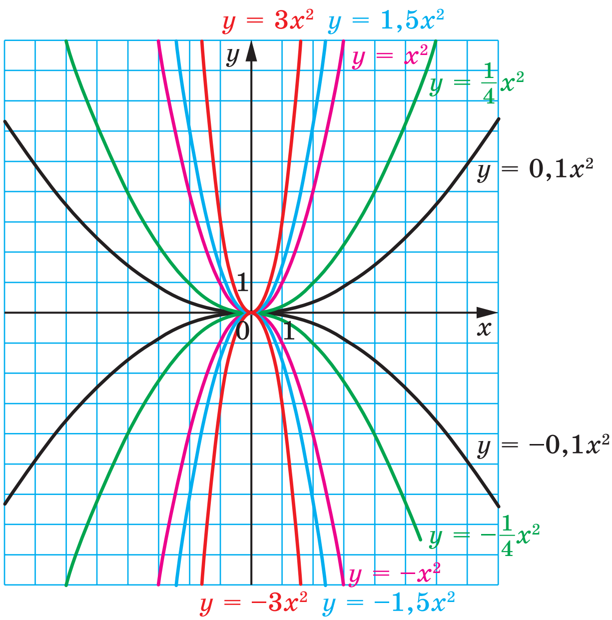


Рис. 5.10

функції $y = x^2$, називають **параболою.** Точка (0; 0) є вершиною кожної із цих парабол.

Якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз.

Часто замість вислову «Дано функцію $y = ax^2$» уживають вислів «Дано параболу $y = ax^2$».

У таблиці наведено властивості функції $y = ax^2$, $a \neq 0$.

Властивість	$a > 0$	$a < 0$
$D(y)$	$(-\infty; +\infty)$	
$E(y)$	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Нулі функції	$x = 0$	
Проміжки знакосталості	$y > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$	$y < 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$
Зростає на проміжку	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Спадає на проміжку	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$
Парність	Парна	

Покажемо, як можна побудувати графік функції $y = f(kx)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.

Розглянемо випадок, коли $k > 0$. Якщо точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ належить графіку функції $y = f(kx)$. Справді, при $x = \frac{x_0}{k}$ маємо: $f(kx) = f\left(k \cdot \frac{x_0}{k}\right) = f(x_0) = y_0$.

Отже, кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = f(x)$ відповідає єдина точка $\left(\frac{x_0}{k}; y_0\right)$ графіка функції $y = f(kx)$. Аналогічно можна показати, що кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = f(kx)$ є відповідною єдиній точці $(kx_1; y_1)$ графіка функції $y = f(x)$. Таким чином, між множинами точок графіків функцій $y = f(x)$ і $y = f(kx)$ установлено взаємно однозначну відповідність.

Тому ***всі точки графіка функції $y = f(kx)$, де $k > 0$, можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою ординатою та з абсцисою, поділеною на k.***

На рисунку 5.11 показано, як «працює» це правило для побудови графіків функцій $y = \sqrt{2x}$ і $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$.

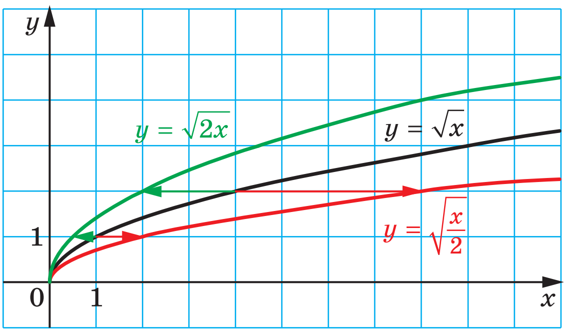


Рис. 5.11

Говорять, що графік функції $y = f(kx)$ отримано в результаті **стискання** графіка функції $y = f(x)$ **у k разів до осі ординат**, якщо $k > 1$, або в результаті **розтягнення** графіка функції $y = f(x)$ **в $\frac{1}{k}$ раза від осі ординат**, якщо $0 < k < 1$.

Так, графік функції $y = \sqrt{2x}$ отримано в результаті стискання графіка функції $y = \sqrt{x}$ у 2 рази до осі ординат, а графік функції

$y = \sqrt{\frac{x}{2}}$ — у результаті розтягнення графіка функції $y = \sqrt{x}$ у 2 рази від осі ординат.

Покажемо, як побудувати графік функції $y = f(-x)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$.

Якщо точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(x)$, то точка $(-x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = f(-x)$. Справді, $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$. Аналогічно можна показати, що кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = f(-x)$ є відповідною єдиній точці $(-x_1; y_1)$ графіка функції $y = f(x)$. Таким чином, між множинами точок графіків функцій $y = f(x)$ і $y = f(-x)$ установлено взаємно однозначну відповідність. Тоді всі точки графіка функції $y = f(-x)$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = f(x)$ на точку з тією самою ординатою та з протилежною абсцисою.

Говорять, що графік функції $y = f(-x)$ отримано в результаті **перетворення симетрії відносно осі ординат** графіка функції $y = f(x)$.

На рисунку 5.12 показано, як за допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$ побудувати графік функції $y = \sqrt{-x}$.

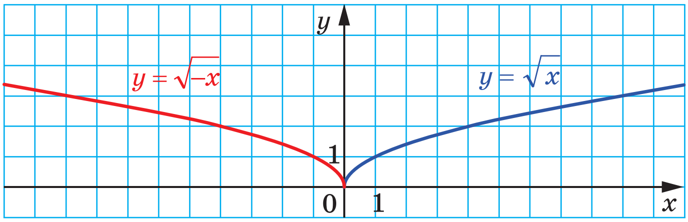


Рис. 5.12

Тепер стає зрозумілим, що правило побудови графіка функції $y = f(kx)$, де $k < 0$, аналогічне випадку, коли $k > 0$. Наприклад, на рисунку 5.13 показано, як можна за допомогою графіка функції $y = \sqrt{x}$ побудувати графіки функцій $y = \sqrt{-3x}$ і $y = \sqrt{-\frac{x}{2}}$.

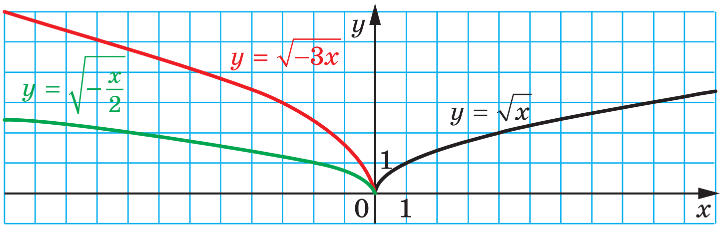


Рис. 5.13

1. Як можна отримати графік функції $y = kf(x)$, де $k \neq 0$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
2. Яка фігура є графіком функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$?
3. Яка точка є вершиною параболи $y = ax^2$?
4. Як напрямлені вітки параболи $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?
5. Яка область визначення функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$?
6. Яка область значень функції $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?
7. На якому проміжку зростає, а на якому проміжку спадає функція $y = ax^2$ при $a > 0$? при $a < 0$?
8. Як можна отримати графік функції $y = f(kx)$, де $k \neq 0$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?

ВПРАВИ

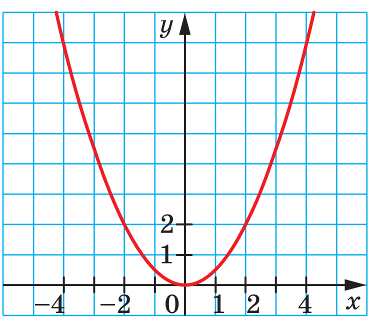
5.1.° При яких значеннях параметра a точка A $(a; 16)$ належить графіку функції $y = 4x^2$?

5.2.° При яких значеннях параметра b точка B $(-2; b)$ належить графіку функції $y = -0{,}2x^2$?

5.3.° Відомо, що точка M $(3; -6)$ належить графіку функції $y = ax^2$. Знайдіть значення a.

5.4.° Відомо, що точка K $(-5; 10)$ належить графіку функції $y = ax^2$. Знайдіть значення a.

5.5.° На рисунку 5.14 зображено графік функції $y = ax^2$. Знайдіть значення a.



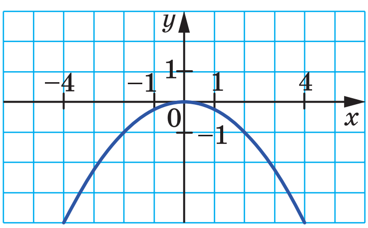
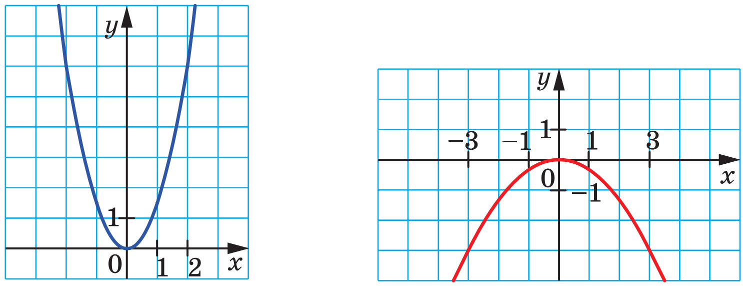


Рис. 5.14

5.6.° На рисунку 5.15 зображено графік функції $y = ax^2$. Знайдіть значення a.



а *б*

Рис. 5.15

5.7.° На рисунку 5.16 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{2} f(x)$; 2) $y = -f(x)$; 3) $y = -2f(x)$.

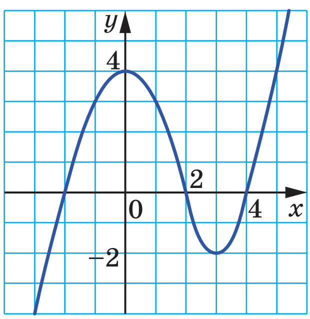


Рис. 5.16

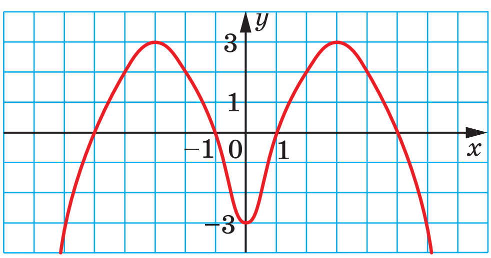


Рис. 5.17

5.8.° На рисунку 5.17 зображено графік функції $y = g(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{3} g(x)$; 2) $y = -\frac{1}{2} g(x)$.

5.9.° Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 5.18, побудуйте графік функції $y = f(-x)$.

5.10.° На рисунку 5.19 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = f(2x)$; 2) $y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$.

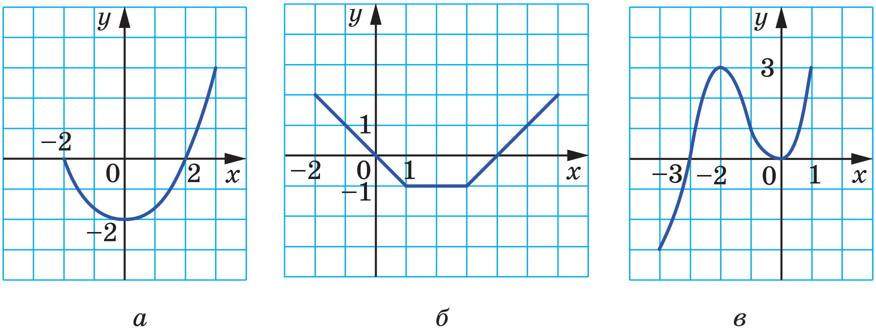


Рис. 5.18

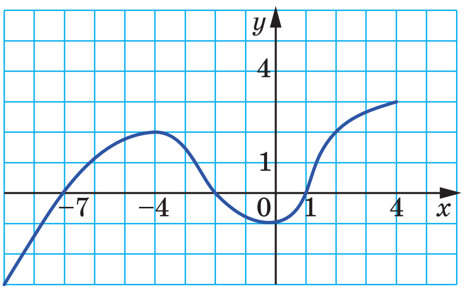


Рис. 5.19

5.11.° На рисунку 5.20 зображено графік функції $y = g(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = g\left(\frac{3}{2}x\right)$; 2) $y = g(-3x)$.

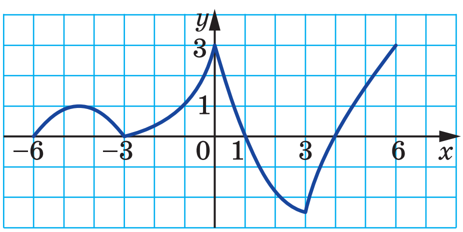


Рис. 5.20

5.12.° Використовуючи графік функції $y = x^2$, побудуйте графіки функцій $y = 3x^2$ і $y = -\frac{1}{4}x^2$.

5.13.° Використовуючи графік функції $y=\sqrt{x}$, побудуйте графіки функцій $y=4\sqrt{x}$ і $y=\sqrt{-\frac{x}{3}}$.

5.14.° Використовуючи графік функції $y=\sqrt{x}$, побудуйте графіки функцій $y=-\sqrt{x}$ і $y=\sqrt{3x}$.

5.15.° Використовуючи графік функції $y = |x|$, побудуйте графіки функцій $y=\frac{1}{2}|x|$ і $y = -2|x|$.

5.16.° Доведіть, що функція $y = ax^2$ при $a > 0$ спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ і зростає на проміжку $[0; +\infty)$.

5.17.° Доведіть, що функція $y = ax^2$ при $a < 0$ зростає на проміжку $(-\infty; 0]$ і спадає на проміжку $[0; +\infty)$.

5.18.° Побудуйте графік функції:

$$y=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, \text{ якщо } x \leqslant -2,\\ -x, \quad \text{якщо } -2 < x < 2,\\ -x^2, \text{ якщо } x \geqslant 2.\end{cases}$$

Користуючись побудованим графіком, знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання функції.

5.19.° Побудуйте графік функції:

$$y=\begin{cases}-2, \quad \text{якщо } x < -1,\\ -2x^2, \text{ якщо } -1 \leqslant x \leqslant 0,\\ 2x^2, \quad \text{якщо } x > 0.\end{cases}$$

Користуючись побудованим графіком, знайдіть проміжки зростання та проміжки спадання функції.

5.20.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = -2x^2$ на множині M, якщо:

1) $M = [-3; -2]$; 3) $M = [-2; 1]$; 5) $M = [1; 3)$.
2) $M = [1; 2]$; 4) $M = (-3; 1]$;

5.21.° Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y=\frac{1}{2}x^2$ на множині M, якщо:

1) $M = [-2; -1]$; 3) $M = [-2; 4]$; 5) $M = (-4; -2)$.
2) $M = [2; 4]$; 4) $M = [-2; 4)$;

5.22.• Побудуйте графік функції:

1) $y = 2[x]$; 2) $y = -\frac{1}{2}\{x\}$; 3) $y = 3\operatorname{sgn} x$.

5.23.• Побудуйте графік функції:

1) $y = -\frac{1}{2}[x]$; 2) $y = 2\{x\}$; 3) $y = -2\operatorname{sgn} x$.

5.24.• Побудуйте графік функції:

1) $y = [2x]$; 2) $y = \left\{-\frac{x}{2}\right\}$.

5.25.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left[-\frac{x}{2}\right]$; 2) $y = \{2x\}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

5.26. Розв'яжіть рівняння $|3x - 2| = |2x - 3|$.

5.27. Побудуйте графік рівняння $\frac{y + x^2}{y + x} = 0$.

5.28. Спростіть вираз $\sqrt{6 - \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}}$.

5.29. При яких значеннях параметра a добуток коренів рівняння $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ дорівнює 2?

6. Як побудувати графіки функцій $y = f(x) + b$ і $y = f(x + a)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$

Покажемо, як, використовуючи графік функції $y = x^2$, можна побудувати графік функції $y = x^2 + 2$.

Складемо таблицю значень цих функцій при одних і тих самих значеннях аргументу.

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	-1	$-0,5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = x^2 + 2$	11	8,25	6	4,25	3	2,25	2	2,25	3	4,25	6	8,25	11

Ця таблиця підказує, що кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0; y_0 + 2)$ графіка функції $y = x^2 + 2$.

А кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = x^2 + 2$ є відповідною єдиній точці $(x_1; y_1 - 2)$ графіка функції $y = x^2$. Таким чином, між множинами точок графіків функцій $y = x^2$ і $y = x^2 + 2$ установлено взаємно однозначну відповідність. Тому всі точки графіка функції $y = x^2 + 2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою абсцисою та з ординатою, збільшеною на 2 (рис. 6.1).

Говорять, що графік функції $y = x^2 + 2$ отримано в результаті **паралельного перенесення**[1] графіка функції $y = x^2$ на дві одиниці вгору вздовж осі ординат.

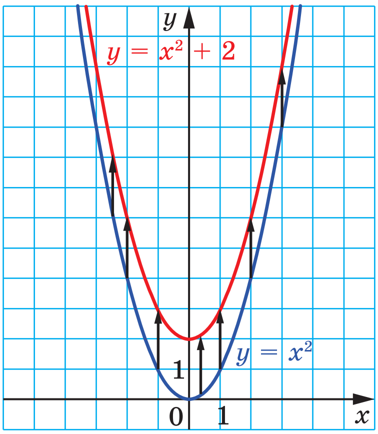


Рис. 6.1

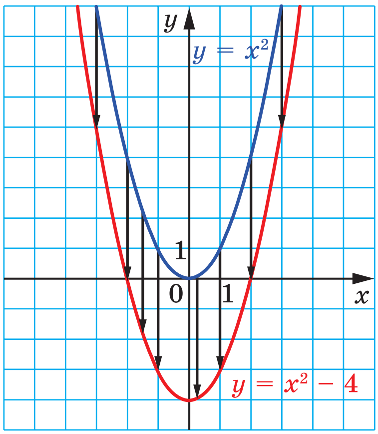


Рис. 6.2

Аналогічно, графік функції $y = x^2 - 4$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ на 4 одиниці вниз уздовж осі ординат (рис. 6.2).

Розглянуті приклади підказують, як можна, використовуючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік функції $y = f(x) + b$.

Графік функції $y = f(x) + b$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі ординат на b одиниць угору, якщо $b > 0$, і на $-b$ одиниць униз, якщо $b < 0$.

На рисунках 6.3, 6.4 показано, як «працює» це правило для побудови графіків функцій $y = \sqrt{x} + 3$ і $y = \frac{1}{x} - 1$.

[1] На уроках геометрії ви більш докладно ознайомитеся з паралельним перенесенням.

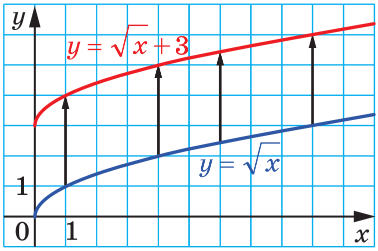


Рис. 6.3

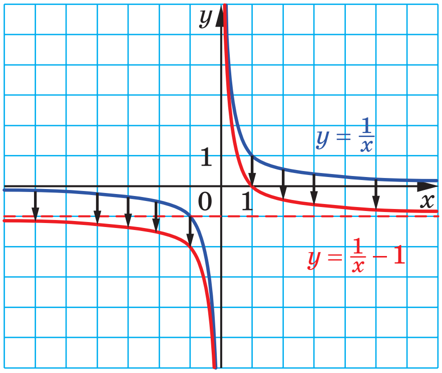


Рис. 6.4

У результаті паралельного перенесення графіка функції отримуємо фігуру, яка дорівнює цьому графіку. Наприклад, кожний із графіків функцій $y = x^2 + 2$ і $y = x^2 - 4$ дорівнює параболі $y = x^2$, тому графіками функцій $y = x^2 + 2$ і $y = x^2 - 4$ також є параболи.

Покажемо, як можна за допомогою графіка функції $y = x^2$ побудувати графік функції $y = (x + 2)^2$.

Нехай точка $(x_0; y_0)$ належить графіку функції $y = x^2$, тобто $x_0^2 = y_0$. Доведемо, що точка $(x_0 - 2; y_0)$ належить графіку функції $y = (x + 2)^2$. Знайдемо значення цієї функції у точці з абсцисою $x_0 - 2$. Маємо: $((x_0 - 2) + 2)^2 = x_0^2 = y_0$. Отже, кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0 - 2; y_0)$ графіка функції $y = (x + 2)^2$. Аналогічно можна показати, що кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = (x + 2)^2$ є відповідною єдиній точці $(x_1 + 2; y_1)$ графіка функції $y = x^2$. Таким чином, між множинами точок графіків функцій $y = x^2$ і $y = (x + 2)^2$ установлено взаємно однозначну відповідність.

Тому всі точки графіка функції $y = (x + 2)^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ на точку з тією самою ординатою та з абсцисою, зменшеною на 2 (рис. 6.5).

Говорять, що графік функції $y = (x + 2)^2$ отримано в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ уздовж осі абсцис на 2 одиниці вліво.

Покажемо, як можна за допомогою графіка функції $y = x^2$ побудувати графік функції $y = (x - 2)^2$. Легко встановити (зробіть це самостійно), що кожній точці $(x_0; y_0)$ графіка функції $y = x^2$ відповідає єдина точка $(x_0 + 2; y_0)$ графіка функції $y = (x - 2)^2$ і кожна точка $(x_1; y_1)$ графіка функції $y = (x - 2)^2$ є відповідною єдиній точці

$(x_1 - 2;\ y_1)$ графіка функції $y = x^2$. Таким чином, між множинами точок графіків функцій $y = x^2$ і $y = (x - 2)^2$ установлено взаємно однозначну відповідність.

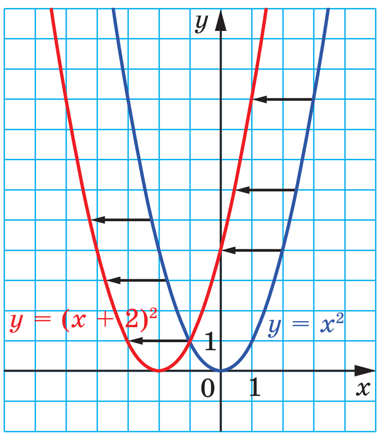


Рис. 6.5

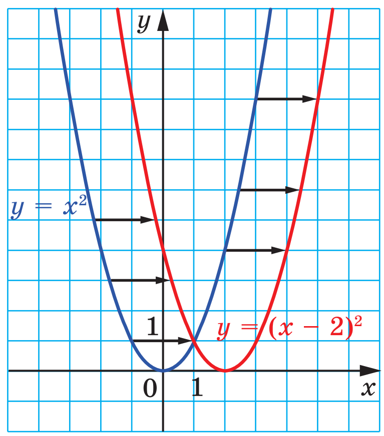


Рис. 6.6

Тому всі точки графіка функції $y = (x - 2)^2$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка функції $y = x^2$ точкою з тією самою ординатою та з абсцисою, зменшеною на 2 (рис. 6.6).

Говорять, що графік функції $y = (x - 2)^2$ отримано в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = x^2$ уздовж осі абсцис на 2 одиниці вправо (рис. 6.6).

Ці приклади підказують, як можна, використовуючи графік функції $y = f(x)$, побудувати графік функції $y = f(x + a)$.

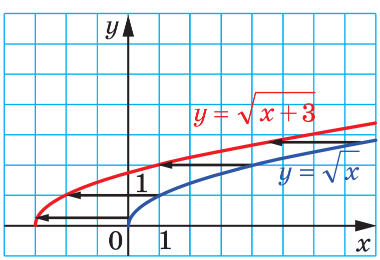


Рис. 6.7

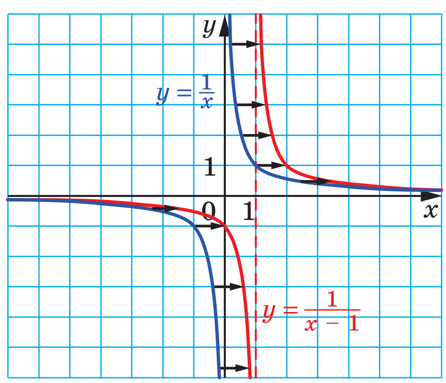


Рис. 6.8

Графік функції $y = f(x + a)$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі абсцис на a одиниць уліво, якщо $a > 0$, і на $-a$ одиниць управо, якщо $a < 0$.

На рисунках 6.7, 6.8 показано, як «працює» це правило для побудови графіків функцій $y = \sqrt{x+3}$ і $y = \frac{1}{x-1}$.

Зауважимо, що кожний із графіків функцій $y = (x + 2)^2$ і $y = (x - 2)^2$ дорівнює параболі $y = x^2$, тому графіками функцій $y = (x + 2)^2$ і $y = (x - 2)^2$ також є параболи.

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік функції $y = (x - 1)^2 + 3$.

Розв'язання. 1) Побудуємо графік функції $y = x^2$.

2) Паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ уздовж осі абсцис на 1 одиницю вправо. Отримаємо графік функції $y = (x - 1)^2$ (рис. 6.9).

3) Паралельно перенесемо графік функції $y = (x - 1)^2$ уздовж осі ординат на 3 одиниці вгору. Отримаємо графік функції $y = (x - 1)^2 + 3$ (див. рис. 6.9).

Описаний алгоритм побудови подамо у вигляді такої схеми:

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{управо на 1 од.}} y = (x-1)^2 \xrightarrow{\text{угору на 3 од.}} y = (x-1)^2 + 3$$ ◄

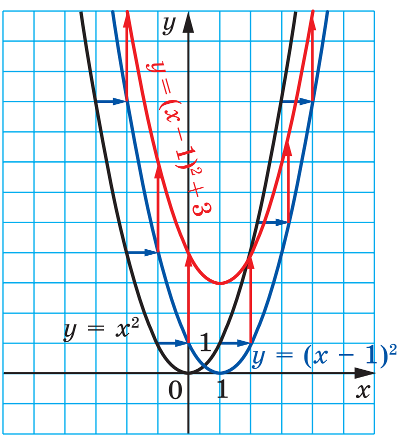


Рис. 6.9

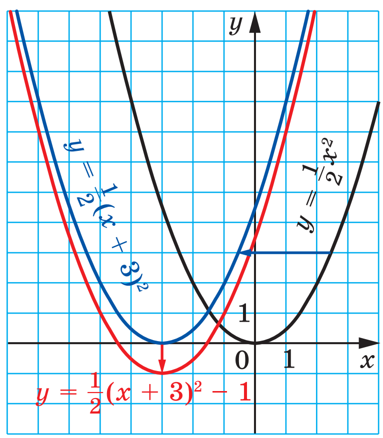


Рис. 6.10

ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$.

Розв'язання. 1) Побудуємо графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$ (рис. 6.10).

2) Паралельно перенесемо графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$ уздовж осі абсцис на 3 одиниці вліво. Отримаємо графік функції $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$ (див. рис. 6.10).

3) Паралельно перенесемо графік функції $y = \frac{1}{2}(x+3)^2$ уздовж осі ординат на 1 одиницю вниз. Отримаємо шуканий графік (див. рис. 6.10).

Описаний алгоритм побудови подамо у вигляді такої схеми:

$$y = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow[\text{на 3 од.}]{\text{уліво}} y = \frac{1}{2}(x+3)^2 \xrightarrow[\text{на 1 од.}]{\text{униз}} y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$$

З описаних перетворень випливає, що графіком функції $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$ є парабола, яка дорівнює параболі $y = \frac{1}{2}x^2$ і вершиною якої є точка $(-3; -1)$. ◄

Цей приклад підказує, як за допомогою графіка функції $y = f(x)$ побудувати графік функції $y = kf(x + a) + b$, зокрема, як за допомогою графіка функції $y = x^2$ побудувати графік функції $y = k(x + a)^2 + b$.

Тепер можна зробити такий висновок.

Графіком функції $y = k(x + a)^2 + b$, $k \neq 0$, є парабола, яка дорівнює параболі $y = kx^2$ і вершиною якої є точка $(-a; b)$.

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік функції $y = -2x^2 - 20x - 47$.

Розв'язання. Маємо: $y = -2x^2 - 20x - 47 = -2x^2 - 20x - 50 + 3 = -2(x + 5)^2 + 3$.

Ми подали формулу, що задає дану функцію, у вигляді $y = kf(x + a) + b$, де $f(x) = x^2$, $k = -2$, $a = 5$, $b = 3$.

Схема побудови має такий вигляд:

$$y = -2x^2 \xrightarrow[\text{на 5 од.}]{\text{уліво}} y = -2(x + 5)^2 \xrightarrow[\text{на 3 од.}]{\text{угору}} y = -2(x + 5)^2 + 3$$

Побудований графік є параболою, яка дорівнює параболі $y = -2x^2$ і вершиною якої є точка $(-5; 3)$ (рис. 6.11). ◄

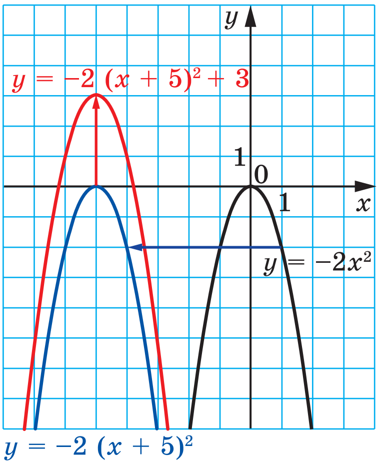


Рис. 6.11

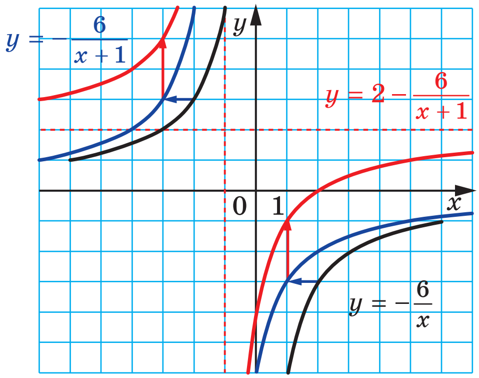


Рис. 6.12

ПРИКЛАД 4 Побудуйте графік функції $y = \dfrac{2x-4}{x+1}$.

Розв'язання. Маємо: $\dfrac{2x-4}{x+1} = \dfrac{2x+2-6}{x+1} = \dfrac{2(x+1)-6}{x+1} = 2 - \dfrac{6}{x+1}$.

Тоді дану функцію задає формула $y = 2 - \dfrac{6}{x+1}$.

Схема побудови має такий вигляд (рис. 6.12):

$$y = -\frac{6}{x} \xrightarrow[\text{на 1 од.}]{\text{уліво}} y = -\frac{6}{x+1} \xrightarrow[\text{на 2 од.}]{\text{угору}} y = 2 - \frac{6}{x+1}$$

Із побудови випливає, що шуканий графік є гіперболою, яка дорівнює гіперболі $y = -\dfrac{6}{x}$. ◀

Цей приклад підказує, як розв'язати більш загальну задачу: побудувати графік функції $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, де a, b, c, d — параметри, причому $c \neq 0$.

Маємо:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d) - \frac{ad}{c} + b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}.$$

Таким чином, функцію, яка розглядається, подали у вигляді $y = m + \frac{k}{x+n}$, де $m = \frac{a}{c}$, $n = \frac{d}{c}$, $k = \frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}$. Будувати такий графік ви вже вмієте.

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік функції $y = \sqrt{3x-2}$.

Розв'язання. Схема побудови має такий вигляд (рис. 6.13):

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{управо на 2 од.}} y = \sqrt{x-2} \xrightarrow{\text{стискання в 3 рази до осі ординат}} y = \sqrt{3x-2}$$

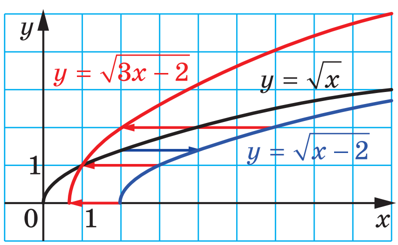


Рис. 6.13

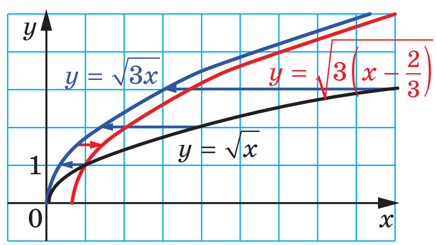


Рис. 6.14

Якщо задану функцію подати у вигляді $y = \sqrt{3\left(x - \frac{2}{3}\right)}$, то побудову графіка можна провести за такою схемою (рис. 6.14):

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{стискання в 3 рази до осі ординат}} y = \sqrt{3x} \xrightarrow{\text{управо на } \frac{2}{3} \text{ од.}} y = \sqrt{3\left(x - \frac{2}{3}\right)}$$ ◀

ПРИКЛАД 6 Побудуйте графік функції $y = \sqrt{1-3x}$.

Розв'язання. Побудову графіка можна провести за такою схемою (рис. 6.15):

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{уліво на 1 од.}} y = \sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y = \sqrt{-x+1} \xrightarrow{\text{стискання в 3 рази до осі ординат}} y = \sqrt{-3x+1}$$

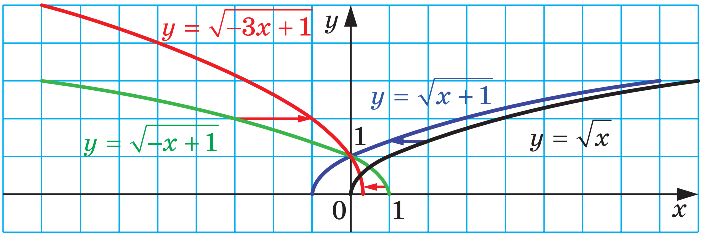


Рис. 6.15

Зазначимо, що можливі й інші схеми побудови. Нижче наведено дві з них, які відповідають рисункам 6.16 і 6.17:

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{уліво на 1 од.}} y = \sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{стискання в 3 рази до осі ординат}} y = \sqrt{3x+1} \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y = \sqrt{-3x+1}$$

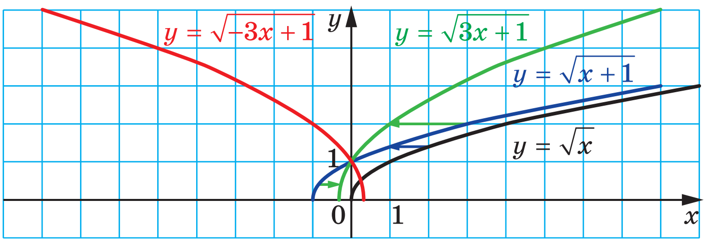


Рис. 6.16

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{симетрія відносно осі ординат}} y = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{стискання в 3 рази до осі ординат}} y = \sqrt{-3x} \xrightarrow{\text{управо на } \frac{1}{3} \text{ од.}} y = \sqrt{-3\left(x - \frac{1}{3}\right)}$$

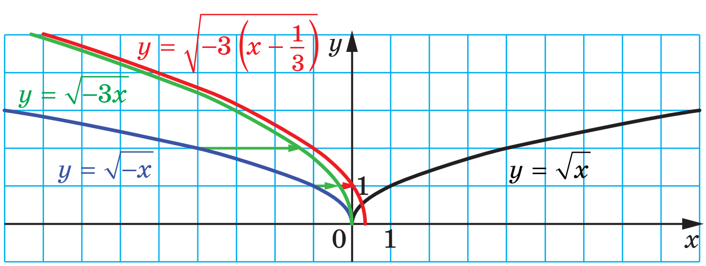


Рис. 6.17

ПРИКЛАД 7 Визначте кількість коренів рівняння $|x-a|+2|x+1|=3$ залежно від значення параметра a.

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння так:

$$|x-a|=3-2|x+1|.$$

Розглянемо функції $f(x)=|x-a|$ і $g(x)=3-2|x+1|$. Задача зводиться до того, щоб з'ясувати, скільки точок перетину залежно від значення параметра a мають графіки функцій f і g.

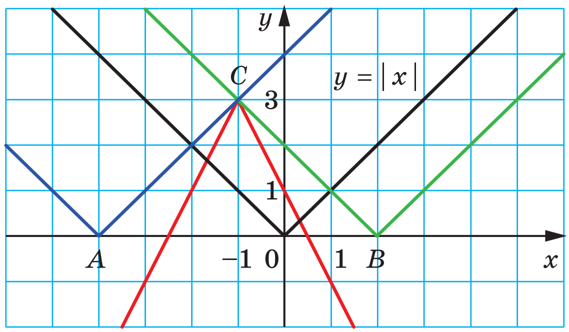


Рис. 6.18

Графік функції g зображено на рисунку 6.18 червоним кольором.

Графік функції f — це фігура, яку отримують у результаті паралельного перенесення вздовж осі абсцис графіка функції $y=|x|$ (синім кольором зображено графік для від'ємного значення a, зеленим — для додатного, чорним — для $a=0$).

З рисунка 6.18 видно, що коли вершина кута, який є графіком функції f, розміщена на осі абсцис ліворуч від точки A або праворуч від точки B, то графіки функцій f і g не перетинаються. Якщо вершина кута збігається або з точкою A, або з точкою B, то графіки функцій f і g мають одну спільну точку — точку $C(-1; 3)$. Якщо вершина кута знаходиться між точками A і B, то графіки функцій f і g мають дві спільні точки.

Координати точок A і B мають вигляд $(a; 0)$.

Значення параметра a, при яких вершина кута, що є графіком функції f, збігається з точкою A або з точкою B, можна знайти, підставивши в рівняння $y=|x-a|$ координати точки C. Маємо: $3=|-1-a|$. Звідси $a=-4$ або $a=2$.

Отримуємо: $A(-4; 0)$, $B(2; 0)$.

Відповідь: якщо $a<-4$ або $a>2$, то коренів немає;
якщо $a=-4$ або $a=2$, то один корінь;
якщо $-4<a<2$, то 2 корені. ◄

1. Як можна отримати графік функції $y = f(x) + b$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
2. Яка фігура є графіком функції $y = x^2 + b$?
3. Які координати вершини параболи $y = x^2 + b$?
4. Як можна отримати графік функції $y = f(x + a)$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
5. Яка фігура є графіком функції $y = (x + a)^2$?
6. Які координати вершини параболи $y = (x + a)^2$?
7. Яка фігура є графіком функції $y = k(x + a)^2 + b$, де $k \neq 0$?
8. Які координати вершини параболи $y = k(x + a)^2 + b$?

ВПРАВИ

6.1.° Графік якої функції отримаємо, якщо графік функції $y = x^2$ паралельно перенесемо:
1) на 6 одиниць угору вздовж осі ординат;
2) на 9 одиниць управо вздовж осі абсцис;
3) на 12 одиниць униз уздовж осі ординат;
4) на 7 одиниць уліво вздовж осі абсцис;
5) на 2 одиниці вправо вздовж осі абсцис і на 3 одиниці вниз уздовж осі ординат;
6) на 1 одиницю вліво вздовж осі абсцис і на 1 одиницю вгору вздовж осі ординат?

6.2.° Графік якої з наведених функцій отримаємо, якщо паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ уздовж осі абсцис на 4 одиниці вправо:
1) $y = x^2 + 4$; 2) $y = x^2 - 4$; 3) $y = (x + 4)^2$; 4) $y = (x - 4)^2$?

6.3.° Графік якої з наведених функцій отримаємо, якщо паралельно перенесемо графік функції $y = x^2$ уздовж осі ординат на 5 одиниць угору:
1) $y = x^2 + 5$; 2) $y = x^2 - 5$; 3) $y = (x + 5)^2$; 4) $y = (x - 5)^2$?

6.4.° Які координати має вершина параболи:
1) $y = x^2 + 8$;
2) $y = x^2 - 8$;
3) $y = (x + 8)^2$;
4) $y = (x - 8)^2$;
5) $y = (x - 4)^2 + 3$;
6) $y = (x + 4)^2 + 3$;
7) $y = (x - 4)^2 - 3$;
8) $y = (x + 4)^2 - 3$?

6.5.° У якій координатній чверті лежить вершина параболи:
1) $y = (x + 10)^2 - 16$;
2) $y = (x - 11)^2 + 15$;
3) $y = (x + 15)^2 + 4$;
4) $y = (x - 11)^2 - 9$?

6.6.° Як треба паралельно перенести графік функції $y = \frac{5}{x}$, щоб отримати графік функції $y = \frac{5}{x-8}$:

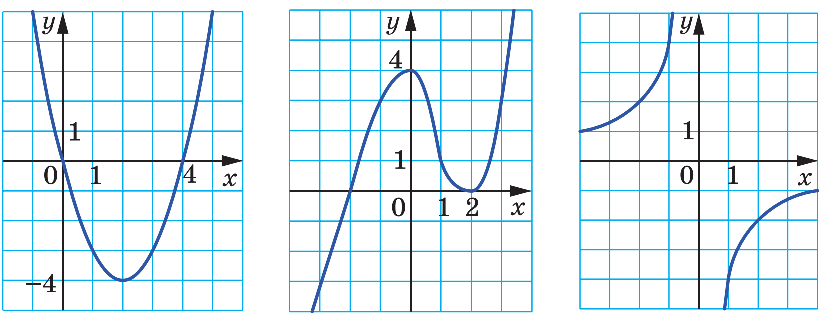
1) на 8 одиниць угору вздовж осі ординат;
2) на 8 одиниць униз уздовж осі ординат;
3) на 8 одиниць управо вздовж осі абсцис;
4) на 8 одиниць уліво вздовж осі абсцис?

6.7.° Як треба паралельно перенести графік функції $y = \sqrt{x}$, щоб отримати графік функції $y = \sqrt{x+3}$:

1) на 3 одиниці вгору вздовж осі ординат;
2) на 3 одиниці вниз уздовж осі ординат;
3) на 3 одиниці вправо вздовж осі абсцис;
4) на 3 одиниці вліво вздовж осі абсцис?

6.8.° На рисунку 6.19 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = f(x) - 2$;
2) $y = f(x) + 4$;
3) $y = f(x - 3)$;
4) $y = f(x + 1)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = 3 - f(x)$.



а *б* *в*

Рис. 6.19

6.9.° На рисунку 6.20 зображено графік функції $y = f(x)$. Побудуйте графік функції:

1) $y = f(x) + 5$;
2) $y = f(x) - 3$;
3) $y = f(x + 1)$;
4) $y = f(x - 2)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = -f(x) - 1$.

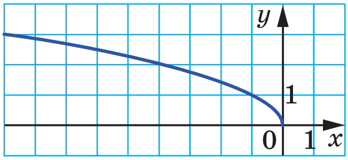


Рис. 6.20

6.10.° Побудуйте графік функції $y = x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 - 3$;
2) $y = x^2 + 4$;
3) $y = (x - 5)^2$;
4) $y = (x + 2)^2$;
5) $y = (x - 1)^2 + 2$;
6) $y = (x + 3)^2 - 2$.

6.11.° Побудуйте графік функції $y = -x^2$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = -x^2 + 1$;
2) $y = -x^2 - 2$;
3) $y = -(x - 2)^2$;
4) $y = -(x + 4)^2$;
5) $y = -(x + 1)^2 - 1$;
6) $y = -(x - 3)^2 + 4$.

6.12.° Побудуйте графік функції $y = -\frac{6}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = -\frac{6}{x} + 5$;
2) $y = -\frac{6}{x - 2}$;
3) $y = -\frac{6}{x + 4} - 2$.

6.13.° Побудуйте графік функції $y = \frac{2}{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{2}{x} - 1$;
2) $y = \frac{2}{x + 1}$;
3) $y = \frac{2}{x - 3} + 6$.

6.14.° Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x}$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{x} - 4$;
2) $y = \sqrt{x - 4}$;
3) $y = \sqrt{x - 1} + 3$.

6.15.° Побудуйте графік функції $y = (x + 5)^2 - 9$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;
3) проміжок зростання та проміжок спадання функції;
4) область значень функції.

6.16.° Побудуйте графік функції $y = (x - 4)^2 + 4$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) нулі функції;
2) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;
3) проміжок зростання та проміжок спадання функції;
4) область значень функції.

6.17.° Задайте формулою виду $y = ax^2 + n$ функцію, графік якої зображено на рисунку 6.21.

6.18.° Задайте формулою виду $y = ax^2 + n$ функцію, графік якої зображено на рисунку 6.22.

6.19.° Задайте формулою виду $y = a\,(x + m)^2$ функцію, графік якої зображено на рисунку 6.23.

6.20.° Задайте формулою виду $y = a\,(x + m)^2$ функцію, графік якої зображено на рисунку 6.24.

6.21.° Задайте формулою виду $y = a\,(x + m)^2 + n$ функцію, графік якої зображено на рисунку 6.25.

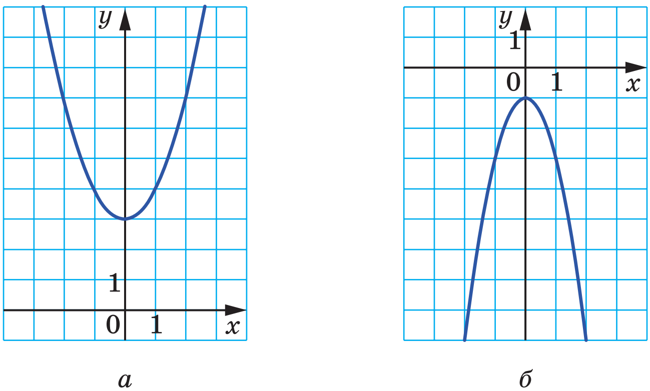


Рис. 6.21

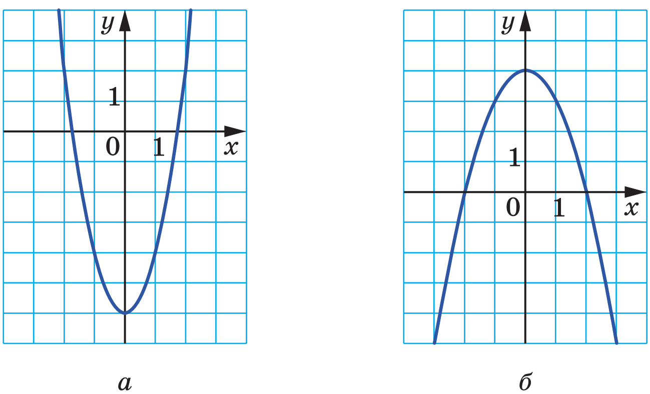
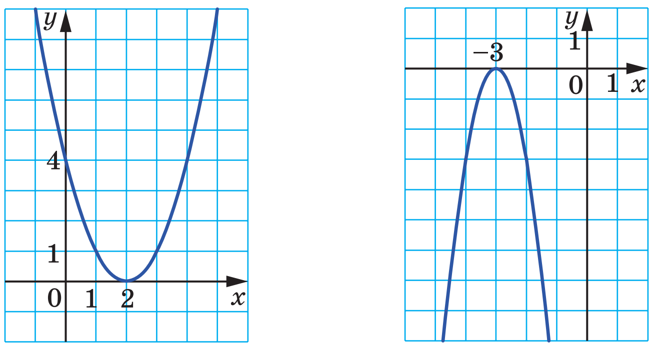
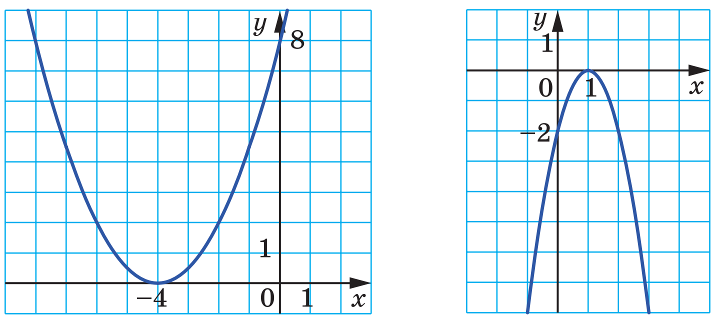


Рис. 6.22



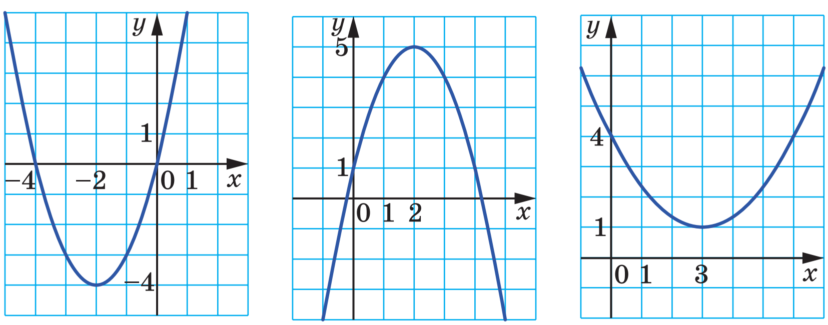
а *б*

Рис. 6.23



а *б*

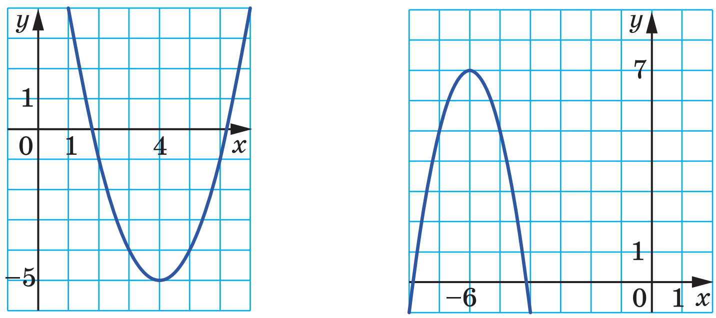
Рис. 6.24



а *б* *в*

Рис. 6.25

6.22.° Задайте формулою виду $y = a\,(x + m)^2 + n$ функцію, графік якої зображено на рисунку 6.26.



а *б*

Рис. 6.26

6.23.° Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $(x-1)^2 = \dfrac{2}{x}$; 2) $2 - x^2 = \sqrt{x}$.

6.24.° Розв'яжіть графічно рівняння $\dfrac{3}{x} = \sqrt{x} + 2$.

6.25.° Побудуйте графік функції $y = |\,x\,|$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:

1) $y = |\,x - 2\,| + 1$; 4) $y = \dfrac{1}{2}|\,x+1\,| - 3$;
2) $y = |\,3 - x\,| - 2$; 5) $y = 1 - 2\,|\,x - 1\,|$.
3) $y = 3 - |\,x + 2\,|$;

6.26.° Побудуйте графік функції $y = |\,x\,|$. Використовуючи цей графік, побудуйте графік функції:
1) $y = |\,x - 1\,| - 3$; 2) $y = 2 - |\,x + 4\,|$; 3) $y = 2 - 3\,|\,x + 1\,|$.

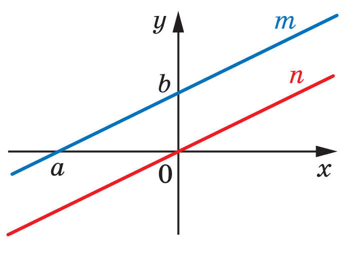


Рис. 6.27

6.27.$^{\bullet}$ Прямі m і n, зображені на рисунку 6.27, паралельні, причому пряма n є графіком функції $y = f(x)$. Яке з тверджень є правильним:

1) пряма m є графіком функції $y = f(x) + b$;
2) пряма m є графіком функції $y = f(x - a)$?

6.28.$^{\bullet}$ Задайте дану функцію формулою виду $y = a(x - m)^2 + n$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 4x + 6$;
2) $y = -x^2 + 6x - 6$;
3) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
4) $y = 0{,}2x^2 - 2x - 4$.

6.29.$^{\bullet}$ Задайте дану функцію формулою виду $y = a(x - m)^2 + n$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 2x - 8$;
2) $y = -2x^2 + 8x - 3$.

6.30.$^{\bullet}$ Задайте дану функцію формулою виду $y = \frac{k}{x + a} + b$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = \frac{k}{x}$:

1) $y = \frac{3x + 8}{x}$;
2) $y = \frac{2x + 14}{x + 3}$;
3) $y = \frac{-2x}{x - 1}$;
4) $y = \frac{x - 1}{2x + 1}$.

6.31.$^{\bullet}$ Задайте дану функцію формулою виду $y = \frac{k}{x + a} + b$ і побудуйте її графік, використовуючи графік функції $y = \frac{k}{x}$:

1) $y = \frac{4x + 14}{x + 1}$;
2) $y = \frac{7 - x}{x - 2}$.
3) $y = \frac{3x - 2}{x + 1}$.

6.32.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{4x - 1}$;
2) $y = \sqrt{1 - \frac{x}{2}}$;
3) $y = (2x + 1)^2$;
4) $y = |2x - 1|$.

6.33.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{3x + 1}$;
2) $y = \sqrt{-\frac{x}{3} - 1}$;
3) $y = (3x - 1)^2$;
4) $y = |3x + 2|$.

6.34.$^{\bullet}$ Побудуйте графік функції:

1) $y = [x - 1]$;
2) $y = [x] - 1$;
3) $y = \left\{x + \frac{1}{2}\right\}$;
4) $y = \{x\} - 1$;
5) $y = [2x - 1]$;
6) $y = [1 - 3x]$;
7) $y = \left\{\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right\}$;
8) $y = \left\{\frac{1}{2} - \frac{x}{3}\right\}$.

6.35.• Побудуйте графік функції:

1) $y = [x + 1]$; 3) $y = \left\{x - \frac{1}{3}\right\}$; 5) $y = [3x + 1]$; 7) $y = \left\{\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\right\}$;

2) $y = [x] + 2$; 4) $y = \{x\} + 1$; 6) $y = [1 - 2x]$; 8) $y = \left\{\frac{1}{3} - \frac{x}{2}\right\}$.

6.36.• Визначте кількість коренів рівняння $a - |x| = x^2$ залежно від значення параметра a.

6.37.• При яких значеннях параметра a рівняння $|x| + a = -x^2$ має два корені?

6.38.• Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $\sqrt{x-a} = 1 - x$?

6.39.• Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $\sqrt{x+a} = 2 - x$?

6.40.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = |x - a|$ на відрізку $[1; 3]$.

6.41.•• Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = (x + a)^2$ на відрізку $[-4; -2]$.

6.42.•• Визначте кількість коренів рівняння $3|x| = |x - a|$ залежно від значення параметра a.

6.43.•• Визначте кількість коренів рівняння $|x - a| + |x| = 2$ залежно від значення параметра a.

6.44.•• Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $x^2 + 1 = |x - a|$?

6.45.•• Скільки коренів залежно від значення параметра a має рівняння $2 - x^2 = |x + a|$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

6.46. Яка множина є об'єднанням множин A і B, якщо

$$A = \{x \mid x = 6n,\ n \in \mathbb{Z}\},\quad B = \{x \mid x = 6n - 3,\ n \in \mathbb{Z}\}?$$

6.47. Спростіть вираз $\dfrac{\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y} + \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}} \cdot \dfrac{y - \sqrt{xy} + x}{2\sqrt{xy}}$.

6.48. Знайдіть усі пари чисел $(x; y)$, які задовольняють умову $\sqrt{x^2 - 6x + 5} + \sqrt{y^2 - y - 2} = 0$.

6.49. Розв'яжіть рівняння $(x + 5)^4 + (x + 3)^4 = 2$.

7. Як побудувати графіки функцій $y = f(|x|)$ і $y = |f(x)|$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$

Скориставшись означенням модуля, можна записати:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } x \geqslant 0, \\ f(-x), & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Звідси робимо висновок, що графік функції $y = f(|x|)$ при $x \geqslant 0$ збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при $x < 0$ — з графіком функції $y = f(-x)$.

Тоді побудову графіка функції $y = f(|x|)$ можна проводити так:

1) побудувати ту частину графіка функції $y = f(x)$, усі точки якої мають невід'ємні абсциси;

2) побудувати ту частину графіка функції $y = f(-x)$, усі точки якої мають від'ємні абсциси.

Об'єднання цих двох частин є графіком функції $y = f(|x|)$.

Зауважимо, що функція $y = f(|x|)$ є парною. Тому вісь ординат є віссю симетрії її графіка. Тоді графік функції $y = f(|x|)$ можна отримати ще так:

1) побудувати ту частину графіка функції $y = f(x)$, усі точки якої мають невід'ємні абсциси;

2) побудувати фігуру, симетричну отриманій відносно осі ординат.

Об'єднання двох побудованих фігур є графіком функції $y = f(|x|)$.

На рисунку 7.1 показано, як за допомогою графіка функції $y = (x - 2)^2$ побудовано графік функції $y = (|x| - 2)^2$.

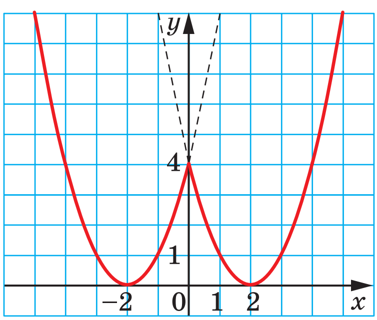


Рис. 7.1

Для функції $y = \left| f(x) \right|$ можна записати:

$$y = \left| f(x) \right| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Звідси робимо такий висновок: графік функції $y = \left|f(x)\right|$ при всіх x, для яких $f(x) \geqslant 0$, збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при всіх x, для яких $f(x) < 0$, — з графіком функції $y = -f(x)$.

Тоді побудову графіка функції $y = \left|f(x)\right|$ можна проводити так:

1) побудувати ту частину графіка функції $y = f(x)$, усі точки якої мають невід'ємні ординати;

2) побудувати ту частину графіка функції $y = -f(x)$, усі точки якої мають додатні ординати.

Об'єднання двох побудованих фігур є графіком функції $y = \left| f(x) \right|$.

Оскільки графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі абсцис, то шуканий графік можна отримати ще так:

1) ту частину графіка функції $y = f(x)$, точки якої мають невід'ємні ординати, залишити без змін;

2) побудувати фігуру, симетричну відносно осі ординат тій частині графіка функції $y = f(x)$, точки якої мають від'ємні ординати.

Об'єднання цих двох частин і буде графіком функції $y = \left| f(x) \right|$.

На рисунку 7.2 показано, як за допомогою графіка функції $y = (x - 1)^2 - 2$ побудовано графік функції $y = \left|(x - 1)^2 - 2\right|$.

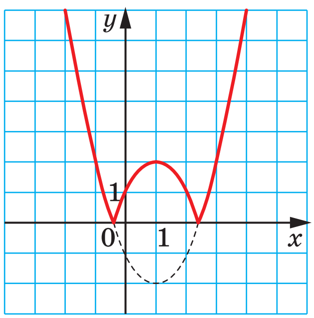


Рис. 7.2

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік функції $y = \left|\sqrt{|x|+1} - 2\right|$.

Розв'язання. Алгоритм побудови шуканого графіка можна подати у вигляді такої схеми:

$$\boxed{y = \sqrt{x+1} \longrightarrow y = \sqrt{|x|+1} \longrightarrow y = \sqrt{|x|+1} - 2 \longrightarrow y = \left|\sqrt{|x|+1} - 2\right|}$$

(рис. 7.3). ◄

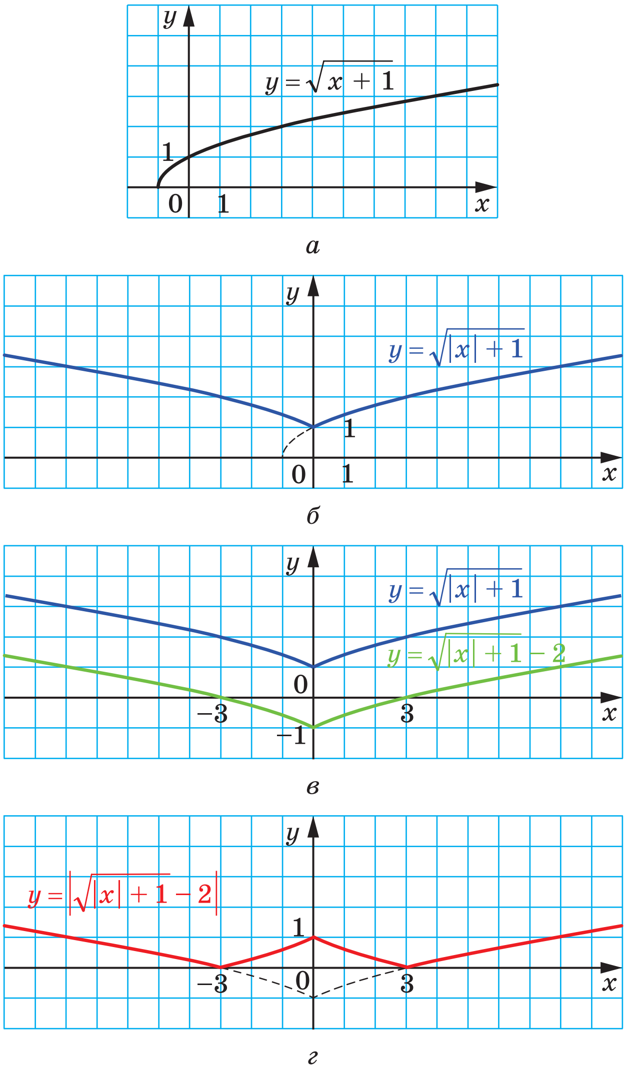


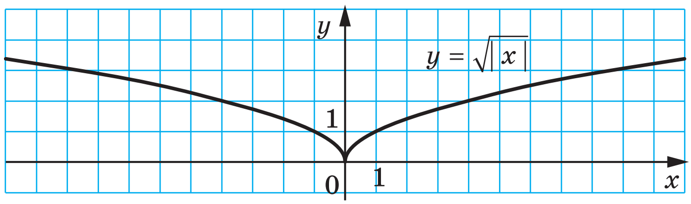
Рис. 7.3

ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік функції $y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$.

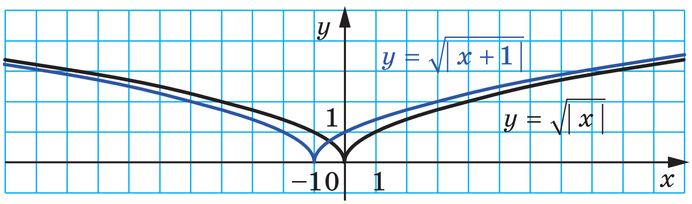
Розв'язання. Алгоритм побудови шуканого графіка можна подати у вигляді такої схеми:

$$\boxed{y = \sqrt{|x|} \longrightarrow y = \sqrt{|x+1|} \longrightarrow y = \sqrt{|x+1|} - 1 \longrightarrow y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|}$$

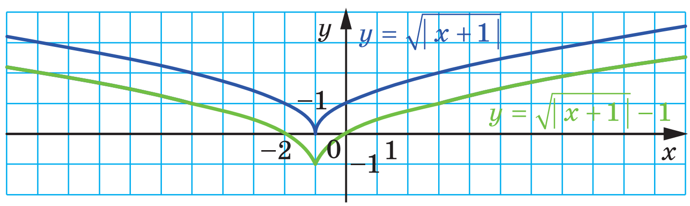
(рис. 7.4). ◄



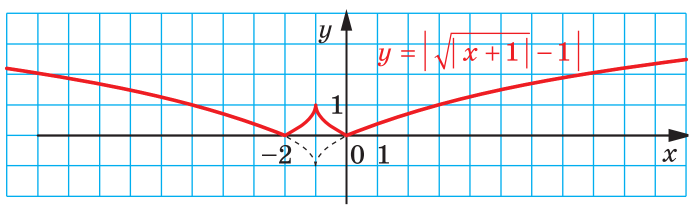
а



б



в



г

Рис. 7.4

ПРИКЛАД 3 При яких значеннях параметра a рівняння

$$|2|x| - 1| = x - a$$

має три корені?

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = |2|x| - 1|$. Проведемо побудову її графіка за такою схемою:

$$y = x \to y = x - 1 \to y = 2x - 1 \to y = 2|x| - 1 \to y = |2|x| - 1|.$$

Графік функції f зображено на рисунку 7.5 червоним кольором.

Розглянемо функцію $g(x) = x - a$. Її графіком є пряма.

Задача зводиться до того, щоб знайти таке положення прямої $g(x) = x - a$, при якому графіки функцій f і g мають три спільні точки.

Ця умова буде виконана лише тоді, коли пряма $g(x) = x - a$ пройде через точку $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ або через точку $(0; 1)$ (рис. 7.5). Знайдемо значення параметра a, які відповідають цим положенням прямої. Маємо: $\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} - a = 0, \\ 0 - a = 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2}, \\ a = -1. \end{array}\right.$

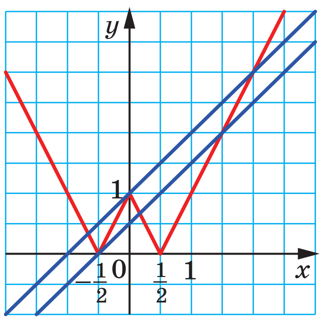


Рис. 7.5

Відповідь: $a = -\frac{1}{2}$ або $a = -1$. ◄

1. Як можна побудувати графік функції $y = f(|x|)$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?
2. Як можна побудувати графік функції $y = |f(x)|$, використовуючи графік функції $y = f(x)$?

ВПРАВИ

7.1.° Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 7.6, побудуйте графік функції:
1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

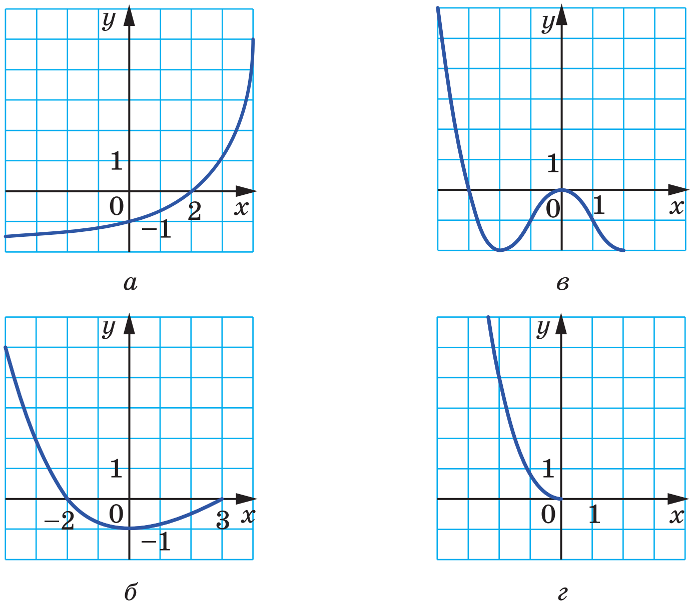


Рис. 7.6

7.2.° Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 7.7, побудуйте графік функції:
1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

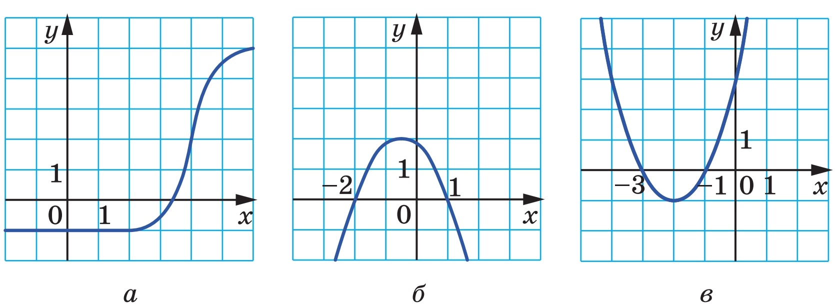
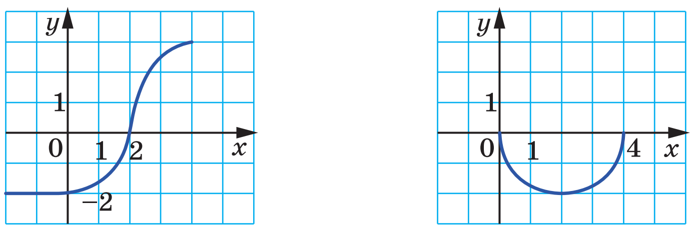


Рис. 7.7

7.3.° Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 7.8, побудуйте графік функції $y = |f(|x|)|$.



а *б*

Рис. 7.8

7.4.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{1}{|x|}$; 2) $y = -\dfrac{6}{|x|}$.

7.5.° Побудуйте графік функції:

1) $y = \dfrac{2}{|x|}$; 2) $y = -\dfrac{1}{|x|}$.

7.6.° Побудуйте графік функції:

1) $y = |x^2 - 1|$; 3) $y = \left|\dfrac{2}{x} - 1\right|$; 5) $y = \left|\dfrac{x-4}{x+1}\right|$.

2) $y = |\sqrt{x} - 2|$; 4) $y = \left|\dfrac{2}{x-1}\right|$;

7.7.° Побудуйте графік функції:

1) $y = |x^2 - 4|$; 3) $y = \left|\dfrac{4}{x} - 2\right|$; 5) $y = \left|\dfrac{x+2}{x-3}\right|$.

2) $y = |\sqrt{x} - 1|$; 4) $y = \left|\dfrac{4}{x-2}\right|$;

7.8.• Про функцію $y = f(x)$ відомо, що $D(f) = [-3; 7]$ і $E(f) = [-6; 5]$. Знайдіть: 1) область визначення функції $y = f(|x|)$; 2) область визначення та область значень функції $y = |f(x)|$.

7.9.• Про функцію $y = f(x)$ відомо, що $D(f) = \mathbb{R}$, числа -3 і 2 є її нулями, $f(x) > 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$. Знайдіть нулі та проміжки знакосталості функції: 1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

7.10.• Про функцію $y = f(x)$ відомо, що $D(f) = \mathbb{R}$, числа -1 і 3 є її нулями, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. Знайдіть нулі та проміжки знакосталості функції: 1) $y = f(|x|)$; 2) $y = |f(x)|$.

7.11.• Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 7.9, побудуйте графік функції:
1) $y = f(|x| - 1)$; 2) $y = f(|x - 1|)$.

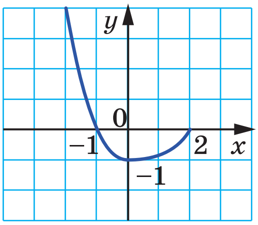


Рис. 7.9

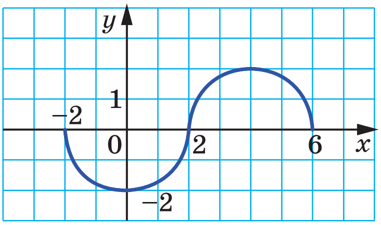


Рис. 7.10

7.12.• Використовуючи графік функції $y = f(x)$, зображений на рисунку 7.10, побудуйте графік функції:
1) $y = f(|x| + 2)$; 2) $y = f(|x + 2|)$.

7.13.• Побудуйте графік функції:
1) $y = (|x| - 1)^2$; 2) $y = \sqrt{|x| + 2}$; 3) $y = \dfrac{1}{|x| - 3}$; 4) $y = \sqrt{1 - |x|}$.

7.14.• Побудуйте графік функції:
1) $y = (|x| + 2)^2$; 2) $y = \sqrt{|x| - 3}$; 3) $y = \dfrac{1}{|x| - 4}$; 4) $y = \sqrt{2 - |x|}$.

7.15.• Побудуйте графік функції:
1) $y = \sqrt{|x + 2|}$; 3) $y = \sqrt{|x - 1| + 2}$;
2) $y = (|x - 2| - 1)^2$; 4) $y = \dfrac{1}{|x + 1| - 3}$.

7.16.• Побудуйте графік функції:
1) $y = \sqrt{|x - 3|}$; 3) $y = \sqrt{|x - 2| - 3}$;
2) $y = (|x + 1| + 2)^2$; 4) $y = \dfrac{1}{|x - 1| - 4}$.

7.17.• Скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра a:
1) $||x| - 1| = a$; 3) $|(|x| - 1)^2 - 1| = a$;
2) $|(x + 1)^2 - 1| = a$; 4) $|\sqrt{x} - 2| = a$?

7.18.• Скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра a:
1) $|x^2 - 1| = a$; 3) $|(|x| - 2)^2 - 3| = a$?
2) $|(x + 2)^2 - 3| = a$;

7.19.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{2|x| - 1}$; 2) $y = \sqrt{1 - 3|x|}$; 3) $y = \sqrt{|2x - 1|}$.

7.20.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \sqrt{3|x| + 1}$; 2) $y = \sqrt{|3x + 1|}$.

7.21.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\dfrac{4}{|x|} - 2\right|$; 2) $y = \left|\dfrac{4}{|x| - 2}\right|$; 3) $y = |1 - |1 - |x|||$.

7.22.• Побудуйте графік функції:

1) $y = ||x| - 4|$; 2) $y = |2|x| - 4|$; 3) $y = |||x - 1| - 1| - 1|$.

7.23.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\sqrt{|x| - 1} - 1\right|$; 3) $y = \left|\dfrac{1}{|x| - 2} - 1\right|$; 5) $y = \left|\dfrac{|x| + 2}{|x| - 1}\right|$.

2) $y = \left|\sqrt{|x - 1|} - 1\right|$; 4) $y = \left|\dfrac{1}{|x - 2|} - 1\right|$;

7.24.•• Побудуйте графік функції:

1) $y = \left|\sqrt{2|x| - 1} - 1\right|$; 3) $y = \left|\dfrac{|x| - 2}{|x| + 1}\right|$.

2) $y = \left|\sqrt{|3x + 1|} - 2\right|$;

7.25.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$||x - 1| - 1| = x - a$$

має безліч коренів?

7.26.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$||x + 2| - 3| = a - x$$

має безліч коренів?

7.27.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$|2|x - 1| - 3| = x - a$$

має 3 корені?

7.28.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$|3|x + 1| - 2| = a - x$$

має 3 корені?

7.29.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$|2|x + a| - 1| = x - 1$$

має єдиний корінь?

7.30.•• При яких значеннях параметра a рівняння

$$|3|x - a| - 2| = 2 - x$$

має єдиний корінь?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

7.31. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $2x^2 - x - 5 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

1) $x_1^2 + x_2^2$; 2) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$; 3) $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$.

7.32. Розв'яжіть рівняння $\frac{2x-7}{x^2-9x+14} - \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-1}$.

7.33. Розв'яжіть нерівність $|x| - |x-3| \leqslant 2x$.

7.34. Розв'яжіть рівняння $x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 7$.

8. Квадратична функція, її графік і властивості

Означення. **Функцію, яку можна задати формулою виду $y = ax^2 + bx + c$, де x — незалежна змінна, a, b і c — параметри, причому $a \neq 0$, називають квадратичною.**

Квадратична функція не є для вас новою. Так, у 8 класі ви вивчали її окремий випадок, а саме функцію $y = x^2$. Функціональна залежність площі S круга від його радіуса r визначає квадратичну функцію $S(r) = \pi r^2$, яка є функцією виду $y = ax^2$.

На уроках фізики ви ознайомилися з формулою $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, яка задає залежність висоти h, на якій знаходиться тіло, що його кинули вертикально вгору з початковою швидкістю v_0, від часу руху t. Ця формула задає квадратичну функцію $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Установимо деякі властивості квадратичної функції. Для цього перетворимо вираз $ax^2 + bx + c$.

Маємо:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a},$$

де D — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$.

Введемо позначення $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = -\frac{D}{4a}$.

Тоді квадратичну функцію $f(x) = ax^2 + bx + c$ можна подати у вигляді:

$$f(x) = a\,(x - x_0)^2 + y_0.$$

Дослідимо функцію f на зростання і спадання.

Нехай x_1 і x_2, де $x_2 > x_1$, — довільні значення аргументу функції f із проміжку $(-\infty;\ x_0]$.

Маємо: $x_0 \geqslant x_2 > x_1$. Розглянемо різницю $f(x_2) - f(x_1) = a\,(x_2 - x_0)^2 + y_0 - a\,(x_1 - x_0)^2 - y_0 = a\,(x_2 - x_1)\,((x_2 - x_0) + (x_1 - x_0))$.

Оскільки $x_2 - x_1 > 0$, $x_1 - x_0 < 0$ і $x_2 - x_0 \leqslant 0$, то значення виразу $(x_2 - x_1)\,((x_2 - x_0) + (x_1 - x_0))$ — від'ємне число. Таким чином, знак розглядуваної різниці залежить тільки від знака параметра a:

- якщо $a < 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$, а отже, функція f зростає на проміжку $(-\infty;\ x_0]$;
- якщо $a > 0$, то $f(x_2) < f(x_1)$, тобто функція f спадає на проміжку $(-\infty;\ x_0]$.

Аналогічно можна дослідити на зростання і спадання функцію f на проміжку $[x_0;\ +\infty)$ і отримати такий результат:

- якщо $a < 0$, то функція f спадає на проміжку $[x_0;\ +\infty)$;
- якщо $a > 0$, то функція f зростає на проміжку $[x_0;\ +\infty)$.

Тепер можна зробити такі висновки.

Якщо $a > 0$, то $f(x_0) \leqslant f(x)$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$. Отже, при $a > 0$ маємо: $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(x_0) = -\frac{D}{4a}$.

Якщо $a < 0$, то $f(x_0) \geqslant f(x)$ для будь-якого $x \in \mathbb{R}$. Отже, при $a < 0$ маємо: $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(x_0) = -\frac{D}{4a}$.

Розглянемо ще деякі властивості квадратичної функції $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Якщо $D > 0$, то функція f має два нулі; якщо $D = 0$, то функція f має один нуль; якщо $D < 0$, то функція f нулів не має.

Якщо $a > 0$, то функція f не набуває найбільшого значення; якщо $a < 0$ — не набуває найменшого значення.

Якщо $a > 0$, то $E(f) = \left[-\frac{D}{4a};\ +\infty\right)$; якщо $a < 0$, то $E(f) = \left(-\infty;\ -\frac{D}{4a}\right]$.

Якщо $b = 0$, то функція f є парною; якщо $b \neq 0$, то функція f не є ні парною, ні непарною.

У таблиці наведено властивості квадратичної функції $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Властивість	$a > 0$	$a < 0$
$D\ (y)$	$(-\infty;\ +\infty)$	
$E\ (y)$	$\left[-\dfrac{D}{4a};\ +\infty\right)$	$\left(-\infty;\ -\dfrac{D}{4a}\right]$
Зростає на проміжку	$\left[-\dfrac{b}{2a};\ +\infty\right)$	$\left(-\infty;\ -\dfrac{b}{2a}\right]$
Спадає на проміжку	$\left(-\infty;\ -\dfrac{b}{2a}\right]$	$\left[-\dfrac{b}{2a};\ +\infty\right)$
Найбільше значення функції на $D(f)$	Не існує	$-\dfrac{D}{4a}$
Найменше значення функції на $D(f)$	$-\dfrac{D}{4a}$	Не існує
Нулі функції	Якщо $D > 0$, то $\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ і $\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; якщо $D = 0$, то $-\dfrac{b}{2a}$; якщо $D < 0$, то нулів немає	
Парність	Якщо $b = 0$, то парна; якщо $b \neq 0$, то не є ні парною, ні непарною	
Графік	Парабола, абсциса вершини якої $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	

Покажемо, як графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ можна отримати з графіка функції $y = ax^2$.

Ви вже будували графік квадратичної функції, виділяючи квадрат двочлена (див. приклад 3 п. 6). Використовуючи цю ідею, запишемо: $y = a\ (x - x_0)^2 + y_0$, де $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = \dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

Тоді схема побудови шуканого графіка має такий вигляд:

$$y = ax^2 \xrightarrow[\text{на } |x_0| \text{ од.}]{\text{управо або вліво}} y = a\ (x - x_0)^2 \xrightarrow[\text{на } |y_0| \text{ од.}]{\text{угору або вниз}} y = a\ (x - x_0)^2 + y_0$$

На рисунку 8.1 показано побудову для випадку, коли $a > 0$, $x_0 > 0$, $y_0 < 0$. На рисунку 8.2 показано побудову для випадку, коли $a < 0$, $x_0 < 0$, $y_0 > 0$.

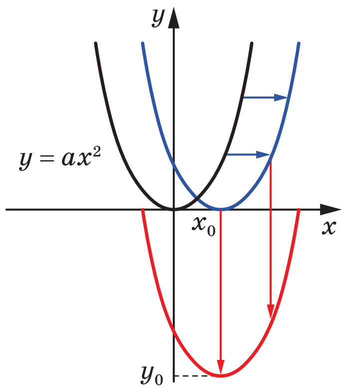


Рис. 8.1

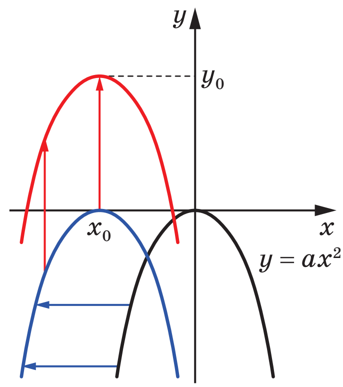


Рис. 8.2

Графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ є фігура, яка дорівнює параболі $y = ax^2$, тобто графіком функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола з вершиною в точці $(x_0; y_0)$, де $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Вітки параболи $y = ax^2 + bx + c$ напрямлені так само, як і вітки параболи $y = ax^2$: якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз.

Загальне уявлення про графік квадратичної функції дають координати вершини параболи та напрям її віток. Це уявлення буде тим повнішим, чим більше точок, які належать графіку, ми знатимемо. Тому графік квадратичної функції можна будувати, не використовуючи паралельних перенесень:

1) *знайти абсцису вершини параболи за формулою* $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

2) *знайти ординату вершини параболи за формулою*[1] $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$, *де* D *— дискримінант квадратного тричлена* $ax^2 + bx + c$, *і позначити на координатній площині вершину параболи*;

3) *визначити напрям віток параболи*;

[1] Формулу $y_0 = -\frac{D}{4a}$ запам'ятовувати необов'язково. Достатньо обчислити значення функції $y = ax^2 + bx + c$ у точці $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

4) *знайти координати ще кількох точок, які належать шуканому графіку, зокрема координати точок перетину параболи з віссю абсцис (якщо дана функція має нулі), координати точки перетину параболи з віссю ординат; позначити ці точки на координатній площині*;

5) *провести через усі позначені точки плавну неперервну лінію*.

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік функції $f(x) = x^2 + 4x - 5$. Користуючись графіком, знайдіть проміжки знакосталості функції.

Розв'язання. Графіком даної функції є парабола, вітки якої напрямлені вгору.

Знайдемо абсцису й ординату вершини параболи. Маємо:

$$x_0 = -\frac{4}{2} = -2,\ \ y_0 = f(x_0) = f(-2) = -9.$$

Точка $(-2; -9)$ — вершина параболи.

Знайдемо координати точок перетину параболи з віссю абсцис. Для цього розв'яжемо рівняння:

$$x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Звідси $x_1 = -5$, $x_2 = 1$.

Отже, парабола перетинає вісь абсцис у точках $(-5; 0)$ і $(1; 0)$.

Знайдемо координати точки перетину параболи з віссю ординат. Маємо: $f(0) = -5$. Парабола перетинає вісь ординат у точці $(0; -5)$.

Позначимо знайдені чотири точки параболи на координатній площині (рис. 8.3).

Тепер бачимо, що доцільно знайти значення даної функції в точках -1, -3, -4 та позначити відповідні точки на координатній площині.

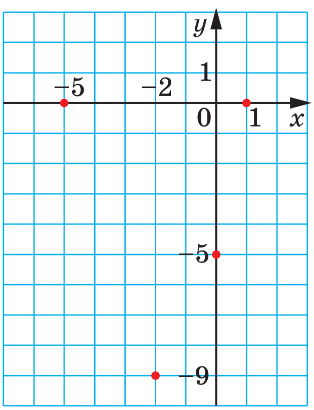


Рис. 8.3

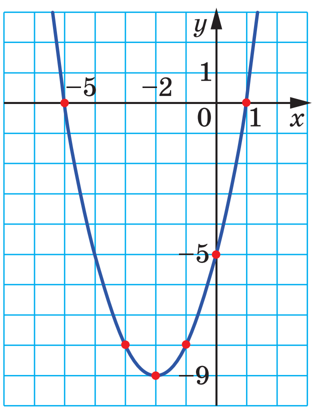


Рис. 8.4

Маємо: $f(-3) = f(-1) = -8$; $f(-4) = f(0) = -5$.

Сполучимо всі позначені точки плавною неперервною лінією.

Шуканий графік зображено на рисунку 8.4.

Маємо: $f(x) > 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; -5)$ і $(1; +\infty)$; $f(x) < 0$ на проміжку $(-5; 1)$. ◄

ПРИКЛАД 2 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $y = \frac{4x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{12x}{x^2+1} + 2$ на її області визначення.

Розв'язання. Дана функція визначена на множині $\mathbb{R}$. Нехай $\frac{2x}{x^2+1} = t$. У прикладі 2 п. 2 було встановлено, що змінна t набуває всіх значень із проміжку $[-1; 1]$.

Задачу зведено до знаходження найбільшого і найменшого значень функції $f(t) = t^2 - 6t + 2$ на проміжку $[-1; 1]$.

Функція f спадає на проміжку $(-\infty; 3]$. Оскільки $[-1; 1] \subset (-\infty; 3]$, то функція f спадає на проміжку $[-1; 1]$. Звідси $\max\limits_{[-1;\,1]} f(t) = f(-1) = 9$, $\min\limits_{[-1;\,1]} f(t) = f(1) = -3$.

Цю задачу також можна розв'язати графічно. Для цього треба побудувати графік функції $f(t) = t^2 - 6t + 2$, $D(f) = [-1; 1]$ (на рисунку 8.5 це червона крива). Ординати точок A і B будуть відповідно найбільшим і найменшим значеннями функції f на $D(f) = [-1; 1]$.

Відповідь: 9; −3. ◄

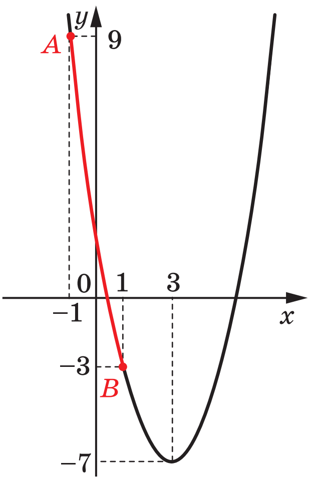


Рис. 8.5

ПРИКЛАД 3 Знайдіть усі значення параметра a, при яких найменше значення функції $f(x) = x^2 + 2x - 1 + |x - a|$ на $D(f)$ більше за 2.

Розв'язання. Маємо: $D(f) = \mathbb{R}$. Якщо $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) > 2$, то для будь-якого $x \in \mathbb{R}$ виконується нерівність:

$$x^2 + 2x - 1 + |x - a| > 2. \qquad (*)$$

Отже, задача зводиться до того, щоб знайти всі значення параметра a, при яких нерівність (*) виконується при всіх $x \in \mathbb{R}$.

Маємо: $|x - a| > -x^2 - 2x + 3$.

Розглянемо функції $g(x) = |x - a|$ і $h(x) = -x^2 - 2x + 3$.

Достатньо знайти ті значення параметра a, при яких усі точки графіка функції g (кута, вершина якого належить осі абсцис) розташовані вище за відповідні точки графіка функції h (параболи з вершиною в точці (−1; 4), вітки якої напрямлені вниз).

На рисунку 8.6 показано два положення графіка функції g, при яких графіки функцій h і g мають одну спільну точку. Якщо вершина кута розташована на осі абсцис ліворуч від точки A або праворуч від точки B, то отримуємо шукане взаємне розташування графіків функцій g і h.

Якщо вершина кута збігається з точкою A, то пряма $y = x - a$ має з параболою $y = -x^2 - 2x + 3$ одну спільну точку. Цьому випадку відповідають ті значення параметра a, при яких рівняння $-x^2 - 2x + 3 = x - a$ має єдиний розв'язок.

Отримуємо: $-x^2 - 3x + 3 + a = 0$; $D = 9 + 12 + 4a = 0$. Звідси $a = -\frac{21}{4}$.

Якщо вершина кута збігається з точкою B, то пряма $y = a - x$ має з параболою $y = -x^2 - 2x + 3$ одну спільну точку. Значення параметра a, що відповідає цьому випадку, дорівнює $\frac{13}{4}$ (переконайтеся в цьому самостійно).

Відповідь: $a < -\frac{21}{4}$ або $a > \frac{13}{4}$. ◄

ПРИКЛАД 4 При яких значеннях параметра a рівняння $(a + 4x - x^2 - 3)(a - 1 - |x - 2|) = 0$ має три корені?

Розв'язання. Розглянемо координатну площину xa, тобто координатну площину, кожна точка якої має координати виду $(x; a)$.

Розглядаючи дане рівняння як рівняння з двома змінними x і a, побудуємо його графік на координатній площині xa.

Переходимо до рівносильної сукупності:

$$\left[\begin{array}{l} a = x^2 - 4x + 3, \\ a = |x - 2| + 1. \end{array}\right.$$

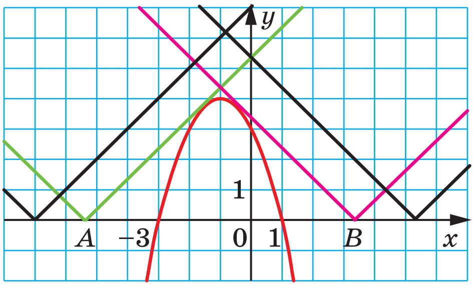


Рис. 8.6

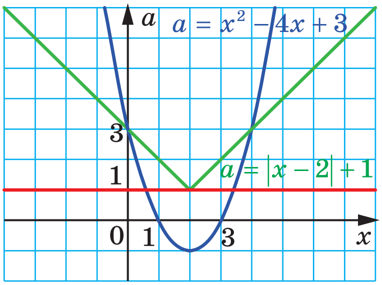


Рис. 8.7

Графіком першого рівняння сукупності є парабола, другого — кут із вершиною в точці (2; 1). Отже, графіком заданого рівняння є об'єднання цих фігур (на рисунку 8.7 графік зображено синім кольором).

Кількість точок перетину із цим графіком горизонтальної прямої $a = a_1$ відповідає кількості коренів даного рівняння при значенні параметра a, який дорівнює a_1.

З рисунка 8.7 видно, що тільки пряма $a = 1$ перетинає графік рівняння в трьох точках.

Відповідь: $a = 1$. ◄

?

1. Яку функцію називають квадратичною?
2. Яка фігура є графіком квадратичної функції?
3. За якою формулою можна знайти абсцису вершини параболи $y = ax^2 + bx + c$?
4. Який напрям мають вітки параболи $y = ax^2 + bx + c$ залежно від значення параметра a?
5. Опишіть схему побудови графіка квадратичної функції.

ВПРАВИ

8.1.° Визначте напрям віток і координати вершини параболи:

1) $y = x^2 - 12x + 3$;
2) $y = -x^2 + 4x - 6$;
3) $y = 0{,}3x^2 + 2{,}4x - 5$;
4) $y = -5x^2 + 10x + 2$.

8.2.° Знайдіть область значень і проміжки зростання та спадання функції:

1) $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$;
2) $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x - 6$;
3) $f(x) = 4 - 12x - 0{,}3x^2$;
4) $f(x) = 7x^2 + 21x$.

8.3.° Знайдіть область значень і проміжки зростання та спадання функції:

1) $f(x) = 2x^2 - 12x + 8$;
2) $f(x) = 9 + 8x - 0{,}2x^2$.

8.4.° Побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 - 4x - 5$;
2) $y = -x^2 + 2x + 3$;
3) $y = 6x - x^2$;
4) $y = 2x^2 - 8x + 8$;
5) $y = x^2 - 2x + 4$;
6) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$;
7) $y = x^2 - 6x + 5$;
8) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

8.5.° Побудуйте графік функції:

1) $y = x^2 + 2x - 8$;
2) $y = x^2 - 2x$;
3) $y = -x^2 + 4x - 5$;
4) $y = 2x^2 - 2x - 4$.

8.6.° Побудуйте графік функції $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Користуючись графіком, знайдіть, при яких значеннях аргументу функція набуває додатних значень, а при яких — від'ємних.

8.7.° Побудуйте графік функції $f(x) = -x^2 - 6x - 5$. Користуючись графіком, знайдіть множину розв'язків нерівності $f(x) > 0$.

8.8.° Побудуйте графік функції $f(x) = x - 0{,}5x^2$. Користуючись графіком, знайдіть, при яких значеннях x виконується нерівність $f(x) \leqslant 0$.

8.9.° Побудуйте графік функції $f(x) = 3x^2 - 6x$. Користуючись графіком, знайдіть, при яких значеннях x виконується нерівність $f(x) \geqslant 0$.

8.10.° Розв'яжіть графічно рівняння $x^2 - 3x - 1 = -\frac{3}{x}$.

8.11.° Розв'яжіть графічно рівняння $-\frac{1}{4}x^2 + x + 2 = \sqrt{x}$.

8.12.° Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ та визначте кількість коренів рівняння $f(x) = g(x)$:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 7$; $g(x) = -\sqrt{x}$;

2) $f(x) = 4x - 2x^2$; $g(x) = -\frac{4}{x}$.

8.13.° Побудувавши в одній системі координат графіки функцій $y = x^2 + 4x + 1$ і $y = \frac{6}{x}$, визначте кількість коренів рівняння $x^2 + 4x + 1 = \frac{6}{x}$.

8.14.° Знайдіть координати точки параболи $y = -x^2 + 9x + 9$, у якої:

1) абсциса й ордината рівні;
2) сума абсциси й ординати дорівнює 25.

8.15.° Знайдіть координати точки параболи $y = 2x^2 - 3x + 6$, у якої ордината на 12 більша за абсцису.

8.16.° Побудуйте графік даної функції, укажіть її область значень і проміжки зростання та спадання:

$$y = \begin{cases} 3 - x, & \text{якщо } x \leqslant -2, \\ x^2 - 2x - 3, & \text{якщо } -2 < x < 2, \\ -3, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$$

8.17.° Побудуйте графік даної функції, укажіть її область значень і проміжки зростання та спадання:

$$y = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leqslant 0, \\ 4x - x^2, & \text{якщо } 0 < x < 5, \\ x - 10, & \text{якщо } x \geqslant 5. \end{cases}$$

8.18.° Знайдіть найменше значення функції $y = 3x^2 - 18x + 2$ на проміжку:

1) $[-1; 4]$; 2) $[-4; 1]$; 3) $[4; 5]$.

8.19.° Знайдіть найбільше значення функції $y = -x^2 - 8x + 10$ на проміжку:

1) $[-5; -3]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $[-11; -10]$.

8.20.° При яких значеннях параметрів p і q графік функції $y = x^2 + px + q$ проходить через точки $M\ (-1; 4)$ і $K\ (2; 10)$?

8.21.° При яких значеннях параметрів a і b нулями функції $y = ax^2 + bx + 7$ є числа -2 і 3?

8.22.° При яких значеннях параметрів a і b парабола $y = ax^2 + bx - 4$ проходить через точки $C\ (-3; 8)$ і $D\ (1; 4)$?

8.23.• Нехай D — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$. Зобразіть схематично графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо:

1) $a > 0,\ D > 0,\ c > 0,\ -\dfrac{b}{2a} > 0$;

2) $a > 0,\ D = 0,\ -\dfrac{b}{2a} < 0$;

3) $a < 0,\ D < 0,\ -\dfrac{b}{2a} > 0$;

4) $a < 0,\ c = 0,\ -\dfrac{b}{2a} < 0$.

8.24.• Нехай D — дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$. Зобразіть схематично графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$, якщо:

1) $a > 0,\ D < 0,\ -\dfrac{b}{2a} < 0$;

2) $a < 0,\ D > 0,\ c < 0,\ -\dfrac{b}{2a} > 0$;

3) $a < 0,\ D = 0,\ -\dfrac{b}{2a} < 0$.

8.25.• Знайдіть усі значення параметра a, при яких вершина параболи $y = -x^2 + 6x - a$ належить осі абсцис.

8.26.• При якому значенні параметра b проміжок $(-\infty; 2]$ є проміжком зростання функції $y = -4x^2 - bx + 5$?

8.27.• При якому значенні параметра b проміжок $(-\infty; -3]$ є проміжком спадання функції $y = 3x^2 + bx - 8$?

8.28.• При яких значеннях параметра a функція $y = 2x^2 - 4ax + 3$ зростає на проміжку $[-1; 4]$?

8.29.° При яких значеннях параметра a функція $y = -x^2 - 2ax + 1$ спадає на проміжку $[-3; -2]$?

8.30.° При яких значеннях параметра a графік функції $y = ax^2 + (a-2)x + \frac{1}{4}$ має з віссю абсцис одну спільну точку?

8.31.° При яких значеннях параметра c найбільше значення функції $y = -5x^2 + 10x + c$ дорівнює -3?

8.32.° При яких значеннях параметра c найменше значення функції $y = 0{,}6x^2 - 6x + c$ дорівнює -1?

8.33.° При яких значеннях параметра c вершина параболи $y = x^2 - 8x + c$ розміщена вище від прямої $y = -2$?

8.34.° При яких значеннях параметра a пряма $y = x - 1$ має з параболою $y = x^2 - 2ax + 3$ одну спільну точку?

8.35.° При яких значеннях параметра a пряма $y = -x + 4$ має з параболою $y = x^2 - 3x - a$ одну спільну точку?

8.36.° На рисунку 8.8 зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначте знаки коефіцієнтів a, b і c.

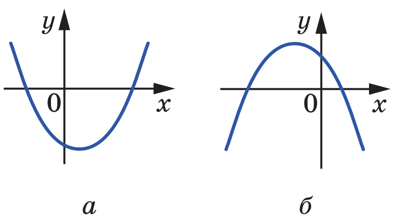


Рис. 8.8

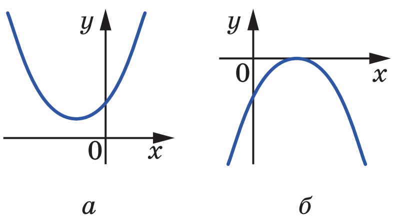


Рис. 8.9

8.37.° На рисунку 8.9 зображено графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$. Визначте знаки коефіцієнтів a, b і c.

8.38.° Чи можуть графіки квадратичних функцій $y = ax^2 + bx + c$ і $y = cx^2 + bx + a$ бути розміщені так, як показано на рисунку 8.10?

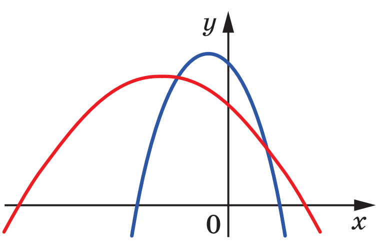


Рис. 8.10

8.39.• Графік квадратичної функції $f(x) = ax^2 + bx + c$, де $a + b + c > 0$, не має спільних точок з віссю абсцис. Визначте знак параметра c.

8.40.• Про квадратичну функцію f відомо, що $f(-3) = f(7)$. Знайдіть усі значення x, при яких $f(x) = f(3)$.

8.41.• При яких значеннях параметра a вершина параболи $y = x^2 - 4ax + 5a^2 - 3$ рівновіддалена від осей координат?

8.42.• При яких значеннях параметра a вершина параболи $y = x^2 - 6ax + 4 + 8a^2$ знаходиться у другій координатній чверті?

8.43.• При яких значеннях коефіцієнтів p і q вершиною параболи $y = x^2 + px + q$ є точка A (2; 5)?

8.44.• Вершина параболи $y = ax^2 + bx + c$ знаходиться в точці C (4; −10), парабола проходить через точку D (1; −1). Знайдіть значення коефіцієнтів a, b і c.

8.45.• Знайдіть ординату вершини параболи, фрагмент якої зображено на рисунку 8.11.

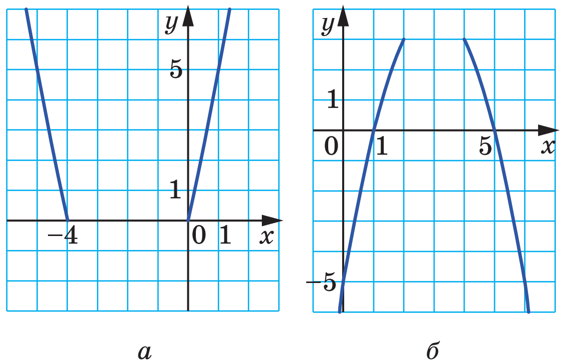


Рис. 8.11

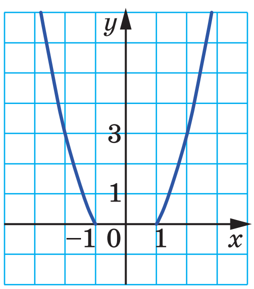


Рис. 8.12

8.46.• Знайдіть ординату вершини параболи, фрагмент якої зображено на рисунку 8.12.

8.47.• Побудуйте графік функції:
1) $y = |x^2 - x - 2|$; 2) $y = |2x^2 - 3x - 2|$.

8.48.• Побудуйте графік функції:
1) $y = |x^2 + 4x + 3|$; 2) $y = |3x^2 + 2x - 1|$.

8.49.• Побудуйте графік функції:
1) $y = |x^2 - 2|x||$; 2) $y = |x^2 - 2|x| - 3|$.

8.50.• Побудуйте графік функції:
1) $y = |x^2 - 3|x||$; 2) $y = |x^2 - 4|x| + 3|$.

8.51.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{8x + 2x^2 - x^3}{x}$;
3) $y = \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$;
2) $y = \frac{x^3 - 8}{x - 2} - 3$;
4) $y = \frac{x^4 + 4x^2 - 5}{x^2 - 1}$.

8.52.• Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{(x+3)^3}{x+3}$; 2) $y = \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x}$; 3) $y = \frac{x^4 - 1}{1 - x^2}$.

8.53.• Побудуйте графік функції:

1) $y = x\,|\,x\,|$;
4) $y = \frac{x}{|\,x\,|}(x^2 - x - 6)$;
2) $y = x^2 - 4\,|\,x\,| + 3$;
5) $y = x^2 + 3x\frac{|\,x - 3\,|}{x - 3} - 4$.
3) $y = x^2 - 4\,|\,x - 1\,| - 1$;

8.54.• Побудуйте графік функції:

1) $y = 6\,|\,x\,| - x^2$; 2) $y = x^2 + 3\,|\,x - 1\,| - 1$; 3) $y = \frac{x^3}{|\,x\,|} + 4x$.

8.55.• Установіть, скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра a:

1) $|\,x^2 - 4\,|\,x\,| + 3\,| = a$; 2) $x^2 + 3\,|\,x - 1\,| - 1 = a$.

8.56.• Установіть, скільки коренів має рівняння залежно від значення параметра a:

1) $|\,x^2 - 2\,|\,x\,| - 3\,| = a$; 2) $x^2 - 4\,|\,x - 1\,| - 1 = a$.

8.57.•• Про квадратичну функцію f відомо, що існує рівно три значення аргументу, при яких модуль значення функції дорівнює 2. Скільки коренів має рівняння $f(x) = 1{,}1$?

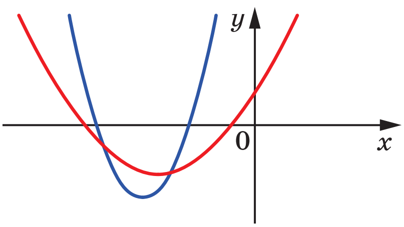


Рис. 8.13

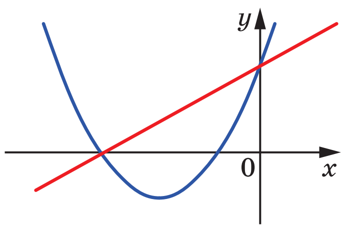


Рис. 8.14

8.58.•• Чи можуть графіки квадратичних функцій $y = ax^2 + bx + c$ і $y = bx^2 + cx + a$ бути розміщені так, як показано на рисунку 8.13?

8.59.•• Чи можуть графіки квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ і лінійної функції $y = cx + a$ бути розміщені так, як показано на рисунку 8.14?

8.60.•• Відомо, що $2p - q = 4$. Доведіть, що всі параболи виду $y = x^2 + px + q$ проходять через одну точку.

8.61.•• Функція $f(x) = x^2 + px + q$ набуває тільки невід'ємних значень. Знайдіть найменше значення виразу $p + q$.

8.62.•• Параметр a набуває всіх дійсних значень. Доведіть, що вершини парабол $f(x) = -x^2 + 2ax - a^2 + a + 1$ утворюють пряму.

8.63.•• Параметр a набуває всіх дійсних значень. Доведіть, що вершини парабол $f(x) = x^2 - 2ax + 2a^2 + 1$ утворюють параболу.

8.64.•• Дано функцію $f(t) = t^2 - 2t$. Побудуйте графік функції g, якщо $g(x) = \min\limits_{[x-1;\ x]} f(t)$.

8.65.•• Дано функцію $f(t) = -t^2 - 2t$. Побудуйте графік функції g, якщо $g(x) = \max\limits_{[x;\ x+1]} f(t)$.

8.66.•• Знайдіть найменше значення функції $y = (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) + 2$ на її області визначення.

8.67.•• При яких значеннях параметра a рівняння $|x^2 - 4x + 3| + x - a = 0$ має три корені?

8.68.•• При яких значеннях параметра a найменше значення функції $y = x^2 - 4x + 3 + |x - a|$ на її області визначення менше від 2?

8.69.•• При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 2ax + a^2 - a + 1 = 0$ буде найменшою?

8.70.•• При яких значеннях параметра a добуток коренів рівняння $x^2 - 2ax + a^2 - 2a + 4 = 0$ буде найменшим?

8.71.* Визначте кількість коренів рівняння $x^4 + 2ax^2 - x + a^2 + a = 0$ залежно від значення параметра a.

8.72.* На координатній площині xy укажіть усі точки, через які не проходить жодна з парабол виду $y = x^2 - 4ax + 2a^2 - 3$.

8.73.* Функція $f(x) = x^2 + bx + c$ має два нулі, один з яких належить проміжку $(0; 1)$, а другий не належить цьому проміжку. Доведіть, що $f(c) \leqslant 0$.

8.74.* Розглядаються всі параболи виду $y = x^2 + px + q$, $q > 0$, які перетинають осі координат у трьох точках. Для кожної параболи через зазначені три точки проводять коло. Доведіть, що всі ці кола мають спільну точку.

8.75.* Розглядаються всі параболи виду $y = x^2 + px + q$, $q < 0$, які перетинають осі координат у трьох точках. Для кожної параболи через зазначені три точки проводять коло. Доведіть, що всі ці кола мають спільну точку.

8.76.* Доведіть, що при всіх $a \in [0; 1]$, $b \in [0; 1]$, $c \in [0; 1]$ виконується нерівність $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant a^2b + b^2c + c^2a + 1$.

8.77.* Доведіть, що при всіх $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$ виконується нерівність $3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) - 2xyz(x + y + z) \leqslant 3$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

8.78. Розв'яжіть нерівність $|x^2 - 9|(x + 2) < 0$.

8.79. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 + x - 2} = 0$.

8.80. Спростіть вираз $\dfrac{\sqrt{x + 3 + 2\sqrt{x + 2}} - 1}{\sqrt{x + 2}}$.

8.81. Розв'яжіть рівняння $\dfrac{x^2 - 3x - 6}{x} - \dfrac{8x}{x^2 - 3x - 6} = -2$.

9. Розв'язування квадратних нерівностей

На рисунку 9.1 зображено графік деякої функції $y = f(x)$, областю визначення якої є множина дійсних чисел.

За допомогою цього графіка легко визначити проміжки знакосталості функції f, а саме: $y > 0$ на кожному з проміжків $(-5; -2)$ і $(1; +\infty)$; $y < 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; -5)$ і $(-2; 1)$.

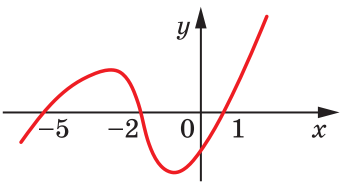


Рис. 9.1

Знайшовши проміжки знакосталості функції f, ми тим самим розв'язали нерівності $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$.

Множиною розв'язків нерівності $f(x) > 0$ є множина $(-5; -2) \cup (1; +\infty)$.

Множиною розв'язків нерівності $f(x) < 0$ є множина $(-\infty; -5) \cup (-2; 1)$.

Такий метод розв'язування нерівностей $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$ за допомогою графіка функції $y = f(x)$ називають **графічним**.

Покажемо, як за допомогою цього методу розв'язують квадратні нерівності.

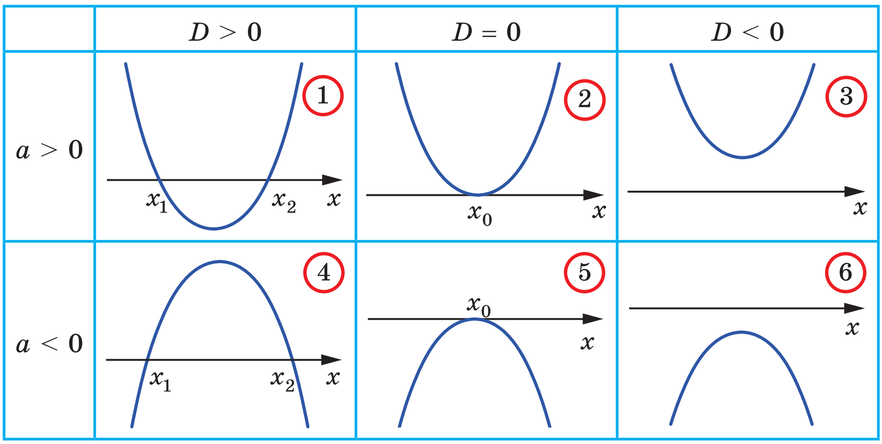
Означення. **Нерівності виду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, де x — змінна, a, b і c — параметри, причому $a \neq 0$, називають квадратними.**

З'ясуємо, як визначити положення графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис.

Нагадаємо, що знак дискримінанта D квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ визначає кількість нулів квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$: якщо $D > 0$, то нулів у функції два; якщо $D = 0$, то функція має один нуль; якщо $D < 0$, то нулів немає.

Знак старшого коефіцієнта квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ визначає напрям віток параболи $y = ax^2 + bx + c$. При $a > 0$ вітки параболи напрямлені вгору, при $a < 0$ — униз.

Схематичне розміщення параболи $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис залежно від знаків параметрів a і D наведено в таблиці (x_1 і x_2 — нулі функції, x_0 — абсциса вершини параболи).



Пояснимо, як використовувати цю таблицю для розв'язування квадратних нерівностей.

Нехай, наприклад, потрібно розв'язати нерівність $ax^2 + bx + c > 0$, де $a < 0$ і $D > 0$. Цим умовам відповідає клітинка 4 таблиці. Відповіддю буде проміжок $(x_1; x_2)$, на якому графік квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ розміщено над віссю абсцис.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $2x^2 - x - 1 > 0$.

Розв'язання. Для квадратного тричлена $2x^2 - x - 1$ маємо: $a = 2 > 0$, $D = 9 > 0$. Цим умовам відповідає клітинка 1 таблиці.

Розв'яжемо рівняння $2x^2 - x - 1 = 0$. Отримуємо: $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Ці числа є нулями функції $y = 2x^2 - x - 1$. Тоді схематично графік функції $y = 2x^2 - x - 1$ можна зобразити так, як показано на рисунку 9.2.

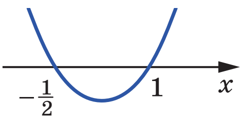


Рис. 9.2

Із рисунка 9.2 видно, що відповідна квадратична функція набуває додатних значень на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ і $(1; +\infty)$.

Відповідь: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $-9x^2 + 6x - 1 < 0$.

Розв'язання. Маємо: $a = -9$, $D = 0$. Цим умовам відповідає клітинка 5 таблиці. Установлюємо, що $x_0 = \frac{1}{3}$. Тоді схематично графік функції $y = -9x^2 + 6x - 1$ можна зобразити так, як показано на рисунку 9.3.

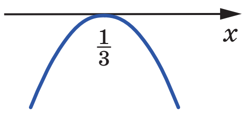


Рис. 9.3

Із рисунка 9.3 видно, що розв'язками нерівності є всі числа, крім $\frac{1}{3}$.

Зауважимо, що цю нерівність можна розв'язати в інший спосіб. Запишемо нерівність, рівносильну даній: $9x^2 - 6x + 1 > 0$. Тоді $(3x - 1)^2 > 0$. Звідси отримуємо той самий результат.

Відповідь: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $3x^2 - x + 1 < 0$.

Розв'язання. Маємо: $a = 3$, $D = -11$. Цим умовам відповідає клітинка 3 таблиці. У цьому випадку графік функції $y = 3x^2 - x + 1$ не має точок з від'ємними ординатами.

Відповідь: розв'язків немає. ◄

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $0{,}2x^2 + 2x + 5 \leqslant 0$.

Розв'язання. Маємо: $a = 0{,}2$, $D = 0$. Цим умовам відповідає клітинка 2 таблиці. У цьому випадку квадратична функція набуває тільки невід'ємних значень. Отже, дана нерівність має єдиний розв'язок x_0. Установлюємо, що $x_0 = -5$.

Відповідь: $\{-5\}$. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $2|x-2| \leqslant 2x^2 - 5x - 1$.

Розв'язання. Задана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} 2x - 4 \leqslant 2x^2 - 5x - 1, \\ 2x - 4 \geqslant -2x^2 + 5x + 1. \end{cases} \text{ Звідси } \begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 \geqslant 0, \\ 2x^2 - 3x - 5 \geqslant 0. \end{cases}$$

За допомогою рисунка 9.4 встановлюємо, що множиною розв'язків першої нерівності системи є множина $M_1 = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup [3; +\infty)$.

Множиною розв'язків другої нерівності системи (рис. 9.5) є множина $M_2 = (-\infty; -1] \cup \left[\frac{5}{2}; +\infty\right)$.

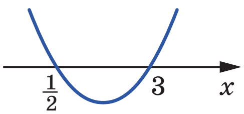


Рис. 9.4

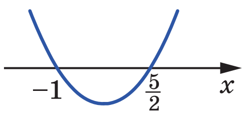


Рис. 9.5

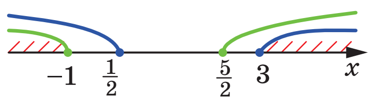


Рис. 9.6

Множиною розв'язків системи є множина $M_1 \cap M_2$. Її знайдемо за допомогою рисунка 9.6.

Відповідь: $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. ◀

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $x|2x - 3| < 2$.

Розв'язання. Задана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 3 < 0, \\ x(3 - 2x) < 2, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 3 \geqslant 0, \\ x(2x - 3) < 2. \end{cases} \end{array}\right. \text{ Звідси } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < \frac{3}{2}, \\ 2x^2 - 3x + 2 > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant \frac{3}{2}, \\ 2x^2 - 3x - 2 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < \frac{3}{2}, \\ x \in \mathbb{R}, \end{cases} \\ \begin{cases} x \geqslant \frac{3}{2}, \\ -\frac{1}{2} < x < 2; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x < \frac{3}{2}, \\ \frac{3}{2} \leqslant x < 2; \end{array}\right. \quad x < 2.$$

Відповідь: $(-\infty; 2)$. ◀

ПРИКЛАД 7 При яких значеннях параметра a нерівність $(a-1)x^2 + 4ax - 2a - 4 \geqslant 0$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання. Якщо $a = 1$, то дана нерівність набуває вигляду $4x - 6 \geqslant 0$ і має безліч розв'язків. Отже, $a = 1$ не підходить.

Для випадку, коли $a \neq 1$, розглянемо квадратичну функцію $y = (a-1)x^2 + 4ax - 2a - 4$.

Якщо $a - 1 > 0$, то цій умові відповідають клітинки 1–3 таблиці. Тоді множина значень аргументу, при яких квадратична функція набуває невід'ємних значень, є нескінченною.

Залишилося розглянути випадок, коли $a - 1 < 0$. Тоді вимозі задачі відповідає клітинка 5 таблиці. Отже, шуканими значеннями параметра a є розв'язки системи $\begin{cases} a - 1 < 0, \\ D = 0. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} a - 1 < 0, \\ 24a^2 + 8a - 16 = 0. \end{cases}$ Розв'язавши цю систему, отримаємо: $a = -1$ або $a = \frac{2}{3}$.

Відповідь: $a = -1$ або $a = \frac{2}{3}$. ◄

ПРИКЛАД 8 Про числа a, b і c відомо, що $c(a + b + c) < 0$. Доведіть, що $b^2 > 4ac$.

Розв'язання. Якщо $a = b = 0$, то з умови випливає, що $c^2 < 0$. Отже, числа a і b не можуть дорівнювати нулю одночасно.

Нехай $a = 0$. Тоді $b \neq 0$, і нерівність $b^2 > 4ac$ стає очевидною.

Нехай $a \neq 0$. Тоді розглянемо квадратичну функцію $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Маємо: $f(0) = c$, $f(1) = a + b + c$.

З умови випливає, що $f(0)\,f(1) < 0$, тобто квадратична функція f у точках $x = 0$ і $x = 1$ набуває значень різних знаків. Тоді її графіку відповідає клітинка 1 або клітинка 4 таблиці. Отже, функція f має два нулі. Тому дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ є додатним, тобто $b^2 > 4ac$.

Цю задачу можна розв'язати інакше.

Розглянемо квадратичну функцію $f(x) = x^2 + bx + ac$. Маємо: $f(c) = c^2 + bc + ac = c(a + b + c)$. Отже, $f(c) < 0$. Вітки параболи $f(x) = x^2 + bx + ac$ напрямлені вгору, і існує значення аргументу, при якому функція f набуває від'ємного значення. Тоді графіку цієї функції відповідає клітинка 1 таблиці. ◄

?

1. Які нерівності називають квадратними?
2. Які можливі випадки розміщення параболи $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис залежно від знаків a і D, де D – дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$? Зобразіть схематично ці випадки.

ВПРАВИ

9.1.° На рисунку 9.7 зображено графік функції $y = x^2 + 4x - 5$. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 + 4x - 5 < 0$;
2) $x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$;
3) $x^2 + 4x - 5 > 0$;
4) $x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$.

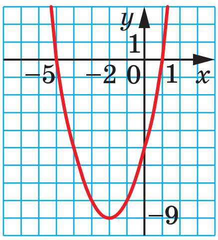


Рис. 9.7

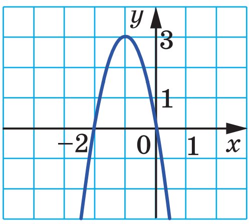


Рис. 9.8

9.2.° На рисунку 9.8 зображено графік функції $y = -3x^2 - 6x$. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $-3x^2 - 6x < 0$;
2) $-3x^2 - 6x \leqslant 0$;
3) $-3x^2 - 6x > 0$;
4) $-3x^2 - 6x \geqslant 0$.

9.3.° На рисунку 9.9 зображено графік функції $y = x^2 - 4x + 4$. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 - 4x + 4 < 0$;
2) $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$;
3) $x^2 - 4x + 4 > 0$;
4) $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$.

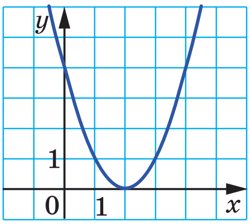


Рис. 9.9

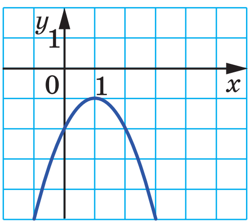


Рис. 9.10

9.4.° На рисунку 9.10 зображено графік функції $y = -x^2 + 2x - 2$. Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $-x^2 + 2x - 2 < 0$;
2) $-x^2 + 2x - 2 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 2x - 2 > 0$;
4) $-x^2 + 2x - 2 \geqslant 0$.

9.5.° Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 + 6x - 7 < 0$;
2) $x^2 - 2x - 48 \geqslant 0$;
3) $-x^2 - 6x - 5 > 0$;
4) $-x^2 + 4x - 3 < 0$;
5) $3x^2 - 7x + 4 \leqslant 0$;
6) $2x^2 + 3x + 1 > 0$;
7) $4x^2 - 12x \leqslant 0$;
8) $4x^2 - 9 > 0$;
9) $x^2 - 12x + 36 > 0$;
10) $4x^2 - 12x + 9 \geqslant 0$;
11) $x^2 + 4x + 4 < 0$;
12) $49x^2 - 14x + 1 \leqslant 0$;
13) $2x^2 - x + 3 > 0$;
14) $3x^2 - 4x + 5 \leqslant 0$;
15) $-4x^2 + 5x - 7 > 0$;
16) $-2x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$.

9.6.° Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2 + 4x + 3 > 0$;
2) $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 12x + 45 < 0$;
4) $-3x^2 - 5x - 2 \geqslant 0$;
5) $x^2 - 5x > 0$;
6) $-25x^2 + 16 \leqslant 0$;
7) $5x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$;
8) $-3x^2 + 6x - 4 > 0$;
9) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \leqslant 0$;
10) $-x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{36} > 0$;
11) $2x^2 - 2x + 0{,}5 < 0$.

9.7.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 \leqslant 49$; 2) $x^2 > 5$; 3) $7x^2 \leqslant 4x$; 4) $0{,}9x^2 < -27x$.

9.8.° Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 > 1$; 2) $x^2 < 3$; 3) $-3x^2 \geqslant -12x$; 4) $-2x^2 < -128$.

9.9.° Розв'яжіть нерівність:

1) $x(x + 5) - 2 < 4x$;
2) $11 - (x + 1)^2 \leqslant x$;
3) $(2x + 1)^2 - (x + 1)(x - 7) \leqslant 5$;
4) $5x(x + 4) - (2x - 3)(2x + 3) > 30$;
5) $(3x - 7)(x + 2) - (x - 4)(x + 5) > 30$;
6) $\frac{2x^2 - 1}{4} - \frac{3 - 4x}{6} + \frac{8x - 5}{8} \leqslant \frac{19}{24}$.

9.10.° Розв'яжіть нерівність:

1) $2(x^2 + 2) \geqslant x(x + 5)$;
2) $x - (x + 4)(x + 5) > -5$;
3) $(6x - 1)(6x + 1) - (12x - 5)(x + 2) < 7 - 3x$;
4) $\frac{x - 1}{4} - \frac{2x - 3}{2} < \frac{x^2 + 3x}{8}$.

9.11.° При яких значеннях аргументу значення функції

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 9$$

більші за відповідні значення функції $y = 2x - 1$?

9.12.° При яких значеннях аргументу значення функції

$$y = \frac{3}{2}x^2 - 7x + 1$$

менші від відповідних значень функції $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4$?

9.13.° Знайдіть найменший цілий розв’язок нерівності:

1) $42 - x^2 - x > 0$; 2) $2x^2 - 3x - 20 < 0$.

9.14.° Знайдіть найбільший цілий розв’язок нерівності:

1) $1{,}5x^2 - 2x - 2 < 0$; 2) $-2x^2 - 15x - 25 \geqslant 0$.

9.15.° Складіть яку-небудь квадратну нерівність, множина розв’язків якої:

1) є об’єднанням проміжків $(-\infty; -4)$ і $(8; +\infty)$;
2) є проміжком $[-2; 9]$;
3) складається з одного числа 7.

9.16.° Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$; 3) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}$;

2) $y = \sqrt{2x^2 + 5x - 3}$; 4) $y = \frac{x + 2}{\sqrt{6x - 2x^2}}$.

9.17.° Знайдіть область визначення виразу:

1) $\sqrt{2x^2 - 9x - 18}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{15 + 2x - x^2}}$.

9.18.° Чи рівносильні нерівності:

1) $x^2 - 2x - 15 > 0$ і $x^2 - 2x - 15 \geqslant 0$;
2) $\frac{1}{x^2 - x - 20} < 0$ і $\frac{1}{x^2 - x - 20} \leqslant 0$;
3) $x^2 - 6x + 10 > 0$ і $-x^2 + x - 1 \leqslant 0$;
4) $x^2 + 2x + 3 < 0$ і $-2x^2 - 4 > 0$?

9.19.° При яких значеннях параметра a не має коренів рівняння:

1) $x^2 - ax + 4 = 0$; 3) $4{,}5x^2 - (4a + 3)x + 3a = 0$?
2) $x^2 + (a - 2)x + 25 = 0$;

9.20.° При яких значеннях параметра b має два різних корені рівняння:

1) $x^2 - 8bx + 15b + 1 = 0$; 2) $2x^2 + 2(b - 6)x + b - 2 = 0$?

9.21.•• Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leqslant 0, \\ x > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 - 11x - 6 \geqslant 0, \\ x + 4 \geqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 9x - 10 \leqslant 0, \\ 6x - x^2 < 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x^2 + 3x - 10 < 0. \end{cases}$

9.22.• Розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} -6x^2 + 13x - 5 \leqslant 0, \\ 6 - 2x > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 7x - 18 < 0, \\ 5x - x^2 \leqslant 0. \end{cases}$

9.23.•• Знайдіть цілі розв'язки системи нерівностей:

1) $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 18 \geqslant 0, \\ x^2 + 4x - 5 \leqslant 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - \left(\sqrt{5} - 3\right)x - 3\sqrt{5} \leqslant 0, \\ x^2 + x > 0. \end{cases}$

9.24.•• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{5}{\sqrt{x^2 - 4x - 12}} + \sqrt{x + 1};$

2) $y = \dfrac{x - 3}{\sqrt{18 + 3x - x^2}} + \dfrac{8}{x - 5};$

3) $y = \sqrt{x^2 - 5x - 14} - \dfrac{9}{x^2 - 81};$

4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{6 - 7x - 3x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{x + 1}}.$

9.25.• Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \sqrt{20 + 4x - 3x^2} + \dfrac{3}{\sqrt{8 - 4x}};$

2) $y = \dfrac{x + 5}{\sqrt{35 + 2x - x^2}} + \dfrac{x - 1}{|x| - 6}.$

9.26.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $x^2 - 8|x| - 33 < 0;$

2) $8x^2 + 7|x| - 1 \geqslant 0;$

3) $x^2 - 8|x| + 15 \leqslant 0;$

4) $4x^2 - 5|x| + 1 > 0.$

9.27.• Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1) $5x^2 - 7|x| + 2 \geqslant 0;$

2) $x^2 + 10|x| - 24 \leqslant 0;$

3) $6x^2 - 5|x| + 1 < 0.$

9.28.•• Розв'яжіть нерівність:

1) $|x^2 - x - 3| < 9;$

2) $|x^2 - 4| < 3x;$

3) $|4x^2 - 1| < x + 2;$

4) $x^2 - 5x + 9 > |x - 6|;$

5) $|4x - 3| \geqslant x^2 - 3x + 3;$

6) $|x^2 + 3x| \geqslant 2 - x^2;$

7) $|3x - 2|x < 1;$

8) $|x - 4|(x + 2) \geqslant 4x.$

9.29.• Розв'яжіть нерівність:

1) $|x^2 + 5x| < 6;$

2) $|x^2 + 3x| < x + 4;$

3) $x^2 - x - 2 < |5x - 3|;$

4) $|x^2 - 3x| \geqslant x + 5;$

5) $x|3x - 1| < -2;$

6) $x^2 + |x - 3| - 9 < 0.$

9.30.•• При яких значеннях параметра a дана нерівність виконується при всіх дійсних значеннях x:

1) $x^2 - 4x + a > 0$;
2) $x^2 + (a-1)x + 1 - a - a^2 \geqslant 0$;
3) $-\frac{1}{4}x^2 + 5ax - 9a^2 - 8a < 0$;
4) $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a + 1 > 0$;
5) $(a - 3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$?

9.31.•• При яких значеннях параметра a не має розв'язків нерівність:

1) $-x^2 + 6x - a > 0$;
2) $x^2 - (a + 1)x + 3a - 5 < 0$;
3) $ax^2 + (a - 1)x + (a - 1) < 0$;
4) $(a + 4)x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0$?

9.32.•• При яких значеннях параметра a функція $y = 0{,}5x^2 - 3x + a$ набуває невід'ємних значень при всіх дійсних значеннях x?

9.33.•• При яких значеннях параметра a функція $y = -4x^2 - 16x + a$ набуває від'ємних значень при всіх дійсних значеннях x?

9.34.•• При яких значеннях параметра a нерівність $ax^2 + (2 - a)x + 3 - 2a \leqslant 0$ має єдиний розв'язок?

9.35.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0, \\ x > a; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 4x^2 - 3x - 1 \leqslant 0, \\ x < a. \end{cases}$

9.36.•• Для кожного значення параметра a розв'яжіть систему нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 72 < 0, \\ x > a; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2 - 9x + 8 > 0, \\ x < a. \end{cases}$

9.37.•• При яких значеннях параметра a нерівність $x^2 - 4x + 3 < 0$ є наслідком нерівності $x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - a < 0$?

9.38.•• При яких значеннях параметра a нерівність $x^2 + x - 2 < 0$ є наслідком нерівності $x^2 - (2a - 1)x - 3a^2 + a < 0$?

9.39.•• При яких значеннях параметра a з нерівності $x^2 - x < 0$ випливає нерівність $x^2 - (2a+3)x + a^2 + 3a \leqslant 0$?

9.40.•• При яких значеннях параметра a з нерівності $x^2 + x < 0$ випливає нерівність $x^2 - 2(a-1)x + a^2 - 2a \leqslant 0$?

9.41.•• Відомо, що $b^2 - 4ac = 0$ і $a + b + c < 0$. Розв'яжіть квадратну нерівність $ax^2 + bx + c \geqslant 0$.

9.42.•• Відомо, що $b^2 - 4ac < 0$ і $a + c > b$. Розв'яжіть квадратну нерівність $ax^2 + bx + c \leqslant 0$.

9.43.•• При яких значеннях параметра a рівняння має єдиний розв'язок:

1) $\frac{x^2-(4+3a)x+12a}{\sqrt{x^2-1}}=0$; 2) $\frac{x^2-3ax-3a-1}{\sqrt{-x^2+3x-2}}=0$?

9.44.•• При яких значеннях параметра a рівняння має єдиний розв'язок:

1) $\frac{x^2-(5+2a)x+10a}{\sqrt{x^2-4}}=0$; 2) $\frac{x^2-(2a+2)x+6a-3}{\sqrt{2+x-x^2}}=0$?

9.45.•• Відомо, що $(a+b+c)(a-b+c)<0$. Доведіть, що $b^2>4ac$.

9.46.•• Відомо, що $a(a+b+c)<0$. Доведіть, що $b^2>4ac$.

9.47.* Розв'яжіть рівняння $x^2-8[x]+7=0$.

9.48.* Розв'яжіть рівняння $x^2-6[x]+5=0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

9.49. Побудуйте графік функції $f(x)=\frac{x^3+2x^2}{x+2}$.

9.50. Знайдіть усі пари чисел $(x; y)$, які задовольняють рівняння $\sqrt{x+y}+\sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-1}=0$.

9.51. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння $(x^2+4x-5)\left(\sqrt{x}-a\right)=0$.

9.52. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $3x^2-4x-2=0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу $|x_2-x_1|$.

10. Розв'язування нерівностей методом інтервалів

На рисунку 10.1 зображено графік деякої функції f, у якої $D(f)=\mathbb{R}$ і нулями є числа x_1, x_2 і x_3. Ці числа розбивають область визначення функції на проміжки знакосталості $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$.

А чи завжди нулі функції розбивають її область визначення на проміжки знакосталості? Відповідь на це запитання заперечна. Для функції g, графік якої зображено на рисунку 10.2, проміжок $(x_2; x_3)$ не є проміжком знакосталості. Справді, якщо $x\in(x_2; x_0)$, то $g(x)>0$, а якщо $x\in[x_0; x_3)$, то $g(x)<0$.

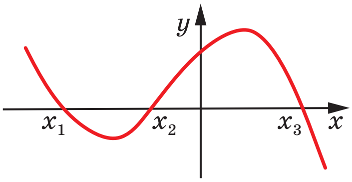


Рис. 10.1

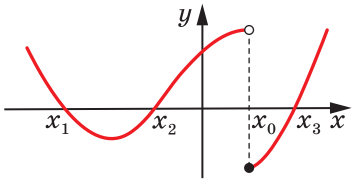


Рис. 10.2

Принципова відмінність між функціями f і g полягає в тому, що графіком функції f є **неперервна крива**, а графік функції g такої властивості не має. Говорять, що функція f **неперервна в кожній точці області визначення** або **неперервна на $D(f)$**, а функція g не є неперервною на $D(g)$ і **в точці x_0 має розрив**.

Так, функція $y = \{x\}$ має розрив у кожній точці x такій, що $x \in \mathbb{Z}$. При цьому, наприклад, у кожній точці проміжку (0; 1) ця функція є неперервною, тобто функція неперервна на цьому проміжку (рис. 10.3).

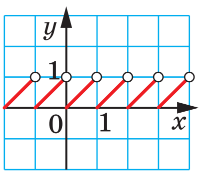


Рис. 10.3

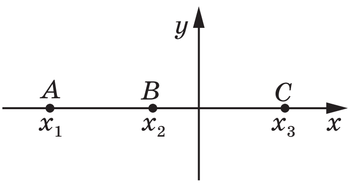


Рис. 10.4

Таке уявлення про неперервну функцію інтуїтивно зрозуміле. Більш детально із цим поняттям ви ознайомитеся в старших класах. Там же буде доведено таку наочно очевидну теорему.

Теорема 10.1. ***Якщо функція f неперервна на деякому проміжку і не має на ньому нулів, то вона на цьому проміжку зберігає сталий знак.***

Наприклад, функція $y = \{x\}$ неперервна на проміжку (0; 1) і не має нулів на цьому проміжку. Вона на цьому проміжку набуває тільки додатних значень, тобто зберігає сталий знак.

Теорема 10.1 дає змогу без побудови графіка функції f розв'язувати нерівності виду $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$.

Уявимо собі, що з рисунка 10.1 «зникли» всі точки графіка функції f, за винятком точок $A(x_1; 0)$, $B(x_2; 0)$, $C(x_3; 0)$ (рис. 10.4). Кожний із проміжків $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$, $(x_2; x_3)$, $(x_3; +\infty)$ не містить нулів функції f.

Функція f є неперервною на цих проміжках. Отже, згідно з теоремою 10.1 зазначені проміжки є проміжками знакосталості функції f.

Залишається лише з'ясувати, якого знака набувають значення функції f на кожному із цих проміжків. Це можна зробити за допомогою «пробних точок».

Нехай, наприклад, $a \in (-\infty;\ x_1)$ і обчислення показали, що $f(a) > 0$. Тоді для будь-якого $x \in (-\infty;\ x_1)$ виконується нерівність $f(x) > 0$. Вибираючи по одній точці на кожному проміжку знакосталості та знаходячи значення функції в цій точці, можна визначити знак функції на розглядуваних проміжках.

Описаний метод розв'язування нерівностей називають **методом інтервалів**.

Справедливою є така теорема, яку буде доведено в старших класах.

Теорема 10.2. ***Функція*** $y = \frac{f(x)}{g(x)}$***, де*** $f(x)$ ***і*** $g(x)$ ***— многочлени, неперервна на*** $D(y)$.

Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ неперервна в кожній точці множини $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$, тобто на $D(y)$.

Ця теорема дає змогу для нерівності виду $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ або $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$, де $f(x)$ і $g(x)$ – многочлени, застосовувати метод інтервалів.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть нерівність $(x + 3)(x - 1)(x - 2) > 0$.

Розв'язання. Числа -3, 1 і 2 є нулями функції $f(x) = (x + 3) \times (x - 1)(x - 2)$, яка є неперервною на $D(f) = \mathbb{R}$. Тому ці числа розбивають множину $\mathbb{R}$ на проміжки знакосталості функції f: $(-\infty;\ -3)$, $(-3;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$ (рис. 10.5).

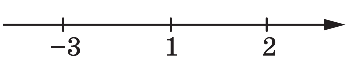


Рис. 10.5

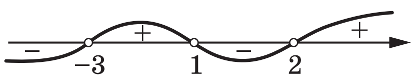


Рис. 10.6

За допомогою «пробних точок» визначимо знаки функції f на вказаних проміжках.

Маємо:

$-4 \in (-\infty;\ -3)$; $f(-4) < 0$, тому $f(x) < 0$ при будь-якому $x \in (-\infty;\ -3)$;

$0 \in (-3;\ 1)$; $f(0) > 0$, тому $f(x) > 0$ при будь-якому $x \in (-3;\ 1)$;

$\frac{3}{2} \in (1;\ 2)$; $f\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, тому $f(x) < 0$ при будь-якому $x \in (1;\ 2)$;

$3 \in (2;\ +\infty)$; $f(3) > 0$, тому $f(x) > 0$ при будь-якому $x \in (2;\ +\infty)$.

Результати дослідження знака функції f показано на рисунку 10.6.

Відповідь: $(-3; 1) \cup (2; +\infty)$. ◄

Зауваження. При оформленні розв'язування нерівностей досліджувати знак функції можна усно, фіксуючи результати у вигляді схеми, наведеної на рисунку 10.6.

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть нерівність $(x+1)(3-x)(x-2)^2 > 0$.

Розв'язання. Функція $f(x) = (x+1)(3-x)(x-2)^2$ є неперервною на $\mathbb{R}$. Позначимо на координатній прямій її нулі (рис. 10.7). Вони розбивають множину $D(f) = \mathbb{R}$ на проміжки знакосталості функції f.

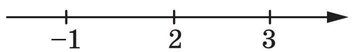


Рис. 10.7

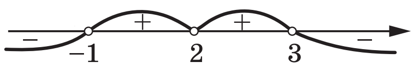


Рис. 10.8

Дослідимо знак функції f на цих проміжках. Результат дослідження показано на рисунку 10.8.

Відповідь: $(-1; 2) \cup (2; 3)$. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть нерівність $\dfrac{(x-1)^3 (x+2)^4 (x-5)}{(2x+1)(x-4)^2} < 0$.

Розв'язання

Областю визначення функції $f(x) = \dfrac{(x-1)^3 (x+2)^4 (x-5)}{(2x+1)(x-4)^2}$ є множина $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}; 4\right) \cup (4; +\infty)$. Функція f є неперервною на кожному з проміжків $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}; 4\right)$, $(4; +\infty)$. Тому нулі -2, 1, 5 функції f розбивають $D(f)$ на такі проміжки знакосталості: $(-\infty; -2)$, $\left(-2; -\dfrac{1}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2}; 1\right)$, $(1; 4)$, $(4; 5)$, $(5; +\infty)$.

Результат дослідження знака функції f на цих проміжках показано на рисунку 10.9.

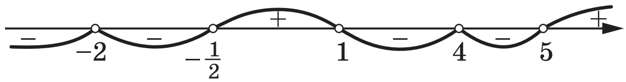


Рис. 10.9

Відповідь: $(-\infty; -2) \cup \left(-2; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1; 4) \cup (4; 5)$. ◄

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть нерівність $\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}<1.$

Розв'язання. Маємо: $\frac{2+x+10-5x-4+x^2}{(2-x)(2+x)}<0;$ $\frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)}<0.$

Областю визначення функції $f(x)=\frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)}$ є множина $(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$. Функція f нулів не має. Оскільки функція f неперервна на кожному з проміжків $(-\infty;\ -2)$, $(-2;\ 2)$, $(2;\ +\infty)$ і не має на них нулів, то ці проміжки є проміжками знакосталості.

На рисунку 10.10 показано результат дослідження знака функції f.

Розв'язання цієї нерівності можна оформити інакше. Оскільки дискримінант квадратного тричлена x^2-4x+8 від'ємний, а старший коефіцієнт додатний, то для будь-якого $x\in\mathbb{R}$ маємо: $x^2-4x+8>0$. Тому нерівність $\frac{x^2-4x+8}{(2-x)(2+x)}<0$ рівносильна такій: $(2-x)\times(2+x)<0$. Далі треба звернутися до рисунка 10.10.

Відповідь: $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$. ◄

За допомогою методу інтервалів можна розв'язувати й нестрогі нерівності виду $f(x)\geqslant 0$ або $f(x)\leqslant 0$. Множина розв'язків такої нерівності — це об'єднання множини розв'язків нерівності $f(x)>0$ (або відповідно $f(x)<0$) і множини коренів рівняння $f(x)=0$.

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть нерівність $\frac{4x^2+4x+1}{x^2+2x-3}\geqslant 0.$

Розв'язання. Радимо, якщо це можливо, розкладати на множники многочлени, записані в чисельнику та знаменнику дробу. У цьому разі набагато зручніше досліджувати знак функції на проміжках знакосталості.

Маємо: $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)}\geqslant 0.$

Установлюємо (рис. 10.11), що множиною розв'язків нерівності $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)}>0$ є множина $(-\infty;\ -3)\cup(1;\ +\infty)$.

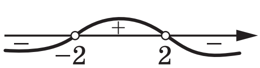


Рис. 10.10

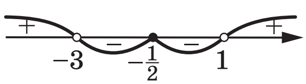


Рис. 10.11

Рівняння $\frac{(2x+1)^2}{(x+3)(x-1)} = 0$ має єдиний корінь $x = -\frac{1}{2}$.

Об'єднавши множини розв'язків рівняння та нерівності, отримаємо відповідь.

Відповідь: $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. ◄

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть нерівність $(x^2 - 6x + 8)\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geqslant 0$.

Розв'язання. Маємо: $(x-2)(x-4)\sqrt{(x-1)(x-3)} \geqslant 0$.

Розглянемо функцію $f(x) = (x-2)(x-4)\sqrt{(x-1)(x-3)}$. Розв'язавши нерівність $(x-1)(x-3) \geqslant 0$ (рис. 10.12), установлюємо, що $D(f) = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$.

Рис. 10.12

Рис. 10.13

Множина коренів рівняння $f(x) = 0$ має вигляд $\{1, 3, 4\}$.

Розв'яжемо нерівність $f(x) > 0$. Нулі функції f розбивають її область визначення на такі проміжки знакосталості: $(-\infty; 1)$, $(3; 4)$, $(4; +\infty)$.

Установлюємо (рис. 10.13), що множиною розв'язків нерівності $f(x) > 0$ є множина $(-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. Об'єднавши множини розв'язків рівняння $f(x) = 0$ і нерівності $f(x) > 0$, отримаємо відповідь.

Відповідь: $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty) \cup \{3\}$.

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть нерівність $\frac{|x-3|}{x^2 - 5x + 6} \geqslant 2$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем.

1) $\begin{cases} x < 3, \\ \frac{3-x}{x^2 - 5x + 6} \geqslant 2. \end{cases}$ Перетворивши другу нерівність системи, отримуємо:

$$\begin{cases} x < 3, \\ \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6} \leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 3, \\ \frac{2(x-3)\left(x - \frac{3}{2}\right)}{(x-2)(x-3)} \leqslant 0. \end{cases}$$

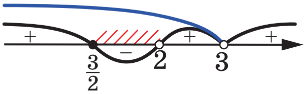


Рис. 10.14

Схему розв'язання отриманої системи зображено на рисунку 10.14. Множиною розв'язків цієї системи є проміжок $\left[\frac{3}{2}; 2\right)$.

2) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ \dfrac{x-3}{x^2-5x+6} \geqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ \dfrac{2x^2-11x+15}{x^2-5x+6} \leqslant 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ \dfrac{2(x-3)\left(x-\frac{5}{2}\right)}{(x-2)(x-3)} \leqslant 0. \end{cases}$

Ця система розв'язків не має (переконайтеся в цьому самостійно).

Відповідь: $\left[\frac{3}{2}; 2\right)$. ◄

?

1. Яку властивість має функція, що є неперервною на проміжку й не має на ньому нулів?
2. Опишіть, як розв'язувати нерівності методом інтервалів.

ВПРАВИ

10.1.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+1)(x-2)(x+5) > 0$;
2) $x(x-3)(x+2) < 0$;
3) $(2x+3)(3x-1)(x+4) > 0$;
4) $(2x-1)(3-x)(x+1) < 0$;
5) $(x-3)(2x+1)(1-5x)(x+4) > 0$.

10.2.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+3)(x-1)(x+4) < 0$;
2) $(3x+2)(x-5)(4x-1) > 0$;
3) $(1-3x)(x+2)(3-x) < 0$;
4) $x(5x+3)(2-x)(4x-3)(x+5) > 0$.

10.3.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-1)(x+3)^2(x-2) < 0$;
2) $|x-4|(x+1)(x-3) > 0$;
3) $(2x+3)(1-4x)^4(x-2)^3(x+6) < 0$;
4) $(1-3x)^3(x+2)^2(x-4)^5(x-3) > 0$.

10.4.° Розв'яжіть нерівність:

1) $x^2(x+1)(x-4) > 0$;
2) $(3-x)^3|x+2|(x-1)(2x-5) < 0$;
3) $(1-2x)(x-3)^9(2x+7)^6(x+4)(x-2)^2 > 0$.

10.5.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(2x + 1)(x - 3)(x^2 + 4) < 0$;
2) $(2 - x)(3x + 5)(x^2 - x + 1) > 0$;
3) $(2x + 1)^2 (x^2 - 4x + 3) > 0$;
4) $(3x^2 - 5x - 2)(2x^2 + x + 1) < 0$;
5) $3x^3 + 2x^2 - x < 0$;
6) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$;
7) $(2x^2 + 5x - 3)(2x^2 - 5x + 2) > 0$.

10.6.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(4 - x)(3x + 1)(x^4 + x^2 + 1) < 0$;
2) $|x - 3|(3x + 2)^3 (3x^2 - 5x + 6) > 0$;
3) $4x^3 - 25x < 0$;
4) $x^3 - 6x + 5 > 0$;
5) $(x^2 - 4)(3x^2 + 7x + 2) > 0$.

10.7.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x+3}{x-1} > 0$;
2) $\frac{(x-2)(x+1)}{x-4} < 0$;
3) $\frac{(2x+1)(x-3)}{(2-x)(x-5)} < 0$;
4) $\frac{x^3(x-1)^4(x+5)}{(x-8)(1-4x)} > 0$;
5) $\frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x+8} < 0$;
6) $\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 4x - 5} > 0$;
7) $\frac{(x-4)(x-3)(3x-7-x^2)}{x^2 + x - 2} > 0$;
8) $\frac{(x^2-9)(x^2-7x+10)(x^2-7x+13)}{(2x^2+7)(3-2x)} > 0$;
9) $\frac{x^6 + 3x^4 - x^2 - 3}{x^3 - 64x} < 0$.

10.8.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{x}{x+2} < 0$;
2) $\frac{(3x-2)(4-x)}{(x+3)(x-1)} > 0$;
3) $\frac{(x-2)(2x+1)^3}{(3-x)^4(1-5x)^5} > 0$;
4) $\frac{(x-2)(x^2-1)(4x-5-3x^2)}{x+7} < 0$;
5) $\frac{x^2 - 5x + 7}{-2x^2 + 3x + 2} > 0$;
6) $\frac{(x^3-8)(x^2-6x-7)}{(3x-2x^2-4)(3x^2-10x+3)} < 0$;
7) $\frac{x^2 + 5x - 6}{(x+2)(1-3x)} < 0$;
8) $\frac{(x^4-3x^2)(x^4+x^3-8x-8)}{(1-x)(x+2)} < 0$.

10.9.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\frac{1}{x} < 1$;
2) $\frac{x}{x+3} > \frac{1}{2}$;
3) $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$;
4) $\frac{4}{x+1} + \frac{2}{1-x} < 1$;
5) $\frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-1} < 2$;
6) $\frac{2x-5}{x^2-6x-7} < \frac{1}{x-3}$;

7) $\dfrac{7}{x^2-5x+6}+\dfrac{9}{x-3}<-1;$ 8) $\dfrac{2}{3x+7}<\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{x+1}.$

10.10.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\dfrac{x}{x-4}<\dfrac{1}{3};$ 4) $\dfrac{2(x-3)}{x(x-6)}<\dfrac{1}{x-1};$ 7) $\dfrac{2x}{x^2-9}<\dfrac{1}{x+2};$

2) $\dfrac{5x+8}{4-x}<2;$ 5) $\dfrac{2x+3}{x^2+x-12}<\dfrac{1}{2};$ 8) $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-1}>\dfrac{1}{x}.$

3) $\dfrac{2}{x+3}>\dfrac{1}{x-1};$ 6) $\dfrac{x+7}{x-5}+\dfrac{3x+1}{2}>0;$

10.11.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(3x+1)(3-x)(x+5)\leqslant 0;$ 4) $\dfrac{x^5|3x-1|(x+3)}{x-2}\leqslant 0;$

2) $(2x+1)^2(x-1)(x-2)\geqslant 0;$ 5) $\dfrac{1-2x-3x^2}{3x-x^2-5}\geqslant 0;$

3) $\dfrac{(x-3)(5x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)^2}\geqslant 0;$ 6) $\dfrac{5x+4}{x+3}-\dfrac{x+2}{1-x}\leqslant 0.$

10.12.° Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-3)(x+2)^2(x-5)\geqslant 0;$ 3) $\dfrac{(x+6)^3(x+4)(6-x)^5}{|x+5|}\geqslant 0;$

2) $\dfrac{(2-x)(4x+3)}{(x-3)^3(x+1)^2}\leqslant 0;$ 4) $\dfrac{20}{x^2-7x+12}+\dfrac{10}{x-4}+1\geqslant 0.$

10.13.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-5)(x+4)(x^2+6x+9)\geqslant 0;$ 4) $\dfrac{x^3-3x+2}{6-x}\leqslant 0;$

2) $(x^2+2x-15)(x^2-4x+3)(x-1)\leqslant 0;$ 5) $\dfrac{|x|(x+1)^3}{|x-4|^3(x+3)}\leqslant 0.$

3) $\dfrac{4x^2-4x+1}{x^2+x-12}\geqslant 0;$

10.14.• Розв'яжіть нерівність:

1) $(x^2-4)(x^2+x-2)\leqslant 0;$

2) $(x^3-4x)(x^2+2x-8)(x^2+7x+10)\leqslant 0;$

3) $\dfrac{(x^2-10x+21)(x^2-6x-7)}{(x^2+5x+6)(x^2-4)}\leqslant 0;$

4) $\dfrac{|x-5|^5|x-2|}{(1-x)^3(x+4)}\leqslant 0.$

10.15.• Розв'яжіть нерівність $\left|\dfrac{x+2}{x}\right|(x^2-4x-5)\leqslant 0.$

10.16.$^\bullet$ Розв'яжіть нерівність $\left|\frac{x-5}{x}\right|(x^2-x-12)\leqslant 0.$

10.17.$^\bullet$ Розв'яжіть нерівність:

1) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}>0;$
2) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}\geqslant 0;$
3) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}<0;$
4) $(x+4)\sqrt{x^2-2x-15}\leqslant 0;$
5) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}<0;$
6) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}>0;$
7) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\leqslant 0;$
8) $(x^2-1)\sqrt{x^2-4}\geqslant 0;$
9) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}<0;$
10) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}>0;$
11) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}\leqslant 0;$
12) $(x^2-5x+4)\sqrt{x^2-7x+10}\geqslant 0.$

10.18.$^\bullet$ Розв'яжіть нерівність:

1) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}>0;$
2) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}\geqslant 0;$
3) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}<0;$
4) $(x-3)\sqrt{14+5x-x^2}\leqslant 0;$
5) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}<0;$
6) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}>0;$
7) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}\leqslant 0;$
8) $(x^2-25)\sqrt{16-x^2}\geqslant 0;$
9) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6}>0;$
10) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6}<0;$
11) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6}\leqslant 0;$
12) $(x^2-4x-5)\sqrt{x^2-5x+6}\geqslant 0.$

10.19.$^\bullet$ Розв'яжіть нерівність $\left|\frac{x}{x^2-9}\right|\leqslant\frac{x}{x^2-9}.$

10.20.$^\bullet$ Розв'яжіть нерівність $\left|\frac{x-1}{x^2-16}\right|\leqslant\frac{x-1}{x^2-16}.$

10.21.$^\bullet$ Розв'яжіть нерівність:

1) $(|x|-3)(|x|-8)\geqslant 0;$
2) $\frac{|x+2|-x}{x}<2;$
3) $\frac{x^2-|x|-12}{x-3}\geqslant 2x;$
4) $\frac{|x-1|}{x+2}+x-3>\frac{1}{x+2}.$

10.22.$^\bullet$ Розв'яжіть нерівність:

1) $(|x|-5)(|x|-7)\leqslant 0;$
2) $\frac{|x+3|+x}{x+2}>1;$
3) $\frac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0;$
4) $\frac{2}{x|x-1|}\leqslant -1.$

10.23.$^\bullet$ Розв'яжіть нерівність:

1) $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|\geqslant 2;$
2) $\left|\frac{3x}{x^2-4}\right|\leqslant 1;$
3) $\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right|\leqslant 1.$

10.24.° Розв'яжіть нерівність:

1) $\left|\frac{x-3}{x-5}\right| \geqslant 1$; 2) $\left|\frac{x+4}{x+2}\right| \leqslant 1$; 3) $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right| < 1$.

10.25.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $|2x-1|+|x^2-x-6|=x^2+x-7$;

2) $|x^2-4|+|x^2-x-2|=|2x^2-x-6|$.

10.26.•• Розв'яжіть рівняння:

1) $|3x-2|+|x^2-5x+6|=x^2-2x+4$;

2) $|x^2-9|+|x^2+4x+3|=|2x^2+4x-6|$.

10.27.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності залежно від значення параметра a:

1) $|x-a|(5x^2-2x-3)<0$; 2) $|x-a|(5x^2-2x-3)\leqslant 0$.

10.28.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності залежно від значення параметра a:

1) $|x-a|(7x^2-4x-3)<0$;

2) $|x-a|(7x^2-4x-3)\leqslant 0$.

10.29.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності залежно від значення параметра a:

1) $|x-1|(x^2-(a+3)x+3a)<0$;

2) $|x-1|(x^2-(a+3)x+3a)\leqslant 0$;

10.30.•• Знайдіть множину розв'язків нерівності залежно від значення параметра a:

1) $|x+2|(x^2-(a+1)x+a)<0$;

2) $|x+2|(x^2-(a+1)x+a)\leqslant 0$;

10.31.* Розв'яжіть рівняння $2\{x\}-\{x\}[x]=x-5$.

10.32.* Розв'яжіть рівняння $[x]\{x\}-3\{x\}=6-x$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

10.33. Розв'яжіть рівняння $||x-1|-1|=2$.

10.34. Спростіть вираз $\sqrt{2a-4+2\sqrt{a^2-4a+3}}-\sqrt{a-1}$.

10.35. Відстань від села A до села B, яка дорівнює 30 км, велосипедист проїхав із певною швидкістю, а повертався зі швидкістю на 3 км/год більшою та витратив на 30 хв менше, ніж на шлях із села A в село B. Знайдіть початкову швидкість велосипедиста.

11. Розміщення нулів квадратичної функції відносно заданої точки

Розглянемо квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$, нулі якої дорівнюють x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$). Нехай число α не є нулем даної функції. Тоді можливі три випадки розміщення нулів функції відносно числа α:

- $\alpha < x_1 < x_2$; (1)
- $x_1 < \alpha < x_2$; (2)
- $x_1 < x_2 < \alpha$. (3)

У цьому пункті розглянемо задачі на пошук значень параметрів, при яких нулі квадратичної функції, що залежать від параметрів, будуть розміщені відносно заданого числа α одним із трьох зазначених способів.

Якщо дискримінант квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ є повним квадратом, то нулі квадратичної функції зручно виразити через коефіцієнти a, b і c, а потім залежно від умови задачі розв'язувати відповідну нерівність (1), (2) або (3). Задачі такого типу ви вже розв'язували (див. вправи 9.37–9.40).

Якщо дискримінант квадратного тричлена не є повним квадратом, то реалізація цього плану пов'язана зі значними технічними труднощами. Розглянемо більш раціональні способи розв'язування подібних задач.

ПРИКЛАД 1 При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 + (a - 1)x + 2a^2 - a - 1 = 0$ має корені різних знаків?

Розв'язання. Розглянемо квадратичну функцію $f(x) = x^2 + (a - 1)x + 2a^2 - a - 1$. Її графіком є парабола, вітки якої напрямлені вгору. Корені даного рівняння матимуть різні знаки тоді й тільки тоді, коли точка 0 буде розміщена між числами x_1 і x_2 — нулями функції f (рис. 11.1).

Нулі функції f і точка 0 будуть розміщені в зазначеному порядку в тому й тільки в тому разі, коли значення функції f у точці 0 є від'ємним, тобто $f(0) < 0$.

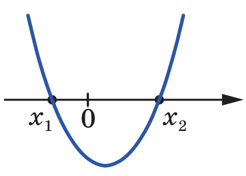


Рис. 11.1

Під час дослідження рисунка 11.1 може скластися враження, що умови $f(0) < 0$ недостатньо: треба ще вимагати виконання нерівності $D > 0$, де D — дискримінант квадратного тричлена $x^2 + (a - 1)x + 2a^2 - a - 1$. Проте ця вимога є надлишковою, що випливає з таких наочно очевидних міркувань: *якщо вітки* *параболи напрямлені вниз* (*угору*) *і існує точка, у якій квадратична функція набуває додатного* (*від'ємного*) *значення, то парабола перетинає вісь абсцис у двох точках*.

Отже, шукане значення параметра a знайдемо з умови $f(0) < 0$.

Маємо: $2a^2 - a - 1 < 0$.

Розв'язавши цю нерівність, отримуємо відповідь.

Відповідь: $-\frac{1}{2} < a < 1$. ◄

ПРИКЛАД 2 Знайдіть усі значення параметра a, при яких нерівність $x^2 - (a - 3)\,x - 2a^2 + 5a - 2 > 0$ виконується при всіх невід'ємних значеннях x.

Розв'язання

• Якщо дискримінант D квадратного тричлена, записаного в лівій частині нерівності, є від'ємним, то дана нерівність виконується при всіх x, а отже, і при всіх невід'ємних значеннях x.

Маємо: $D = (a - 3)^2 + 8a^2 - 20a + 8 = 9a^2 - 26a + 17$;

$9a^2 - 26a + 17 < 0$; $1 < a < \frac{17}{9}$.

Отже, проміжок $\left(1; \frac{17}{9}\right)$ потрібно включити у відповідь.

• Розглянемо випадок, коли $D \geqslant 0$. Нехай x_1 і x_2 — нулі функції $f(x) = x^2 - (a - 3)\,x - 2a^2 + 5a - 2$, причому $x_1 \leqslant x_2$. Тоді множиною розв'язків даної нерівності $x^2 - (a - 3)x - 2a^2 + 5a - 2 > 0$ є множина $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, яка має містити проміжок $[0; +\infty)$.

Знайдемо всі значення параметра a, при яких виконується умова $[0; +\infty) \subset (x_2; +\infty)$. Геометричну інтерпретацію цієї умови показано на рисунку 11.2.

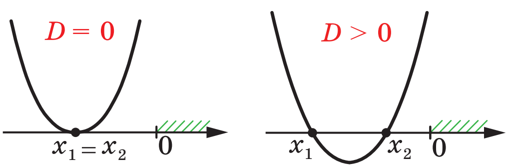


Рис. 11.2

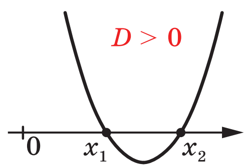


Рис. 11.3

Знайдемо аналітичні співвідношення, які описують рисунок 11.2.

Здавалося б, досить обмежитися вимогами $\begin{cases} D \geqslant 0, \\ f(0) > 0. \end{cases}$

Проте цю умову задовольняє, наприклад, і таке розміщення чисел 0, x_1 і x_2, яке показано на рисунку 11.3. Проте тут не виконується умова $[0; +\infty) \subset (x_2; +\infty)$.

Тому до наведених вище співвідношень потрібно додати ще таке, яке забезпечить розміщення точки x_0 — абсциси вершини параболи — ліворуч від точки 0.

Маємо: $\begin{cases} D \geqslant 0, \\ f(0) > 0, \\ x_0 < 0. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} 9a^2 - 26a + 17 \geqslant 0, \\ -2a^2 + 5a - 2 > 0, \\ \dfrac{a-3}{2} < 0. \end{cases}$

Залишається розв'язати цю систему (зробіть це самостійно) і об'єднати множину її розв'язків і проміжок $\left(1; \dfrac{17}{9}\right)$.

Відповідь: $\left(\dfrac{1}{2}; 2\right)$. ◄

ПРИКЛАД 3 При яких значеннях параметра a всі корені рівняння $x^2 - ax + 2 = 0$ задовольняють умову $1 < x < 3$?

Розв'язання. Розглянемо квадратичну функцію $f(x) = x^2 - ax + 2$. Для розв'язання задачі достатньо знайти всі значення параметра a, при яких графік функції f розміщуватиметься так, як показано на рисунку 11.4.

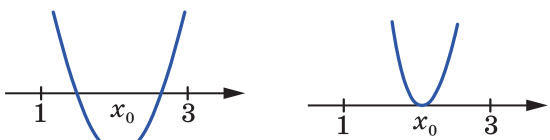


Рис. 11.4

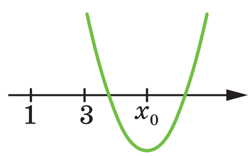


Рис. 11.5

Нехай D — дискримінант квадратного тричлена $x^2 - ax + 2$. Із рисунка 11.4 видно, що $D \geqslant 0$, $f(1) > 0$, $f(3) > 0$. Рисунок 11.5 показує, що виконання цих трьох нерівностей не гарантує такого розміщення графіка функції f, як показано на рисунку 11.4. Для того щоб забезпечити потрібне розміщення параболи, до трьох записаних нерівностей треба додати ще одну: $1 < x_0 < 3$, де x_0 — абсциса вершини параболи. Отже, шукані значення параметра a — це множина розв'язків системи нерівностей:

$$\begin{cases} a^2 - 8 \geqslant 0, \\ 3 - a > 0, \\ 11 - 3a > 0, \\ 1 < \dfrac{a}{2} < 3. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему (зробіть це самостійно), отримаємо відповідь.

Відповідь: $2\sqrt{2} \leqslant a < 3$. ◀

ПРИКЛАД 4 Знайдіть усі значення параметра a, при яких із нерівності $-1 < x < 2$ випливає нерівність $(a+1)x^2 - (3a+4)x + 4 > 0$.

Розв'язання. Для розв'язання задачі достатньо знайти всі значення параметра a, при яких проміжок $(-1; 2)$ буде підмножиною множини розв'язків нерівності $(a+1)x^2 - (3a+4)x + 4 > 0$.

Якщо $a = -1$, то отримуємо: $-x + 4 > 0$; $x < 4$, тобто $x \in (-\infty; 4)$. Оскільки $(-1; 2) \subset (-\infty; 4)$, то $a = -1$ входить у відповідь.

Нехай $a \neq -1$. Розглянемо квадратичну функцію $f(x) = (a+1)x^2 - (3a+4)x + 4$.

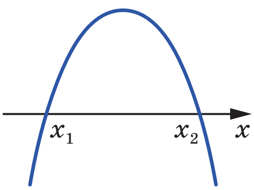


Рис. 11.6

• Нехай $a + 1 < 0$. Тоді вітки параболи $f(x) = (a+1)x^2 - (3a+4)x + 4$ напрямлені вниз. У цьому випадку нерівність $(a+1)x^2 - (3a+4)x + 4 > 0$ має розв'язки, якщо парабола розміщена так, як показано на рисунку 11.6. При цьому множиною розв'язків нерівності є проміжок $(x_1; x_2)$, де x_1 і x_2 — нулі функції f.

Проміжок $(x_1; x_2)$ має містити проміжок $(-1; 2)$ (рис. 11.7).

Нулі x_1 і x_2 розміщені відносно точок -1 і 2 так, як показано на рисунку 11.7, тоді й тільки тоді, коли виконується система нерівностей:

$$\begin{cases} a+1<0, \\ f(-1) \geqslant 0, \\ f(2) \geqslant 0. \end{cases}$$

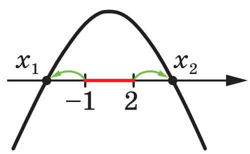


Рис. 11.7

Маємо: $\begin{cases} a+1<0, \\ (a+1)+(3a+4)+4 \geqslant 0, \\ 4(a+1)-2(3a+4)+4 \geqslant 0. \end{cases}$ Множиною розв'язків цієї системи є множина $\left[-\dfrac{9}{4}; -1\right)$ (переконайтеся в цьому самостійно).

• Нехай $a + 1 > 0$. Тоді вітки параболи $f(x) = (a+1)x^2 - (3a+4)x + 4$ напрямлені вгору.

Якщо $D < 0$, де D — дискримінант квадратного тричлена $(a+1)x^2 - (3a+4)x + 4$, то множиною розв'язків нерівності $(a+1)x^2 - (3a+4)x + 4 > 0$ є множина $\mathbb{R}$, яка містить проміжок $(-1;\ 2)$. Отже, розв'язки системи $\begin{cases} a+1>0, \\ D<0 \end{cases}$ входять у відповідь.

Маємо: $\begin{cases} a+1>0, \\ 9a^2+8a<0. \end{cases}$ Множиною розв'язків цієї системи є проміжок $\left(-\frac{8}{9};\ 0\right)$.

Якщо $D \geqslant 0$, то множиною розв'язків нерівності $(a+1)x^2 - (3a+4)x + 4 > 0$ є множина $(-\infty;\ x_1) \cup (x_2;\ +\infty)$, яка має містити проміжок $(-1;\ 2)$. Звідси $(-1;\ 2) \subset (-\infty;\ x_1)$ (рис. 11.8) або $(-1;\ 2) \subset (x_2;\ +\infty)$ (рис. 11.9).

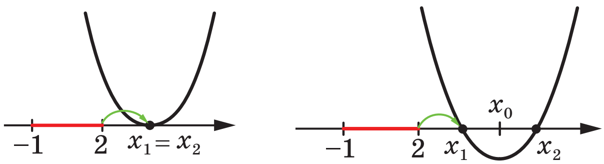


Рис. 11.8

Для рисунка 11.8 маємо: $\begin{cases} a+1>0, \\ D \geqslant 0, \\ f(2) \geqslant 0, \\ 2 \leqslant x_0. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} a+1>0, \\ 9a^2+8a \geqslant 0, \\ 4(a+1)-2(3a+4)+4 \geqslant 0, \\ 2 \leqslant \dfrac{3a+4}{2(a+1)}. \end{cases}$

Множиною розв'язків цієї системи є множина $\{0\} \cup \left(-1;\ -\frac{8}{9}\right]$ (переконайтеся в цьому самостійно).

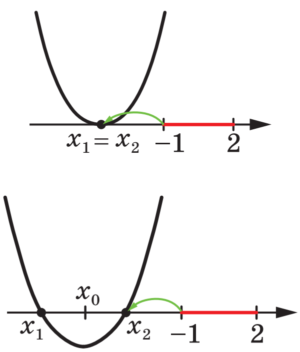


Рис. 11.9

Для рисунка 11.9 маємо: $\begin{cases} a+1>0, \\ D \geqslant 0, \\ f(-1) \geqslant 0, \\ x_0 \leqslant -1. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} a+1>0, \\ 9a^2+8a \geqslant 0, \\ a+1+3a+4+4 \geqslant 0, \\ \dfrac{3a+4}{2(a+1)} \leqslant -1. \end{cases}$

Ця система розв'язків не має (переконайтеся в цьому самостійно).

Відповіддю початкової задачі є об'єднання множин $\{-1\} \cup$ $\cup \left[-\frac{9}{4}; -1\right) \cup \{0\} \cup \left(-\frac{8}{9}; 0\right) \cup \left(-1; -\frac{8}{9}\right]$, яке дорівнює проміжку $\left[-\frac{9}{4}; 0\right]$.

Відповідь: $\left[-\frac{9}{4}; 0\right]$. ◄

ПРИКЛАД 5 При яких значеннях параметра a тільки один корінь рівняння $x^2 - ax + 2 = 0$ задовольняє умову $1 < x < 3$?

Розв'язання. В умові не сказано, що дане рівняння має два різних корені. Тому розглянемо два випадки: $D = 0$ і $D > 0$, де D — дискримінант даного квадратного рівняння.

Перший випадок: $D = 0$. Маємо: $a^2 - 8 = 0$. Звідси $a = -2\sqrt{2}$ або $a = 2\sqrt{2}$. Підставимо знайдені значення параметра a у квадратне рівняння. Для першого значення параметра отримуємо: $x = -\sqrt{2}$; для другого: $x = \sqrt{2}$. Оскільки $-\sqrt{2} \notin (1; 3)$ і $\sqrt{2} \in (1; 3)$, то із двох знайдених значень параметра у відповідь входить $a = 2\sqrt{2}$.

Другий випадок: $D > 0$. Нехай x_1 і x_2 $(x_1 < x_2)$ — нулі квадратичної функції $f(x) = x^2 - ax + 2$. Знайдемо всі значення параметра a, при яких $x_1 \in (1; 3)$, $x_2 \notin (1; 3)$ або $x_1 \notin (1; 3)$, $x_2 \in (1; 3)$ (рис. 11.10). Нулі x_1 і x_2 розміщені відносно точок 1 і 3 так, як показано на рисунку 11.10, тоді й тільки тоді, коли виконується така сукупність:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(1) > 0, \\ f(3) \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} f(1) \leqslant 0, \\ f(3) > 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Розв'язавши цю сукупність (зробіть це самостійно), отримаємо: $3 \leqslant a < \frac{11}{3}$.

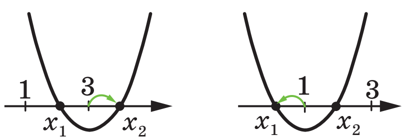


Рис. 11.10

Відповідь: $3 \leqslant a < \frac{11}{3}$ або $a = 2\sqrt{2}$. ◄

ВПРАВИ

11.1.• Знайдіть усі значення параметра a, при яких один із коренів рівняння $x^2 + (a^2 - 2)x - a^2 + 3a + 2 = 0$ більший за 1, а другий менший від 1.

11.2.• Знайдіть усі значення параметра a, при яких один із коренів рівняння $ax^2 - (a - 1)x + a^2 - 10 = 0$ більший за -3, а другий менший від -3.

11.3.• При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2 - (2a + 1)x + a^2 - 4a + 3 = 0$ є додатними числами?

11.4.• При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2 + 2 \times (2a + 3)x + 4a^2 - 3a - 1 = 0$ є від'ємними числами?

11.5.• Знайдіть усі значення параметра a, при яких корені рівняння $x^2 - (2a + 1)x + 2a + 9 = 0$ більші за -1.

11.6.• Знайдіть усі значення параметра a, при яких корені рівняння $x^2 - 2(a + 1)x - 2a - 2 = 0$ менші від 1.

11.7.• При яких значеннях параметра a корені рівняння $(a - 1)x^2 - 2x + 5 = 0$ більші за 2?

11.8.• При яких значеннях параметра a корені рівняння $(a + 2)x^2 - 4x + 1 = 0$ менші від 3?

11.9.• При яких значеннях параметра a один із коренів рівняння $x^2 + 4ax + 4 - a^2 = 0$ менший від 0, а другий більший за 1?

11.10.• При яких значеннях параметра a один із коренів рівняння $(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + 4a = 0$ менший від 2, а другий більший за 3?

11.11.• При яких значеннях параметра a всі корені рівняння $(a - 1)x^2 - 2(a + 2)x + a = 0$ належать проміжку $(-1; 2)$?

11.12.• При яких значеннях параметра a всі корені рівняння $(1 + a)x^2 - 3ax + 4a = 0$ належать проміжку $(2; 5)$?

11.13.• Знайдіть усі значення параметра a, при яких нерівність $x^2 - (a + 1)x - a^2 < 0$ виконується для всіх $x \in [1; 2]$.

11.14.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких нерівність $x^2 - 2(a + 1)x + a^2 - a - 6 > 0$ виконується для всіх недодатних значень x.

11.15.•• При яких значеннях параметра a нерівність $ax^2 + 2(a + 1)x + 3a + 1 \leqslant 0$ виконується для всіх значень x, менших від 1?

11.16.•• При яких значеннях параметра a нерівність $x^2 + 2ax + 3a^2 - 5a + 2 > 0$ виконується для всіх значень x, більших за -1?

11.17.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких нерівність $ax^2 - 2(a - 3)x + a + 3 > 0$ виконується для всіх $x \in [-2; 2]$.

11.18.•• При яких значеннях параметра a з нерівності $2x^2 + x < 0$ випливає нерівність $ax^2 - 2(a - 3)x + a - 1 > 0$?

11.19.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких з нерівності $ax^2 + 2(a - 2)x + a - 5 > 0$ випливає нерівність $x^2 - 3x + 2 > 0$.

11.20.•• При яких значеннях параметра a нерівність $x^2 - 2(a + 1)x + a^2 + 2a > 0$ випливає з нерівності $x^2 - 4x + a^2 > 0$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

11.21. Розв’яжіть нерівність $|3x - 4| < 2$.

11.22. Розв’яжіть рівняння $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x - 2} = 0$.

11.23. Спростіть вираз $\sqrt{43 + 6\sqrt{50}} - \sqrt{43 - 6\sqrt{50}}$.

11.24. Розв’яжіть рівняння $(x + 6)(x + 3)(x - 1)(x - 2) = 12x^2$.

Парабола

Фігуру, яка є графіком рівняння $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, називають параболою.

На рисунку 11.11 зображено параболу $y = x^2$. Якщо її розмістити, наприклад, так, як показано на рисунку 11.12, то рівняння цієї фігури не матиме вигляду $y = ax^2 + bx + c$. Чи можна фігуру, зображену на рисунку 11.12, називати параболою?

Природно, щоб рівні фігури мали однакові назви. Тому хотілося б дати таке означення параболи, яке не пов’язане з рівнянням фігури. Наприклад, означення кола було надано як ГМТ, рівновіддалених від заданої точки, а лише потім отримано його рівняння.

Розглянемо таку задачу. Нехай дано пряму d і точку F, яка не належить цій прямій. Знайдемо ГМТ, рівновіддалених від прямої d і точки F.

Опустимо з точки F перпендикуляр FK на пряму d. Нехай точка O — середина відрізка FK (рис. 11.13).

Виберемо систему координат так, щоб вісь ординат збігалася з прямою FK, а вісь абсцис — із серединним перпендикуляром відрізка FK.

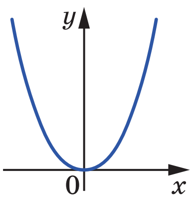


Рис. 11.11

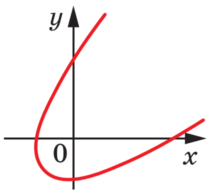


Рис. 11.12

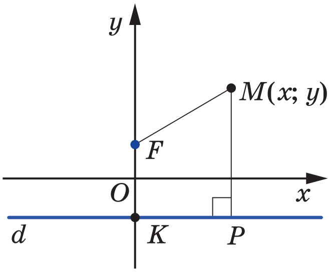


Рис. 11.13

Виберемо одиничний відрізок так, щоб $FK = \frac{1}{2}$. Тоді $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$, $K\left(0; -\frac{1}{4}\right)$, рівняння прямої d має вигляд $y = -\frac{1}{4}$.

Нехай $M\ (x;\ y)$ — точка, яка належить шуканому ГМТ. Тоді відстань від точки M до прямої d (довжина відрізка MP) дорівнює $\left|y + \frac{1}{4}\right|$, а довжина відрізка MF дорівнює $\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2}$.

З урахуванням умови можна записати: $MP = MF$, тобто

$$\left|y + \frac{1}{4}\right| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2}. \qquad (*)$$

Зазначимо, що коли точка належить шуканому ГМТ, то її координати задовольняють рівняння (*). І навпаки, пара чисел, яка є розв'язком рівняння (*), — це координати точки, що належить шуканому ГМТ.

Запишемо: $\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2$;

$$y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16} = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16};$$

$$y = x^2.$$

Отже, шукане ГМТ — це фігура, яка є графіком рівняння $y = x^2$, тобто парабола (рис. 11.14).

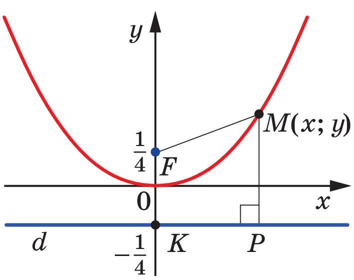


Рис. 11.14

Легко показати (зробіть це самостійно), що коли точки F і K вибрати так, що $FK = \frac{1}{2a}$, де $a > 0$, то в результаті аналогічних міркувань буде отримано рівняння $y = ax^2$.

Цей результат дозволяє дати таке означення параболи.

Означення. **Параболою називають ГМТ, рівновіддалених від даної прямої та даної точки, яка не лежить на цій прямій.**

Дану пряму називають **директрисою** (від латин. *directrix* — напрямна), а дану точку — **фокусом** (від латин. *focus* — вогнище, осередок).

Пряму, яка проходить через фокус і перпендикулярна до директриси, називають **віссю параболи**.

Параболі притаманна ціла низка цікавих властивостей.

Парабола ділить площину на дві фігури. Одна з них є опуклою, тобто будь-який відрізок, кінці якого належать параболі, повністю належить цій фігурі. Її називають **внутрішньою областю параболи**.

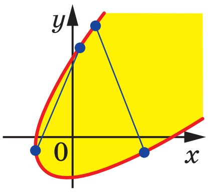


Рис. 11.15

На рисунку 11.15 внутрішню область параболи зафарбовано жовтим кольором.

Відстань від будь-якої точки внутрішньої області параболи до фокуса менша, ніж відстань від цієї точки до директриси. Відстань від будь-якої точки, яка не належить внутрішній області параболи, до директриси не більша, ніж відстань від цієї точки до фокуса. Ці дві властивості доведіть самостійно.

Промені, які виходять із джерела світла, розміщеного у фокусі параболи, після відбивання від неї стають паралельними осі параболи.

Пояснимо цю оптичну властивість на прикладі параболи $y = x^2$. Нехай промінь, який виходить з фокуса $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$, відбивається від точки $M\left(x_0; x_0^2\right)$ параболи $y = x^2$ (рис. 11.16). За відомим з оптики законом $\angle FMA = \angle NMB$, де пряма AB — дотична[1] до параболи $y = x^2$. Опустимо перпендикуляр MM_1 на директрису параболи. Якщо ми доведемо рівність кутів NMB і AMM_1, то тим самим доведемо, що точки N, M і M_1 лежать на одній прямій, паралельній осі ординат.

Рівняння прямої AB, яка проходить через точку $M\left(x_0; x_0^2\right)$, має вигляд $y = k(x - x_0) + x_0^2$, де k — кутовий коефіцієнт прямої AB.

Ця пряма та парабола $y = x^2$ мають одну спільну точку, отже, рівняння $x^2 = k(x - x_0) + x_0^2$, тобто рівняння $x^2 - kx + kx_0 - x_0^2 = 0$, має єдиний розв'язок. Маємо:

$$D = k^2 - 4kx_0 + 4x_0^2 = 0. \text{ Звідси } k = 2x_0.$$

[1] Більш докладно з поняттям «дотична до кривої» ви ознайомитеся в 11 класі.

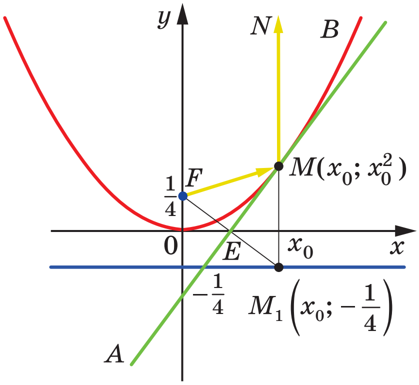


Рис. 11.16

Тоді рівняння прямої AB має вигляд

$$y = 2x_0x - x_0^2. \qquad (**)$$

Нехай точка E — середина відрізка FM_1.

Маємо: $E\left(\dfrac{0 + x_0}{2}; \dfrac{\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right)}{2}\right)$, тобто $E\left(\dfrac{x_0}{2}; 0\right)$.

Легко перевірити, що координати точки E задовольняють рівняння (**). Отже, точка E належить прямій AB. У рівнобедреному трикутнику FMM_1 ($MF = MM_1$) відрізок ME — медіана. Тоді $\angle FME = \angle EMM_1$. З урахуванням вищесказаного отримуємо, що $\angle EMM_1 = \angle NMB$.

Якщо параболу обертати навколо її осі, то отримаємо поверхню, яку називають параболоїдом обертання (рис. 11.17). Таку форму мають дзеркала прожекторів, автомобільних фар, телескопів. Промені світла від джерела, розміщеного у фокусі параболи, відбиваючись від поверхні обертання, утворюють паралельний пучок світла. І навпаки, усі світлові промені, які йдуть паралельно осі обертання, після відбивання збираються в одній точці — фокусі. Ця властивість лежить в основі принципу роботи параболічних антен.

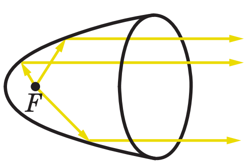


Рис. 11.17

З кривими, які мають форму параболи, можна зустрітися, вивчаючи рух предметів. Наприклад, траєкторія польоту каменя, кинутого під кутом до горизонту, футбольного м'яча або артилерійського снаряда за відсутності опору повітря є параболою. Струмені води у фонтані утворюють фігуру, схожу на параболу.

Знання властивостей параболи дає змогу розв'язати цілу низку красивих задач. Проілюструємо це на прикладах.

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що неможливо замостити площину скінченною множиною внутрішніх областей парабол.

Розв'язання. Проведемо пряму, яка не паралельна жодній з осей парабол (така пряма існує, оскільки кількість парабол є скінченною). Кожна з внутрішніх областей парабол або не має спільних точок з проведеною прямою, або множина спільних точок утворює відрізок. Але скінченною кількістю відрізків неможливо покрити пряму. ◄

ПРИКЛАД 2 На площині задано скінченну множину прямих і скінченну множину точок, жодна з яких не належить заданим прямим. Доведіть, що на площині існує точка, відстань від якої до будь-якої із заданих прямих менша, ніж відстань до будь-якої із заданих точок.

Розв'язання. Кожну пару (пряма; точка) розглядатимемо як директрису і фокус деякої параболи. Таким чином, задано скінченну множину внутрішніх областей парабол. Згідно з результатом попередньої задачі, вони не замощують усю площину. Візьмемо будь-яку з непокритих точок, яка не належить жодній параболі. Вона й буде шуканою. ◄

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Функція

Нехай X — множина значень незалежної змінної, Y — множина значень залежної змінної. Функція — це правило, за допомогою якого за кожним значенням незалежної змінної з множини X можна знайти єдине значення залежної змінної з множини Y.
Множину всіх значень, яких набуває аргумент, називають областю визначення функції і позначають $D\ (f)$ або $D\ (y)$.
Множину всіх значень, яких набуває залежна змінна, називають областю значень функції і позначають $E\ (f)$ або $E\ (y)$.
Функцію вважають заданою, якщо вказано її область визначення та правило, за яким можна за кожним значенням незалежної змінної знайти значення залежної змінної.

Взаємно однозначне відображення

Якщо у відображенні f множини X на множину Y кожний елемент множини Y є відповідним деякому єдиному елементу множини X, то таке відображення називають взаємно однозначним відображенням множини X на множину Y.

Складена функція

Якщо для будь-якого $x \in M$ усі значення функції g слугують значеннями аргументу функції f, то говорять, що задано складену функцію $y = f(g\ (x))$ з областю визначення M.

Графік числової функції

Графіком числової функції f називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції f.

Нуль функції

Значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю, називають нулем функції.

Проміжок знакосталості функції

Проміжок, на якому функція набуває значень однакового знака, називають проміжком знакосталості функції.

Зростаючі та спадні функції

Функцію f називають зростаючою на множині $M \subset D\ (f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.
Функцію f називають спадною на множині $M \subset D\ (f)$, якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2, які належать множині M, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

Властивості зростаючих і спадних функцій

Якщо функція f є зростаючою (спадною) і $f(x_1) = f(x_2)$, то $x_1 = x_2$.
Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною) на множині $M \subset D\ (f)$, то функція $y = -f(x)$ є спадною (зростаючою) на множині M.
Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g\ (x)$ є зростаючими (спадними) на множині $M \subset D(f) \cap D(g)$, то функція $y = f(x) + g\ (x)$ є зростаючою (спадною) на множині M.
Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g\ (x)$ є зростаючими (спадними) на множині $M \subset D(f) \cap D(g)$, причому $f(x) \geqslant 0$ і $g(x) \geqslant 0$ для будь-якого $x \in M$, то функція $y = f(x)\ g\ (x)$ є зростаючою (спадною) на множині M.
Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною) на множині M і на цій множині функція f набуває значень однакового знака, то функція $y = \dfrac{1}{f(x)}$ є спадною (зростаючою) на множині M.
Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою (спадною), то рівняння $f(x) = a$, де a — деяке число, має не більше одного кореня.
Якщо одна з функцій $y = f(x)$ або $y = g\ (x)$ є зростаючою на множині $M = D(f) \cap D(g)$, а друга — спадною на множині M, то рівняння $f(x) = g\ (x)$ має не більше одного кореня.
Якщо функція f є зростаючою, то рівняння $f(f(x)) = x$ рівносильне рівнянню $f(x) = x$.

Найбільше і найменше значення функції

Число $f(x_0)$ називають найбільшим значенням функції f на множині $M \subset D\ (f)$, якщо існує таке число x_0, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \geqslant f(x)$.
Число $f(x_0)$ називають найменшим значення функції f на множині $M \subset D\ (f)$, якщо існує таке число x_0, що для всіх $x \in M$ виконується нерівність $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Парна та непарна функції

Функцію f називають парною, якщо для будь-якого $x \in D(f)$ є правильною рівність $f(-x) = f(x)$.
Функцію f називають непарною, якщо для будь-якого $x \in D(f)$ є правильною рівність $f(-x) = -f(x)$.

Властивості графіків парної та непарної функцій

Якщо точка $M(a;\ b)$ належить графіку парної функції f, то точка $M_1(-a;\ b)$ також належить її графіку, тобто графік парної функції симетричний відносно осі ординат.

Якщо точка $M(a;\ b)$ належить графіку непарної функції f, то точка $M_1(-a;\ -b)$ також належить її графіку, тобто графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Перетворення графіків функцій

Графік функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, можна отримати в результаті розтягнення графіка функції $y = f(x)$ у k разів від осі абсцис, якщо $k > 1$, або в результаті стискання графіка функції $y = f(x)$ в $\frac{1}{k}$ раза до осі абсцис, якщо $0 < k < 1$.

Графік функції $y = -f(x)$ можна отримати в результаті перетворення симетрії відносно осі абсцис графіка функції $y = f(x)$.

Графік функції $y = f(kx)$, де $k > 0$, можна отримати в результаті стискання графіка функції $y = f(x)$ у k разів до осі ординат, якщо $k > 1$, або в результаті розтягнення графіка функції $y = f(x)$ в $\frac{1}{k}$ раза від осі ординат, якщо $0 < k < 1$.

Графік функції $y = f(-x)$ можна отримати в результаті перетворення симетрії відносно осі ординат графіка функції $y = f(x)$.

Графік функції $y = f(x) + b$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі ординат на b одиниць угору, якщо $b > 0$, і на $-b$ одиниць униз, якщо $b < 0$.

Графік функції $y = f(x + a)$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі абсцис на a одиниць уліво, якщо $a > 0$, і на $-a$ одиниць управо, якщо $a < 0$.

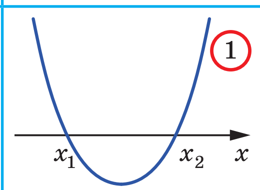
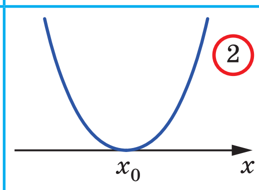
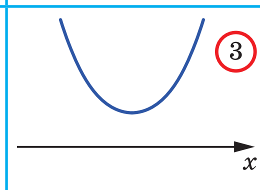
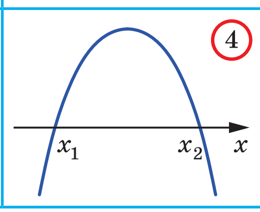
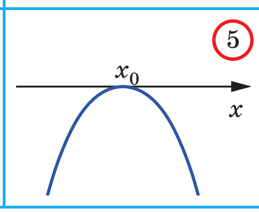
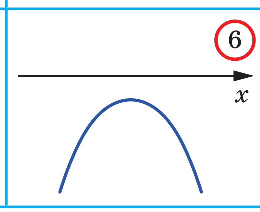
Квадратична функція

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = ax^2 + bx + c$, де x — незалежна змінна, a, b і c — параметри, причому $a \neq 0$, називають квадратичною.

Квадратна нерівність

Нерівності виду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + x \geqslant 0$, $ax^2 + bx + x \leqslant 0$, де x — змінна, a, b і c — параметри, причому $a \neq 0$, називають квадратними.

Схематичне розміщення параболи $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

§ 3 РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ ТА ЇХНІ СИСТЕМИ

- У цьому параграфі ви розширите свої знання про рівняння з двома змінними.
- Навчитеся будувати графіки рівнянь із двома змінними за допомогою перетворень уже відомих графіків.
- Розширите свої знання про системи рівнянь із двома змінними, методи їхнього розв'язування, набудете нових навичок розв'язування систем рівнянь.

12. Рівняння з двома змінними та його графік

Вирази $x^2 + y^2$, $\frac{x+y}{x-y}$, $(x-1)(y+2)$, $x - 3y$ є прикладами виразів із двома змінними x і y.

Вираз зі змінними x і y позначають так: $F(x; y)$ (читають: «еф від ікс і ігрек»).

Тоді рівність $F(x; y) = 0$ є рівнянням із двома змінними x і y.

Наприклад, якщо $F(x; y) = ax + by + c$, то рівність $F(x; y) = 0$ є лінійним рівнянням із двома змінними.

Нагадаємо, що коли $F(x; y)$ — многочлен стандартного вигляду, то його степенем називають найбільший зі степенів одночленів, які до нього входять. У цьому разі степенем відповідного рівняння $F(x; y) = 0$ називають степінь многочлена $F(x; y)$.

Наприклад, степінь рівняння $x^2 - x^2y^3 + y^3 = 0$ дорівнює 5.

Якщо в лінійному рівнянні $ax + by + c = 0$ параметри a і b одночасно не дорівнюють нулю ($a^2 + b^2 \neq 0$), то це рівняння є **рівнянням першого степеня зі змінними x і y**.

Рівняння другого степеня зі змінними x і y має вигляд: $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$, де a, b, c, d, e, f — параметри, причому $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$.

Нагадаємо, що пару чисел $(x_0; y_0)$ називають **розв'язком** рівняння $F(x; y) = 0$, коли $F(x_0; y_0) = 0$ — правильна числова рівність.

Якщо на координатній площині xy позначити всі точки, координати кожної з яких є розв'язком рівняння $F(x; y) = 0$, то отриману фігуру називають **графіком** цього рівняння.

Наприклад, графіком рівняння першого степеня з двома змінними є пряма, графіком рівняння $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, де $R \neq 0$, — коло, графіком рівняння $y = ax^2 + bx + c$, де $a \neq 0$, — парабола.

ПРИКЛАД 1 Побудуйте графік рівняння $x = y^2$.

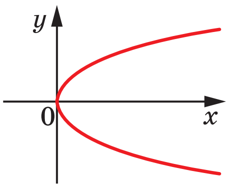


Рис. 12.1

Розв'язання. Якщо в даному рівнянні замінити x на y, а y на x, то отримаємо рівняння $y = x^2$, графіком якого є парабола.

Сказане означає, що шуканий графік — це графік рівняння $y = x^2$, побудований на координатній площині yx, тобто в системі координат, у якій осі абсцис і ординат помінялися місцями.

Таким чином, графіком рівняння $x = y^2$ є парабола, зображена на рисунку 12.1. ◄

ПРИКЛАД 2 Побудуйте графік рівняння $y=\sqrt{1-x^2}$.

Розв'язання. Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} y^2 = 1 - x^2, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$

Отже, шуканим графіком є півколо, яке лежить у верхній півплощині відносно осі абсцис (рис. 12.2). ◄

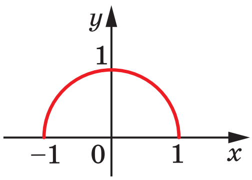


Рис. 12.2

У пп. 5–7 ви навчилися перетворювати графіки функцій, тим самим істотно розширивши клас функцій, графіки яких ви вмієте будувати.

Аналогічні перетворення можна виконувати з графіками рівнянь.

Вісім тверджень (правил), наведених нижче, показують, як, використовуючи графік рівняння $F(x; y) = 0$, можна побудувати графіки рівнянь $F(x + a; y) = 0$; $F(x; y + b) = 0$; $F(-x; y) = 0$; $F(x; -y) = 0$; $F(kx; y) = 0$, де $k > 0$; $F(x; ky) = 0$, де $k > 0$; $F(|x|; y) = 0$; $F(x; |y|) = 0$. Перше з тверджень ми доведемо. Доведення решти тверджень проведіть самостійно.

Нехай точка $(x_0; y_0)$ належить графіку рівняння $F(x; y) = 0$, тобто виконується рівність $F(x_0; y_0) = 0$. Тоді точка $(x_0 - a; y_0)$ належить графіку рівняння $F(x + a; y) = 0$. Справді, $F((x_0 - a) + a; y_0) = F(x_0; y_0) = 0$. Отже, кожній точці графіка рівняння $F(x; y) = 0$ відповідає єдина точка графіка рівняння $F(x + a; y) = 0$. Аналогічно можна показати, що кожна точка графіка рівняння $F(x + a; y) = 0$ є відповідною єдиній точці графіка рівняння $F(x; y) = 0$. Таким чином, між множинами точок указаних графіків рівнянь установлено взаємно однозначну відповідність. Тому всі точки графіка рівняння $F(x + a; y) = 0$ можна отримати, замінивши кожну точку графіка рівняння $F(x; y) = 0$ точкою з тією самою ординатою та з абсцисою, від якої відняли число a. Наведені міркування показують, що справедливим є таке твердження.

Графік рівняння $F(x + a; y) = 0$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ вздовж осі абсцис на a одиниць уліво, якщо $a > 0$, і на $-a$ одиниць управо, якщо $a < 0$.

Наприклад, графік рівняння $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ можна отримати, якщо перенести коло $x^2 + y^2 = 4$ вздовж осі абсцис на дві одиниці вліво (рис. 12.3).

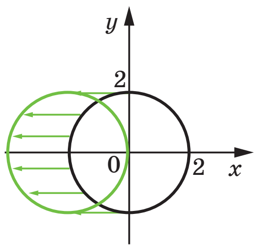


Рис. 12.3

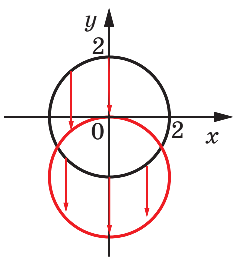


Рис. 12.4

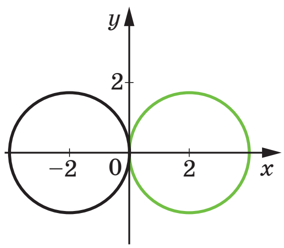


Рис. 12.5

Графік рівняння $F(x; y + b) = 0$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ вздовж осі ординат на b одиниць униз, якщо $b > 0$, і на $-b$ одиниць угору, якщо $b < 0$.

Наприклад, графік рівняння $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ можна отримати, якщо перенести коло $x^2 + y^2 = 4$ вздовж осі ординат на дві одиниці вниз (рис. 12.4).

Графік рівняння $F(-x; y) = 0$ можна отримати в результаті перетворення симетрії відносно осі ординат графіка рівняння $F(x; y) = 0$.

Наприклад, графік рівняння $(-x + 2)^2 + y^2 = 4$ можна отримати, симетрично відобразивши коло $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ відносно осі ординат (рис. 12.5).

Графік рівняння $F(x; -y) = 0$ можна отримати в результаті перетворення симетрії відносно осі абсцис графіка рівняння $F(x; y) = 0$.

Наприклад, графік рівняння $x^2 + (-y + 2)^2 = 4$ можна отримати, симетрично відобразивши коло $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ відносно осі абсцис (рис. 12.6).

Графік рівняння $F\ (kx;\ y) = 0$, де $k > 0$, можна отримати в результаті стискання графіка рівняння $F\ (x;\ y) = 0$ в k разів до осі ординат, якщо $k > 1$, або в результаті розтягнення графіка рівняння $F\ (x;\ y) = 0$ в $\frac{1}{k}$ раза від осі ординат, якщо $0 < k < 1$.

Наприклад, графік рівняння $(2x)^2 + y^2 = 4$ можна отримати, якщо стиснути у 2 рази коло $x^2 + y^2 = 4$ до осі ординат (рис. 12.7). Отриману фігуру називають **еліпсом.**

Графік рівняння $F\ (x;\ ky) = 0$, де $k > 0$, можна отримати в результаті стискання графіка рівняння $F\ (x;\ y) = 0$ в k разів до осі абсцис, якщо $k > 1$, або в результаті розтягнення графіка рівняння $F\ (x;\ y) = 0$ в $\frac{1}{k}$ раза від осі абсцис, якщо $0 < k < 1$.

Наприклад, графік рівняння $x^2 + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 = 4$ можна отримати, якщо розтягнути у 2 рази коло $x^2 + y^2 = 4$ від осі абсцис (рис. 12.8). Отримана фігура також є еліпсом.

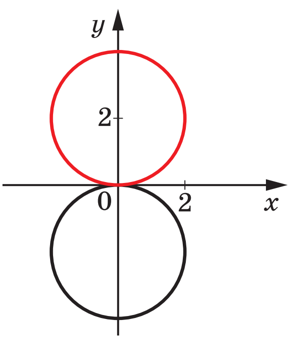


Рис. 12.6

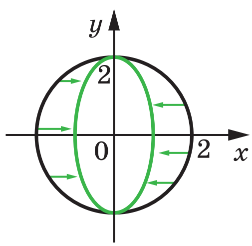


Рис. 12.7

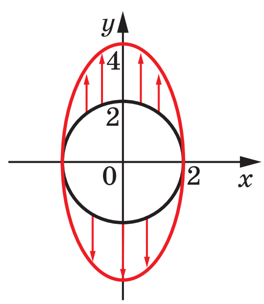


Рис. 12.8

Графік рівняння $F\ (|x|;\ y) = 0$ можна отримати з графіка рівняння $F\ (x;\ y) = 0$ таким чином: побудувати фігуру M_1, яка є графіком рівняння $F\ (x;\ y) = 0$ при $x \geqslant 0$, і побудувати фігуру M_2, симетричну фігурі M_1 відносно осі ординат. Фігура $M_1 \cup M_2$ є шуканим графіком.

На рисунку 12.9 зображено графік рівняння $(|x| - 1)^2 + y^2 = 4$.

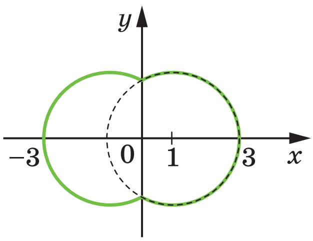


Рис. 12.9

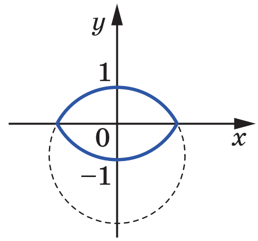


Рис. 12.10

Графік рівняння $F(x; |y|) = 0$ можна отримати з графіка рівняння $F(x; y) = 0$ таким чином: побудувати фігуру M_1, яка є графіком рівняння $F(x; y) = 0$ при $y \geqslant 0$, і побудувати фігуру M_2, симетричну фігурі M_1 відносно осі абсцис. Фігура $M_1 \cup M_2$ є шуканим графіком.

На рисунку 12.10 зображено графік рівняння $x^2 + (|y| + 1)^2 = 4$.

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік рівняння $|x| + |y| = 1$.

Розв'язання. Нехай $F(x; y) = x + y = 1$. Тоді шуканий графік можна побудувати за такою схемою (рис. 12.11):

$$\boxed{F(x; y) = 0 \longrightarrow F(|x|; y) = 0 \longrightarrow F(|x|; |y|) = 0.}$$ ◄

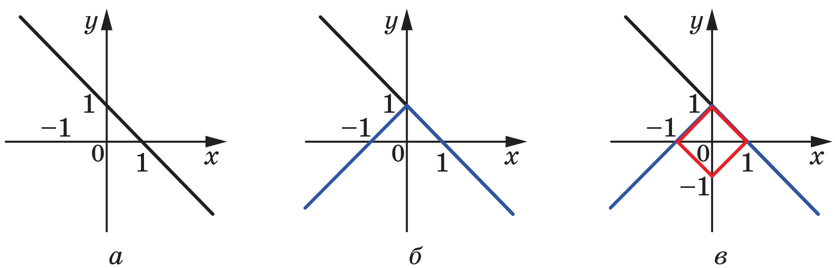


Рис. 12.11

ПРИКЛАД 4 При яких значеннях параметра a модуль різниці коренів рівняння $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ набуває найбільшого значення?

Розв'язання. Перепишемо дане рівняння так: $(x - 3)^2 + (a - 2)^2 = 1$.

Його графіком у системі координат xa є коло (рис. 12.12).

Якщо пряма $a = a_0$ перетинає коло в точках A і B, то модуль різниці ко-

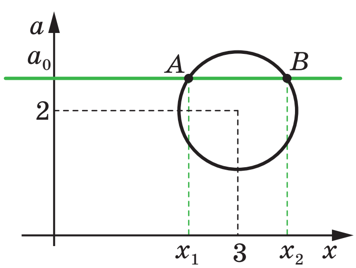


Рис. 12.12

ренів рівняння дорівнює довжині відрізка AB (рис. 12.12). Отже, треба знайти таке положення прямої $a = a_0$, при якому хорда AB має найбільшу довжину. Ця умова виконується тоді, коли хорда AB є діаметром кола. Звідси $a = 2$.

Відповідь: $a = 2$. ◄

Як, використовуючи графік рівняння $F(x; y) = 0$, побудувати графіки рівнянь:

1) $F(x + a; y) = 0$;
2) $F(x; y + b) = 0$;
3) $F(-x; y) = 0$;
4) $F(x; -y) = 0$;
5) $F(kx; y) = 0$, де $k > 0$;
6) $F(x; ky) = 0$, де $k > 0$;
7) $F(|x|; y) = 0$;
8) $F(x; |y|) = 0$?

ВПРАВИ

12.1.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 8x + y^2 + 4y + 20 = 0$;
2) $5x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 1 = 0$;
3) $\sqrt{y-1} = \sqrt{-x^2(x-1)^2}$;
4) $y^2 = \sqrt{1-x^2} - 1$.

12.2.° Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 6x + y^2 + 4y + 13 = 0$;
2) $x^2 + 2xy + 10y^2 - 12y + 4 = 0$;
3) $\sqrt{x-1} = \sqrt{-y^2(y+1)^2}$;
4) $x^2 + \sqrt{y^2+1} = 1$.

12.3.° Побудуйте графік рівняння:

1) $x^2 = y^2$;
2) $x^2 = 4$;
3) $(x + 2)(y - 3) = 0$;
4) $y^2 + 6xy = 0$;
5) $xy - 3x + y = 3$;
6) $y^2 - 5xy + 4x^2 = 0$.

12.4.° Побудуйте графік рівняння:

1) $x^2 = 4y^2$;
2) $y^2 = 1$;
3) $xy - 4x + 2y = 8$;
4) $x^2 - 6xy + 5y^2 = 0$.

12.5.° Побудуйте графік рівняння:

1) $|y| = x$;
2) $|y| = x - 2$;
3) $|y - 1| = x - 2$;
4) $|x + 2y| = 1$;
5) $|x + 3| = |y - 2|$;
6) $xy = |x|$;
7) $(x + 2)y = |y|$;
8) $|x|y = 1$;
9) $x|y| = 1$;
10) $|xy| = 1$.

12.6.° Побудуйте графік рівняння:

1) $|y - 1| = x$;
2) $|y + 1| = x + 3$;
3) $|x - 3y| = 2$;
4) $(x - 4)^2 = (y + 1)^2$;
5) $xy = |y|$;
6) $|x|y = -6$;
7) $x|y| = -6$.

12.7.• На рисунку 12.13 зображено графік рівняння $F(x; y) = 0$. За допомогою цього графіка побудуйте графік рівняння:

1) $F(-x; y) = 0$; 3) $F(2x; y) = 0$; 5) $F(|x + 1|; y) = 0$.
2) $F(x; y - 1) = 0$; 4) $F(x; |y|) = 0$;

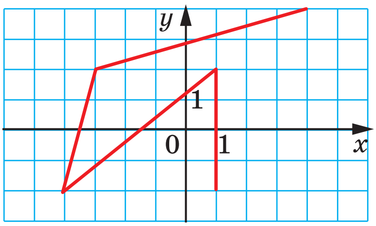


Рис. 12.13

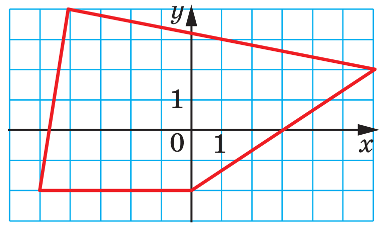


Рис. 12.14

12.8.• На рисунку 12.14 зображено графік рівняння $F(x; y) = 0$. За допомогою цього графіка побудуйте графік рівняння:

1) $F(x; -y) = 0$; 3) $F(x; 2y) = 0$; 5) $F(x; |y - 1|) = 0$.
2) $F(x + 1; y) = 0$; 4) $F(|x|; |y|) = 0$;

12.9.• На координатній площині xy побудуйте графік рівняння:

1) $x = \sqrt{y}$; 5) $x - 2 = \sqrt{-y}$; 9) $|x| = \sqrt{|y|}$;
2) $x = \sqrt{y-1}$; 6) $x = \sqrt{|y|}$; 10) $|x - 1| = \sqrt{|y+1|}$;
3) $x = \sqrt{y-1} + 2$; 7) $x = \sqrt{|y+1|}$; 11) $|x| - 1 = \sqrt{|y+1|}$;
4) $x = \sqrt{-y}$; 8) $x = \sqrt{|y|+1}$; 12) $|x| - 1 = \sqrt{|y|+1}$.

12.10.• Побудуйте графік рівняння:

1) $|y| = \sqrt{x}$; 4) $|y| + 1 = \sqrt{x+1}$; 7) $|y| + 1 = \sqrt{|x|+1}$.
2) $|y+1| = \sqrt{x}$; 5) $|y+1| = \sqrt{|x|+1}$;
3) $|y| = \sqrt{x+1}$; 6) $|y| = \sqrt{|x+1|}$;

12.11.• Побудуйте графік рівняння:

1) $x = (y - 1)^2$; 3) $x + 2 = (y - 1)^2$; 5) $|x| + 2 = (|y| - 1)^2$.
2) $|x| = (y - 1)^2$; 4) $|x + 2| = (|y| - 1)^2$;

12.12.• Побудуйте графік рівняння:

1) $|y| = x^2$; 4) $|y - 1| = x^2$; 7) $|y| = (|x| - 1)^2$;
2) $|y| = x^2 + 1$; 5) $|y| = (x - 1)^2$; 8) $|y - 1| = (|x| - 1)^2$.
3) $|y| = 1 - x^2$; 6) $|y - 1| = (x - 1)^2$;

12.13.• Побудуйте графік рівняння:

1) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$; 3) $(|x| - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$;
2) $(3x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$; 4) $(|x| - 2)^2 + (|y| - 1)^2 = 9$.

12.14.• Побудуйте графік рівняння:

1) $(x-1)^2+(y-2)^2=16$;
2) $(x-1)^2+(4y-2)^2=16$;
3) $(|x|-1)^2+(y-2)^2=16$;
4) $(|x|-1)^2+(|y|-2)^2=16$.

12.15.• Побудуйте графік рівняння:

1) $|x|+|y|=2$;
2) $|x-1|+|y|=2$;
3) $|x-1|+|y+2|=2$;
4) $|2x-1|+|y+2|=2$;
5) $|x-1|+|2y+2|=2$.

12.16.• Побудуйте графік рівняння:

1) $|x|-|y|=2$;
2) $|x+1|-|y|=2$;
3) $|x+1|-|y-1|=2$;
4) $|2x+1|-|y-1|=2$;
5) $|x+1|-|2y-1|=2$.

12.17.• Побудуйте графік рівняння:

1) $y=\sqrt{4-x^2}$;
2) $y=-\sqrt{4-x^2}$;
3) $y-1=\sqrt{4-x^2}$;
4) $|y|=\sqrt{4-x^2}$;
5) $|y-1|=\sqrt{4-x^2}$;
6) $|y|-1=\sqrt{4-x^2}$;
7) $y=\sqrt{2x-x^2}$;
8) $y=\sqrt{2|x|-x^2}$.

12.18.• Побудуйте графік рівняння:

1) $x=\sqrt{1-y^2}$;
2) $x=-\sqrt{1-y^2}$;
3) $x+2=\sqrt{1-y^2}$;
4) $|x|=\sqrt{1-y^2}$;
5) $|x+2|=\sqrt{1-y^2}$;
6) $|x|+2=\sqrt{1-y^2}$;
7) $x=\sqrt{4y-y^2}$;
8) $x=\sqrt{4|y|-y^2}$.

12.19.• Побудуйте графік рівняння:

1) $\dfrac{y-x^2}{y-x}=0$;
2) $\dfrac{x^2+y^2-1}{|x|-1}=0$;
3) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1}=0$;
4) $\dfrac{(y^2-1)(y-x)}{x^2-4}=0$;
5) $\dfrac{x^2-x}{y-x}=1$;
6) $\dfrac{3x^2+y^2-2}{x^2-y^2}=1$;
7) $\dfrac{x^2-y^2}{|x|-|y|}=1$;
8) $\dfrac{x^2+x}{y^2+y}=1$.

12.20.• Побудуйте графік рівняння:

1) $\dfrac{y^2-x}{x+y}=0$;
2) $\dfrac{x^2+y^2-1}{|y|-1}=0$;

3) $\frac{|x|-|y|}{y-x^2}=0$;

4) $\frac{|x|+|y|-1}{1-x^2-y^2}=0$;

5) $\frac{(y^2-4)(y+x)}{x^2-1}=0$;

6) $\frac{y^2+y}{x+y}=1$;

7) $\frac{3|x|+|y|-2}{|x|-|y|}=1$;

8) $\frac{y^2-y}{x^2-x}=1$.

12.21.•• Визначте кількість коренів рівняння $(x^2+a^2-1)(a-x)=0$ залежно від значення параметра a.

12.22.•• Визначте кількість коренів рівняння $(4-x^2-a^2)(3a-x^2)=0$ залежно від значення параметра a.

12.23.•• При яких значеннях параметра a рівняння $ax-1=\sqrt{8x-x^2-15}$ має єдиний корінь?

12.24.•• При яких значеннях параметра a рівняння $ax+\sqrt{-5-x^2-6x}=2$ має два корені?

12.25.•• Побудуйте графік рівняння $(x^4+1)(y^4+1)=4x^2y^2$.

12.26.•• Побудуйте графік рівняння $(x^2-2x+2)(y^2+4y+6)=2$.

12.27.* Побудуйте графік рівняння $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=2-x^2-y^2$.

12.28.* Побудуйте графік рівняння $\{x\}=\{y\}$.

12.29.* Побудуйте графік рівняння $\{x\}=-\{y\}$.

12.30.* Знайдіть найменше значення виразу $|x|+|y|$, якщо $x^2+(y-4)^2=1$.

12.31.* Знайдіть найменше значення виразу x^2+y^2, якщо $|x+3|+|y|=1$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

12.32. Спростіть вираз $\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-4}}$, якщо $x>2$.

12.33. Розв'яжіть рівняння $7\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=9$.

12.34. Складіть квадратне рівняння, корені якого більші за відповідні корені рівняння $x^2+4x-9=0$ на 1.

12.35. Квадрату, площа якого дорівнює 6 см², належать три многокутники, площа кожного з яких дорівнює 3 см². Доведіть, що серед цих многокутників знайдуться два, площа спільної частини яких не менша від 1 см².

13. Графічний метод розв'язування систем рівнянь із двома змінними

У 7 класі ви ознайомилися з графічним методом розв'язування систем рівнянь. Нагадаємо, що цей метод полягає в пошуку координат спільних точок графіків рівнянь, які входять до системи.

За два навчальних роки ви набули значного досвіду в побудові графіків функцій і рівнянь, що розширило можливості застосування графічного методу для розв'язування систем рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть графічно систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0, \\ y = 2x^2 - 8x + 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Перше рівняння системи рівносильне такому: $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$. Його графіком є коло радіуса $\sqrt{5}$ із центром у точці $(2; -1)$, зображене на рисунку 13.1.

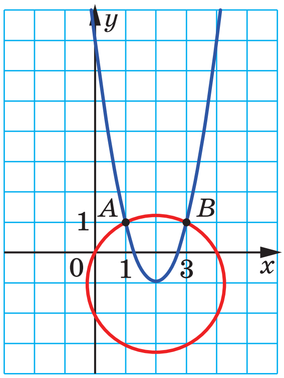


Рис. 13.1

Графіком другого рівняння є парабола з вершиною в точці $(2; -1)$, вітки якої напрямлені вгору. Коло й парабола перетинаються у двох точках: $A\ (1; 1)$ і $B\ (3; 1)$ (рис. 13.1).

Як ви знаєте, графічний метод не гарантує того, що отриманий результат є точним. Тому знайдені розв'язки потрібно перевірити. Перевірка підтверджує, що пари чисел $(1; 1)$ і $(3; 1)$ є розв'язками даної системи.

Відповідь: $(1; 1)$, $(3; 1)$. ◄

Зауважимо, що ця система є «зручною» для застосування графічного методу: координати точок перетину графіків виявилися цілими числами. Зрозуміло, що така ситуація траплятиметься далеко не завжди. Тому графічний метод є найбільш ефективним тоді, коли потрібно визначити кількість розв'язків системи рівнянь або достатньо знайти розв'язки наближено. Наприклад, за допомогою графічної інтерпретації легко з'ясувати, скільки розв'язків має система лінійних рівнянь із двома змінними.

Розглянемо систему $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ у якій $a_1^2 + b_1^2 \neq 0$ і $a_2^2 + b_2^2 \neq 0$.

Кількість розв'язків цієї системи залежить від взаємного розташування двох прямих на площині, які є графіками рівнянь системи:

- якщо прямі перетинаються, то система має єдиний розв'язок;
- якщо прямі збігаються, то система має безліч розв'язків;
- якщо прямі паралельні, то система розв'язків не має.

ПРИКЛАД 2 Визначте кількість розв'язків системи рівнянь $\begin{cases}(a+3)x+4y=5-3a,\\ 2x+(5+a)y=8\end{cases}$ залежно від значення параметра a.

Розв'язання. Графіком першого рівняння системи є невертикальна пряма $y=-\dfrac{a+3}{4}x+\dfrac{5-3a}{4}$.

Якщо $a=-5$, то графіком другого рівняння системи є вертикальна пряма $x=4$. Вертикальна і невертикальна прямі завжди мають тільки одну спільну точку, тому в цьому випадку система має єдиний розв'язок.

Нехай $a \neq -5$. Перепишемо задану систему так:

$$\begin{cases} y=-\dfrac{a+3}{4}x+\dfrac{5-3a}{4},\\ y=-\dfrac{2}{5+a}x+\dfrac{8}{5+a}.\end{cases}$$

Якщо $-\dfrac{a+3}{4} \neq -\dfrac{2}{5+a}$, то прямі, які є графіками рівнянь цієї системи, мають різні кутові коефіцієнти, а отже, вони перетинаються.

Якщо виконується рівність $-\dfrac{a+3}{4}=-\dfrac{2}{5+a}$, то зазначені прямі або паралельні, або збігаються.

Прямі паралельні, якщо $\begin{cases}\dfrac{a+3}{4}=\dfrac{2}{5+a},\\ \dfrac{5-3a}{4}\neq\dfrac{8}{5+a}.\end{cases}$ Звідси $a=-7$.

Прямі збігаються, якщо $\begin{cases}\dfrac{a+3}{4}=\dfrac{2}{5+a},\\ \dfrac{5-3a}{4}=\dfrac{8}{5+a}.\end{cases}$ Звідси $a=-1$.

Відповідь: якщо $a=-1$, то система має безліч розв'язків; якщо $a=-7$, то розв'язків немає; якщо $a \in \mathbb{R} \setminus \{-7, -1\}$, то система має єдиний розв'язок. ◄

ПРИКЛАД 3 При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} x+3|y|+5=0, \\ (x-a)^2+y^2=4 \end{cases}$ має рівно три розв'язки?

Розв'язання. Легко встановити (зробіть це самостійно), що графіком першого рівняння системи є об'єднання двох променів, які мають спільний початок A $(-5; 0)$ (рис. 13.2).

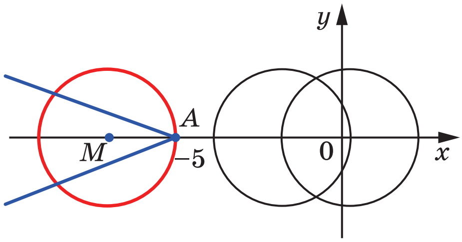


Рис. 13.2

Графіком другого рівняння системи є коло із центром у точці $(a; 0)$ і радіусом 2.

Знайдемо таке положення кола, при якому воно має три спільні точки з графіком першого рівняння системи. З рисунка 13.2 видно, що така умова виконується, якщо коло проходить через точку A та його центр, точка M, лежить ліворуч від цієї точки. Оскільки радіус кола дорівнює 2, то $MA = 2$. Тому центр кола знаходиться в точці M $(-7; 0)$. Звідси $a = -7$.

Відповідь: $a = -7$. ◄

?

1. Опишіть, у чому полягає графічний метод розв'язування систем рівнянь.
2. Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь із двома змінними?

ВПРАВИ

13.1.° Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y+x^2=3, \\ y=x+1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ x+y=2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=-12; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x=y^2-2y, \\ x+y=2. \end{cases}$

13.2.° Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x + 2, \\ xy = 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = y^2 - 4y, \\ x + y = 4. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ 2x + y = -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2; \end{cases}$

13.3.° Визначте графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ y = x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ y = 6 - x^2; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x = y^2 - 4y, \\ y = x^2 - 4x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 2 - x^2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = -6, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3, \\ x^2 + y^2 + 6x + 2y = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - 4x + y = -1, \\ xy = 4; \end{cases}$ 9) $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x = y^2 - 1. \end{cases}$

13.4.° Визначте графічно кількість розв'язків системи рівнянь:

1) $\begin{cases} y = (x - 5)^2, \\ xy = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x^2 = 1, \\ x^2 + y = 4x; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = 1, \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - x = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ xy = 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} |x + 1| + |y| = 1, \\ x + y^2 + 1 = 0. \end{cases}$

13.5.° Доведіть, що система рівнянь не має розв'язків:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0{,}01, \\ y = x^2 + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 13, \\ y = -x^2 + 2x + 2. \end{cases}$

13.6.• Скільки розв'язків залежно від значення параметра a має система рівнянь:

1) $\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - x = 1, \\ xy = a? \end{cases}$

13.7.• Скільки розв'язків залежно від значення параметра a має система рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |y| = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a - |x|; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| + |y| = 1, \\ x^2 + y^2 = a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = 4? \end{cases}$

13.8.•• При яких значеннях параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} (2a - 3)x - ay = 3a - 2, \\ 5x - (2a + 3)y = 5 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок?

13.9.•• Доведіть, що система рівнянь $\begin{cases} ax+(a-1)y=2a, \\ 3(a+2)x+(4a+1)y=a+5 \end{cases}$ має єдиний розв'язок при всіх значеннях параметра a.

13.10.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} 2x+(9a^2-2)y=3a, \\ x+y=1 \end{cases}$ не має розв'язків.

13.11.•• При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} (a-2)x+27y=4{,}5, \\ 2x+(a+1)y=-1 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

13.12.•• Знайдіть усі значення параметрів a і b, при яких збігаються множини розв'язків систем рівнянь

$$\begin{cases} ax+2y=b+1, \\ x+y=3 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} 2x+y=a^2+2, \\ x+3y=3. \end{cases}$$

13.13.•• Знайдіть усі значення параметра b, при яких система рівнянь $\begin{cases} 3x+y=a, \\ ax-y=b \end{cases}$ при будь-яких значеннях параметра a має хоча б один розв'язок.

13.14.•• Визначте, при яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a), \\ (x+y)^2=14 \end{cases}$ має рівно два розв'язки.

13.15.•• Визначте, при яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} (y-x)^2=4, \\ x^2+y^2=3-a \end{cases}$ має рівно два розв'язки.

13.16.•• Знайдіть найменше значення параметра c, при якому система рівнянь $\begin{cases} \left(x-c\sqrt{3}\right)^2+y^2-2y=0, \\ \sqrt{3}\,|x|-y=4 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

13.17.•• Знайдіть найбільше значення параметра c, при якому система рівнянь $\begin{cases} \left(x+c\sqrt{3}\right)^2+y^2+6y+8=0, \\ \sqrt{3}\,|x|+y=6 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

13.18.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} x=a+\sqrt{y}, \\ y^2-x^2-2x+4y+3=0 \end{cases}$ має розв'язки.

13.19.* Доведіть, що точки перетину парабол $y=x^2-5$ і $x=y^2-4$ лежать на одному колі.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

13.20. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $7^n \cdot 2^{3n} - 3^{2n}$ кратне 47.

13.21. При яких значеннях m рівняння $mx^2 + 2x + 1 = 0$ має єдиний корінь?

13.22. Про додатні числа a і b відомо, що $\frac{a^2 - 6b^2}{ab} = -1$. Знайдіть значення виразу $\frac{a^2 + 4b^2}{2ab}$.

13.23. Доведіть, що значення виразу $\sqrt{23 - 8\sqrt{7}} + \sqrt{23 + 8\sqrt{7}}$ є цілим числом.

14. Розв'язування систем рівнянь із двома змінними методом підстановки і методами додавання та множення

Означення. **Дві системи рівнянь із двома змінними називають *рівносильними*, якщо множини їхніх розв'язків рівні.**

Наприклад, системи рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0, \\ \sqrt{1-x} - \sqrt{1-y} = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} |x| + |y| = 0, \\ \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} = 2 \end{cases}$ є рівносильними, оскільки множина розв'язків кожної з них складається з одного елемента — пари (0; 0).

Означення. **Якщо множина розв'язків першої системи рівнянь є підмножиною множини розв'язків другої системи рівнянь, то другу систему рівнянь називають *наслідком* першої системи рівнянь.**

Наприклад, система $\begin{cases} x = y, \\ (x + y - 2)(x + y - 4) = 0 \end{cases}$ є наслідком системи рівнянь $\begin{cases} x = y, \\ x + y = 2. \end{cases}$

У 7 класі ви навчилися розв'язувати системи двох лінійних рівнянь із двома змінними. При цьому ви застосовували метод підстановки або метод почленного додавання лівих і правих частин рівнянь системи. У ряді випадків ці прийоми є також ефективними для розв'язування нелінійних систем рівнянь.

«Законність» методів підстановки і додавання забезпечують такі дві теореми.

Теорема 14.1. ***Якщо в системі рівнянь***

$$\begin{cases} y = f(x), \\ F(x;\ y) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

замінити в другому рівнянні змінну y виразом $f(x)$, то отримаємо систему

$$\begin{cases} y = f(x), \\ F(x;\ f(x)) = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

яка рівносильна даній.

Доведення. Нехай пара чисел $(x_0;\ y_0)$ є розв'язком системи (1). Тоді отримуємо дві правильні числові рівності: $y_0 = f(x_0)$ і $F(x_0;\ y_0) = 0$. У другій рівності замінимо число y_0 числом $f(x_0)$, що йому дорівнює. Отримаємо правильну числову рівність $F(x_0;\ f(x_0)) = 0$. Сказане означає, що пара $(x_0;\ y_0)$ є розв'язком системи (2).

Аналогічно можна показати, що коли пара $(x_1;\ y_1)$ є розв'язком системи (2), то вона також є розв'язком системи (1).

Отже, системи (1) і (2) рівносильні. ◄

Теорема 14.2. ***Якщо в системі рівнянь*** $\begin{cases} F(x;\ y) = 0, \\ G(x;\ y) = 0 \end{cases}$ ***замінити одне з рівнянь рівнянням $F(x;\ y) + G(x;\ y) = 0$, то отримаємо систему, яка рівносильна даній.***

Доведення теореми 14.2 аналогічно доведенню теореми 14.1. Проведіть його самостійно.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1} - \dfrac{1}{y+1} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 - x - 5 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо: $\begin{cases} \dfrac{2}{y^2-1} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 = x + 5. \end{cases}$

Підставивши в перше рівняння замість y^2 двочлен $x + 5$, отримаємо систему, рівносильну даній:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+4} = \dfrac{1}{x}, \\ y^2 = x + 5. \end{cases} \quad \text{Звідси} \quad \begin{cases} 2x = x + 4, \\ y^2 = x + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y^2 = 9; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4, \\ y = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 4, \\ y = -3. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: (4; 3), (4; –3). ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}(x-y)\left(y-\dfrac{1}{x}\right)=0,\\ y^2-x=0.\end{cases}$

Розв'язання. При розв'язуванні цієї системи здається природним перейти до такої сукупності систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=0,\\ y^2-x=0,\end{cases}\\ \begin{cases}y-\dfrac{1}{x}=0,\\ y^2-x=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Але такий перехід не є рівносильним. Справді, множина розв'язків першої системи сукупності містить пару (0; 0), яка не є розв'язком початкової системи.

Причина появи стороннього розв'язку полягає в тому, що при заміні системи сукупністю не було враховано область визначення початкової системи рівнянь — множина $\{(x;\ y) \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ y \in \mathbb{R}\}$.

Насправді задана система рівносильна такій сукупності систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=0,\\ y^2-x=0,\\ x\neq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}y-\dfrac{1}{x}=0,\\ y^2-x=0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Завершіть розв'язання самостійно.

Відповідь: (1; 1). ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}x^2+y^2-x=2,\\ 2x^2-xy-4x+y+2=0.\end{cases}$

Розв'язання. Розкладемо на множники ліву частину другого рівняння системи: $2x^2 - xy - 4x + y + 2 = 2x^2 - 4x + 2 - xy + y = 2(x-1)^2 - y(x-1) = (x-1)(2x-2-y)$.

Перепишемо задану систему:

$$\begin{cases}x^2+y^2-x=2,\\ (x-1)(y-2x+2)=0.\end{cases}$$

Ця система рівносильна сукупності двох систем.

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 2, \\ x = 1; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = \sqrt{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1, \\ y = -\sqrt{2}. \end{cases} \end{array}\right.$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 2, \\ y = 2x - 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + (2x-2)^2 - x = 2, \\ y = 2x - 2; \end{cases}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{9+\sqrt{41}}{10}, \\ x = \dfrac{9-\sqrt{41}}{10}, \end{array}\right. \\ y = 2x - 2; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{9+\sqrt{41}}{10}, \\ y = \dfrac{-1+\sqrt{41}}{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{9-\sqrt{41}}{10}, \\ y = \dfrac{-1-\sqrt{41}}{5}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left(1; \sqrt{2}\right)$, $\left(1; -\sqrt{2}\right)$,

$\left(\dfrac{9+\sqrt{41}}{10}; \dfrac{-1+\sqrt{41}}{5}\right)$, $\left(\dfrac{9-\sqrt{41}}{10}; \dfrac{-1-\sqrt{41}}{5}\right)$. ◄

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0, \\ x^2 - 2xy + 1 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Додамо почленно ліві й праві частини рівнянь системи. Отримаємо:

$$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 2x + 1 = 0,$$
$$(x - y)^2 + (x - 1)^2 = 0.$$

Початкова система рівносильна такій:

$$\begin{cases} (x-y)^2 + (x-1)^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2x = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Перше рівняння системи (*), у свою чергу, рівносильне системі $\begin{cases} x = 1, \\ y = x, \end{cases}$ розв'язок якої — пара (1; 1). За допомогою перевірки переконуємося, що пара (1; 1) є розв'язком другого рівняння системи (*).

Відповідь: (1; 1). ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy(x+y) = -2. \end{cases}$

Розв'язання. Помножимо обидві частини другого рівняння на 3 та розкриємо дужки:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ 3x^2y + 3y^2x = -6. \end{cases}$$

Ця система рівносильна такій: $\begin{cases} x^3 + y^3 + 3x^2y + 3y^2x = 1, \\ xy(x+y) = -2. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} (x+y)^3 = 1, \\ xy(x+y) = -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2. \end{cases}$

Отриману систему можна розв'язати методом підстановки. Але існує й інший прийом. Із теореми, оберненої до теореми Вієта, випливає, що числа x і y є коренями квадратного рівняння $t^2 - t - 2 = 0$, яке має корені -1 і 2. Звідси, якщо $x = -1$, то $y = 2$, і навпаки, якщо $x = 2$, то $y = -1$.

Відповідь: $(-1; 2)$, $(2; -1)$. ◄

У ряді випадків для розв'язування систем нелінійних рівнянь ефективними є методи почленного множення і ділення лівих і правих частин рівнянь системи.

Теорема 14.3. ***Якщо в системі рівнянь*** $\begin{cases} F(x; y) = c_1, \\ G(x; y) = c_2, \end{cases}$ ***де*** $c_1 \neq 0$ ***і*** $c_2 \neq 0$, ***замінити одне з рівнянь рівнянням*** $F(x; y)\, G(x; y) = c_1c_2$ ***або рівнянням*** $\dfrac{F(x; y)}{G(x; y)} = \dfrac{c_1}{c_2}$, ***то отримаємо систему, яка рівносильна даній.***

Доведення теореми 14.3 аналогічне доведенню теореми 14.1. Проведіть його самостійно.

Звернемо увагу, що теорему 14.3 не можна застосовувати до тих систем, у яких не виконується вимога $c_1 \neq 0$ і $c_2 \neq 0$. Наприклад, система $\begin{cases} x - y = 0, \\ xy = 1 \end{cases}$ має два розв'язки: $(1; 1)$ і $(-1; -1)$. Якщо друге рівняння цієї системи замінити таким: $xy(x - y) = 0$, то отримаємо систему $\begin{cases} x - y = 0, \\ xy(x - y) = 0, \end{cases}$ яка має безліч розв'язків виду $(t; t)$, де $t \in \mathbb{R}$.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2y^3 = 81, \\ x^3y^2 = 3. \end{cases}$

Розв'язання. Задана система рівносильна такій: $\begin{cases} x^5y^5 = 243, \\ x^3y^2 = 3. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} xy = 3, \\ x(xy)^2 = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} xy = 3, \\ x = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}, \\ y = 9. \end{cases}$

Відповідь: $\left(\dfrac{1}{3}; 9\right)$. ◄

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} (x+y)\,xy = 6, \\ (x-y)\,xy = 2. \end{cases}$

Розв'язання. Задана система рівносильна такій: $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = 3, \\ (x+y)\,xy = 6. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} x+y = 3x-3y, \\ (x+y)\,xy = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y, \\ 3y \cdot 2y^2 = 6; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2y, \\ y^3 = 1. \end{cases}$

Відповідь: (2; 1). ◄

?

1. Які дві системи рівнянь називають рівносильними?
2. Яку систему рівнянь називають наслідком даної?
3. Сформулюйте теорему, яка дає змогу розв'язувати системи рівнянь із двома змінними методом підстановки.
4. Сформулюйте теорему, яка дає змогу розв'язувати системи рівнянь із двома змінними методом почленного додавання лівих і правих частин рівнянь системи.
5. Сформулюйте теорему, яка дає змогу розв'язувати системи рівнянь із двома змінними методом почленного множення і ділення лівих і правих частин рівнянь системи.

ВПРАВИ

14.1.° Розв'яжіть методом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y - x = 2, \\ x^2 - 2xy = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy = 15, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x + 4y = 24, \\ xy = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 4y = 2, \\ xy + 2y = 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = 8; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y + 2x = 0, \\ x^2 + y^2 - 6y = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 4y - 3x = 4, \\ 5x^2 + 16y = 60; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 - x - 2y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$

14.2.° Розв'яжіть методом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y - 2x^2 = 2, \\ 3x + y = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63, \\ y - x = 3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} (x-1)(y-2) = 2, \\ x + y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 8, \\ x + y = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x - 2y = 3, \\ 3x^2 - 8y = -5. \end{cases}$

14.3.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12}, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{3x + y}{x - 1} - \dfrac{x - y}{2y} = 2, \\ x - y = 4; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \dfrac{y - 2}{x - 1} = 2, \\ y - 2x = x^2 - 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{y} = 1, \\ x + 5y = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{2}{y - 1} + \dfrac{3}{x + 1} = \dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{1}{x - 2} = -\dfrac{3}{y}; \end{cases}$

14.4.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2}, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \dfrac{1}{y + 1} = \dfrac{2}{x - 1}, \\ \dfrac{4}{x + 2} + \dfrac{1}{y - 1} = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{5}, \\ 3x + y = 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{4}{x - 1} - \dfrac{5}{y + 1} = 1, \\ \dfrac{4}{x + 5} = \dfrac{2}{y}. \end{cases}$

14.5.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y^2 = 2, \\ 2y^2 + x^2 = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y^2 = 3, \\ x^4 + y^4 + 6x = 29; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2, \\ x^3 - xy^2 + x^2 = 3. \end{cases}$

14.6.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y^3 = 2, \\ 2x + x^2 + 5y^3 = 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ y^3 + x^2y + y^2 = 6. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 + y = 1, \\ y^3 - 4y^2 + 4y + x^6 = 1; \end{cases}$

14.7.° Розв'яжіть систему рівнянь, використовуючи теорему, обернену до теореми Вієта:

1) $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy^3 = 8, \\ x + y^3 = 9. \end{cases}$

14.8.° Розв'яжіть систему рівнянь, використовуючи теорему, обернену до теореми Вієта:

1) $\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^5 y = 32, \\ x^5 + y = 33. \end{cases}$

14.9.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} (x-2)(y+2) = 0, \\ x^2 + 2y^2 - 3x = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (x+4)(y-1) = x^2 + 5x + 4, \\ x^2 - y^2 - 3x + 8 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 2xy = 7, \\ (2x - y)\,y = y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 23, \\ x^2 + y^2 + 2xy = 9. \end{cases}$

14.10.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 5y = 5, \\ (x-2)(y-1) = 0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x^2 - xy - 3y = 7, \\ 2x^2 + x - 3 = (x-1)(y+5); \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x-1)\,y = 2x - 2, \\ x^2 + y^2 + 3xy = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 9, \\ 4x^2 + xy + 4y^2 = 18. \end{cases}$

14.11.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 2, \\ 2x^2 - y^2 + 2x - y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2y^2 + x^2 + xy = 4, \\ 3xy - 2y = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + xy = 15, \\ y^2 + xy = 10; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 + y + \frac{1}{4} = 0, \\ y^2 + x + \frac{1}{4} = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 18, \\ xy + 4y^2 = 7; \end{cases}$

14.12.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x^2 + xy - 2x + y - 5 = 0, \\ 2x^2 - xy - 3x - y - 5 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 12, \\ 4x + 3xy - x^2 = 16; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - xy = 6, \\ y^2 - xy = 3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} = 0, \\ y^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 4xy = 5, \\ y^2 - 2xy = -1; \end{cases}$

14.13.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x^2+3y^2-11x-7y+10=0, \\ x^2+y^2-4x-3y+5=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2-2xy+2y^2-3x+2y-2=0, \\ x^2-xy+y^2-x-y=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x^2-3y^2+10x-12y=17, \\ 2x^2+y^2+4x+4y=-2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^3+2x^2y+xy^2-x-y=2, \\ y^3+2xy^2+x^2y+x+y=6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-x+1=y, \\ y^2-y+1=x; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^3+3x^2y+3xy^2=1, \\ y^3+x+y=1. \end{cases}$

14.14.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2+y^2+2x=23-2y, \\ 2x^2+2y^2+5y=27+3x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2-5xy+3x-2y=2, \\ 5xy-2x^2+7x-8y=-22; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x^2+y)^2(x^2-xy+y)=4, \\ (x^2+y)^2(x^2+xy+y)=12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} y^2+x+1=-y, \\ x^2+y+1=-x; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^3-3x^2y+3xy^2=-1, \\ y^3+y-x=1. \end{cases}$

14.15.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2y^5=1, \\ x^5y^2=-1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x-y)^2(x+2y)=4, \\ (x-y)^4(x+2y)^5=16; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3y+x^2y^2=6, \\ x^2y^2+xy^3=12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2xy+6x-y^2-3y=14, \\ 2x^2+4x-xy-2y=35; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+4xy+3y^2-x-3y=24, \\ 2x^2+xy-y^2-2x+y=6; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=40, \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=10. \end{cases}$

14.16.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^8y^6=64, \\ x^6y^8=256; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x+y)(x-2y)^4=81, \\ (x+y)^6(x-2y)^3=27; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy^3+x^3y=-10, \\ x^2y^4+x^4y^2=20; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2+3xy+x+3y=8, \\ 3y^2+xy-2x-6y=-4; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2+xy-2y^2+x+2y=-7, \\ x^2-3xy+2y^2+x-2y=5; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x^2+xy-4x-2y=5, \\ x^2-3xy-2x+6y=6. \end{cases}$

14.17.•• Дано два рівняння $ax^2+x+1=0$ і $x^2+ax+1=0$. Знайдіть усі значення a, при яких ці рівняння мають принаймні один спільний корінь.

14.18.•• Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases}(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2y^2)=1+4y^4,\\(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2y^2)=1-4y^4.\end{cases}$$

14.19.•• Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases}(x^2+y^2-xy)(x-y)=1+y^3,\\(x^2+y^2+xy)(x+y)=1-y^3.\end{cases}$$

14.20.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}xy+24=\dfrac{x^3}{y},\\xy-6=\dfrac{y^3}{x};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x^3y^5=4x^2y^3-9,\\xy=x^2y^3-6.\end{cases}$

14.21.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases}x^2y+6=\dfrac{y^3}{x^2},\\x^2y-1=\dfrac{4x^4}{y^2};\end{cases}$ 2) $\begin{cases}2x^8=x^4y^4+1,\\3y^8=x^4y^4+2.\end{cases}$

14.22.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}x^4+x^2y^2+y^4=21,\\x^2-xy+y^2=7.\end{cases}$

14.23.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}x^4+4y^4=5,\\x^2-2xy+2y^2=1.\end{cases}$

14.24.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}x^2=2y-1,\\x^4+y^4=2.\end{cases}$

14.25.•• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}y^2=x-2,\\x^4+y^4=82.\end{cases}$

14.26.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5},\\\dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5}.\end{cases}$

14.27.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}x^3+4y=y^3+16x,\\\dfrac{1+y^2}{1+x^2}=5.\end{cases}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

14.28. Знайдіть розв'язки нерівності $|x+2|(x^2-a^2)>0$ залежно від значення параметра a.

14.29. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу n^3+11n кратне 6.

14.30. При яких значеннях b і c вершина параболи $y=5x^2+bx+c$ знаходиться в точці B (2; 7)?

14.31. Побудуйте графік функції $y=\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x-1}$.

Перша Всеукраїнська олімпіада юних математиків

Сподіваємося, що задача 14.17 вам сподобалася, і ви відчули радість успіху, розв'язавши її. Ця задача варта уваги ще й тому, що в 1961 р. її було запропоновано учасникам першої Всеукраїнської олімпіади юних математиків.

Узагалі, математичні олімпіади в Україні мають давню традицію. Перша міська олімпіада юних математиків відбулася в 1935 р. у Києві. Відтоді минуло понад 80 років, і за цей час математичні олімпіади стали для багатьох талановитих школярів першим кроком на шляху до наукової творчості. Сьогодні такі імена, як О. В. Погорєлов, С. Г. Крейн, М. О. Красносельський, В. Г. Дрінфельд, відомі всьому науковому світові. Усі вони в різні роки були переможцями математичних олімпіад в Україні.

Олексій Васильович Погорєлов (1919–2002)

Селім Григорович Крейн (1917–1999)

Марк Олександрович Красносельський (1920–1997)

Володимир Гершонович Дрінфельд (1954 р. н.)

Хочемо із задоволенням зазначити, що й зараз математичні олімпіади в Україні дуже популярні. Десятки тисяч школярів нашої країни на різних етапах беруть участь у цьому математичному змаганні. До організації та проведення олімпіад залучають найкращих учених, методистів, учителів. Саме завдяки їхньому ентузіазму та професіоналізму команда України гідно представляє нашу країну на міжнародних математичних олімпіадах.

Радимо й вам, любі діти, брати участь у математичних олімпіадах. Нижче ми наводимо деякі задачі першої Всеукраїнської олімпіади юних математиків. Випробуйте свої сили.

1. Рівняння $x^2 + ax + b = 0$ і $x^2 + px + q = 0$ мають спільний корінь. Скласти квадратне рівняння, коренями якого є інші корені.

2. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$.

3. Відстань від A до B — 999 км. Уздовж дороги стоять кілометрові стовпи, на яких відстані до A й до B написано так:

0	999		1	998		2	997	…	999	0

Скільки серед цих стовпів таких, на яких є тільки дві різні цифри?

15. Метод заміни змінних та інші способи розв'язування систем рівнянь із двома змінними

У 8 класі ви навчилися розв'язувати рівняння методом заміни змінної. Вдало виконана заміна зводить розв'язування заданого рівняння до розв'язування більш простого рівняння. Цей прийом є ефективним і при розв'язуванні багатьох систем рівнянь.

ПРИКЛАД 1 Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{16y^2}{x^2}+4\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{4y}{x}\right)+8=0,\\ x^2-y^2=3.\end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $\dfrac{x}{y}+\dfrac{4y}{x}=t$. Тоді $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{16y^2}{x^2}=t^2-8$. Отримуємо:

$$t^2 - 8 + 4t + 8 = 0;\ t^2 + 4t = 0;\ t = -4 \text{ або } t = 0.$$

Маємо: $\dfrac{x}{y}+\dfrac{4y}{x}=-4$ або $\dfrac{x}{y}+\dfrac{4y}{x}=0$.

Тоді задана система рівносильна сукупності двох систем.

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{4y}{x} = -4, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$ Нехай $\dfrac{x}{y} = u$. Тоді $u + \dfrac{4}{u} = -4$.

Звідси $u^2 + 4u + 4 = 0$; $u = -2$.

Отримуємо $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = -2, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$

Ця система рівнянь має два розв'язки: $(2; -1)$, $(-2; 1)$. Переконайтеся в цьому самостійно, розв'язавши цю систему методом підстановки.

б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{4y}{x} = 0, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$

Ця система розв'язків не має. Переконайтеся в цьому самостійно.

Відповідь: $(2; -1)$, $(-2; 1)$. ◄

ПРИКЛАД 2 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x(x+1)(3x+5y) = 144, \\ x^2 + 4x + 5y = 24. \end{cases}$

Розв'язання. Перепишемо задану систему в такому вигляді:

$$\begin{cases} (x^2 + x)(3x + 5y) = 144, \\ (x^2 + x) + (3x + 5y) = 24. \end{cases}$$

Нехай $x^2 + x = u$, $3x + 5y = v$. Тоді $\begin{cases} uv = 144, \\ u + v = 24. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} u = 12, \\ v = 12. \end{cases}$

Далі, $\begin{cases} x^2 + x = 12, \\ 3x + 5y = 12; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -4, \end{array} \right. \\ 3x + 5y = 12. \end{cases}$

Відповідь: $\left(3; \dfrac{3}{5}\right)$, $\left(-4; \dfrac{24}{5}\right)$. ◄

ПРИКЛАД 3 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{2x + y + 1} - \sqrt{x + y} = 1, \\ 3x + 2y = 4. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо: $\begin{cases} \sqrt{2x + y + 1} - \sqrt{x + y} = 1, \\ 2x + y + 1 + x + y = 5. \end{cases}$

Нехай $\sqrt{2x+y+1}=u$, $\sqrt{x+y}=v$. Отримуємо: $\begin{cases} u-v=1, \\ u^2+v^2=5. \end{cases}$

Звідси $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=2, \\ v=1, \end{cases} \\ \begin{cases} u=-1, \\ v=-2. \end{cases} \end{array}\right.$

Оскільки $u \geqslant 0$ і $v \geqslant 0$, то початкова система рівносильна такій:

$$\begin{cases} \sqrt{2x+y+1}=2, \\ \sqrt{x+y}=1. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} 2x+y+1=4, \\ x+y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=2, \\ y=-1. \end{cases}$

Відповідь: (2; −1). ◄

Означення. Многочлен, усі члени якого мають один і той самий степінь, називають однорідним многочленом.

Наприклад,

$x-2y$ — однорідний многочлен першого степеня,

$x^2-3xy-y^2$ — однорідний многочлен другого степеня,

$3x^3-2xy^2+x^2y-y^3$ — однорідний многочлен третього степеня.

Для розв'язування систем виду $\begin{cases} F(x;\ y)=a, \\ G(x;\ y)=b, \end{cases}$ де $F(x;\ y)$ і $G(x;\ y)$ — однорідні многочлени, ефективною є заміна $\frac{x}{y}=t$. Продемонструємо це на прикладах.

ПРИКЛАД 4 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0, \\ 2x^2-y^2=7. \end{cases}$

Розв'язання. Нескладно переконатися, що пара чисел виду $(x_0;\ 0)$ не є розв'язком даної системи. Поділивши обидві частини першого рівняння на y^2, отримаємо систему, рівносильну даній:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{5x}{y}+6=0, \\ 2x^2-y^2=7. \end{cases}$$

Нехай $\frac{x}{y}=t$. Тоді з першого рівняння отримуємо, що $t^2-5t+6=0$. Звідси $t=2$ або $t=3$.

Початкова система рівносильна сукупності двох систем:

а) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2, \\ 2x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 3, \\ 2x^2 - y^2 = 7. \end{cases}$

Розв'язавши кожну із цих систем методом підстановки, отримуємо відповідь.

Відповідь: (2; 1), (−2; −1), $\left(3\sqrt{\dfrac{7}{17}};\ \sqrt{\dfrac{7}{17}}\right)$, $\left(-3\sqrt{\dfrac{7}{17}};\ -\sqrt{\dfrac{7}{17}}\right)$. ◄

ПРИКЛАД 5 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x^2y + xy^2 = 6. \end{cases}$

Розв'язання. Очевидно, що пара чисел виду $(x_0;\ 0)$ не є розв'язком даної системи. Тоді можна виконати заміну $\dfrac{x}{y} = t$. Звідси $x = yt$.

Маємо: $\begin{cases} y^3t^3 - y^3 = 7, \\ y^3t^2 + y^3t = 6. \end{cases}$ Звідси $\dfrac{y^3t^3 - y^3}{y^3t^2 + y^3t} = \dfrac{7}{6}$; $\dfrac{y^3(t^3 - 1)}{y^3(t^2 + t)} = \dfrac{7}{6}$;

$$6t^3 - 7t^2 - 7t - 6 = 0;$$
$$6t^3 - 12t^2 + 5t^2 - 10t + 3t - 6 = 0;$$
$$6t^2(t - 2) + 5t(t - 2) + 3(t - 2) = 0;$$
$$(t - 2)(6t^2 + 5t + 3) = 0;$$
$$t = 2.$$

Початкова система рівносильна такій: $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 2, \\ x^3 - y^3 = 7. \end{cases}$

Розв'язавши цю систему методом підстановки, отримуємо відповідь.

Відповідь: (2; 1). ◄

Якщо в многочлені $F(x;\ y)$ замінити x на y, а y на x, то отриманий многочлен позначатимемо $F(y;\ x)$. Наприклад, якщо $F(x;\ y) = x^2 - xy^8 + y^3$, то $F(y;\ x) = y^2 - x^8y + x^3$.

Означення. **Якщо рівність $F(x;\ y) = F(y;\ x)$ є тотожністю, то многочлен $F(x;\ y)$ називають *симетричним*.**

Наведемо приклади симетричних многочленів: $x + y$, $x^2 - xy + y^2$, $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$.

Введемо позначення $u = x + y$, $v = xy$. Многочлени u і v називають **елементарними симетричними многочленами від x і y**. Ця назва пов'язана з тим, що справедливою є така теорема.

Теорема 15.1. ***Будь-який симетричний многочлен від змінних x і y можна подати у вигляді многочлена від u і v, де u і v — елементарні симетричні многочлени від x і y.***

Доведення цієї теореми виходить за межі курсу алгебри 9 класу. Наведемо кілька прикладів, що ілюструють цю теорему:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v;$$
$$x^3 + y^3 = (x + y)\,((x + y)^2 - 3xy) = u\,(u^2 - 3v) = u^3 - 3uv;$$
$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2.$$

Розглянемо систему виду $\begin{cases} F\,(x;\ y) = a, \\ G\,(x;\ y) = b, \end{cases}$ де $F\,(x;\ y)$ і $G\,(x;\ y)$ — симетричні многочлени.

Уводячи заміну

$$x + y = u,\ xy = v,$$

отримуємо систему виду $\begin{cases} F_1\,(u;\ v) = a, \\ G_1\,(u;\ v) = b. \end{cases}$

Така заміна є ефективною під час розв'язування цілої низки систем рівнянь.

ПРИКЛАД 6 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8, \\ x^3 + y^3 + x^2y + y^2x = 15. \end{cases}$

Розв'язання. Зауважимо, що ліві частини рівнянь системи є симетричними многочленами.

«Підготуємо» задану систему до заміни $x + y = u$, $xy = v$. Маємо:

$$\begin{cases} (x + y)^2 - 2xy + x + y = 8, \\ (x + y)\,((x + y)^2 - 3xy) + xy\,(x + y) = 15. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} u^2 - 2v + u = 8, \\ u\,(u^2 - 3v) + uv = 15; \end{cases}$ $\begin{cases} -2v = 8 - u^2 - u, \\ u\,(u^2 - 2v) = 15. \end{cases}$

Тоді $u\,(u^2 + 8 - u^2 - u) = 15$; $u^2 - 8u + 15 = 0$; $\left[\begin{array}{l} u = 5, \\ u = 3. \end{array}\right.$

Отримуємо: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 5, \\ v = 11, \end{cases} \\ \begin{cases} u = 3, \\ v = 2. \end{cases} \end{array}\right.$

Початкова система рівносильна сукупності двох систем.

а) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 11. \end{cases}$ Ця система розв'язків не має.

б) $\begin{cases} x+y=3, \\ xy=2; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases} \end{array}\right.$

Відповідь: (1; 2), (2; 1). ◀

ПРИКЛАД 7 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^4-x^2+y^4-y^2=72, \\ x^2+xy+y^2=13. \end{cases}$

Розв'язання. Оскільки ліві частини рівнянь є симетричними многочленами, то можна скористатися заміною $x+y=u$, $xy=v$.

Проте видається більш ефективним, перетворивши систему до вигляду $\begin{cases} (x^2+y^2)^2-(x^2+y^2)-2x^2y^2=72, \\ (x^2+y^2)+xy=13, \end{cases}$ зробити таку заміну: x^2+ $+y^2=u$, $xy=v$.

Маємо: $\begin{cases} u^2-u-2v^2=72, \\ u+v=13. \end{cases}$ Розв'язавши цю систему методом підстановки, отримуємо: $\begin{cases} u=10, \\ v=3 \end{cases}$ або $\begin{cases} u=41, \\ v=-28. \end{cases}$

Залишилося розв'язати системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3 \end{cases} \text{ і } \begin{cases} x^2+y^2=41, \\ xy=-28. \end{cases}$$

Завершіть розв'язання самостійно.

Відповідь: (3; 1), (1; 3), (−3; −1), (−1; −3). ◀

ПРИКЛАД 8 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2-xy^2+4=0, \\ x^2+y^2+4=4x+2y. \end{cases}$

Розв'язання. Розглянемо перше рівняння системи як квадратне відносно x. Його дискримінант дорівнює y^4-16. Тоді це рівняння має розв'язки при $y^4-16\geqslant 0$. Звідси $|y|\geqslant 2$.

Перепишемо друге рівняння системи так:

$$x^2-4x+4=2y-y^2;\ (x-2)^2=2y-y^2.$$

Тоді $2y-y^2\geqslant 0$, тобто $0\leqslant y\leqslant 2$.

Оскільки нерівності $|y|\geqslant 2$ і $0\leqslant y\leqslant 2$ мають виконуватися одночасно, то можна зробити такий висновок: якщо задана система має розв'язки, то ними можуть бути лише пари чисел виду $(x;\ 2)$.

Підставивши $y=2$ в задану систему, отримаємо $x=2$.

Відповідь: (2; 2). ◀

ПРИКЛАД 9 Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} |x-4|+|x+4|=y^3, \\ ax^2+y+a^2-a=2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Розв'язання. Якщо пара чисел (x_0; y_0) є розв'язком даної системи, то й пара чисел ($-x_0$; y_0) також є її розв'язком. Для того щоб дана система мала єдиний розв'язок, має виконуватися рівність $x_0 = -x_0$. Звідси $x_0 = 0$. Тоді необхідно, щоби пара (0; y_0) була розв'язком даної системи.

Маємо: $\begin{cases} |0-4|+|0+4|=y_0^3, \\ a\cdot 0^2+y_0+a^2-a=2. \end{cases}$

Звідси $y_0 = 2$ і $a = 0$ або $a = 1$.

При цих значеннях параметра a пара (0; 2) є розв'язком даної системи. Проте це не означає, що система не має інших розв'язків. Тому знайдені значення параметра a треба перевірити.

При $a = 0$ маємо: $\begin{cases} |x-4|+|x+4|=y^3, \\ y=2. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} |x-4|+|x+4|=8, \\ y=2. \end{cases}$

Перше рівняння останньої системи можна розв'язати, розкривши модулі. Ми ж скористаємося геометричною інтерпретацією: значення виразу $|x-4|+|x+4|$ — це сума відстаней від точки $A(x)$ координатної прямої до точок $B(4)$ і $C(-4)$ (рис. 15.1). Тоді множиною розв'язків першого рівняння системи є проміжок $[-4; 4]$. Отже, отримана система має безліч розв'язків.

Рис. 15.1

При $a = 1$ маємо: $\begin{cases} |x-4|+|x+4|=y^3, \\ x^2+y=2. \end{cases}$

Оскільки $|x-4|+|x+4|\geqslant 8$ (доведіть це самостійно), то $y^3\geqslant 8$, тобто $y\geqslant 2$. З другого рівняння цієї системи випливає, що $y\leqslant 2$. Отже, ця система може мати розв'язки тільки виду (x_0; 2). Підставивши $y = 2$ у друге рівняння системи, отримуємо, що $x = 0$. Тоді пара (0; 2) є єдиним розв'язком цієї системи.

Відповідь: $a = 1$. ◄

?

1. Який многочлен називають однорідним?
2. Який многочлен називають симетричним?
3. Які многочлени називають елементарними симетричними многочленами від x і y?
4. Як можна подати будь-який симетричний многочлен від змінних x і y?

ВПРАВИ

15.1.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}, \\ x^2 - y^2 = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x+y)^4 + 4(x+y)^2 = 117, \\ x - y = 25; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{5x}} + \sqrt{\dfrac{5x}{x+y}} = \dfrac{34}{15}, \\ x + y = 12. \end{cases}$

15.2.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6}, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 20; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x+y+1)^2 + (x+y)^2 = 25, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}} + 3\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}} = 4, \\ x^2 + 4x + y^2 - 3y = 0. \end{cases}$

15.3.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2xy - \dfrac{3x}{y} = 15, \\ xy + \dfrac{x}{y} = 15; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2 + y^2 - 1} + \dfrac{2y}{x} = 1, \\ x^2 + y^2 + \dfrac{4x}{y} = 22; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{36}, \\ xy^2 - x^2y = 324; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+3y} + \dfrac{x+3y}{xy} = 2, \\ \dfrac{xy}{x-y} + \dfrac{x-y}{xy} = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$

15.4.° Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2y - xy^2 = 6, \\ xy + x - y = -5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{3}, \\ xy - \dfrac{y}{x} = \dfrac{9}{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+1}{x+y}} + \sqrt{\dfrac{x+y}{x+1}} = 2, \\ \sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}} - \sqrt{\dfrac{y+2}{x+1}} = \dfrac{3}{2}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y + \dfrac{x^2}{y^2} = 7, \\ \dfrac{(x+y)\,x^2}{y^2} = 12. \end{cases}$

15.5.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 9x^2 + \sqrt{9x^2 + 2y + 1} = 1 - 2y, \\ 6x + y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + 2y + \sqrt{x^2 + 2y + 1} = 1, \\ 2x + y = 2. \end{cases}$

15.6.• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + \sqrt{3x^2 - 2y + 3} = \dfrac{2}{3}y + 5, \\ 3y - 2x = 5. \end{cases}$

15.7.• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x}{y}(x^2 - 2y^2) = 4, \\ \dfrac{y}{x}(x^2 + 2y^2) = 3. \end{cases}$

15.8.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sqrt{4 - x + y} + \sqrt{9 - 2x + y} = 7, \\ 2y - 3x = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{y^2 - 5} = 5, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

15.9.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \sqrt{x + y} + \sqrt{2x + y + 3} = 7, \\ 3x + 2y = 22; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{xy} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$

15.10.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy - 3y^2 = 0, \\ x^2 - 2xy - y^2 = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

15.11.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + 4xy - 5y^2 = 0, \\ x^2 - 3xy + 4y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 5y^2 = 0, \\ x + y^2 + 1 = 0. \end{cases}$

15.12.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 7, \\ y^2 + xy = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + 4xy - 3y^2 = 2, \\ x^2 - xy + 5y^2 = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 20, \\ x^2 + 3xy - 3y^2 = 28; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 14, \\ x^2 + xy - y^2 = 5. \end{cases}$

15.13.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 - 5y^2 = -1, \\ 3xy + 7y^2 = 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 11, \\ x^2 + 2xy - y^2 = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + xy - 3y^2 = -9, \\ x^2 - y^2 - 2xy = -7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 3, \\ 3x^2 - xy + 2y^2 = 16. \end{cases}$

15.14.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 16, \\ (x+y)(x^2+y^2) = 40; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 - 3x^2y = -4, \\ y^3 - xy^2 = -1. \end{cases}$

15.15.• Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2) = 9, \\ (x-y)(x^2+y^2) = 5. \end{cases}$

15.16.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x+y) = 23, \\ x^2 + y^2 + xy = 19. \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy + 2x + 2y = 5, \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 8; \end{cases}$

15.17.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x + xy + y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 18, \\ x^2 + y^2 - xy = 13. \end{cases}$

15.18.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} xy(x-1)(y-1) = 72, \\ (x+1)(y+1) = 20; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (x^2+1)(y^2+1) = 10, \\ (x+y)(xy-1) = 3. \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x+1)(y+1) = 10, \\ (x+y)(xy+1) = 25; \end{cases}$

15.19.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 1, \\ x^2y + xy^2 = 16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy+8)(x+y) = 2. \end{cases}$

15.20.• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2y + y^2x = 20, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 12, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 12, \\ x + xy + y = 0. \end{cases}$

15.21.$^{\bullet}$ Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18, \\ x + y = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 + y^3 + 3x^2y^2 = 5, \\ xy - x - y = -1. \end{cases}$

15.22.$^{\bullet}$ Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = 12, \\ 2x^2 - xy + 2y^2 = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 10(x^4 + y^4) = -17(x^3y + xy^3), \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

15.23.$^{\bullet}$ Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 5(x^4 + y^4) = 41(x^2 + y^2), \\ x^2 + y^2 + xy = 13; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3xy - x^2 - y^2 = 5, \\ 7x^2y^2 - x^4 - y^4 = 155; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + y^2} + 2xy = \dfrac{21}{5}, \\ \dfrac{1}{2xy} + x^2 + y^2 = \dfrac{21}{4}. \end{cases}$

15.24.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}} + \dfrac{x - \sqrt{x^2 - y^2}}{x + \sqrt{x^2 - y^2}} = \dfrac{17}{4}, \\ x(x + y) + \sqrt{x^2 + xy + 4} = 52; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y + \sqrt{\dfrac{x - y}{x + y}} = \dfrac{20}{x + y}, \\ x^2 + y^2 = 34; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - 2y - 5 = 0, \\ 2x^2 + 3y^2 - 2x - 6y - 13 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \sqrt{x + \dfrac{1}{y}} + \sqrt{y + \dfrac{1}{x}} = 2\sqrt{2}, \\ (x^2 + 1)y + (y^2 + 1)x = 4xy. \end{cases}$

15.25.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x + y + \sqrt{\dfrac{x + y}{x - y}} = \dfrac{12}{x - y}, \\ x^2 + y^2 = 41; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 - 3y + 4x = 4, \\ y(y - 4)(y + 4x) = -21. \end{cases}$

15.26.$^{\bullet\bullet}$ Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 + xy + 6 = 0, \\ 24 - y^2 = (4x^2 - y^2)^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - xy^2 + 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + 4 = 4x + 2y. \end{cases}$

15.27.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2 + 3y^2 = 2xy, \\ |xy - 2| = 6 - x^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 - xy + 1 = 0, \\ x^2 + 2x = -y^2 - 2y - 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^4 = 0, \\ x^2 - 4x + 6 - 2y^6 = 0. \end{cases}$

15.28.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y^2 - x^2 + 4x - 5 = 0, \\ \sqrt{1 - y^2} + x^2 = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3 - (y + 1)^2 = \sqrt{x - y}, \\ x + 8y = \sqrt{x - y - 9}. \end{cases}$

15.29.•• Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x^2 - y^2 + 6y - 13 = 0, \\ \sqrt{4 - x^2} + y^2 = 9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1 - (x - 3)^2 = \sqrt{x - y}, \\ y^2 - 4 = \sqrt{x - y - 1}. \end{cases}$

15.30.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} x^2 - (2a + 1)\,x + a^2 - 3 = y, \\ y^2 - (2a + 1)\,y + a^2 - 3 = x \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

15.31.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} 3y - a\sqrt{x^2 + 1} = 1, \\ y + x + \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = a^2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

15.32.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких система рівнянь $\begin{cases} a\,(x^4 + 1) = y + 1 - |x|, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

15.33.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^5 + y^5 = 1. \end{cases}$

15.34.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$

15.35.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y^3 - y^2 + y = x^2, \\ x^3 - x^2 + x = y^2. \end{cases}$

15.36.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^3 = 8y + x, \\ y^3 = 8x + y. \end{cases}$

15.37.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{2x}{1+x^2} = y, \\ \dfrac{2y}{1+y^2} = x. \end{cases}$

15.38.* Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = y, \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2} = x. \end{cases}$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

15.39. При яких значеннях параметра a рівняння

$$\left(\sqrt{x} - a\right)(3x^2 + x - 2) = 0$$

має єдиний корінь?

15.40. Відстань між двома пристанями по річці дорівнює 30 км. Катер проходить цей шлях туди й назад за 2 год 15 хв. Визначте швидкість течії, якщо власна швидкість катера дорівнює 27 км/год.

15.41. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ ділиться націло на 10.

15.42. Складіть квадратне рівняння, корені якого на два менші від відповідних коренів рівняння $x^2 + 10x - 3 = 0$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

Побудова графіків рівнянь із двома змінними

Якщо на координатній площині xy позначити всі точки, координати яких є розв'язками рівняння $F(x; y) = 0$, то отриману фігуру називають графіком цього рівняння.

Графік рівняння $F(x + a; y) = 0$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ вздовж осі абсцис на a одиниць уліво, якщо $a > 0$, і на $-a$ одиниць управо, якщо $a < 0$.

Графік рівняння $F(x; y + b) = 0$ можна отримати в результаті паралельного перенесення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ вздовж осі ординат на b одиниць униз, якщо $b > 0$, і на $-b$ одиниць угору, якщо $b < 0$.

Графік рівняння $F(-x; y) = 0$ можна отримати в результаті перетворення симетрії відносно осі ординат графіка рівняння $F(x; y) = 0$.

Графік рівняння $F(x; -y) = 0$ можна отримати в результаті перетворення симетрії відносно осі абсцис графіка рівняння $F(x; y) = 0$.

Графік рівняння $F(kx; y) = 0$, де $k > 0$, можна отримати в результаті стискання графіка рівняння $F(x; y) = 0$ в k разів до осі ординат, якщо $k > 1$, або в результаті розтягнення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ в $\frac{1}{k}$ раза від осі ординат, якщо $0 < k < 1$.

Графік рівняння $F(x; ky) = 0$, де $k > 0$, можна отримати в результаті стискання графіка рівняння $F(x; y) = 0$ в k разів до осі абсцис, якщо $k > 1$, або в результаті розтягнення графіка рівняння $F(x; y) = 0$ в $\frac{1}{k}$ раза від осі абсцис, якщо $0 < k < 1$.

Графік рівняння $F(|x|; y) = 0$ можна отримати з графіка рівняння $F(x; y) = 0$ таким чином: побудувати фігуру M_1, яка є графіком рівняння $F(x; y) = 0$ при $x \geqslant 0$, і побудувати фігуру M_2, симетричну фігурі M_1 відносно осі ординат. Фігура $M_1 \cup M_2$ є шуканим графіком.

Графік рівняння $F(x; |y|) = 0$ можна отримати з графіка рівняння $F(x; y) = 0$ таким чином: побудувати фігуру M_1, яка є графіком рівняння $F(x; y) = 0$ при $y \geqslant 0$, і побудувати фігуру M_2, симетричну фігурі M_1 відносно осі абсцис. Фігура $M_1 \cup M_2$ є шуканим графіком.

Рівносильність систем рівнянь

Дві системи рівнянь із двома змінними називають рівносильними, якщо множини їхніх розв'язків рівні.

Якщо множина розв'язків першої системи рівнянь є підмножиною множини розв'язків другої системи рівнянь, то другу систему рівнянь називають наслідком першої системи рівнянь.

Якщо в системі рівнянь $\begin{cases} y = f(x), \\ F(x;\ y) = 0 \end{cases}$ замінити в другому рівнянні змінну y виразом $f(x)$, то отримаємо систему $\begin{cases} y = f(x), \\ F(x;\ f(x)) = 0, \end{cases}$ яка рівносильна даній.

Якщо в системі рівнянь $\begin{cases} F(x;\ y) = 0, \\ G(x;\ y) = 0 \end{cases}$ замінити одне з рівнянь рівнянням $F(x;\ y) + G(x;\ y) = 0$, то отримаємо систему, яка рівносильна даній.

Якщо в системі рівнянь $\begin{cases} F(x;\ y) = c_1, \\ G(x;\ y) = c_2, \end{cases}$ де $c_1 \neq 0$ *і* $c_2 \neq 0$, замінити одне з рівнянь рівнянням $F(x;\ y)\,G(x;\ y) = c_1c_2$ або рівнянням $\dfrac{F(x;\ y)}{G(x;\ y)} = \dfrac{c_1}{c_2}$, то отримаємо систему, яка рівносильна даній.

Однорідний многочлен

Многочлен, усі члени якого мають один і той самий степінь, називають однорідним многочленом.

Симетричні многочлени

Якщо рівність $F(x;\ y) = F(y;\ x)$ є тотожністю, то многочлен $F(x;\ y)$ називають симетричним.

Многочлени $u = x + y$ і $v = xy$ називають елементарними симетричними многочленами від x і y.

Будь-який симетричний многочлен від змінних x і y можна подати у вигляді многочлена від u і v, де u і v — елементарні симетричні многочлени від x і y.

§ 4 НЕРІВНОСТІ З ДВОМА ЗМІННИМИ ТА ЇХНІ СИСТЕМИ. ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з нерівностями з двома змінними та їхніми системами. Дізнаєтеся, що називають розв'язком нерівності з двома змінними та розв'язком системи нерівностей із двома змінними.
- Для цілої низки нерівностей із двома змінними та їхніх систем навчитеся будувати множину точок координатної площини, координати яких є розв'язками нерівності (системи нерівностей).
- Дізнаєтеся, що означає довести нерівність. Ознайомитеся з основними методами доведення нерівностей.

16. Нерівності з двома змінними

Нерівності $2x - y > 1$, $y \geqslant x^2$, $x^2 + y^2 < 4$ є прикладами **нерівностей із двома змінними.**

Означення. **Пару значень змінних, яка перетворює нерівність із двома змінними на правильну числову нерівність, називають розв'язком нерівності з двома змінними.**

Так, для нерівності $2x - y > 1$ кожна з пар чисел $(3; -1)$, $(0; -2)$, $(1; 0)$ є її розв'язком, а, наприклад, пара чисел $(0; 0)$ не є її розв'язком.

Означення. **Графіком нерівності з двома змінними називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, координати яких є розв'язками даної нерівності.**

ПРИКЛАД 1 Зобразіть графік нерівності $2x - y > 1$.

Розв'язання. Графіком рівняння $2x - y = 1$ є пряма. Ця пряма розбиває координатну площину на дві області, кожну з яких називають **відкритою півплощиною**[1]. Покажемо, що рожева область (рис. 16.1) є шуканим графіком.

Перепишемо задану нерівність так: $y < 2x - 1$.

Розглянемо довільну точку $M(x_1; y_1)$, яка належить зазначеній відкритій півплощині.

[1] Відкрита півплощина відрізняється від півплощини тим, що вона не містить прямої, яка її обмежує.

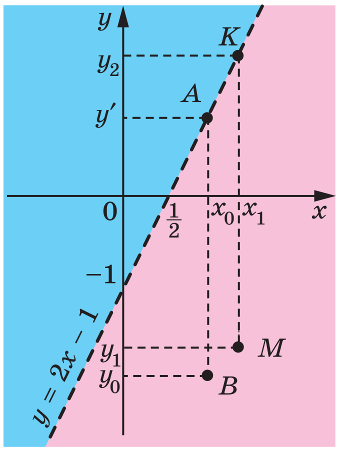


Рис. 16.1

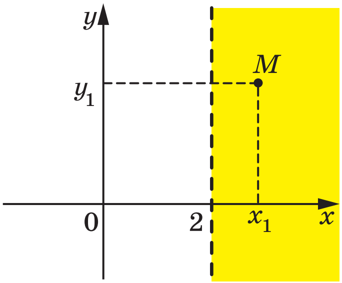


Рис. 16.2

Нехай пряма, яка проходить через точку M і перпендикулярна до осі абсцис, перетинає пряму $y = 2x - 1$ у точці K $(x_1; y_2)$. Маємо: $y_2 = 2x_1 - 1 > y_1$. Оскільки $y_1 < y_2$, то $y_1 < 2x_1 - 1$. Отже, пара чисел $(x_1; y_1)$ є розв'язком даної нерівності.

Ми показали, що координати будь-якої точки рожевої області є розв'язком заданої нерівності. Залишилося показати, що будь-який розв'язок нерівності $y < 2x - 1$ є координатами точки, яка належить зазначеній області.

Розглянемо пару чисел $(x_0; y_0)$, яка є розв'язком нерівності $y < 2x - 1$, тобто $y_0 < 2x_0 - 1$. Нехай $2x_0 - 1 = y'$. Тоді точка $A\,(x_0; y')$ належить прямій $y = 2x - 1$ (рис. 16.1). Оскільки $y_0 < y'$, то точка B $(x_0; y_0)$ лежить нижче від точки A, тобто належить рожевій області. ◄

Міркуючи аналогічно, можна показати, що блакитна область є графіком нерівності $2x - y < 1$.

Також говорять, що кожна з нерівностей $2x - y > 1$ і $2x - y < 1$ **задає** відповідно рожеву та блакитну області.

Домовимося, що в зображенні графіка пунктирна лінія позначає точки, які не належать шуканому графіку. Тому на рисунку 16.1 пряму $y = 2x - 1$ зображено пунктиром.

ПРИКЛАД 2 Зобразіть на координатній площині xy графік нерівності $x > 2$.

Розв'язання. На координатній площині xy графіком рівняння $x = 2$ є вертикальна пряма, яка розбиває площину на дві відкриті півплощини (рис. 16.2). Покажемо, що відкрита півплощина, розміщена праворуч від прямої $x = 2$ (зафарбована область), є шуканим графіком. Перепишемо задану нерівність так: $x + 0y > 2$.

Нехай точка M $(x_1; y_1)$ належить зазначеній області. Тоді $x_1 > 2$, а отже, пара чисел $(x_1; y_1)$ є розв'язком заданої нерівності.

Нехай пара чисел $(x_2; y_2)$ є розв'язком нерівності $x + 0y > 2$, тобто $x_2 + 0 \cdot y_2 > 2$. Звідси $x_2 > 2$. Отже, точка K $(x_2; y_2)$ розміщена праворуч від прямої $x = 2$, а отже, належить зафарбованій області.

Ми показали, що координати будь-якої точки відкритої півплощини є розв'язком даної нерівності, і навпаки, будь-який розв'язок нерівності є координатами точки, яка належить відкритій півплощині. ◄

Нерівності, розглянуті в прикладах 1 і 2, є окремими випадками нерівності виду $ax + by > c$.

Означення. Лінійною нерівністю з двома змінними називають нерівність виду $ax + by > c$ або $ax + by < c$, де x і y — змінні, a, b і c — параметри.

Міркуючи так, як у прикладах 1 і 2, можна показати, що коли параметри a і b не дорівнюють нулю одночасно, тобто $a^2 + b^2 \neq 0$, то графіком лінійної нерівності є одна з відкритих півплощин, на які пряма $ax + by = c$ розбиває координатну площину xy.

Якщо $a^2 + b^2 = 0$, то при $c = 0$ графіком лінійної нерівності є вся координатна площина, а при $c \neq 0$ — порожня множина.

Нерівності виду $ax + by \geqslant c$ і $ax + by \leqslant c$ також вважають лінійними. Графіком кожної з нерівностей $ax + by \geqslant c$ і $ax + by \leqslant c$, де $a^2 + b^2 \neq 0$, є півплощина.

Розглянемо приклади побудови графіків нелінійних нерівностей.

ПРИКЛАД 3 Побудуйте графік нерівності $y > x^2$.

Розв'язання. Парабола $y = x^2$ розбиває координатну площину на дві області, зображені на рисунку 16.3 рожевим і блакитним кольорами. Міркуючи так, як у прикладі 1, можна показати (зробіть це самостійно), що шуканим графіком є множина точок, які лежать вище від параболи $y = x^2$, тобто рожева область. ◄

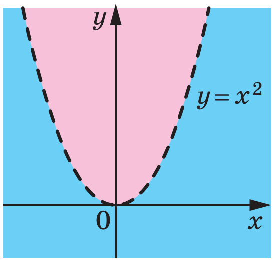


Рис. 16.3

ПРИКЛАД 4 Побудуйте графік нерівності $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

Розв'язання. Графіком рівняння $x^2 + y^2 = 4$ є коло радіуса 2 із центром у початку координат. Це коло розбиває координатну площину на дві області, зображені на рисунку 16.4 рожевим і блакитним кольорами. Розв'язками даної нерівності є координати тих і тільки тих точок, які віддалені від початку координат на відстань, не більшу за 2. Тому шуканим графіком є круг радіуса 2 із центром у початку координат (рис. 16.4). ◄

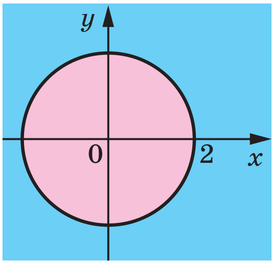


Рис. 16.4

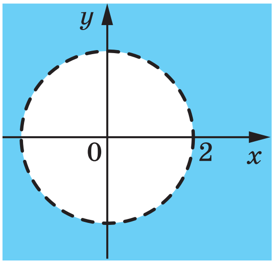


Рис. 16.5

Зауважимо, що графіком нерівності $x^2 + y^2 > 4$ є множина точок координатної площини, які не належать кругу радіуса 2 із центром у початку координат (рис. 16.5).

Звернемо увагу, що графіки нерівностей із прикладів 1–4 можна побудувати за однією загальною схемою: подати нерівність у вигляді $F(x; y) > 0$ (або $F(x; y) < 0$), потім побудувати графік рівняння $F(x; y) = 0$, який розбиває координатну площину на дві області. Одна із цих областей (можливо, разом із графіком рівняння) буде шуканим графіком нерівності. Ця схема застосовна й у тих випадках, коли рівняння $F(x; y) = 0$ розбиває площину на три та більше області, і в тих випадках, коли областю визначення виразу $F(x; y)$ є не вся площина. Які із цих областей належать шуканому графіку, з'ясовують за допомогою «пробних точок» подібно до того, як ми це робили, розв'язуючи нерівності з однією змінною методом інтервалів. Пояснимо сутність цього прийому на прикладах[1].

ПРИКЛАД 5 Побудуйте графік нерівності $xy < 6$.

Розв'язання. Графік рівняння $xy = 6$ розбиває координатну площину на три області (рис. 16.6). За «пробні» візьмемо точки $A(-3; -3)$, $O(0; 0)$, $B(3; 3)$. Вони належать відповідно жовтій, блакитній і рожевій областям. При цьому пари чисел (3; 3) і (−3; −3) не є розв'язками даної нерівності, а пара чисел (0; 0) є розв'язком.

[1] Строге обґрунтування описаного методу виходить за межі курсу алгебри 9 класу.

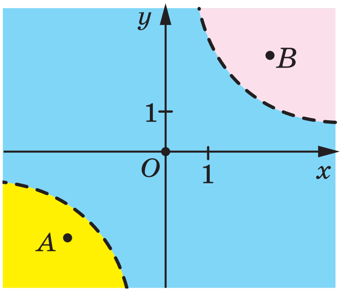


Рис. 16.6

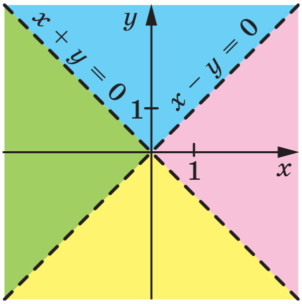


Рис. 16.7

Тоді можна зробити такий висновок: жовта й рожева області не належать графіку нерівності, а блакитна область йому належить.

Звідси шуканим графіком є блакитна область. ◄

ПРИКЛАД 6 Зобразіть графік нерівності $x^2 - y^2 < 0$.

Розв'язання. Графіком рівняння $x^2 - y^2 = 0$ є об'єднання прямих $x + y = 0$ і $x - y = 0$. Тоді графік рівняння $x^2 - y^2 = 0$ розбиває координатну площину на чотири області (рис. 16.7).

За допомогою «пробних точок» установлюємо, що шуканим графіком є об'єднання блакитної та жовтої областей (рис. 16.7). ◄

ПРИКЛАД 7 Зобразіть графік нерівності $|y| \geqslant |x^2 - 2x|$.

Розв'язання. Графіком рівняння $|y| = |x^2 - 2x|$ є об'єднання парабол $y = x^2 - 2x$ і $y = 2x - x^2$ (переконайтеся в цьому самостійно). Він розбиває координатну площину xy на 5 областей (рис. 16.8). За допомогою «пробних точок» встановлюємо, що шуканим графіком є об'єднання блакитної та жовтої областей разом з їхніми межами. ◄

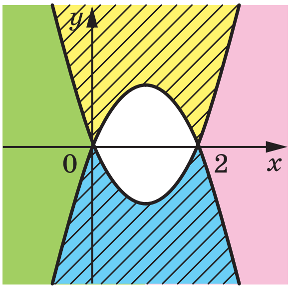


Рис. 16.8

ПРИКЛАД 8 При яких значеннях параметра a множиною розв'язків нерівності $|x - 3| + |a - 2| \leqslant 4$ є проміжок виду $[m; n]$, довжина якого не більша за 4?

Розв'язання. Графіком даної нерівності на координатній площині xa є квадрат, зображений на рисунку 16.9 (переконайтеся в цьому самостійно).

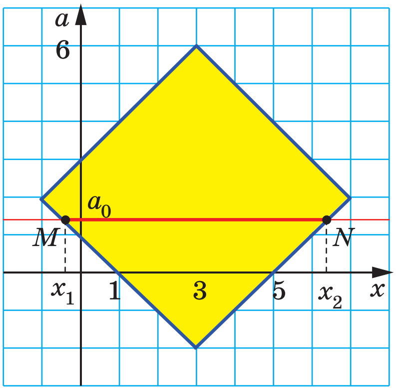


Рис. 16.9

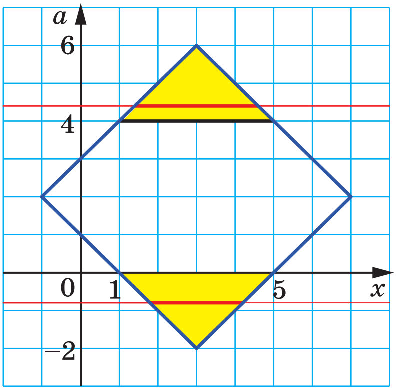


Рис. 16.10

Якщо горизонтальна пряма $a = a_0$ перетинає квадрат по відрізку MN, то множиною розв'язків нерівності є проміжок $[x_1; x_2]$, де x_1 і x_2 — координати точок M і N відповідно (рис. 16.9).

З рисунка 16.10 видно, що довжина відрізка MN не перевищуватиме 4, якщо $4 \leqslant a < 6$ або $-2 < a \leqslant 0$.

Відповідь: $4 \leqslant a < 6$ або $-2 < a \leqslant 0$. ◄

?

1. Що називають розв'язком нерівності з двома змінними?
2. Що називають графіком нерівності з двома змінними?
3. Що називають лінійною нерівністю з двома змінними?
4. Яка фігура є графіком лінійної нерівності з двома змінними?

ВПРАВИ

16.1.° Укажіть нерівності, для яких пара чисел $(-1; 2)$ є розв'язком:

1) $-2x + y > 3$; 2) $x^2 + y^2 \geqslant 7$; 3) $x^2 + y^2 < 5$; 4) $y \leqslant 3x^2 + x$.

16.2.° Які пари чисел є розв'язками нерівності $x^2 - xy + y^2 \geqslant 2$:

1) $(1; 1)$; 2) $(-1; 1)$; 3) $(1; -1)$; 4) $\left(\sqrt{3}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 5) $(0; \sqrt{2})$?

16.3.° Які точки належать графіку нерівності $\sqrt{x} > y$:

1) $A\ (0; -1)$; 2) $B\ (-1; 0)$; 3) $C\ (1; 0)$; 4) $D\ (4; 3)$?

16.4.° Задайте нерівністю з двома змінними півплощину з межею $2x + 3y = -1$, яка містить точку $A\ (-1; 1)$.

16.5.° Задайте нерівністю з двома змінними відкриту півплощину з межею $3x - y = 2$, яка не містить точку $B(0; -1)$.

16.6.° Зобразіть графік нерівності:

1) $3x - y > 1$; 2) $2x + y \geqslant 2$; 3) $y \leqslant -1$; 4) $x < 3$.

16.7.° Зобразіть графік нерівності:

1) $x - 2y < 3$; 2) $x + 4y \geqslant 5$; 3) $y > -2$; 4) $x \geqslant -2$.

16.8.° Графіками яких нерівностей є відкриті півплощини:

1) $3x > y + 1$;
2) $x > 0$;
3) $y \leqslant 0$;
4) $x + y \geqslant 1$;
5) $\dfrac{y - x - 1}{x^2 + y^2} < 0$;
6) $\dfrac{x + y}{x^2 + y^2} > 0$;
7) $\dfrac{(x + y)^2}{x + y} \geqslant 0$;
8) $\sqrt{x} > -y^2$;
9) $|x| > x$?

16.9.° Графіками яких нерівностей є півплощини:

1) $x - 5y < -3$;
2) $x \geqslant 2$;
3) $y < 1$;
4) $\dfrac{x + y}{x^2 + y^2} \geqslant 0$;
5) $\dfrac{(x - y)^2}{x - y} \geqslant 0$;
6) $\dfrac{y - x + 1}{x^2 + y^2} \geqslant 0$;
7) $\sqrt{x} \geqslant -y^2$;
8) $|x| \geqslant x$?

16.10.° Побудуйте графік нерівності:

1) $y < 2x - x^2$;
2) $y \leqslant x^2 - 4x + 3$;
3) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 < 1$;
4) $x^2 + 2x + y^2 \geqslant 3$;
5) $xy < 2$;
6) $xy \geqslant 12$;
7) $(x - y)(x + y - 1) < 0$.

16.11.° Побудуйте графік нерівності:

1) $y > x^2 - x - 2$;
2) $y \leqslant -x^2 - 3x$;
3) $(x + 2)^2 + y^2 \leqslant 4$;
4) $x^2 + y^2 - 4y > 0$;
5) $xy \leqslant 6$;
6) $xy \geqslant -12$;
7) $(x + y)(x - y - 1) > 0$.

16.12.• Побудуйте графік нерівності:

1) $x^2 > 4$;
2) $|y| < 1$;
3) $y > |x|$;
4) $y \leqslant 2|x| - 1$;
5) $y \geqslant |2|x| - 1|$.

16.13.• Побудуйте графік нерівності:

1) $y^2 \leqslant 4$; 2) $|x| < 3$; 3) $y < |x + 1| - 2$.

16.14.• Побудуйте графік нерівності:

1) $y < |x^2 - 4x|$;
2) $y \geqslant x^2 - 4|x|$;
3) $y \leqslant |x^2 - 4|x||$;
4) $|y| < |x^2 - 4x|$;
5) $x^2 - 2|x| + y^2 \leqslant 0$;
6) $x^2 - 2|x| + y^2 - 2|y| + 1 > 0$;

7) $|x|y > 3$;
8) $x|y| \leqslant 6$;
9) $|xy| > 12$;
10) $|x| + |y| \leqslant 1$;
11) $|x| - |y| > 1$.

16.15.$^\bullet$ Побудуйте графік нерівності:

1) $y \geqslant x^2 - 4|x| + 3$;
2) $|y| < x^2 - 4x + 3$;
3) $|y| > x^2 - 4|x| + 3$;
4) $x^2 - 2|x| + y^2 \leqslant 3$;
5) $x^2 + y^2 - 4|x| - 4|y| + 7 \leqslant 0$;
6) $x|y| > 8$;
7) $||x| - 1| + |y| \leqslant 1$.

16.16.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік нерівності:

1) $(x + y)^2 (x + y + 1) \leqslant 0$;
2) $(x + y + 1)(x - y)^2 < 0$;
3) $(x - y)|x| \leqslant 0$;
4) $\dfrac{x^2 + y^2 - 4}{|y|} < 0$.

16.17.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте графік нерівності:

1) $x^2 (y - x^2) > 0$;
2) $\dfrac{x^2 + y^2 - 1}{(x^2 - y^2)^2} > 0$.

16.18.$^{\bullet\bullet}$ При яких значеннях параметра a множиною розв'язків нерівності $2|x + 1| + |a - 4| \leqslant 2$ є проміжок виду $[m; n]$, довжина якого не менша від 1?

16.19.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть усі значення параметра a, при яких множина розв'язків нерівності $(x^2 - a)(a - 2x - 8) > 0$ не містить жодного розв'язку нерівності $x^2 \leqslant 4$.

16.20.* При яких значеннях параметра a множина розв'язків нерівності $x(x - 4) + a^2 (a + 4) \leqslant ax(a + 1)$ містить не більше чотирьох цілих значень x?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

16.21. Човен пройшов 5 км за течією річки та 3 км проти течії, витративши на весь шлях 40 хв. Швидкість течії становить 3 км/год. Знайдіть швидкість руху човна за течією річки.

16.22. При яких значеннях параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - ax + 4a = 0$ дорівнює 9?

16.23. Доведіть, що при всіх натуральних значеннях n значення виразу $11 \cdot 3^{2n} + 10 \cdot 2^n$ кратне 7.

16.24. Доведіть, що при всіх цілих n значення виразу

$$(n - 2)(n - 1)n(n + 1) + 1$$

є квадратом цілого числа.

17. Системи нерівностей із двома змінними

Пара чисел (1; 2) є розв'язком кожної з нерівностей $y - x^2 \geqslant 0$ і $y - x \geqslant 1$. У такому разі говорять, що пара (1; 2) є **розв'язком системи нерівностей**

$$\begin{cases} y - x^2 \geqslant 0, \\ y - x \geqslant 1. \end{cases}$$

Щоб знайти множину розв'язків системи нерівностей, треба знайти переріз множин розв'язків нерівностей, які входять до системи.

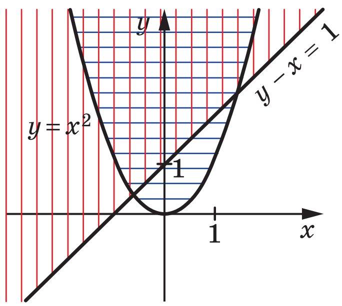


Рис. 17.1

Розв'язки системи можна зображати на координатній площині. *Для цього треба побудувати графіки нерівностей, які входять до системи, і знайти їхній переріз. Отримана фігура є зображенням множини розв'язків системи.*

Побудуємо зображення розв'язків записаної вище системи.

Графіком першої нерівності є множина точок, які лежать не нижче від параболи $y = x^2$. Цю фігуру показано на рисунку 17.1 горизонтальною штриховкою. Графіком другої нерівності є півплощина з межею $y - x = 1$, показана на рисунку 17.1 вертикальною штриховкою. Фігуру, яка зображає розв'язки системи, позначено подвійною штриховкою.

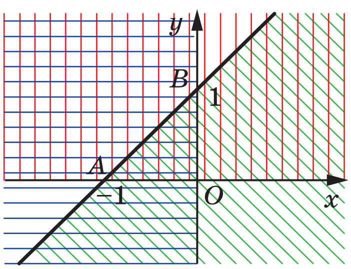


Рис. 17.2

Також говорять, що **система нерівностей** $\begin{cases} y - x^2 \geqslant 0, \\ y - x \geqslant 1 \end{cases}$ **задає** побудовану фігуру.

Наприклад, система нерівностей

$$\begin{cases} y \geqslant 0, \\ x \leqslant 0, \\ -x + y \leqslant 1 \end{cases}$$

задає трикутник ABO (рис. 17.2).

Система нерівностей $\begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant 9, \\ x - y \geqslant 0 \end{cases}$ задає півкруг, зображений на рисунку 17.3 жовтим кольором.

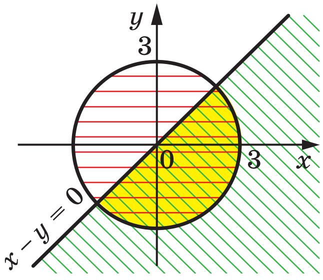


Рис. 17.3

ПРИКЛАД 1 Зобразіть на координатній площині xy графік нерівності $y < \frac{6}{x}$.

Розв'язання. Дана нерівність рівносильна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0, \\ xy < 6, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ xy > 6. \end{cases} \end{array}\right.$$

За допомогою прикладу 5 п. 16 зобразіть самостійно множини розв'язків систем сукупності. На рисунку 17.4 жовтим кольором зображено множину розв'язків першої системи, а синім — множину розв'язків другої системи.

Графік заданої нерівності — це об'єднання отриманих фігур.

Зауважимо, що цю задачу можна розв'язати за допомогою прийому, який розглянуто в попередньому пункті. Задана нерівність рівносильна такій: $\frac{xy - 6}{x} < 0$, яка у свою чергу рівносильна

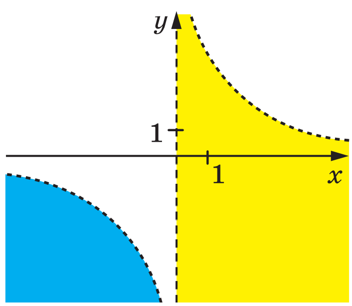


Рис. 17.4

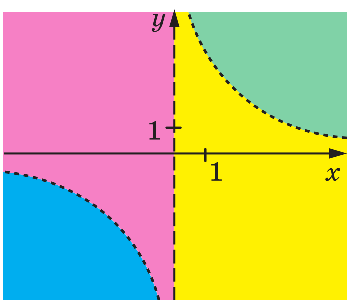


Рис. 17.5

нерівності $x\,(xy-6)<0$. Графік рівняння $x\,(xy-6)=0$ розбиває координатну площину xy на 4 області (рис. 17.5). Далі за допомогою «пробних точок» з'ясуйте, які з областей належать графіку нерівності. Завершіть розв'язування самостійно. ◄

ПРИКЛАД 2 Зобразіть графік нерівності $\sqrt{1-x^2-y^2}\,(x+y)>0$.

Розв'язання. Задана нерівність рівносильна системі

$$\begin{cases} x+y>0, \\ 1-x^2-y^2>0. \end{cases}$$

Графіком першої нерівності системи є відкрита півплощина з межею $x+y=0$, показана на рисунку 17.6 вертикальною штриховкою; графіком другої — внутрішня область круга радіуса 1 із центром у початку координат.

Отже, графіком даної нерівності є відкритий півкруг, показаний на рисунку 17.6 подвійною штриховкою. ◄

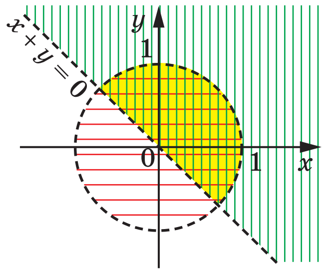


Рис. 17.6

ПРИКЛАД 3 При яких значеннях параметра a нерівність $3-|x-a|>x^2$ має хоча б один від'ємний розв'язок?

Розв'язання. Перепишемо дану нерівність так:

$$|x-a|<3-x^2.$$

Ця нерівність рівносильна системі $\begin{cases} x-a<3-x^2, \\ x-a>-3+x^2. \end{cases}$

Звідси $\begin{cases} a>x^2+x-3, \\ a<-x^2+x+3. \end{cases}$

Отримана система повинна мати хоча б один від'ємний розв'язок. Тому задача зводиться до того, щоб знайти всі значення параметра a, при яких має розв'язок система $\begin{cases} a>x^2+x-3, \\ a<-x^2+x+3, \\ x<0. \end{cases}$

На координатній площині xa зобразимо розв'язки останньої системи.

Графіком першої нерівності системи є множина точок, які лежать вище параболи $a=x^2+x-3$, графіком другої нерівності — множина точок, які лежать нижче параболи $a=-x^2+x+3$,

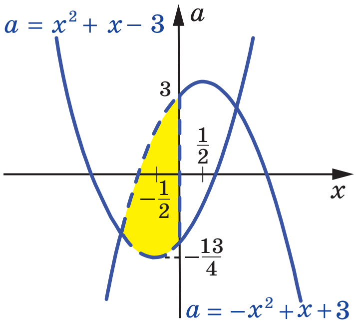


Рис. 17.7

графіком третьої нерівності — відкрита півплощина, розміщена ліворуч від осі ординат. Переріз зазначених множин зображено на рисунку 17.7 жовтим кольором.

Система має розв'язок, якщо горизонтальні прямі перетинають побудовану фігуру. Цей перетин забезпечується умовою $-\frac{13}{4} < a < 3$.

Відповідь: $-\frac{13}{4} < a < 3$. ◄

1. Що треба зробити, щоб знайти множину розв'язків системи нерівностей?

2. Як можна на координатній площині зобразити множину розв'язків системи нерівностей?

ВПРАВИ

17.1.° Зобразіть на координатній площині xy множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} 2x - 3y \geqslant 1, \\ x + 2y < 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 2, \\ 2x - y > -1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x + 2y > 5, \\ y < -1{,}5x + 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x + y \leqslant 0, \\ y \geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - y > 1, \\ 2x - y < 2; \end{cases}$

17.2.° Зобразіть на координатній площині xy множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} -x + 2y < -2, \\ x - y > 1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + 3y > 1, \\ x > 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 3x - y > 2, \\ 6x - 2y < 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} y \geqslant -1, \\ 2x - y \leqslant 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y + 3 \geqslant 2x, \\ 2x - y \geqslant -2; \end{cases}$

17.3.° Зобразіть на координатній площині xy множину $C = A \cap B$, де:

1) $A = \{(x;\ y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $B = \{(x;\ y) \mid y \geqslant 2x\}$;

2) $A = \{(x;\ y) \mid y \leqslant -x^2 + 1\}$, $B = \{(x;\ y) \mid y \geqslant -4\}$;

3) $A = \{(x;\ y) \mid y \geqslant x^2 - 4x + 3\}$, $B = \{(x;\ y) \mid y \leqslant -x^2 + 4x - 5\}$;

4) $A = \{(x;\ y) \mid x^2 + y^2 \geqslant 4\}$, $B = \{(x;\ y) \mid y \leqslant x^2\}$.

17.4.° Зобразіть на координатній площині xy множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 4, \\ x^2+(y+3)^2 \leqslant 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2 > 4, \\ (x-3)^2+y^2 < 9; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y \leqslant -x^2+1, \\ y \geqslant |x|-1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 9, \\ x^2+y^2 \geqslant 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 5, \\ xy \geqslant 2; \end{cases}$

17.5.° Зобразіть на координатній площині xy множину розв'язків системи нерівностей:

1) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 9, \\ |x| \leqslant 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 10, \\ xy \leqslant -3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 4, \\ xy \geqslant 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant 1, \\ y \leqslant -|x|; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy \geqslant 6, \\ |y| \leqslant 2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant 9, \\ xy \leqslant 0. \end{cases}$

17.6.• Задайте системою нерівностей фігуру, зображену на рисунку 17.8.

17.7.• Задайте системою нерівностей фігуру, зображену на рисунку 17.9.

17.8.• Зобразіть графік нерівності:

1) $|x-y| \leqslant 2;$
2) $|y-3x| \geqslant 4;$
3) $|x+y| \leqslant x-y;$
4) $|x-y| \geqslant 2x+y;$
5) $\sqrt{x-y} \leqslant 2;$
6) $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{2x-y+1};$
7) $\sqrt{2x+y} \geqslant \sqrt{x-y-1}.$

17.9.• Зобразіть графік нерівності:

1) $|x+y| \geqslant 3;$
2) $|2x-y| \leqslant 1;$
3) $|2x-y| \leqslant x+y;$
4) $|x+y| \geqslant x-y;$
5) $\sqrt{x+y} \leqslant 1;$
6) $\sqrt{x-2y-1} \leqslant \sqrt{x-y}.$

17.10.• Зобразіть графік нерівності:

1) $x > \frac{8}{y};$ 2) $y < -\frac{6}{x};$ 3) $y \geqslant \frac{12}{x};$ 4) $\frac{12}{xy} > 1.$

17.11.• Зобразіть графік нерівності:

1) $y > -\frac{1}{x};$ 2) $x \leqslant -\frac{2}{y};$ 3) $\frac{6}{xy} \leqslant -1.$

17.12.• Зобразіть графік нерівності:

1) $(x+y-1)\sqrt{x^2+y^2-1} < 0;$
2) $(x+y-1)\sqrt{x^2+y^2-1} \geqslant 0.$

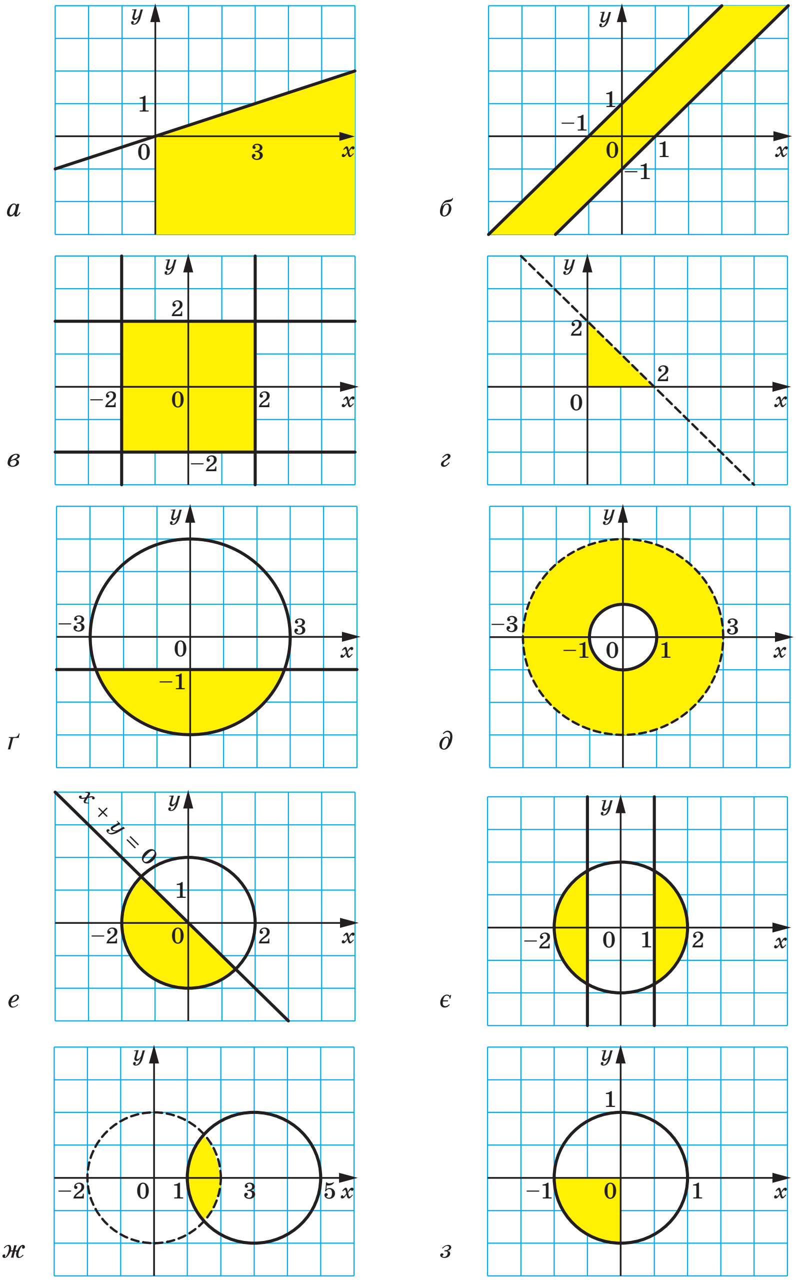


Рис. 17.8

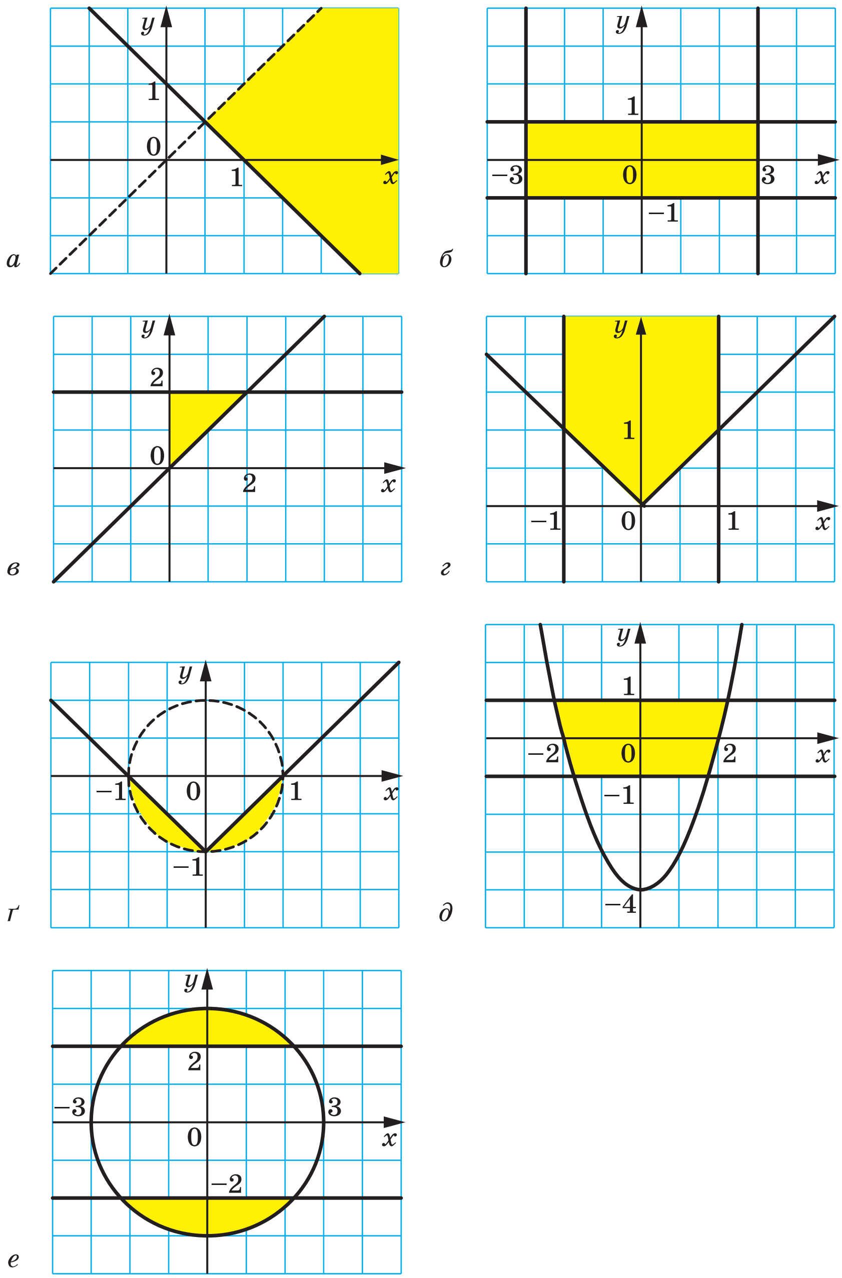

а
y
1
0
1
x
б
y
1
−3
0
3
x
−1
в
y
2
0
2
x
г
y
1
−1
0
1
x
ґ
y
−1
0
1
x
−1
д
y
1
−2
0
2
x
−1
−4
е
y
2
−3
3
0
x
−2

Рис. 17.9

17.13.° Зобразіть графік нерівності:

1) $\sqrt{1-|x|}\,(y-x^2)>0$;
2) $\sqrt{1-|x|}\,(y-x^2)\leqslant 0$;
3) $(y+x+2)\sqrt{x^2+y^2-2}\leqslant 0$.

17.14.° Зобразіть графік нерівності $|x+y|+|x-y|\leqslant 2$.

17.15.° Зобразіть графік нерівності $|2x-y|+|x+y|\leqslant 6$.

17.16.° Зобразіть графік нерівності:

1) $|x^2+y^2-4x|\leqslant 2x$;
2) $|x^2-y|\leqslant y-1$;
3) $\sqrt{x^2-1}\leqslant\sqrt{2x+1-y^2}$.

17.17.° Зобразіть графік нерівності:

1) $|x^2-y|\leqslant x^2-1$;
2) $|x^2-1|\geqslant y^2-1$;
3) $|x^2+y^2-2|\leqslant 2(x+y)$.

17.18.•• Зобразіть на координатній площині xy множину точок, координати яких задовольняють умову:

1) $\max\{2x,\ 1\}=x^2+y^2$;
2) $\min\{y,\ 2y-1\}=x^2$.

17.19.•• Зобразіть на координатній площині xy множину точок, координати яких задовольняють умову:

1) $\max\{x^2+y^2-1,\ 3\}=x^2$;
2) $\min\{x^2,\ |x|\}=y$.

17.20.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких система нерівностей $\begin{cases}x^2+a+4x+3\leqslant 0,\\ 2a-x+2\geqslant 0\end{cases}$ має єдиний розв'язок.

17.21.•• Знайдіть усі значення параметра a, при яких система нерівностей $\begin{cases}x^2-4x+a\leqslant 0,\\ x^2+2x-3a\leqslant 0\end{cases}$ має єдиний розв'язок.

17.22.•• При яких значеннях параметра a система

$$\begin{cases}x^2-(3a+1)x+2a^2+2a<0,\\ x+a^2=0\end{cases}$$

має розв'язки?

17.23.•• При яких значеннях параметра a система

$$\begin{cases}x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0,\\ x^2+a^2=4\end{cases}$$

має розв'язки?

17.24.•• При яких значеннях параметра a нерівність $2>|x+a|+x^2$ має хоча б один додатний розв'язок?

17.25.•• При яких значеннях параметра a система нерівностей $\begin{cases} |2x-a|+|x+a| \leqslant 6, \\ 2x^2+x-2a \geqslant 2 \end{cases}$ має:

1) розв'язки;
2) єдиний розв'язок;
3) тільки від'ємні розв'язки;
4) тільки додатні розв'язки;
5) тільки розв'язки, що задовольняють умову $|x| \geqslant 1$;
6) множину розв'язків, що містить не більше одного цілого числа?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

17.26. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2+8x+16}{x+4} - \frac{3x-x^2}{x}$.

17.27. Відомо, що ціле число n не кратне 3. Доведіть, що значення виразу $n^2 + 2$ кратне 3.

17.28. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{5}{\sqrt{4x-12}} - \frac{7}{|x|-4}$.

17.29. Розв'яжіть рівняння

$$(12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) = 5.$$

18. Основні методи доведення нерівностей

Очевидно, що нерівності $a^2 \geqslant 0$, $-a^2 - 1 < 0$, $|a|+|b| \geqslant 0$, $(a-b)^4 \geqslant 0$ виконуються *при всіх значеннях змінних*, які до них входять.

Нерівність $x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0$ також виконується при будь-яких $x \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}$, хоча цей факт не настільки очевидний. У його справедливості треба переконатися.

У таких випадках говорять, що потрібно **довести нерівність** $x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0$.

Зауважимо, що задачі на доведення нерівностей не є для вас новими. Так, у прикладах 7 і 8 п. 3 ми фактично доводили нерівності.

Доведемо нерівність $x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0$. Маємо:

$$x^2 - 8xy + 17y^2 = x^2 - 8xy + 16y^2 + y^2 = (x - 4y)^2 + y^2.$$

Вираз $(x - 4y)^2 + y^2$ набуває тільки невід'ємних значень. Отже, при будь-яких $x \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}$ є правильною нерівність

$$x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0.$$

Для доведення нерівностей використовують різні прийоми. Наприклад, нерівність $x^2 - 8xy + 17y^2 \geqslant 0$ ми довели, виділивши квадрат двочлена. Розглянемо ще кілька прийомів доведення нерівностей.

Метод різниці

Цей прийом полягає в тому, що розглядають різницю лівої та правої частин нерівності та доводять, що ця різниця набуває значень постійного знака при будь-яких значеннях змінних, що входять у нерівність.

ПРИКЛАД 1 Доведіть нерівність $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4 \geqslant 6ab$.

Розв'язання. Розглянемо різницю лівої та правої частин нерівності:

$$a^2b^2 + a^2 + b^2 + 4 - 6ab = (a^2b^2 - 4ab + 4) + (a^2 - 2ab + b^2) =$$
$$= (ab - 2)^2 + (a - b)^2.$$

При будь-яких значеннях a і b ця різниця набуває тільки невід'ємних значень, отже, нерівність, що доводиться, є правильною. ◄

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що коли $a > b > c$, то

$$\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} > a + 2b + c.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} - (a + 2b + c) = \left(\frac{a^2}{a-b} - (a+b)\right) + \left(\frac{b^2}{b-c} - (b+c)\right) = \frac{b^2}{a-b} + \frac{c^2}{b-c}.$$

З умови $a > b > c$ випливає, що $a - b > 0$, $b - c > 0$ і $b^2 + c^2 \neq 0$.

Отже, $\frac{b^2}{a-b} + \frac{c^2}{b-c} > 0$, що доводить задану нерівність. ◄

Метод спрощення нерівності

У ряді випадків спрощення виразів, які утворюють нерівність, робить цю нерівність очевидною.

ПРИКЛАД 3 Доведіть нерівність

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} < 1, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}.$$

Нерівність, що доводиться, набуває вигляду $1-\frac{1}{n+1}<1$ і стає очевидною. ◄

Метод міркування від супротивного

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що коли $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b+\sqrt{a}} \geqslant \sqrt{a+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{b+\sqrt{b}}.$$

Розв'язання. Припустимо, що нерівність, яку доводимо, є неправильною, тобто існують такі значення a і b, при яких є правильною нерівність $\sqrt{a+\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b+\sqrt{a}} < \sqrt{a+\sqrt{a}}\cdot\sqrt{b+\sqrt{b}}$. Звідси маємо:

$$\left(a+\sqrt{b}\right)\left(b+\sqrt{a}\right)<\left(a+\sqrt{a}\right)\left(b+\sqrt{b}\right);$$

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}<a\sqrt{b}+b\sqrt{a};$$

$$(a-b)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)<0.$$

Остання нерівність є неправильною, оскільки при $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$ різниці $a - b$ і $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ набувають значень однакових знаків або дорівнюють нулю. Отримана суперечність означає, що задана нерівність є правильною. ◄

Метод застосування очевидної нерівності

Цей прийом полягає в такому: задану нерівність отримують у результаті перетворення очевидної нерівності або почленного додавання чи множення кількох очевидних нерівностей.

ПРИКЛАД 5 Доведіть нерівність

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca.$$

Розв'язання. Очевидно, що при будь-яких значеннях a, b і c виконується така нерівність:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0.$$

Звідси $a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ca+a^2 \geqslant 0;$

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca. \text{ ◄}$$

ПРИКЛАД 6 Доведіть, що коли $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

Розв'язання. Для невід'ємних значень a, b і c виконуються такі три очевидні нерівності:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geqslant 0,$$
$$\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2 \geqslant 0,$$
$$\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2 \geqslant 0.$$

Звідси

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab},$$
$$b+c \geqslant 2\sqrt{bc},$$
$$c+a \geqslant 2\sqrt{ca}.$$

Оскільки обидві частини кожної із цих нерівностей набувають невід'ємних значень, то можна застосувати теорему про почленне множення нерівностей. Маємо:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8\sqrt{a^2b^2c^2}.$$

Оскільки $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, то $\sqrt{a^2b^2c^2} = abc$.

Отримуємо, що $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$. ◄

ПРИКЛАД 7 Доведіть, що для будь-яких $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, виконується нерівність

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2}.$$

Розв'язання. Оскільки з двох звичайних дробів з однаковими чисельниками більшим є той, у якого знаменник менший, то можна записати n очевидних нерівностей:

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n};$$
$$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n};$$
$$\ldots$$
$$\frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n}.$$

Застосовуючи теорему про почленне додавання нерівностей, отримаємо:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}}_{n \text{ доданків}} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$ ◄

Метод застосування раніше доведеної нерівності

Нерідко раніше доведену нерівність можна використати для доведення іншої, більш складної нерівності. Наприклад, легко довести (переконайтесь у цьому самостійно), що $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. А цю нерівність часто застосовують для доведення інших нерівностей.

➢ Застосування нерівності $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$

ПРИКЛАД 8 Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} \leqslant \frac{a+b}{2ab} = \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a};$$

$$\frac{b+c}{b^2+c^2} \leqslant \frac{b+c}{2bc} = \frac{1}{2c} + \frac{1}{2b};$$

$$\frac{c+a}{c^2+a^2} \leqslant \frac{c+a}{2ca} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c}.$$

Звідси

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leqslant \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$ ◄

➢ Застосування нерівності $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$

ПРИКЛАД 9 Доведіть нерівність $a^4 + b^4 + c^4 \geqslant abc(a+b+c)$.

Розв'язання. Маємо:

$$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 + (c^2)^2 \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 =$$

$$= (ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 \geqslant (ab)(bc) + (bc)(ca) + (ca)(ab) =$$

$$= ab^2c + bc^2a + ca^2b = abc(a+b+c).$$ ◄

? Які методи доведення нерівностей ви знаєте?

ВПРАВИ

18.1.° Доведіть нерівність:

1) $(y+5)(y-2) \geqslant 3y - 10$;
2) $8m^2 - 6m + 1 \leqslant (3m-1)^2$;
3) $a(a-2) \geqslant -1$;
4) $(b+7)^2 > 14b + 40$.

18.2.° Доведіть нерівність:

1) $(2a-5)^2 \leqslant 6a^2 - 20a + 25$;
2) $a^2 + 4 \geqslant 4a$.

18.3.° Доведіть нерівність:

1) $2a^2 - 8a + 16 > 0$;
2) $4b^2 + 4b + 3 > 0$;
3) $a^2 + ab + b^2 \geqslant 0$;
4) $9x^2 - 6xy + 5y^2 \geqslant 0$;
5) $(3a + 2)(2a - 4) - (2a - 5)^2 > 3(4a - 12)$;
6) $a(a - 3) > 5(a - 4)$;
7) $(a - b)(a + 5b) \leqslant (2a + b)(a + 4b) + ab$.

18.4.° Доведіть нерівність:

1) $28a - 32 \leqslant 7a^2 - 4$;
2) $16x^2 - 8xy + 2y^2 \geqslant 0$;
3) $3(b - 1) < b(b + 1)$;
4) $(4p - 1)(p + 1) - (p - 3)(p + 3) > 3(p^2 + p)$.

18.5.° Доведіть, що:

1) коли $a \geqslant 6$, то $a^3 - 6a^2 + a - 6 \geqslant 0$;
2) коли $a \geqslant b$, то $ab(b - a) \leqslant a^3 - b^3$.

18.6.° Доведіть, що коли $x \geqslant 4$, то $x^3 - 4x^2 + 2x - 8 \geqslant 0$.

18.7.° Доведіть нерівність $\frac{a^2}{a^4 + 1} \leqslant \frac{1}{2}$.

18.8.° Доведіть, що коли $a < b$, то $a < \frac{a + b}{2} < b$.

18.9.° Доведіть, що коли $a < b < c$, то $a < \frac{a + b + c}{3} < c$.

18.10.° Доведіть нерівність:

1) $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 \geqslant 0$;
2) $x^2 - 2x + y^2 + 10y + 28 > 0$;
3) $2m^2 - 6mn + 9n^2 - 6m + 9 \geqslant 0$;
4) $a^2 + b^2 + c^2 + 12 \geqslant 4(a + b + c)$;
5) $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geqslant 4ab$;
6) $2a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2a(b + c)$.

18.11.° Доведіть нерівність:

1) $a^2 + b^2 - 16a + 14b + 114 > 0$;
2) $x^2 + y^2 + 10 \geqslant 6x - 2y$;
3) $c^2 + 5d^2 + 4cd - 4d + 4 \geqslant 0$;
4) $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 2(a + b + c) - 3$.

18.12.° Доведіть, що коли $a \in [0; 1]$, то $a \geqslant a^2$.

18.13.° Доведіть, що коли $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + b^2a$.

18.14.° Доведіть нерівність $a^4 + b^4 \geqslant a^3b + b^3a$.

18.15.° Доведіть, що:

1) коли $0 < a < b$ і $k > 0$, то $\frac{a}{b} < \frac{a+k}{b+k}$;

2) коли $a \geqslant b > 0$ і $k > 0$, то $\frac{a}{b} \geqslant \frac{a+k}{b+k}$.

18.16.• Доведіть, що при будь-яких значеннях x, y і z хоча б один із виразів $x^2 + 2xy + z^2$, $y^2 + 2yz + x^2$, $z^2 + 2zx + y^2$ набуває невід'ємних значень.

18.17.• Доведіть, що:
1) коли $x \leqslant 1$ і $y \leqslant 1$, то $xy + 1 \geqslant x + y$;
2) коли $x \geqslant 1$ і $y \geqslant 1$, то $xy + 1 \geqslant x + y$.

18.18.• Доведіть, що:

1) $\frac{a^2}{b} \geqslant 2a - b$, де $b > 0$; 2) $\frac{a^3}{b^2} \geqslant 3a - 2b$, де $a > 0$ і $b > 0$.

18.19.• Доведіть, що коли $x > 0$ і $y > 0$, то $\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \geqslant \frac{x+y}{2}$.

18.20.• Доведіть нерівність $a^{n+1} + b^{n+1} \geqslant a^n b + b^n a$, де n — непарне натуральне число.

18.21.• Для $a > 0$, $b > 0$ доведіть нерівність $a^{n+1} + b^{n+1} \geqslant a^n b + b^n a$, де n — парне натуральне число.

18.22.• Доведіть, що при $b > 0$ виконується нерівність

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} \geqslant a - \frac{b}{2}.$$

18.23.• Доведіть, що при $a > 0$ і $b > 0$ виконується нерівність

$$\frac{a}{b + 2a} + \frac{b}{a + 2b} \leqslant \frac{2}{3}.$$

18.24.• Доведіть, що коли $x > 0$ і $y > 0$, то $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geqslant \frac{(a+b)^2}{x+y}$.

18.25.• Відомо, що $x \in [0; 1]$ і $y \in [0; 1]$. Доведіть, що

$$\frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2} \leqslant \frac{2}{1 + xy}.$$

18.26.• Доведіть нерівність $a^8 + a^6 - 4a^4 + a^2 + 1 \geqslant 0$.

18.27.• Доведіть нерівність $x^8 + x^6 - 2x^3 + x^2 + 1 > 0$.

18.28.• Доведіть, що коли $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ і $d \geqslant 0$, то

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

18.29.• Доведіть, що при будь-яких $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність:

1) $2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} > \frac{1}{\sqrt{n}}$; 2) $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$.

18.30.• Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > \frac{3}{a+b+c}.$$

18.31.• Доведіть, що коли $x \in [0; 1]$ і $y \in [0; 1]$, то $\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leqslant 1$.

18.32.• Доведіть, що коли $a > 0$ і $b > 0$, то $\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} > \frac{a+b}{1+a+b}$.

18.33.• Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1$.

18.34.• Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

18.35.• Доведіть нерівність $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geqslant 4abcd$.

18.36.• Доведіть нерівність $(a^4b^4 + 36)(4a^4 + 9b^4) \geqslant 144a^4b^4$.

18.37.• Доведіть, що коли $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то $a(1+b^2) + b(1+a^2) \geqslant 4ab$.

18.38.• Доведіть нерівність $x^4 + 4y^4 + 5 \geqslant 8xy$.

18.39.• Доведіть, що коли $y \geqslant 0$, то $x^4 + 4y^3 + y + 2x^2 + 1 \geqslant 8xy$.

18.40.• Доведіть, що коли $b \geqslant 0$, то $a^4 + b^3 + b + 1 \geqslant 4ab$.

18.41.• Доведіть нерівність $a^2 + b^2 + 1 \geqslant ab + b + a$.

18.42.• Доведіть нерівність $4a^2 + b^2 + 1 \geqslant 2ab + 2a + b$.

18.43.• Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

18.44.• Доведіть, що якщо $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ і $c \geqslant 0$, то

$$a + b + c \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

18.45.•• Доведіть нерівність $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \geqslant \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$.

18.46.•• Доведіть нерівність $\left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{b}{c}\right)^4 + \left(\frac{c}{a}\right)^4 \geqslant \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$.

18.47.•• Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geqslant a + b + c$.

18.48.•• Відомо, що $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Доведіть, що

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leqslant 3.$$

18.49.•• Відомо, що $xy \geqslant 2$. Доведіть, що $(x-2)^2 + (y+2)^2 \geqslant 8$.

18.50.•• Доведіть нерівність $a^2 + b^2 + ab \geqslant 3(a+b-1)$.

18.51.•• Доведіть, що при будь-яких значеннях a, b і c хоча б одна з нерівностей $a - b^2 \leqslant \frac{1}{4}$, $b - c^2 \leqslant \frac{1}{4}$, $c - a^2 \leqslant \frac{1}{4}$ є правильною.

18.52.•• Доведіть, що при будь-яких додатних значеннях a, b і c хоча б одна з нерівностей $a(1-b) \leqslant \frac{1}{4}$, $b(1-c) \leqslant \frac{1}{4}$, $c(1-a) \leqslant \frac{1}{4}$ є правильною.

18.53.•• Доведіть, що коли $x > 0$ і $y > 0$, то $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leqslant \frac{1}{xy}$.

18.54.•• Доведіть, що коли $x > 0$, $y > 0$ і $z > 0$, то

$$\frac{x^2}{x^2 + 2yz} + \frac{y^2}{y^2 + 2xz} + \frac{z^2}{z^2 + 2xy} \geqslant 1.$$

18.55.•• Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, то

$$\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{b}{b^2 + c^2} + \frac{c}{c^2 + a^2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

18.56.•• Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $ab + bc + ac \geqslant a + b + c$. Доведіть, що $a + b + c \geqslant 3$.

18.57.•• Відомо, що $a > 0$, $b > 0$ і $ab \geqslant a + b$. Доведіть, що $a + b \geqslant 4$.

18.58.•• Доведіть, що коли $x \in [0; 1]$ і $y \in [0; 1]$, то $(x+y+1)^2 \geqslant 4(x^2 + y^2)$.

18.59.•• Доведіть нерівність $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} < 2$, де $n \in \mathbb{N}$.

18.60.* Доведіть, що коли $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ і $xyz = 1$, то

$$\frac{xy^2}{x^3 + 2} + \frac{yz^2}{y^3 + 2} + \frac{zx^2}{z^3 + 2} \geqslant 1.$$

18.61.* Доведіть нерівність $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqslant (a+b+c+d)e$.

18.62.* Доведіть нерівність $(n!)^2 \geqslant n^n$, де $n \in \mathbb{N}$.

18.63.* Доведіть нерівність $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \ldots + \frac{n}{(n+1)!} < 1$, де $n \in \mathbb{N}$.

18.64.* Доведіть нерівність $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! < (n+1)!$, де $n \in \mathbb{N}$.

18.65.* Доведіть нерівність $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2} < 1$, де $n \in \mathbb{N}$.

18.66.* Доведіть нерівність $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, де $n \in \mathbb{N}$.

18.67.* Доведіть нерівність $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}>\frac{1}{2\sqrt{n}}$, де $n\in\mathbb{N}$, $n>1$.

18.68.* Доведіть нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}}>\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2},\text{ де } n\in\mathbb{N}.$$

18.69.* Доведіть нерівність $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}}<\frac{\sqrt{2n}}{2}$, де $n\in\mathbb{N}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

18.70. Розв’яжіть рівняння

$$(x^2-x+1)^4-10x^2(x^2-x+1)^2+9x^4=0.$$

18.71. Доведіть, що при всіх натуральних значеннях n значення виразу $14\cdot13^n+13\cdot2^{2n}$ кратне 9.

18.72. Знайдіть область визначення функції

$$y=\frac{1}{\sqrt{3-5x-2x^2}}+2\sqrt{x+1}.$$

18.73. Знайдіть усі значення параметра a, при яких сума коренів рівняння $x^2-(a^2-5a)x+5a-1=0$ дорівнює -6.

19. Нерівності між середніми величинами. Нерівність Коші—Буняковського

Значення виразів $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$ і $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ називають відповідно середнім квадратичним, середнім арифметичним, середнім геометричним і середнім гармонічним чисел a і b.

Ці величини називають «середніми», оскільки при $0<a\leqslant b$ їхні значення належать проміжку $[a; b]$, тобто виконуються нерівності:

$$a\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leqslant b,\quad a\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant b,\quad a\leqslant\sqrt{ab}\leqslant b,\quad a\leqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant b.$$

Доведіть ці нерівності самостійно.

Зв’язок між середніми величинами виражають такі три теореми.

Теорема 19.1. ***При будь-яких значеннях a і b виконується нерівність***

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}. \qquad (*)$$

Доведення. Маємо:

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab;$$

$$2a^2+2b^2 \geqslant 2ab+a^2+b^2;$$

$$2a^2+2b^2 \geqslant (a+b)^2;$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \frac{(a+b)^2}{4};$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \sqrt{\frac{(a+b)^2}{4}};$$

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{|a+b|}{2}.$$

Оскільки $|a+b| \geqslant a+b$, то $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2}$. ◄

Зауважимо, що в нерівності (*) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = b$ і $a \geqslant 0$. Доведіть цей факт самостійно.

Теорема 19.2 (нерівність Коші для двох чисел). ***При будь-яких невід'ємних значеннях a і b виконується нерівність***

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}. \qquad (**)$$

Доведення. Розглянемо різницю лівої та правої частин нерівності:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

При будь-яких невід'ємних значеннях a і b ця різниця набуває невід'ємних значень. Отже, нерівність, що доводиться, є правильною. ◄

Зауважимо, що в нерівності (**) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = b$ і $a \geqslant 0$. Доведіть цей факт самостійно.

Наслідок. ***Якщо a > 0, то*** $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$.

Доведення. До додатних чисел a і $\frac{1}{a}$ застосуємо нерівність Коші: $\frac{a+\frac{1}{a}}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 1$. Звідси $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$. ◄

Зауважимо, що в нерівності $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$ рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a=\frac{1}{a}$. З урахуванням того, що $a > 0$, отримуємо $a = 1$.

Під час розв'язування цілої низки задач у попередньому пункті, а також під час доведення теореми 19.1 ми використовували нерівність $a^2+b^2\geqslant 2ab$. Цю нерівність також можна розглядати як наслідок із нерівності Коші. Справді, оскільки $a^2\geqslant 0$ і $b^2\geqslant 0$, то можна записати:

$\frac{a^2+b^2}{2}\geqslant\sqrt{a^2b^2}$. Звідси $a^2+b^2\geqslant 2\sqrt{a^2b^2}=2|ab|\geqslant 2ab$.

Теорема 19.3. ***Якщо*** $ab > 0$***, то***

$$\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}. \qquad (***)$$

Доведення. Якщо $a < 0$ і $b < 0$, то $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}<0$ і $\sqrt{ab}>0$. У цьому разі нерівність, що доводиться, стає очевидною.

Нехай $a > 0$ і $b > 0$. Застосуємо нерівність Коші до додатних чисел $\frac{1}{a}$ і $\frac{1}{b}$:

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}=\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

Оскільки обидві частини цієї нерівності при $a > 0$ і $b > 0$ набувають додатних значень, то справедливою є така нерівність:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}. \blacktriangleleft$$

Зауважимо, що в нерівності (***) рівність досягається тоді й тільки тоді, коли $a = b$ і $a > 0$. Доведіть цей факт самостійно.

Теореми 19.1–19.3 дають змогу дійти висновку, що **при $a > 0$ і $b > 0$ є справедливим такий ланцюжок нерівностей:**

$$\boxed{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}$$

Проілюструємо застосування теорем 19.1–19.3 на прикладах.

ПРИКЛАД 1 Доведіть нерівність $\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}\geqslant\sqrt{2}.$

Розв'язання. Скориставшися нерівністю (*), можна записати:

$$\sqrt{x^2+(1-y)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{x^2+(1-y)^2}{2}}\geqslant\sqrt{2}\cdot\frac{x+1-y}{2};$$

$$\sqrt{(1-x)^2+y^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{(1-x)^2+y^2}{2}}\geqslant\sqrt{2}\cdot\frac{1-x+y}{2}.$$

Застосувавши теорему про почленне додавання нерівностей, отримуємо:

$$\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}\geqslant\sqrt{2}\left(\frac{x+1-y}{2}+\frac{1-x+y}{2}\right)=\sqrt{2}.$$ ◄

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що коли $a>0$ і $b>0$, то $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geqslant 4.$

Розв'язання. Застосовуючи нерівність Коші, можна записати:

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{a}{b}};$$

$$\frac{b+\frac{1}{a}}{2}\geqslant\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Звідси $a+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}},\quad b+\frac{1}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}}.$

Застосувавши теорему про почленне множення нерівностей, отримуємо:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geqslant 4\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}=4.$$ ◄

ПРИКЛАД 3 Знайдіть найбільше значення виразу ab, якщо відомо, що $a>0$, $b>0$ і $2a+b=3$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{3}{2}=\frac{2a+b}{2}\geqslant\sqrt{2ab}$. Звідси $\sqrt{2ab}\leqslant\frac{3}{2}$; $ab\leqslant\frac{9}{8}$.

Остання нерівність ще не дозволяє зробити висновок, що найбільше значення виразу ab дорівнює $\frac{9}{8}$. Необхідно також показати, що існують такі значення a і b, при яких $ab=\frac{9}{8}$.

У записаній нерівності Коші для чисел $2a$ і b рівність досягається лише тоді, коли $2a = b$. Тепер потрібні значення a і b можна знайти, розв'язавши систему

$$\begin{cases} 2a = b, \\ 2a + b = 3. \end{cases}$$

Звідси $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{3}{2}$.

Отже, найбільше значення виразу ab дорівнює $\frac{9}{8}$. ◄

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

Розв'язання. Маємо:

$\frac{a^4}{bc} + bc \geqslant 2\sqrt{\frac{a^4}{bc} \cdot bc} = 2a^2$. Звідси $\frac{a^4}{bc} \geqslant 2a^2 - bc$.

Міркуючи аналогічно, отримуємо, що

$$\frac{b^4}{ca} \geqslant 2b^2 - ca;$$

$$\frac{c^4}{ab} \geqslant 2c^2 - ab.$$

Застосувавши теорему про почленне додавання нерівностей, отримуємо:

$$\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \geqslant 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - ab - bc - ca =$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca).$$

Оскільки $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$ (див. приклад 5 п. 18), то $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geqslant 0$. Тоді

$$(a^2 + b^2 + c^2) + (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geqslant a^2 + b^2 + c^2.$$ ◄

ПРИКЛАД 5 Відомо, що $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$. Доведіть нерівність

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Розв'язання. Введемо позначення: $b + c = 2x$, $c + a = 2y$, $a + b = 2z$.

Звідси $a + b + c = x + y + z$, $a = y + z - x$, $b = x + z - y$, $c = x + y - z$.

Маємо: $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}=\dfrac{y+z-x}{2x}+\dfrac{x+z-y}{2y}+\dfrac{x+y-z}{2z}=$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-1+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)-\frac{3}{2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{3}{2}=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}.$$ ◄

ПРИКЛАД 6 Доведіть, що коли $x\geqslant 1$, $y\geqslant 1$, $z\geqslant 1$ і $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{2}$, то $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\geqslant 3.$

Розв'язання. Запишемо нерівність (***) у такому вигляді: $\sqrt{ab}\geqslant\dfrac{2ab}{a+b}$.

Маємо: $\sqrt{x-1}=\sqrt{(x-1)\cdot 1}\geqslant\dfrac{2(x-1)\cdot 1}{x-1+1}=\dfrac{2x-2}{x}=2-\dfrac{2}{x}.$

Міркуючи аналогічно, отримуємо, що

$$\sqrt{y-1}\geqslant 2-\frac{2}{y},$$

$$\sqrt{z-1}\geqslant 2-\frac{2}{z}.$$

Тоді $\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}\geqslant 6-\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{z}\right)=6-2\cdot\dfrac{3}{2}=3.$ ◄

Теорема 19.4 (нерівність Коші—Буняковського). ***При будь-яких значеннях $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ виконується нерівність***

$$(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2\leqslant\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right).$$

Лема. ***Якщо квадратний тричлен ax^2+bx+c, де $a>0$, при всіх значеннях x набуває невід'ємних значень, то його дискримінант D є недодатним.***

Огюстен Луї Коші
(1789–1857)

Видатний французький математик, автор понад 800 наукових праць

Доведення. Припустимо, що для даного квадратного тричлена $D > 0$. Тоді квадратний тричлен має два різних корені x_1 і x_2. Можна записати: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

За умовою $a(x - x_1)(x - x_2) \geqslant 0$ при будь-якому значенні змінної x, а отже, і при $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Маємо: $a\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right)\left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_2\right) \geqslant 0$. Звідси

$$a(x_2 - x_1)(x_1 - x_2) \geqslant 0. \qquad (1)$$

Оскільки $a > 0$ і $(x_2 - x_1)(x_1 - x_2) < 0$, то нерівність (1) є неправильною. Отже, припущення про те, що $D > 0$, також неправильне. ◄

Доведення теореми. Якщо $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, то нерівність, що доводиться, є очевидною.

Розглянемо випадок, коли хоча б одне із чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ не дорівнює 0.

При будь-якому значенні змінної x виконується нерівність

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2 \geqslant 0.$$

Цю нерівність можна перетворити до такого вигляду:

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right)x^2 - 2\left(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n\right)x + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 \geqslant 0.$$

Ліва частина останньої нерівності — це квадратний тричлен з додатним старшим коефіцієнтом. Цей квадратний тричлен набуває невід'ємних значень при будь-яких значеннях змінної x. Тоді згідно з лемою його дискримінант D є недодатним.

Маємо:

$$D = 4(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 - 4\left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2\right).$$

Оскільки $D \leqslant 0$, то

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2\right). \text{ ◄}$$

Якщо $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, то рівність у нерівності Коші—Буняковського досягається при будь-яких значеннях $b_1, b_2, \dots, b_n$.

Віктор Якович Буняковський
(1804–1889)
Видатний математик XIX ст. Народився на Вінниччині. Протягом багатьох років був віце-президентом Петербурзької академії наук.

Розглянемо випадок, коли хоча б одне із чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не дорівнює 0.

Покажемо, що в цьому випадку в нерівності Коші—Буняковського рівність досягається тоді й тільки тоді, коли існує таке число k, що виконуються рівності

$$b_1 = ka_1,\ b_2 = ka_2,\ \ldots,\ b_n = ka_n. \qquad (2)$$

Легко показати (зробіть це самостійно), що коли виконується умова (2), то нерівність Коші—Буняковського перетворюється на рівність.

Доведемо обернене твердження. Нехай

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 = \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

Це означає, що квадратне рівняння

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)x^2 - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)x + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2 = 0$$

має єдиний корінь. Нехай цей корінь дорівнює k. Тоді число k є коренем рівняння

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \ldots + (a_nx - b_n)^2 = 0.$$

Отже, виконуються рівності

$$a_1k = b_1,\ a_2k = b_2,\ \ldots,\ a_nk = b_n.$$

Про нерівність $(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 = \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)$ говоритимемо, що нерівність Коші—Буняковського застосовано до *наборів* чисел $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ і $(b_1; b_2; \ldots; b_n)$.

ПРИКЛАД 7 Доведіть нерівність

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leqslant n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right).$$

Розв'язання. Застосовуючи нерівність Коші—Буняковського до наборів чисел $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ і $(1; 1; \ldots; 1)$, запишемо:

$$(a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \ldots + a_n \cdot 1)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)(\underbrace{1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2}_{n \text{ доданків}}) = n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right).$$

Звідси $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 \leqslant n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)$. ◄

Із доведеної нерівності можна отримати таку нерівність:

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Вирази, записані в лівій і правій частинах цієї нерівності, називають відповідно **середнім квадратичним** і **середнім арифметичним** чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ця нерівність є узагальненням нерівності (*).

ПРИКЛАД 8 Для додатних чисел a, b і c доведіть нерівність

$$(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant(a+b+c)^2.$$

Розв'язання

До наборів чисел $\left(a\sqrt{a};\, b\sqrt{b};\, c\sqrt{c}\right)$ і $\left(\frac{1}{\sqrt{a}};\, \frac{1}{\sqrt{b}};\, \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$ застосуємо нерівність Коші—Буняковського:

$$\left(\left(a\sqrt{a}\right)^2+\left(b\sqrt{b}\right)^2+\left(c\sqrt{c}\right)^2\right)\left(\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2\right)\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a}}+\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{b}}+\frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{c}}\right)^2.$$

Звідси $(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant(a+b+c)^2$. ◄

ПРИКЛАД 9 Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1}=2\,|x-1|$.

Розв'язання. Перепишемо ліву частину рівняння так:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{x^2-3x+1}.$$

До наборів $\left(\sqrt{3};\, 1\right)$ і $\left(\sqrt{x};\, \sqrt{x^2-3x+1}\right)$ застосуємо нерівність Коші—Буняковського:

$$\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2\leqslant\left(\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2\right)\left(\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2\right).$$

Звідси $\left(\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1}\right)^2\leqslant 4\,(x^2-2x+1)$;

$$\left|\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1}\right|\leqslant 2\,|x-1|;$$

$$\sqrt{3x}+\sqrt{x^2-3x+1}\leqslant 2\,|x-1|.$$

У цій нерівності рівність досягається тоді й тільки тоді, коли існує таке число k, що

$$\begin{cases}\sqrt{3}=k\sqrt{x},\\ 1=k\sqrt{x^2-3x+1},\end{cases}\quad\text{тобто}\quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{x^2-3x+1}}{1}.$$

Отримане рівняння рівносильне початковому.

Маємо: $\begin{cases}\frac{x}{3}=x^2-3x+1,\\ x\geqslant 0;\end{cases}$ $\begin{cases}3x^2-10x+3=0,\\ x\geqslant 0;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=\frac{1}{3}.\end{array}\right.$

Відповідь: 3; $\frac{1}{3}$. ◄

1. Значення яких виразів називають середнім квадратичним, середнім арифметичним, середнім геометричним, середнім гармонічним двох чисел a і b?
2. Які нерівності виражають зв'язок між середніми величинами?
3. Запишіть нерівність Коші—Буняковського для наборів чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ і $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.
4. За яких умов у нерівності Коші—Буняковського досягається рівність?

ВПРАВИ

19.1.° Доведіть, що коли $m > 0$, $x > 0$ і $y > 0$, то $mx + \frac{y}{4m} \geqslant \sqrt{xy}$.

19.2.° Відомо, що $xy = 1$, $x > 0$, $a > 0$ і $b > 0$. Доведіть нерівність $ax + by \geqslant 2\sqrt{ab}$.

19.3.° Для додатних чисел a і b доведіть нерівність $\frac{a}{16b} + \frac{25b}{a} \geqslant \frac{5}{2}$.

19.4.° Для додатних чисел x і y доведіть нерівність $\frac{3x}{y} + \frac{y}{27x} \geqslant \frac{2}{3}$.

19.5.° Доведіть нерівність $(x + y)(xy + 16) \geqslant 16xy$, де $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

19.6.° Доведіть, що коли $a > 0$ і $b > 0$, то $(a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geqslant 4$.

19.7.° Доведіть, що коли $a \geqslant 0$ і $b \geqslant 0$, то $(a^3 + b)(b^3 + a) \geqslant 4a^2b^2$.

19.8.° Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\left(a^2 + \frac{1}{bc}\right)\left(b^2 + \frac{1}{ca}\right)\left(c^2 + \frac{1}{ab}\right) \geqslant 8.$$

19.9.° Доведіть, що коли $x \geqslant 0$ і $y \geqslant 0$, то $(x + 1)(y + 1)(xy + 1) \geqslant 8xy$.

19.10.° Доведіть нерівність $\frac{a^2 + 4}{2} \geqslant \sqrt{a^2 + 3}$.

19.11.° Доведіть нерівність $\frac{x^2 + 6}{4} \geqslant \sqrt{x^2 + 2}$.

19.12.° Доведіть нерівність $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geqslant 2$.

19.13.° При $a > 0$ доведіть нерівність $2\left(a + \frac{1}{a}\right) + a^2 \geqslant 4a$.

19.14.° Доведіть нерівність $x^2 + \frac{1}{x^2 + 1} \geqslant 1$.

19.15.° Доведіть нерівність $a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + 1} > 1$.

19.16.° Відомо, що $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$. Доведіть, що $|ac + bd| \leqslant 1$.

19.17.° Відомо, що $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$. Доведіть, що $|ac - bd| \leqslant 1$.

19.18.° Доведіть нерівність $\sqrt{1+a^2} \cdot \sqrt{1+b^2} \geqslant |1+ab|$.

19.19.° Дано: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Доведіть, що
$$-1 \leqslant ax + by + cz \leqslant 1.$$

19.20.° Дано: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Доведіть, що
$$-\sqrt{3} \leqslant ax + by + cz \leqslant \sqrt{3}.$$

19.21.• Змінні x і y набувають додатних значень, а їхній добуток є сталим. Доведіть, що їхня сума буде найменшою тоді й тільки тоді, коли ці числа рівні.

19.22.• Змінні x і y набувають додатних значень, а їхня сума є сталою. Доведіть, що їхній добуток буде найбільшим тоді й тільки тоді, коли ці числа рівні.

19.23.• Відомо, що $x > 0$ і $xy = 12$. Знайдіть найменше значення виразу $x + 3y$.

19.24.• Знайдіть найменше значення виразу $5a + 2b$, якщо $a > 0$ і $ab = 10$.

19.25.• Знайдіть найбільше значення виразу xy, якщо $x > 0$, $y > 0$ і $x + 3y = 6$.

19.26.• Відомо, що $a > 0$, $b > 0$ і $3a + 4b = 24$. Знайдіть найбільше значення виразу ab.

19.27.• Знайдіть найменше значення виразу $x^2 + \frac{16}{x^2}$.

19.28.• Відомо, що $x > 0$. Знайдіть найменше значення виразу $\frac{x^2 + 10x + 16}{x}$.

19.29.• Знайдіть найбільше значення виразу $\frac{x}{9x^2 + 1}$, якщо $x > 0$.

19.30.• Знайдіть найбільше значення виразу $\frac{x}{4x^2 + 3x + 1}$.

19.31.• Відомо, що $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, ..., $a_n > 0$ і $a_1a_2...a_n = 1$. Доведіть нерівність
$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) \geqslant 2^n.$$

19.32.• Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geqslant 6$.

19.33.• Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $d > 0$, то $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geqslant 4$.

19.34.$^{\bullet}$ Для додатних чисел a і b доведіть нерівність $\frac{a^2+1}{b}+\frac{b^2+1}{a}\geqslant 4.$

19.35.$^{\bullet}$ Для додатних чисел a і b доведіть нерівність $\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}\geqslant 8.$

19.36.$^{\bullet}$ Відомо, що $a \in [0;\ 1]$, $b \in [0;\ 1]$, $a+b\geqslant\frac{1}{2}$. Доведіть нерівність

$$\sqrt{(1-a)(1-b)}\leqslant\frac{3}{4}.$$

19.37.$^{\bullet}$ Відомо, що $|a|\leqslant 1$ і $|b|\leqslant 1$. Доведіть нерівність

$$ab+\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\leqslant 1.$$

19.38.$^{\bullet}$ Відомо, що $a + b = 1$. Доведіть, що $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$.

19.39.$^{\bullet}$ Відомо, що $a + b = 2$. Доведіть, що $a^4+b^4\geqslant 2$.

19.40.$^{\bullet}$ Доведіть, що коли $a^4 + b^4 = 2$, то $|a+b|\leqslant 2$.

19.41.$^{\bullet}$ Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $a + b + c = 1$. Доведіть нерівність $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\leqslant\frac{1}{2}$.

19.42.$^{\bullet}$ Доведіть, що $\left|a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}\right|\leqslant 1$.

19.43.$^{\bullet}$ Доведіть, що коли $x + y + z = 1$, то $x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1}{3}$.

19.44.$^{\bullet}$ Відомо, що $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$. Доведіть, що $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\geqslant n$.

19.45.$^{\bullet}$ Доведіть, що коли $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, то $|a+b+c|\leqslant\sqrt{3}$.

19.46.$^{\bullet}$ Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $3x + 4y$, якщо $x^2 + y^2 = 1$.

19.47.$^{\bullet}$ Знайдіть найменше значення виразу $a^2 + b^2$, якщо $5a - 12b = 13$.

19.48.$^{\bullet}$ Доведіть нерівність $(1+a+a^2+a^3)^2\leqslant 4(1+a^2+a^4+a^6)$.

19.49.$^{\bullet}$ Доведіть нерівність $(a^4+b^4+c^4)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geqslant(a+b+c)^2$.

19.50.$^{\bullet}$ Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$.

19.51.$^{\bullet}$ Для додатних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ доведіть, що

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2.$$

19.52.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть нерівність

$$(a+c)(b+d)\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}+\sqrt{c^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+d^2}.$$

19.53.•• Доведіть, що коли $a + b + c = 3$, то
$$\sqrt{3a+1}+\sqrt{3b+1}+\sqrt{3c+1}\leqslant 6.$$

19.54.•• Доведіть нерівність $\sqrt{2a+5}+\sqrt{a-3}+\sqrt{25-3a}<9$.

19.55.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=x^2-6x+11$.

19.56.•• Розв'яжіть рівняння $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=x^2+2$.

19.57.•• Розв'яжіть рівняння $2\sqrt{x-1}+5x=\sqrt{(x^2+4)(x+24)}$.

19.58.•• Доведіть, що коли $x^2 + y^2 + z^2 = 44$, то $|3x-y+z|\leqslant 22$.

19.59.•• Відомо, що $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$. Доведіть нерівність
$$|2x+y-z|\leqslant 4\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

19.60.•• Доведіть, що коли $a > 1$ і $b > 1$, то $\dfrac{a}{\sqrt{b-1}}+\dfrac{b}{\sqrt{a-1}}\geqslant 4$.

19.61.•• Доведіть, що коли $a\geqslant 0$ і $b\geqslant 0$, то $(a+b)\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}\geqslant a\sqrt{b}+b\sqrt{a}$.

19.62.•• Відомо, що $a > 0$, $b > 0$ і $a + b = 1$. Доведіть, що
$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{a}\right)^2\geqslant\frac{25}{2}.$$

19.63.•• Доведіть, що коли $a\geqslant 0$ і $b\geqslant 0$, то $\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}\geqslant 2\sqrt{a+b}$.

19.64.* Доведіть нерівність
$$\sqrt{(a+b-1)^2+2c^2}+\sqrt{(b+c-1)^2+2a^2}+\sqrt{(c+a-1)^2+2b^2}\geqslant\sqrt{3}.$$

19.65.* На сторонах AB, BC, CD і DA квадрата $ABCD$ відповідно позначили точки M, N, P і Q. Доведіть, що периметр чотирикутника $MNPQ$ не менший від суми діагоналей квадрата.

19.66.* Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $a + b + c = 1$, то
$$(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

19.67.* Відомо, що $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Доведіть нерівність
$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{1}{2}(x+y+z).$$

19.68.* Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $d > 0$, то
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d}\geqslant\frac{64}{a+b+c+d}.$$

19.69.* Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то
$$\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}}>2.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

19.70. При яких значеннях параметра a рівняння $\left(\sqrt{x}-a\right)(4x-9)=0$ має єдиний розв'язок?

19.71. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n дріб $\frac{12n+1}{30n+2}$ є нескоротним.

19.72. Теплохід пройшов 17 км за течією річки на 2 год швидше, ніж 75 км проти течії. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість теплохода становить 32 км/год.

19.73. Розв'яжіть рівняння $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 = 0$.

Ефективні прийоми доведення нерівностей

Матеріал двох попередніх пунктів показує, що найбільш ефективним методом доведення нерівностей є застосування раніше доведеної нерівності.

Якщо за допомогою деякої нерівності можна довести цілу низку інших більш складних нерівностей, то таку нерівність називатимемо **ключовою.** Так, нерівності $a^2+b^2\geqslant 2ab$, $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$, нерівності між середніми величинами, нерівність Коші—Буняковського, безумовно, можна віднести до ключових нерівностей.

У цьому оповіданні ви ознайомитеся ще з кількома ключовими нерівностями.

У задачі 18.18 ви довели нерівність

$$\boxed{\frac{a^2}{b}\geqslant 2a-b, \text{ де } b>0} \qquad (1)$$

Зауважимо, що в нерівності (1) рівність досягається тільки при $a = b$.

Покажемо, як можна застосовувати нерівність (1) для доведення інших нерівностей.

ПРИКЛАД 1 **(приклад 2 п. 18).** Доведіть, що коли $a > b > c$, то

$$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{b-c}>a+2b+c.$$

Розв'язання. З умови випливає, що $a - b > 0$ і $b - c > 0$. Тоді

$$\frac{a^2}{a-b}\geqslant 2a-(a-b)=a+b,$$

$$\frac{b^2}{b-c} \geqslant 2b-(b-c)=b+c.$$

Зауважимо, що рівності $a = a - b$ і $b = b - c$ виконуються одночасно лише за умови $b = c = 0$. Тому в записаних нерівностях рівність одночасно досягатися не може.

Звідси $\dfrac{a^2}{a-b}+\dfrac{b^2}{b-c} > a+b+b+c=a+2b+c.$ ◄

ПРИКЛАД 2 **(приклад 4 п. 19).** Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то $\dfrac{a^4}{bc}+\dfrac{b^4}{ca}+\dfrac{c^4}{ab} \geqslant a^2+b^2+c^2.$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{a^4}{bc}=\frac{(a^2)^2}{bc} \geqslant 2a^2-bc,$$

$$\frac{b^4}{ca}=\frac{(b^2)^2}{ca} \geqslant 2b^2-ca,$$

$$\frac{c^4}{ab}=\frac{(c^2)^2}{ab} \geqslant 2c^2-ab.$$

Звідси $\dfrac{a^4}{bc}+\dfrac{b^4}{ca}+\dfrac{c^4}{ab} \geqslant 2a^2+2b^2+2c^2-ab-bc-ca=$

$$=(a^2+b^2+c^2)+(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \geqslant a^2+b^2+c^2. \text{ ◄}$$

ПРИКЛАД 3 **(19.67).** Відомо, що $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Доведіть нерівність[1]

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{1}{2}(x+y+z).$$

Розв'язання. Якщо нерівність (1) застосувати для кожного із трьох дробів, які стоять у лівій частині даної нерівності, то отримаємо:

$$\frac{x^2}{y+z} \geqslant 2x-y-z,$$

$$\frac{y^2}{z+x} \geqslant 2y-z-x,$$

$$\frac{z^2}{x+y} \geqslant 2z-x-y.$$

[1] У вказівці до задачі 19.67 було показано, як можна довести розглядувану нерівність за допомогою нерівності Коші—Буняковського або нерівності Коші.

Звідси $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant 2x-y-z+2y-z-x+2z-x-y=0.$

Але для такого результату не потрібне застосування будь-яких ключових задач: нерівність $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geqslant 0$ є очевидною.

Проте це не означає, що нерівність (1) не застосовна для даного прикладу.

Маємо: $\frac{x^2}{y+z}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2x)^2}{y+z}$. Тепер до дробу $\frac{(2x)^2}{y+z}$ застосуємо нерівність (1): $\frac{1}{4}\cdot\frac{(2x)^2}{y+z}\geqslant\frac{1}{4}(4x-y-z)$.

Аналогічно можна показати, що

$$\frac{y^2}{z+x}\geqslant\frac{1}{4}(4y-z-x),$$
$$\frac{z^2}{x+y}\geqslant\frac{1}{4}(4z-x-y).$$

Тепер за допомогою теореми про почленне додавання нерівностей отримуємо потрібний результат. ◄

Нерівність (1) можна узагальнити. Насправді є справедливою така нерівність:

$$(n-k)\frac{a^n}{b^k}\geqslant na^{n-k}-kb^{n-k},\text{ де } n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N},\ n\geqslant k,\ a>0,\ b>0.$$

Окремий випадок цієї нерівності, коли $n=k+1$, а саме нерівність

$$\boxed{\frac{a^{k+1}}{b^k}\geqslant(k+1)\,a-kb,\text{ де } k\in\mathbb{N},\ a>0 \text{ і } b>0} \qquad (2)$$

ви зможете довести в п. 22 (задача 22.17).

Зазначимо, що в задачі 18.18 ви довели цю нерівність для $n=2$:

$$\boxed{\frac{a^3}{b^2}\geqslant 3a-2b,\text{ де } a>0 \text{ і } b>0}$$

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що коли $a>0$, $b>0$ і $c>0$, то

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^4}{a^3}\geqslant -a+2b+2c.$$

Розв'язання. Застосувавши нерівність (2), запишемо:

$$\frac{a^2}{b}\geqslant 2a-b,$$

$$\frac{b^3}{c^2} \geqslant 3b - 2c,$$
$$\frac{c^4}{a^3} \geqslant 4c - 3a.$$

Залишилося застосувати теорему про почленне додавання нерівностей. ◄

У задачі 18.24 ви довели таку нерівність:

$$\boxed{\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geqslant \frac{(a+b)^2}{x+y}, \text{ де } x > 0,\ y > 0}$$

Застосовуючи цю нерівність, доведемо нерівність

$$\boxed{\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \text{ де } x > 0,\ y > 0,\ z > 0} \quad (3)$$

Маємо: $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$.

Нерівність (3) є ключем до розв'язання цілої низки непростих задач. Розглянемо приклади її застосування.

Насамперед покажемо, як, використовуючи нерівність (3), можна довести вже відому вам (див. задачу 19.67) нерівність.

ПРИКЛАД 5 Відомо, що $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Доведіть нерівність

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{1}{2}(x+y+z).$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{y+z+z+x+x+y} = \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{1}{2}(x+y+z). \ ◄$$

ПРИКЛАД 6 Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a} \geqslant 1.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{b}{2a+b} + \frac{c}{2b+c} + \frac{a}{2c+a} = \frac{b^2}{2ab+b^2} + \frac{c^2}{2bc+c^2} + \frac{a^2}{2ca+a^2} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac} = \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2} = 1. \ ◄$$

ПРИКЛАД 7 Для додатних чисел x, y і z доведіть нерівність

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}\geqslant\frac{9}{x+y+z}.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{2}{x+y}+\frac{2}{y+z}+\frac{2}{z+x}=2\left(\frac{1^2}{x+y}+\frac{1^2}{y+z}+\frac{1^2}{z+x}\right)\geqslant$$

$$\geqslant 2\cdot\frac{(1+1+1)^2}{x+y+y+z+z+x}=\frac{9}{x+y+z}. \blacktriangleleft$$

Після того як за допомогою задачі 18.24 ми довели нерівність (3), природно висунути припущення, що має місце така нерівність:

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{y_n}\geqslant\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{y_1+y_2+\ldots+y_n}, \qquad (4)$$

де y_1, y_2, ..., y_n — додатні числа.

Ви навчитеся доводити цю нерівність у п. 22 (див. задачу 22.12).

Якщо в нерівності (4) покласти $x_1=a_1b_1$, $x_2=a_2b_2$, ..., $x_n=a_nb_n$, $y_1=b_1^2$, $y_2=b_2^2$, ..., $y_n=b_n^2$, то отримаємо:

$$\frac{a_1^2b_1^2}{b_1^2}+\frac{a_2^2b_2^2}{b_2^2}+\ldots+\frac{a_n^2b_n^2}{b_n^2}\geqslant\frac{(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2}{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}.$$

Звідси $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\geqslant\frac{(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2}{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}$;

$$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)\geqslant(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2.$$

Таким чином, за допомогою нерівності (4) можна довести нерівність Коші—Буняковського.

Наведені нижче задачі ви зможете розв'язати за допомогою ключових задач п. 19 і прикладів, які розглянуто в цьому оповіданні.

ВПРАВИ

1. Доведіть, що коли $a>0$, $b>0$ і $c>0$, то $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c$.

2 (18.54). Доведіть, що коли $x>0$, $y>0$ і $z>0$, то

$$\frac{x^2}{x^2+2yz}+\frac{y^2}{y^2+2xz}+\frac{z^2}{z^2+2xy}\geqslant 1.$$

3. Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\frac{a^4}{b^3}+\frac{b^4}{c^3}+\frac{c^4}{a^3} \geqslant a+b+c$.

4. Для додатних чисел x, y і z доведіть нерівність

$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x} \geqslant x^2+y^2+z^2.$$

5. Відомо, що $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$. Доведіть нерівність

$$\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b^2}{c+2a}+\frac{c^2}{a+2b} \geqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

6. Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

7. Відомо, що $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $d > 0$. Доведіть нерівність

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+a}+\frac{c^2}{d+a+b}+\frac{d^2}{a+b+c} \geqslant \frac{a+b+c+d}{3}.$$

8. Дано: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Доведіть, що

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac} \geqslant \frac{3}{2}.$$

9. Доведіть, що коли $x > 0$, $y > 0$ і $z > 0$, то

$$\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y} \geqslant \frac{1}{2}.$$

10 (приклад 5 п. 19). Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

11. Відомо, що $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Доведіть нерівність

$$(x+1)(y+1)(z+1) \geqslant \sqrt{8(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

12. Відомо, що $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Доведіть нерівність

$$\frac{x}{2+yz}+\frac{y}{2+zx}+\frac{z}{2+xy} \leqslant 1.$$

13. Відомо, що $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Доведіть нерівність

$$\frac{1}{1+x+yz}+\frac{1}{1+y+xz}+\frac{1}{1+z+xy} \leqslant \frac{3}{x+y+z}.$$

14. Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$, то

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc} \leqslant \frac{1}{abc}.$$

15. Доведіть, що коли $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ і $a + b + c = 1$, то

$$a(b^3 + c^3) + b(c^3 + a^3) + c(a^3 + b^3) \geqslant 2abc.$$

16. Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ і $abc = 1$, то

$$\frac{1}{a(b^3 + c^3)} + \frac{1}{b(c^3 + a^3)} + \frac{1}{c(a^3 + b^3)} \leqslant \frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a}.$$

17. Для додатних чисел a, b і c доведіть нерівність

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + a^2} \geqslant a + b + c.$$

18. Доведіть нерівність

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2} \geqslant \frac{a + b + c}{2},$$

де $a > 0$, $b > 0$ і $c > 0$.

19. Відомо, що $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$, $z \in [0; 1]$. Доведіть, що

$$\frac{1}{1 + xy} + \frac{1}{1 + yz} + \frac{1}{1 + zx} \geqslant \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + y^2} + \frac{1}{1 + z^2}.$$

20. Доведіть нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n},$$

де $n \in \mathbb{N}$.

21. Доведіть нерівність

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n + 1} - 2,$$

де $n \in \mathbb{N}$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 4

Розв'язок нерівності з двома змінними

Пару значень змінних, яка перетворює нерівність із двома змінними на правильну числову нерівність, називають розв'язком нерівності з двома змінними.

Графік нерівності з двома змінними

Графіком нерівності з двома змінними називають геометричну фігуру, яка складається з усіх тих і тільки тих точок координатної площини, координати яких є розв'язками даної нерівності.

Лінійна нерівність із двома змінними

Лінійною нерівністю з двома змінними називають нерівність виду $ax + by > c$ або $ax + by < c$, де x і y — змінні, a, b і c — параметри.

Розв'язування системи нерівностей

Щоб знайти множину розв'язків системи нерівностей, треба знайти переріз множин розв'язків нерівностей, які входять до системи.

Основні методи доведення нерівностей

Метод різниці; метод спрощення нерівності; метод міркування від супротивного; метод застосування очевидної нерівності; метод застосування раніше доведеної нерівності.

Нерівності між середніми величинами

При $a > 0$ і $b > 0$ є справедливим ланцюжок нерівностей:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Нерівність Коші—Буняковського

При будь-яких значеннях a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n виконується нерівність

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right).$$

§ 5 ЕЛЕМЕНТИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

- Вивчаючи матеріал цього параграфа, ви зможете розширити свої уявлення про математичні моделі реальних ситуацій. Дізнаєтеся, яку задачу називають прикладною та з яких етапів складається її розв'язування.
- Ви вдосконалите свої вміння проводити відсоткові розрахунки, ознайомитеся з формулою складних відсотків і можливостями її застосування.

20. Математичне моделювання

Мабуть, немає сьогодні такої галузі знань, де б не застосовувалися досягнення математики. Фізики та хіміки, астрономи та біологи, географи та економісти, навіть мовознавці та історики використовують математичний апарат.

У чому ж полягає секрет універсальності «математичного інструмента»?

«Ключ до розв'язання багатьох наукових задач — їх вдалий переклад мовою математики». Таку відповідь на поставлене запитання дав один із засновників і перший директор Інституту математики Академії наук України академік Д. О. Граве.

Справді, формулювання задач із різних галузей знань містять нематематичні поняття. Якщо математик бере участь у розв'язуванні такої задачі, то він насамперед прагне перекласти її своєю «рідною» математичною мовою, тобто мовою виразів, формул, рівнянь, нерівностей, функцій, графіків тощо. Результат такого перекладу називають **математичною моделлю**, а саму задачу — **прикладною задачею**.

Дмитро Олександрович Граве
(1863–1939)

Термін «модель» (від латин. *modulus* — зразок) ми використовуємо дуже часто: модель літака, модель атомного ядра, модель Сонячної системи, модель якогось процесу або явища тощо. Вивчаючи властивості моделі об'єкта, ми тим самим вивчаємо властивості самого об'єкта.

Галузь математики, яка займається побудовою та вивченням математичних моделей, називають **математичним моделюванням**.

У таблиці наведено зразки прикладних задач і відповідних їм математичних моделей.

№	Прикладна задача	Математична модель
1	Один кілограм картоплі коштує 6 грн. Скільки картоплі можна купити за 42 грн?	Чому дорівнює частка 42 : 6?
2	У магазині є 3 види чашок і 2 види тарілок. Скільки існує варіантів скласти набір з однієї чашки й однієї тарілки?	Чому дорівнює добуток $3 \cdot 2$?
3	На стоянці було кілька автомобілів. Коли 5 автомобілів поїхало, залишилося 2 автомобілі. Скільки автомобілів було на стоянці спочатку?	Знайдіть корінь рівняння $x - 5 = 2$.
4	Із 156 жовтих, 234 білих і 390 червоних троянд склали букети. Яку найбільшу кількість букетів можна скласти так, щоб у всіх букетах троянд кожного кольору було порівну та всі троянди було використано?	Знайдіть НСД (156; 234; 390).
5	Автомобіль витрачає 7,8 л бензину на 100 км шляху. Чи вистачить 40 л бензину, щоб доїхати від Києва до Одеси, якщо відстань між цими містами 490 км?	Порівняйте значення виразу $\frac{7{,}8 \cdot 490}{100}$ із числом 40.

Мета розв'язування будь-якої задачі — отримати правильну відповідь. Тому складання математичної моделі — це тільки перший етап розв'язування прикладної задачі.

Насправді розв'язування прикладної задачі складається з трьох етапів:

1) побудова математичної моделі;

2) розв'язання математичної задачі;

3) аналіз результату, отриманого на другому етапі, виходячи зі змісту прикладної задачі.

Перший етап ілюструють наведені вище приклади. Зазначимо, що успішна реалізація цього кроку потребує наявності певних знань із галузі, до якої належить дана прикладна задача.

Реалізація другого етапу пов'язана лише з математичною діяльністю: знаходження значень виразів, розв'язування рівнянь, нерівностей та їхніх систем, побудова графічних об'єктів тощо.

На третьому етапі отриманий результат потрібно записати мовою прикладної задачі. Пояснимо це, звернувшись до наведеної таблиці. Наприклад, відповіді до першої, другої, третьої задач треба записати так: можна купити 7 кг картоплі; покупку можна здійснити 6 способами; на стоянці було 7 автомобілів. Далі відповідь треба проаналізувати на відповідність умові прикладної задачі. Наприклад, відповідь «1,5 учня» не може бути прийнятною для жодної прикладної задачі.

Розглянемо задачу, у якій рівняння з однією змінною є математичною моделлю реальної ситуації.

ПРИКЛАД 1 Маса дерев'яної балки становить 120 кг, а маса залізної балки — 140 кг, причому залізна балка на 1 м коротша від дерев'яної. Яка довжина кожної балки, якщо маса 1 м залізної балки на 5 кг більша за масу 1 м дерев'яної?

Розв'язання. У розв'язуванні задачі виділимо три етапи.

І етап. Побудова математичної моделі

Нехай довжина дерев'яної балки дорівнює x м, тоді довжина залізної становить $(x - 1)$ м. Маса 1 м дерев'яної балки дорівнює $\frac{120}{x}$ кг, а маса 1 м залізної — $\frac{140}{x-1}$ кг. Тоді різниця $\frac{140}{x-1}-\frac{120}{x}$ показує, на скільки маса одного метра залізної балки більша за масу одного метра дерев'яної балки. За умовою задачі ця різниця дорівнює 5 кг. Тоді отримуємо рівняння $\frac{140}{x-1}-\frac{120}{x}=5$. Це рівняння і є математичною моделлю даної прикладної задачі.

ІІ етап. Розв'язування рівняння

Маємо:

$$\frac{140}{x-1}-\frac{120}{x}=5;\quad \frac{28}{x-1}-\frac{24}{x}=1;$$

$$\begin{cases} 28x-24(x-1)=x^2-x, \\ x\neq 0, \\ x\neq 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-5x-24=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq 1; \end{cases}\qquad x = 8 \text{ або } x = -3.$$

III етап. Аналіз результату, отриманого на II етапі, виходячи зі змісту прикладної задачі

Корінь −3 не задовольняє умову задачі, оскільки така величина, як довжина, не може виражатися від'ємним числом.

Отже, довжина дерев'яної балки дорівнює 8 м, а довжина залізної — 7 м.

Відповідь: 8 м, 7 м. ◄

Під час оформлення задач, подібних тій, яку ми розглянули в прикладі 1, не обов'язково явно виокремлювати три етапи розв'язування прикладної задачі. Важливо, щоб ці етапи були реалізовані в процесі розв'язування.

У поданих нижче двох задачах математичною моделлю реальної ситуації буде система двох рівнянь із двома змінними.

ПРИКЛАД 2 Із двох пунктів, відстань між якими дорівнює 18 км, вирушили одночасно назустріч одна одній дві туристки й зустрілися через 2 год. З якою швидкістю йшла кожна туристка, якщо для подолання всієї відстані між пунктами одній із них потрібно на 54 хв більше, ніж другій?

Розв'язання. Нехай швидкість першої туристки дорівнює x км/год, а другої — y км/год, $x < y$. До зустрічі перша туристка пройшла $2x$ км, а друга — $2y$ км. Разом вони пройшли 18 км. Тоді $2x + 2y = 18$.

Відстань між пунктами перша туристка проходить за $\frac{18}{x}$ год, а друга — за $\frac{18}{y}$ год. Оскільки першій туристці для подолання цієї відстані потрібно на $54\text{ хв} = \frac{54}{60}\text{ год} = \frac{9}{10}\text{ год}$ більше, ніж другій, то $\frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}$.

Отримуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + 2y = 18, \\ \dfrac{18}{x} - \dfrac{18}{y} = \dfrac{9}{10}. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x + y = 9, \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{10}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9 - y, \\ \dfrac{2}{9 - y} - \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{10}. \end{cases}$

Розв'язавши друге рівняння останньої системи, отримуємо: $y_1 = 5$, $y_2 = -36$. Корінь -36 не підходить за змістом задачі. Отже, $y = 5$, $x = 4$.

Відповідь: 4 км/год, 5 км/год. ◄

ПРИКЛАД 3 Двоє робітників можуть разом виконати деяку роботу за 10 днів. Після 6 днів спільної роботи одного з них перевели на іншу роботу, а другий продовжував працювати. Через 2 дні самостійної роботи другого з'ясувалося, що зроблено $\frac{2}{3}$ всієї роботи. За скільки днів кожний робітник може виконати всю роботу?

Розв'язання. Нехай перший робітник може виконати всю роботу за x днів, а другий — за y днів. За 1 день перший робітник виконує $\frac{1}{x}$ частину роботи, а за 10 днів — $\frac{10}{x}$ частину роботи. Другий робітник за 1 день виконує $\frac{1}{y}$ частину роботи, а за 10 днів — $\frac{10}{y}$ частину роботи. Оскільки за 10 днів спільної праці вони виконують усю роботу, то $\frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1$.

Перший робітник працював 6 днів і виконав $\frac{6}{x}$ частину роботи, а другий працював 8 днів і виконав $\frac{8}{y}$ частину роботи. Оскільки внаслідок цього було виконано $\frac{2}{3}$ роботи, то $\frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{2}{3}$.

Отримали систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1, \\ \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{2}{3}, \end{cases}$$

розв'язком якої є пара чисел $x = 15$, $y = 30$ (переконайтеся в цьому самостійно). Отже, перший робітник може виконати всю роботу за 15 днів, а другий — за 30 днів.

Відповідь: 15 днів, 30 днів. ◄

У нижченаведеній задачі математичною моделлю реальної ситуації буде система лінійних нерівностей із двома змінними.

ПРИКЛАД 4 Кожний з учасників математичної вікторини отримав одну з оцінок 9 балів, 10 балів, 11 балів, 12 балів. Оцінки «9», «10», «12» виставлено однаковій кількості учасників, а оцінок «11» було поставлено більше, ніж решти оцінок, узятих разом. Оцінку вище «10» отримало менше 10 учасників. Скільки учасників отримали оцінку «10» і скільки — оцінку «11», якщо у вікторині брало участь не менше 12 осіб?

Розв'язання. Нехай оцінки «9», «10», «12» отримало по x учасників, а оцінку «11» — y учасників. Оскільки оцінок «11» було отримано більше, ніж решти оцінок, узятих разом, то $y > 3x$. Оцінку вище «10» отримало менше 10 учасників, тому $x + y < 10$. Оскільки у вікторині брало участь не менше 12 осіб, то $3x + y \geqslant 12$. Отримали систему нерівностей

$$\begin{cases} y > 3x, \\ x + y < 10, \\ 3x + y \geqslant 12. \end{cases}$$

Звідси $x + y > x + 3x = 4x$. Тоді $4x < 10$; $x < 2{,}5$.

Оскільки x — ціле невід'ємне число, то з нерівності $x < 2{,}5$ випливає, що $x = 0$, або $x = 1$, або $x = 2$.

При $x = 0$ отримуємо систему $\begin{cases} y > 0, \\ y < 10, \\ y \geqslant 12, \end{cases}$ яка не має розв'язків.

При $x = 1$ отримуємо систему $\begin{cases} y > 3, \\ y < 9, \\ y \geqslant 9, \end{cases}$ яка також розв'язків не має.

При $x = 2$ маємо: $\begin{cases} y > 6, \\ y < 8, \\ y \geqslant 6. \end{cases}$ Звідси $y = 7$.

Отже, оцінку «10» отримали 2 учасники, оцінку «11» — 7 учасників.

Відповідь: 2 учасника, 7 учасників. ◄

Розглянемо задачу, у якій математичною моделлю реальної ситуації є рівняння з трьома змінними, що набувають тільки натуральних значень.

ПРИКЛАД 5 Авіалінію, яка сполучає міста A і B, обслуговують літаки трьох типів. Кожний літак першого, другого та третього типів може прийняти відповідно 230, 100 і 40 пасажирів. Усі літаки лінії можуть одночасно перевезти 760 пасажирів. Скільки літаків кожного типу обслуговують цю авіалінію?

Розв'язання. Позначимо через x, y, z кількість літаків першого, другого, третього типу відповідно. Тоді отримуємо рівняння $230x + 100y + 40z = 760$, яке треба *розв'язати в натуральних числах*, тобто прийняти за відповідь тільки ті розв'язки, які є натуральними числами. Маємо:

$$\begin{cases} 230x + 100y + 40z = 760, \\ x \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{N}, \\ z \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} 23x + 10y + 4z = 76, \\ x \in \mathbb{N}, \\ y \in \mathbb{N}, \\ z \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Маємо: $23x = 76 - (10y + 4z)$. Оскільки $y \geqslant 1$ і $z \geqslant 1$, то $10y + 4z \geqslant 14$. Тоді $23x = 76 - (10y + 4z) \leqslant 62$. Звідси $x \leqslant \frac{62}{23}$. Із рівняння системи випливає, що x — парне число. Отже, $x = 2$.

З урахуванням знайденого значення x отримуємо систему

$$\begin{cases} 10y + 4z = 30, \\ y \in \mathbb{N}, \\ z \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} 5y + 2z = 15, \\ y \in \mathbb{N}, \\ z \in \mathbb{N}. \end{cases}$

З рівняння отриманої системи випливає, що z — число, яке кратне 5. Крім того, $2z = 15 - 5y \leqslant 10$. Звідси $z \leqslant 5$, а отже, $z = 5$, $y = 1$.

Відповідь: 2 літаки, 1 літак, 5 літаків. ◄

?

1. Що називають математичною моделлю задачі?
2. Яку задачу називають прикладною?
3. Що називають математичним моделюванням?
4. З яких етапів складається розв'язування прикладної задачі?

ВПРАВИ

20.1.° Два мотоциклісти виїхали одночасно з міст A і B назустріч один одному. Через годину вони зустрілися та, не зупиняючись, продовжили рухатися з тією самою швидкістю. Один із них прибув у місто A на 35 хв раніше, ніж другий — у місто B. Знайдіть швидкість кожного мотоцикліста, якщо відстань між містами становить 140 км.

20.2.° Зі станції M до станції N, відстань між якими дорівнює 300 км, вирушив товарний поїзд. Через 40 хв після цього зі станції N до станції M вийшов швидкий поїзд, який зустрівся з товарним через 2 год після свого виходу. Товарний поїзд долає відстань між станціями M і N на 3 год 20 хв довше, ніж швидкий. Знайдіть швидкість кожного поїзда.

20.3.° З одного міста в друге, відстань між якими дорівнює 240 км, виїхали одночасно автобус і автомобіль. Автобус прибув до пункту призначення на 1 год пізніше за автомобіль. Знайдіть швидкість автомобіля та швидкість автобуса, якщо за 2 год автобус проїжджає на 40 км більше, ніж автомобіль за одну годину, а їхні швидкості не перевищують 90 км/год.

20.4.° Човен проплив по річці від пристані A до пристані B й повернувся назад за 6 год. Знайдіть швидкість течії річки, якщо 2 км за течією річки човен пропливає за той самий час, що й 1 км проти течії, а відстань між пристанями A і B становить 16 км.

20.5.° Два приятелі в одному човні пропливли по річці вздовж берега й повернулися тим самим шляхом по річці через 5 год після моменту відплиття. Увесь шлях склав 10 км. Кожні 2 км проти течії вони пропливали за той самий час, що й кожні 3 км за течією. Знайдіть швидкість течії.

20.6.° Вартість доставки на будівництво однієї машини піску становить 1000 грн, а машини щебінки — 1600 грн. За день планується зробити 50 рейсів, причому транспортні витрати не мають перевищувати 59 000 грн. Скільки машин щебінки може бути доставлено за день?

20.7.° На змаганнях зі стрільби кожний учасник робить 25 пострілів. За кожний вдалий постріл він отримує 4 бали, а за кожний промах знімається 2 бали. Скільки промахів може зробити стрілець, щоб набрати не менше ніж 60 балів?

20.8.° Теплохід пройшов за течією річки 100 км і проти течії 64 км за 9 год. За цей час він міг пройти 80 км за течією та 80 км проти течії. Знайдіть власну швидкість теплохода.

20.9.° Катер проходить 48 км проти течії річки та 30 км за течією річки за 3 год, а 15 км за течією — на 1 год швидше, ніж 36 км проти течії. Знайдіть власну швидкість катера та швидкість течії.

20.10.° Теплохід проходить шлях від пункту A до пункту B за 3 год, а повертається назад за 4 год. За який час пропливуть шлях від пункту A до пункту B плоти?

20.11.° Човен проплив 34 км за течією річки та 39 км проти течії, витративши на це стільки часу, скільки йому потрібно, щоби проплисти в стоячій воді 75 км. Знайдіть відношення швидкості човна в стоячій воді до швидкості течії.

20.12.° Із міст A і B, відстань між якими 40 км, одночасно назустріч один одному виїхали на велосипедах Галина та Катерина. Галина прибула до міста B через 40 хв, а Катерина — до міста A через 1,5 год після зустрічі. Знайдіть швидкість руху кожної дівчини.

20.13.° Із двох пунктів, відстань між якими 180 км, одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі. Перший автомобіль прибув у другий пункт через 1 год 36 хв після зустрічі, а другий автомобіль прибув у перший пункт через 2,5 год після зустрічі. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

20.14.° Відстань між селами M і N дорівнює 36 км. Із села N виїхав велосипедист, а через 0,5 год назустріч йому із села M виїхав другий велосипедист, швидкість якого на 6 км/год більша за швидкість першого. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста, якщо вони зустрілися на середині дороги між селами M і N.

20.15.° Два автомобілі виїхали одночасно з одного пункту в одному напрямі. Швидкість першого автомобіля 50 км/год, а другого — 40 км/год. Через 0,5 год з того ж пункту в тому самому напрямі виїхав третій автомобіль, який обігнав перший на 1,5 год пізніше, ніж другий. Знайдіть швидкість третього автомобіля.

20.16.• У двох сплавах маси міді й цинку відносяться як 5 : 2 і 3 : 4. Скільки треба взяти кілограмів першого сплаву та скільки другого, щоб, сплавивши їх, отримати 28 кг нового сплаву з рівним вмістом міді й цинку?

20.17.• Є два зливки сплавів золота й міді. У першому зливку відношення мас золота й міді дорівнює 1 : 2, а в другому — 2 : 3. Якщо сплавити $\frac{1}{3}$ першого зливка з $\frac{5}{6}$ другого, то в отриманому зливку виявиться стільки золота, скільки було міді в першому зливку, а якщо сплавити $\frac{2}{3}$ першого зливка та половину другого, то в отриманому зливку виявиться міді на 1 кг більше, ніж було золота в другому зливку. Скільки кілограмів золота в кожному зливку?

20.18.• Відстань між пристанями *A* і *B* дорівнює 28 км. Вирушивши проти течії річки від пристані *A* до пристані *B*, через 2 год після початку руху катер зустрів пліт, відправлений від пристані *B* за течією річки за 2 год до початку руху катера. Знайдіть швидкість течії річки та власну швидкість катера, якщо катер проходить відстань від *A* до *B* і повертається назад за 4 год 48 хв.

20.19.• Маса зливка одного металу дорівнює 336 г, а маса зливка другого металу — 320 г. Об'єм зливка першого металу на 10 см^3 менший від об'єму другого, а густина першого на 2 г/см^3 більша за густину другого. Знайдіть густину кожного металу.

20.20.• Дві бригади, працюючи разом, можуть виконати виробниче завдання за 8 днів. Якщо перша бригада, працюючи самостійно, виконає $\frac{1}{3}$ завдання, а потім її змінить друга бригада, то завдання буде виконане за 20 днів. За скільки днів кожна бригада може виконати дане виробниче завдання, працюючи самостійно?

20.21.• Якщо відкрити одночасно дві труби, то басейн буде наповнено за 12 год. Якщо спочатку наповнювати басейн тільки через першу трубу протягом 5 год, а потім тільки через другу протягом 9 год, то водою буде наповнено половину басейну. За скільки годин можна наповнити басейн через кожну трубу?

20.22.• Два трактористи, працюючи разом, можуть зорати поле за 6 год. Якщо перший тракторист працюватиме самостійно 4 год, а потім його змінить другий, то цей тракторист закінчить оранку за 9 год. За який час може зорати поле кожен тракторист?

20.23.• До бака місткістю 500 м^3 підведено три труби. Протягом певного часу в бак, який спочатку був порожнім, подавали воду тільки через першу трубу. Потім першу трубу закрили та відкрили дві інші труби, які працювали разом до наповнення бака, причому ці дві труби пропрацювали у два рази довше, ніж перша. Якби ці дві труби працювали 12 год 30 хв, то через них подали б у бак стільки ж води, скільки подали через першу трубу за час її роботи. З'ясуйте, скільки часу працювала перша труба, якщо відомо, що через неї в бак щохвилини надходило 300 л води.

20.24.• Із пункту B у пункт A, відстань між якими дорівнює 13 км, вирушив турист зі швидкістю 6 км/год. Одночасно з ним із пункту A в перпендикулярному напрямку (рис. 20.1) вирушив зі швидкістю 4 км/год другий турист. Через який час після початку руху відстань між туристами буде найменшою?

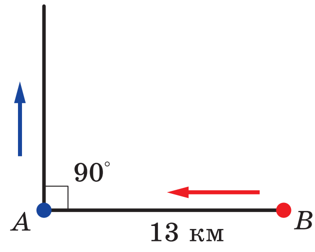


Рис. 20.1

20.25.• Дротяною сіткою завдовжки 600 м потрібно огородити ділянку землі прямокутної форми. При яких розмірах ділянки її площа буде найбільшою?

20.26.• Із пункту A в пункт B вийшов товарний поїзд. Через 5 год із пункту B у пункт A вийшов пасажирський поїзд. Зустрілися вони в пункті C. Від пункту C до пункту B товарний поїзд ішов 4 год, а пасажирський від пункту C до пункту A — 6 год. За скільки годин кожний поїзд може подолати шлях між пунктами A і B?

20.27.• Дві спортсменки одночасно вибігають назустріч одна одній із двох кінців A і B прямолінійної доріжки. Вони біжать з різними швидкостями та зустрічаються на відстані 300 м від A. Пробігши доріжку AB до кінця, кожна з них одразу повертає назад і зустрічає другу на відстані 400 м від B. Знайдіть довжину доріжки AB.

20.28.• Три плавці мають проплисти дистанцію від A до B і назад. Спочатку стартує перший, через 5 с — другий, а ще через 5 с — третій. Деяку точку C, яка знаходиться між A і B, усі плавці на шляху до B пройшли одночасно. Третій плавець, пропливши до B і повертаючись назад, зустрів другого за 9 м, а першого — за 15 м від B. Знайдіть швидкість третього плавця, якщо дистанція AB дорівнює 55 м.

20.29.• Із пункту A в пункт B через рівні проміжки часу відправляються три автомобілі. До пункту B вони прибувають одночасно, потім виїжджають у пункт C, який лежить на відстані 120 км від пункту B. Перший автомобіль прибуває туди через годину після другого. Третій автомобіль, прибувши в пункт C, одразу повертає назад і на відстані 40 км від пункту C зустрічає перший. Знайдіть швидкість першого автомобіля.

20.30.$^{\bullet}$ Із пункту A до пункту B вийшов пішохід. Услід за ним через 2 год із пункту A виїхав велосипедист, а ще через 30 хв — мотоцикліст. Через кілька хвилин після виїзду мотоцикліста виявилося, що до цього моменту всі троє подолали однакову частину шляху від пункту A до пункту B. Пішохід прибув у пункт B на 1 год пізніше за мотоцикліста. На скільки хвилин раніше від пішохода прибув у пункт B велосипедист?

20.31.$^{\bullet}$ Пристань A знаходиться вище за течією річки, ніж пристань B. Від пристаней A і B одночасно назустріч один одному почали рух пліт і моторний човен. Діставшись пристані A, човен негайно повернув назад і наздогнав пліт у той момент, коли він проплив $\frac{2}{3}$ відстані між пристанями A і B. Знайдіть час, який витрачає пліт на шлях від пристані A до пристані B, якщо відомо, що моторний човен пропливає від пристані B до пристані A і назад за 3 год.

20.32.$^{\bullet}$ У два однакових басейни одночасно почали наливати воду. До першого басейну надходить за годину на 30 м^3 більше води, ніж до другого. У деякий момент в обох басейнах разом виявилося стільки води, скільки становить об'єм кожного з них. Після цього через 2 год 40 хв наповнився перший басейн, а ще через 3 год 20 хв — другий. Скільки води надходило за годину до кожного басейну?

20.33.$^{\bullet}$ Біля будинку ростуть липи й берези, причому загальна їхня кількість не менша від 14. Якщо збільшити вдвічі кількість лип, а кількість беріз збільшити на 18, то беріз стане більше, ніж лип. Якщо ж збільшити вдвічі кількість беріз, не змінюючи кількості лип, то лип все одно буде більше, ніж беріз. Скільки лип і скільки беріз росте біля будинку?

20.34.$^{\bullet}$ Два автогосподарства відправили кілька автомобілів для перевезення вантажу. Кількість автомобілів, відправлених із другого автогосподарства, менша від подвоєної кількості автомобілів, відправлених із першого. Якби перше автогосподарство відправило на два автомобілі більше, а друге — на два менше, то автомобілів з другого автогосподарства було би більше, ніж автомобілів з першого. Скільки автомобілів було відправлено з кожного автогосподарства, якщо разом було відправлено не більше 18 автомобілів?

20.35.$^{\bullet\bullet}$ О 7 год ранку від першого причалу відпливли два човни. Спочатку вони пливли 8 км озером, а потім 5 км за течією річки до другого причалу. Перший човен приплив до місця призначення не пізніше 9 год 50 хв, а другий — не раніше 10 год 40 хв того самого дня. Чому дорівнює швидкість кожного човна в стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год, а швидкість другого човна в стоячій воді становить 75 % від швидкості першого човна в стоячій воді?

20.36.•• Два робітники виготовили по 60 однакових деталей, причому 30 деталей кожний із них зробив, працюючи з деякою продуктивністю, яка у другого робітника була на 20 % вище, ніж у першого. Потім перший робітник став виготовляти більше на 2 деталі, а другий — на 3 деталі за годину. Перший робітник витратив на виконання всього завдання не менше 5 год 30 хв, а другий — не більше 4 год 30 хв. Скільки деталей за годину виготовляв другий робітник під час виконання першої половини завдання?

20.37.•• Токарю було доручено виготовити 90 деталей, а учню — 35. Перші 30 деталей токар робив із продуктивністю вдвічі більшою, ніж учень. Виготовляючи решту 60 деталей, він робив ще на 2 деталі за годину більше та закінчив свою роботу пізніше, ніж учень, не менше ніж на 1 год. Проте якби токар перші 30 деталей виготовляв із такою самою продуктивністю, що й решту 60, то він закінчив би роботу не раніше ніж через 30 хв після учня. Скільки деталей за годину робив учень?

20.38.•• Бригади робітників отримували зі складу одяг для роботи: по 2 комплекти на кожну людину. Кожна бригада отримала на 20 комплектів більше, ніж було бригад. Якби бригад було на 4 більше та кожній бригаді видавали би по 12 комплектів, то одягу на всіх не вистачило б. Скільки комплектів одягу було видано зі складу?

20.39.•• Солдатів, які прибули на парад, планували вишикувати так, щоб у кожному ряду стояло по 24 солдати. По прибутті виявилося, що не всі вони зможуть узяти участь у параді. Солдатів, які взяли участь у параді, вишикували так, що кількість рядів стала на 2 меншою, а кількість людей у ряду — на 26 більшою за нову кількість рядів. Скільки солдатів прибуло на парад, якщо відомо, що коли б усі вони взяли участь у параді, то їх можна було б вишикувати так, щоб кількість рядів дорівнювала кількості чоловік у ряду?

20.40.•• Хімічний завод має цехи трьох типів. У кожному цеху першого, другого та третього типу працює відповідно 350, 80 і 60 робітників. Разом у цехах заводу працює 980 робітників. Знайдіть кількість цехів кожного типу.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

20.41. Побудуйте графік функції $f(x)=\frac{x^4-x^2}{x^2-1}$.

20.42. Доведіть тотожність

$$\left(\frac{2a}{a+3}-\frac{4a}{a^2+6a+9}\right):\frac{a+1}{a^2-9}-\frac{a^2-9a}{a+3}=a.$$

20.43. Розв'яжіть нерівність $\frac{2}{x\,|\,x-1\,|}\leqslant -1$.

20.44. Скільки розв'язків залежно від значення параметра a має рівняння $|\,x+5\,|+|\,x-3\,|=a$?

21. Відсоткові розрахунки

Починаючи з п'ятого класу, вам доводилося розв'язувати багато прикладних задач на відсотки (проценти).

Ви знайомі з такими типами задач на відсотки:
- знаходження відсотка від числа;
- знаходження числа за його відсотком;
- знаходження відсоткового відношення двох чисел.

Ви вмієте конструювати математичні моделі цих задач за допомогою таких виразів:

1) $\frac{a\cdot p}{100}$ — знаходження p % від числа a;

2) $\frac{a\cdot 100}{p}$ — знаходження числа, p % якого дорівнюють a;

3) $\frac{a}{b}\cdot 100\,\%$ — знаходження відсоткового відношення числа a до числа b.

Розглянемо прикладну задачу, яку часто доводиться розв'язувати банківським працівникам, а також тим, хто зберігає гроші в банку під відсотки.

ПРИКЛАД Вкладник поклав у банк 100 000 грн під 10 % річних. Яка сума буде на його рахунку через 7 років за умови, що вкладник протягом цього строку не знімає гроші з рахунку?

Розв'язання. Нехай a_0 — початковий капітал вкладника, тобто

$$a_0 = 100\ 000 \text{ грн}.$$

Позначимо через a_1, a_2, ..., a_7 кількість грошей на рахунку відповідно в кінці першого, другого, ..., сьомого років.

У кінці першого року початковий капітал a_0 зріс на $10\ \%$. Отже, число a_1 становить $110\ \%$ від початкового капіталу a_0. Тоді

$$a_1 = a_0 \cdot 1{,}1 = 100\,000 \cdot 1{,}1 = 110\,000 \text{ (грн).}$$

У кінці другого року число a_1, у свою чергу, збільшилося на $10\ \%$. Отже, число a_2 становить $110\ \%$ від числа a_1. Тоді

$$a_2 = a_1 \cdot 1{,}1 = a_0 \cdot 1{,}1^2 = 110\,000 \cdot 1{,}1^2 = 121\,000 \text{ (грн).}$$

У кінці третього року число a_2 збільшилося на $10\ \%$. Отже, число a_3 становить $110\ \%$ від числа a_2. Тоді

$$a_3 = a_2 \cdot 1{,}1 = a_0 \cdot 1{,}1^3 = 100\,000 \cdot 1{,}1^3 = 133\,100 \text{ (грн).}$$

Тепер стає зрозумілим, що

$$a_7 = a_0 \cdot 1{,}1^7 = 100\,000 \cdot 1{,}1^7 = 194\,871{,}71 \text{ (грн).}$$

Відповідь: 194 871,71 грн. ◄

Аналогічно розв'язують цю задачу в загальному вигляді, коли початковий капітал, який дорівнює a_0, поклали в банк під $p\ \%$ річних.

Справді, у кінці першого року початковий капітал збільшиться на $\frac{a_0 \cdot p}{100}$ і дорівнюватиме

$$a_1 = a_0 + \frac{a_0 \cdot p}{100} = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

тобто збільшиться в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ разів.

До речі, у розглянутому вище прикладі це число становило $1 + \frac{10}{100} = 1{,}1$.

Зрозуміло, що в кінці другого року сума знову зросте в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ разів і дорівнюватиме

$$a_2 = a_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Отже, у кінці n-го року матимемо:

$$\boxed{a_n = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

Отриману формулу називають **формулою складних відсотків**.

?

1. Які ви знаєте три основні задачі на відсотки?
2. Який вигляд має формула складних відсотків?

ВПРАВИ

21.1.° Ціну на товар підвищили на 25 %. На скільки відсотків тепер потрібно її знизити, щоб отримати початкову ціну?

21.2.° Вкладник поклав до банку 5000 грн під 8 % річних. Скільки грошей буде на його рахунку через три роки?

21.3.° Чотири роки тому завод виготовляв 10 000 одиниць певного виробу за рік. Завдяки модернізації виробництва та підвищенню продуктивності праці досягли щорічного приросту обсягів виробництва на 20 %. Скільки одиниць указаного виробу буде виготовлено цього року?

21.4.° Після двох послідовних знижень ціни на 10 % канцелярський стіл став коштувати 2916 грн. Знайдіть початкову ціну стола.

21.5.° Після двох послідовних підвищень ціни на 25 % люстра стала коштувати 937 грн 50 к. Знайдіть початкову ціну люстри.

21.6.° Населення міста за два роки збільшилося із 40 000 мешканців до 44 100. Знайдіть середній щорічний відсоток приросту населення в цьому місті.

21.7.° Унаслідок двох послідовних знижень ціни на одну й ту саму кількість відсотків ціна стільця знизилася з 800 грн до 578 грн. На скільки відсотків кожного разу знижували ціну?

21.8.° Було 300 г 6-відсоткового розчину солі. Через деякий час 50 г води випарували. Яким став відсотковий вміст солі в розчині?

21.9.° До сплаву масою 600 г, що містив 12 % срібла, додали 60 г срібла. Яким став відсотковий вміст срібла в новому сплаві?

21.10.° Морська вода містить 5 % солі. Скільки прісної води треба додати до 40 кг морської води, щоб концентрація солі становила 2 %?

21.11.° Скільки кілограмів води треба випарити з 0,5 т целюлозної маси, яка містить 85 % води, щоб отримати масу з вмістом 75 % води?

21.12.° Сплав міді й цинку масою 36 кг містить 45 % міді. Яку масу міді потрібно додати до цього сплаву, щоб отриманий новий сплав містив 60 % міді?

21.13.° (*Задача Безу*[1].) Дехто купив коня і через деякий час продав його за 24 пістолі. При продажу він втратив стільки відсотків, скільки коштував йому кінь. Питається: за яку суму він купив коня?

21.14.° Фірма купує у виробника товар за оптовою ціною, а продає вроздріб за 11 грн, при цьому прибуток від продажу у відсотках дорівнює оптовій ціні товару в гривнях. Яка оптова ціна товару?

21.15.• Один робітник може викопати траншею за 6 год, а другий — за 4 год. Якщо ж вони працюватимуть разом, то продуктивність праці кожного з них підвищиться на 20 %. За який час вони вириють траншею, працюючи разом?

21.16.• Один муляр може скласти цегляну стіну за 15 год, а другий — за 10 год. Якщо ж вони працюватимуть разом, то продуктивність праці кожного з них зросте на одну й ту ж кількість відсотків і вони складуть стіну за 4 год. На скільки відсотків зростає продуктивність праці кожного муляра під час їхньої спільної роботи?

21.17.• Два розчини, перший з яких містить 0,8 кг, а другий — 0,6 кг безводної сірчаної кислоти, з'єднали разом і отримали 10 кг нового розчину сірчаної кислоти. Обчисліть масу першого та другого розчинів, якщо відомо, що в першому розчині містилося на 10 % більше безводної сірчаної кислоти, ніж у другому.

21.18.• Ковдра коштувала 600 грн. Після того як ціну було знижено двічі, вона стала коштувати 432 грн, причому відсоток зниження другого разу був у 2 рази більшим, ніж першого разу. На скільки відсотків кожного разу знижувалася ціна?

21.19.• Певний товар коштував 200 грн. Спочатку його ціну підвищили на кілька відсотків, а потім знизили на стільки ж відсотків, після чого вартість його становила 192 грн. На скільки відсотків кожного разу відбувалася зміна ціни товару?

21.20.• У банк поклали 12 000 грн. Через рік вкладник зняв 2400 грн, а ще через рік на цьому рахунку виявилося 10 710 грн. Скільки відсотків річних нараховує банк?

21.21.• Банк через рік нарахував у вигляді відсотків 600 грн, а вкладник поклав у банк ще 2400 грн. Ще через рік сума вкладу становила 23 690 грн. Скільки грошей спочатку вкладник поклав у банк?

---

[1] Безу́ Етьєн (1730–1783) — французький математик, основні роботи якого стосуються вищої алгебри. Викладав математику в училищі гардемаринів, Королівському артилерійському корпусі. Автор шеститомної праці «Курс математики».

21.22.° Вкладник поклав у банк 4000 грн. За перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було збільшено на 4 %. На кінець другого року на рахунку стало 4664 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка у перший рік?

21.23.° Вкладник поклав у банк 10 000 грн. За перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було зменшено на 2 %. На кінець другого року на рахунку стало 11 880 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка у перший рік?

21.24.° До сплаву міді й цинку, який містив міді на 12 кг більше, ніж цинку, додали 6 кг міді. Унаслідок цього відсотковий вміст цинку в сплаві знизився на 5 %. Скільки кілограмів цинку та скільки кілограмів міді містив сплав спочатку?

21.25.° До розчину, який містив 40 г солі, додали 200 г води, після чого його концентрація зменшилася на 10 %. Скільки грамів води містив розчин і якою була його концентрація?

21.26.° До сплаву магнію й алюмінію, який містив 12 кг алюмінію, додали 5 кг магнію, після чого відсотковий вміст магнію у сплаві збільшився на 20 %. Скільки кілограмів магнію було в сплаві спочатку?

21.27.° Сплавили чавун двох сортів з різним відсотковим вмістом хрому. Якщо чавуну одного сорту взяти в 5 разів більше, ніж другого, то відсотковий вміст хрому в сплаві вдвічі перевищить відсотковий вміст хрому в меншій із частин, які сплавляють. Якщо ж взяти однакову кількість чавуну обох сортів, то сплав міститиме 8 % хрому. Визначте відсотковий вміст хрому в чавуні кожного сорту.

21.28.° Для приготування оцту певної міцності в посудину, яка містила 12 л оцтової есенції, додали 20 л води. У другій посудині містилося 13 л більш міцного оцту: на 9 л оцтової есенції приходилося тільки 4 л води. Скільки літрів оцту слід перелити з першої посудини в другу, щоби зрівняти в другій посудині вміст оцтової есенції та води?

21.29.° У цистерні була концентрована сірчана кислота, яка містила 2 т води. Після того як цю кислоту змішали з 4 т води, концентрація її знизилася на 15 %. Скільки тонн кислоти було в цистерні спочатку?

21.30.• Щоб отримати соляну кислоту, 2 кг хлористого водню розчинили в певному об'ємі води. Потім, щоби підвищити концентрацію отриманої кислоти на 25 %, додали ще 9 кг хлористого водню. Скільки кілограмів соляної кислоти було отримано?

21.31.•• У посудині було 12 кг кислоти. Частину кислоти відлили й долили до попереднього рівня водою. Потім знову відлили стільки ж, як і першого разу, і долили водою до попереднього рівня. Скільки літрів рідини відливали щоразу, якщо в результаті отримали 25-відсотковий розчин кислоти?

21.32.•• З банки, повністю наповненої 12-відсотковим розчином солі, відлили 1 л і долили банку водою до попереднього рівня, потім відлили ще 1 л і знову долили водою. Виявилося, що в банці 3-відсотковий розчин солі. Яка місткість банки?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

21.33. Відомо, що $-3 \leqslant a \leqslant 2$, $-1 \leqslant b \leqslant 3$. Оцініть значення виразу: 1) $3a + 4b$; 2) $4a - 3b$. Скільки цілих значень набуває кожний із цих виразів?

21.34. При яких значеннях c тричлен $2x^2 - 2x + 5c$ набуває додатних значень при будь-якому значенні x?

21.35. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - 8xy + 16y^2 = 4, \\ xy + 4y^2 = 6. \end{cases}$

21.36. Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких $(x;\ y)$ задовольняють нерівність $\sqrt{y} \leqslant \sqrt{1 - x^2}$.

Як уникнути неоднозначності в задачах на відсоткові розрахунки

Задачі, у яких ідеться про зміну процентних ставок, можуть викликати певні ускладнення. Типовим прикладом є задачі 21.22, 21.23, у яких ідеться про збільшення (зменшення) «банківського відсотка». Відсоткова ставка — така сама величина, як і інші змінні величини: швидкість, відстань, ціна тощо. Єдина відмінність полягає в тому, що сама ця величина виражена також у відсотках. Тому ситуація, коли доводиться говорити про зміни цієї величини, припускає неоднозначне тлумачення. Порівняємо.

Підвищення ціни x	Підвищення відсоткової ставки x	Математична модель, що описує нове значення
Ціна підвищилася на 10 грн	Відсоткова ставка підвищилася на 10 %	$x + 10$
Ціна підвищилася на 10 %	Відсоткова ставка підвищилася на 10 %	$1{,}1x$

Бачимо, що у випадку відсоткової ставки словесний опис для різних математичних моделей виявився однаковим.

Щоб уникнути цієї неоднозначності, в економіці та інших областях, де широко застосовують відсоткові розрахунки, використовують поняття «процентні пункти». Наведемо характерний приклад.

У дев'ятих класах навчається 100 дітей, з яких 20 % на початок навчального року були відмінниками.

Якщо ми скажемо, що на кінець року кількість відмінників зросла на 5 %, то ця фраза означає, що кількість відмінників (виражена кількістю людей) збільшилася на 5 % від цієї величини. Кількість відмінників у цьому прикладі становила 20 осіб; коли ця кількість зросла на 5 %, то вже становила 21 особу.

Якщо ж ми хочемо сказати, що показник «20 %» збільшився й тепер дорівнює «25 %», то потрібно вживати слова «процентних пунктів»: «на кінець року кількість відмінників збільшилася на 5 процентних пунктів». За такого формулювання кількість відмінників на кінець року становитиме 25 осіб.

Процентні пункти часто позначають так: «п. п.».

Для порівняння відсоткових ставок, різниця між якими дуже мала, введено ще одну умовну одиницю: базисний пункт, який дорівнює 0,01 процентного пункту (іншими словами, в одному процентному пункті 100 базисних пунктів). Його позначають так: «б. п.» або ‱.

Тепер ми можемо переформулювати задачі так, щоб уникнути хибного тлумачення.

21.22. Вкладник поклав у банк 4000 грн. За перший рік йому було нараховано певний відсоток річних, а другого року банківський відсоток було збільшено на 4 процентних пункти. На кінець другого року на рахунку стало 4664 грн. Скільки відсотків становила банківська ставка в перший рік?

Визначте, у яких ще задачах п. 21 потрібно використовувати поняття «процентні пункти», і переформулюйте ці задачі.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 5

Етапи розв'язування прикладної задачі

1) Побудова математичної моделі;
2) розв'язання математичної задачі;
3) аналіз результату, отриманого на другому етапі, виходячи зі змісту прикладної задачі.

Математичні моделі задач на відсотки

$\dfrac{a \cdot p}{100}$ — знаходження p % від числа a;

$\dfrac{a \cdot 100}{p}$ — знаходження числа, p % якого дорівнюють a;

$\dfrac{a}{b} \cdot 100\,\%$ — знаходження відсоткового відношення числа a до числа b.

Формула складних відсотків

$$a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

§ 6 ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

- У цьому параграфі ви ознайомитеся з індуктивним методом міркувань, навчитеся доводити твердження методом математичної індукції.
- Дізнаєтеся, яку множину називають упорядкованою; скільки різних комбінацій, утворених за певним правилом, можна скласти з елементів даної скінченної множини.
- Розширите та поглибите свої знання про випадкові величини, ймовірність випадкової події; дізнаєтеся, яку величину називають частотою випадкової події. За допомогою комбінаторних формул навчитеся обчислювати ймовірність випадкової події.

22. Метод математичної індукції

Вивчаючи навколишній світ, нам часто доводиться на підставі результатів спостережень і дослідів робити висновки.

Загальні висновки, отримані на підставі вивчення окремих випадків, називають **індуктивними**, а сам метод таких міркувань — **індуктивним методом** або **індукцією** (від латин. *inductio* — наведення).

Наприклад, задовго до відкриття законів руху Землі люди зробили висновок, що Сонце вранці встає на сході, а ввечері зникає за обрієм на заході. Цей висновок є індуктивним: адже він базувався лише на спостереженнях.

Звісно, за допомогою індукції не завжди можна отримати правильні висновки. Так, якщо у вашій і сусідній школах серед учителів початкових класів немає чоловіків, то це не означає, що всі вчителі початкових класів — жінки.

Незважаючи на необхідність ставитися до індуктивних висновків із певним ступенем недовіри, індуктивний метод знаходить широке застосування в математиці.

Розглянемо два приклади.

- Спробуємо підмітити закономірність у «поведінці» сум n перших непарних натуральних чисел. Символом S_n позначимо суму n перших непарних чисел. Домовимося, що $S_1 = 1$. Маємо:

$S_1 = 1 = 1;$
$S_2 = 1 + 3 = 4;$
$S_3 = 1 + 3 + 5 = 9;$
$S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16;$
$S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25.$

Числа 1, 4, 9, 16, 25 — квадрати послідовних натуральних чисел.

Тепер можна зробити таке припущення (індуктивний висновок): для будь-якого натурального n

$$S_n = n^2. \qquad (1)$$

• Розглянемо значення многочлена $f(n) = n^2 - n + 41$ при значеннях n, які дорівнюють 1, 2, 3, 4, 5. Маємо:

$f(1) = 41$ — просте число;

$f(2) = 43$ — просте число;

$f(3) = 47$ — просте число;

$f(4) = 53$ — просте число;

$f(5) = 61$ — просте число.

Тепер можна зробити таке припущення: для будь-якого натурального n значення виразу $f(n)$ є простим числом.

Два наведених припущення є лише гіпотезами, які належить або довести, або спростувати.

Спростувати гіпотезу можна контрприкладом. Для другого припущення такий контрприклад легко знайти. Маємо: $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ — складене число.

Спроба знайти контрприклад для першого індуктивного висновку може привести до таких рівностей:

$S_6 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6^2$;

$S_7 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 = 7^2$;

$S_8 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64 = 8^2$.

Отримані рівності лише підкріплюють упевненість у тому, що висунута гіпотеза є правильною.

Приєднання до суми чергового непарного доданка не призведе до доведення гіпотези: скільки б сум ми не обчислили, неможливо гарантувати того, що серед нескінченної кількості сум, що залишаються, не трапиться така, для якої рівність (1) не виконується.

Щоб довести справедливість висловленої гіпотези, потрібно провести деякі загальні міркування.

Нехай рівність (1) є справедливою для k доданків, тобто

$$S_k = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2.$$

Розглянемо суму, яка містить $k + 1$ доданок:

$$S_{k+1} = \underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)}_{S_k} + (2k + 1) = S_k + (2k + 1).$$

З урахуванням припущення маємо: $S_{k+1} = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Наведені міркування гарантують, що *коли рівність* (1) *є правильною для* $n = k$*, то вона залишається правильною і для* $n = k + 1$.

Тепер можна стверджувати, що рівність (1) доведено для будь-якого натурального значення n. Пояснимо це.

Оскільки $S_1 = 1$, то рівність (1) є правильною для $n = 1$. Отже, вона є правильною для $n = 1 + 1 = 2$, а тоді вона є правильною при $n = 2 + 1 = 3$, при $n = 3 + 1 = 4$, при $n = 4 + 1 = 5$ і т. д. Послідовно записуючи аналогічні рівності, можна досягти будь-якого натурального значення n. Отже, рівність (1) є правильною при всіх натуральних значеннях n.

Розглянутий метод доведення називають **методом математичної індукції**. У загальному вигляді його можна описати так.

Нехай потрібно довести, що деяке твердження є правильним для будь-якого натурального значення n.

Доведення цього факту методом математичної індукції складається з двох частин (теорем):

1) *доводять (перевіряють) справедливість твердження для* $n = 1$;

2) *роблять припущення, що твердження є правильним для* $n = k$, *і на підставі цього доводять, що воно є правильним для* $n = k + 1$.

Теорему, яку доводять у першій частині, називають **базою індукції**.

Наприклад, при доведенні рівності (1) базою індукції було твердження, що рівність (1) виконується при $n = 1$.

Теорему, яку доводять у другій частині методу, називають **індуктивним переходом**.

Кожний із цих двох етапів важливий. Вище ми переконалися, що твердження може бути правильним у цілій низці окремих випадків, але неправильним у цілому. Це показує, наскільки важливим є довести теорему «індуктивний перехід». Але було би помилково вважати, що доведення теореми «база індукції» є менш суттєвим.

Покажемо, як, користуючись лише теоремою «індуктивний перехід», можна, наприклад, «довести», що при будь-якому натуральному n число $2n + 1$ є парним.

Нехай це твердження є правильним при $n = k$, тобто $2k + 1$ є парним числом. Доведемо, що тоді воно буде правильним для $n = k + 1$, тобто число $2(k + 1) + 1$ також буде парним.

Маємо: $2(k + 1) + 1 = (2k + 1) + 2$.

За припущенням число $2k + 1$ є парним. Сума двох парних чисел — число парне. Отже, число $(2k + 1) + 2$ також є парним.

Ми довели теорему «індуктивний перехід». Але при цьому не виявили, що теорема «база індукції» є неправильною (при $n = 1$ число $2n + 1$ є непарним). У цьому й полягає причина того, що нам удалося «довести» настільки безглузде твердження.

ПРИКЛАД 1 Виведіть формулу для обчислення значення суми

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\frac{17}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)},\ \text{де}\ n\in\mathbb{N}.$$

Розв'язання. Для $n = 1$: $S_1=\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{3}$.

Для $n = 2$: $S_2=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}=\frac{4}{5}$.

Для $n = 3$: $S_3=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\frac{17}{5\cdot 7}=\frac{9}{7}$.

Для $n = 4$: $S_4=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\frac{17}{5\cdot 7}+\frac{31}{7\cdot 9}=\frac{16}{9}$.

Тепер можна зробити таке припущення: для всіх $n\in\mathbb{N}$ виконується рівність

$$S_n=\frac{n^2}{2n+1}. \qquad (2)$$

Доведемо цю гіпотезу методом математичної індукції.

Вище ми перевірили справедливість формули (2) для $n = 1$, тим самим довели теорему «база індукції».

Тепер доведемо теорему «індуктивний перехід».

Нехай формула (2) є правильною при $n = k$, тобто $S_k=\frac{k^2}{2k+1}$.

Маємо:

$$S_{k+1}=\underbrace{\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\frac{17}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2k^2-1}{(2k-1)(2k+1)}}_{S_k}+\frac{2(k+1)^2-1}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=S_k+\frac{2(k+1)^2-1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k^2}{2k+1}+\frac{2k^2+4k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^3+5k^2+4k+1}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{2k^3+2k^2+3k^2+3k+k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2(k+1)+3k(k+1)+k+1}{(2k+1)(2k+3)}=$$

$$=\frac{(k+1)(2k^2+3k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(k+1)^2}{2k+3}=\frac{(k+1)^2}{2(k+1)+1}.$$

Отже, припустивши, що формула (2) є правильною при $n = k$, ми довели, що вона є правильною і при $n = k + 1$. А з урахуванням теореми «база індукції» можна зробити висновок, що гіпотеза є правильною. ◄

Для розв'язування цілої низки задач використовують твердження, сформульоване в наступній задачі.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, де $n \in \mathbb{N}$.

Користуючись методом математичної індукції, доведіть цю рівність самостійно.

ПРИКЛАД 3 Виведіть формулу для обчислення суми

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

Розв'язання. Для $n = 1$: $S_1 = 1^3 = 1$.

Для $n = 2$: $S_2 = 1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1 + 2)^2$.

Для $n = 3$: $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1 + 2 + 3)^2$.

Для $n = 4$: $S_4 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 = 10^2 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$.

Тепер можна зробити таке припущення:

$$S_n = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

Ураховуючи приклад 2, гіпотезу можна записати в такій формі:

$$S_n=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2. \qquad (3)$$

Справедливість цієї формули при $n = 1$ було встановлено вище.

Нехай формула (3) є правильною при $n = k$, тобто $S_k=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$.

Маємо: $S_{k+1}=1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2+(k+1)^3=$

$$=(k+1)^2\left(\frac{k^2}{4}+k+1\right)=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4}=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Отже, формула (3) є правильною при $n = k + 1$.

Таким чином, методом математичної індукції формулу (3) доведено. ◄

ПРИКЛАД 4 Доведіть, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ значення виразу $5^n - 3^n + 2n$ кратне 4.

Розв'язання. При $n = 1$ отримуємо: $5^1-3^1+2\cdot1=4$. Оскільки $4 \vdots 4$, то теорему «база індукції» доведено.

Нехай при $n = k$ твердження є правильним, тобто

$$(5^k-3^k+2k) \vdots 4.$$

Доведемо, що тоді це твердження є правильним при $n = k + 1$, тобто

$$(5^{k+1}-3^{k+1}+2(k+1)) \vdots 4.$$

Для доведення достатньо показати, що різниця $(5^{k+1} - 3^{k+1} + 2k + 2) - (5^k - 3^k + 2k)$ кратна 4.

Перепишемо цю різницю так:

$$5^k(5-1)-3^k(3-1)+2=4\cdot 5^k-2(3^k-1).$$

Оскільки $(3^k-1)\,\vdots\,2$, то значення отриманого виразу кратне 4.

Отже, твердження, що доводиться, є правильним, у чому ми переконалися за допомогою методу математичної індукції. ◄

ПРИКЛАД 5 Доведіть нерівність (нерівність Бернуллі[1]):

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx, \text{ де } n\in\mathbb{N},\ x>-1.$$

Розв'язання. При $n=1$ маємо правильну нерівність $1+x\geqslant 1+x$.

Нехай нерівність, що доводиться, є правильною при $n=k$, тобто $(1+x)^k\geqslant 1+kx$, $k\in\mathbb{N}$. Оскільки $1+x>0$, то $(1+x)^{k+1}\geqslant(1+kx)(1+x)$.

Маємо: $(1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2\geqslant 1+(k+1)x$.

Звідси $(1+x)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)x$.

Отже, припустивши, що нерівність, яка доводиться, є правильною при $n=k$, ми довели її справедливість при $n=k+1$.

Теореми «база індукції» та «індуктивний перехід» доведено.

Таким чином, нерівність, що доводиться, є правильною. ◄

Метод математичної індукції використовують і в тих випадках, коли потрібно довести твердження, правильне для всіх натуральних n таких, що $n\geqslant n_0$, де $n_0\in\mathbb{N}$, $n_0>1$. У цьому разі теорему «база індукції» доводять (перевіряють) для $n=n_0$.

ПРИКЛАД 6 Доведіть, що для будь-якого $n\in\mathbb{N}$ і $n>4$ виконується нерівність $2^n>n^2$.

Розв'язання. При $n=5$ маємо правильну нерівність $2^5>5^2$.

Нехай нерівність, що доводиться, є правильною при $n=k$, де $k>4$, тобто $2^k>k^2$. Маємо:

$$2\cdot 2^k>2k^2;$$

$$2^{k+1}>2k^2.$$

Легко показати (переконайтеся в цьому самостійно), що при $k>1+\sqrt{2}$, а тим більше при $k>4$, виконується нерівність $2k^2>(k+1)^2$. Звідси

$$2^{k+1}>(k+1)^2.$$

Ми показали, що при $n=5$ виконується теорема «база індукції», і при $n>4$ довели теорему «індуктивний перехід». Отже, нерівність, що розглядається, є правильною при будь-яких натуральних n таких, що $n>4$. ◄

[1] Йоганн Бернуллі — швейцарський математик.

Доведення методом математичної індукції застосовують у різних галузях математики. Розглянемо задачу, яка демонструє використання цього методу в геометрії.

ПРИКЛАД 7 Площину поділено на області кількома прямими. Дві області назвемо сусідніми, якщо їхньою межею є або відрізок, або промінь, або пряма. Доведіть, що ці області можна розфарбувати у два кольори так, щоб сусідні області мали різний колір.

Розв'язання. Нехай на площині проведено n прямих. Очевидно, що при $n = 1$ твердження задачі є правильним (рис. 22.1).

Припустимо, що твердження є правильним при $n = k$, тобто області, утворені k прямими, можна розфарбувати належним чином.

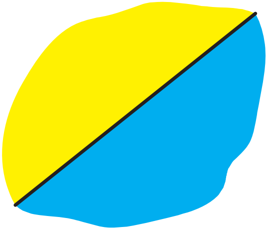


Рис. 22.1

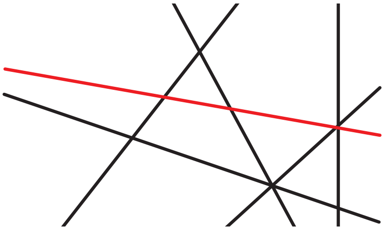


Рис. 22.2

Нехай на площині проведено $k + 1$ пряму. Подумки вилучимо одну із цих прямих (на рисунку 22.2 це червона пряма). Тоді на площині залишиться k прямих, і за припущенням вони задають області, які можна розфарбувати потрібним чином (рис. 22.3).

Кольори всіх областей, які лежать у нижній півплощині відносно червоної прямої, поміняємо на протилежні. Кольори областей, які лежать у верхній півплощині, залишимо без змін (рис. 22.4). Отриманий рисунок задовольняє умову задачі.

Отже, ми довели теорему «база індукції» та теорему «індуктивний перехід». Таким чином, твердження, що доводиться, є правильним. ◄

Рис. 22.3

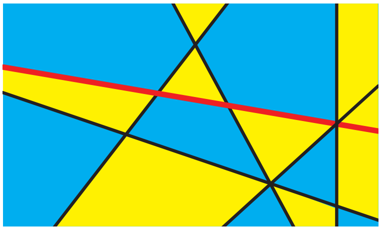


Рис. 22.4

1. Які висновки називають індуктивними?
2. Опишіть доведення методом математичної індукції.
3. Як називають дві теореми, з яких складається доведення методом математичної індукції?

ВПРАВИ

22.1.° Числа 24, 44, 64, 84 кратні 4. Чи можна звідси зробити висновок, що число, яке закінчується цифрою 4, кратне 4?

22.2.• Розгляньте значення многочлена $f(n) = n^2 + n + 17$ при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$. Зробіть припущення. Установіть, чи є висловлена гіпотеза правильною.

22.3.• Доведіть, що при будь-якому натуральному n виконується рівність:

1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

3) $1\cdot3 + 2\cdot5 + 3\cdot7 + \ldots + n(2n+1) = \dfrac{n(n+1)(4n+5)}{6}$;

4) $\dfrac{1\cdot4}{2\cdot3} + \dfrac{2\cdot5}{3\cdot4} + \dfrac{3\cdot6}{4\cdot5} + \ldots + \dfrac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+1)}{n+2}$;

5) $\left(1-\dfrac{4}{1}\right)\left(1-\dfrac{4}{9}\right)\left(1-\dfrac{4}{25}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{4}{(2n-1)^2}\right) = \dfrac{1+2n}{1-2n}$.

22.4.• Доведіть, що при будь-якому натуральному n виконується рівність:

1) $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

2) $1\cdot4 + 2\cdot7 + 3\cdot10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

3) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$;

4) $\dfrac{1}{1\cdot5} + \dfrac{1}{5\cdot9} + \dfrac{1}{9\cdot13} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$.

22.5.• Доведіть, що при будь-якому натуральному $n \geqslant 2$ виконується рівність $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n}$.

22.6.• Виведіть формулу для обчислення значення суми

$$\frac{1}{1\cdot3} + \frac{1}{3\cdot5} + \frac{1}{5\cdot7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)},\ \text{де}\ n \in \mathbb{N}.$$

22.7.• Виведіть формулу для обчислення значення суми

$$-1+3-5+7-9+\ldots+(-1)^n\cdot(2n-1), \text{ де } n\in\mathbb{N}.$$

22.8.• Виведіть формулу для обчислення значення суми

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}, \text{ де } n\in\mathbb{N}.$$

22.9.• Доведіть нерівність $2^n > 2n+1$, де $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$.

22.10.• Доведіть нерівність $3^n > 4n+1$, де $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 3$.

22.11.• Доведіть нерівність $4^n > 3n^2+1$, де $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.

22.12.• Доведіть нерівність

$$\frac{x_1^2}{y_1}+\frac{x_2^2}{y_2}+\ldots+\frac{x_n^2}{y_n}\geqslant\frac{(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2}{y_1+y_2+\ldots+y_n},$$

де y_1, y_2, ..., y_n — додатні числа.

22.13.• Доведіть нерівність

$$|a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|.$$

22.14.•• Доведіть, що для будь-якого натурального n:

1) $(3^{2n+1}+2^{n+2})\,\vdots\,7$;
2) $(6^{2n}+19^n-2^{n+1})\,\vdots\,17$;
3) $(4^n+15n-1)\,\vdots\,9$;
4) $(5^n-3^n+2n)\,\vdots\,4$.

22.15.•• Доведіть, що для будь-якого натурального n:

1) $(7^{n+1}+8^{2n-1})\,\vdots\,19$;
2) $(7\cdot 24^n-5\cdot 13^n-2^{n+1})\,\vdots\,11$;
3) $(3^{2n+2}-8n-9)\,\vdots\,64$.

22.16.•• Доведіть, що коли $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $n\in\mathbb{N}$, то $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\leqslant\frac{a^n+b^n}{2}$.

22.17.•• Доведіть, що $\frac{a^{n+1}}{b^n}\geqslant(n+1)a-nb$, де $a>0$, $b>0$, $n\in\mathbb{N}$.

22.18.•• Доведіть нерівність $\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{ радикалів}}<2$.

22.19.•• Доведіть нерівність $\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots+\sqrt{6}}}}}_{n\text{ радикалів}}<3$.

22.20.•• Доведіть нерівність $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2\sqrt{n+1}-2$, де $n\in\mathbb{N}$.

22.21.•• Доведіть нерівність $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$, де $n\in\mathbb{N}$.

22.22.•• Доведіть нерівність[1] $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$, де $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$.

22.23.•• Доведіть нерівність[2] $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$, де $n\in\mathbb{N}$.

22.24.•• Доведіть, що розклад на прості множники числа $a_n = n = (n+1)(n+1)\cdot\ldots\cdot 2n$ містить рівно n множників, кожний з яких дорівнює 2.

22.25.•• Доведіть, що кількість усіх підмножин даної n-елементної множини дорівнює 2^n.

22.26.* Доведіть, що для будь-якого натурального n, $n\geqslant 4$, існує опуклий n-кутник, який має рівно три гострих кути.

22.27.* На площині проведено n прямих, жодні дві з яких не паралельні та жодні три з яких не проходять через одну точку. На скільки частин розбивають площину ці прямі?

22.28.* У шаховому турнірі взяли участь n шахістів. Кожний зустрівся з кожним іншим один раз, причому жодна партія не закінчилася внічию. Доведіть, що за результатами турніру всіх шахістів можна пронумерувати в такому порядку, щоб кожний попередній був переможцем наступного.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

22.29. Знайдіть область визначення функції $y=\sqrt{20+x-x^2}+\frac{4}{x-2}$.

22.30. Розв'яжіть рівняння $(x+3)^4+(x+1)^4=16$.

22.31. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2+2x+1}=3$.

22.32. Знайдіть усі значення параметра a, при яких функція $y=(x-1)^4+a(x+1)^4$ є парною.

Різні схеми застосування методу математичної індукції

ПРИКЛАД 1 Знайдіть усі натуральні значення n, при яких $(1+2^n+4^n)\,\vdots\,7$.

Розв'язання. Введемо позначення $a_n = 1 + 2^n + 4^n$. У пошуках гіпотези природно знайти значення a_n для кількох значень n.

[1] У п. 18 ми довели слабкішу нерівність (див. приклад 7).

[2] У п. 18 ми довели слабкішу нерівність (див. задачу 18.66).

Маємо:

при $n = 1$: $a_n = 7$, тобто $a_n \vdots 7$;

при $n = 2$: $a_n = 21$, тобто $a_n \vdots 7$;

при $n = 3$: $a_n = 73$, тобто $a_n \not\vdots\, 7$;

при $n = 4$: $a_n = 273$, тобто $a_n \vdots 7$;

при $n = 5$: $a_n = 1057$, тобто $a_n \vdots 7$;

при $n = 6$: $a_n = 4161$, тобто $a_n \not\vdots\, 7$.

Тепер можна зробити таке припущення:

$$a_n \vdots 7 \text{ при } n = 3k - 2 \text{ і } n = 3k - 1,\ k \in \mathbb{N};$$

$$a_n \not\vdots\, 7 \text{ при } n = 3k,\ k \in \mathbb{N}.$$

Методом математичної індукції нескладно довести висловлену гіпотезу, тобто довести такі три твердження:

$$1 + 2^{3k-2} + 4^{3k-2} \vdots 7,\quad k \in \mathbb{N};$$

$$1 + 2^{3k-1} + 4^{3k-1} \vdots 7,\quad k \in \mathbb{N};$$

$$1 + 2^{3k} + 4^{3k} \not\vdots\, 7,\quad k \in \mathbb{N}. ◄$$

Проте для розв'язування цієї задачі можна застосувати й іншу схему індуктивних міркувань.

Метод математичної індукції, який розглянуто в п. 22, образно можна порівняти з рухом сходами: якщо ви стали на першу сходинку та впевнені, що, ставши на k-ту сходинку, зможете перейти на $(k + 1)$-шу сходинку, то ви зможете потрапити на будь-яку сходинку.

Але досягти кожної сходинки можна й іншим способом. Наприклад, якщо ви стали на першу сходинку, а потім рухаєтеся з кроком 2, тобто переступаючи через сходинку, то ви побуваєте на всіх сходинках з непарними номерами. Зрозуміло, що коли почати рух з другої сходинки, то ви таким чином пройдете всі сходинки з парними номерами, а отже, за два проходи побуваєте на всіх сходинках.

Цей приклад показує, що можлива така схема індуктивного доведення. У теоремі «база індукції» доводиться (перевіряється) справедливість твердження при $n = 1$ і $n = 2$. Теорема «індуктивний перехід» має таку структуру: роблять припущення, що твердження є правильним для $n = k$, а далі доводять, що воно є правильним для $n = k + 2$.

Таку схему міркувань називатимемо індукцією з кроком 2.

Індуктивні міркування можна проводити з кроком 3, 4, 5 і т. д.

Наприклад, покажемо, як можна розв'язати задачу з прикладу 1, використовуючи індукцію з кроком 3.

Теорема «база індукції»: $a_1 \vdots 7$, $a_2 \vdots 7$, $a_3 \not\vdots\, 7$. В істинності цих тверджень ми переконалися вище.

Теорема «індуктивний перехід»: нехай a_k ділиться (не ділиться) націло на 7, доведемо, що a_{k+3} так само ділиться (не ділиться) націло на 7.

Для доведення достатньо показати, що $(a_{k+3} - a_k) \vdots 7$. Завершіть розв'язування самостійно.

ПРИКЛАД 2 Число a таке, що число $a + \frac{1}{a}$ — ціле. Доведіть, що для будь-якого натурального n число $a^n + \frac{1}{a^n}$ також ціле.

Розв'язання. При $n = 1$ твердження є правильним. Припустимо, що при $n = k$ число $a^n + \frac{1}{a^n}$ є цілим.

Легко перевірити, що справедливою є така рівність:

$$a^{k+1} + \frac{1}{a^{k+1}} = \left(a^k + \frac{1}{a^k}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a^{k-1} + \frac{1}{a^{k-1}}\right). \qquad (1)$$

З неї випливає, що коли числа $a^{k-1} + \frac{1}{a^{k-1}}$ і $a^k + \frac{1}{a^k}$ є цілими, то цілим є також число $a^{k+1} + \frac{1}{a^{k+1}}$. Але в теоремі «індуктивний перехід» умова, що число $a^{k-1} + \frac{1}{a^{k-1}}$ є цілим, відсутня.

Для розв'язування цієї задачі схему доведення методом математичної індукції потрібно змінити таким чином: у теоремі «індуктивний перехід» зробити припущення, що твердження, яке доводиться, справедливе при $n = k - 1$ і $n = k$, а далі довести, що воно справедливе для $n = k + 1$.

Ця зміна, у свою чергу, потребує, щоб у теоремі «база індукції» твердження було перевірене не тільки для $n = 1$, але й для $n = 2$.

Маємо: $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$. Отже, число $a^2 + \frac{1}{a^2}$ — ціле, оскільки цілим є число $a + \frac{1}{a}$.

Із рівності (1) випливає справедливість «оновленої» теореми «індуктивний перехід», що завершує розв'язування задачі. ◄

Для розв'язування цієї задачі нам довелося посилити умову теореми «індуктивний перехід», при цьому крок індукції залишився рівним 1.

Посилення умови теореми «індуктивний перехід» приводить до такої схеми індуктивного доведення:

1) установити справедливість гіпотези при $n = 1$;

2) з припущення, що гіпотеза є правильною для всіх $n \leqslant k$, довести її справедливість для $n = k + 1$.

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що будь-яке натуральне число n можна подати у вигляді суми кількох різних степенів числа 2, можливо, включаючи нульовий (якщо натуральне число є степенем числа 2, то будемо вважати, що воно подане у вигляді суми, яка складається з одного доданка).

Розв'язання. При $n = 1$ маємо: $1 = 2^0$.

Нехай твердження є справедливим для всіх натуральних n таких, що $n \leqslant k$, $k \in \mathbb{N}$. Розглянемо натуральне число $k + 1$.

Якщо це число є степенем числа 2, то теорему «індуктивний перехід» доведено. Якщо число $k + 1$ не є степенем числа 2, то існує таке натуральне число m, що $2^m < k + 1 < 2^{m+1}$. Звідси $k + 1 = 2^m + p$, де $p \in \mathbb{N}$.

Якщо припустити, що $p \geqslant 2^m$, то $k + 1 \geqslant 2^m + 2^m = 2^{m+1}$, а це суперечить нерівності $k + 1 < 2^{m+1}$. Таким чином, $p < 2^m$. Але $2^m < k + 1$, отже, $p < 2^m \leqslant k$.

Маємо: $k + 1 = 2^m + p$, де $p \in \mathbb{N}$, $p < k$. Тоді за припущенням число p можна подати у вигляді суми різних степенів числа 2, причому серед цих доданків немає числа 2^m. Додавши до цієї суми число 2^m, отримаємо шукане подання числа $k + 1$. ◄

Наведені вище приклади далеко не вичерпують усіх різновидів доведень методом математичної індукції. Відчути багатоманітність схем індуктивних міркувань можна, якщо знов звернутися до наочної моделі.

Описуючи різні способи руху сходинками, ми тим самим конструюємо різні схеми доведення методом математичної індукції.

Припустимо, що ми можемо ставати на сходинки, номери n яких визначаються за заздалегідь вибраним правилом. Наприклад, рівність $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, говорить про те, що рух відбувається по сходинках, номери яких є степенями двійки. Нехай при цьому є можливість із будь-якого досягнутого місця спуститися на одну сходинку вниз. Тоді описана схема руху дає змогу побувати на будь-якій сходинці.

ПРИКЛАД 4 Для невід'ємних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, де $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, доведіть нерівність[1]

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^n \geqslant x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n. \qquad (2)$$

Розв'язання. Якщо $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, то нерівність (2) є правильною. Подальші міркування проводитимемо для випадку, коли $x_1 + x_2 + \ldots + x_n > 0$.

При $n = 2$ маємо: $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 \geqslant x_1 x_2$. Справедливість цієї нерівності випливає з нерівності Коші для двох чисел.

Нехай нерівність (2) є правильною при $n = k$, тобто

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k}{k}\right)^k \geqslant x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_k.$$

Доведемо, що вона є правильною при $n = 2k$.

Маємо:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_{2k-1} + x_{2k}}{2k}\right)^{2k} = \left(\frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2} + \ldots + \frac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2}}{k}\right)^{2k} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\left(\frac{\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4} + \ldots + \sqrt{x_{2k-1} x_{2k}}}{k}\right)^k\right)^2 \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sqrt{x_1 x_2} \cdot \sqrt{x_3 x_4} \cdot \ldots \cdot \sqrt{x_{2k-1} x_{2k}}\right)^2 = x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{2k-1} x_{2k}.$$

Ми показали, що нерівність (2) є правильною для $n = 2$. Отже, вона є правильною для $n = 2 \cdot 2 = 4$, а тоді вона є правильною при $n = 2 \cdot 4 = 8$, при $n = 2 \cdot 8 = 16$, при $n = 2 \cdot 16 = 32$ і, узагалі, при всіх натуральних значеннях n таких, що $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Таким чином, «хвиля доведених тверджень» поширюється за такою схемою:

$$2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to \ldots .$$

Залишилося показати, що ця «хвиля» може поширюватися у зворотному порядку з кроком 1:

$$\mathbf{2} \leftarrow 3 \leftarrow \mathbf{4} \leftarrow 5 \leftarrow 6 \leftarrow 7 \leftarrow \mathbf{8} \leftarrow \ldots .$$

[1] Як правило, цю нерівність записують у формі $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$ і називають нерівністю Коші для n чисел. Ми використовуватимемо такий запис після вивчення поняття «корінь n-го степеня».

Для цього треба припустити, що нерівність (2) є правильною для $n = p$, $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, і довести, що вона є правильною для $n = p - 1$.

Якщо нерівність є правильною для будь-яких невід'ємних x_1, ..., x_p, то вона є правильною і для випадку, коли $x_p = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1}}{p-1}$. Запишемо цей випадок:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} + x_p}{p}\right)^p \geqslant x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{p-1} x_p.$$

Маємо:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1} + \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1}}{p-1}}{p}\right)^p \geqslant x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{p-1} \cdot \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1}}{p-1};$$

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1}}{p-1}\right)^p \geqslant x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{p-1} \cdot \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1}}{p-1}.$$

Поділивши обидві частини цієї нерівності на додатне число $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1}}{p-1}$, отримаємо

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{p-1}}{p-1}\right)^{p-1} \geqslant x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_{p-1}.$$

Цим завершено доведення нерівності (2). ◄

23. Основні правила комбінаторики. Перестановки

Скількома способами учні вашого класу можуть стати один за одним у черзі до буфету? Скількома способами можна вибрати у вашому класі старосту та його заступника? Скількома способами можуть бути розподілені золоті, срібні та бронзові медалі на чемпіонаті світу з футболу?

Відповідаючи на ці запитання, потрібно підрахувати, скільки різних комбінацій, утворених за певним правилом, можна скласти з елементів заданої скінченної множини. Галузь математики, яка займається розв'язуванням подібних задач, називають **комбінаторикою**.

В основі розв'язування більшості комбінаторних задач лежать два правила: правило суми та правило добутку.

Розглянемо такий приклад. Туриста зацікавили 5 маршрутів по Наддніпрянщині та 7 маршрутів по Карпатах. З'ясуємо, скількома способами він може організувати свою відпустку, маючи час лише на один маршрут.

Оскільки всього є 5 + 7 = 12 різних маршрутів, то один із них можна вибрати 12 способами.

Узагальненням цього прикладу є таке правило.

Правило суми. **Якщо множини A і B такі, що $n\ (A) = m$, $n\ (B) = k$, $A \cap B = \varnothing$, то вибір «a або b», де $a \in A$, $b \in B$, можна здійснити $m + k$ способами**[1]**.**

Це правило можна проілюструвати за допомогою відомої властивості: якщо множини A і B є скінченними, причому $A \cap B = \varnothing$, то $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Правило суми можна узагальнити. Якщо множини A_1, A_2, ..., A_m попарно не перетинаються і такі, що $n\ (A_1) = k_1$, $n\ (A_2) = k_2$, ..., $n\ (A_m) = k_m$, то вибір «a_1, або a_2, або ..., або a_m», де $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_m \in A_m$, можна здійснити $k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ способами. Використовуючи метод математичної індукції, доведіть цей факт самостійно.

Знову звернемося до прикладу з вибором маршрутів. Якщо турист має час на два маршрути та хоче побувати спочатку на Наддніпрянщині, а потім у Карпатах, то він може організувати свій відпочинок 35 способами. Справді, якщо вибрати один маршрут по Наддніпрянщині, то парою до нього може бути будь-який із 7 карпатських маршрутів. Оскільки маршрутів по Наддніпрянщині 5, то кількість пар (маршрут по Наддніпрянщині; маршрут по Карпатах) дорівнює $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \cdot 5 = 35$.

Ці міркування ілюструє така таблиця:

		Маршрути по Карпатах						
		1	2	3	4	5	6	7
Маршрути по Наддніпрянщині	1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
	2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
	3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
	4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
	5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	(5; 7)

[1] Нагадаємо, що для скінченної множини A кількість її елементів позначають $n\ (A)$.

Узагальненням цього прикладу є таке правило.

Правило добутку. **Якщо елемент a можна вибрати m способами і після кожного такого вибору елемент b можна вибрати k способами[1], то вибір «a і b» у вказаному порядку, тобто вибір упорядкованої пари $(a; b)$, можна здійснити mk способами.**

Правило добутку також природно узагальнити. Якщо елемент a_1 можна вибрати k_1 способами, елемент a_2 — k_2 способами й т. д., елемент a_m — k_m способами за умови дотримання принципу незалежності кількості виборів, то вибір «a_1, і a_2, і ..., і a_m», тобто вибір упорядкованого набору $(a_1; a_2; ...; a_m)$, можна зробити $k_1 k_2 \cdot ... \cdot k_m$ способами. Використовуючи метод математичної індукції, доведіть цей факт самостійно.

ПРИКЛАД 1 Скільки натуральних дільників має число $2^4 \cdot 5^3 \cdot 7^6$?

Розв'язання. Будь-який дільник даного числа має вигляд $2^{k_1} \cdot 5^{k_2} \cdot 7^{k_3}$, де k_1, k_2, k_3 — цілі числа, які задовольняють умови $0 \leqslant k_1 \leqslant 4$, $0 \leqslant k_2 \leqslant 3$, $0 \leqslant k_3 \leqslant 6$. Кількість дільників даного числа дорівнює кількості наборів, які можна скласти із чисел k_1, k_2, k_3 (при цьому набори, які відрізняються один від одного порядком елементів, вважають різними). Число k_1 можна вибрати 5 способами, число k_2 — 4 способами, число k_3 — 7 способами. Отже, за узагальненим правилом добутку зазначений набір можна вибрати $5 \cdot 4 \cdot 7 = 140$ способами. Тому дане число має 140 дільників.

Відповідь: 140 дільників. ◄

Кількість натуральних дільників числа n, $n \in \mathbb{N}$, прийнято позначати так: $\tau(n)$.

Якщо $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_m^{k_m}$ — канонічний розклад натурального числа n на прості множники, то, міркуючи аналогічно, можна встановити, що $\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot ... \cdot (k_m + 1)$.

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що кількість підмножин даної n-елементної множини M дорівнює 2^n.

Розв'язання. Нагадаємо, що цю задачу в п. 22 (задача 22.25) ви розв'язували методом математичної індукції. Тут ми запропонуємо комбінаторне розв'язання.

Пронумеруємо всі елементи множини M. Маємо:

$$M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}.$$

[1] Називатимемо цю властивість «принципом незалежності кількості виборів».

Розглянемо скінченні послідовності[1], які містять n членів і складаються з нулів та одиниць.

Кожній підмножині A множини M поставимо у відповідність одну з таких послідовностей, що вибирають за правилом:

- якщо $a_k \in A$, то на k-му місці в послідовності стоїть число 1;
- якщо $a_k \notin A$, то на k-му місці в послідовності стоїть число 0.

Наприклад,

$A = \{a_2, a_4\} \to 0, 1, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0$

$B = \{a_3\} \to 0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots, 0$

$C = \{a_n\} \to 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots, 0, 1$

$M \to 1, 1, 1, \ldots, 1$

$\varnothing \to 0, 0, 0, \ldots, 0$

Тоді кожній підмножині множини M відповідає єдина послідовність, і навпаки, кожна послідовність є відповідною єдиній підмножині множини M. Отже, кількість підмножин множини M дорівнює кількості послідовностей, що розглядаються.

При конструюванні послідовностей будь-який член можна вибрати тільки двома способами: записати 0 або записати 1. Отже, за узагальненим правилом добутку можна сконструювати $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n \text{ множників}} = 2^n$ різних послідовностей. ◄

Означення. **Множину M, яка складається з n елементів ($n \in \mathbb{N}$), називають упорядкованою, якщо між нею та множиною, яка складається з перших n натуральних чисел, установлено взаємно однозначну відповідність.**

Очевидно, що коли скінченна множина складається більше ніж з одного елемента, то встановити порядок її елементів, тобто пронумерувати її елементи, можна не одним способом.

Означення. Перестановкою скінченної множини M називають будь-яку упорядковану множину, утворену з усіх елементів множини M.

Наприклад, існує 6 перестановок множини $M = \{a, b, c\}$. Випишемо їх[2]:

$$(a; b; c), (a; c; b), (b; a; c), (b; c; a), (c; a; b), (c; b; a).$$

Перестановки заданої скінченної множини різняться лише порядком слідування елементів.

---

[1] Більш докладно з поняттям «послідовність» ви ознайомитесь у п. 30.

[2] Тут запис $(a; b; c)$ означає, що елементу a присвоєно номер 1, елементу b — номер 2, елементу c — номер 3.

Наприклад, якщо потрібно визначити кількість способів, якими учні вашого класу можуть стати один за одним у черзі до буфету, то для цього треба знайти кількість перестановок множини учнів вашого класу.

Кількість перестановок n-елементної множини M позначають символом P_n, використовуючи першу літеру французького слова *permutation* — перестановка. Наприклад, розглядаючи множину $M = \{a, b, c\}$, ми встановили, що $P_3 = 6$.

Якщо $M = \{a\}$, то існує лише один спосіб упорядкування цієї множини: a — це перший елемент. Тому $P_1 = 1$.

Доведемо, що для будь-якого натурального n справедлива формула[1]

$$\boxed{\boldsymbol{P_n = n!}}$$

Цю формулу можна довести за допомогою методу математичної індукції (переконайтеся в цьому самостійно). Ми розглянемо комбінаторне доведення.

Нехай множина M складається з n елементів. Записати будь-яку перестановку множини M — це фактично надати кожному елементу цієї множини певний номер від 1 до n. Тому кількість перестановок множини M дорівнює кількості способів нумерування її елементів.

Виберемо певний елемент a із цієї множини. Існує n способів присвоїти цьому елементу номер. Далі виберемо певний елемент b з множини M. Оскільки елементу a номер уже присвоєно, то існує $n - 1$ спосіб присвоїти номер елементу b. Зрозуміло, що наступний елемент можна пронумерувати $n - 2$ способами й т. д. Для останнього невибраного елемента множини M існує лише один спосіб присвоїти йому номер, оскільки до цього моменту $n - 1$ елемент уже отримали свої номери.

Отже, за узагальненим правилом добутку можна записати:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1, \text{ тобто}$$

$$P_n = n!$$

ПРИКЛАД 3 Скількома способами можна розташувати на шаховій дошці 8 тур так, щоб вони не били одна одну?

Розв'язання. Для того щоб тури не могли бити одна одну, на кожній горизонталі та на кожній вертикалі має стояти тільки одна тура (рис. 23.1).

[1] Нагадаємо, що добуток перших n натуральних чисел позначають так: $n!$ (читають: «n факторіал»), тобто $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$. За означенням вважають, що $0! = 1$ і $1! = 1$.

Нехай a_1 — номер вертикалі, на якій стоїть тура з першої горизонталі, a_2 — номер вертикалі, на якій стоїть тура з другої горизонталі, ..., a_8 — номер вертикалі, на якій стоїть тура з восьмої горизонталі.

Рис. 23.1

Тоді $(a_1; a_2; ...; a_8)$ — деяка перестановка множини $\{1, 2, ..., 8\}$. Кожній такій перестановці відповідає деяке розташування тур, яке задовольняє умову задачі, і навпаки, кожному припустимому розташуванню тур відповідає певна перестановка цієї множини.

Отже, шукана кількість способів дорівнює P_8, тобто 8!.

Відповідь: 8!. ◄

?

1. Сформулюйте правило суми.
2. Сформулюйте правило добутку.
3. Яку множину називають упорядкованою?
4. Що називають перестановкою скінченної множини?
5. За якою формулою можна обчислити кількість перестановок n-елементної множини?

ВПРАВИ

23.1.° Скількома способами можна розставити на полиці 7 різних книг?

23.2.° Скількома способами можуть сісти в автомобіль 5 чоловік, якщо кожний із них може бути водієм?

23.3.° У школі 20 класів і 20 класних керівників. Скількома способами можна розподілити класне керівництво між учителями?

23.4.° Скільки п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, причому так, щоб у кожному числі всі цифри були різними?

23.5.° Скільки п'ятицифрових чисел, усі цифри яких різні, можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо ці числа мають починатися:
1) із цифри 1; 2) із запису «34»?

23.6.° Скільки чотирицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

23.7.° Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких непарні?

23.8.° Скільки чотирицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?

23.9.° Скільки існує трицифрових чисел, усі цифри яких парні?

23.10.° Скільки існує семицифрових телефонних номерів, які не починаються із цифри 0?

23.11.• Скільки трицифрових парних чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

23.12.• Скільки трицифрових непарних чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

23.13.• Скільки п'ятицифрових чисел, усі цифри яких мають бути різними, можна скласти із цифр 0, 1, 2, 3, 4?

23.14.• Скільки парних п'ятицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб у кожному числі цифри були різними?

23.15.• Скільки існує п'ятицифрових чисел, які діляться націло на 5?

23.16.• Скільки існує семицифрових чисел, які діляться націло на 25?

23.17.• У селі мешкає 1100 жителів. Доведіть, що принаймні двоє з них мають однакові ініціали.

23.18.• Скількома способами можна поставити на шахову дошку дві тури так, щоб вони не били одна одну?

23.19.• У книжковому магазині є 4 різні видання поеми «Енеїда», 3 різні видання п'єси «Наталка Полтавка» та 2 різні видання п'єси «Москаль-чарівник». Крім того, є 5 різних книг, у яких містяться поема «Енеїда» та п'єса «Наталка Полтавка», і 6 різних книг, у яких містяться п'єси «Наталка Полтавка» та «Москаль-чарівник». Скількома способами можна зробити покупку, яка б містила по одному екземпляру кожного із цих творів?

23.20.• Скільки існує семицифрових чисел, усі цифри яких мають однакову парність?

23.21.• Для шифрування повідомлень використовують цифри 0, 1, 2, 3. Слово в повідомленні містить від 1 до 5 цифр. Яку найбільшу кількість різних слів може містити повідомлення?

23.22.• Скількома способами можна розподілити замовлення на друкування 10 різних підручників між двома книжковими фабриками?

23.23.• В учня є 7 книг із математики, 4 книги з фізики та 2 книги з астрономії. Скількома способами він може розставити ці книги на полиці так, щоб книги з одного предмета стояли поруч?

23.24.• П'ять хлопців і п'ять дівчат сідають у ряд на 10 стільцях. Скількома способами вони можуть розміститися так, щоб хлопці сиділи на стільцях із парними номерами, а дівчата — на стільцях із непарними номерами?

23.25.•• Скільки існує п'ятицифрових чисел, у записі яких є хоча б одна непарна цифра?

23.26.•• Скільки існує п'ятицифрових чисел, у записі яких є хоча б одна парна цифра?

23.27.•• Скільки існує п'ятицифрових чисел, які містять хоча б дві однакові цифри?

23.28.•• Гральний кубик кидають три рази. Скільки різних послідовностей очок, серед яких є хоча б одна шістка, можна отримати?

23.29.•• Серед 10 людей є двоє знайомих. Скількома способами можна посадити цих людей на 10 стільців так, щоб знайомі сиділи поруч?

23.30.•• Скільки п'ятицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб цифри в числі не повторювалися та парні цифри не стояли поруч?

23.31.•• Будемо вважати словом будь-яку скінченну послідовність букв українського алфавіту. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи букви слова: 1) молоко; 2) математика; 3) комбінаторика?

23.32.* З першого поверху 9-поверхового будинку відправився вгору ліфт із 5 пасажирами. Скількома способами ці люди можуть вийти з ліфта?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

23.33. При яких значеннях параметра a рівняння $\dfrac{x^2-(4+3a)x+12a}{\sqrt{x^2-1}}=0$ має єдиний корінь?

23.34. Знайдіть усі прості числа p такі, що числа $p+14$ і $p+40$ також є простими.

23.35. Доведіть, що функція $f(x)=\dfrac{8}{2-x}$ зростає на проміжку $(2; +\infty)$.

23.36. Стіл і стілець коштували разом 7500 грн. Після того як стіл подешевшав на $20\ \%$, а стілець подорожчав на $20\ \%$, вони стали коштувати разом 6600 грн. Знайдіть початкову ціну стола та початкову ціну стільця.

24. Розміщення

За правилами *ФІФА*[1] у фінальній частині чемпіонату світу з футболу беруть участь 32 команди. З'ясуємо, скількома способами можуть бути розподілені золоті, срібні та бронзові медалі (три призових місця) між командами.

Перше місце може посісти будь-яка з 32 команд, друге місце — будь-яка з решти 31 команди, третє — будь-яка з 30 команд, що залишилися. За узагальненим правилом добутку кількість можливих варіантів розподілу місць дорівнює $32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$.

Розв'язавши цю задачу, ми з'ясували, скільки існує 3-елементних упорядкованих підмножин заданої 32-елементної множини. Кожну з таких упорядкованих підмножин називають **розміщенням з 32 елементів по 3 елементи**.

Означення. Будь-яку k-елементну впорядковану підмножину даної n-елементної множини називають розміщенням з n елементів по k елементів.

Кількість усіх можливих розміщень з n елементів по k елементів позначають символом A_n^k, використовуючи першу літеру французького слова *arrangement* — розміщення.

Результат, отриманий у задачі про розподіл призових місць, дозволяє зробити висновок, що $A_{32}^3 = 32 \cdot 31 \cdot 30 = 29\,760$.

Доведемо, що при будь-яких натуральних n і k таких, що $k \leqslant n$, справедливою є формула

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)} \qquad (1)$$

Розглянемо n-елементну множину та сформуємо її k-елементну впорядковану підмножину.

Існує n способів вибору першого елемента підмножини. Після того як вибрано перший елемент, другий елемент підмножини можна вибрати вже тільки $n - 1$ способами. Після вибору першого та другого елементів залишається $n - 2$ способи для вибору третього елемента підмножини. Продовжуючи ці міркування, отримуємо, що вибір k-го елемента можна здійснити $n - k + 1$ способами.

Таким чином, за узагальненим правилом добутку можна записати:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

[1] Міжнародна федерація футбола.

Отже, формулу (1) доведено.

Оскільки існує лише одна n-елементна підмножина даної n-елементної множини, то число A_n^n — це кількість перестановок n-елементної множини, тобто

$$A_n^n = P_n.$$

Цей факт можна також отримати, якщо у формулу (1) замість k підставити n. Маємо:

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-n+1) = n!.$$

За означенням прийнято вважати, що $0! = 1$. Ця домовленість дає змогу формулу (1) записати компактніше.

Помножимо й поділимо вираз, який стоїть у правій частині формули (1), на $(n-k)!$ (це можна зробити, оскільки $(n-k)! \neq 0$). Маємо: $A_n^k = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Отримуємо формулу

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

ПРИКЛАД Скільки існує правильних дробів, чисельник і знаменник яких — прості числа, які менші від 30?

Розв'язання. Множина $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ складається з усіх простих чисел, які менші від 30. Кількість 2-елементних упорядкованих підмножин цієї множини дорівнює кількості звичайних дробів, відмінних від одиниці, чисельник і знаменник яких — зазначені прості числа. Половина із цих дробів є правильними. Отже, шукане число дорівнює $\frac{1}{2}A_{10}^2 = 45$.

Відповідь: 45. ◄

?

1. Що називають розміщенням із n елементів по k елементів?
2. За якою формулою можна обчислити кількість усіх можливих розміщень із n елементів по k елементів?

ВПРАВИ

24.1.° У футбольній команді (11 чоловік) потрібно обрати капітана та його заступника. Скількома способами це можна зробити?

24.2.° Комісія, що складається з 15 осіб, має обрати голову, його заступника та секретаря. Скількома способами це можна зробити?

24.3.° У 9 класі вивчають 18 предметів. Денний розклад містить 6 уроків. Скількома способами можна скласти денний розклад так, щоб усі 6 уроків були різними?

24.4.° У фінальній частині чемпіонату Європи з футболу беруть участь 16 команд. Скількома способами можуть розподілитися золоті та срібні нагороди?

24.5.° Наукова група, яка складається з 9 осіб, має делегувати на конференції трьох різних представників: одного до Великої Британії, другого до Франції, третього до Німеччини. Скількома способами можна це зробити?

24.6.° Через залізничну станцію повинні одночасно пройти три поїзди. Скількома способами диспетчер може організувати проходження поїздів, якщо в його розпорядженні є п'ять вільних колій?

24.7.° Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{A_{10}^6 - A_{10}^5}{A_9^5 - A_9^4}$;　　3) $\dfrac{A_{m-1}^{n-1} \cdot P_{m-n}}{P_{m-1}}$, де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant m$.

2) $\dfrac{A_{12}^4 \cdot P_7}{A_{11}^9}$;

24.8.° Доведіть, що $A_n^{n-1} = P_n$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

24.9.° Розв'яжіть у натуральних числах рівняння:

1) $A_{x+1}^2 = 156$;　　3) $\dfrac{P_{x+3}}{A_x^5 \cdot P_{x-5}} = 720$;

2) $A_x^{x-3} = xP_{x-2}$;　　4) $\dfrac{P_{x+1}}{A_{x-1}^{x-4} \cdot P_3} = 210$.

24.10.° Розв'яжіть у натуральних числах рівняння:

1) $A_x^2 = 20$;　　2) $A_x^5 = 18 \cdot A_{x-2}^4$;　　3) $\dfrac{A_x^3 + 3A_x^2}{P_{x+1}} = \dfrac{1}{2}$.

24.11.• У дев'ятому класі 32 учні. Кожні двоє учнів обмінялись один з одним фотокартками. Скільки всього було роздано фотокарток?

24.12.• Скільки різних шестицифрових чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, щоб цифри не повторювалися та крайні цифри були парними?

24.13.•• Скільки різних трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, щоб усі цифри були різними й серед них містилася цифра 6?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

24.14. Відстань між двома містами становить 93 км. З одного міста в друге виїхав велосипедист. Через годину назустріч йому з другого міста виїхав другий велосипедист, швидкість якого була на 3 км/год більшою за швидкість першого. Велосипедисти зустрілися на відстані 45 км від першого міста. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста.

24.15. Скільки коренів має рівняння $\left|\, x^2 - 4|x| \,\right| = a$ залежно від значення параметра a?

24.16. Знайдіть область визначення функції

$$y = \sqrt{12 + 4x - x^2} - \frac{x - 5}{x^2 + 3x}.$$

24.17. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $n^3 + 5n$ кратне 6.

25. Сполуки (комбінації)

Розглянемо такі дві задачі. Скількома способами в класі, у якому 30 учнів, можна вибрати старосту та його заступника? Скількома способами в цьому класі можна призначити двох чергових?

Відповідь до першої задачі вам відома: це кількість 2-елементних упорядкованих підмножин 30-елементної множини, тобто A_{30}^2. Щоб розв'язати другу задачу, треба визначити кількість 2-елементних підмножин 30-елементної множини (саме підмножин, а не впорядкованих підмножин). Кожну з таких підмножин називають **сполукою (комбінацією)** з 30 елементів по 2 елементи.

Означення. **Будь-яку k-елементну підмножину заданої n-елементної множини називають сполукою (комбінацією) з n елементів по k елементів.**

Кількість усіх можливих сполук із n елементів по k елементів позначають символом C_n^k, використовуючи першу літеру французького слова *combinaison* — комбінація.

Так, задачу про кількість способів призначення чергових можна сформулювати так: чому дорівнює C_{30}^2?

Обчислимо значення C_n^k для кількох окремих випадків.

Оскільки існує n одноелементних підмножин заданої n-елементної множини, то

$$C_n^1 = n.$$

У даної n-елементної множини існує тільки одна n-елементна підмножина, тому

$$C_n^n = 1.$$

Оскільки задана n-елементна множина має лише одну підмножину, яка не містить жодного елемента (це порожня підмножина), то

$$C_n^0 = 1.$$

Порожня множина містить тільки одну підмножину — це $\varnothing$, тому

$$C_0^0 = 1.$$

Доведемо, що при будь-яких натуральних n і k таких, що $k \leqslant n$, справедлива формула

$$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}} \qquad (1)$$

Розглянемо деяку n-елементну множину. Кількість її k-елементних підмножин дорівнює C_n^k. Із кожної такої підмножини можна утворити $k!$ упорядкованих k-елементних підмножин. Отже, кількість усіх k-елементних упорядкованих підмножин заданої n-елементної множини дорівнює $C_n^k \cdot k!$, тобто $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$. Звідси $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}$.

Формулу (1) можна подати в такому вигляді:

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}} \qquad (2)$$

Зазначимо, що ця формула залишається справедливою і для випадків, коли $k = 0$ або $n = 0$. Справді,

$$C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1,$$

$$C_0^0 = \frac{0!}{(0-0)!\,0!} = 1.$$

ПРИКЛАД 1 Доведіть, що

$$\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}} \qquad (3)$$

Розв'язання. Цю формулу можна довести за допомогою формули (2). Переконайтеся в цьому самостійно.

Формула (3) має також інше, комбінаторне доведення. Вибираючи k-елементну підмножину A з n-елементної множини M, ми тим самим однозначно задаємо $(n-k)$-елементну підмножину $M \setminus A$. Отже, кількість способів вибору k-елементної підмножини дорівнює кількості способів вибору $(n-k)$-елементної підмножини, тобто справедлива формула (3).

Формулу (3) при $n > k > 0$ можна довести за допомогою геометричної інтерпретації. Розглянемо прямокутник розміром $m \times k$, $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, розбитий на mk квадратів. Нехай це схема вулиць деякого міста (рис. 25.1). З'ясуємо, яка кількість різних найкоротших маршрутів веде з пункту A до пункту B.

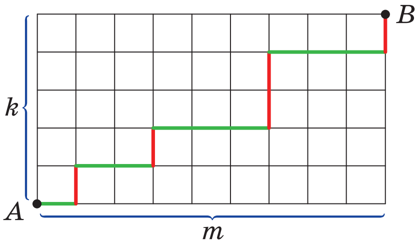


Рис. 25.1

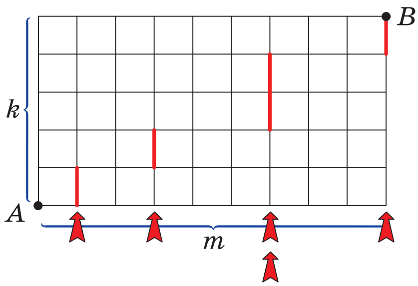


Рис. 25.2

Оскільки маршрути мають бути найкоротшими, то треба рухатися лініями схеми тільки вправо або вгору.

Будь-який маршрут складається з $m + k$ відрізків (тут відрізки — це сторони квадратів, на які розбито прямокутник), з яких k вертикальних і m горизонтальних. Різні маршрути відрізняються лише порядком чергування вертикальних і горизонтальних відрізків. Тому вибір, наприклад, вертикальних відрізків повністю визначає маршрут (рис. 25.2).

Отже, загальна кількість маршрутів дорівнює кількості способів, якими з $m + k$ відрізків можна вибрати k вертикальних відрізків, тобто C_{m+k}^{k}.

Проте вибір горизонтальних відрізків так само визначає маршрут. Кількість маршрутів, підрахована за допомогою вибору горизонтальних відрізків, дорівнює C_{m+k}^{m}.

Оскільки кількість маршрутів не залежить від способу підрахунку, то отримуємо, що $C_{m+k}^{k} = C_{m+k}^{m}$.

Якщо позначити $m + k = n$, то отримаємо формулу (3). ◄

ПРИКЛАД 2 Доведіть, що

$$\boxed{C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n} \qquad (4)$$

Розв'язання. Ліва частина даної рівності — це кількість підмножин n-елементної множини. У п. 23 ми показали, що ця кількість дорівнює 2^n. ◄

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що

$$\boxed{C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k} \qquad (5)$$

Розв'язання. Цю формулу можна довести за допомогою формули (2). Зробіть це самостійно.

Наведемо комбінаторне доведення формули (5).

Розглянемо $(n+1)$-елементну множину. Зафіксуємо в ній деякий елемент a. Усі k-елементні підмножини розіб'ємо на два типи: які містять елемент a і які його не містять. Підмножини першого типу формуються в результаті вибору $k-1$ елемента з n елементів (адже один елемент їм обов'язково належить — це елемент a). Тому кількість підмножин першого типу дорівнює C_n^{k-1}.

Підмножини другого типу формуються в результаті вибору з n елементів (адже елемент a їм не належить) k елементів. Їхня кількість дорівнює C_n^k.

Отримали, що кількість k-елементних підмножин заданої $(n+1)$-елементної множини дорівнює $C_n^{k-1} + C_n^k$. Тому $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$.

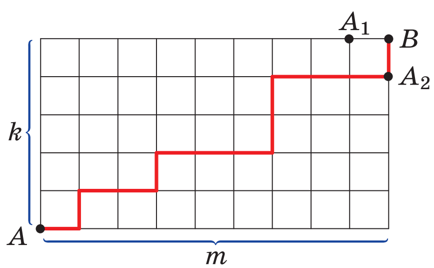


Рис. 25.3

Формулу (5) при $n > k > 0$ можна довести за допомогою геометричної інтерпретації, використовуючи схему маршрутів, зображену на рисунку 25.1. Усі найкоротші маршрути, які ведуть із пункту A до пункту B, діляться на два типи: які проходять через точку A_1 і які проходять через точку A_2 (рис. 25.3). Кількість маршрутів першого типу дорівнює C_{m-1+k}^{k}, а другого — C_{m+k-1}^{k-1}. Отже, $C_{m+k}^{k} = C_{m-1+k}^{k} + C_{m+k-1}^{k-1}$.

Якщо зробити заміну $m + k = n + 1$, то отримаємо:

$$C_{n+1}^{k} = C_{n}^{k} + C_{n}^{k-1}. \blacktriangleleft$$

?

1. Що називають сполукою з n елементів по k елементів?
2. За якою формулою можна обчислити кількість усіх можливих сполук із n елементів по k елементів?

ВПРАВИ

25.1.° Обчисліть:

1) C_7^2; 2) C_4^3; 3) C_{100}^{99}; 4) $C_5^0 + C_7^7 + C_{11}^1$.

25.2.° Обчисліть:

1) C_8^3; 2) C_5^4; 3) C_{1000}^{999}; 4) $C_9^1 + C_8^0 + C_{17}^1$.

25.3.° Спростіть вираз:

1) $\frac{2}{n}C_{n+1}^{n-1}$; 2) $\frac{3}{n}C_{2n}^{2n-1}$.

25.4.° Спростіть вираз:

1) $\frac{6}{n+2}C_{n+2}^{n}$; 2) $\frac{1}{2n-1}C_{2n+1}^{2n-2}$.

25.5.° Розв'яжіть у натуральних числах рівняння:

1) $C_x^2 = 153$; 3) $C_x^{x-2} = 45$; 5) $17C_{2x-1}^{x} = 9C_{2x}^{x-1}$.

2) $C_{x+2}^3 = 8(x+1)$; 4) $3C_{2x}^{x+1} = 2C_{2x+1}^{x-1}$;

25.6.° Розв'яжіть у натуральних числах рівняння:

1) $C_x^2 = 120$; 3) $C_x^{x-2} = 66$;

2) $C_{x+2}^3 = 7(x+2)$; 4) $11C_{2x}^{x} = 6C_{2x+1}^{x+1}$.

25.7.° У класі 29 учнів. Скількома способами можна сформувати команду з 5 осіб для участі в математичній олімпіаді?

25.8.° На площині позначено 10 точок так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки існує трикутників із вершинами у цих точках?

25.9.° Дано опуклий n-кутник. Скільки існує чотирикутників із вершинами, які містяться серед вершин даного n-кутника?

25.10.° Зустрівшись, 7 знайомих потиснули один одному руки. Скільки рукостискань було зроблено?

25.11.° У класі 25 учнів. Для вивчення іноземної мови їх потрібно розбити на дві групи по 13 і 12 осіб. Скількома способами це можна зробити?

25.12.° У шаховій секції займаються 5 дівчат і 12 хлопчиків. Скількома способами можна сформувати команду з 2 дівчат і 5 хлопчиків для участі в змаганнях?

25.13.° В одного хлопчика є 11 марок, а в другого — 20 марок (усі марки різні). Скількома способами можна обміняти три марки одного хлопчика на три марки другого?

25.14.° На площині задано n паралельних прямих. Їх перетинають m паралельних прямих. Скільки паралелограмів при цьому утворилося?

25.15.° На прямій позначили 12 точок, а на паралельній їй прямій — 7 точок. Скільки існує чотирикутників із вершинами у цих точках?

25.16.• Серед 20 робітників є 7 мулярів. Скількома способами можна скласти бригаду з 5 робітників так, щоб до неї входило рівно 2 муляри?

25.17.• Для шкільної лотереї підготовлено 100 білетів, з яких 12 є виграшними. Перший учень навмання вибирає 10 білетів. Скільки існує варіантів, при яких він вибере рівно 3 виграшні білети?

25.18.• У класі 35 учнів. Для участі в турнірі «математичний бій» формується команда, яка складається з капітана, його заступника та чотирьох членів команди. Скількома способами можна сформувати таку команду?

25.19.• На прямій позначили 12 точок, а на паралельній їй прямій — 7 точок. Скільки існує трикутників із вершинами у цих точках?

25.20.• Скільки існує способів із 8 різних квітів скласти букет із непарною кількістю квітів?

25.21.• Комісія, яка складається з 15 осіб, може розпочати роботу, якщо на засіданні є кворум, тобто присутні не менше 10 її членів. Скільки існує способів досягти кворуму?

25.22.• Серед 20 робітників є 7 мулярів. Скількома способами можна скласти бригаду з 5 робітників так, щоб до неї входило не менше 2 мулярів?

25.23.$^{\bullet}$ Для шкільної лотереї підготовлено 100 білетів, з яких 12 виграшних. Перший учень вибирає навмання 10 білетів. Скільки існує варіантів, при яких він вибере не менше 2 виграшних білетів?

25.24.$^{\bullet}$ Із 20 осіб потрібно сформувати комісію із 7 осіб, причому Петро Іванович та Іван Петрович не повинні входити до комісії одночасно. Скількома способами це можна зробити?

25.25.$^{\bullet}$ У перші три вагони потяга сідають 12 пасажирів, по 4 в кожний вагон. Скількома способами це можна зробити?

25.26.$^{\bullet}$ Скількома способами можна розбити 12 спортсменів на 3 команди по 4 спортсмени в кожній?

25.27.$^{\bullet}$ У матері є 9 різних цукерок. Скількома способами вона може пригостити своїх трьох дітей так, щоб кожному дісталося по 3 цукерки?

25.28.$^{\bullet}$ На заняттях танцювального гуртка присутні 12 дівчат і 15 юнаків. Скількома способами з них можна вибрати чотири пари для танцю?

25.29.$^{\bullet\bullet}$ Скількома способами можна m білих і n чорних куль $(m \geqslant n)$ розкласти в ряд так, щоб жодні дві чорні кулі не лежали поруч?

25.30.$^{\bullet\bullet}$ П'ять ящиків пронумеровані числами від 1 до 5. Скількома способами можна розкласти по цих ящиках 17 однакових куль так, щоб жодний ящик не виявився порожнім?

25.31.$^{\bullet\bullet}$ Скількома способами натуральне число n можна подати у вигляді суми k натуральних доданків (суми, які відрізняються порядком доданків, вважатимемо різними)?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

25.32. При яких значеннях параметра a рівняння

$$\frac{x^2 - 3ax + 2a^2 + a - 1}{x + 1} = 0$$

має єдиний корінь?

25.33. Розв'яжіть рівняння:

$$\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 10 + 6\sqrt{x+1}} = 6.$$

25.34. Знайдіть область визначення функції $y = \dfrac{4}{\sqrt{3x - 15}} + \dfrac{8}{|x| - 6}$.

26. Частота та ймовірність випадкової події

Нам нерідко доводиться проводити спостереження, досліди, брати участь в експериментах або випробуваннях. Часто подібні дослідження завершуються деяким результатом, який заздалегідь передбачити неможливо.

Розглянемо кілька характерних прикладів.

- Якщо відкрити книгу навмання, то неможливо знати заздалегідь, який номер сторінки ви побачите.
- Неможливо до початку футбольного матчу визначити, з яким рахунком закінчиться гра.
- Ви не можете бути впевненим у тому, що коли натиснете на кнопку вимикача, то засвітиться настільна лампа.
- Немає гарантії, що з курячого яйця, покладеного до інкубатора, виведеться курча.

Як правило, спостереження або експеримент визначається якимось комплексом умов. Наприклад, футбольний матч повинен проходити за правилами; курячі яйця мають знаходитися в інкубаторі не менше ніж 21 день із дотриманням визначеної методики зміни температури та вологості повітря.

Результат спостереження, досліду, експерименту називають **подією**.

Випадковою подією називають такий результат спостереження або експерименту, який при дотриманні даного комплексу умов може відбутися, а може й не відбутися.

Наприклад, якщо кидати монету, то випадковою подією є випадіння герба. Виявлення листа при перевірці поштової скриньки також є випадковою подією.

Уявимо, що випущено 1 000 000 лотерейних білетів і розігрується один автомобіль. Чи можна, придбавши один лотерейний білет, виграти цей приз? Звісно, можна, хоча ця подія *малоймовірна*. А якщо розігруватимуться 10 автомобілів? Зрозуміло, що **ймовірність** виграшу збільшиться. Якщо ж уявити, що розігруються 999 999 автомобілів, то ймовірність виграшу стає набагато більшою.

Отже, **ймовірності випадкових подій** можна порівнювати. Однак для цього слід домовитися, яким чином кількісно оцінювати можливість появи тієї чи іншої події.

Підставою для такої числової оцінки можуть бути результати численних спостережень або експериментів. Так, люди давно помітили, що багато подій відбувається з тією чи іншою, на подив постійною, **частотою**.

Демографам[1] добре відоме число 0,512. Статистичні дані, отримані в різні часи та в різних країнах, свідчать про те, що на 1000 новонароджених припадає в середньому 512 хлопчиків. Число 0,512 називають **частотою випадкової події** «народження хлопчика». Воно визначається формулою

$$\text{Частота} = \frac{\text{Кількість новонароджених хлопчиків}}{\text{Кількість усіх новонароджених}}.$$

Наголосимо, що це число отримано в результаті аналізу багатьох спостережень. У таких випадках говорять, що ймовірність події «народження хлопчика» приблизно дорівнює 0,512.

Ви знаєте, що куріння шкідливе для здоров'я. За даними організацій охорони здоров'я курці складають приблизно 92 % від усіх хворих на рак легенів. Число 0,92 — це частота випадкової події «той, хто захворів на рак легенів, — курив», яка визначається таким відношенням:

$$\text{Частота} = \frac{\text{Кількість курців серед тих, хто захворів на рак легенів}}{\text{Кількість усіх людей, які захворіли на рак легенів}}.$$

У таких випадках говорять, що ймовірність натрапити на курця серед тих, хто захворів на рак легенів, приблизно дорівнює 0,92 (або 92 %).

Щоб детальніше ознайомитися з поняттям ймовірності випадкової події, звернемося до класичного прикладу з киданням монети.

Припустимо, що в результаті двох підкидань монети двічі випав герб. Тоді у даній серії, яка складається з двох випробувань, частота випадіння герба дорівнює:

$$\text{Частота} = \frac{\text{Кількість випадінь герба}}{\text{Кількість кидків}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Чи це означає, що ймовірність випадіння герба дорівнює 1? Звісно, ні.

Для того щоб за частотою випадкової події можна було оцінювати її ймовірність, кількість випробувань має бути достатньо великою.

Починаючи з XVIII ст. багато дослідників проводили серії випробувань із підкиданням монети.

[1] Демографія — наука про народонаселення.

У таблиці наведено результати деяких таких випробувань.

Дослідник	Кількість підкидань монети	Кількість випадінь герба	Частота випадіння герба
Жорж-Луї Леклерк де Бюффон (1707–1788)	4040	2048	0,5069
Аугустус де Морган (1806–1871)	4092	2048	0,5005
Вільям Джевонс (1835–1882)	20 480	10 379	0,5068
Всеволод Романовський (1879–1954)	80 640	39 699	0,4923
Карл Пірсон (1857–1936)	24 000	12 012	0,5005
Вільям Феллер (1906–1970)	10 000	4979	0,4979

За наведеними даними простежується закономірність: при багаторазовому підкиданні монети частота появи герба незначно відхиляється від числа 0,5.

Отже, можна вважати, що ймовірність події «випадіння герба» приблизно дорівнює 0,5.

У кожному з розглянутих прикладів використовувалося поняття **частота випадкової події**. Цю величину ми обчислювали за формулою:

$$\text{Частота} = \frac{\text{Кількість появ події, яка цікавить}}{\text{Кількість випробувань (спостережень)}}.$$

Звернемося знову до таблиці, наведеної вище. Чи можна на основі її даних гарантовано стверджувати, що ймовірність випадкової події «випадіння герба» дорівнює числу 0,5? Відповідь на це запитання заперечна. Справді, на основі цих даних можна сказати, що частота появи герба незначно відхиляється від числа 0,502 або від числа 0,4997, тобто число 0,5 не має жодних переваг перед числом 0,502 або числом 0,4997.

Таким чином, частота випадкової події дає змогу лише наближено оцінити ймовірність випадкової події. *Чим більше випробувань провести, тим точнішою буде оцінка ймовірності випадкової події за її частотою.*

Таку оцінку ймовірності випадкової події називають **статистичною**. Її використовують у різних галузях діяльності людини:

фізиці, хімії, біології, страховому бізнесі, соціології, економіці, охороні здоров'я, спорті тощо.

Ймовірність події позначають буквою P (першою буквою французького слова *probabilité* — ймовірність).

Якщо в першому прикладі подію «народження хлопчика» позначити буквою A, то отриманий результат записують так:

$$P(A) \approx 0{,}512.$$

Ураховуючи наближений характер статистичної оцінки, отримані дані можна округлити. Наприклад, коли частота випадкової події дорівнює $0{,}512$, то можна записати, що $P(A) \approx 0{,}51$ або $P(A) \approx 0{,}5$.

Якщо подію «випадіння герба» позначити буквою B, то

$$P(B) \approx 0{,}5.$$

На закінчення цього пункту зазначимо таке.

Нерідко в повсякденному житті ми приймаємо правильні й оптимальні рішення, використовуючи ймовірнісні властивості навколишніх явищ або об'єктів.

Наведемо кілька прикладів.

- Якщо ви хочете дізнатися, як розв'язувати задачу з домашнього завдання, то, скоріш за все, зателефонуєте однокласнику, який добре знає математику. Цей вибір базується на тому, що для сильного учня ймовірність розв'язати задачу більша, ніж для слабкого.
- Товари популярних фірм дорожчі за аналогічні товари маловідомих фірм. Проте нерідко ми купляємо дорожчий товар. Таке рішення багато в чому визначається тим, що ймовірність купити неякісний виріб у відомої фірми менша, ніж у маловідомої фірми.
- Нехай контрольна робота складається з десяти завдань у тестовій формі з вибором відповіді. Припустимо, що ви впоралися з дев'ятьма задачами, а десяту розв'язати не можете. Залишається лише одне — відповідь угадувати. Скоріш за все, ви не вибиратимете літеру, що позначає варіант відповіді, яка в попередніх дев'яти завданнях трапилася частіше за інші. Ці міркування базуються на тому, що укладачі тестових завдань навряд чи розташували варіанти відповідей так, щоб якась літера, що позначає правильну відповідь, траплялася набагато частіше за інші.

Наголосимо, що окремо взятий вибір, який зроблено на основі ймовірнісної оцінки, може виявитися невдалим. Незважаючи на це, під час прийняття подальших аналогічних рішень не варто відкидати вибрану стратегію керуватися ймовірнісними характеристиками, оскільки такий підхід збільшує шанси на успіх.

?

1. Наведіть приклади випадкових подій.
2. Опишіть, що таке частота випадкової події.
3. За яких умов частота випадкової події може оцінювати ймовірність випадкової події?
4. Як позначають ймовірність події A?

ВПРАВИ

26.1.° Наведіть приклади випробувань, результатом яких, на вашу думку, є: 1) малоймовірна подія; 2) дуже ймовірна подія.

26.2.° Чи можна вважати малоймовірною подію:
1) при підкиданні монети 200 разів поспіль випав герб;
2) наступного тижня вас викличуть до дошки хоча б один раз;
3) у футбольному матчі «Шахтар» — «Динамо» (Київ) зафіксовано результат 1 : 1;
4) натискаючи навмання клавіші клавіатури комп'ютера, отримали слово «математика»?

26.3.° Експеримент полягає у підкиданні кнопки. Кнопка може впасти як вістрям донизу, так і на шляпку (рис. 26.1). Підкиньте кнопку: 1) 10 разів; 2) 20 разів; 3) 50 разів; 4) 100 разів; 5) 200 разів. Результати, отримані в п'яти серіях експериментів, занесіть у таблицю.

Рис. 26.1

Номер серії	1	2	3	4	5
Кількість експериментів (підкидань) у серії	10	20	50	100	200
Кількість випадінь кнопки вістрям униз					
Кількість випадінь кнопки вістрям догори					

У кожній із п'яти серій експериментів підрахуйте частоту випадіння кнопки вістрям догори й оцініть ймовірність настання цієї події. Яка подія більш ймовірна: «кнопка впаде вістрям униз» або «кнопка впаде вістрям догори»?

26.4.° Експеримент полягає в підкиданні двох монет. Проведіть цей експеримент: 1) 10 разів; 2) 20 разів; 3) 50 разів; 4) 150 разів. Результати, отримані в кожній із чотирьох серій експериментів, занесіть у таблицю.

Номер серії	1	2	3	4
Кількість експериментів (підкидань) у серії	10	20	50	150
Кількість експериментів, у яких випало два герби				
Кількість експериментів, у яких випав рівно один герб				
Кількість експериментів, у яких не випало жодного герба				

У кожній із чотирьох серій експериментів підрахуйте частоту випадкової події:

1) випадіння двох гербів;
2) випадіння тільки одного герба;
3) випадіння двох чисел.

Чи можна на основі цих спостережень зробити припущення, що подія «випав рівно один герб» є більш ймовірною, ніж подія «не випало жодного герба»? На чому базується таке припущення? Чи можна на основі цих спостережень гарантувати, що перша з названих подій є більш ймовірною, ніж друга?

26.5.° Проведіть серію, яка складається зі 100 експериментів, у яких підкидають ґудзик з петлею (рис. 26.2). Знайдіть частоту події «ґудзик упаде петлею вниз». Оцініть ймовірність події «ґудзик упаде петлею догори» у проведеній серії експериментів.

Рис. 26.2

26.6.° У таблиці наведено дані про народження дітей у місті N за 2016 рік.

Місяць	Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень	Червень	Липень	Серпень	Вересень	Жовтень	Листопад	Грудень
Кількість народжень хлопчиків	1198	1053	1220	1151	1151	1279	1338	1347	1329	1287	1196	1243
Кількість народжень дівчаток	1193	1065	1137	1063	1163	1228	1258	1335	1218	1239	1066	1120

Підрахуйте частоту народжень хлопчиків у кожному місяці та за весь 2016 рік. Оцініть ймовірність народження дівчинки у 2016 році.

26.7.° Оператор довідкової служби протягом робочого дня (9:00–17:00) у середньому розмовляє по телефону 6 год. Оцініть ймовірність того, що коли зателефонувати до довідкової у цей період, телефон виявиться вільним.

26.8.° За статистикою у місті Одеса протягом літа кількість сонячних днів у середньому дорівнює 70. Оцініть ймовірність того, що, приїхавши влітку в Одесу на один день, гість натрапить на похмуру погоду.

26.9.° З великої партії лампочок вибрали 1000, серед яких виявилося 5 бракованих. Оцініть ймовірність купити браковану лампочку.

26.10.° Під час епідемії грипу серед обстежених 40 000 жителів виявили 7900 хворих. Оцініть ймовірність події «навмання вибрана людина хвора на грип».

26.11.° Ймовірність купити браковану батарейку дорівнює 0,02. Чи можна стверджувати, що в будь-якій партії зі 100 батарейок є дві браковані?

26.12.° Ймовірність влучити в мішень становить 85 %. Чи може бути так, що в серії зі 100 пострілів було 98 влучень у мішень?

26.13.• Наведену таблицю називають «Навчальний план 9 класу загальноосвітньої школи»:

Предмет	Кількість годин на тиждень	Предмет	Кількість годин на тиждень
Українська мова	2	Геометрія	2
Українська література	2	Біологія	2
Іноземна мова	3	Географія	2
Зарубіжна література	2	Фізика	3
Історія України	2	Хімія	2
Всесвітня історія	1	Трудове навчання	1
Правознавство	1	Інформатика	2
Мистецтво	1	Основи здоров’я	1
Алгебра	2	Фізична культура	3

Оцініть ймовірність того, що вибраний навмання урок у тижневому розкладі 9 класу виявиться: 1) алгеброю; 2) геометрією; 3) математикою; 4) фізкультурою; 5) іноземною мовою.

26.14.• Виберіть навмання одну сторінку з повісті Марка Вовчка «Інститутка». Підрахуйте, скільки разів на цій сторінці зустрінуться букви «н», «о», «я», «ю», а також скільки всього на ній букв. Оцініть ймовірність появи цих букв у вибраному тексті. Ця оцінка дозволить зрозуміти, чому на клавіатурах друкарської машинки та комп'ютера (рис. 26.3) букви «н» і «о» розміщено ближче до центру, а букви «я» і «ю» — ближче до краю.

Рис. 26.3

26.15.• У таблиці наведено дані про кількість днів 2016 року, у які на 12.00 було зафіксовано дану температуру та даний рівень вологості повітря в місті N.

Діапазон температури повітря, °C	Діапазон вологості повітря, %						Разом днів
	Від 0 % до 40 %	Від 41 % до 60 %	Від 61 % до 70 %	Від 71 % до 80 %	Від 81 % до 90 %	Від 91 % до 100 %	
Менше від −11 °C	0	1	1	3	2	0	7
Від −10° до −1 °C	0	0	11	15	13	5	44
Від 0° до 10 °C	10	19	12	13	19	47	120
Від 11° до 20 °C	23	27	15	6	10	2	83
Від 21° до 30 °C	57	32	6	2	1	0	98
Більше 31 °C	9	4	0	0	0	0	13
Разом днів	99	83	45	39	45	54	365

Підрахуйте частоту спостереження у 2016 році:

1) температури повітря в діапазоні від 11 °C до 20 °C серед тих днів, коли зафіксована вологість не перевищувала 40 %;

2) вологості повітря в діапазоні від 71 % до 80 % серед тих днів, коли зафіксована температура була меншою від 0 °С;
3) температури повітря в діапазоні від 21 °С до 30 °С та одночасно вологості повітря в діапазоні від 41 % до 70 %.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

26.16. Числа x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 - (2a - 3)x + a^2 - 3 = 0$. Знайдіть значення параметра a, при яких виконується рівність $2x_1 + 2x_2 = x_1x_2$.

26.17. Першу половину шляху, яка становить 20 км, велосипедист рухався зі швидкістю на 5 км/год більшою, ніж швидкість, з якою він долав решту 20 км. З якою швидкістю проїхав велосипедист другу половину шляху, якщо на весь шлях він витратив 3 год 20 хв?

26.18. Знайдіть остачу при діленні числа 4^{104} на число 11.

26.19. Доведіть, що нерівність $||x+1|-|x-1|| \leqslant 2$ виконується при всіх значеннях x.

27. Класичне означення ймовірності

Для знаходження ймовірності деяких подій не обов'язково проводити випробування або спостереження. Достатньо керуватися життєвим досвідом і здоровим глуздом.

ПРИКЛАД 1 Нехай у коробці лежать 10 червоних куль. Яка ймовірність того, що взята навмання куля буде червоного кольору? жовтого кольору?

За даних умов будь-яка взята навмання куля буде червоного кольору.

Подію, яка за даним комплексом умов обов'язково відбудеться в будь-якому випробуванні, називають **достовірною (вірогідною).** *Ймовірність такої події вважають рівною* 1, тобто:

якщо A — достовірна подія, то

$$P(A) = 1.$$

Отже, ймовірність того, що взята навмання куля буде червоного кольору, дорівнює 1.

Оскільки в коробці немає куль жовтого кольору, то взяти кулю жовтого кольору неможливо.

Подію, яка за даним комплексом умов не може відбутися в жодному випробуванні, називають **неможливою**. *Ймовірність такої події вважають рівною* 0, тобто:

якщо A — неможлива подія, то

$$P(A) = 0.$$

Отже, ймовірність того, що взята навмання куля буде жовтого кольору, дорівнює 0. ◄

ПРИКЛАД 2 Однорідну монету підкидають один раз. Яка ймовірність випадіння герба?

У цьому експерименті можна отримати тільки один із двох результатів: випадіння цифри або випадіння герба. Причому жоден із них не має переваг. Такі результати називають **рівноможливими**, а відповідні випадкові події — **рівноймовірними**. Тоді природно вважати, що ймовірність кожної з подій «випадіння герба» і «випадіння цифри» дорівнює $\frac{1}{2}$. ◄

Сказане не означає, що в будь-якій серії експериментів з киданням монети рівно половиною результатів буде випадіння герба та рівно половиною — випадіння цифри. Ми можемо лише прогнозувати, що за великої кількості випробувань частота випадіння герба приблизно дорівнюватиме $\frac{1}{2}$.

Розглянемо ще кілька прикладів експериментів з таким комплексом умов, які роблять усі результати експерименту рівноможливими.

ПРИКЛАД 3 Гральний кубик (рис. 27.1) кидають один раз. Яка ймовірність випадіння цифри 4?

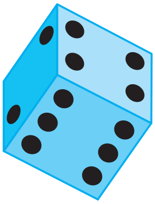


Рис. 27.1

У цьому експерименті можна отримати один із шести результатів: випаде 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок. Усі ці результати рівноможливі. Тому природно вважати, що ймовірність події «випадіння 4 очок» дорівнює $\frac{1}{6}$. ◄

ПРИКЛАД 4 Нехай випущено 100 000 лотерейних білетів, 20 з яких є виграшними. Яка ймовірність виграшу при купівлі одного білета?

Випробування полягає в тому, що купляють один білет. У цьому експерименті можна отримати один зі 100 000 рівноможливих результатів: купити білет з номером 1, купити білет з номером 2 і т. д.

Із них 20 результатів приводять до виграшу. Природно вважати, що ймовірність виграшу при купівлі одного білета дорівнює $\frac{20}{100\,000} = \frac{1}{5000}$. ◄

ПРИКЛАД 5 У коробці лежать 15 більярдних куль, пронумерованих числами від 1 до 15. Яка ймовірність того, що вийнята навмання куля матиме номер, кратний 3?

У цьому випробуванні можна отримати один із 15 рівноможливих результатів: вийняти кулю з номером 1, вийняти кулю з номером 2 і т. д. Із них до настання події «вийнята куля має номер, кратний 3» приводять 5 результатів: вийнята куля має номер 3, або 6, або 9, або 12, або 15. Тому природно вважати, що шукана ймовірність дорівнює $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. ◄

Попри те що в прикладах 1–5 розглядають різні експерименти, їх описує одна математична модель. Пояснимо сказане.

- У кожному прикладі при випробуванні можна отримати один із n рівноможливих результатів.

Приклад 1: $n = 10$.
Приклад 2: $n = 2$.
Приклад 3: $n = 6$.
Приклад 4: $n = 100\,000$.
Приклад 5: $n = 15$.

- У кожному прикладі розглядається деяка подія A, до настання якої приводять m результатів. Називатимемо їх **сприятливими**.

Приклад 1: A — витягнули червону кулю, $m = 10$, або A — витягнули жовту кулю, $m = 0$.

Приклад 2: A — випав герб, $m = 1$.

Приклад 3: A — випала наперед задана кількість очок на грані кубика, $m = 1$.

Приклад 4: A — виграш призу, $m = 20$.

Приклад 5: A — витягнули кулю, номер якої кратний 3, $m = 5$.

- У кожному прикладі ймовірність події A можна обчислити за формулою:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

Означення. **Якщо випробування може закінчитися одним з n рівноможливих результатів, з яких m приводять до настання події A, то *ймовірністю події A* називають відношення $\frac{m}{n}$.**

Таке означення ймовірності називають **класичним**.

Наголосимо, що коли *комплекс умов експерименту такий, що його результати не є рівноможливими, то класичне означення ймовірності до такого експерименту застосовувати не можна.*

ПРИКЛАД 6 Кидають одночасно два гральних кубики: синій і жовтий. Яка ймовірність того, що випадуть дві шістки?

За допомогою таблиці, зображеної на рисунку 27.2, ми можемо встановити, що в даному експерименті можна отримати 36 рівноможливих результатів, з яких сприятливим є тільки один. Тому шукана ймовірність дорівнює $\frac{1}{36}$. ◄

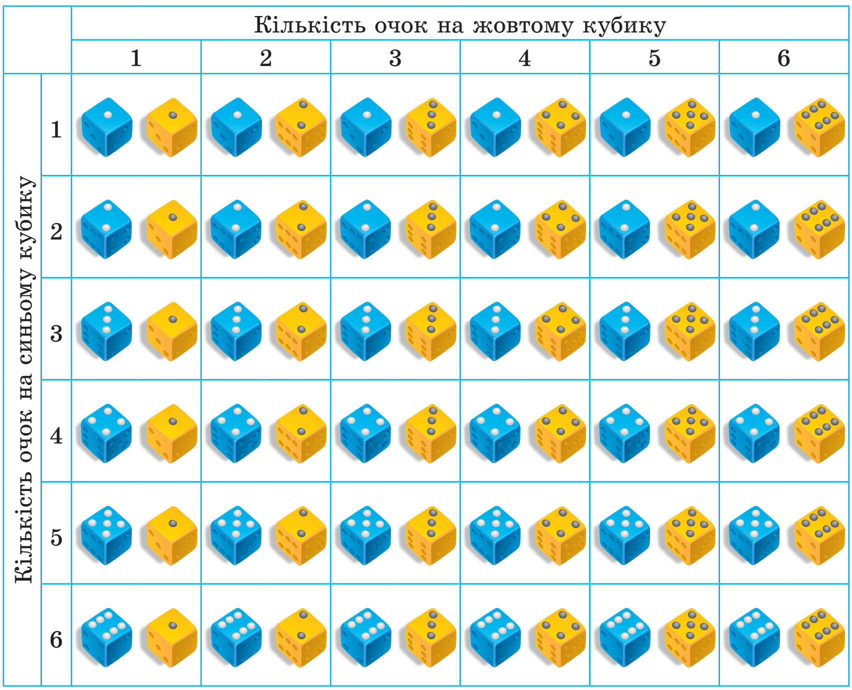


Рис. 27.2

ПРИКЛАД 7 **(задача д'Аламбера).** Кидають одночасно дві однакові монети. Яка ймовірність того, що хоча б один раз випаде герб?

Ця задача схожа на задачу з прикладу 6. Різниця лише в тому, що кубики відрізнялися за кольором, а монети є нерозрізнимими. Щоби створити в цьому експерименті комплекс умов, за яких усі його результати стануть рівноможливими, будемо розрізняти монети, попередньо їх пронумерувавши. Тоді можна отримати чотири рівноможливих результати (рис. 27.3).

Рис. 27.3

У перших трьох із цих результатів хоча б один раз випав герб. Ці результати є сприятливими. Тому ймовірність того, що при одночасному киданні двох монет хоча б один раз випаде герб, дорівнює $\frac{3}{4}$. ◄

ПРИКЛАД 8 Кидають одночасно два однакових гральних кубики. Яка ймовірність того, що випадуть числа, сума яких дорівнюватиме 11?

Даний експеримент має 11 результатів. Сума чисел, які випали, може дорівнювати 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Проте тут помилкою було б вважати, що ймовірність події «сума чисел, які випали, дорівнює 11» становить $\frac{1}{11}$. Річ у тім, що перелічені 11 результатів досліду не є рівноможливими. Наприклад, результат «сума чисел дорівнює 2» може бути отриманий тільки одним способом, а результат «сума чисел дорівнює 6» — п'ятьма способами (переконайтеся в цьому самостійно).

Щоб мати змогу скористатися класичним означенням ймовірності, опишемо умови експерименту таким чином, щоб усі його результати були рівноможливими.

Для цього будемо умовно розрізняти кубики, наприклад за кольором. Тоді можна отримати 36 рівноможливих результатів (рис. 27.2). З них тільки два є сприятливими. Тому шукана ймовірність дорівнює $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. ◄

ПРИКЛАД 9 Розглядаються всі сім'ї з двома дітьми, у яких щонайменше одна дитина — хлопчик. Яка ймовірність того, що у вибраній навмання такій сім'ї є два хлопчики? (Вважатимемо, що народження хлопчика та народження дівчинки рівноймовірні.)

Здавалося б, у цій задачі відповіддю є число $\frac{1}{2}$. Адже один хлопчик у сім'ї вже є, а отже, другою дитиною з рівною ймовірністю буде або хлопчик, або дівчинка.

Насправді наведені міркування — це розв'язання іншої задачі: розглядаються всі сім'ї з двома дітьми, у яких старша дитина — хлопчик. Яка ймовірність того, що у вибраній навмання такій сім'ї є два хлопчики?

Комплекс умов нашого експерименту дає такі три рівноможливих результати:

старша дитина — хлопчик, молодша дитина — хлопчик;
старша дитина — хлопчик, молодша дитина — дівчинка;
старша дитина — дівчинка, молодша дитина — хлопчик.

Отже, шукана ймовірність дорівнює $\frac{1}{3}$. ◄

На завершення цього пункту зазначимо таке.

На перший погляд здається, що багатьма явищами, які відбуваються навколо нас, керує «його величність випадок». Проте при більш ґрунтовному аналізі з'ясовується, що через хаос випадковостей прокладає собі дорогу закономірність, яку можна кількісно оцінити. Науку, яка займається такими оцінками, називають **теорією ймовірностей.**

?

1. Яку подію називають достовірною?
2. Яку подію називають неможливою?
3. Яка ймовірність: 1) достовірної події; 2) неможливої події?
4. Наведіть приклади рівноймовірних подій.
5. Сформулюйте класичне означення ймовірності.
6. До яких ситуацій неможливо застосовувати класичне означення ймовірності?

ВПРАВИ

27.1.° Наведіть приклади достовірних подій.

27.2.° Наведіть приклади неможливих подій.

27.3.° У кошику лежать 10 червоних і 15 зелених яблук. Яка ймовірність взяти навмання з кошика грушу? яблуко?

27.4.° Навмання вибирають три парні цифри. Яка ймовірність того, що число, записане цими цифрами, буде непарним?

27.5.° Навмання вибирають три непарні цифри. Яка ймовірність того, що число, записане цими цифрами, буде непарним?

27.6.° Яка ймовірність того, що, переставивши букви в слові «алгебра», ми отримаємо слово «геометрія»?

27.7.° Наведіть приклади подій з рівноможливими результатами.

27.8.° Наведіть приклади подій з нерівноможливими результатами.

27.9.° Чи рівноймовірні події A і B:

1) подія A: з 15 більярдних куль з номерами від 1 до 15 взяти навмання кулю з номером 1;
подія B: з 15 більярдних куль з номерами від 1 до 15 взяти навмання кулю з номером 7;
2) подія A: з 15 більярдних куль з номерами від 1 до 15 взяти навмання кулю з парним номером;
подія B: з 15 більярдних куль з номерами від 1 до 15 взяти навмання кулю з непарним номером?

27.10.° Яка ймовірність того, що при одному киданні грального кубика випаде кількість очок, що дорівнює:

1) одному;
2) трьом;
3) непарному числу;
4) числу, яке кратне 5;
5) числу, яке не ділиться націло на 3;
6) числу, яке кратне 9?

27.11.° Уяви собі, що в класі, у якому ти навчаєшся, розігрується одна безкоштовна туристична поїздка до Лондона. Яка ймовірність того, що до Лондона поїдеш ти?

27.12.° Щоб скласти іспит з математики, потрібно вивчити 35 білетів. Учень вивчив бездоганно 30 білетів. Яка ймовірність того, що, відповідаючи на один навмання витягнутий білет, він отримає оцінку 12 балів?

27.13.° Щоб скласти іспит з математики, треба вивчити 30 білетів. Учень не вивчив тільки один білет. Яка ймовірність того, що він не складе іспит, відповідаючи на один білет?

27.14.° Яка ймовірність того, що ученицю вашого класу, яку викличуть до дошки на уроці математики, зватимуть Катериною?

27.15.° У лотереї 20 виграшних білетів і 280 білетів без виграшу. Яка ймовірність виграти, купивши один білет?

27.16.° У коробці лежать 7 синіх і 5 жовтих кульок. Яка ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться: 1) жовтою; 2) синьою?

27.17.° У коробці було 23 картки, пронумерованих від 1 до 23. Із коробки навмання взяли одну картку. Яка ймовірність того, що на ній записано число:

1) 11;
2) 24;
3) кратне 6;
4) кратне 5;
5) одноцифрове;
6) складене;
7) у записі якого є цифра 7;
8) у записі якого є цифра 2;
9) у записі якого відсутня цифра 4;
10) сума цифр якого ділиться націло на 3;
11) яке при діленні на 11 дає в остачі 2;
12) у записі якого відсутня цифра 1?

27.18.° З натуральних чисел від 1 до 30 навмання вибирають одне число. Яка ймовірність того, що це число буде:

1) простим;
2) дільником числа 18;
3) квадратом натурального числа?

27.19.° Набираючи номер телефону свого товариша, Микола забув: 1) останню цифру; 2) першу й останню цифри. Яка ймовірність того, що він з першої спроби набере правильний номер?

27.20.• Абонент забув дві останні цифри номера телефону й набирає їх навмання. Яка ймовірність правильно набрати номер, якщо абонент тільки пам'ятає, що дві останні цифри:

1) непарні; 2) різні й парні?

27.21.• Яка ймовірність того, що твій найщасливіший день у наступному році припаде на: 1) 7 число; 2) 31 число; 3) 29 число?

27.22.• Грані кубика пофарбовано в червоний або білий колір (кожну грань в один колір). Ймовірність випадіння червоної грані дорівнює $\frac{5}{6}$, а ймовірність випадіння білої грані — $\frac{1}{6}$. Скільки червоних і скільки білих граней у кубика?

27.23.• У коробці лежать 4 сині кулі та кілька червоних. Скільки червоних кульок у коробці, якщо ймовірність того, що вибрана навмання куля виявиться синьою, дорівнює $\frac{2}{7}$?

27.24.• Серед двоцифрових чисел навмання вибирають одне число. Яка ймовірність того, що:
1) його цифра в розряді десятків більша, ніж цифра в розряді одиниць;
2) його цифри в розрядах десятків і одиниць однакові;
3) це число ділиться націло на 9?

27.25.• Картки з номерами 1, 2, 3 довільним чином поклали в ряд. Яка ймовірність того, що картки з непарними номерами опиняться поруч?

27.26.• На лавочку довільним чином сідають два хлопчики й одна дівчинка. Яка ймовірність того, що хлопчики опиняться поруч?

27.27.• У коробці лежать 5 зелених і 7 синіх олівців. Яку найменшу кількість олівців треба вийняти навмання, щоб ймовірність того, що серед вийнятих олівців хоча б один буде зеленого кольору, дорівнювала 1?

27.28.• У коробці лежать 3 червоних, 7 жовтих і 11 синіх олівців. Яку найменшу кількість олівців треба вийняти навмання, щоб ймовірність того, що серед вийнятих олівців хоча б один буде червоного кольору, дорівнювала 1?

27.29.•• Кидають одночасно два гральних кубики. За допомогою рисунка 27.2 установіть, яка ймовірність того, що випадуть:
1) дві одиниці;
2) два однакових числа;
3) числа, сума яких дорівнює 7;
4) числа, сума яких більша за 10;
5) числа, добуток яких дорівнює 6.

27.30.•• Гральний кубик кидають 2 рази. Яка ймовірність того, що:
1) першого разу випаде менше 4 очок, а другого — більше 4;
2) першого разу випаде менше очок, ніж другого;
3) у сумі за два кидки випаде 5 очок?

27.31.•• Яка ймовірність того, що при двох кидках грального кубика:
1) першого разу випаде число, менше від 5, а другого — більше за 4;
2) шістка випаде тільки другого разу;
3) першого разу випаде більше очок, ніж другого?

27.32.•• Дмитро та Петро одночасно кидають по одному гральному кубику. Якщо сума очок, що випали, дорівнює 6, то виграє Дмитро, а якщо в сумі випадає 7 очок, то виграє Петро. У кого з гравців більше шансів виграти у цій грі?

27.33.•• Двічі кидають монету. Яка ймовірність того, що випадуть: 1) два герби; 2) герб і цифра?

27.34.•• Із п'яти пронумерованих карток вибирають навмання одну, запам'ятовують її номер і повертають до решти карток. Потім знову вибирають навмання із цих п'яти карток одну. Яка ймовірність того, що обидва рази витягували картку з одним і тим самим номером?

27.35.•• Яка ймовірність того, що при трьох кидках монети: 1) тричі випаде герб; 2) двічі випаде герб; 3) один раз випаде герб; 4) хоча б один раз випаде герб?

27.36.•• За круглий стіл випадковим чином сіли n людей ($n > 2$). З них тільки двоє знайомі один з одним. Яка ймовірність того, що двоє знайомих сядуть поруч?

27.37.•• У чергу випадковим чином стають четверо людей: A, B, C, D. Вважаючи всі варіанти їхнього розміщення рівноможливими, визначте ймовірність того, що A буде стояти попереду B.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

27.38. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^2 - 4}$.

27.39. При якому значенні c найбільше значення функції $y = -3x^2 + 9x + c$ дорівнює -5?

27.40. Поїзд мав проїхати 64 км. Коли він проїхав 24 км, то був затриманий коло семафора на 12 хв. Тоді він збільшив швидкість на 10 км/год і прибув у пункт призначення із запізненням на 4 хв. Знайдіть початкову швидкість поїзда.

27.41. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 - 10x + 12 = 0$. Не розв'язуючи цього рівняння, знайдіть значення виразу $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$.

Спочатку була гра

Ви знаєте багато ігор, у яких результат залежить від майстерності учасників. Проте є такі ігри, у яких від уміння гравців нічого не залежить. Усе вирішує випадок. До останніх належить гра в кості. Вважають, що саме з неї розпочалася наука про випадкове.

Придворний французького короля Людовіка XIV, азартний гравець, філософ і літератор кавалер де Мере звернувся до видатного вченого Блеза Паскаля з проханням роз'яснити такий парадокс. З одного боку, багатий ігровий досвід де Мере свідчив, що при киданні трьох гральних костей сума в 11 очок випадає частіше, ніж сума у 12 очок.

З другого боку, цей факт вступав у суперечність з такими міркуваннями. Суму в 11 очок можна отримати із шести різних комбінацій кубиків:

6–4–1	6–3–2	5–5–1
5–4–2	5–3–3	4–4–3

Але й 12 очок теж можна отримати із шести комбінацій:

6–5–1	6–4–2	6–3–3
5–5–2	5–4–3	4–4–4

Блез Паскаль
(1623–1662)

Французький релігійний філософ, письменник, математик і фізик. У ранньому віці виявив математичні здібності, увійшов в історію науки як класичний приклад підліткової геніальності. Коло його математичних інтересів було надзвичайно широким. Зокрема, він винайшов загальний алгоритм для знаходження ознак подільності будь-яких цілих чисел, сформулював ряд основних положень теорії ймовірностей, методи обчислення площ фігур, площ поверхонь і об'ємів тіл. Сконструював першу обчислювальну машину-суматор.

Отже, до появи в сумі 11 і 12 очок призводить однакова кількість сприятливих результатів. Таким чином, ці події мають однакові шанси, що суперечить практиці.

Паскаль зрозумів: помилка полягала в тому, що події, які розглядав де Мере, не є рівноймовірними. Наприклад, суму в 11 очок за допомогою комбінації 6–4–1 можна отримати при 6 різних результатах кидання кубиків: (6; 4; 1); (6; 1; 4); (4; 6; 1); (4; 1; 6); (1; 6; 4); (1; 4; 6).

Якщо підрахувати для кожної комбінації кількість способів її виникнення, то отримаємо: для суми 11 кількість сприятливих результатів дорівнює 27, а для суми 12 — 25. Причому всі такі результати є рівноможливими.

Цю та інші задачі, пов'язані з азартними іграми, Блез Паскаль обговорював у листуванні з П'єром Ферма. Вважають, що в цьому листуванні було закладено основи теорії ймовірностей.

Цікаво, що помилку, подібну до тієї, якої припустився де Мере, зробив видатний французький математик Жан Лерон д'Аламбер, розв'язуючи таку задачу: «Монету підкидають двічі. Яка ймовірність того, що хоча б один раз випаде герб?» Він міркував приблизно так.

Можливі три результати: герб випав першого разу, герб випав другого разу, герб узагалі не випав. Тоді з трьох ймовірних результатів сприятливими є тільки два, тобто шукана ймовірність дорівнює $\frac{2}{3}$.

Проте з прикладу 7 п. 27 ви знаєте, що правильною є відповідь $\frac{3}{4}$.

Помилка полягала в тому, що зазначені три результати не є рівноможливими (подумайте чому). Скоріш за все, ця помилка свідчить про те, що у XVIII ст. теорія ймовірностей була ще «молодою» наукою, яка вимагала уточнення самого поняття «ймовірність події».

Становлення та розвиток теорії ймовірностей пов'язані з працями таких видатних учених, як Якоб Бернуллі (1654–1705), П'єр-Симон Лаплас (1749–1827), Ріхард фон Мізес (1883–1953). У XX ст. особливого значення набули праці видатного радянського математика Андрія Миколайовича Колмогорова.

Українська математична наука подарувала світові плеяду видатних фахівців у галузі теорії ймовірностей. Імена Й. І. Гіхмана, Б. В. Гнєденка, А. В. Скорохода, М. Й. Ядренка відомі математикам у всьому світі.

А. М. Колмогоров
(1903–1987)

М. Й. Ядренко
(1932–2004)

Михайло Йосипович Ядренко значну частину своїх творчих сил віддавав також педагогічній діяльності. Він багато працював з обдарованою молоддю, був фундатором Всеукраїнських олімпіад юних математиків. Михайло Йосипович проводив значну просвітницьку діяльність. Зокрема, за його ініціативою в 1968 р. було створено першу в Україні науково-популярну збірку «У світі математики».

28. Обчислення ймовірностей за допомогою правил комбінаторики

У попередньому пункті для обчислення ймовірності події нам доводилося підраховувати в заданому експерименті кількість рівноможливих результатів і кількість результатів, сприятливих для настання даної події.

Часто ці підрахунки пов’язані з визначенням кількості різних комбінацій, які за певним правилом можна скласти з елементів заданої скінченної множини. Тому застосування правил комбінаторики — ефективний прийом для обчислення ймовірностей подій в експериментах з рівноможливими результатами.

Розглянемо приклади.

ПРИКЛАД 1 У двох урнах лежать кулі, які відрізняються тільки кольором. У першій урні лежать дві білі та три чорні кулі, а в другій — три білі та дві чорні кулі. Із кожної урни навмання дістають по одній кулі. Яка ймовірність того, що хоча б одна з двох куль виявиться білою?

Розв'язання. У результаті розглядуваного досліду можна отримати три результати: кулі, які витягнули, обидві білі, або обидві чорні, або одна куля біла, а друга — чорна. Проте ці результати не є рівноможливими (подумайте чому). Для того щоб мати змогу розглядати рівноможливі результати, пронумеруємо всі 10 куль.

Оскільки в кожній урні лежить по 5 куль, то з них можна утворити $5 \cdot 5 = 25$ таких пар, що кулі в парах взяті з різних урн. Оскільки кулі пронумеровано, то ми можемо вважати, що всі 25 пар куль різні. Кулі з урн беруть навмання. Тому в цьому експерименті є 25 рівноможливих результатів.

Оскільки в першій урні лежать 3 чорні кулі, а в другій — 2 чорні, то існує $3 \cdot 2 = 6$ пар куль чорного кольору. Тому кількість пар куль, серед яких є щонайменше одна біла, дорівнює $25 - 6 = 19$. Отже, кількість результатів, сприятливих для події «хоча б одна з куль виявиться білою», дорівнює 19.

Відповідь: $\frac{19}{25}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Кидають чотири гральних кубики. Знайдіть ймовірність того, що:

1) випаде рівно одна шістка (подія A);
2) випадуть чотири різні цифри (подія B);
3) не випаде жодної шістки (подія C);
4) випаде хоча б одна шістка (подія D).

Розв'язання. Пронумеруємо кубики числами від 1 до 4. Будь-який результат експерименту записуватимемо у вигляді $(a; b; c; d)$, де a, b, c і d — кількість очок, які випали відповідно на першому, другому, третьому та четвертому кубиках.

Разом може утворитися $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$ таких четвірок. Жодний з результатів не має переваги. Тому в даному досліді є 6^4 рівноможливих результатів.

1) Єдина шістка, яка випала, може стояти на будь-якому із чотирьох місць. Нехай, наприклад, вона стоїть на першому місці. На інших трьох місцях стоять будь-які цифри від 1 до 5. Тоді кількість четвірок виду $(6; b; c; d)$ дорівнює $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$. Загальна кількість сприятливих результатів дорівнює $4 \cdot 5^3$. Отже, $P(A) = \frac{4 \cdot 5^3}{6^4}$.

2) У цьому випадку будь-які чотири різні цифри, що випали, — це 4-елементна упорядкована підмножина множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Отже, кількість результатів, сприятливих для настання події B, дорівнює A_6^4. Звідси $P(B) = \frac{A_6^4}{6^4} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4}$.

3) На кожному із чотирьох місць може стояти будь-яка із цифр від 1 до 5. Звідси кількість результатів, сприятливих для настання події C, дорівнює $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$. Отримуємо: $P(C) = \frac{5^4}{6^4}$.

4) Кількість усіх результатів дорівнює 6^4. Кількість усіх результатів, де немає жодної шістки, дорівнює 5^4. Тоді $6^4 - 5^4$ — це кількість усіх результатів, які містять хоча б одну шістку. Звідси $P(D) = \frac{6^4 - 5^4}{6^4}$. ◄

ПРИКЛАД 3 Контролер у партії з 20 деталей навмання вибирає 5 деталей для перевірки. Якщо серед вибраних деталей немає жодної бракованої, то він приймає всю партію. Яка ймовірність того, що контролер прийме партію деталей, яка містить 7 бракованих?

Розв'язання. Оскільки контролер вибирає з 20 деталей 5 деталей навмання, то даний експеримент має C_{20}^5 рівноможливих результатів.

Нехай у партії з 20 деталей є 7 бракованих. Тоді якісних виробів у ній 13. Контролер пропускає партію з 20 деталей (подія A), якщо 5 деталей будуть вибрані з 13 якісних деталей. Отже, кількість результатів, сприятливих для настання події A, дорівнює C_{13}^5.

Звідси $P(A) = \frac{C_{13}^5}{C_{20}^5} \approx 8\,\%$. ◄

ПРИКЛАД 4 У змаганнях з баскетболу беруть участь 18 команд, з яких 5 команд вважаються фаворитами. Шляхом жеребкування команди ділять на дві групи A і B, по 9 команд у кожній. Яка ймовірність потрапляння до однієї групи:

1) п'яти команд-фаворитів (подія M);

2) рівно двох команд-фаворитів (подія K)?

Розв'язання. Кожну з груп можна утворити C_{18}^9 способами.

1) Нехай 5 команд-фаворитів потрапили до групи A. Тоді для доформування цієї групи до 9 команд потрібно вибрати ще 4 команди з решти 13 команд. Це можна зробити C_{13}^4 способами. Оскільки п'ять команд-фаворитів можуть потрапити як у групу A, так і в групу B, то кількість результатів, сприятливих для події M, дорівнює $2C_{13}^4$. Отже, $P(M) = \frac{2C_{13}^4}{C_{18}^9} = \frac{1}{34}$.

2) Кожну з груп, яка містить дві команди-фаворити, можна сформувати $C_5^2 \cdot C_{13}^7$ способами. Звідси $P(K) = \frac{2 \cdot C_5^2 \cdot C_{13}^7}{C_{18}^9} = \frac{12}{17}$. ◄

ВПРАВИ

28.1.° Навмання вибирають 4 букви зі слова «ЗАКОН». Яка ймовірність того, що з вибраних чотирьох букв можна скласти слово «КОЗА»?

28.2.° Навмання вибирають 4 букви зі слова «ЛАСОЩІ». Яка ймовірність того, що з вибраних чотирьох букв можна скласти слово «САЛО»?

28.3.° Навмання вибирають чотири букви зі слова «ОКУЛЯРИ». Яка ймовірність того, що вибрані букви в послідовності вибору утворять слово «КУЛЯ»?

28.4.° Навмання вибирають 6 букв зі слова «ПІВДЕНЬ». Яка ймовірність того, що вибрані букви в послідовності вибору утворять слово «ВІДЕНЬ»?

28.5.° У ящику лежать 10 куль, з яких 4 білі. Яка ймовірність того, що вибрані навмання 2 кулі виявляться білими?

28.6.° Для шкільної лотереї підготували 50 білетів, з яких 10 призових. Учень вибрав навмання 3 білети. Яка ймовірність того, що всі ці білети будуть призовими?

28.7.° У партії зі 100 лампочок є 7 бракованих. Яка ймовірність вибрати навмання із цієї партії 4 небраковані лампочки?

28.8.° На екзамен з математики виносять 50 питань. Студент підготував тільки 30 питань. Білет складається з 5 питань, вибраних випадковим чином. Яка ймовірність того, що студент знатиме всі питання білета?

28.9.° Десять карток пронумеровано натуральними числами від 1 до 10. Навмання вибирають дві з них. Яка ймовірність того, що добуток номерів вибраних карток буде непарним числом?

28.10.° Десять карток пронумеровано натуральними числами від 1 до 10. Навмання вибирають дві з них. Яка ймовірність того, що сума номерів вибраних карток буде непарним числом?

28.11.• У партії зі 100 деталей є 7 бракованих. Із цієї партії навмання вибирають 6 деталей. Яка ймовірність того, що серед вибраних 6 деталей 2 деталі виявляться бракованими?

28.12.• У ящику лежать 10 білих і 7 чорних куль. Яка ймовірність того, що з п'яти вибраних навмання куль три будуть білими?

28.13.• Знайдіть ймовірність того, що дні народження 7 навмання вибраних людей випадають на різні дні тижня.

28.14.• Дослід полягає в одночасному киданні чотирьох гральних кубиків. Знайдіть ймовірність того, що випадуть:
1) три шістки та одна п'ятірка;
2) чотири однакові цифри;
3) щонайбільше одна шістка;
4) дві шістки.

28.15.• У чергу випадковим чином стають четверо людей: A, B, C, D. Вважаючи всі варіанти їхнього розміщення рівноможливими, визначте ймовірність таких подій:
1) A буде першим у черзі;
2) B не буде останнім у черзі.

28.16.• У ящику лежать 15 синіх, 6 жовтих і 4 зелені кулі. Навмання вибирають 7 куль. Яка ймовірність того, що серед вибраних куль будуть 3 сині, 2 жовті та 2 зелені?

28.17.•• У ящику лежать 10 білих і 7 чорних куль. Яка ймовірність того, що з п'яти вибраних навмання куль буде не більше двох білих?

28.18.•• На екзамен з математики виносять 50 питань. Студент підготував тільки 40 питань. Білет складається із 6 питань, вибраних випадковим чином. Щоб скласти екзамен, досить відповісти на 4 питання білета. Яка ймовірність того, що студент складе екзамен?

28.19.•• У партії зі 100 деталей є 7 бракованих. Із цієї партії навмання вибирають 6 деталей. Яка ймовірність того, що серед вибраних деталей буде не більше двох бракованих?

28.20.•• У ліфт дев'ятиповерхового будинку на першому поверсі ввійшли 5 пасажирів. Кожний із них з однаковою ймовірністю може вийти на будь-якому поверсі, починаючи з другого. Знайдіть ймовірність події:
1) усі пасажири вийдуть на 9 поверсі;
2) усі пасажири вийдуть на одному поверсі;
3) усі пасажири вийдуть на різних поверхах;
4) усі пасажири вийдуть до п'ятого поверху.

28.21.•• У колоді карт 4 масті по 9 карт у кожній. Яка ймовірність того, що під час роздавання 36 карт порівну чотирьом гравцям кожний гравець отримає всі карти однієї масті?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

28.22. Складіть квадратне рівняння, корені якого на три більші за відповідні корені рівняння $x^2 - 8x + 2 = 0$.

28.23. Для будь-яких дійсних чисел a і b доведіть нерівність $a^2+b^2+4 \geqslant ab+2a+2b$.

28.24. Розв’яжіть систему рівнянь $\begin{cases} |x-2|+y^2=2-x, \\ y=x^2+2x-15. \end{cases}$

29. Початкові відомості про статистику

Яким тиражем слід видати підручник з алгебри для 9 класу?

Чи варто певному політику висувати свою кандидатуру на чергових виборах мера?

Скільки кілограмів риби та морепродуктів уживає в середньому за рік один житель України?

Чи вигідно для концерту даного артиста орендувати стадіон?

На ці та багато інших запитань допомагає відповідати статистика.

Означення. Статистика (від латин. *status* — стан) **— це наука про отримання, обробку й аналіз кількісних даних, які характеризують масові явища.**

Статистичне дослідження складається з кількох етапів:

Збирання даних

↓

Обробка даних та їх подання у зручній формі

↓

Аналіз даних

↓

Висновки та рекомендації

Зупинимося окремо на кожному етапі.

Збирання даних

Ви знаєте, що шкідливі звички, неправильне харчування, малорухомий спосіб життя призводять до серцево-судинних захворювань. Такого висновку лікарі дійшли, дослідивши, звісно, не всіх людей планети.

Зрозуміло, що дослідження носило *вибірковий*, але *масовий* характер.

У статистиці сукупність об'єктів, на основі яких проводять дослідження, називають **вибіркою**.

У даному прикладі вибірка складалася з кількох мільйонів людей.

Варто зазначити, що статистичний висновок, заснований лише на чисельності вибірки, не завжди є достовірним. Наприклад, якщо ми, досліджуючи популярність артиста, обмежимося опитуванням людей, які прийшли на його концерт, то отримані висновки не будуть об'єктивними, адже вони прийшли на концерт саме тому, що цей артист їм подобається. Статистики говорять, що вибірка має бути **репрезентативною** (від фр. *représentatif* — показовий).

Так, лікарі, вивчаючи фактори ризику виникнення серцево-судинних захворювань, досліджували людей різного віку, професій, національностей тощо.

Отже, *збирання даних має ґрунтуватися на масовості та репрезентативності вибірки*. Інколи вибірка може збігатися з множиною всіх об'єктів, щодо яких проводиться дослідження. Прикладом такого дослідження є проведення державної підсумкової атестації з математики в 9 класі.

Способи подання даних

Зібрану інформацію (сукупність даних) зручно подавати у вигляді таблиць, графіків, діаграм.

Розглянемо кілька прикладів.

ПРИКЛАД 1 У таблиці подано результати виступів українських школярів на міжнародних математичних олімпіадах протягом 1993–2016 рр. (Команда учасників на міжнародних математичних олімпіадах складається не більше ніж із 6 осіб.)

Рік	Місце проведення	Кількість медалей				Без медалей
		Золоті	Срібні	Бронзові	Разом медалей	
1993	Туреччина	0	2	3	5	1
1994	Гонконг	1	1	2	4	2
1995	Канада	1	1	1	3	3
1996	Індія	1	0	5	6	0
1997	Аргентина	3	3	0	6	0
1998	Тайвань	1	3	2	6	0
1999	Румунія	2	2	1	5	1
2000	Республіка Корея	2	2	0	4	2
2001	США	1	5	0	6	0
2002	Велика Британія	1	3	0	4	2
2003	Японія	1	2	3	6	0
2004	Греція	1	5	0	6	0

Рік	Місце проведення	Кількість медалей				Без медалей
		Золоті	Срібні	Бронзові	Разом медалей	
2005	Мексика	2	2	2	6	0
2006	Словенія	1	2	2	5	1
2007	В'єтнам	3	1	2	6	0
2008	Іспанія	2	2	2	6	0
2009	Німеччина	3	1	2	6	0
2010	Казахстан	1	2	3	6	0
2011	Нідерланди	1	2	3	6	0
2012	Аргентина	0	3	2	5	1
2013	Колумбія	1	3	1	5	1
2014	Південно-Африканська Республіка	2	3	1	6	0
2015	Таїланд	2	3	1	6	0
2016	Гонконг	0	2	4	6	0

У багатьох випадках дані зручно подавати у вигляді **стовпчастої діаграми**, яку ще називають **гістограмою** (від грец. *histos* — стовп і *gramma* — написання). Така інформація легко сприймається та добре запам'ятовується.

ПРИКЛАД 2 На рисунку 29.1 подано інформацію про природно-заповідний фонд України.

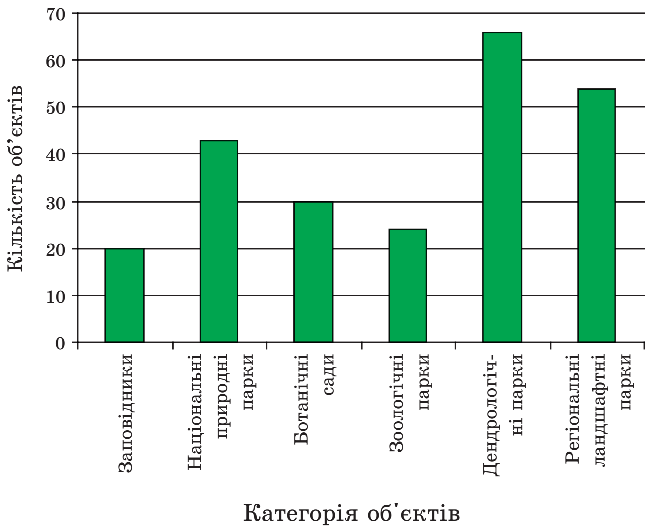


Рис. 29.1

ПРИКЛАД 3 Інформацію також можна подавати у вигляді графіків. Так, на рисунку 29.2 зображено графік щорічного відсоткового зростання кількості користувачів Інтернету у світі протягом 1995–2016 рр.

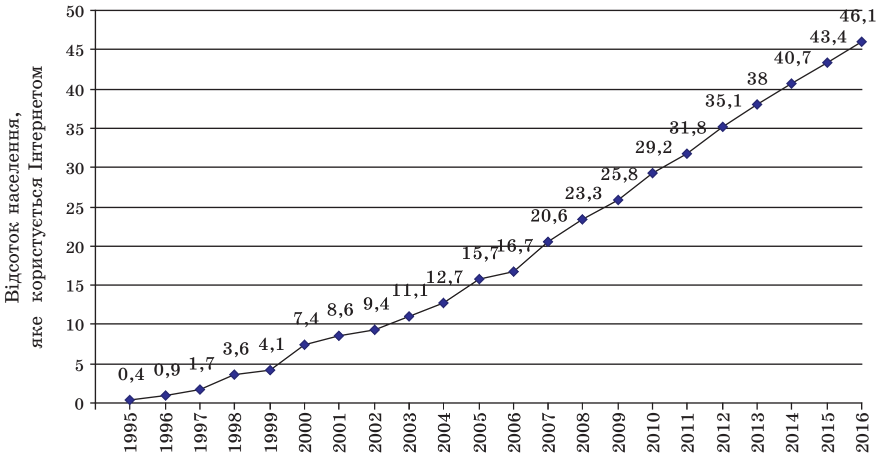


Рис. 29.2

Стовпчасті діаграми та графіки зазвичай використовують тоді, коли хочуть продемонструвати, як з плином часу змінюється деяка величина.

ПРИКЛАД 4 На рисунку 29.3 наведено розподіл медалей, отриманих українськими школярами на міжнародних олімпіадах у 2016 р. Для цього використано **кругову діаграму:** круг зображає загальну кількість медалей, а кожному предмету відповідає певний сектор круга.

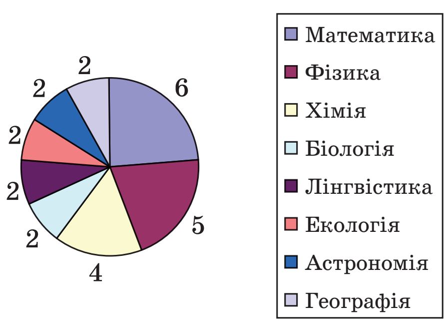


Рис. 29.3

Аналіз даних, висновки та рекомендації

Статистичні відомості надходять з різних галузей знань і діяльності людини: економіки, медицини, соціології, демографії, сільського господарства, метеорології, спорту тощо. Проте статистичні методи обробки (аналізу) даних багато в чому схожі. Ознайомимося з деякими з них.

Звернемося до прикладу 1. Наведена таблиця дозволяє дізнатися, скільки в середньому медалей за рік виборювали школярі України на міжнародних математичних олімпіадах. Для цього потрібно кількість усіх медалей, отриманих протягом періоду, що розглядається, поділити на кількість років. Наприклад, за період 1993–2016 рр. маємо:

$$\frac{5+4+3+6+6+6+5+4+6+4+6+6+6+5+6+6+6+6+6+5+5+6+6+6}{24}=$$

$$=\frac{130}{24}=5\frac{5}{12}.$$

Оскільки за рік можна виборoти не більше ніж 6 медалей, то знайдене **середнє значення** $5\frac{5}{12}$ свідчить про те, що команда України гідно виступає на цьому престижному форумі.

У статистичній інформації середні значення отриманих сукупностей даних трапляються досить часто. Наприклад, наведемо таблицю реалізації основних продуктів харчування через мережі великих магазинів у деяких країнах (у кілограмах на людину за рік).

Країна	М’ясо	Риба та морепродукти	Зернові	Овочі	Фрукти
Австралія	118,1	22,1	86,6	93,8	103,5
Данія	111,9	24,3	139,5	102,2	146,5
Іспанія	122,0	27,4	98,9	143,3	105,4
Італія	91,0	26,2	162,6	178,3	131,0
Канада	99,0	25,6	119,3	120,3	119,2
США	123,4	21,1	110,8	123,5	113,5
Україна	33,9	15,6	158,4	116,0	36,4
Франція	98,3	31,2	117,2	142,9	95,5

Таку таблицю можуть використовувати, наприклад, економісти в дослідженнях, висновках і рекомендаціях, власники магазинів і виробники продукції при плануванні своєї діяльності.

Проте середнє значення не завжди точно (адекватно) відображає ситуацію. Наприклад, якщо в країні доходи різних верств населення дуже різняться, то середній дохід на одну людину для більшості жителів може не відображати їхнього матеріального стану.

Наприклад, у якійсь країні 100 жителів — дуже багаті, а решта 5 мільйонів — дуже бідні. Тоді показник середнього доходу може виявитися не низьким, а отже, неадекватно відображатиме загальну бідність населення.

У подібних випадках для аналізу даних використовують інші характеристики.

За допомогою прикладу 1 складемо таблицю, яка відображає кількість медалей кожного виду:

Золоті медалі	Срібні медалі	Бронзові медалі	Без медалей
33	55	42	14

Таку таблицю називають **частотною**, а числа, записані в другому рядку, — **частотами**.

Частота 55 показує, що українські школярі найчастіше завойовували срібні медалі. Показник «срібні медалі» називають **модою** отриманих даних.

Це слово всім добре знайоме. Ми часто говоримо: «увійти в моду», «вийти з моди», «данина моді». У повсякденному житті мода означає сукупність поглядів і уподобань, яким більшість віддає перевагу в даний момент часу.

Саме мода є найважливішою характеристикою тоді, коли отримана сукупність даних не є числовою множиною. Продемонструємо це на такому прикладі.

Одна відома фірма, яка планує постачати джинси в Україну, провела опитування репрезентативної вибірки, що складалася з 500 осіб. У результаті отримали таку частотну таблицю:

Розмір джинсів	XS	S	M	L	XL	XXL	XXXL
Частота	52	71	145	126	59	40	7
Відносна частота (у %)	10,4	14,2	29	25,2	11,8	8	1,4

У третьому рядку цієї таблиці записано відношення відповідної частоти до величини вибірки. Це відношення, записане у відсотках, називають **відносною частотою**. Наприклад, для розміру XS маємо:

$$\frac{52}{500}\cdot 100 = 10{,}4\ (\%).$$

Мода даної вибірки — це розмір M, і їй відповідає відносна частота 29 %.

Тим самим фірма отримала інформацію, що найбільшу частину обсягів постачання (приблизно 29 %) мають складати джинси розміру M.

Зауважимо, що якби в таблиці дві частоти були б рівні та набували найбільших значень, то модою були б два відповідних розміри.

Вище ми навели приклад, коли середнє значення не точно відображає матеріальний стан людей у країні. Більш повну характеристику можна отримати, якщо середнє значення доповнити результатом такого дослідження.

Утворюють репрезентативну вибірку, яка складається з людей даної країни, і отримують сукупність даних, яка складається з доходів. Далі відповідно до шкали, яка визначає рівень доходів (низький, середній, високий), розбивають отриманий ряд даних на три групи. Складають таблицю, до якої вносять значення частот і відносних частот:

Рівень доходів	Низький	Середній	Високий
Частота	m	n	k
Відносна частота	p %	q %	r %

Мода такої сукупності даних може характеризувати рівень доходів у країні.

Дослідження сукупності даних можна порівняти з роботою лікаря, який ставить діагноз. Залежно від скарг пацієнта або симптомів, що спостерігаються, лікар вибирає певну методику пошуку причини хвороби. Зрозуміло, що ця методика визначає точність діагнозу. Так само й у статистиці: залежно від зібраної інформації та способу її отримання застосовують різні методи її обробки. Ці методи можуть доповнювати один одного, якийсь із них може точніше (адекватніше), ніж інші, відображати конкретну ситуацію. Так, аналізуючи виступи українських школярів на міжнародних математичних олімпіадах, можна встановити, що статистичні характеристики середнє значення та мода вдало узгоджуються. А в прикладі, який визначає ходовий розмір джинсів, найбільш прийнятним є пошук моди.

Чим більшим є арсенал методик обробки даних, тим об’єктивніший висновок можна отримати.

Ознайомимося ще з однією важливою статистичною характеристикою.

Сім’я вирішила зробити ремонт на кухні та цікавиться, скільки коштує покласти один квадратний метр кахляної плитки. Вивчивши прейскурант 11 будівельних фірм, вони отримали таку інформацію (ціни записано в гривнях у порядку зростання):

80, 80, 90, 90, 100, 130, 180, 200, 300, 450, 500.

Сім'я хоче вибрати фірму із середніми цінами.

Середнє значення отриманої сукупності даних дорівнює 200.

Проте отримані дані показують, що ціну 200 грн скоріше можна віднести до високих, ніж до середніх.

Зазначимо, що число 130 стоїть посередині упорядкованої сукупності даних. Його називають **медіаною** цієї вибірки. У розглядуваній ситуації саме медіана допомагає вибрати фірму із середніми цінами. Справді, у послідовності з 11 чисел є п'ять менших від 130 і п'ять більших за 130.

Тепер розглянемо упорядковану сукупність даних, яка складається з парної кількості чисел, наприклад з восьми:

1, 4, 4, 7, 8, 15, 24, 24.

Тут «серединою» вибірки є одразу два числа: 7 і 8. Вважають, що медіана такої вибірки дорівнює їхньому середньому арифметичному: $\frac{7+8}{2}=7{,}5.$

Середнє значення, моду та медіану називають **мірами центральної тенденції** отриманої сукупності даних.

ВПРАВИ

29.1.° Користуючись таблицею середніх річних температур повітря в окремих містах України, побудуйте відповідну стовпчасту діаграму.

Місто	Температура, °C	Місто	Температура, °C
Львів	7,8	Черкаси	7,7
Ужгород	10,1	Полтава	7,6
Київ	8,4	Донецьк	8,5
Суми	6,8	Луганськ	8,8
Одеса	10,7	Херсон	10,3
Миколаїв	10,0		

29.2.° Користуючись таблицею розвитку Київського метрополітену, побудуйте графік зростання довжини його ліній.

29.3.° Користуючись таблицею розвитку Київського метрополітену, побудуйте графік збільшення кількості його станцій.

Рік	Кількість станцій	Довжина ліній, км	Рік	Кількість станцій	Довжина ліній, км
1960	5	5,2	2000	40	51,4
1965	10	12,7	2004	43	56,3
1971	14	18,1	2008	46	59,8
1976	17	20,42	2010	49	63,6
1981	23	27,72	2011	50	65,08
1987	28	32,6	2012	52	66
1992	35	43,1	2013	53	67,5

29.4.° Визначте, чи є репрезентативною вибірка:

1) щоб дізнатись, як часто жителі міста у вихідні дні бувають на природі, було опитано членів трьох садових кооперативів;
2) з метою виявлення знання дев'ятикласниками напам'ять віршів Лесі Українки, випадковим чином було опитано 4 тисячі дев'ятикласників у різних регіонах країни;
3) для визначення відсотка користувачів Інтернету в Україні випадковим чином опитали 500 киян;
4) для з'ясування рейтингу молодіжної телепрограми випадковим чином було опитано 10 тисяч юнаків і дівчат у віці від 15 до 20 років.

29.5.° Знайдіть міри центральної тенденції сукупності даних:

1) 3, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 10;
2) 12, 13, 14, 16, 18, 18, 19, 19, 19.

29.6.° Дівчата 9 класу на уроці фізкультури здавали залік зі стрибків у висоту. Учитель записав таку послідовність результатів: 105 см, 65 см, 115 см, 100 см, 105 см, 110 см, 110 см, 115 см, 110 см, 100 см, 115 см.
Знайдіть середнє значення та медіану отриманих даних.

29.7.• Класний керівник 9 класу веде облік відвідування учнями занять. Наприкінці тижня його записи мали такий вигляд:

День тижня	Понеділок	Вівторок	Середа	Четвер	П'ятниця
Кількість відсутніх	3	2	5	4	8

1) Знайдіть, скільки учнів були відсутніми в середньому в день протягом цього тижня.
2) Знайдіть моду отриманих даних.

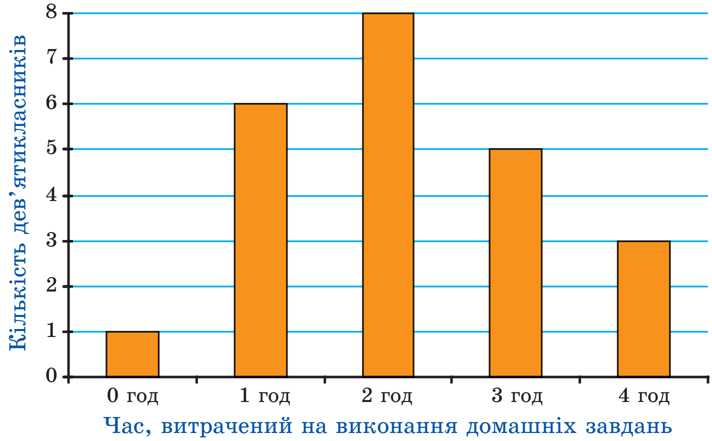


Рис. 29.4

29.8.$^{\bullet}$ У 9 класі, у якому навчається 23 учні, провели опитування: скільки приблизно годин на день витрачає дев'ятикласник на виконання домашніх завдань. Відповіді учнів подано у вигляді гістограми (рис. 29.4).

1) Заповніть частотну таблицю:

Час, витрачений на виконання домашніх завдань, год	0	1	2	3	4
Частота					
Відносна частота					

2) Скільки часу на день у середньому витрачає учень цього класу на виконання домашнього завдання? (Знайдіть середнє значення ряду даних.)

3) Скільки часу на виконання домашнього завдання витрачає більшість дев'ятикласників цього класу? (Знайдіть моду ряду даних.)

29.9.$^{\bullet}$ На рисунку 29.5 зображено стовпчасту діаграму результатів письмової роботи з алгебри у трьох дев'ятих класах.

1) Заповніть частотну таблицю:

Кількість балів	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Частота												
Відносна частота												

2) Знайдіть середній бал, отриманий учнями за цю письмову роботу.

3) Знайдіть моду отриманих даних.

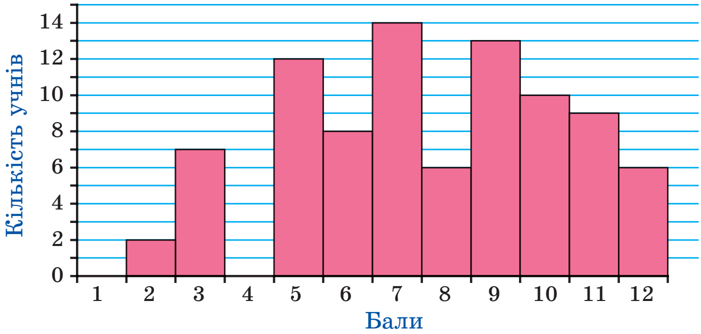


Рис. 29.5

29.10.° За результатами останньої контрольної роботи з алгебри, яка була проведена у вашому класі, заповніть частотну таблицю, наведену в задачі 29.9.

1) Знайдіть середній бал, отриманий учнями за цю контрольну роботу.
2) Знайдіть моду отриманих даних.

29.11.° Учнів однієї херсонської школи опитали, скільки разів у житті вони літали на літаку. Отримані дані наведено в таблиці:

Кількість здійснених польотів	0	1	2	3	4	5
Кількість учнів	530	92	46	30	8	4
Відносна частота (%)						

1) Заповніть третій рядок таблиці.
2) Подайте отримані дані у вигляді стовпчастої діаграми.
3) Знайдіть моду та середнє значення отриманих даних.
4) Поясніть, чи можна вважати вибірку, що розглядається, репрезентативною для висновків щодо всіх школярів м. Херсона.

29.12.° Випишіть усі ваші оцінки з алгебри, отримані протягом року. Знайдіть середнє значення, моду та медіану отриманого ряду даних.

29.13.° Директор фірми отримує 50 000 грн на місяць, два його заступники — по 20 000 грн, а решта 17 робітників фірми — по 4500 грн на місяць. Знайдіть середнє значення, моду, медіану заробітних плат у цій фірмі.

29.14.$^{\bullet}$ Прочитайте один із найвідоміших віршів Т. Г. Шевченка:

Садок вишневий коло хати,
Хрущі над вишнями гудуть,
Плугатарі з плугами йдуть,
Співають ідучи дівчата,
А матері вечерять ждуть.

Сім'я вечеря коло хати,
Вечірня зіронька встає.
Дочка вечерять подає,
А мати хоче научати,
Так соловейко не дає.

Поклала мати коло хати
Маленьких діточок своїх;
Сама заснула коло їх.
Затихло все, тільки дівчата
Та соловейко не затих.[1]

Для букв «а», «е», «і», «ї», «н», «о», «р», «у», «ф», «я» складіть частотну таблицю їх наявності в поданому вірші. Визначте моду отриманих даних.

29.15.$^{\bullet}$ Протягом травня 2016 р. температура повітря в Києві о 8 год ранку становила:

Дата	Температура, °C	Дата	Температура, °C	Дата	Температура, °C
01.05.2016	13,1	11.05.2016	17,8	21.05.2016	14,0
02.05.2016	15,3	12.05.2016	15,0	22.05.2016	16,9
03.05.2016	15,7	13.05.2016	16,6	23.05.2016	18,7
04.05.2016	15,4	14.05.2016	12,6	24.05.2016	17,4
05.05.2016	16,2	15.05.2016	13,1	25.05.2016	16,1
06.05.2016	13,1	16.05.2016	13,5	26.05.2016	16,8
07.05.2016	10,5	17.05.2016	8,8	27.05.2016	20,1
08.05.2016	14,2	18.05.2016	12,4	28.05.2016	19,2
09.05.2016	15,5	19.05.2016	9,5	29.05.2016	20,7
10.05.2016	17,5	20.05.2016	10,8	30.05.2016	17,3
				31.05.2016	17,4

Знайдіть міри центральної тенденції отриманих даних.

[1] Т. Г. Шевченко. Твори у 12 т. Інститут літератури ім. Т. Г. Шевченка Академії наук України. — К. : Наукова думка, 2003. — Т. 2. — С. 17.

29.16.• Побудуйте ряд: 1) з п'яти чисел; 2) із шести чисел, у якого:
а) середнє значення дорівнює медіані;
б) середнє значення більше за медіану.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 6

Метод математичної індукції

Нехай потрібно довести, що деяке твердження є правильним для будь-якого натурального значення n.

Доведення цього факту методом математичної індукції складається з двох частин (теорем):

1) доводять (перевіряють) справедливість твердження для $n = 1$ (база індукції);
2) роблять припущення, що твердження є правильним для $n = k$, і на підставі цього доводять, що воно є правильним для $n = k + 1$ (індуктивний перехід).

Правило суми

Якщо множини A і B такі, що $n(A) = m$, $n(B) = k$, $A \cap B = \varnothing$, то вибір «a або b», де $a \in A$, $b \in B$, можна здійснити $m + k$ способами.

Правило добутку

Якщо елемент a можна вибрати m способами та після кожного такого вибору елемент b можна вибрати k способами, то вибір «a і b» у вказаному порядку, тобто вибір упорядкованої пари $(a; b)$, можна здійснити mk способами.

Упорядкована множина

Множину M, яка складається з n елементів $(n \in \mathbb{N})$, називають упорядкованою, якщо між нею та множиною, яка складається з перших n натуральних чисел, установлено взаємно однозначну відповідність.

Перестановки, розміщення, комбінації

Перестановкою скінченної множини M називають будь-яку упорядковану множину, утворену з усіх елементів множини M.
$P_n = n!$

Будь-яку k-елементну впорядковану підмножину даної n-елементної множини називають розміщенням з n елементів по k елементів.

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+1); \quad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Будь-яку k-елементну підмножину заданої n-елементної множини називають сполукою (комбінацією) з n елементів по k елементів.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}; \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Класичне означення ймовірності

Якщо випробування може закінчитися одним з n рівноможливих результатів, з яких m приводять до настання події A, то ймовірністю події A називають відношення $\frac{m}{n}$.

Міри центральної тенденції сукупності даних

Середнє значення, мода та медіана.

§ 7 ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

- Предметом вивчення цього параграфа є функції, областю визначення яких є множина натуральних чисел або підмножина її перших n чисел. Ви вивчите властивості цих функцій, ознайомитеся зі способами їх задання, а також з їх окремими видами — арифметичною та геометричною прогресіями.
- Навчитеся знаходити члени прогресій, обчислювати суми n перших їхніх членів, записувати нескінченні періодичні десяткові дроби у вигляді звичайних дробів.

30. Числові послідовності

Часто в повсякденному житті нам трапляються об'єкти, з якими зручно мати справу, якщо їх попередньо пронумерувати. Наприклад, номери мають місяці та квартали року, дні тижня, під'їзди та квартири будинку, вагони поїзда, і навіть кожному учневі вашого класу присвоєно свій порядковий номер у класному журналі.

Об'єкти, які пронумеровано поспіль натуральними числами 1, 2, 3, ..., n, ..., утворюють **послідовності**.

Так, можна говорити про послідовності сторінок книги, букв слова, поверхів будинку тощо.

Об'єкти, які утворюють послідовність, називають **членами послідовності**. Кожний член послідовності має свій номер. Наприклад, січень — це **перший член** послідовності місяців року, число 3 — **другий член** послідовності простих чисел. Узагалі, якщо член послідовності має номер n, то його називають ***n*-м членом послідовності**.

Якщо членами послідовності є числа, то таку послідовність називають **числовою**.

Наведемо приклади числових послідовностей.

1, 2, 3, 4, 5, ... — послідовність натуральних чисел;

2, 4, 6, 8, 10, ... — послідовність парних чисел;

0,3; 0,33; 0,333; ... — послідовність десяткових наближень дробу $\frac{1}{3}$;

19, 38, 57, 76, 95 — послідовність двоцифрових чисел, кратних 19;

−1, −2, −3, −4, −5, ... — послідовність від'ємних цілих чисел.

Надалі ми розглядатимемо тільки числові послідовності.

Послідовності бувають **скінченними** і **нескінченними**. Наприклад, послідовність парних натуральних чисел — це нескінченна послідовність, а послідовність двоцифрових чисел, кратних 19, — це скінченна послідовність.

Для позначення членів послідовності використовують букви з індексами:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_n,\ \dots\ .$$

Індекс указує порядковий номер члена послідовності. Для позначення самої послідовності використовують записи виду (a_n), (b_n), (c_n) і т. д. Наприклад, послідовність простих чисел можна позначити так: (p_n). Маємо: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ і т. д.

Послідовність вважають заданою, якщо вказано правило, за допомогою якого можна знайти будь-який її член.

Якщо правило описано словами, то такий спосіб задання послідовності називають **описовим**. Наведемо приклад послідовності, заданої описово.

Кожний член послідовності дорівнює остачі при діленні його номера на 3. Випишемо кілька перших членів цієї послідовності:

$$1,\ 2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 0,\ 1,\ \dots\ .$$

Якщо послідовність є скінченною, то її можна задати за допомогою таблиці. Наприклад, наведена таблиця задає послідовність кубів одноцифрових натуральних чисел:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Ми навели приклад послідовності, заданої **таблично**.

Послідовність можна задати за допомогою формули. Наприклад, рівність $x_n = 2^n$, де змінна n набуває всіх натуральних значень, задає послідовність (x_n) натуральних степенів числа 2. Ми задали цю послідовність за допомогою **формули *n*-го члена**. Випишемо кілька перших членів цієї послідовності:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ \dots\ .$$

Розглянемо кілька прикладів задання послідовності за допомогою формули n-го члена.

Формула $a_n = 2n - 1$ задає послідовність натуральних непарних чисел:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \dots\ .$$

Формула $y_n = (-1)^n$ задає послідовність (y_n), у якої всі члени з непарними номерами дорівнюють -1, а всі члени з парними номерами дорівнюють 1:

$$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \dots\ .$$

Формула $c_n = 7$ задає послідовність (c_n), усі члени якої дорівнюють числу 7:

$$7,\ 7,\ 7,\ 7,\ 7,\ \dots .$$

Послідовність, усі члени якої рівні, називають **стаціонарною**.

Наведені способи задання послідовностей допомагають простежити зв'язок між поняттями «функція» і «послідовність».

Розглянемо функцію $y = f(x)$, областю визначення якої є множина натуральних чисел або множина n перших натуральних чисел. Тоді функція f задає нескінченну послідовність $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$, ... або скінченну послідовність $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$. Можна сказати, що *нескінченна послідовність являє собою функцію, областю визначення якої є множина* $\mathbb{N}$, *а скінченна послідовність, що складається з* n *членів, — це функція, область визначення якої — множина* n *перших натуральних чисел.* Іншими словами, *нескінченна послідовність — це відображення множини* $\mathbb{N}$ *на деяку непорожню множину* A, *а скінченна послідовність — це відображення множини* $\{1, 2, ..., n\}$ *на деяку непорожню множину* B.

Наприклад, функцію $y = x^2$, $D(y) = \mathbb{N}$, можна розглядати як послідовність квадратів натуральних чисел:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \dots .$$

Також можна сказати, що, наприклад, стаціонарна послідовність 7, 7, 7, 7, ... — це відображення множини $\mathbb{N}$ на множину $\{7\}$.

Нерідко послідовність задають правилом, яке дає змогу знайти наступний член, знаючи попередній.

Розглянемо послідовність (a_n), задану описово таким чином: перший член якої дорівнює 1, а кожний наступний член послідовності в 3 рази більший за попередній. Маємо:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ \dots .$$

Цю саму послідовність також можна визначити за допомогою таких умов:

$$a_1 = 1 \text{ і } a_{n+1} = 3a_n \text{ для будь-якого } n \in \mathbb{N}.$$

Ці рівності вказують перший член послідовності та правило, користуючись яким за кожним членом послідовності можна знайти наступний за ним член. Маємо:

$$\begin{aligned} &a_1 = 1, \\ &a_2 = 3a_1 = 3, \\ &a_3 = 3a_2 = 9, \\ &a_4 = 3a_3 = 27 \text{ і т. д.} \end{aligned}$$

Формулу, яка виражає член послідовності через один або кілька попередніх членів, називають **рекурентною формулою** (від латин. *recurro* — повертатися). У наведеному прикладі це формула

$a_{n+1} = 3a_n$, де n — будь-яке натуральне число. Умови, які визначають перший або кілька перших членів, називають **початковими умовами**. У розглядуваному прикладі початкова умова — це рівність $a_1 = 1$. Спосіб задання послідовності за допомогою початкових умов і рекурентної формули називають **рекурентним способом** задання послідовності[1].

Зазначимо, що знання лише рекурентної формули не дає змогу задати послідовність. Мають бути ще вказані початкові умови.

При рекурентному способі задання послідовності перший або кілька перших членів послідовності є заданими, а всі інші обчислюють один за одним. Із цієї точки зору спосіб задання послідовності формулою n-го члена видається більш зручним: за його допомогою можна одразу знайти потрібний член послідовності, знаючи лише його номер.

ПРИКЛАД 1 Послідовність (c_n) задано формулою n-го члена $c_n = 37 - 3n$. Чи є членом цієї послідовності число: 1) 19; 2) −7? У разі ствердної відповіді вкажіть номер цього члена.

Розв'язання. 1) Якщо число 19 є членом даної послідовності, то існує таке натуральне значення n, при якому виконується рівність $37 - 3n = 19$. Звідси $3n = 18$; $n = 6$. Отже, число 19 є шостим членом послідовності (c_n).

2) Маємо: $37 - 3n = -7$; $3n = 44$; $n = 14\frac{2}{3}$. Оскільки число $14\frac{2}{3}$ не є натуральним, то число −7 не є членом даної послідовності.

Відповідь: 1) Так, $n = 6$; 2) ні. ◄

ПРИКЛАД 2 Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 15$, $a_{n+1} = 7a_n + 1$. Чи може число 1001 бути членом цієї послідовності?

Розв'язання. Кожний член послідовності (a_n) є цілим числом, яке при діленні на 7 дає в остачі 1. Оскільки число 1001 ділиться націло на 7, то воно не може бути членом цієї послідовності. ◄

ПРИКЛАД 3 Послідовність (a_n) задано формулою n-го члена $a_n = \frac{n+1}{n}$. Задайте її рекурентно.

Розв'язання. Маємо: $a_1 = 2$. У формулі n-го члена виразимо n через a_n. Маємо: $na_n = n + 1$; $n(a_n - 1) = 1$. Оскільки $a_n \neq 1$, то можна записати: $n = \frac{1}{a_n - 1}$.

[1] У цьому параграфі в записі рекурентних формул припускатимемо, що n може набувати будь-яких натуральних значень.

Маємо: $a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{\dfrac{1}{a_n - 1} + 2}{\dfrac{1}{a_n - 1} + 1} = \dfrac{2a_n - 1}{a_n}.$

Відповідь: $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n - 1}{a_n}$. ◄

ПРИКЛАД 4 Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 5$, $a_2 = 13$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Доведіть, що цю послідовність можна задати формулою n-го члена $a_n = 2^n + 3^n$.

Розв'язання. Доведення проведемо методом математичної індукції.

При $n = 1$ отримуємо: $a_1 = 5 = 2^1 + 3^1$; при $n = 2$ отримуємо: $a_2 = 13 = 2^2 + 3^2$, тобто теорема «база індукції» є правильною.

Нехай $a_k = 2^k + 3^k$ і $a_{k+1} = 2^{k+1} + 3^{k+1}$. Маємо:

$$a_{k+2} = 5a_{k+1} - 6a_k = 5 \cdot 2^{k+1} + 5 \cdot 3^{k+1} - 6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k =$$
$$= 5 \cdot 2^k \cdot 2 + 5 \cdot 3^k \cdot 3 - 6 \cdot 2^k - 6 \cdot 3^k =$$
$$= 4 \cdot 2^k + 9 \cdot 3^k = 2^{k+2} + 3^{k+2}.$$

Тим самим доведено теорему «індуктивний перехід».

Отже, $a_n = 2^n + 3^n$ для будь-якого натурального n. ◄

ПРИКЛАД 5 Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + 1}{a_n}$. Знайдіть a_{1000}.

Розв'язання. Запишемо кілька перших членів послідовності:

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3,\ a_4 = 2,\ a_5 = 1,\ a_6 = 1,\ a_7 = 2.$$

У даній послідовності кожний член, починаючи з третього, однозначно визначається двома попередніми членами. Ми бачимо, що $a_6 = a_1$ і $a_7 = a_2$. Отже, не проводячи подальших обчислень, можна зробити висновок, що $a_8 = a_3$, $a_9 = a_4$, $a_{10} = a_5$ і, узагалі, $a_{n+5} = a_n$ для будь-якого натурального n. Про таку послідовність говорять, що вона є **періодичною** з періодом, який дорівнює 5. У цій послідовності члени, номери яких конгруентні за модулем 5, рівні. Звідси $a_{1000} = a_5 = 1$. ◄

?

1. Що утворюють об'єкти, які пронумеровано поспіль натуральними числами?
2. Як називають об'єкти, які утворюють послідовність?
3. Як називають член послідовності, який має номер n?

4. Яку послідовність називають числовою?
5. У якому разі послідовність вважають заданою?
6. Які способи задання послідовності ви знаєте?
7. Поясніть, що таке формула n-го члена послідовності.
8. Який зв'язок між поняттями «функція» і «послідовність»?
9. Поясніть, що таке рекурентна формула.

ВПРАВИ

30.1.° Запишіть у порядку зростання п'ять перших членів послідовності:
1) двоцифрових чисел, кратних числу 4;
2) неправильних звичайних дробів із чисельником 11;
3) натуральних чисел, що дають при діленні на 8 остачу 5.
Укажіть, скінченними чи нескінченними є ці послідовності.

30.2.° Знайдіть чотири перших члени послідовності (a_n), заданої формулою n-го члена:

1) $a_n = 4n - 3$; 2) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$; 3) $a_n = \frac{2^n}{n}$; 4) $a_n = \left\{n + \frac{1}{2}\right\}$.

30.3.° Знайдіть другий, сьомий і сотий члени послідовності (b_n), заданої формулою n-го члена:

1) $b_n = n^2 + 2n$; 2) $b_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$; 3) $b_n = \left[n + \frac{1}{2}\right]$.

30.4.° Послідовність (c_n) задано формулою n-го члена $c_n = (-1)^n \cdot 5$. Знайдіть: 1) c_1; 2) c_8; 3) c_{2k}; 4) c_{2k+1}.

30.5.° Знайдіть п'ять перших членів послідовності (a_n), якщо:

1) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3$;
2) $a_1 = -2$, $a_2 = 6$, $a_{n+2} = 3a_n + a_{n+1}$;
3) $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

30.6.° Знайдіть п'ять перших членів послідовності (b_n), якщо:

1) $b_1 = 18$, $b_{n+1} = -\frac{b_n}{3}$;
2) $b_1 = -1$, $b_2 = 2$, $b_{n+2} = b_n^2 + 2b_{n+1}$;
3) $b_1 = -1$, $b_{n+1} = \frac{1}{b_n}$.

30.7.° Послідовність (a_n) задано формулою n-го члена $a_n = 7n + 2$. Чи є членом цієї послідовності число: 1) 149; 2) 47? У разі ствердної відповіді вкажіть номер цього члена.

30.8.° Послідовність (b_n) задано формулою n-го члена $a_n = 7n + 2$. Чи є членом цієї послідовності число: 1) 16; 2) 77? У разі ствердної відповіді вкажіть номер цього члена.

30.9.° Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3$. Чи є членом цієї послідовності число 999?

30.10.° Послідовність (b_n) задано рекурентно: $b_1 = 2$, $b_{n+1} = 2b_n$. Чи є членом цієї послідовності число 1024?

30.11.° Скільки від'ємних членів містить послідовність (x_n), задана формулою n-го члена $x_n = 6n - 50$?

30.12.° Знайдіть номер першого від'ємного члена послідовності (y_n), заданої формулою n-го члена $y_n = 38 - 3n$.

30.13.• Послідовність (a_n) задано формулою n-го члена $a_n = n^2 - 3n - 8$. Знайдіть номери членів цієї послідовності, які менші від 10.

30.14.• Послідовність (b_n) задано формулою n-го члена $b_n = -n^2 + 15n - 20$. Скільки членів цієї послідовності більші за 16?

30.15.• Підберіть одну з можливих формул n-го члена послідовності, першими членами якої є числа:

1) 1, 4, 9, 25, ...;
2) 5, 8, 11, 14, 17, ...;
3) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$;
4) 0, 2, 0, 2, 0, ...;
5) $0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \dots$;
6) $2, 0, \frac{2}{3}, 0, \frac{2}{5}, 0, \frac{2}{7}, 0, \dots$.

30.16.• Підберіть одну з можливих формул n-го члена послідовності, першими членами якої є числа:

1) 2, 9, 28, 65, 126, ...;
2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \dots$;
3) $-2, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{6}{5}, -\frac{5}{6}, \dots$;
4) $1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \frac{1}{7}, \dots$;
5) $-1, 1, 3, 3, 3, \dots$.

30.17.• Послідовність (a_n) задано рекурентно: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \left[\sqrt{a_n}\right]$. Знайдіть a_{2010}.

30.18.• Послідовність (a_n) задано формулою n-го члена. Задайте її рекурентно:

1) $a_n = 2n - 3$;
2) $a_n = \frac{n}{n+2}$;
3) $a_n = n^2$.

30.19.• Послідовність (a_n) задано формулою n-го члена. Задайте її рекурентно:

1) $a_n = n$;
2) $a_n = \frac{1}{n+1}$;
3) $a_n = \sqrt{n}$.

30.20.•• Чи існують такі значення a, при яких послідовність є стаціонарною:

1) $x_1 = a,\ x_{n+1} = x_n^2 - 4x_n + 6$; 2) $x_1 = a,\ x_{n+1} = x_n^2 - 3x_n + 5$?

30.21.•• Знайдіть сто перший член послідовності (a_n), якщо $a_1 = 1$, $a_2 = 2,\ a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

30.22.•• Знайдіть сто перший член послідовності (a_n), якщо $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$.

30.23.•• Послідовність задано рекурентно: $a_1 = 7$, $a_2 = 25$, $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n$. Доведіть, що всі члени цієї послідовності при діленні на 3 дають в остачі 1.

30.24.•• Послідовність задано рекурентно: $a_1 = 5$, $a_{n+1} = 4a_n - 3$. Доведіть, що всі члени цієї послідовності з непарними номерами діляться націло на 5.

30.25.•• Послідовність задано рекурентно: $a_1 = 8$, $a_{n+1} = 7a_n - 6$. Доведіть, що всі члени цієї послідовності при діленні на 3 дають в остачі 2.

30.26.•• Послідовність задано рекурентно: $a_1 = 7$, $a_2 = 29$, $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 10a_n$. Доведіть, що $a_n = 2^n + 5^n$.

30.27. Послідовність задано рекурентно: $a_1 = 4$, $a_{n+1} = 2a_n - 3$. Доведіть, що $a_n = 2^{n-1} + 3$.

30.28.•• Знайдіть формулу n-го члена послідовності, заданої рекурентно:

1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$;

2) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}$;

3) $a_1 = 0,\ a_{n+1} = a_n + 2\sqrt{a_n + 1} + 1$.

30.29.•• Послідовність задано рекурентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 8n$. Доведіть, що будь-який член цієї послідовності є квадратом натурального числа.

30.30.* Послідовність задано рекурентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + n$. Доведіть, що в цій послідовності всі члени, крім першого, не є квадратами натуральних чисел.

30.31.* Для послідовності (x_n) справедлива така рекурентна формула: $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$. Знайдіть всі значення x_1, при яких виконується рівність $x_1 = x_{1000}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

30.32. З міста виїхав мікроавтобус. Через 10 хв після нього із цього міста виїхав у тому самому напрямі легковий автомобіль, який наздогнав мікроавтобус на відстані 40 км від міста. Знайдіть швидкість мікроавтобуса, якщо вона на 20 км/год менша від швидкості легкового автомобіля.

30.33. Знайдіть усі значення параметра a, при яких множина розв'язків системи нерівностей $\begin{cases} x^2 - x - 6 < 0, \\ x > a \end{cases}$ містить рівно три цілих числа.

30.34. Числа p і $10p^2 + 11$ є простими. Знайдіть число p.

30.35. Розв'яжіть нерівність $(x^2 - 9)\sqrt{x^2 - 6x + 5} \geqslant 0$.

Про кролів, соняшники, соснові шишки та золотий переріз

Розглянемо послідовність (u_n), яку задано рекурентно такими співвідношеннями:

$$u_1 = u_2 = 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Запишемо кілька її перших членів:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \ldots .$$

Члени цієї послідовності називають **числами Фібоначчі**. Така назва пов'язана з тим, що італійський математик Леонардо Пізанський (Фібоначчі), розв'язуючи популярну у XII ст. задачу про чисельність потомства пари кролів, першим звернув увагу на чудові

Леонардо Пізанський (Фібоначчі)
(12–13 ст.)

Італійський математик. Подорожуючи країнами Сходу, ознайомився з досягненнями арабських математиків і сприяв поширенню цих знань у Європі. Його основні праці: «Liber Abaci» (1202) — трактат про арифметику й алгебру, «Practica Geometriae» (1220) започаткували застосування алгебраїчних методів у геометрії.

властивості цієї послідовності. У цій задачі чисельність потомства кролів збільшується так: кожна доросла пара кролів щомісяця приносить пару кроленят, які через місяць також починають приносити потомство. На рисунку 30.1 кількість пар кролів відповідає послідовності чисел Фібоначчі.

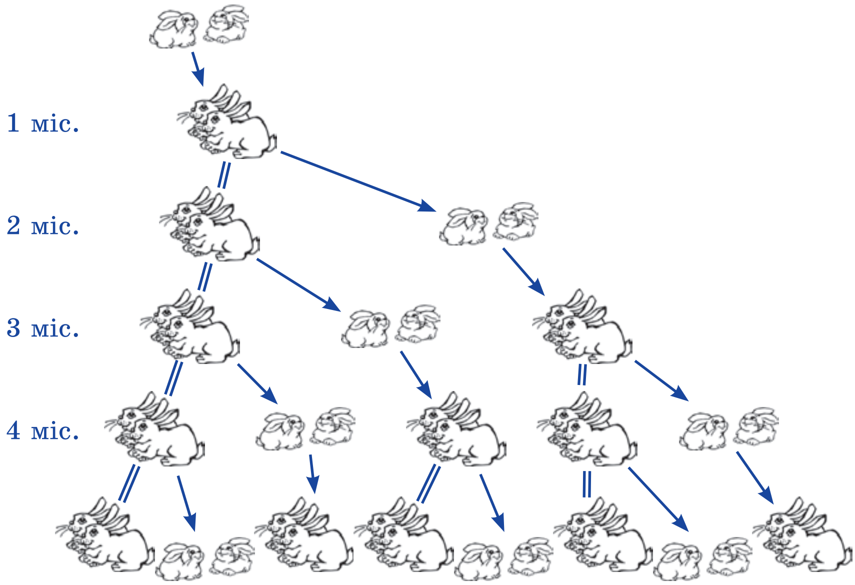


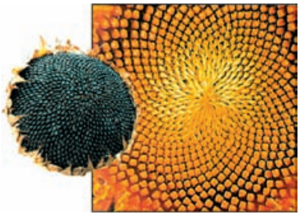
Рис. 30.1

На числа Фібоначчі можна натрапити в різних ситуаціях. Уявіть собі, що ви йдете доріжкою, вимощеною квадратними плитками в один ряд, ступаючи кожного разу на наступну плитку або через одну. У цьому разі кількість способів пройти доріжку з n плиток дорівнює n-му члену послідовності Фібоначчі (перевірте це самостійно, наприклад, для випадку $n = 8$).

Навіть деякі явища природи пов'язані із числами Фібоначчі.

Якщо подивитися на насіння в голівці соняшника або ромашки, то можна побачити, що зернятка розміщені у вигляді двох сімейств спіралей, які закручуються в протилежних напрямках. Кількість спіралей у цих сімействах є сусідніми членами послідовності Фібоначчі. Зазвичай для соняшника ці числа дорівнюють 34 і 55, проте трапляються й гіганти з 89 і 144 спіралями. Подібну властивість[1] можна виявити в структурі соснових шишок. Те саме явище

[1] У ботаніці таке сполучення двох сімейств спіралей називають філотаксисом.



спостерігається й на плодах ананаса, де спіралей, як правило, буває 8 і 13.

Числа Фібоначчі мають цілу низку цікавих властивостей.

Якщо в послідовності Фібоначчі для кожного $n \in \mathbb{N}$ обчислити відношення $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, то отримаємо послідовність 1; 2; 1,5; 1,(6); 1,6; 1,625; 1,(615384); 1,61(904761); … .

Цій послідовності притаманна така властивість: зі зростанням номерів її члени все менше й менше відрізняються від числа $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$.

Ще в давнину із цим числом люди пов'язували своє уявлення про красу та гармонію. Грецькі скульптори добре знали про відповідність правильних пропорцій людського тіла цьому магічному числу. І недаремно античні зодчі використовували його у своїх безсмертних творіннях. Так, відношення довжини Парфенона[1] до його висоти наближено дорівнює 1,618. Геній епохи Відродження Леонардо да Вінчі вважав, що з багатьох відношень, які використовує Творець, існує одне, єдине й неповторне. Саме його він назвав «золотим перерізом».

Розглянемо ще один приклад. Запишемо рівності:

$$1 = \frac{1}{1};\quad 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1};\quad 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1}} = \frac{3}{2};\quad 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}} = \frac{5}{3};\quad 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}} = \frac{8}{5};$$

$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}} = \frac{13}{8}$$ і т. д.

[1] Парфенон — храм в Афінах, побудований у V ст. до н. е.

Бачимо, що праві частини виписаних рівностей являють собою відношення двох сусідніх членів послідовності Фібоначчі.

Маємо: $1+\cfrac{1}{\cfrac{u_k}{u_{k-1}}}=1+\frac{u_{k-1}}{u_k}=\frac{u_k+u_{k-1}}{u_k}=\frac{u_{k+1}}{u_k}.$

Оскільки є справедливою рівність

$$1+\cfrac{1}{\cfrac{u_k}{u_{k-1}}}=\frac{u_{k+1}}{u_k},$$

то ми фактично методом математичної індукції довели, що

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

n «червоних» одиниць

Наведемо ще кілька властивостей, притаманних числам Фібоначчі:

1) $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_{n+2} - 1$;
2) $u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n-1} = u_{2n}$;
3) $u_2 + u_4 + u_6 + \ldots + u_{2n} = u_{2n+1} - 1$;
4) $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = u_n \cdot u_{n+1}$;
5) $u_n^2 = u_{n-1} \cdot u_{n+1} + (-1)^{n+1}$ і $n \geqslant 2$;
6) будь-яке натуральне число можна подати у вигляді суми кількох різних чисел Фібоначчі.

Використовуючи метод математичної індукції, доведіть ці властивості самостійно.

Французький учений Жак Біне (1786–1856) вказав формулу n-го члена послідовності Фібоначчі:

$$a_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Важко повірити, що ця формула задає натуральні числа. Проте це так.

31. Арифметична прогресія

Розглянемо такі послідовності:

2, 7, 12, 17, 22, 27, ...;

1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; ...;

3, 1, −1, −3, −5, −7, ...

Їм притаманна така характерна особливість: *кожний наступний член послідовності отримано в результаті додавання до попереднього одного й того самого числа*. Для першої послідовності це число дорівнює 5, для другої це число дорівнює 0,5, для третьої це число дорівнює −2.

З подібними послідовностями людям доводилося мати справу ще в давні часи, коли вони рахували предмети парами, отримуючи послідовність 2, 4, 6, ...; п'ятірками, отримуючи послідовність 5, 10, 15, ...; десятками, отримуючи послідовність 10, 20, 30, ... тощо. Такі послідовності називають **арифметичними прогресіями** (від латин. *progressio* — рух уперед).

Означення. Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додано одне й те саме число.

Число, про яке йдеться в означенні, дорівнює різниці наступного й попереднього членів послідовності. Його називають **різницею арифметичної прогресії** та позначають буквою d (першою буквою латинського слова *differentia* — різниця).

Отже, якщо (a_n) — арифметична прогресія з різницею d, то

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots,$$

тобто для будь-якого натурального n виконується рівність $a_{n+1} - a_n = d$. Звідси отримуємо рекурентну формулу

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Отже, арифметичну прогресію можна задати рекурентно:

$$\boxed{a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d}$$

Таким чином, *щоб задати арифметичну прогресію, потрібно вказати її перший член і різницю*.

Наведемо кілька прикладів.

Якщо $a_1 = 2$ і $d = 5$, то отримаємо арифметичну прогресію, подану на початку пункту:

2, 7, 12, 17, 22, 27, ...

Якщо $a_1 = 1$ і $d = 2$, то отримаємо арифметичну прогресію — послідовність непарних чисел:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots .$$

Стаціонарна послідовність є арифметичною прогресією, у якої $d = 0$. Наприклад, для послідовності 5, 5, 5, 5, ... маємо: $a_1 = 5$, $d = 0$.

Покажемо, як можна задати арифметичну прогресію за допомогою формули n-го члена.

З означення арифметичної прогресії (a_n) випливає:

$$a_2 = a_1 + d;$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + d \cdot 2;$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + d \cdot 2) + d = a_1 + d \cdot 3;$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + d \cdot 3) + d = a_1 + d \cdot 4.$$

Наведені приклади допомагають дійти такого індуктивного висновку:

$$\boxed{a_n = a_1 + d\,(n - 1)}$$

Цю гіпотезу можна довести методом математичної індукції (зробіть це самостійно).

Записану рівність називають **формулою n-го члена арифметичної прогресії**.

Розглянемо функцію $f(x) = kx + b$, у якої $D(f) = \mathbb{N}$ або $D(f) = \{1, 2, \ldots, n\}$. Вона є арифметичною прогресією з різницею, яка дорівнює k. Справді, $f(n + 1) - f(n) = k\ (n + 1) + b - (kn + b) = k$. Це означає, що послідовність $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$ — арифметична прогресія з різницею, яка дорівнює k.

Наприклад, кожна з послідовностей, заданих формулами $a_n = 7n - 2$, $b_n = -3n + 4$, $c_n = \sqrt{2}n + 1$, є арифметичною прогресією.

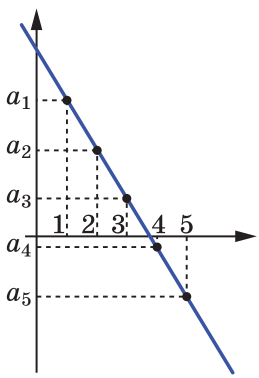


Рис. 31.1

Розглянута властивість має просту геометричну інтерпретацію: якщо точки координатної площини лежать на невертикальній прямій та їхні абсциси є послідовними натуральними числами, то їхні ординати є членами арифметичної прогресії (рис. 31.1).

Установимо важливу властивість членів арифметичної прогресії (a_n). З означення арифметичної прогресії випливає, що при $n > 1$ виконуються рівності $a_n - a_{n-1} = d$ і $a_{n+1} - a_n = d$. Звідси $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$. Тоді при $n > 1$ отримуємо:

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

Будь-який член арифметичної прогресії, крім першого, дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх із ним членів[1].

Правильним є й обернене твердження: *якщо в послідовності кожний член, крім першого (і останнього, якщо прогресія скінченна), дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх із ним членів, то ця послідовність є арифметичною прогресією*. Справді, з рівності $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ отримуємо: $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$; $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, тобто різниця наступного і попереднього членів даної послідовності є сталою. Це означає, що послідовність (a_n) — арифметична прогресія.

Довівши два взаємно обернених твердження, тим самим ми довели таку теорему.

Теорема 31.1. ***Послідовність, яка містить більше двох членів, є арифметичною прогресією тоді й тільки тоді, коли кожний її член, крім першого (і останнього, якщо послідовність скінченна), дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх із ним членів.***

ПРИКЛАД 1 Члени арифметичної прогресії (a_n) є цілими числами. Відомо, що $a_3 \cdot a_6 = 406$ і при діленні дев'ятого члена прогресії на четвертий член у частці отримуємо 2, а в остачі 6. Знайдіть перший член і різницю прогресії.

Розв'язання. Запишемо: $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$, $a_6 = a_1 + 5d$, $a_9 = a_1 + 8d$. Тоді з урахуванням умови можна скласти таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} (a_1 + 2d)(a_1 + 5d) = 406, \\ a_1 + 8d = 2(a_1 + 3d) + 6. \end{cases}$$

Цю систему можна розв'язати методом підстановки. Зробіть це самостійно. Отримуємо:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_1 = 4, \\ d = 5, \end{cases} \\ \begin{cases} a_1 = -\dfrac{79}{7}, \\ d = -\dfrac{37}{14}. \end{cases} \end{array}\right.$$

[1] Якщо арифметична прогресія є скінченною послідовністю, то її останній член такої властивості не має.

Оскільки за умовою члени послідовності (a_n) — цілі числа, то шуканою відповіддю буде $a_1 = 4$, $d = 5$. ◄

ПРИКЛАД 2 Чи можуть числа 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ бути членами однієї арифметичної прогресії?

Розв'язання. Припустимо, що числа 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ — члени арифметичної прогресії (a_n) з різницею d $(d \neq 0)$ і відповідно дорівнюють a_n, a_m, a_k. Тоді можна записати:

$$1 = a_1 + d(n-1),$$
$$\sqrt{2} = a_1 + d(m-1),$$
$$\sqrt{3} = a_1 + d(k-1).$$

Звідси $\sqrt{2} - 1 = d(m-n)$,

$$\sqrt{3} - 1 = d(k-n).$$

Оскільки $k \neq n$, то $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{m-n}{k-n}$.

Права частина цієї рівності є раціональним числом. Нескладно показати (зробіть це самостійно), що ліва частина рівності — число ірраціональне. Отже, отримана рівність є неправильною.

Таким чином, числа 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ не можуть бути членами однієї арифметичної прогресії. ◄

?

1. Яку послідовність називають арифметичною прогресією?
2. Яке число називають різницею арифметичної прогресії? Як позначають це число?
3. Як можна задати арифметичну прогресію рекурентно?
4. Що потрібно вказати, щоб задати арифметичну прогресію?
5. Який вигляд має формула n-го члена арифметичної прогресії?
6. Якими є необхідна і достатня умови того, що дана послідовність, яка містить більше двох членів, є арифметичною прогресією?

ВПРАВИ

31.1.° Серед поданих послідовностей укажіть арифметичні прогресії:

1) 3, −6, 12, −24;
2) 4, 8, 12, 16;
3) 5, 10, 5, 10;
4) 42, 39, 36, 33;
5) −5, −3, −1, 1;
6) 1,2; 1,3; 1,5; 1,6.

31.2.° Чи є арифметичною прогресією послідовність (у разі ствердної відповіді вкажіть різницю прогресії):

1) 24, 22, 20, 18;
2) 16, 17, 19, 23;
3) −3, 2, 7, 12?

31.3.° Перший член арифметичної прогресії $a_1 = 4$, а різниця $d = 0{,}4$. Знайдіть: 1) a_3; 2) a_{11}; 3) a_{32}.

31.4.° Перший член арифметичної прогресії $a_1 = 17$, а різниця $d = -2$. Знайдіть: 1) a_4; 2) a_{15}; 3) a_{60}.

31.5.° Знайдіть різницю та двісті перший член арифметичної прогресії 2,6; 2,9; 3,2; ... .

31.6.° Знайдіть різницю арифметичної прогресії (x_n), якщо $x_1 = 2$, $x_8 = -47$.

31.7.° Знайдіть перший член арифметичної прогресії (y_n), якщо $y_{17} = 22$, а різниця прогресії $d = 0{,}5$.

31.8.° Знайдіть формулу n-го члена арифметичної прогресії:

1) $-5, -7, -9, -11, \ldots$;
2) $2,\ 2\frac{1}{6},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{2},\ \ldots$;
3) $a^2, 2a^2, 3a^2, 4a^2, \ldots$;
4) $a + 3, a + 1, a - 1, a - 3, \ldots$.

31.9.° Чи є членом арифметичної прогресії (c_n):

1) число 20,4, якщо $c_1 = 11{,}4$, а різниця прогресії $d = 0{,}6$;
2) число 38, якщо $c_1 = 8$, а різниця прогресії $d = 1{,}4$?

У разі ствердної відповіді вкажіть номер цього члена.

31.10.° Знайдіть номер члена арифметичної прогресії 8,1; 8,5; 8,9; 9,3; ..., який дорівнює 13,7.

31.11.° Знайдіть другий член арифметичної прогресії, якщо перший і третій члени дорівнюють відповідно −6 і 12.

31.12.° Восьмий і десятий члени арифметичної прогресії дорівнюють відповідно 3,5 і 2,7. Чому дорівнює дев'ятий член прогресії?

31.13.° Знайдіть перший член арифметичної прогресії (b_n), якщо $b_5 = 11$, $b_{11} = -7$.

31.14.° Чому дорівнює різниця арифметичної прогресії (x_n), якщо $x_8 = 58$, $x_{15} = 16$?

31.15.° Чи є послідовність (a_n) арифметичною прогресією, якщо її задано формулою n-го члена:

1) $a_n = -6n + 3$; 2) $a_n = 2n^2 - n$; 3) $a_n = -2{,}8n$; 4) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$?

У разі ствердної відповіді вкажіть перший член і різницю прогресії.

31.16.° Чи є послідовність (a_n) арифметичною прогресією, якщо її задано формулою n-го члена:

1) $a_n = 6 + 7n$; 2) $a_n = \dfrac{2n-1}{5}$; 3) $a_n = \dfrac{1}{n} + 2$?

У разі ствердної відповіді вкажіть перший член і різницю прогресії.

31.17.° Як зміниться різниця скінченної арифметичної прогресії, якщо переставити її члени у зворотному порядку?

31.18.° Скільки додатних членів містить арифметична прогресія 5,2; 4,9; 4,6; ...?

31.19.° Який номер має перший додатний член арифметичної прогресії −10,2; −9,5; −8,8; ...?

31.20.° Знайдіть перший від'ємний член арифметичної прогресії 7,2; 6,6; 6; ... .

31.21.° Між числами −6 і 3 вставте п'ять таких чисел, щоб вони разом із даними числами утворювали арифметичну прогресію.

31.22.° Які чотири числа треба вставити між числами 4 і −5, щоб вони разом з даними числами утворювали арифметичну прогресію?

31.23.° Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_3 + a_7 = 30$ і $a_6 + a_{16} = 60$;

2) $a_4 + a_{10} = 36$ і $a_5 \cdot a_{11} = 340$.

31.24.° Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_5 + a_{12} = 41$ і $a_{10} + a_{14} = 62$;

2) $a_7 + a_{13} = -104$ і $a_2 \cdot a_6 = -240$.

31.25.° У яких випадках для членів арифметичної прогресії виконується рівність $a_1 a_4 = a_2^2$?

31.26.° Доведіть, що значення виразів $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, $(a - b)^2$ є послідовними членами арифметичної прогресії.

31.27.° Дано скінченну арифметичну прогресію $a_1, a_2, ..., a_n$. Доведіть, що $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$, $k \leqslant n$.

31.28.° Доведіть, що для арифметичної прогресії (a_n) справедлива рівність $a_n + a_k = a_{n-m} + a_{k+m}$, $n > m$.

31.29.° Чи є правильним твердження: якщо довжини сторін опуклого чотирикутника (рис. 31.2), узяті в послідовності a, b, d і c, утворюють арифметичну прогресію, то в цей чотирикутник можна вписати коло?

31.30.° Чи можуть утворювати арифметичну прогресію довжини сторін і периметр трикутника?

31.31.° Доведіть, що коли сторони прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію, то її різниця дорівнює радіусу вписаного кола трикутника.

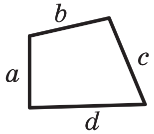


Рис. 31.2

31.32.° Величини кутів трикутника утворюють арифметичну прогресію. Яка градусна міра середнього за величиною кута трикутника?

31.33.° З арифметичної прогресії вилучили члени з непарними номерами. Чи утворюють члени, що залишилися, арифметичну прогресію?

31.34.° Дано дві нескінченні арифметичні прогресії. Якщо від кожного члена однієї прогресії відняти відповідний член другої, то чи буде утворена послідовність арифметичною прогресією?

31.35.° Якщо в арифметичній прогресії, різниця якої не дорівнює нулю, вилучити її члени, номери яких кратні 3, то чи буде утворена послідовність арифметичною прогресією?

31.36.° Кожний член арифметичної прогресії помножили на 4. Чи буде утворена послідовність арифметичною прогресією?

31.37.° Доведіть, що числа, які дорівнюють відповідно сумам кутів трикутника, чотирикутника, п'ятикутника й т. д., утворюють арифметичну прогресію.

31.38.° При якому значенні x значення виразів $x^2 - 4$; $5x + 3$ і $3x + 2$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

31.39.° При якому значенні y значення виразів $y^2 + 1$; $y^2 + y$ і $8y - 10$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

31.40.° При якому значенні y значення виразів $y^2 - 2y$; $3y + 5$; $4y + 13$ і $2y^2 - y + 25$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

31.41.° При якому значенні x значення виразів $3x + 4$; $2x + 3$; x^2 і $2x^2 + x$ будуть послідовними членами арифметичної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

31.42.°° Дано арифметичну прогресію (a_n), у якої $a_k = m$, $a_m = k$ $(m \neq k)$. Знайдіть a_{k+m}.

31.43.°° Доведіть, що коли додатні числа a, b і c — три послідовних члени арифметичної прогресії, то $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$.

31.44.°° Доведіть, що коли значення виразів $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ і $\frac{1}{a+b}$ є послідовними членами арифметичної прогресії, то значення виразів a^2, b^2 і c^2 також є послідовними членами арифметичної прогресії.

31.45.•• Доведіть, що коли числа a, b, c — три послідовних члени арифметичної прогресії, то значення виразів $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ також є послідовними членами арифметичної прогресії.

31.46.•• Знайдіть усі арифметичні прогресії з різницею 10, які складаються з простих чисел і мають не менше трьох членів.

31.47.•• Знайдіть усі арифметичні прогресії з різницею 2, які складаються з простих чисел і мають не менше трьох членів.

31.48.* Відомо, що нескінченна арифметична прогресія, членами якої є натуральні числа, містить квадрат натурального числа. Доведіть, що ця прогресія містить безліч членів, які є квадратами натуральних чисел.

31.49.* Числа a, b, a^2 є членами нескінченної арифметичної прогресії, яка складається з натуральних чисел. Відомо, що $a < b$. Доведіть, що число b^2 є членом цієї прогресії.

31.50.* Доведіть, що в нескінченній арифметичній прогресії, яка складається з натуральних чисел, знайдуться два члени, які мають однакову суму цифр.

31.51.* Доведіть, що арифметична прогресія (a_n), де $a_n = 3n + 2$, містить безліч простих чисел[1].

31.52.* Чи існує нестаціонарна нескінченна арифметична прогресія, яка складається з простих чисел?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

31.53. Дійсні числа x і y задовольняють умову $5x + 12y = 13$. Доведіть, що $x^2 + y^2 \geqslant 1$.

31.54. Перша труба заповнює водою резервуар, об’єм якого дорівнює 10 м³, на 5 хв швидше, ніж друга труба. Скільки кубічних метрів води проходить за годину через кожну трубу, якщо через першу за годину проходить на 10 м³ більше, ніж через другу?

31.55. При яких значеннях параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} ax + 2y = 3, \\ 8x + ay = a + 2 \end{cases}$$

не має розв’язків?

31.56. Знайдіть найбільше значення виразу $\dfrac{x^2}{9 + x^4}$.

---

[1] Ця задача є окремим випадком теореми Діріхле про арифметичну прогресію: ***арифметична прогресія, у якої перший член і різниця є взаємно простими натуральними числами, містить безліч простих чисел.***

32. Сума n перших членів арифметичної прогресії

Розглянемо скінченну арифметичну прогресію

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n.$$

Суму членів цієї прогресії позначимо S_n.

Маємо:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \qquad (*)$$

Виведемо формулу для знаходження цієї суми.

Спочатку розглянемо задачу, розв'язання якої підкаже, як вивести шукану формулу.

Розглянемо арифметичну прогресію

$$1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ 98,\ 99,\ 100$$

і знайдемо суму її членів.

Запишемо шукану суму двома способами:

$$+\begin{array}{rccccccccccc} S_{100} = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ S_{100} = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S_{100} = & \multicolumn{13}{c}{\underbrace{101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 + 101}_{100 \text{ доданків}}} \end{array}$$

Звідси $2S_{100} = 101 \cdot 100$; $S_{100} = 5050$.

Розповідають, що видатний німецький математик Карл Фрідріх Гаусс придумав таке розв'язання у віці 5 років.

Скористаємося описаним прийомом для знаходження суми (*).

Карл Фрідріх Гаусс
(1777–1855)

Запишемо суму S_n двома способами. Спочатку запишемо суму, перший доданок якої дорівнює a_1, а кожний наступний доданок отримано з попереднього додаванням різниці d. Потім запишемо суму, перший доданок якої дорівнює a_n, а кожний наступний доданок отримано з попереднього відніманням різниці d. Маємо:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots +$$
$$+ (a_1 + (n-2)\,d) + (a_1 + (n-1)\,d),$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots +$$
$$+ (a_n - (n-2)\,d) + (a_n - (n-1)\,d).$$

Додавши ці рівності, отримаємо:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n).$$

Вираз, записаний у правій частині останньої рівності, є сумою n доданків, кожний з яких дорівнює $a_1 + a_n$.

Тоді $2S_n = (a_1 + a_n)\, n$. Звідси

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

Отриману рівність називають **формулою суми n перших членів арифметичної прогресії.**

Цю формулу також можна отримати, скориставшися задачею 31.27 (зробіть це самостійно).

Підставивши до цієї формули замість a_n вираз $a_1 + d\,(n - 1)$, отримаємо:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d\,(n-1)}{2} \cdot n.$$

Звідси

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + d\,(n-1)}{2} \cdot n}$$

Останньою формулою зручно користуватися тоді, коли задано перший член і різницю прогресії.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які кратні 6.

Розв'язання. Дані числа утворюють арифметичну прогресію, перший член якої $a_1 = 102$, а різниця $d = 6$. Тоді $a_n = 102 + 6\,(n - 1) = 6n + 96$. Знайдемо кількість членів цієї прогресії. Оскільки $a_n < 1000$, то шукана кількість — це найбільший натуральний розв'язок нерівності $6n + 96 < 1000$. Маємо:

$$6n < 904;$$

$$n < 150\frac{2}{3}.$$

Отже, $n = 150$. Тепер знайдемо шукану суму:

$$S_{150} = \frac{2 \cdot 102 + 6 \cdot (150 - 1)}{2} \cdot 150 = 82\,350.$$

Відповідь: 82 350. ◄

ПРИКЛАД 2 Сума сімдесяти п'яти перших членів арифметичної прогресії дорівнює 450. Знайдіть тридцять восьмий член прогресії.

Розв'язання. Нехай перший член прогресії та її різниця дорівнюють a_1 і d відповідно. Тоді можна записати:

$$S_{75} = \frac{2a_1 + 74d}{2} \cdot 75 = 75(a_1 + 37d) = 450.$$

Оскільки $a_{38} = a_1 + 37d$, то шуканий член дорівнює:

$$a_{38} = 450 : 75 = 6.$$

Відповідь: 6. ◄

ПРИКЛАД 3 Доведіть, що послідовність, суму n перших членів якої можна обчислити за формулою $S_n = an^2 + bn$, де a і b — деякі числа, є арифметичною прогресією.

Розв'язання. Маємо:

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = a(n + 1)^2 + b(n + 1) - an^2 - bn = 2an + a + b.$$

Отримана рівність $a_{n+1} = 2an + a + b$ дає змогу зробити висновок, що послідовність a_2, a_3, ..., a_n, ... є арифметичною прогресією з різницею, яка дорівнює $2a$. Якщо ми покажемо, що $a_2 - a_1 = 2a$, то задачу буде розв'язано.

Маємо: $a_1 = S_1 = a + b$; $a_2 = 2a + a + b = 3a + b$. Тоді $a_2 - a_1 = 2a$.

Таким чином, ми встановили, що рівність $a_{n+1} - a_n = 2a$ виконується для будь-якого натурального n. Отже, послідовність a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... — арифметична прогресія. ◄

?

1. Як знайти суму n перших членів арифметичної прогресії, якщо відомо її перший і останній члени?
2. Як знайти суму n перших членів арифметичної прогресії, якщо відомо її перший член і різницю?

ВПРАВИ

32.1.° Чому дорівнює сума семи перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_1 = 9$ і $a_7 = 15$?

32.2.° Чому дорівнює сума шести перших членів арифметичної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 19$ і $b_6 = 14$?

32.3.° Знайдіть суму дванадцяти перших членів арифметичної прогресії, перший член якої $a_1 = -6$, а різниця $d = 4$.

32.4.° Обчисліть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії -8; -6; -4; ... .

32.5.° Місця в секторі цирку розташовано так, що в першому ряду 6 місць, а в кожному наступному на 3 місця більше, ніж у попередньому. Скільки місць у секторі, якщо в ньому 16 рядів?

32.6.° Дмитро взяв у бібліотеці книжку. За перший день він прочитав 40 сторінок, а кожного наступного дня читав на 10 сторінок більше, ніж попереднього. Скільки сторінок у книжці, якщо Дмитро прочитав її за 7 днів?

32.7.° Арифметичну прогресію (a_n) задано формулою n-го члена $a_n = -4n + 1$. Знайдіть суму тридцяти двох перших членів прогресії.

32.8.° Арифметичну прогресію (c_n) задано формулою n-го члена $c_n = 5n - 2$. Знайдіть суму двадцяти шести перших членів прогресії.

32.9.° Знайдіть суму дванадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо:

1) $a_1 = 6$, $a_9 = 22$;
2) $a_6 = 49$, $a_{20} = 7$.

32.10.° Чому дорівнює сума сорока перших членів арифметичної прогресії (x_n), якщо $x_8 = -14$, $x_{30} = -3$?

32.11.° Скільки ударів зробить годинник протягом доби, якщо він відбиває тільки кількість цілих годин від 1 до 12?

32.12.° Знайдіть суму двадцяти п'яти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_{10} = 44$, а різниця прогресії $d = 4$.

32.13.° Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_6 + a_8 - a_{14} = -17$ і $a_5 + a_{22} = 101$.

32.14.° Знайдіть суму тридцяти трьох перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_3 + a_5 + a_{13} = 33$ і $a_{15} - a_8 - a_{10} = -1$.

32.15.° Чому дорівнює сума n перших:

1) натуральних чисел;
2) непарних натуральних чисел?

32.16.° Чому дорівнює сума n перших парних натуральних чисел?

32.17.• При будь-якому натуральному n суму n перших членів деякої арифметичної прогресії можна обчислити за формулою $S_n = 3n^2 + 5n$. Знайдіть три перших члени цієї прогресії.

32.18.• При будь-якому натуральному n суму n перших членів деякої арифметичної прогресії можна обчислити за формулою $S_n = 9n - 2n^2$. Знайдіть сьомий член цієї прогресії.

32.19.• (*Стародавня єгипетська задача.*) Сто мір хліба треба розділити між п'ятьма людьми так, щоб другий отримав на стільки ж більше за першого, на скільки третій отримав більше за другого, четвертий більше за третього та п'ятий більше за четвертого. Окрім того, двоє перших повинні отримати в 7 разів менше, ніж троє останніх. Скільки треба дати кожному?

32.20.$^{\bullet}$ Яке натуральне число дорівнює сумі всіх попередніх йому натуральних чисел?

32.21.$^{\bullet}$ Знайдіть суму всіх від'ємних членів арифметичної прогресії −6,2; −5,9; −5,6; ... .

32.22.$^{\bullet}$ Знайдіть суму всіх додатних членів арифметичної прогресії 8,4; 7,8; 7,2; ... .

32.23.$^{\bullet}$ Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні 5 і не більші за 240.

32.24.$^{\bullet}$ Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні 4 і менші від 130.

32.25.$^{\bullet}$ Знайдіть суму всіх натуральних чисел, які кратні 12 і менші від 200.

32.26.$^{\bullet}$ Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які кратні 8.

32.27.$^{\bullet}$ Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які кратні 7.

32.28.$^{\bullet}$ Знайдіть різницю арифметичної прогресії, перший член якої дорівнює 8,5, а сума шістнадцяти перших членів становить 172.

32.29.$^{\bullet}$ Знайдіть перший член арифметичної прогресії, різниця якої дорівнює −4, а сума дев'яти перших членів становить −54.

32.30.$^{\bullet}$ Перший член арифметичної прогресії дорівнює −9, а різниця становить 6. Скільки треба взяти перших членів прогресії, щоб їхня сума дорівнювала 960?

32.31.$^{\bullet}$ Яку найменшу кількість послідовних непарних натуральних чисел, починаючи із числа 7, треба додати, щоб одержати суму, більшу за 315?

32.32.$^{\bullet}$ Чи може сума яких-небудь п'яти послідовних членів арифметичної прогресії 3, 7, 11, ... дорівнювати 135? У разі ствердної відповіді знайдіть ці члени.

32.33.$^{\bullet}$ Чи може сума яких-небудь чотирьох послідовних членів арифметичної прогресії 2, 8, 14, ... дорівнювати 176? У разі ствердної відповіді знайдіть ці члени.

32.34.$^{\bullet}$ Під час вільного падіння (без урахування опору повітря) тіло за першу секунду проходить 4,9 м, а за кожну наступну — на 9,8 м більше, ніж за попередню. Знайдіть час падіння тіла з висоти 490 м.

32.35.$^{\bullet}$ Сума непарних номерів сторінок книжки є непарним числом, яке більше за 400 і менше від 500. Скільки сторінок у книжці?

32.36.$^{\bullet}$ Знайдіть суму членів арифметичної прогресії з восьмого по двадцять шостий включно, якщо перший член прогресії дорівнює 24, а різниця прогресії дорівнює −8.

32.37.° Знайдіть суму членів арифметичної прогресії (x_n) з десятого по двадцять п'ятий включно, якщо $x_1 = -3$ і $x_{11} = 12$.

32.38.° Сума перших шести членів арифметичної прогресії дорівнює 39, а сума перших чотирнадцяти членів дорівнює −77. Знайдіть перший член і різницю прогресії.

32.39.° Перший член арифметичної прогресії дорівнює 100, а сума шести перших членів у 5 разів більша за суму наступних шести членів. Чому дорівнює різниця прогресії?

32.40.° Різниця арифметичної прогресії дорівнює 28, а сума п'яти перших членів у 4 рази менша від суми наступних шести членів. Чому дорівнює перший член прогресії?

32.41.° Дванадцятий член арифметичної прогресії дорівнює 30. Знайдіть суму двадцяти трьох перших членів прогресії.

32.42.° Знайдіть суму двадцяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), якщо $a_5 + a_{10} + a_{12} + a_{15} = 50$.

32.43.° Розв'яжіть рівняння:

1) $7 + 13 + 19 + \ldots + (6n + 1) = 480$, де n — натуральне число;
2) $5 + 8 + 11 + \ldots + x = 124$, де x — натуральне число.

32.44.° Розв'яжіть рівняння:

1) $11 + 19 + 27 + \ldots + (8n + 3) = 470$, де n — натуральне число;
2) $1 + 5 + 9 + \ldots + x = 630$, де x — натуральне число.

32.45.° Знайдіть перший член і різницю арифметичної прогресії, у якої середнє арифметичне n перших членів при будь-якому n дорівнює їхній кількості.

32.46.°° (*Задача Гіпсикла Александрійського*[1].) Доведіть, що в арифметичній прогресії з парною кількістю членів, яка складається із цілих чисел, сума другої половини більша за суму першої половини на число, яке кратне квадрату половини кількості членів.

32.47.°° Доведіть, що коли для будь-якого натурального n суму n перших членів послідовності можна обчислити за формулою $S_n = n^2 - 3n + 4$, то ця послідовність не є арифметичною прогресією.

32.48.°° Знайдіть суму всіх двоцифрових чисел, які не діляться націло ні на 3, ні на 5.

32.49.°° В арифметичній прогресії $S_m = S_n$, $m \neq n$. Знайдіть S_{m+n}.

32.50.°° В арифметичній прогресії $S_n = m$, $S_m = n$, $m \neq n$. Знайдіть S_{m+n}.

[1] Гіпсикл Александрійський (II ст. до н. е.) — давньогрецький учений, автор XIV книги «Начал» Евкліда.

32.51.[••] У скінченній арифметичній прогресії кількість членів є непарною. Сума членів, які стоять на місцях з парними номерами, дорівнює сумі членів, які стоять на місцях з непарними номерами. Знайдіть суму всіх членів цієї прогресії.

32.52.[*] У баскетбольному турнірі, який проходив в одне коло, брали участь n команд. Після закінчення турніру виявилося, що очки, набрані командами, утворюють нестаціонарну арифметичну прогресію. Скільки очок набрала команда, яка посіла останнє місце, якщо за перемогу в кожній зустрічі команда отримувала 2 очки, за поразку очки не нараховувались, а нічиїх у баскетболі немає?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

32.53. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}(x+2)(y+2)\,xy=9,\\ x+y-xy=1.\end{cases}$

32.54. Два автомобілі виїхали одночасно з міст A і B назустріч один одному. Через годину вони зустрілися і, не зупиняючись, продовжили рухатися з тією самою швидкістю. Один із них прибув у місто B на 50 хв пізніше, ніж другий — у місто A. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо відстань між містами становить 100 км.

32.55. Відомо, що ціле число n не кратне 3. Доведіть, що значення виразу n^2+8 кратне 3.

32.56. Знайдіть множину розв'язків нерівності $(a^2-1)\,x \leqslant a-1$ залежно від значення параметра a.

33. Геометрична прогресія

Розглянемо послідовності:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ \ldots,$$

$$2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots,$$

$$5;\ -0{,}5;\ 0{,}05;\ -0{,}005;\ 0{,}0005;\ \ldots\ .$$

Їм притаманна така характерна особливість: *кожний наступний член послідовності отримано в результаті множення попереднього члена на одне й те саме число*. Для першої послідовності це число дорівнює 3, для другої це число дорівнює $\frac{1}{2}$, для третьої це число дорівнює $-0{,}1$.

Такі послідовності називають **геометричними прогресіями**.

Означення. Геометричною прогресією називають послідовність, перший член якої відмінний від нуля, а кожний член, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число.

Число, про яке йдеться в означенні, дорівнює відношенню наступного й попереднього членів послідовності. Його називають **знаменником геометричної прогресії** та позначають буквою q (першою буквою французького слова *quotient* — частка).

Отже, якщо (b_n) — геометрична прогресія зі знаменником q, то

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \dots,$$

тобто для будь-якого натурального n виконується рівність $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Звідси отримуємо рекурентну формулу $b_{n+1} = b_n q$.

Таким чином, геометричну прогресію можна задати рекурентно:

$$\boxed{b_1 = b, \quad b_{n+1} = b_n q}$$

Отже, *щоб задати геометричну прогресію, потрібно вказати її перший член і знаменник.*

Наведемо кілька прикладів.

Якщо $b_1 = 1$ і $q = 3$, то отримаємо геометричну прогресію, подану на початку пункту:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ \dots .$$

Якщо $b_1 = 2$ і $q = 2$, то отримаємо геометричну прогресію, яка є послідовністю натуральних степенів числа 2:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256,\ 512,\ 1024,\ \dots .$$

Зауважимо, що геометрична прогресія зі знаменником, який дорівнює 1, є стаціонарною послідовністю. Так, послідовність 5, 5, 5, 5, ... є геометричною прогресією, у якої $b_1 = 5$, $q = 1$. Разом із цим цю послідовність можна розглядати як арифметичну прогресію, у якої $a_1 = 5$, $d = 0$.

Узагалі, будь-яка стаціонарна послідовність, усі члени якої відмінні від нуля, є одночасно і арифметичною, і геометричною прогресією. Стаціонарна послідовність 0, 0, 0, 0, ... є лише арифметичною прогресією.

Покажемо, як можна задати геометричну прогресію за допомогою формули n-го члена.

З означення геометричної прогресії випливає:

$$b_2 = b_1 \cdot q;$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 q) \cdot q = b_1 q^2;$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 q^2) \cdot q = b_1 q^3;$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 q^3) \cdot q = b_1 q^4.$$

Наведені приклади допомагають дійти такого індуктивного висновку:

$$\boxed{b_n = b_1 q^{n-1}}$$

Цю гіпотезу можна довести методом математичної індукції (зробіть це самостійно).

Записану рівність називають **формулою *n*-го члена геометричної прогресії.**

Установимо важливу властивість членів геометричної прогресії (b_n).

З означення геометричної прогресії випливає, що при $n > 1$ виконуються рівності $b_n = b_{n-1}q$ і $b_{n+1} = b_n q$. Звідси $\dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Тоді при $n > 1$ отримуємо:

$$\boxed{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, крім першого, дорівнює добутку двох сусідніх із ним членів[1].

Правильним є і обернене твердження: *якщо послідовність (b_n) відмінних від нуля чисел має таку властивість, що $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ при будь-якому $n \geqslant 2$, то ця послідовність є геометричною прогресією.*

Справді, з рівності $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ з урахуванням того, що $b_{n-1} \neq 0$, $b_n \neq 0$, $b_{n+1} \neq 0$, можна записати: $\dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, тобто відношення наступного члена даної послідовності до попереднього є сталим. Це означає, що послідовність (b_n) — геометрична прогресія.

Довівши два взаємно обернених твердження, тим самим ми довели таку теорему.

Теорема 33.1. ***Послідовність (b_n), яка містить більше двох членів і всі члени якої відмінні від нуля, є геометричною прогресією тоді й тільки тоді, коли для будь-якого $n \geqslant 2$ виконується рівність $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$.***

Якщо всі члени геометричної прогресії (b_n) є додатними, то можна записати:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}.$$

---

[1] Якщо геометрична прогресія є скінченною послідовністю, то її останній член такої властивості не має.

Отже, кожний член такої послідовності, крім першого (і останнього, якщо послідовність є скінченною), є середнім геометричним двох сусідніх із ним членів.

Розглянемо дві послідовності.

Арифметична прогресія (a_n), у якої $a_1 = 1$, $d = 2$:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, \ldots .$$

Геометрична прогресія (b_n), у якої $b_1 = 1$, $q = 2$:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \ldots .$$

У цих прогресій перші члени є рівними. Обидві ці послідовності конструюються за допомогою одного й того самого числа 2 ($d = q = 2$). Разом з тим, порівнюючи відповідні члени цих послідовностей, ми бачимо, що геометрична прогресія «зростає» набагато швидше, ніж арифметична. Наприклад, в арифметичній прогресії $a_{20} = 1 + 2 \cdot 19 = 39$, у геометричній $b_{20} = 1 \cdot 2^{19} = 524\,288$.

Ви знаєте, що бактерії розмножуються поділом: одна бактерія ділиться на дві. Тепер стає зрозумілим, чому так швидко зростає чисельність бактерій, якщо їх помістити в сприятливе середовище.

Можливо, із цим прикладом пов'язано те, що нерідко в повсякденному житті, коли хочуть підкреслити швидке зростання якоїсь величини, говорять: «зростає в геометричній прогресії».

ПРИКЛАД 1 Знайдіть четвертий член і знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо $b_3 = 36$, $b_5 = 49$.

Розв'язання. За властивістю геометричної прогресії $b_4^2 = b_3 b_5$, звідси $b_4 = \sqrt{b_3 b_5} = \sqrt{36 \cdot 49} = 6 \cdot 7 = 42$ або $b_4 = -\sqrt{b_3 b_5} = -42$.

Якщо $b_4 = 42$, то знаменник прогресії $q = b_4 : b_3 = \frac{42}{36} = \frac{7}{6}$; якщо $b_4 = -42$, то $q = -\frac{7}{6}$.

Відповідь: $b_4 = 42$, $q = \frac{7}{6}$ або $b_4 = -42$, $q = -\frac{7}{6}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо $b_3 + b_6 = 504$ і $b_4 - b_5 + b_6 = 378$.

Розв'язання. Нехай q — знаменник даної прогресії. З урахуванням умови отримуємо систему двох рівнянь із двома змінними b_1 і q:

$$\begin{cases} b_1 q^2 + b_1 q^5 = 504, \\ b_1 q^3 - b_1 q^4 + b_1 q^5 = 378. \end{cases}$$

Поділимо почленно ліві та праві частини рівнянь системи:

$$\frac{b_1 q^2 (1 + q^3)}{b_1 q^3 (1 - q + q^2)} = \frac{504}{378}.$$

Далі отримуємо:

$$\frac{b_1q^2(1+q)(1-q+q^2)}{b_1q^3(1-q+q^2)}=\frac{4}{3};$$

$$\frac{1+q}{q}=\frac{4}{3};\quad 4q = 3 + 3q;\quad q = 3.$$

Підставивши значення q у перше рівняння системи, отримуємо: $9b_1 + 243b_1 = 504$; $252b_1 = 504$; $b_1 = 2$.

Відповідь: $b_1 = 2$, $q = 3$. ◄

ПРИКЛАД 3 У геометричній прогресії (b_n) відомо, що $b_{10} = 2$. Знайдіть добуток дев'ятнадцяти перших членів цієї прогресії.

Розв'язання. Маємо:

$$b_1b_2b_3\cdot\ldots\cdot b_{19}=b_1\cdot b_1q\cdot b_1q^2\cdot\ldots\cdot b_1q^{18}=b_1^{19}q^{1+2+\ldots+18}=$$

$$=b_1^{19}\cdot q^{\frac{(1+18)\cdot 18}{2}}=b_1^{19}\cdot q^{19\cdot 9}=(b_1q^9)^{19}=(b_{10})^{19}=2^{19}.$$ ◄

ПРИКЛАД 4 Знайдіть усі трійки чисел, які утворюють геометричну прогресію та мають такі властивості: сума цих чисел дорівнює 63, а коли до цих чисел додати відповідно 7, 18 і 2, то буде отримано арифметичну прогресію.

Розв'язання. Шукані числа запишемо так: a, aq, aq^2. Тоді числа $a + 7$, $aq + 18$, $aq^2 + 2$ утворюють арифметичну прогресію. Звідси $2(aq + 18) = a + 7 + aq^2 + 2$. З урахуванням умови отримуємо систему

$$\begin{cases}a+aq+aq^2=63,\\ a+7+aq^2+2=2(aq+18).\end{cases}\quad \text{Звідси}\quad \begin{cases}a+aq+aq^2=63,\\ a-2aq+aq^2=27.\end{cases}$$

Поділимо почленно ліві та праві частини рівнянь системи. Отримаємо: $\frac{1+q+q^2}{1-2q+q^2}=\frac{7}{3}$. Розв'язавши це рівняння, отримаємо $q = 4$ або $q=\frac{1}{4}$.

Якщо $q = 4$, то $a = 3$; якщо $q=\frac{1}{4}$, то $a = 48$.

Відповідь: 3, 12, 48 або 48, 12, 3. ◄

?

1. Яку послідовність називають геометричною прогресією?
2. Яке число називають знаменником геометричної прогресії?
3. Який вигляд має формула n-го члена геометричної прогресії?
4. Якими є необхідна і достатня умови того, що дана послідовність, яка містить більше двох членів, є геометричною прогресією?

ВПРАВИ

33.1.° Серед наведених послідовностей укажіть геометричні прогресії, перший член і знаменник кожної з них:

1) 2, 6, 18, 36;
2) 4, 8, 16, 32;
3) 10, 20, 30, 40;
4) 81, 27, 9, 3;
5) 2, −2, 2, −2;
6) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2$;
7) −9, −9, −9, −9;
8) 1, 2, 3, 5;
9) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4$.

33.2.° Шостий член геометричної прогресії (b_n) дорівнює 8, а знаменник дорівнює −4. Знайдіть сьомий член прогресії.

33.3.° Знайдіть сьомий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_8 = 16$, а знаменник прогресії $q = \frac{3}{4}$.

33.4.° Послідовність (b_n) така, що $b_1 = 8$, $b_{n+1} = -b_n$. Чи є ця послідовність геометричною прогресією?

33.5.° У геометричній прогресії (y_n) перший член $y_1 = 64$, а знаменник $q = -\frac{1}{2}$. Знайдіть: 1) y_6; 2) y_{10}.

33.6.° У геометричній прогресії (c_n) перший член $c_1 = 9$, а знаменник $q = -1$. Знайдіть: 1) c_{21}; 2) c_{50}.

33.7.° Знайдіть знаменник і п'ятий член геометричної прогресії $\frac{1}{216}, \frac{1}{36}, \frac{1}{6}, \ldots$.

33.8.° Знайдіть знаменник і шостий член геометричної прогресії 18, 12, 8, ...

33.9.° Доведіть, що коли послідовність (x_n) — геометрична прогресія, то $x_3x_{13} = x_5x_{11}$.

33.10.° Доведіть, що коли послідовність (y_n) — геометрична прогресія, то $y_4y_{21} = y_8y_{17}$.

33.11.° Виразіть члени b_8, b_{13} і b_{60} геометричної прогресії (b_n) через b_7 і знаменник q.

33.12.° Виразіть члени c_{18}, c_{36} і c_{50} геометричної прогресії (c_n) через c_{12} і знаменник q.

33.13.° Знайдіть знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_8 = 64$;
2) $b_6 = 75$, $b_8 = 27$.

33.14.° Знайдіть перший член геометричної прогресії (c_n), якщо:

1) $c_4 = \frac{1}{98}$, а знаменник $q = \frac{2}{7}$;
2) $c_6 = 100$, $c_9 = 100\,000$.

33.15.° Число 486 є членом геометричної прогресії 2, 6, 18, ... Знайдіть номер цього члена.

33.16.° Число 96 є членом геометричної прогресії $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, ... Знайдіть номер цього члена.

33.17.° Які два числа треба вставити між числами 6 і 750, щоб вони разом із даними числами утворили геометричну прогресію?

33.18.° Які чотири числа треба вставити між числами 0,5 і 16, щоб вони разом із даними числами утворили геометричну прогресію?

33.19.° Послідовність (b_n) задано формулою n-го члена $b_n = 5 \cdot 4^{n-2}$. Чи є ця послідовність геометричною прогресією? У разі ствердної відповіді вкажіть її перший член і знаменник.

33.20.° Доведіть, що послідовність (x_n), задана формулою n-го члена $x_n = 7^{n+1}$, є геометричною прогресією, та вкажіть її перший член і знаменник.

33.21.° Послідовність (b_n) є геометричною прогресією. Знайдіть:
1) b_5, якщо $b_4 = 9$, $b_6 = 25$; 2) b_{17}, якщо $b_{16} = 2$, $b_{18} = 10$.

33.22.° Послідовність (b_n) є геометричною прогресією. Знайдіть b_{20}, якщо $b_{19} = -3$, $b_{21} = -12$.

33.23.• Другий член геометричної прогресії дорівнює 6. Знайдіть добуток трьох перших членів цієї прогресії.

33.24.• Третій член геометричної прогресії дорівнює 3. Знайдіть добуток п'яти перших членів цієї прогресії.

33.25.• Дано скінченну геометричну прогресію b_1, b_2, ..., b_n. Доведіть, що $b_k \cdot b_{n-k+1} = b_1 \cdot b_n$, $k \leqslant n$.

33.26.• Доведіть, що для геометричної прогресії (b_n) справедлива рівність

$$b_n \cdot b_k = b_{n+m} \cdot b_{k-m},\ k > m.$$

33.27.• У правильний трикутник зі стороною a послідовно вписано трикутники так, що вершини кожного наступного трикутника є серединами сторін попереднього (рис. 33.1). Доведіть, що периметри цих трикутників утворюють геометричну прогресію, і запишіть формулу n-го члена цієї прогресії.

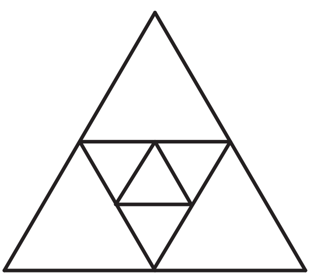


Рис. 33.1

33.28. Чи є геометричною прогресією послідовність $(n \in \mathbb{N})$:

1) $2^{-n}, 2^{-2n}, 2^{-3n}, 2^{-4n}$;
2) $2^n, 2^{n^2}, 2^{n^3}, 2^{n^4}$;
3) $2^n, 2^{n+1}, 2^{n+2}, 2^{n+3}$?

У разі ствердної відповіді вкажіть знаменник прогресії.

33.29. Послідовність (b_n) є геометричною прогресією зі знаменником q. Чи є геометричною прогресією послідовність:

1) $b_1, b_3, \ldots, b_{2n-1}$;
2) $2b_1, 2b_2, \ldots, 2b_n$;
3) $b_1 + b_2, b_2 + b_3, \ldots, b_{n-1} + b_n$;
4) $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \ldots, \frac{1}{b_n}$?

У разі ствердної відповіді вкажіть знаменник прогресії.

33.30. Послідовність (b_n) є геометричною прогресією зі знаменником q. Чи є геометричною прогресією послідовність:

1) $b_2, b_4, \ldots, b_{2n}$;
2) $b_1b_3, b_2b_4, b_3b_5, \ldots, b_{n-2}b_n$?

У разі ствердної відповіді вкажіть знаменник прогресії.

33.31. Між числами 80 і 5 вставте три таких числа, щоб вони разом із даними числами утворювали геометричну прогресію.

33.32. Між числами 6 і 486 вставте три такі числа, щоб вони разом із даними числами утворювали геометричну прогресію.

33.33. Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_5 = 3b_3$ і $b_6 - b_2 = 48$;
2) $b_4 + b_7 = \frac{56}{9}$ і $b_5 - b_6 + b_7 = \frac{14}{9}$;
3) $b_5 - b_4 = 168$ і $b_3 + b_4 = -28$.

33.34. Знайдіть перший член і знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_4 - b_2 = 30$ і $b_4 - b_3 = 24$;
2) $b_2 - b_5 = 78$ і $b_3 + b_4 + b_5 = -117$.

33.35. При якому значенні x значення виразів $2x + 1$, $x + 5$ і $x + 11$ будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

33.36. При якому значенні x значення виразів $x + 6$, $x + 2$ і $3x - 4$ будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайдіть члени цієї прогресії.

33.37. Знайдіть геометричну прогресію, яка містить 6 членів, якщо сума трьох перших її членів дорівнює 168, а сума трьох останніх дорівнює 21.

33.38. Дано три додатних числа, які утворюють арифметичну прогресію. Їхня сума дорівнює 21. Якщо до цих чисел додати відповідно 2, 3 і 9, то отримані числа утворять геометричну прогресію. Знайдіть дані числа.

33.39.$^{\bullet}$ Дано три числа, які утворюють арифметичну прогресію. Їхня сума дорівнює 30. Якщо від першого числа відняти 5, від другого відняти 4, а третє залишити без змін, то отримані числа утворять геометричну прогресію. Знайдіть дані числа.

33.40.$^{\bullet}$ Дано три числа, які утворюють геометричну прогресію. Їхня сума дорівнює 65. Якщо від першого із цих чисел відняти 1, друге залишити без змін, а від третього відняти 19, то отримані числа утворять арифметичну прогресію. Знайдіть дані числа.

33.41.$^{\bullet}$ Дано три числа, які утворюють геометричну прогресію. Їхня сума дорівнює 26. Якщо до цих чисел додати відповідно 1, 6 і 3, то отримані числа утворять арифметичну прогресію. Знайдіть дані числа.

33.42.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть три числа, які утворюють геометричну прогресію, якщо відомо, що їхня сума дорівнює 26, а сума квадратів цих чисел дорівнює 364.

33.43.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть чотири числа, з яких перших три складають геометричну прогресію, а останніх три — арифметичну, причому сума крайніх чисел дорівнює 14, а сума середніх дорівнює 12.

33.44.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть чотири числа, які утворюють арифметичну прогресію та мають таку властивість: якщо від другого числа відняти 2, а до четвертого додати 14, то буде отримано геометричну прогресію.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

33.45. Човен пропливає 9 км за течією річки та 1 км проти течії за такий самий час, який потрібен плоту, щоби проплисти 4 км по цій річці. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість човна становить 8 км/год.

33.46. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} ax + y = 2, \\ 9x + ay = 6 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

33.47. Зобразіть на координатній площині множину точок, координати яких $(x;\ y)$ задовольняють рівність

$$\sqrt{(x-3)(y+2)} = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{-y-2}.$$

33.48. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n дріб $\frac{16n+1}{40n+2}$ є нескоротним.

34. Сума n перших членів геометричної прогресії

Розглянемо скінченну геометричну прогресію $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n$.

Суму членів цієї прогресії позначимо S_n.

Маємо:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n. \qquad (*)$$

Виведемо формулу для знаходження цієї суми.

Спочатку розглянемо задачу, розв'язання якої підкаже, як вивести шукану формулу.

Розглянемо геометричну прогресію $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{62}, 2^{63}$ і знайдемо суму її членів S_{64}:

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Помножимо обидві частини записаної рівності на знаменник прогресії — число 2:

$$2S_{64} = 2 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63} + 2^{64}.$$

Знайдемо різницю $2S_{64} - S_{64}$:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcrcr} - & 2S_{64} = & & & & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \ldots & + & 2^{63} & + & 2^{64} \\ & S_{64} = & 1 & + & & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \ldots & + & 2^{63} & & \\ \hline & 2S_{64} - S_{64} = & -1 & + & & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & + & 0 & + & 2^{64} \end{array}$$

Звідси $S_{64} = 2^{64} - 1$.

У вас може виникнути природне запитання: чому як приклад ми вибрали саме прогресію $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{62}, 2^{63}$?

Із цією послідовністю пов'язана старовинна легенда. Індійський мудрець, який придумав гру в шахи, попросив за свій винахід у раджі скромну на перший погляд винагороду: за першу клітинку шахової дошки 1 пшеничне зернятко, за другу — 2, за третю — 4 і т. д. — за кожну наступну клітинку вдвічі більше зерняток, ніж за попередню.

Зрозуміло, що загальна кількість зерен, яку попросив винахідник, дорівнює $S_{64} = 2^{64} - 1$.

Багатий раджа був приголомшений, коли дізнався, що він не в змозі задовольнити «скромне» бажання мудреця. Річ у тім, що значення виразу $2^{64} - 1$ дорівнює 18 446 744 073 709 551 615.

Щоб зрозуміти, наскільки величезним є це число, уявимо, що зерно зберігають у коморі площею 12 га. Тоді її висота була би більшою за відстань від Землі до Сонця.

Скористаємося описаним прийомом для знаходження суми (*).

Перепишемо рівність (*) так:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на q:

$$S_n q = b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 + b_1 q^4 + \ldots + b_1 q^{n-1} + b_1 q^n.$$

Знайдемо різницю $S_n q - S_n$:

$$\begin{array}{rcccccccccccc} _{-} & S_n q = & & & b_1 q & + & b_1 q^2 & + & b_1 q^3 & + \ldots + & b_1 q^{n-1} & + & b_1 q^n \\ & S_n = & b_1 & + & b_1 q & + & b_1 q^2 & + & b_1 q^3 & + \ldots + & b_1 q^{n-1} & & \\ \hline & S_n q - S_n = & -b_1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + \ldots + & 0 & + & b_1 q^n \end{array}$$

Отже, $S_n q - S_n = b_1 q^n - b_1$. Звідси $S_n (q - 1) = b_1 (q^n - 1)$.

При $q \neq 1$ отримуємо:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}}$$

Цю рівність називають **формулою суми n перших членів геометричної прогресії** зі знаменником, відмінним від 1.

Зауважимо, що отриману формулу можна довести інакше, скориставшися формулою розкладу на множники двочлена $q^n - 1$, $n \in \mathbb{N}$. Зробіть це самостійно.

Якщо $q = 1$, то всі члени прогресії дорівнюють першому члену. Тоді $S_n = nb_1$.

ПРИКЛАД Для будь-якого натурального n суму n перших членів геометричної прогресії можна обчислити за формулою $S_n = 10(2^n - 1)$. Знайдіть перший член і знаменник цієї прогресії.

Розв'язання. Нехай b_1 — перший член даної прогресії, q — її знаменник. Тоді $b_1 = S_1 = 10(2 - 1) = 10$; $b_1 + b_2 = S_2 = 10(2^2 - 1) = 30$. Звідси $b_2 = 30 - b_1 = 20$; $q = \frac{b_2}{b_1} = 2$.

Відповідь: $b_1 = 10$, $q = 2$. ◄

?

1. Як знайти суму n перших членів геометричної прогресії зі знаменником, відмінним від одиниці?
2. Чому дорівнює сума n перших членів геометричної прогресії, знаменник якої дорівнює одиниці?

ВПРАВИ

34.1.° Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q, якщо:

1) $b_1 = 0{,}6$, $q = 2$, $n = 5$;
2) $b_1 = -4$, $q = -1$, $n = 10$;
3) $b_1 = -9$, $q = \sqrt{3}$, $n = 6$;
4) $b_1 = 8$, $q = -\frac{1}{2}$, $n = 4$.

34.2.° Знайдіть суму n перших членів геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q, якщо:

1) $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 9$;

2) $b_1 = 15$, $q = \frac{2}{3}$, $n = 3$;

3) $b_1 = 18$, $q = -\frac{1}{3}$, $n = 5$;

4) $b_1 = 4$, $q = -\sqrt{2}$, $n = 4$.

34.3.° Знайдіть суму п'яти перших членів геометричної прогресії:

1) 12, 72, 432, ...;

2) $\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, ...

34.4.° Знайдіть суму чотирьох перших членів геометричної прогресії:

1) $-0{,}6$; 3; -15; ...;

2) 56; 42; 31,5; ... .

34.5.° Знайдіть суму шести перших членів геометричної прогресії (c_n), якщо:

1) $c_4 = 216$, а знаменник прогресії $q = -3$;

2) $c_1 = 5\sqrt{5}$, $c_5 = 125\sqrt{5}$, а знаменник прогресії $q > 0$.

34.6.° Знайдіть суму семи перших членів геометричної прогресії (x_n), якщо $x_3 = 24$, $x_8 = 768$.

34.7.° Геометричну прогресію (b_n) задано формулою n-го члена $b_n = 10 \cdot 3^{n-1}$. Знайдіть суму п'яти перших членів прогресії.

34.8.° Геометричну прогресію (y_n) задано формулою n-го члена $y_n = \frac{(-2)^{n+1}}{20}$. Знайдіть суму десяти перших членів прогресії.

34.9.° Знаменник геометричної прогресії дорівнює $\frac{2}{3}$, а сума чотирьох перших членів дорівнює 65. Знайдіть перший член прогресії.

34.10.° Сума трьох перших членів геометричної прогресії дорівнює 516, а перший член дорівнює 12. Знайдіть знаменник прогресії.

34.11.° Сума членів скінченної геометричної прогресії дорівнює 8191. Знайдіть кількість членів прогресії, якщо її перший член $b_1 = 1$, а знаменник прогресії $q = 2$.

34.12.° Сума членів скінченної геометричної прогресії дорівнює 605. Знайдіть кількість членів прогресії, якщо її перший член $b_1 = 5$, а знаменник прогресії $q = 3$.

34.13.• Для будь-якого натурального n суму n перших членів деякої геометричної прогресії можна обчислити за формулою $S_n = 4\,(3^n - 1)$. Знайдіть третій член цієї прогресії.

34.14.$^{\bullet}$ Для будь-якого натурального n суму n перших членів деякої геометричної прогресії можна обчислити за формулою

$$S_n = 6\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right).$$

Знайдіть четвертий член цієї прогресії.

34.15.$^{\bullet}$ Знайдіть суму квадратів шести перших членів геометричної прогресії, перший член якої дорівнює $2\sqrt{3}$, а знаменник дорівнює $\sqrt{3}$.

34.16.$^{\bullet}$ Знайдіть суму кубів чотирьох перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 = 3$ і $b_2 = -6$.

34.17.$^{\bullet}$ Геометрична прогресія містить $2n$ членів. Сума членів, які мають парні номери, дорівнює A, а сума членів, які мають непарні номери, дорівнює B. Знайдіть знаменник прогресії.

34.18.$^{\bullet}$ Доведіть, що для членів геометричної прогресії (b_n) виконується рівність $b_2 + b_4 + b_6 + \ldots + b_{2n} = \frac{q}{1+q} S_{2n}$.

34.19.$^{\bullet}$ Знайдіть суму $\left(2+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(4+\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$.

34.20.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть кількість членів скінченної геометричної прогресії, знаменник якої $q = -\frac{1}{2}$, перший член $b_1 = 256$, а сума всіх членів $S_n = 170$.

34.21.$^{\bullet\bullet}$ Знайдіть кількість членів скінченної геометричної прогресії, знаменник якої $q = 3$, останній член $c_n = 162$, а сума всіх членів $S_n = 242$.

34.22.$^{\bullet\bullet}$ Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — послідовні члени геометричної прогресії, S_n — сума її n перших членів. Доведіть, що

$$S_n = a_1 a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

34.23.* Знайдіть добуток 100 перших членів геометричної прогресії (b_n), якщо $b_1 + b_2 + \ldots + b_{100} = A$, $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_{100}} = B$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

34.24. Два трактористи можуть зорати поле, працюючи разом, за 6 год. За скільки годин може зорати це поле кожний тракторист, працюючи самостійно, якщо одному з них для того, щоб зорати $\frac{2}{5}$ поля, потрібно на 4 год більше, ніж другому, щоб зорати $\frac{1}{5}$ поля?

34.25. Побудуйте графік рівняння $\frac{(y^2-4)(y+x)}{x^2-1}=0$.

34.26. Знайдіть розв'язки нерівності $\sqrt{x-a}\,(4x-11)\geqslant 0$ залежно від значення параметра a.

34.27. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}(x-2)(y-2)\,xy=9,\\ xy-x-y=3.\end{cases}$

35. Уявлення про границю послідовності. Сума нескінченної геометричної прогресії, модуль знаменника якої менший від 1

Розглянемо послідовність (a_n), задану формулою n-го члена $a_n=\frac{n}{n+1}$.

Випишемо кілька перших членів цієї послідовності:

$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{6},\ \frac{6}{7},\ \frac{7}{8},\ \frac{8}{9},\ \ldots\ .$$

Якщо члени цієї послідовності зображати точками на координатній прямій, то ці точки будуть розміщатися все ближче й ближче до точки з координатою 1 (рис. 35.1).

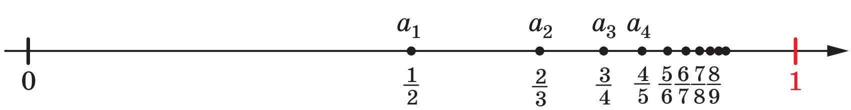


Рис. 35.1

Говорять, що зі збільшенням номера n члени послідовності (a_n) **прямують** до числа 1.

Інакше кажучи, зі збільшенням номера n різниця $|a_n - 1|$ стає все меншою та меншою. Наприклад, $|a_n - 1| < 0{,}1$ при $n \geqslant 10$, $|a_n - 1| < 0{,}0001$ при $n \geqslant 10\,000$ і т. д. Узагалі, починаючи з деякого номера n різниця $|a_n - 1|$ може стати *меншою від будь-якого наперед заданого додатного числа*.

У цьому разі говорять, що число 1 є **границею послідовності** a_n, і записують: $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$ (тут *lim* — це початкові літери французького слова *limite* – границя). Також можна записати: $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Інколи використовують і таке позначення: $\frac{n}{n+1} \to 1$ при $n \to \infty$.

Послідовність, яка має границю, називають **збіжною**. Послідовність з n-м членом $a_n = \frac{1}{2^n}$ є ще одним прикладом збіжної послідовності: зі збільшенням номера n члени цієї послідовності прямують до числа 0, тобто $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Не будь-яка послідовність є збіжною. Наприклад, послідовність натуральних чисел не є збіжною. Також не є збіжною послідовність (a_n), де $a_n = (-1)^n$. Для цих послідовностей неможливо вказати число, до якого прямують члени послідовності зі збільшенням номера члена.

Досі ми розглядали суми, які складаються зі скінченної кількості доданків. Проте при розв'язуванні деяких задач доводиться розглядати суми нескінченної кількості доданків.

Навіть саме словосполучення «сума нескінченної кількості доданків» може викликати здивування: адже не можна додати нескінченно багато чисел — такий процес ніколи не завершиться.

Проілюструємо на прикладі, як у математиці розв'язують таку проблему.

Розглянемо квадрат зі стороною 1 і поділимо його на 2 рівні частини. Одну із частин зафарбуємо, а незафарбовану знову поділимо на дві рівні частини. Знову ж таки одну з них зафарбуємо, а другу поділимо на дві рівні частини й т. д. (рис. 35.2).

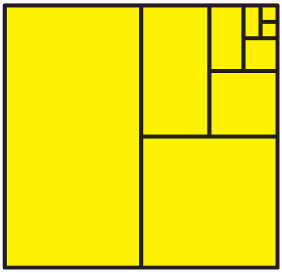


Рис. 35.2

Після першого кроку площа зафарбованої фігури дорівнюватиме $S_1 = \frac{1}{2}$.

Після другого кроку: $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

Після третього кроку: $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

. . .

Після n-го кроку: $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$.

Отримали послідовність $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$.

Використовуючи формулу суми n перших членів геометричної прогресії, установлюємо, що після n-го кроку площа зафарбованої фігури дорівнюватиме

$$S_n = \frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Оскільки площа квадрата дорівнює 1, то із цієї формули випливає, що площа незафарбованої частини дорівнює $\frac{1}{2^n}$.

Діючи за зазначеним алгоритмом, ми ніколи не зможемо повністю зафарбувати квадрат. Але чим більше таких кроків буде зроблено, тим менше площа зафарбованої частини відрізнятиметься від площі даного квадрата, а площа незафарбованої частини все менше відрізнятиметься від нуля.

Цей факт підтверджується тим, що для послідовності (S_n), заданої формулою $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, виконується рівність $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 1$.

Справді, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

Звідси $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$, тобто $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = 1$.

Це означає, що сума n перших членів геометричної прогресії $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... при необмеженому збільшенні n прямує до числа 1. Тому доцільно домовитися вважати число 1 **сумою нескінченної геометричної прогресії** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... Записують:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1.$$

Узагальнимо розглянутий приклад.

Розглянемо довільну нескінченну геометричну прогресію b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ..., у якої $|q| < 1$.

Сума n перших її членів обчислюється за формулою $S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Запишемо:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{b_1 - b_1q^n}{1 - q} = \frac{b_1}{1 - q} - \frac{b_1}{1 - q} \cdot q^n.$$

При $|q| < 1$ виконується рівність $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ (цей факт буде доведено в курсі математики 10 класу). Тоді $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{b_1}{1 - q} \cdot q^n = 0$. Звідси $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{b_1}{1 - q} - \dfrac{b_1}{1 - q} q^n \right) = \dfrac{b_1}{1 - q}$.

Число $\dfrac{b_1}{1 - q}$ називають **сумою нескінченної геометричної прогресії** (b_n), у якої $|q| < 1$, і записують:

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots = \frac{b_1}{1 - q}.$$

Якщо суму нескінченної геометричної прогресії позначити буквою S, то можна записати таку формулу:

$$\boxed{S = \frac{b_1}{1 - q}}$$

Розглянемо геометричну прогресію 1, 2, 2^2, 2^3, ..., 2^n, ..., у якої $q = 2$, тобто $|q| > 1$.

У попередньому пункті ми переконалися, що вже сума її перших 64 членів — величезне число. Зрозуміло, що при необмеженому збільшенні n сума n перших членів цієї прогресії не прямує до жодного числа. У такому разі говорять, що розглядувана нескінченна прогресія суми не має. Узагалі, про суму нескінченної геометричної прогресії можна говорити лише тоді, коли $|q| < 1$.

Ви знаєте, що кожне раціональне число, тобто дріб виду $\dfrac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне, можна подати у вигляді скінченного десяткового дробу або у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу.

Наприклад, $\dfrac{5}{8} = 0{,}625$; $\dfrac{5}{11} = 0{,}454545\ldots$, тобто $\dfrac{5}{11} = 0{,}(45)$.

Ви вмієте подавати скінченний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу. Наприклад, $0{,}625 = \frac{625}{1000}$. Скоротивши цей дріб на 125, отримаємо, що $0{,}625 = \frac{5}{8}$.

Проте ви ще не знаєте, як подавати нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу. Покажемо на прикладі, як це можна зробити за допомогою поняття суми нескінченної геометричної прогресії.

Розглянемо нескінченний періодичний десятковий дріб 0,(45).

Подамо це число у вигляді суми:

$$0{,}(45) = 0{,}454545\ldots = 0{,}45 + 0{,}0045 + 0{,}000045 + \ldots .$$

Доданки 0,45; 0,0045; 0,000045; ... є членами нескінченної геометричної прогресії (b_n), у якої $b_1 = 0{,}45$, $q = 0{,}01$. Оскільки $|q| < 1$, то можемо знайти суму цієї прогресії:

$$S = \frac{0{,}45}{1-0{,}01} = \frac{0{,}45}{0{,}99} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}.$$

Тому $0{,}(45) = \frac{5}{11}$.

ПРИКЛАД 1 Подайте нескінченний періодичний десятковий дріб 0,2(54) у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання. Маємо:

$$0{,}2(54) = 0{,}2545454\ldots = 0{,}2 + 0{,}0545454\ldots = 0{,}2 + 0{,}054 + 0{,}00054 + 0{,}0000054 + \ldots .$$

Нескінченний періодичний десятковий дріб 0,0545454... можна розглядати як суму нескінченної геометричної прогресії, перший член якої дорівнює $b_1 = 0{,}054$, а знаменник $q = 0{,}01$. Тоді

$$0{,}0545454\ldots = \frac{0{,}054}{1-0{,}01} = \frac{0{,}054}{0{,}99} = \frac{54}{990} = \frac{3}{55}.$$

Звідси $0{,}2(54) = 0{,}2 + 0{,}0(54) = 0{,}2 + \frac{3}{55} = \frac{1}{5} + \frac{3}{55} = \frac{14}{55}$.

Відповідь: $\frac{14}{55}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Дано правильний трикутник зі стороною a. Із висот цього трикутника побудовано другий правильний трикутник, із висот другого побудовано третій трикутник і т. д. Знайдіть суму периметрів і суму площ усіх трикутників.

Розв'язання. Висота правильного трикутника зі стороною a дорівнює $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, висота правильного трикутника зі стороною $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

дорівнює $\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3a}{4}$ і т. д. Тоді периметри даних трикутників утворюють послідовність $3a$, $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$, $\frac{9a}{4}$, ..., що є геометричною прогресією зі знаменником $\frac{\sqrt{3}}{2}$, який менший від 1. Отже, суму периметрів S можна обчислити за формулою $S=\frac{3a}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$. Звідси

$$S=\frac{6a}{2-\sqrt{3}}=\frac{6a\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=6a\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Площа правильного трикутника зі стороною a дорівнює $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; площа правильного трикутника зі стороною $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ дорівнює $\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3}{4}$; площа правильного трикутника зі стороною $\frac{3a}{4}$ дорівнює $\left(\frac{3a}{4}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$ і т. д. Отже, площі трикутників утворюють послідовність, яка є геометричною прогресією з першим членом $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ і знаменником $\frac{3}{4}$. Отже, суму площ S можна обчислити за формулою $S=\frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{3}{4}}$. Звідси $S=a^2\sqrt{3}$.

Відповідь: $6a\left(2+\sqrt{3}\right)$; $a^2\sqrt{3}$. ◄

ПРИКЛАД 3 Знайдіть знаменник q нескінченної геометричної прогресії ($|q|<1$), у якої кожний член у 4 рази більший за суму всіх її наступних членів.

Розв'язання. Нехай a_n — довільний член прогресії, a_{n+1} — наступний за ним член. Розглянемо нескінченну геометричну прогресію з першим членом a_{n+1} і знаменником q ($|q|<1$). Тоді її сума дорівнюватиме $\frac{a_{n+1}}{1-q}$. За умовою $a_n=\frac{4a_{n+1}}{1-q}$, тобто $a_n=\frac{4a_nq}{1-q}$.

Оскільки жодний член геометричної прогресії не дорівнює нулю, то отримуємо: $1 = \frac{4q}{1-q}$. Звідси $q = \frac{1}{5}$.

Відповідь: $\frac{1}{5}$. ◄

ВПРАВИ

35.1.° Обчисліть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q, якщо:

1) $b_1 = 24,\ q = \frac{3}{4}$;
2) $b_1 = -84,\ q = -\frac{1}{3}$;
3) $b_1 = 63,\ q = -\frac{1}{6}$;
4) $b_1 = -81,\ q = -\frac{2}{7}$.

35.2.° Обчисліть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n) зі знаменником q, якщо:

1) $b_1 = 15,\ q = \frac{2}{3}$;
2) $b_1 = 18,\ q = -\frac{1}{4}$.

35.3.° Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

1) 10; 1; 0,1; ...;
2) 0,3; 0,03; 0,003; ...;
3) 6; −3; 1,5; ... .

35.4.° Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

1) 64, 24, 9, ...;
2) −396, 330, −275, ...

35.5.° Подайте нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу:

1) 0,1111...;
2) 0,(5);
3) 0,(24);
4) 0,416416416...;
5) 0,2666...;
6) 0,6252525...;
7) 1,181818...;
8) 2,3(36).

35.6.° Подайте нескінченний періодичний десятковий дріб у вигляді звичайного дробу:

1) 0,222...;
2) 0,666...;
3) 0,(28);
4) 0,1777...;
5) 3,454545...;
6) 1,4(12).

35.7.° Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

1) $\sqrt{2},\ -1,\ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \ldots$;
2) $3\sqrt{3},\ 3,\ \sqrt{3},\ \ldots$;
3) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1},\ 1,\ \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1},\ \ldots$.

35.8.° Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії:

1) $\sqrt{\frac{3}{2}},\ 1,\ \sqrt{\frac{2}{3}},\ \ldots$;
2) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1},\ \frac{1}{2-\sqrt{2}},\ \frac{1}{2},\ \ldots$.

35.9.° Знайдіть перший член нескінченної геометричної прогресії, сума якої дорівнює 63, а знаменник дорівнює $\frac{4}{9}$.

35.10.° Сума нескінченної геометричної прогресії дорівнює −60, а її перший член дорівнює −65. Знайдіть знаменник прогресії.

35.11.° Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_3 = 4$, $b_5 = 2$; 2) $b_1 + b_3 = 20$, $b_2 + b_4 = \frac{20}{3}$.

35.12.° Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо:

1) $b_2 = 54$, $b_5 = 2$; 2) $b_2 - b_4 = 48$, $b_1 - b_3 = 240$.

35.13.° (*Задача Ферма*[1].) Покажіть, що коли S є сумою нескінченної геометричної прогресії (b_n), то $\frac{S}{S - b_1} = \frac{b_1}{b_2}$.

35.14.• Сума нескінченної геометричної прогресії дорівнює 2, а сума чотирьох її перших членів дорівнює $1\frac{7}{8}$. Знайдіть перший член і знаменник цієї прогресії.

35.15.• Сума нескінченної геометричної прогресії дорівнює 256, а сума трьох її перших членів дорівнює 252. Знайдіть перший член і знаменник цієї прогресії.

35.16.• Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (b_n), якщо $b_2b_4 = 36$ і $b_3 + b_5 = 8$.

35.17.• Знайдіть суму нескінченної геометричної прогресії (c_n), якщо $c_3c_5 = 20$ і $c_2 + c_4 = 12\sqrt{5}$.

35.18.• Розв'яжіть рівняння:

1) $1 + x + x^2 + \ldots = 4$, якщо $|x| < 1$;

2) $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \ldots = 1{,}5$, якщо $|x| > 1$.

35.19.• Розв'яжіть рівняння $1 - x^2 + x^4 - \ldots = \frac{16}{17}$, якщо $|x| < 1$.

35.20.• Знайдіть знаменник нескінченної геометричної прогресії, перший член якої в 1,5 раза більший за суму решти її членів.

35.21.• Знайдіть знаменник нескінченної геометричної прогресії, сума двох перших членів якої у 8 разів більша за суму решти її членів.

35.22.• Сума чотирьох перших членів нескінченної геометричної прогресії зі знаменником q, $|q| < 1$, становить $\frac{9}{25}$ суми всіх її членів. Знайдіть перший член і знаменник цієї прогресії, якщо другий член прогресії дорівнює 8, а перший є додатним.

[1] П'єр Ферма́ — видатний французький математик.

35.23.° У нескінченній геометричній прогресії зі знаменником q, $|q| < 1$, сума членів з непарними номерами дорівнює 36, а сума членів з парними номерами дорівнює 12. Знайдіть перший член і знаменник прогресії.

35.24.° У квадрат зі стороною a вписано квадрат, вершинами якого є середини сторін першого квадрата, у другий квадрат вписано третій, вершинами якого є середини сторін другого, і т. д. (рис. 35.3). Знайдіть суму площ усіх квадратів.

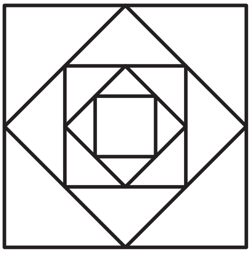


Рис. 35.3

35.25.° Геометричну фігуру складено з нескінченної послідовності рівносторонніх трикутників, розміщених так, як показано на рисунку 35.4. Площа кожного наступного трикутника вдвічі менша від площі попереднього. Сторона першого трикутника дорівнює 4 см. Чи поміститься така геометрична фігура на аркуші вашого зошиту?

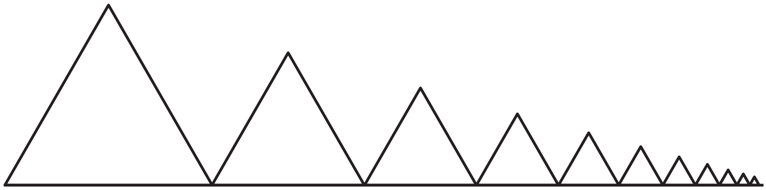


Рис. 35.4

35.26.° У коло радіуса R вписано правильний трикутник, у трикутник вписано коло, у це коло вписано правильний трикутник і т. д. Знайдіть суму: 1) периметрів усіх трикутників; 2) площ трикутників; 3) довжин кіл; 4) площ кругів, обмежених даними колами.

35.27.° У квадрат зі стороною a вписано коло, у коло вписано квадрат, у цей квадрат вписано коло, у яке знову вписано квадрат, і т. д. Знайдіть суму: 1) периметрів усіх квадратів; 2) площ квадратів; 3) довжин кіл; 4) площ кругів, обмежених даними колами.

35.28.•• Побудуйте графік функції $y = x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots,$ де $x \neq 0$.

35.29.•• Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} + \ldots,$ де $x > 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

35.30. Одному робітникові для виконання виробничого завдання потрібно на 4 год менше, ніж другому. Перший робітник пропрацював 2 год, а потім його змінив другий. Після того як другий робітник пропрацював 3 год, виявилося, що виконано $\frac{1}{2}$ завдання. За скільки годин може виконати це завдання кожний робітник, працюючи самостійно?

35.31. Дослід полягає в одночасному підкиданні трьох гральних кубиків. Знайдіть ймовірність того, що випадуть дві трійки та одна двійка.

35.32. При яких значеннях параметра a система рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + (y-2)^2 = 1, \\ y = |x| + a \end{cases}$$

має три розв'язки?

35.33. Розв'яжіть рівняння $6x^2 + \sqrt{3x^2 + 2x + 4} = 13 - 4x$.

36. Сумування

Разом з кожною послідовністю $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ можна розглядати й таку послідовність (S_n):

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ \ldots .$$

Знаходження формули n-го члена послідовності (S_n) називають **сумуванням перших n членів послідовності (a_n).**

Оскільки ви знаєте формули для обчислення суми n перших членів арифметичної і геометричної прогресій, то тим самим умієте сумувати перші n членів цих послідовностей.

За допомогою грецької літери Σ (сигма) суму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ записують так: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Наприклад, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$;

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3$.

У п. 22 було встановлено, що

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Це означає, що ви вмієте сумувати перші n членів відповідно послідовності квадратів і послідовності кубів натуральних чисел.

Одним з ефективних способів сумування є використання раніше доведених формул.

ПРИКЛАД 1 Знайдіть суму $\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{25}{8} + \ldots + \frac{2^n \cdot n + 1}{2^n}$.

Розв'язання. Маємо: $\frac{2^k \cdot k + 1}{2^k} = k + \frac{1}{2^k}$.

Тоді дану суму можна переписати так:

$\left(1 + \frac{1}{2^1}\right) + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(3 + \frac{1}{2^3}\right) + \ldots + \left(n + \frac{1}{2^n}\right)$. Звідси

$$\left(1 + \frac{1}{2^1}\right) + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(3 + \frac{1}{2^3}\right) + \ldots + \left(n + \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= (1 + 2 + 3 + \ldots + n) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{n(n+1)}{2} + 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Отже, $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k \cdot k + 1}{2^k} = \frac{n(n+1)}{2} + 1 - \frac{1}{2^n}$. ◄

ПРИКЛАД 2 Знайдіть суму $1 + 12 + 45 + \ldots + n^2(2n - 1)$.

Розв'язання. Запишемо: $k^2(2k - 1) = 2k^3 - k^2$. Звідси

$$1 + 12 + 45 + \ldots + n^2(2n - 1) =$$

$$= (2 \cdot 1^3 - 1^2) + (2 \cdot 2^3 - 2^2) + (2 \cdot 3^3 - 3^2) + \ldots + (2 \cdot n^3 - n^2) =$$

$$= 2(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) - (1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = 2\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{n(n+1)(3n^2 + n - 1)}{6}.$$ ◄

ПРИКЛАД 3 Знайдіть суму $7 + 77 + 777 + \underbrace{77\ldots7}_{n}$.

Розв'язання. Оскільки $\underbrace{77\ldots7}_{n} = 7 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n}$, то для розв'язування задачі достатньо знайти суму $S_n = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n}$ і отриманий результат помножити на 7.

Маємо: $S_n = \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \ldots + \frac{10^n-1}{9} =$

$$= \frac{1}{9}(10 + 10^2 + \ldots + 10^n) - \frac{1}{9}\underbrace{(1 + 1 + \ldots + 1)}_{n} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - \frac{n}{9} = \frac{10(10^n - 1)}{81} - \frac{n}{9}.$$

Шукана сума дорівнює $\frac{70(10^n - 1)}{81} - \frac{7n}{9}$. ◄

Якщо для даної послідовності (a_n) вдається знайти таку послідовність (b_n), що $a_n = b_{n+1} - b_n$, тоді суму $\sum_{k=1}^{n} a_k$ знайти легко. Справді, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \ldots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1$.

ПРИКЛАД 4 Знайдіть суму $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$.

Розв'язання. Маємо: $n \cdot n! = (n+1)! - n!$. Тепер можна записати:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \ldots + ((n+1)! - n!) = (n+1)! - 1.$$ ◄

ПРИКЛАД 5 Доведіть, що коли послідовність (a_n) — арифметична прогресія з ненульовими членами, то

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}.$$

Розв'язання. Маємо: $\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) \cdot \frac{1}{d}$, де d — різниця прогресії. Тоді

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) \cdot \frac{1}{d} + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) \cdot \frac{1}{d} + \ldots + \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) \cdot \frac{1}{d} =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) =$$

$$= \frac{a_{n+1} - a_1}{d a_1 \cdot a_{n+1}} = \frac{a_1 + dn - a_1}{d a_1 \cdot a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}.$$ ◄

ПРИКЛАД 6 Знайдіть суму $\frac{5}{1 \cdot 2} + \frac{13}{2 \cdot 3} + \frac{25}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{2n^2 + 2n + 1}{n(n+1)}$.

Розв'язання. Маємо:

$$\frac{2n^2 + 2n + 1}{n(n+1)} = \frac{2n(n+1) + 1}{n(n+1)} = 2 + \frac{1}{n(n+1)} = 2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Тоді можна записати:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2+2k+1}{k(k+1)} = \left(2+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(2+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=2n+1-\frac{1}{n+1}=\frac{n(2n+3)}{n+1}. \blacktriangleleft$$

ВПРАВИ

36.1.• Знайдіть суму:

1) $2 + 10 + 30 + \ldots + n(n^2 + 1)$;

2) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2)$.

36.2.• Знайдіть суму $1\cdot2+2\cdot3+\ldots+n(n+1)$.

36.3.• Знайдіть суму $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{5^k\cdot k-1}{5^k}$.

36.4.• Знайдіть суму $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3^{k+1}\cdot k^2+3^k\cdot k+1}{3^k}$.

36.5.• Знайдіть суму:

1) $9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{n}$;

2) $5+55+555+\ldots+\underbrace{55\ldots5}_{n}$.

36.6.•• Доведіть, що коли послідовність (a_n) — арифметична прогресія з додатними членами, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}}}.$$

36.7.•• Знайдіть суму:

1) $\frac{1}{1\cdot5}+\frac{1}{5\cdot9}+\frac{1}{9\cdot13}+\ldots+\frac{1}{(4n-7)(4n-3)}$;

2) $\frac{3}{1\cdot2}+\frac{7}{2\cdot3}+\frac{13}{3\cdot4}+\ldots+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$;

3) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}$;

4) $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\frac{7}{144}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

36.8.•• Знайдіть суму:

1) $\frac{1}{2\cdot7}+\frac{1}{7\cdot12}+\frac{1}{12\cdot17}+\ldots+\frac{1}{(5n-3)(5n+2)}$;

2) $\frac{3}{1\cdot2}+\frac{13}{2\cdot3}+\frac{37}{3\cdot4}+\ldots+\frac{n^3+n^2+1}{n(n+1)}$.

36.9.* Знайдіть суму $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k+1)^2 - 1}$.

36.10.* Знайдіть суму $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

36.11.* Знайдіть суму $S_n = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \ldots + n \cdot a^{n-1}$, де $a \neq 1$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

36.12. Набираючи щодня на 3 сторінки тексту більше, ніж планувалося, оператор комп'ютерного набору закінчив роботу обсягом 60 сторінок на день раніше строку. Скільки сторінок тексту набирав він за день?

36.13. При яких значеннях параметра a рівняння

$$\frac{x^2 - (2a+2)x + 6a - 3}{\sqrt{2 + x - x^2}} = 0$$

має єдиний розв'язок?

36.14. Побудуйте на координатній площині множину точок, координати яких $(x; y)$ задовольняють систему нерівностей

$$\begin{cases} y \leqslant |x|, \\ x^2 + y^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

36.15. Розв'яжіть рівняння $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3 - 1)$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 7

Послідовність

Об'єкти, які пронумеровано поспіль натуральними числами 1, 2, 3, ..., n, ..., утворюють послідовності.

Арифметична прогресія

Послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додано одне й те саме число, називають арифметичною прогресією. Зазначене число називають різницею арифметичної прогресії.

Формула *n*-го члена арифметичної прогресії

$$a_n = a_1 + d(n - 1)$$

Властивість членів арифметичної прогресії

Будь-який член арифметичної прогресії, крім першого (і останнього, якщо прогресія є скінченною), дорівнює середньому арифметичному двох сусідніх із ним членів: $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$.

Формули суми *n* перших членів арифметичної прогресії

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Геометрична прогресія

Геометричною прогресією називають послідовність із відмінним від нуля першим членом, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число. Це число називають знаменником геометричної прогресії.

Формула *n*-го члена геометричної прогресії

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Властивість членів геометричної прогресії

Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, крім першого (і останнього, якщо прогресія є скінченною), дорівнює добутку двох сусідніх із ним членів: $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$.

Формула суми *n* перших членів геометричної прогресії

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Формула суми нескінченної геометричної прогресії, модуль знаменника якої менший від 1

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Дружимо з комп’ютером

Ви продовжите вдосконалювати свої навички користування комп’ютером, що їх набули в 7 і 8 класах, опановувати нові інструменти та нові програмні засоби. Нагадаємо, що, крім завдань, наведених у цьому розділі, ви можете використовувати різноманітні програми, створені для вивчення шкільного курсу математики. Ви можете звертатися до глобальної мережі Інтернет для пошуку таких програм та іншої додаткової інформації до курсу алгебри.

Якщо ви плануєте вибрати професію, що потребує постійно використовувати знання з математики, то можна почати опановувати математичні пакети (наприклад, *MathCad*, *MathLab* і т. п.), які містять потужний інструментарій для математичних обчислень, геометричних побудов тощо.

У цьому розділі наведено завдання, які ви можете виконувати за допомогою комп’ютера в міру вивчення відповідних тем. Для тих, хто любить програмування, пропонуємо створювати алгоритми та програми, у яких використовуватимуться набуті математичні знання. Поки ви не вивчили на достатньому рівні яку-небудь мову програмування, досить придумати алгоритм і записати його словами або у вигляді блок-схеми; у міру вивчення мов програмування ви можете реалізовувати ці алгоритми у вигляді програм. Зауважимо, що вміння складати алгоритми (послідовності дій) стане вам у нагоді не тільки в програмуванні, а й в інших областях діяльності.

До п. 2 «Функція»

1. Які способи задання функції є зручними для того, щоби подати цю функцію за допомогою комп’ютера? Які інструменти для цього можна використати?

2. Які стандартні функції є в табличному редакторі, яким ви користуєтесь?

До п. 3 «Зростання і спадання функції. Найбільше і найменше значення функції»

3. Функцію задано таблично. Запишіть алгоритм для пошуку проміжків знакосталості та алгоритм для пошуку проміжків зростання і спадання функції. Яку умову має задовольняти розташування інформації у цій таблиці? Чи можна створити такий алгоритм для інших способів задання функції? Чому?

4. Припустимо, що у вас є підпрограма, яка дає змогу обчислити значення деякої функції в будь-якій точці. Чи можна за допомогою цієї підпрограми знайти всі нулі цієї функції? Зробіть висновок про особливості розв’язування рівнянь за допомогою комп’ютера. Знайдіть в Інтернеті інформацію про чисельні методи розв’язування рівнянь.

До п. 4 «Парні та непарні функції»

5. Задайте в табличному редакторі яку-небудь функцію для додатних значень аргументу. Доповніть таблицю так, щоб отримати: 1) парну функцію; 2) непарну функцію. Як зробити це автоматично? Побудуйте графік цієї функції.

До п. 5 «Як побудувати графіки функцій $y = kf(x)$ і $y = f(kx)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$»

6. За допомогою табличного редактора задайте яку-небудь функцію $y = f(x)$ таблично та побудуйте на підставі таблиці графік цієї функції. Які зміни треба внести до таблиці, щоб отримати графік функції $y = kf(x)$? Як зробити це автоматично? Побудуйте таким чином кілька графіків функції $y = kf(x)$ для різних значень k. Розташуйте всі ці графіки на одному рисунку.

7. Побудуйте графік якої-небудь функції $y = f(x)$ за допомогою графічного редактора. Які інструменти графічного редактора треба використати, щоб отримати із цього графіка графік функції $y = kf(x)$ при $k > 1$; при $0 < k < 1$; при $k = -1$? Як можна використати ці інструменти, щоб отримати графік функції $y = kf(x)$ при $k < 0$?

8. Придумайте самостійно та виконайте завдання, які ілюструють побудову графіка $y = f(kx)$ за допомогою табличного редактора та за допомогою графічного редактора. Які окремі випадки потрібно розглянути?

До п. 6 «Як побудувати графіки функцій $y = f(x) + b$ і $y = f(x + a)$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$»

9. За допомогою табличного редактора задайте яку-небудь функцію $y = f(x)$ таблично та побудуйте на підставі таблиці графік цієї функції. Які зміни треба внести до таблиці, щоб отримати графік функції $y = f(x) + b$? $y = f(x + a)$? $y = f(x + a) + b$? Як зробити це автоматично? Побудуйте таким чином кілька графіків функції $y = f(x + a) + b$ для різних значень a і b. Розмістіть їх на одному рисунку.

10. Побудуйте графік якої-небудь функції $y = f(x)$ за допомогою графічного редактора. Які інструменти графічного редактора треба використати, щоб отримати із цього графіка графік функції $y = f(x) + b$? $y = f(x + a)$? Як можна використати ці інструменти, щоб отримати графік функції $y = f(x + a) + b$?

До п. 7 «Як побудувати графіки функцій $y = f(|x|)$ і $y = |f(x)|$, якщо відомо графік функції $y = f(x)$»

11. За допомогою табличного редактора задайте яку-небудь функцію $y = f(x)$ таблично та побудуйте її графік. Які зміни треба внести в таблицю, щоб отримати графік функції $y = f(|x|)$? $y = |f(x)|$? Як зробити це автоматично?

До п. 8 «Квадратична функція, її графік і властивості»

12. Параболу задано формулою $y = ax^2 + bx + c$. Запишіть алгоритм, вхідними даними для якого є значення a, b, c. Алгоритм має визначити такі характеристики параболи: напрям віток, координати вершини, точки перетину з осями координат, на підставі чого зробити висновок, яку частину параболи доцільно зобразити на графіку.

Користуючись цим алгоритмом, визначте, яку ділянку параболи доцільно зобразити на графіку. Автоматизуйте процес складання відповідної таблиці значень функції та побудуйте графік за отриманою таблицею. Як ви будете вибирати значення аргументу функції для цієї таблиці, щоб графік став якомога точнішим?

До п. 9 «Розв’язування квадратних нерівностей»

13. Користуючись таблицею, наведеною в п. 9, запишіть алгоритм для розв’язування квадратної нерівності $ax^2 + bx + c > 0$, вхідними даними для якого є значення a, b, c.

Які вхідні дані треба додати до цього алгоритму та як змінити його, щоб можна було розв’язувати також нерівності $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$?

До п. 10 «Розв’язування нерівностей методом інтервалів»

14. Нехай деяку функцію визначено на $\mathbb{R}$, задано нулі й точки розриву цієї функції та є підпрограма, яка дає змогу обчислити значення функції в будь-якій точці. Запишіть алгоритм, вихідними даними якого є проміжки знакосталості цієї функції із вказанням знака функції на кожному проміжку.

До п. 11 «Розміщення нулів квадратичної функції відносно заданої точки»

15. Запишіть алгоритм, який за коефіцієнтами квадратного рівняння та значенням α визначає, як розташоване число α на координатній прямій відносно коренів даного рівняння. Які окремі випадки треба розглянути?

До п. 12 «Рівняння з двома змінними та його графік»

16. Припустимо, що рівняння з двома змінними $f(x; y) = 0$ задано дуже складною формулою $f(x; y)$, тому для побудови його графіка неможливо скористатися ні способами, вивченими в п. 12, ні табличним редактором. Проте існує підпрограма, яка дає змогу обчислити значення $f(x; y)$ для заданих значень змінних. Як побудувати графік цього рівняння на екрані комп’ютера? Наскільки адекватним буде цей графік?

До п. 13 «Графічний метод розв’язування систем рівнянь із двома змінними»

17. Остап Забудько захотів розв’язати систему рівнянь із двома змінними таким чином: для кожного з них побудувати графік рівняння, задавши в табличному редакторі таблицю відповідних значень, а потім знайти на екрані комп’ютера точки перетину цих графіків. У чому полягають недоліки цього плану?

До п. 14 «Розв’язування систем рівнянь із двома змінними методом підстановки і методами додавання та множення»

18. Нехай дано дві множини, які являють собою розв’язки двох рівнянь із двома змінними. Запишіть алгоритм, який робить висновок: чи є задані рівняння рівносильними? чи є одне з них наслідком другого (якщо так, то яке саме)? За допомогою якої структури даних ви подаватимете множину розв’язків рівняння з двома змінними?

До п. 15 «Метод заміни змінних та інші способи розв’язування систем рівнянь із двома змінними»

19. Запишіть алгоритм, який визначає, чи є многочлен: 1) однорідним; 2) симетричним.

20. Користуючись алгоритмом, створеним у попередньому завданні, запишіть алгоритм, який видає рекомендацію щодо застосування способів розв'язування системи двох рівнянь із двома змінними, вивчених у цьому пункті.

До п. 16 «Нерівності з двома змінними»

21. Опануйте засоби графічного редактора, які дають змогу зобразити на екрані комп'ютера множину розв'язків нерівності з двома змінними. Коли границю цієї області потрібно зобразити суцільною лінією, а коли — пунктирною?

22. Запишіть алгоритм, який визначає, яка фігура є графіком заданої лінійної нерівності з двома змінними.

До п. 17 «Системи нерівностей із двома змінними»

23. Нехай є кілька функцій $f_i(x; y)$ і для кожної з них існує підпрограма, яка дає змогу обчислити значення функції $f_i(x; y)$ для заданих значень змінних. Як побудувати на екрані комп'ютера графік множини розв'язків системи нерівностей, кожна з яких має вигляд $f_i(x; y) > 0$?

До п. 19 «Нерівності між середніми величинами. Нерівність Коші—Буняковського»

24. Напишіть програму для обчислення середнього квадратичного, середнього арифметичного, середнього геометричного, середнього гармонічного даних чисел a і b. Перевірте за її допомогою виконання співвідношення між цими величинами.

До п. 20 «Математичне моделювання»

25. Проаналізуйте задачі цього пункту. Опишіть кожну з них у якомога загальнішому вигляді. Знайдіть ті з них, які мають однакові математичні моделі. Запишіть алгоритм для розв'язування кожної задачі в загальному вигляді, опишіть, що є вхідними та вихідними даними для цього алгоритму.

До п. 21 «Відсоткові розрахунки»

26. Як використовувати калькулятор для обчислень за формулою складних відсотків? Розв'яжіть задачі 21.2, 21.3 за допомогою калькулятора.

27. Проаналізуйте задачі цього пункту. Знайдіть ті з них, які мають однакові математичні моделі. Складіть список «типових» задач, пов'язаних з відсотковими розрахунками. Запишіть алгоритм для розв'язування кожної задачі в загальному вигляді, опишіть, що є вхідними та вихідними даними для цього алгоритму.

До п. 22 «Метод математичної індукції»

28. Чи можна для того, щоб довести справедливість деякого твердження для всіх $n \in \mathbb{N}$, замість методу математичної індукції використати метод перебору? Чому?

До п. 23 «Основні правила комбінаторики. Перестановки»

29. Як можна проілюструвати за допомогою табличного редактора правило суми? правило добутку? Виберіть задачі із цього пункту та проілюструйте їх.

30. Напишіть програму для обчислення факторіала натурального числа, використовуючи цілі типи даних. Визначте, на яких значеннях вхідних даних програма припиняє працювати через переповнення.

31. Ознайомтеся з поняттям рекурсії. Як, використовуючи це поняття, сформувати весь набір перестановок для заданої множини? Чим схожі поняття рекурсії та метод математичної індукції?

До п. 24 «Розміщення»

32. Як сформувати весь набір розміщень по k елементів для заданої множини з n елементів?

33. Ознайомтеся з поняттям «дерево варіантів». Як можна застосувати це поняття для розв'язування комбінаторних задач?

До п. 25 «Сполуки (комбінації)»

34. Напишіть програму, яка за заданими натуральними n і k видає значення P_n, A_n^k, C_n^k. Які перевірки й обмеження потрібно врахувати? Скористайтеся результатами, отриманими під час написання програми обчислення факторіала.

До п. 26 «Частота та ймовірність випадкової події»

35. Як можна використати комп'ютер в експериментах з визначення статистичної ймовірності?

Завдання цього пункту наочно демонструють переваги використання комп'ютера для статистичних обчислень. Більш того, сучасні табличні редактори можуть взяти на себе багато технічної роботи з виконання обчислень. Опануйте інструменти табличного редактора, які дають змогу за даними, які вже є в таблиці, обчислити нові дані й занести їх у таблицю.

36. Виконайте вправу 26.6 за допомогою табличного редактора. Чи можете ви автоматизувати отримання відповідей?

37. Перенесіть наведену в задачі 26.13 таблицю в табличний редактор. Додайте стовпчик «ймовірність того, що вибраний навмання предмет виявиться предметом, описаним у даному рядку», і зробіть так, щоб цей стовпчик заповнився автоматично.

До п. 27 «Класичне означення ймовірності»

38. Табличний редактор допоможе вам розглядати всі можливі результати експериментів і позначати, які з них є сприятливими.

Складіть таблицю, у першому стовпці якої записано всі можливі результати, отримані при одночасному підкиданні двох монет (рис. 27.3). Позначте у другому стовпчику події, які є сприятливими згідно з умовою задачі. Які інструменти табличного редактора дають змогу автоматично підрахувати потрібну ймовірність?

Розв'яжіть аналогічним чином задачі 27.10, 27.17, 27.18. Яка умова має виконуватися для всіх рядків таблиці, щоб цей спосіб розв'язування давав правильні результати?

До п. 29 «Початкові відомості про статистику»

39. Опануйте комп'ютерні засоби створення та різноманітного оформлення графіків і діаграм.

До п. 30 «Числові послідовності»

40. У табличному редакторі можна заповнити клітинки таблиці членами скінченної послідовності, заданої за допомогою формули n-го члена послідовності та за допомогою рекурентної формули. Опануйте ці способи заповнення таблиці.

Використайте ці способи для виконання деяких завдань цього пункту на ваш вибір.

До п. 31 «Арифметична прогресія»

41. У табличному редакторі створіть механізм для заповнення клітинок таблиці членами скінченної арифметичної прогресії. Зробіть так, щоб цей механізм можна було використовувати для отримання арифметичної прогресії з будь-якими заданими значеннями a_1 і d.

До п. 32 «Сума n перших членів арифметичної прогресії»

42. Створіть у табличному редакторі таблицю, перший стовпчик якої містить натуральне число k — номер члена арифметичної прогресії, другий — значення k-того члена, третій — суму k перших членів арифметичної прогресії. Максимальне значення k виберіть на свій розсуд. Чи можете ви повністю автоматизувати побудову цієї таблиці за даними значеннями a_1 і d?

До п. 33 «Геометрична прогресія»

43. У табличному редакторі створіть механізм для заповнення клітинок таблиці членами скінченної геометричної прогресії. Зробіть так, щоб цей механізм можна було використовувати для отримання геометричної прогресії з будь-якими заданими значеннями b_1 і q.

До п. 34 «Сума n перших членів геометричної прогресії»

44. У завданні 42 ви створили таблицю, яка будує арифметичну прогресію із заданими a_1 і d. Доповніть цю таблицю четвертим стовпцем, який містить величину k-того члена геометричної прогресії, у якої $b_1 = a_1$, $q = d$, і п'ятим стовпцем, який містить суму перших k членів цієї геометричної прогресії. Побудуйте графік на основі цієї таблиці.

Дослідіть поведінку цих арифметичної та геометричної прогресій для різних значень a_1 і d.

До п. 35 «Уявлення про границю послідовності. Сума нескінченної геометричної прогресії, модуль знаменника якої менший від 1»

45. Побудуйте таблицю, яка за заданою формулою n-го члена послідовності обчислює задану кількість членів цієї послідовності. Побудуйте відповідний графік. За допомогою цієї таблиці продемонструйте «поведінку» збіжних і розбіжних послідовностей.

46. Побудуйте таблицю, яка ілюструє обчислення суми n перших членів нескінченної геометричної прогресії, у якої $|q| < 1$. Побудуйте відповідний графік.

До п. 36 «Сумування»

47. Як можна за допомогою комп'ютера знаходити наближені значення шуканих сум?

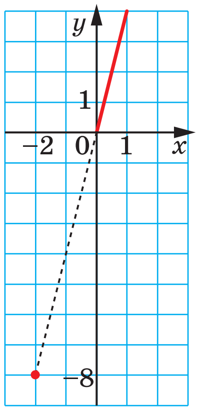
Відповіді та вказівки до вправ

1.10. 6. **1.12.** Більше тих, у яких цифри записано в порядку спадання. **1.15.** 3) $a^2 - a + 5$; 4) $x^{48} + x^{24} + 1$. **1.16.** 1) 2; 2) 1. **1.17.** $\frac{4}{x(x+16)}$.
1.18. 1) $\frac{2(1-3y)}{(3y+1)(2x+7)}$; 2) $\frac{x^2+xy+y^2}{y-2}$; 3) $\frac{1}{ab}$; 4) $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$. **1.19.** 3) $\frac{x-y}{x+y}$; 4) 1. **1.20.** 1) 2; 2) $(4; +\infty)$. **1.21.** 2) Якщо $a = 2$, то x — будь-яке число; якщо $a > 2$, то $x \geqslant -a-2$; якщо $a < 2$, то $x \leqslant -a-2$. **1.22.** 1) $[2; +\infty) \cup \{-1\}$; 2) $(-1; 2) \cup (2; +\infty)$; 3) $[1; +\infty) \cup \{-2\}$; 4) $(-\infty; -3) \cup (-3; -2)$. **1.23.** 1) Якщо $a \leqslant 1$, то $x \geqslant a$; якщо $1 < a \leqslant 3$, то $x \geqslant a$ або $x = 1$; якщо $a > 3$, то $x \geqslant a$, або $x = 1$, або $x = 3$. **1.24.** 4) $[-1; 4]$; 6) 2; -2. **1.25.** 4) $\left[-\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **1.28.** 1) 1; 2) 2; 3; 3) 1; 4. **1.29.** 1) (0; 2), (4; 2); 2) (1; −1), (1; 2), (5; −1), (5; 2); 3) (1; −1), (−1; 1). **1.30.** 1) Якщо $a = 1$, то $x \geqslant 3$; якщо $a \neq 1$, то $x = 3$; 2) якщо $a < 1$, то $x = a$, або $x = 1$, або $x = 3$; якщо $1 \leqslant a < 3$, то $x = a$ або $x = 3$; якщо $a \geqslant 3$, то $x = a$; 3) якщо $a < 0$ або $a = 1$, то $x = 1$; якщо $a \geqslant 0$ і $a \neq 1$, то $x = 1$ або $x = a^2$. **1.31.** 1) 6; 2) $6\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{2}+1$; 4) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. **1.32.** 1) $\sqrt{a-3}+1$; 2) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}$; 3) $\sqrt{a-3}$; 4) 1. **1.33.** 1) 1; 2) $2ab$; 3) $\frac{16x\sqrt{x}}{(1-x^2)(x-1)}$; 4) $\frac{x+y}{2}$. **1.36.** $a = 1$.
1.37. $a = 2$. **1.38.** 1) 9; 2) 0; 3) −3; −1; 2; 6. **1.39.** 1) 2; 3; $\frac{5 \pm \sqrt{89}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{12}$; 3) −2; 3; $\frac{-7 \pm \sqrt{73}}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 2; 5) $-1 \pm \sqrt{3}$; $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$; 6) 1; −1; $2 \pm \sqrt{3}$; 7) −4; 8) $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$. **1.42.** Не існують. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що значення виразу $5^n + 1$ не кратне 4. **1.45.** $m = 4$, $n = 6$. *Вказівка*. При $m \geqslant 5$ остання цифра десяткового запису числа $m! + 12$ дорівнює 2. **1.46.** 25; 76. *Вказівка*. Шукане число n таке, що число $(n^2 - n)$ кратне 100. Далі скористайтеся тим, що НСД $(n;\ n-1) = 1$. **1.47.** *Вказівка*. $\frac{2n^2+5n+3}{3n^2+10n+8} = \frac{(n+1)(2n+3)}{(n+2)(3n+4)}$. Доведіть, що НСД $(n+1;\ n+2) = 1$, НСД $(n+1;\ 3n+4) = 1$, НСД $(2n+3;\ n+2) = 1$, НСД $(2n+3;\ 3n+4) = 1$. **1.48.** *Вказівка*. Можна записати: $x^2 + ax + b = (x - x_1)(x - x_2)$, де $x_1 \in \mathbb{N}$, $x_2 \in \mathbb{N}$, $x_1 > 2$, $x_2 > 2$. Звідси $1 + a + b = (1 - x_1)(1 - x_2)$. **1.49.** 8. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що дві останні цифри запису числа $n^2 + 8n + 16$ — нулі.

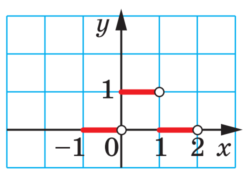
2.10. 2) $(-\infty; -7) \cup (-7; 7) \cup (0; +\infty)$; 4) $[4; 6) \cup (6; +\infty)$. **2.24.** 3) $\{1\} \cup [2; +\infty)$; 4) $\{-1\} \cup [3; +\infty)$; 5) $(-2; 0) \cup (0; +\infty)$; 6) $[0; +\infty)$. **2.25.** 3) $(-3; -1) \cup (-1; +\infty)$; 4) $\{-4\} \cup [3; +\infty)$; 5) $\{-5\} \cup [-2; +\infty)$; 6) $(0; +\infty)$. **2.26.** 1) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{23}{8}\right]$;

3) $\left(-\infty;\ \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$; 4) $(-\infty;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ -6] \cup [6;\ +\infty)$. **2.27.** 1) $\left[\frac{19}{20};\ +\infty\right)$; 2) $\left(-\infty;\ -\frac{23}{12}\right]$; 3) $\left(-\infty;\ \frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5};\ +\infty\right)$; 4) $(-\infty;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ -4] \cup [4;\ +\infty)$.

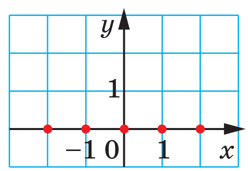
2.28. Див. рисунок. **2.29.** 1) $[-4;\ 1]$; 2) $\left[-\frac{1}{2};\ 2\right]$; 3) $[-3;\ 2]$; 4) $[-2;\ 2]$; 5) $[-4;\ 4]$; 6) $(-\infty;\ -1] \cup \left[\frac{1}{4};\ +\infty\right)$. **2.30.** 1) $[-10;\ 0]$; 2) $[-27;\ 3]$; 3) $[-1;\ 1]$; 4) $[-1;\ 1]$; 5) $[0;\ 1]$; 6) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{9}\right] \cup [1;\ +\infty)$.
2.31. 1) $\mathbb{Q}$; 2) $(-\infty;\ 0) \cup [1;\ +\infty)$; 3) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; 4) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; 5) $\mathbb{Q}$. **2.32.** 1) $\{1\}$; 2) $\{0,\ 1\}$; 3) $\mathbb{Q}$. **2.33.** 1) $\{0,\ 1\}$; 2) $\{0\}$. **2.34.** 3) Див. рисунок. *Вказівка.* $D\ (y) = [-1;\ 2)$, $E\ (y) = \{0,\ 1\}$.



До задачі 2.28

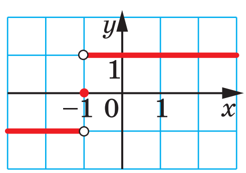


До задачі 2.34 (3)

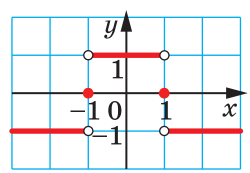


До задачі 2.35 (2)

2.35. 2) Див. рисунок. *Вказівка.* $D\,(y) = \mathbb{Z}$, $E\ (y) = \{0\}$. **2.36.** 1) Див. рисунок; 2) див. рисунок.

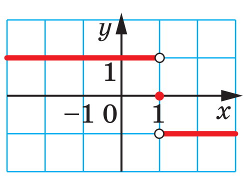


До задачі 2.36 (1)

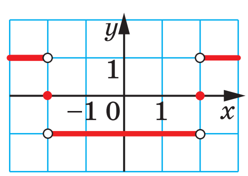


До задачі 2.36 (2)

2.37. 1) Див. рисунок; 2) див. рисунок.

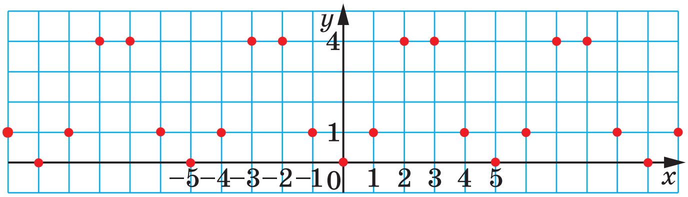


До задачі 2.37 (1)



До задачі 2.37 (2)

2.38. Див. рисунок. *Вказівка*. Скористайтеся тем, що коли $x \in \mathbb{Z}$, то $x^2 \equiv r \pmod 5$ тільки при $r \in \{0, 1, 4\}$.



До задачі 2.38

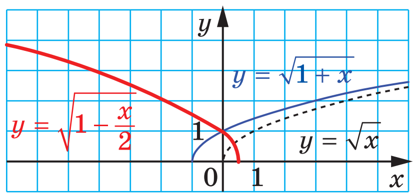
2.40. $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$. **2.41.** $g(x) = 13 - 3x$. **2.42.** $f(x) = \frac{1}{3} - x$. *Вказівка*. Оскільки рівність, задана в умові, виконується при всіх x, то замість x підставте $-x$. Отримаємо: $f(-x) + 2f(x) = -x + 1$. Із системи $\begin{cases} f(x) + 2f(-x) = x + 1, \\ f(-x) + 2f(x) = -x + 1 \end{cases}$ знаходимо $f(x) = \frac{1}{3} - x$. Залишилося перевірити, що знайдена функція задовольняє умову задачі. **2.43.** $f(x) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$. *Вказівка*. До даної рівності замість x підставте $\frac{1}{x}$. **2.44.** $f(x) = \frac{x+10}{3}$. *Вказівка*. До даної рівності замість x підставте $1 - x$. **2.45.** 0; −2. *Вказівка*. Подайте дану функцію у вигляді $f(x) = (x+1)^2 - 1$. Тоді легко встановити, що $f(f(f(x))) = (x+1)^8 - 1$. **2.46.** −5; −4. *Вказівка*. $f(x) = (x+5)^2 - 5$. **2.47.** 1. *Вказівка*. Очевидно, що $x^2 - x + 1 \geqslant x$. Тоді $f(f(x)) \geqslant f(x) \geqslant x$. **2.51.** $\frac{16x\sqrt{x}}{(1-x^2)(x-1)}$.

3.8. 5) 1; 6) 1; 7) $[0; +\infty)$; 8) $\mathbb{Z}$; 9) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **3.9.** 4) $(-\infty; 0]$; 5) 3; 6) $[0; 1)$; 7) $\{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$; 8) $\frac{1}{2}$. **3.10.** 4) $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$; 6) $(k; k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.11.** 6) $(1; 3)$, $(3; +\infty)$; 7) $(-\infty; 0)$, $[1; +\infty)$. **3.12.** 2. **3.13.** $m < -2$. **3.14.** Зростає на кожному з проміжків виду $[k; k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.25.** Зростає на проміжку $(-\infty; 0]$, спадає на проміжку $[0; +\infty)$. *Вказівка*. Скористайтеся теоремою 3.5. **3.27.** Зростає на проміжку $[a; +\infty)$, спадає на проміжку $(-\infty; a]$. **3.28.** *Вказівка*. Скористайтеся теоремами 3.3 і 3.4. **3.31.** 1) $\min\limits_M f(x) = 1$, найбільшого значення не існує; 2) $\min\limits_{[-4;\,4]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[-4;\,4]} f(x) = 4$. **3.32.** 1) $\max\limits_M f(x) = 13$, найменшого значення не існує; 2) $\min\limits_{[0;\,2]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[0;\,2]} f(x) = 1$. **3.33.** 1) 2; 2) 2; 3) 1. **3.34.** 1) Зростаюча; 2) зростаюча. **3.35.** 1) Спадна; 2) спадна. **3.36.** $a = 0$. *Вказівка*. Із теореми 3.6 випливає, що дана функція повинна мати не більше одного нуля. **3.37.** $a = 1$. **3.38.** $a \leqslant 2$. **3.39.** $a \leqslant 1$. **3.40.** 1) −1. *Вказівка*. Доведіть, що ліва частина рівняння задає зростаючу функцію; 2) 3; 3) 2. **3.41.** 1) 1; 2) 9; 3) $\frac{1}{2}$. **3.42.** 1) 9. *Вказівка.* Доведіть, що ліва і права частини рівняння задають функції, одна з яких є зростаючою, а друга — спадною; 2) 1. **3.43.** 1) 4; 2) 4. **3.44.** 0. **3.45.** 0. **3.46.** (2; 2), (−2; −2). *Вказівка.* Перше рівняння системи перепишемо так: $x^7 + x = y^7 + y$. Розглянемо функцію $f(t) = t^7 + t$. Вона є зростаючою. Тоді $x = y$. **3.47.** (1; 1). **3.48.** (1; 0), (0; 1). *Вказівка.* Розгляньте функцію $f(t) = 2\sqrt{t} + t^4$. Вона є зростаючою. **3.49.** *Вказівка.* Див. приклад 8 п. 3. **3.50.** *Вказівка.* Ліву частину нерівності подайте у вигляді $(B - A)\ x_1 + A + B$, де $A = (1 - x_2) \times$ $\times (1 - x_3) \ldots (1 - x_n)$, $B = (1 + x_2)(1 + x_3) \ldots (1 + x_n)$. Розгляньте функцію $f(x) =$ $= (B - A)\ x + A + B$, $D(f) = [0;\ 1]$. Для будь-якого $x \in [0;\ 1]$ виконується нерівність $f(x) \leqslant f(1)$. **3.52.** 3. *Вказівка.* Див. приклад 5 п 3. **3.53.** 1, $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. *Вказівка.* Перепишіть дане рівняння так: $\frac{\left(\frac{x^3+1}{2}\right)^3+1}{2} = x$. Розгляньте функцію $f(x) = \frac{x^3+1}{2}$. **3.54.** Не може. *Вказівка.* Доведіть, що $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$. **3.55.** 9. **3.56.** (0; 2), (4; 2). **3.58.** $(-1;\ 2) \cup (2;\ +\infty)$.

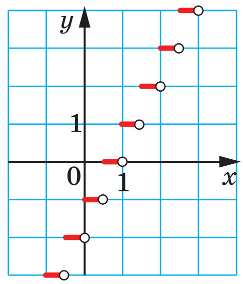
4.6. 6) Парна; 7) непарна; 8) непарна. **4.7.** Парна. **4.8.** Парна. **4.9.** Непарна. **4.11.** 0. **4.13.** 0. **4.14.** 0. **4.15.** Парна. **4.16.** Непарна. **4.17.** Спадна. **4.18.** Зростаюча. **4.19.** 2; 5. **4.20.** −3; −1. **4.21.** 0. *Вказівка.* Доведіть, що функція f є сталою на проміжку [−5; 5]. **4.22.** 1) $a = 1$. *Вказівка.* Покажіть, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ рівність $(x - 1)^4 + a\ (x + 1)^4 = (x + 1)^4 + a\ (x - 1)^4$ виконується тільки при $a = 1$; 2) $a = -1$. **4.23.** $a = 1$. *Вказівка.* Див. приклад 3 п. 4. **4.24.** *Вказівка.* Даний вираз задає парну функцію. Доведіть, що многочлен, який задає парну функцію, не містить одночленів непарного степеня. **4.25.** $\sqrt{a-3}+1$. **4.28.** 2; 3; $\frac{5\pm\sqrt{89}}{2}$.

5.28. $\sqrt{2}+1$. **5.29.** $a = 2$.

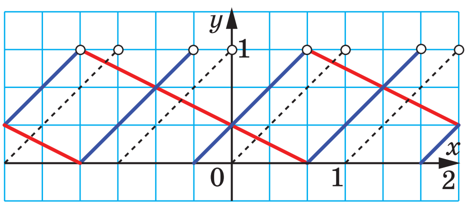
6.17. *а)* $y = x^2 + 3$; *б)* $y = -2x^2 - 1$. **6.18.** *а)* $y = 2x^2 - 6$; *б)* $y = 4 - x^2$. **6.19.** *а)* $y = (x - 2)^2$; *б)* $y = -3\ (x + 3)^2$. **6.20.** *а)* $y = \frac{1}{2}(x+4)^2$; *б)* $y = -2\ (x - 1)^2$. **6.21.** *а)* $y = (x + 2)^2 - 4$; *б)* $y = -(x - 2)^2 + 5$; *в)* $y = \frac{1}{3}(x-3)^2 + 1$. **6.22.** *а)* $y =$ $= (x - 4)^2 - 5$; *б)* $y = -2\ (x + 6)^2 + 7$. **6.27.** Обидва твердження є правильними. **6.30.** 3) *Вказівка.* $y = \frac{-2x+2-2}{x-1} = -2 - \frac{2}{x-1}$; 4) *Вказівка.* $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{x-1}{x+\frac{1}{2}}$. **6.32.** 2) Див. рисунок. *Вказівка.* $y = \sqrt{x} \to y = \sqrt{1+x} \to y = \sqrt{1-\frac{x}{2}}$. **6.34.** 5) Див. рисунок. *Вказівка.* $y = [x] \to y = [x - 1] \to y = [2x - 1]$. **6.35.** 8) Див. рисунок.



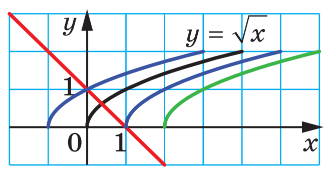
До задачі 6.32 (2)



До задачі 6.34 (5)

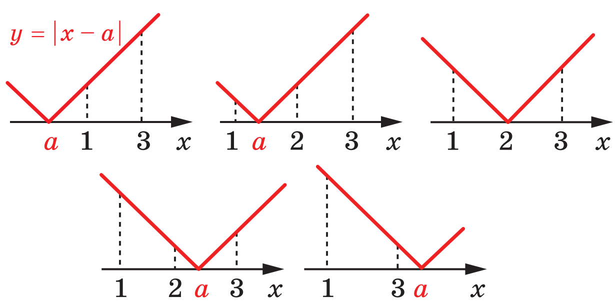


До задачі 6.35 (8)

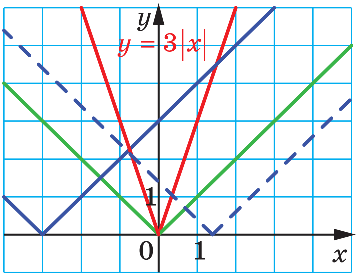


До задачі 6.38

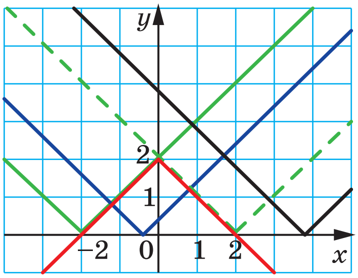
Вказівка. $y=\{x\} \to y=\left\{x+\frac{1}{3}\right\} \to y=\left\{-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right\}$. **6.36.** Якщо $a<0$, то коренів немає; якщо $a=0$, то один корінь; якщо $a>0$, то 2 корені. *Вказівка*. Розгляньте графіки функцій $f(x)=a-|x|$ і $g(x)=x^2$. **6.37.** $a<0$. **6.38.** Якщо $a\leqslant 1$, то один корінь; якщо $a>1$, то коренів немає (див. рисунок). **6.39.** Якщо $a\geqslant -2$, то один корінь; якщо $a<-2$, то коренів немає. **6.40.** Якщо $a\leqslant 1$, то $\min\limits_{[1;\,3]} f(x)=1-a$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x)=3-a$; якщо $1<a<2$, то $\min\limits_{[1;\,3]} f(x)=0$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x)=3-a$; якщо $a=2$, то $\min\limits_{[1;\,3]} f(x)=0$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x)=1$; якщо $2<a<3$, то $\min\limits_{[1;\,3]} f(x)=0$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x)=a-1$; якщо $a\geqslant 3$, то $\min\limits_{[1;\,3]} f(x)=a-3$, $\max\limits_{[1;\,3]} f(x)=a-1$ (див. рисунок).



До задачі 6.40

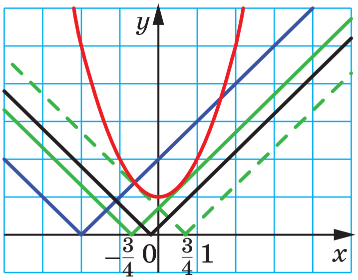


До задачі 6.42



До задачі 6.43

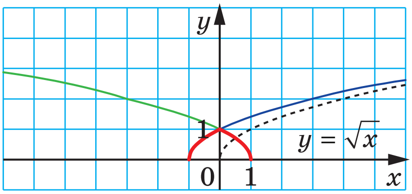
6.42. Якщо $a \neq 0$, то 2 корені; якщо $a = 0$, то один корінь (див. рисунок). **6.43.** Якщо $|a| > 2$, то коренів немає; якщо $|a| = 2$, то безліч коренів; якщо $|a| < 2$, то 2 корені. *Вказівка*. Перепишіть рівняння так: $2 - |x| = |x - a|$ і скористайтеся рисунком. **6.44.** Якщо $|a| > \frac{3}{4}$, то 2 корені; якщо $|a| = \frac{3}{4}$, то один корінь; якщо $|a| < \frac{3}{4}$, то коренів немає. *Вказівка*. Див. рисунок. Значення параметра a, при яких пряма та парабола мають одну спільну точку, можна знайти з умови, що кожне з квадратних рівнянь $x - a = x^2 + 1$ і $a - x = x^2 + 1$ повинне мати один корінь.



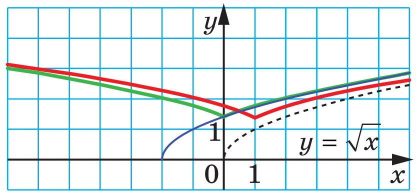
До задачі 6.44

6.45. Якщо $|a| > \frac{9}{4}$, то коренів немає; якщо $|a| = \frac{9}{4}$, то один корінь; якщо $|a| < \frac{9}{4}$, то 2 корені. **6.47.** $\frac{x+y}{2}$. **6.48.** (1; −1), (1; 2), (5; −1), (5; 2).**6.49.** −4.

7.8. 1) [−7; 7]; 2) [−3; 7], [0; 6]. **7.9.** 1) −2; 2; $y > 0$ при $x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (-2; 2)$; 2) −3; 2; $y > 0$ при $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 2) \cup (2; +\infty)$. **7.11.** *Вказівка*. 1) Скористайтеся схемою: $y = f(x) \to y = f(x - 1) \to y = f(|x| - 1)$; 2) скористайтеся схемою: $y = f(x) \to y = f(|x|) \to y = f(|x - 1|)$. **7.13.** 4) Див. рисунок. *Вказівка*. Скористайтеся схемою: $y = \sqrt{x} \to y = \sqrt{1 + x} \to y = \sqrt{1 - x} \to \sqrt{1 - |x|}$.

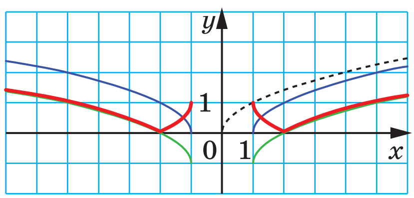


До задачі 7.13 (4)



До задачі 7.15 (3)

7.15. 3) Див. рисунок. *Вказівка.* Скористайтеся схемою: $y=\sqrt{x}\to y=\sqrt{x+2}\to y=\sqrt{|x|+2}\to y=\sqrt{|x-1|+2}$. **7.17.** 1) Якщо $a<0$, то коренів немає; якщо $a=0$ або $a>1$, то 2 корені; якщо $a=1$, то 3 корені; якщо $0<a<1$, то 4 корені; 2) якщо $a<0$, то коренів немає; якщо $a=0$ або $a>1$, то 2 корені; якщо $a=1$, то 3 корені; якщо $0<a<1$, то 4 корені; 3) якщо $a<0$, то коренів немає; якщо $a=0$, то 3 корені; якщо $0<a<1$, то 6 коренів; якщо $a=1$, то 4 корені; якщо $a>1$, то 2 корені; 4) якщо $a<0$, то коренів немає; якщо $a=0$ або $a>2$, то 1 корінь; якщо $0<a<2$, то 2 корені. **7.18.** 3) Якщо $a<0$, то коренів немає; якщо $a=0$ або $a=3$, то 4 корені; якщо $0<a<1$, то 8 коренів; якщо $a=1$, то 7 коренів; якщо $1<a<3$, то 6 коренів; якщо $a>3$, то 2 корені. **7.23.** 1) Див. рисунок. *Вказівка.* Скористайтеся схемою: $y=\sqrt{x}\to y=\sqrt{x-1}\to y=\sqrt{|x|-1}\to y=\sqrt{|x|-1}-1\to$ $\to y=\left|\sqrt{|x|-1}-1\right|$.

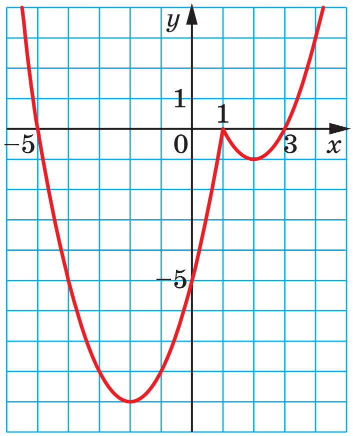


До задачі 7.23 (1)

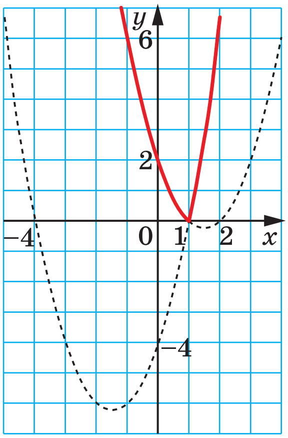
7.25. $a=0$ або $a=2$. **7.26.** $a=1$ або $a=-5$. **7.27.** $a=-2$ або $a=-\frac{1}{2}$. **7.28.** $a=1$ або $a=-\frac{1}{3}$. **7.29.** $a=-\frac{1}{2}$. **7.30.** $a=\frac{8}{3}$. **7.32.** 0. **7.33.** $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right)$. **7.34.** $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$.

8.10. -1; 1; 3. **8.11.** 4. **8.12.** 1) 2 корені; 2) 1 корінь. **8.13.** 3 корені. **8.14.** 1) $(-1;-1)$, $(9;9)$; 2) $(2;23)$, $(8;17)$. **8.15.** $(3;15)$, $(-1;11)$. **8.18.** 1) -25; 2) -13; 3) -22. **8.19.** 1) 26; 2) 17; 3) -10. **8.20.** $p=1$, $q=4$. **8.21.** $a=-\frac{7}{6}$, $b=\frac{7}{6}$. **8.22.** $a=3$, $b=5$. **8.25.** $a=9$. **8.26.** $b=-16$. **8.27.** $b=18$. **8.28.** $a\leqslant-1$. **8.29.** $a\geqslant3$. **8.30.** $a=0$, або $a=1$, або $a=4$. **8.31.** $c=-8$. **8.32.** $c=14$.

8.33. $c > 14$. **8.34.** $a = \frac{3}{2}$ або $a = -\frac{5}{2}$. *Вказівка*. Рівняння $x^2 - 2ax + 3 = x - 1$ повинне мати єдиний розв'язок. **8.35.** $a = -5$. **8.36.** *а*) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$; *б*) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$. **8.38.** Ні. *Вказівка*. Доведіть, що числа a і c мають різні знаки. **8.39.** $c > 0$. *Вказівка*. З умови випливає, що $f(1) > 0$. **8.40.** 1; 3. **8.41.** $a = -3$, або $a = -1$, або $a = 1$, або $a = 3$. *Вказівка*. Модулі координат вершини параболи рівні. **8.42.** $-2 < a < 0$. **8.43.** $p = -4$, $q = 9$. **8.44.** $a = 1$, $b = -8$, $c = 6$. **8.45.** *а*) -4; *б*) 4. **8.46.** -1. **8.53.** 3) Див. рисунок. **8.54.** 2) Див. рисунок.

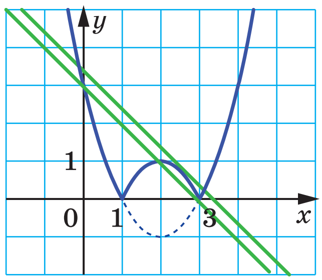


До задачі 8.53 (3)

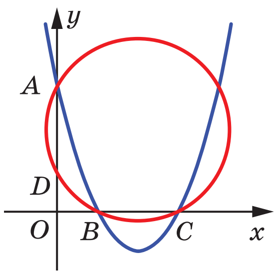


До задачі 8.54 (2)

8.57. 2 корені. **8.58.** Ні. *Вказівка*. Графіки мають перетинатися в точці, абсциса якої дорівнює 1. **8.59.** Ні. *Вказівка*. Доведіть, що $a = c$. Тоді число -1 — нуль лінійної функції. **8.61.** -1. *Вказівка*. $f(1) \geqslant 0$. **8.62.** *Вказівка*. Координати вершин парабол мають вигляд $(a;\ a + 1)$. **8.64.** *Вказівка*.
$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{якщо } x \leqslant 1, \\ -1, & \text{якщо } 1 < x < 2, \\ x^2 - 4x + 3, & \text{якщо } x \geqslant 2. \end{cases}$ **8.66.** $\frac{25}{16}$. *Вказівка*. Розгляньте функцію $f(t) = t^2 + 2t + 2$, $D(f) = \left[-\frac{1}{4};\ +\infty\right)$. **8.67.** $a = 3$ або $a = \frac{13}{4}$. *Вказівка*. Див. рисунок. **8.68.** $-\frac{5}{4} < a < \frac{21}{4}$. *Вказівка*. Треба знайти всі значення параметра a, при яких нерівність $x^2 - 4x + 3 + |x - a| < 2$ має хоча б один розв'язок. **8.69.** $a = 1$. *Вказівка*. Покажіть, що $x_1^2 + x_2^2 = 2(a^2 + a - 1)$, де x_1 і x_2 — корені рівняння. Дане рівняння має корені, якщо його дискримінант $D = 4a - 4 \geqslant 0$, тобто $a \geqslant 1$. Тому потрібно дослідити на найменше значення функцію $f(a) = 2(a^2 + a - 1)$, $D(f) = [1;\ +\infty)$. **8.70.** $a = 2$.



До задачі 8.67



До задачі 8.74

8.71. Якщо $a<-\frac{3}{4}$, то 4 корені; якщо $-\frac{3}{4}\leqslant a<\frac{1}{4}$, то 2 корені; якщо $a=\frac{1}{4}$, то один корінь; якщо $a>\frac{1}{4}$, то коренів немає. *Вказівка.* Розглянувши дане рівняння як квадратне відносно a, отримуємо таку сукупність: $\left[\begin{array}{l} a=-x^2+x, \\ a=-x^2-x-1. \end{array}\right.$ На координатній площині xa побудуйте графік даного рівняння. **8.72.** Усі точки, які лежать нижче від параболи $y=-x^2-3$. *Вказівка.* Маємо: $2a^2-4ax+x^2-y-3=0$. Розгляньте цю рівність як квадратне рівняння відносно a. Його дискримінант $D=8x^2+8y+24$ має бути від'ємним. **8.73.** *Вказівка.* Скористайтеся тем, що $f(0)\,f(1)=f(c)$. **8.74.** *Вказівка.* Нехай парабола перетинає осі координат у точках $A\ (0;\ y)$, $B\ (x_1;\ 0)$ і $C\ (x_2;\ 0)$, де x_1 і x_2 — нулі квадратичної функції (див. рисунок). Коло, яке проходить через точки A, B і C, перетинає вісь ординат у точці D. Маємо: $OB\cdot OC=OA\cdot OD$. Далі, скориставшися теоремою Вієта, покажіть, що коло проходить через точку $(0;\ 1)$. **8.76.** *Вказівка.* Позначимо $a=x$ і розглянемо функцію $f\ (x)=x^2+b^2+c^2-x^2b-b^2c-c^2x-1$. Маємо: $f\ (x)=(1-b)\ x^2-c^2x+b^2+c^2-b^2c-1$. Якщо $b\neq 1$, то графіком цієї функції є парабола, вітки якої напрямлені вгору, а отже, найбільшого значення на відрізку $[0;\ 1]$ функція набуває в одній із точок $x=0$ або $x=1$. Тоді достатньо довести дві нерівності: $f(0)\leqslant 0$ і $f(1)\leqslant 0$. Випадок $b=1$ розгляньте окремо. **8.78.** $(-\infty;\ -3)\cup(-3;\ -2)$. **8.79.** 1. **8.80.** 1. **8.81.** $-3;\ -1;\ 2;\ 6$.

9.9. 1) $(-2;\ 1)$; 2) $(-\infty;\ -5]\cup[2;\ +\infty)$; 3) $\left[-3;\ -\frac{1}{3}\right]$; 4) $(-\infty;\ -21)\cup(1;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ -3)\cup(4;\ +\infty)$; 6) $\left[-\frac{13}{3};\ 1\right]$. **9.10.** 1) $(-\infty;\ 1]\cup[4;\ +\infty)$; 2) $(-5;\ -3)$; 3) $\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{2}\right)$; 4) $(-\infty;\ -10)\cup(1;\ +\infty)$. **9.11.** При $-5<x<4$. **9.12.** При $1<x<2{,}5$. **9.13.** 1) -6; 2) -2. **9.14.** 1) 1; 2) -3. **9.19.** 1) $-4<a<4$; 2) $-8<a<12$; 3) $\frac{3}{8}<a<\frac{3}{2}$. **9.20.** 1) $b<-\frac{1}{16}$ або $b>1$; 2) $b<4$ або $b>10$. **9.21.** 1) $(0;\ 3]$;

2) $[-4; -0{,}5]\cup[6; +\infty)$; 3) $[-1; 0)\cup(6; 10]$; 4) $(-5; -3]$. **9.22.** 1) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{5}{3}; 3\right)$; 2) $(-2; 0)\cup[5; 9)$. **9.23.** 1) $-4; -3; -2; -1; 0; 1$; 2) $-3; -2; 1; 2$. **9.24.** 1) $(6; +\infty)$; 2) $(-3; 5)\cup(5; 6)$; 3) $(-\infty; -9)\cup(-9; -2]\cup[7; 9)\cup(9; +\infty)$; 4) $\left(-1; \frac{2}{3}\right)$. **9.25.** 1) $[-2; 2)$; 2) $(-5; 6)\cup(6; 7)$. **9.26.** 1) $(-11; 11)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right]\cup\left[\frac{1}{8}; +\infty\right)$; 3) $[-5; -3]\cup[3; 5]$; 4) $(-\infty; -1)\cup\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)\cup(1; +\infty)$. **9.27.** 1) $(-\infty; -1]\cup[-0{,}4; 0{,}4]\cup$ $\cup[1; +\infty)$; 2) $[-2; 2]$; 3) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$. **9.28.** 1) $(-3; 4)$; 2) $(1; 4)$; 3) $\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$; 4) $(-\infty; 1)\cup(3; +\infty)$; 5) $[-1; 0]\cup[1; 6]$; 6) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$; 7) $(-\infty; 1)$; 8) $[-4; 2]\cup\left[3+\sqrt{17}; +\infty\right)$. **9.29.** 1) $(-6; -3)\cup(-2; 1)$; 2) $\left(-1-\sqrt{5}; -2\right)\cup$ $\cup\left(-2; -1+\sqrt{5}\right)$; 3) $\left(-5; 3+2\sqrt{2}\right)$; 4) $(-\infty; -1]\cup[5; +\infty)$; 5) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$; 6) $(-2; 3)$.

9.30. 1) $a > 4$; 2) $-1\leqslant a\leqslant\frac{3}{5}$; 3) $0<a<\frac{1}{2}$; 4) $a>\frac{5}{3}$; 5) $a > 6$. **9.31.** 1) $a\geqslant 9$; 2) $3\leqslant a\leqslant 7$; 3) $a\geqslant 1$; 4) $a\geqslant 4$. **9.32.** $a\geqslant\frac{9}{2}$. **9.33.** $a < -16$. **9.34.** $\frac{8\pm 2\sqrt{7}}{9}$. **9.35.** 1) Якщо $a < 1$, то $a < x < 1$ або $x > 4$; якщо $1\leqslant a\leqslant 4$, то $x > 4$; якщо $a > 4$, то $x > a$; 2) якщо $a\leqslant -\frac{1}{4}$, то розв'язків немає; якщо $-\frac{1}{4}<a\leqslant 1$, то $-\frac{1}{4}\leqslant x<a$; якщо $a > 1$, то $-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant 1$. **9.36.** 1) Якщо $a\leqslant -8$, то $-8 < x < 9$; якщо $-8 < a < 9$, то $a < x < 9$; якщо $a \geqslant 9$, то розв'язків немає; 2) якщо $a < 1$, то $x < a$; якщо $1\leqslant a\leqslant 8$, то $x < 1$; якщо $a > 8$, то $x < 1$ або $8 < x < a$. **9.37.** $1\leqslant a\leqslant 2$. *Вказівка*. Множина розв'язків першої нерівності має містити множину розв'язків другої нерівності. Шукані значення параметра a є розв'язками системи $\begin{cases}1\leqslant a\leqslant 3,\\ 1\leqslant 2a-1\leqslant 3.\end{cases}$ **9.38.** $-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{2}{3}$. **9.39.** $a \in [-2; 0]$. **9.40.** $a \in [0; 1]$. **9.41.** $\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$. *Вказівка*. Маємо: $f(x) = ax^2 + bx + c$. З умови випливає, що $f(1) < 0$. Умові задачі відповідає клітинка 5 таблиці на с. 103. **9.42.** $\varnothing$. **9.43.** 1) $a=\frac{4}{3}$ або $-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}$; 2) $0<a<\frac{1}{3}$. **9.44.** 1) $a=\frac{5}{2}$ або $-1\leqslant a\leqslant 1$; 2) $0<a<\frac{3}{2}$. **9.45.** *Вказівка*. Розгляньте функцію $f(x) = ax^2 + bx + c$. **9.46.** *Вказівка*. Розгляньте функцію $f(x) = cx^2 + bx + a$. **9.47.** 1; $\sqrt{33}$; $\sqrt{41}$; 7. *Вказівка*. Можна записати: $x^2 - 8(x - \{x\}) + 7 = 0$. Звідси $x^2 - 8x + 7 = -8\{x\}$.

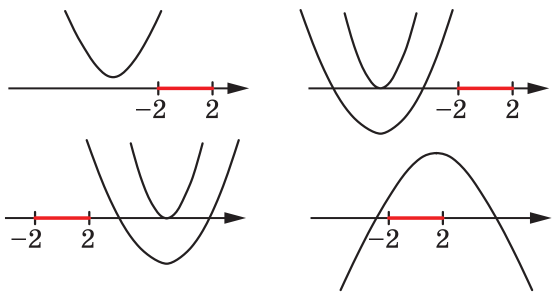
Розв'язки рівняння потрібно шукати серед розв'язків системи $\begin{cases} x^2-8x+7\leqslant 0, \\ x^2-8x+7>-8. \end{cases}$ Маємо: $x\in[1;\ 3)\cup(5;\ 7]$. Далі розгляньте 5 випадків: 1) $x\in[1;\ 2)$; 2) $x\in[2;\ 3)$; 3) $x\in(5;\ 6)$; 4) $x\in[6;\ 7)$; 5) $x=7$. Для цих випадків $[x]$ дорівнює відповідно 1, 2, 5, 6, 7. **9.48.** 1; $\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$; $\sqrt{19}$; 5. **9.50.** $(1;\ -1)$, $(-1;\ 1)$. **9.51.** Якщо $a<0$ або $a=1$, то $x=1$; якщо $a\geqslant 0$ і $a\neq 1$, то $x=1$ або $x=a^2$. **9.52.** $\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

10.1. 4) $\left(-1;\ \frac{1}{2}\right)\cup(3;\ +\infty)$. **10.2.** 4) $(-\infty;\ -5)\cup\left(-\frac{3}{5};\ 0\right)\cup\left(\frac{3}{4};\ 2\right)$. **10.3.** 2) $(-\infty;\ -1)\cup(3;\ 4)\cup(4;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -6)\cup\left(-\frac{3}{2};\ \frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};\ 2\right)$. **10.4.** 3) $(-\infty;\ -4)\cup\cup\left(\frac{1}{2};\ 2\right)\cup(2;\ 3)$. **10.5.** 2) $\left(-\frac{5}{3};\ 2\right)$; 7) $(-\infty;\ -3)\cup(2;\ +\infty)$. **10.6.** 2) $\left(-\frac{2}{3};\ 3\right)\cup(3;\ +\infty)$; 4) $\left(\frac{-1-\sqrt{21}}{2};\ 1\right)\cup\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2};\ +\infty\right)$. **10.7.** 4) $(-5;\ 0)\cup\left(\frac{1}{4};\ 1\right)\cup(1;\ 8)$; 7) $(-2;\ 1)\cup\cup(3;\ 4)$. **10.8.** 4) $(-\infty;\ -7)\cup(-1;\ 1)\cup(2;\ +\infty)$; 6) $\left(-1;\ \frac{1}{3}\right)\cup(2;\ 3)\cup(7;\ +\infty)$; 8) $(-\infty;\ -2)\cup\left(-\sqrt{3};\ -1\right)\cup\left(1;\ \sqrt{3}\right)\cup(2;\ +\infty)$. **10.9.** 5) $(-\infty;\ -1)\cup\left(0;\ \frac{1}{2}\right)\cup(1;\ +\infty)$; 7) $(-5;\ -1)\cup(2;\ 3)$. **10.10.** 5) $(-\infty;\ -4)\cup(-3;\ 3)\cup(6;\ +\infty)$; 8) $(-\sqrt{2};\ 0)\cup(1;\ \sqrt{2})\cup\cup(2;\ +\infty)$. **10.11.** 2) $(-\infty;\ 1]\cup[2;\ +\infty)$; 4) $(-\infty;\ -3]\cup[0;\ 2)$. **10.12.** 3) $(-\infty;\ -6]\cup\cup[-4;\ 6]$. **10.13.** 1) $(-\infty;\ -4]\cup[5;\ +\infty)\cup\{-3\}$; 5) $(-3;\ -1]\cup\{0\}$. **10.14.** 2) $(-\infty;\ -5]\cup\cup[-4;\ 0]\cup\{2\}$; 3) $(-3;\ -2)\cup(-2;\ -1]\cup(2;\ 3]\cup\{7\}$. **10.15.** $[-1;\ 0)\cup(0;\ 5]\cup\{-2\}$. **10.16.** $[-3;\ 0)\cup(0;\ 4]\cup\{5\}$. **10.17.** 1) $-4<x<-3$ або $x>5$; 2) $-4\leqslant x\leqslant -3$ або $x\geqslant 5$; 3) $x<-4$; 4) $x\leqslant -4$, або $x=-3$, або $x=5$. **10.18.** 1) $3<x<7$; 2) $3\leqslant x\leqslant 7$ або $x=-2$; 3) $-2<x<3$; 4) $-2\leqslant x\leqslant 3$ або $x=7$. **10.19.** $(-3;\ 0]\cup(3;\ +\infty)$. **10.20.** $(-4;\ 1]\cup(4;\ +\infty)$. **10.21.** 1) $(-\infty;\ -8)\cup[-3;\ 3]\cup(8;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 0)\cup(1;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ 3)$; 4) $\left(-2;\ 1-\sqrt{7}\right)\cup\left(2\sqrt{2};\ +\infty\right)$. **10.22.** 1) $[-7;\ -5]\cup[5;\ 7]$; 2) $(-5;\ -2)\cup\cup(-1;\ +\infty)$; 3) $(-5;\ -2)\cup(2;\ 3)\cup(3;\ 5)$; 4) $[-1;\ 0)$. **10.23.** 1) $\left[\frac{3}{4};\ 1\right)\cup(1;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -4]\cup[-1;\ 1]\cup[4;\ +\infty)$; 3) $\left[0;\ \frac{8}{5}\right]\cup\left[\frac{5}{2};\ +\infty\right)$. **10.24.** 1) $[4;\ 5)\cup(5;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -3]$; 3) $(0;\ +\infty)$. **10.25.** 1) $[3;\ +\infty)$. *Вказівка*. Позначивши $2x-1=a$ і $x^2-x-6=b$, можна помітити, що дане рівняння має вигляд $|a|+|b|==a+b$. Тепер скористайтеся тим, що $|a|+|b|=a+b$ тоді й тільки тоді, коли $a\geqslant 0$ і $b\geqslant 0$; 2) $(-\infty;\ -2]\cup[-1;\ +\infty)$. **10.26.** 1) $\left[\frac{2}{3};\ 2\right]\cup[3;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ -2]\cup[1;\ +\infty)$. **10.27.** 1) Якщо $a\leqslant -\frac{3}{5}$ або $a\geqslant 1$, то $x\in\left(-\frac{3}{5};\ 1\right)$; якщо

$-\frac{3}{5}<a<1$, то $x\in\left(-\frac{3}{5};\ a\right)\cup(a;\ 1)$; 2) якщо $a<-\frac{3}{5}$ або $a>1$, то $x\in\left[-\frac{3}{5};\ 1\right]\cup\{a\}$; якщо $-\frac{3}{5}\leqslant a\leqslant 1$, то $x\in\left[-\frac{3}{5};\ 1\right]$. **10.28.** 1) Якщо $a\leqslant-\frac{3}{7}$ або $a\geqslant 1$, то $x\in\left(-\frac{3}{7};\ 1\right)$; якщо $-\frac{3}{7}<a<1$, то $x\in\left(-\frac{3}{7};\ a\right)\cup(a;\ 1)$; 2) якщо $a<-\frac{3}{7}$ або $a>1$, то $x\in\left[-\frac{3}{7};\ 1\right]\cup\{a\}$; якщо $-\frac{3}{7}\leqslant a\leqslant 1$, то $x\in\left[-\frac{3}{7};\ 1\right]$. **10.29.** 1) Якщо $a<1$, то $x\in(a;1)\cup(1;3)$; якщо $1\leqslant a<3$, то $x\in(a;\ 3)$; якщо $a=3$, то розв'язків немає; якщо $a>3$, то $x\in(3;\ a)$; 2) якщо $a\leqslant 1$, то $x\in[a;\ 3]$; якщо $1<a<3$, то $x\in[a;\ 3]\cup\{1\}$; якщо $a=3$, то $x\in\{1,\ 3\}$; якщо $a>3$, то $x\in[3;a]\cup\{1\}$. **10.30.** 1) Якщо $a<-2$, то $x\in(a;-2)\cup(-2;\ 1)$; якщо $-2\leqslant a<1$, то $x\in(a;\ 1)$; якщо $a=1$, то розв'язків немає; якщо $a>1$, то $x\in(1;\ a)$; 2) якщо $a\leqslant-2$, то $x\in[a;\ 1]$; якщо $-2<a<1$, то $x\in[a;1]\cup\{-2\}$; якщо $a=1$, то $x\in\{-2,\ 1\}$; якщо $a>1$, то $x\in[1;\ a]\cup\{-2\}$. **10.31.** $4\frac{1}{3}$; 5. *Вказівка*. Можна записати: $2\{x\}-\{x\}[x]=[x]+\{x\}-5$. Звідси $\{x\}(1-[x])=[x]-5$. Останнє рівняння рівносильне такому: $\{x\}=\frac{[x]-5}{1-[x]}$. Тепер зрозуміло, що потрібні значення треба шукати серед розв'язків системи $\begin{cases}\frac{[x]-5}{1-[x]}<1,\\ \frac{[x]-5}{1-[x]}\geqslant 0.\end{cases}$ **10.32.** $5\frac{1}{3}$; 6. **10.34.** $\sqrt{a-3}$. **10.35.** 12 км/год.

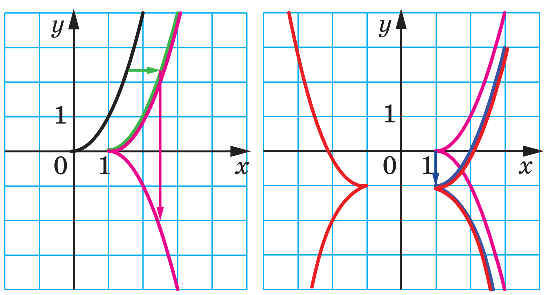
11.1. $a<-1$ або $a>\frac{5}{2}$. **11.2.** $a<-13$ або $0<a<1$. **11.3.** $\frac{11}{20}\leqslant a<1$ або $a>3$. **11.4.** $-\frac{2}{3}\leqslant a<-\frac{1}{4}$ або $a>1$. **11.5.** $a\geqslant\frac{7}{2}$. **11.6.** $a\leqslant-3$ або $-1\leqslant a<-\frac{3}{4}$. **11.7.** $1\leqslant a\leqslant\frac{6}{5}$. *Вказівка*. Розгляньте випадок, коли $a=1$, а потім перетворіть дане рівняння у зведене квадратне рівняння. **11.8.** $a\leqslant-2$ або $-\frac{7}{9}<a\leqslant 2$. **11.9.** $a<-2$ або $a>5$. **11.10.** $2<a<5$. **11.11.** $-\frac{4}{5}\leqslant a<-\frac{3}{4}$, або $a>12$, або $a=1$. **11.12.** $-\frac{16}{7}\leqslant a<-2$. **11.13.** $a<-1-\sqrt{3}$ або $a>\sqrt{3}-1$. **11.14.** $a<-\frac{7}{3}$ або $a>3$. **11.15.** $a\leqslant-\frac{1}{2}$. *Вказівка*. При $a\geqslant 0$ умова не виконується. Далі, позначивши ліву частину нерівності $f(x)$, покажіть, що множина шуканих значень параметра a є об'єднанням множин розв'язків двох систем $\begin{cases}a<0,\\ D\geqslant 0,\\ f(1)\leqslant 0,\\ x_0\geqslant 1\end{cases}$ і $\begin{cases}a<0,\\ D<0.\end{cases}$ **11.16.** $a<\frac{1}{2}$ або $a\geqslant\frac{7+\sqrt{13}}{6}$. **11.17.** $a>1$.

Вказівка. Переконайтеся, що $a = 0$ умову задачі не задовольняє. Далі запишіть умови, що відповідають кожному з положень параболи на рисунку. **11.18.** $a > \frac{16}{9}$. **11.19.** $a \leqslant \frac{13}{9}$. *Вказівка*. Оскільки порожня множина є підмножиною будь-якої множини, то значення параметра, при яких перша нерівність не має розв'язків, задовольняють умову задачі. **11.20.** $0 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$. **11.22.** 2; 3. **11.23.** $6\sqrt{2}$. **11.24.** -2; 3; $\frac{-7 \pm \sqrt{73}}{2}$.

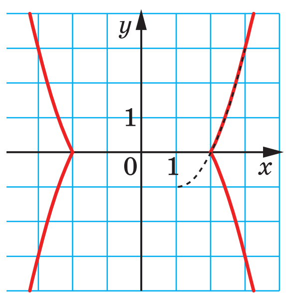


До задачі 11.17

12.1. 1) (4; −2); 2) $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; 3) (0; 1), (1; 1); 4) (0; 0). **12.2.** 1) (3; −2); 2) $\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$; 3) (1; 0), (1; −1); 4) (0; 0). **12.9.** 11) *Вказівка*. $x = \sqrt{y} \to x - 1 = \sqrt{y} \to x - 1 = \sqrt{|y|} \to x - 1 = \sqrt{|y + 1|} \to |x| - 1 = \sqrt{|y + 1|}$ (див. рисунок); 12) *Вказівка*. $x = \sqrt{y} \to x - 1 = \sqrt{y + 1} \to |x| - 1 = \sqrt{y + 1} \to |x| - 1 = \sqrt{|y| + 1}$ (див. рисунок).

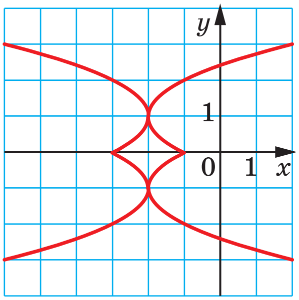


До задачі 12.9 (11)

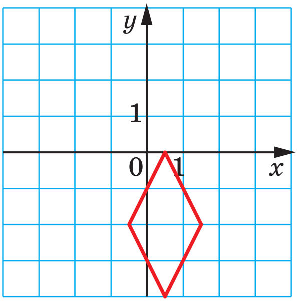


До задачі 12.9 (12)

12.11. 4) *Вказівка*. $x = y^2 \to x = (y - 1)^2 \to |x| = (|y| - 1)^2 \to |x + 2| = (|y| - 1)^2$ (див. рисунок).

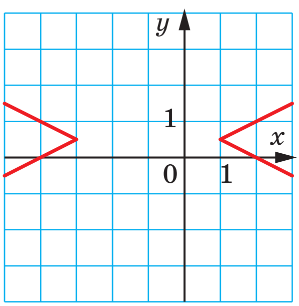


До задачі 12.11 (4)

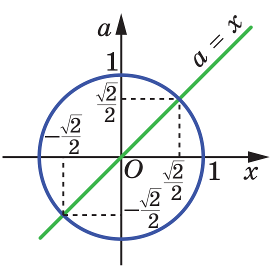


До задачі 12.15 (4)

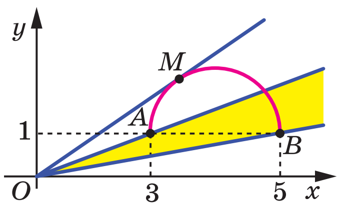
12.15. 4) *Вказівка*. $x + y = 2 \to |x| + y = 2 \to |x| + |y| = 2 \to |x - 1| + |y + 2| = 2 \to |2x - 1| + |y + 2| = 2$ (див. рисунок). **12.16.** 5) *Вказівка*. $x - y = 2 \to |x| - y = 2 \to |x| - |y| = 2 \to |x + 1| - |y - 1| = 2 \to |x + 1| - |2y - 1| = 2$ (див. рисунок). **12.17.** 8) *Вказівка*. Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}(|x|-1)^2 + y^2 = 1,\\ y \geqslant 0.\end{cases}$ **12.18.** 8) *Вказівка*. Дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases}x^2 + (|y|-2)^2 = 4,\\ x \geqslant 0.\end{cases}$ **12.21.** Якщо $|a| > 1$, то 1 корінь; якщо $|a| = 1$ або $|a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то 2 корені; якщо $|a| < 1$ і $|a| \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$, то 3 корені. *Вказівка*. Побудуйте в системі координат xa графік заданого рівняння (див. рисунок). **12.22.** Якщо $a < -2$, то розв'язків немає; якщо $a = -2$, то 1 корінь; якщо $-2 < a < 0$, або $a = 1$, або $a > 2$, то 2 корені; якщо $a = 0$ або $a = 2$, то 3 корені; якщо $0 < a < 2$ і $a \neq 1$, то 4 корені. **12.23.** $\frac{1}{5} \leqslant a < \frac{1}{3}$ або $a = \frac{8}{15}$. *Вказівка*. Маємо: $ax = \sqrt{8x - x^2 - 15} + 1$. Графік функції $y = ax$ — пряма, яка



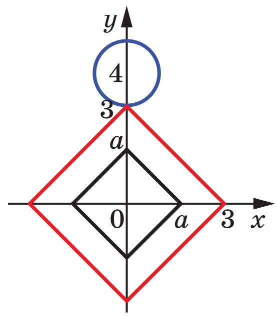
До задачі 12.16 (5)



До задачі 12.21



До задачі 12.23



До задачі 12.30

проходить через початок координат. Графіком функції $y=\sqrt{8x-x^2-15}+1$ є півколо кола $(x-4)^2+(y-1)^2=1$, яке лежить вище від прямої $y=1$. Указані графіки повинні мати одну спільну точку. Цій умові відповідають (див. рисунок) дотична OM і будь-яка пряма, яка проходить через початок координат, кутовий коефіцієнт якої не менший від кутового коефіцієнта прямої OB і менший від кутового коефіцієнта прямої OA. **12.24.** $-\frac{2}{5}\leqslant a<0$. **12.25.** Графік складається із чотирьох точок: (1; 1), (1; −1), (−1; 1), (−1; −1). *Вказівка*. Доведіть, що $(x^4+1)(y^4+1)\geqslant 4x^2y^2$, і з'ясуйте умову досягнення рівності. **12.26.** Графік складається з однієї точки (1; −2). **12.27.** Графік складається з 9 точок: (1; 1), (0; 1), (−1; 1), (1; 0), (0; 0), (−1; 0), (1; −1), (0; −1), (−1; −1). *Вказівка*. Скористайтеся тим, що при $0\leqslant t\leqslant 1$ виконується нерівність $\sqrt{t}\geqslant t$. **12.28.** Множина прямих виду $y=x+c$, де $c\in\mathbb{Z}$. **12.29.** Усі точки координатної площини, які мають цілі координати. **12.30.** 3. *Вказівка*. Нехай $|x|+|y|=a$, де $a>0$. Треба знайти найменше значення параметра a, при якому квадрат $|x|+|y|=a$ і коло $x^2+(y-4)^2=1$ мають спільну точку (див. рисунок). **12.31.** 4. **12.32.** $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}$. **12.33.** $\frac{1}{2}$; 2. **12.34.** $x^2+2x-12=0$.

13.2. 4) (0; 0), (1; 1); 5) (0; 4), (5; −1). **13.3.** 1) 2 розв'язки; 2) 3 розв'язки; 3) 1 розв'язок; 4) 2 розв'язки; 5) розв'язків немає; 6) 3 розв'язки; 7) 4 розв'язки; 8) 2 розв'язки; 9) 3 розв'язки. **13.4.** 1) 3 розв'язки; 2) розв'язків немає; 3) 2 розв'язки; 4) 4 розв'язки; 5) 2 розв'язки; 6) 2 розв'язки. **13.6.** 1) Якщо $a>0$, то 2 розв'язки; якщо $a=0$, то один розв'язок; якщо $a<0$, то розв'язків немає; 2) якщо $a<1$ або $a>\sqrt{2}$, то розв'язків немає; якщо $a=1$ або $a=\sqrt{2}$, то 4 розв'язки; якщо $1<a<\sqrt{2}$, то 8 розв'язків; 3) якщо $a<-\frac{17}{4}$ або $a>2$, то розв'язків немає; якщо $a=-\frac{17}{4}$ або $-2<a<2$, то 2 розв'язки; якщо $-\frac{17}{4}<a<-2$, то 4 розв'язки; якщо $a=-2$, то 3 розв'язки; якщо $a=2$, то один розв'язок; 4) якщо $a>-\frac{1}{4}$, то 2 розв'язки; якщо $a=-\frac{1}{4}$, то один розв'язок; якщо $a<-\frac{1}{4}$, то розв'язків немає. **13.7.** 1) Якщо $a<1$, то розв'язків немає; якщо $a=1$, то 2 розв'язки; якщо $a>1$, то 4 розв'язки; 2) якщо $a>3\sqrt{2}$ або $a<-3$, то розв'язків немає; якщо $a=3\sqrt{2}$ або $-3<a<3$, то 2 розв'язки; якщо $3<a<3\sqrt{2}$, то 4 розв'язки; якщо $a=3$, то 3 розв'язки; якщо $a=-3$, то один розв'язок; 3) якщо $a<\frac{1}{2}$ або $a>1$, то розв'язків немає; якщо $a=\frac{1}{2}$ або $a=1$, то 4 розв'язки; якщо $\frac{1}{2}<a<1$, то 8 розв'язків; 4) якщо $-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$, то розв'язків немає; якщо $a=-2\sqrt{2}$ або $a=2\sqrt{2}$, то 2 розв'язки; якщо $a<-2\sqrt{2}$ або $a>2\sqrt{2}$, то 4 розв'язки. **13.8.** $a\neq-1$ і $a\neq\frac{9}{4}$. **13.10.** $a=-\frac{2}{3}$. **13.11.** $a=-7$. **13.12.** $a=-2$, $b=-7$. *Вказівка*. Друга система при будь-яких значеннях параметрів a і b має єдиний розв'язок. Цю властивість повинна мати й перша система. Тому прямі $x+y=3$ і $x+3y=3$ перетинаються в точці, координати якої є розв'язком кожної із систем. **13.13.** $b=3$. *Вказівка*. Якщо $a\neq-3$, то система має розв'язки при будь-якому b. Розгляньте окремо випадок, коли $a=-3$. **13.14.** $a=\frac{5}{2}$. **13.15.** $a=1$. **13.16.** $c=-\frac{7}{3}$. **13.17.** $c=\frac{11}{3}$. **13.18.** $a\leqslant-3$ або $a\geqslant\frac{3}{4}$. **13.19.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що коли пара чисел $(x_0;\ y_0)$ є розв'язком кожного з рівнянь $F(x;\ y)=0$ і $G(x;\ y)=0$, то вона також є розв'язком рівняння $F(x;\ y)+G(x;\ y)=0$. **13.20.** *Вказівка*. $7^n\cdot2^{3n}-3^{2n}=7^n\cdot8^n-9^n=56^n-9^n$. **13.21.** $m=0$ або $m=1$. **13.22.** 2.

14.1. 1) $(-1;\ 1)$, $(-3;\ -1)$; 2) $(6;\ 1)$, $(-6;\ -2)$; 3) $(5;\ 3)$, $(-1{,}5;\ -10)$; 4) $(2;\ -2)$; 5) $(4;\ 3)$; 6) $(0;\ 0)$, $(-2{,}4;\ 4{,}8)$; 7) $(2;\ 2{,}5)$, $(-4{,}4;\ -2{,}3)$; 8) $(4;\ -1)$, $(0;\ 3)$. **14.2.** 1) $(-1;\ 4)$, $(-0{,}5;\ 2{,}5)$; 2) $(4;\ 2)$, $(20;\ -14)$; 3) $(6;\ 9)$, $(-9;\ -6)$; 4) $(1;\ 0)$, $(-0{,}5;\ 0{,}75)$; 5) $(2;\ 4)$, $(3;\ 3)$; 6) $(1;\ 1)$, $\left(\frac{17}{3};\ \frac{38}{3}\right)$. **14.3.** 1) $(3;\ 4)$, $(4;\ 6)$; 2) $(-2;\ 1)$, $\left(-6;\ \frac{9}{5}\right)$; 3) $(5;\ 1)$; 4) $(1;\ 3)$, $\left(\frac{3}{5};\ \frac{21}{5}\right)$; 5) $(-1;\ -2)$. **14.4.** 1) $(2;\ 1)$, $\left(\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3}\right)$; 2) $(1;\ 5)$, $\left(\frac{10}{3};\ -2\right)$; 3) $(19;\ 8)$, $\left(2;\ -\frac{1}{2}\right)$; 4) $(-15;\ -5)$, $(3;\ 4)$. **14.5.** 1) $(1;\ 1)$, $(1;\ -1)$; 2) $(2;\ 1)$, $(2;\ -1)$, $\left(-2;\ \sqrt{5}\right)$, $\left(-2;\ -\sqrt{5}\right)$; 3) $\left(-3;\ \sqrt{7}\right)$, $\left(-3;\ -\sqrt{7}\right)$. **14.6.** 1) $(1;\ 1)$, $(2;\ 0)$; 2) $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(-1;\ 2)$; 3) $(2;\ 1)$, $(-2;\ 1)$. **14.9.** 1) $\left(2;\ -\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$, $\left(2;\ \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$; 2) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2};\ 0\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{7}}{2};\ 0\right)$, $(-1;\ -3)$, $\left(\frac{3}{2};\ 2\right)$; 3) $(-4;\ 6)$,

$(-4; -6)$, $\left(\frac{4}{7}; 2\frac{4}{7}\right)$; 4) $(-1; 4)$, $(4; -1)$, $(-5; 2)$, $(2; -5)$. 14.10. 1) $(2; 3)$, $(0; 1)$, $(1{,}5; 1)$; 2) $(1; 1)$, $\left(1; \frac{-3+\sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(1; \frac{-3-\sqrt{21}}{2}\right)$, $(0; 2)$, $(-6; 2)$; 3) $\left(1; -\frac{5}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{4}; -\frac{5}{2}\right)$; 4) $(2; -1)$, $(-1; 2)$, $(-2; 1)$, $(1; -2)$. 14.11. 1) $(-2; 0)$, $(-2; -1)$, $(1; 0)$, $(1; -1)$; 2) $(3; 2)$, $(-3; -2)$; 3) $(3; 1)$, $(-3; -1)$, $\left(12; -\frac{7}{2}\right)$, $\left(-12; \frac{7}{2}\right)$; 4) $(-1; -1)$. *Вказівка*. Відніміть від першого рівняння системи друге рівняння; **5) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. 14.12. 1) $(2; -1)$, $(-1; t)$,** де t — будь-яке число; **2) $(2; -1)$, $(-2; 1)$; 3) $(1; 1)$, $(-1; -1)$, $\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$; 4) $(2; 2)$; 5) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. 14.13. 1) $(3; 1)$, $(1; 2)$.** *Вказівка*. Помножте обидві частини другого рівняння системи на 3 і відніміть від першого; **2) $(2; 1)$, $\left(-\frac{2}{13}; \frac{6}{13}\right)$; 3) $\left(-1+\sqrt{2}; -2\right)$, $\left(-1-\sqrt{2}; -2\right)$; 4) $(1; 1)$.** *Вказівка*. Додайте рівняння системи та отримайте $(x+y)^2 = 8$; **5) $(1; 1)$.** *Вказівка*. Додайте рівняння системи; **6) $(1; 0)$. 14.14. 1) $(2; -5)$, $(3; 2)$; 2) $(-1; 1)$, $(-2; 0)$; 3) $(1; 1)$, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}; -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$; 4) $(-1; -1)$; 5) $(-1; 0)$. 14.15. 1) $(-1; 1)$; 2) $(-1; 1)$, $\left(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$; 3) $(1; 2)$, $(-1; -2)$; 4) $(3; -1)$, $\left(-6\frac{3}{8}; -4\frac{3}{4}\right)$.** *Вказівка*. Розкладіть ліві частини кожного з рівнянь на множники; **5) $(2; 2)$, $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; 6) $(4; 2)$, $(-4; -2)$. 14.16. 1) $(1; 2)$, $(-1; -2)$, $(1; -2)$, $(-1; 2)$; 2) $\left(\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; 3) $(2; -1)$, $(-2; 1)$, $(1; -2)$, $(-1; 2)$; 4) $(1; 1)$, $(7; -2)$.** *Вказівка*. Почленно поділіть ліві та праві частини рівнянь системи, попередньо перетворивши перше рівняння до вигляду $(x+3y)(x+1) = 8$, а друге — до вигляду $(x+3y)(y-2) = -4$; **5) $(1; 3)$, $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$; 6) $(3; -1)$, $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$. 14.17. $a = -2$.** *Вказівка*. Очевидно, що $a \neq 0$. Розгляньте систему, що складається з двох рівнянь $ax^2 + x + 1 = 0$ і $ax^2 + a^2x + a = 0$. **14.18. $(1; 0)$, $(-1; 0)$.** *Вказівка*. Перемноживши відповідно ліві та праві частини рівнянь системи, отримаємо рівняння $x^8 = 1$, яке є наслідком даної системи. **14.19. $(1; 0)$. 14.20. 1) $(4; 2)$, $(-4; -2)$.** *Вказівка*. Перемноживши рівняння системи, отримаємо рівняння, лінійне відносно xy; **2) $(3; 1)$, $\left(-32; \frac{1}{8}\right)$. 14.21. 1) $(1; 2)$, $(-1; 2)$; 2) $(1; 1)$, $(-1; -1)$, $(1; -1)$, $(-1; 1)$. 14.22. $(1; -2)$, $(-2; 1)$, $(-1; 2)$, $(2; -1)$.** *Вказівка*. Перше рівняння системи розкладіть на множники. **14.23.** (1; 1), (−1; −1), $\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **14.24.** (1; 1), (−1; 1). *Вказівка.* З першого рівняння системи виразіть x^4 через y. Підставте отриманий вираз у друге рівняння системи. Покажіть, що отримане рівняння має єдиний корінь, який задовольняє умову $y \geqslant \frac{1}{2}$. **14.25.** (3; 1), (3; −1). **14.26.** (3; 1), $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$. *Вказівка.* Помножте перше рівняння системи на x, друге — на $-y$ і додайте отримані рівняння. **14.27.** (0; 2), (0; −2), (1; −3), (−1; 3). *Вказівка.* З другого рівняння виразіть y^2 через x^2. У першому рівнянні запишіть $y^3 = y^2 \cdot y$. **14.28.** Якщо $a \leqslant -2$, то $x \in (-\infty; a) \cup (-a; +\infty)$; якщо $-2 < a < 0$, то $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; a) \cup (-a; +\infty)$; якщо $a = 0$, то $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$; якщо $0 < a < 2$, то $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -a) \cup (a; +\infty)$; якщо $a \geqslant 2$, то $x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$. **14.29.** *Вказівка.* $n^3 + 11n = n^3 - n + 12n = n(n-1)(n+1) + 12n$. **14.30.** $b = -20$, $c = 27$.

15.1. 1) (3; 2), (−3; −2); 2) $\left(\frac{11}{13}; -\frac{24}{5}\right)$; 3) (14; −11), (11; −14); 4) $\left(6\frac{2}{3}; 5\frac{1}{3}\right)$, $\left(\frac{108}{125}; 11\frac{17}{125}\right)$. **15.2.** 1) (2; 3), (3; 2), (−2; −3); (−3; −2); 2) $\left(-3\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$, $\left(-3\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$, $\left(3\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$, $\left(3\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$; 3) $\left(-\frac{19}{8}; -\frac{13}{8}\right)$, (2; 1); 4) (−4; 0), $\left(-\frac{40}{41}; -\frac{32}{41}\right)$. **15.3.** 1) (6; 2), (−6; −2); 2) (3; 1), (−3; −1), $\left(\frac{14\sqrt{106}}{53}; \frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$, $\left(-\frac{14\sqrt{106}}{53}; -\frac{4\sqrt{106}}{53}\right)$; 3) (9; 12), (−12; −9). *Вказівка.* Виконайте заміну $x - y = u$, $xy = v$; 4) $\left(8; \frac{8}{5}\right)$, $\left(-4; \frac{4}{7}\right)$. **15.4.** 1) (−1; 2), (−2; 1); 2) (2; 3), (−2; −3); 3) (11; 1); 4) (2; 1), (6; −3), $\left(6+2\sqrt{3}; -2-2\sqrt{3}\right)$, $\left(6-2\sqrt{3}; -2+2\sqrt{3}\right)$. **15.5.** 1) $\left(\frac{2}{3}; -2\right)$. *Вказівка.* Виконайте заміну $\sqrt{9x^2+2y+1} = t$; 2) (2; −2). **15.6.** (2; 3), $\left(-\frac{14}{9}; \frac{17}{27}\right)$. **15.7.** (2; 1), (−2; −1). *Вказівка.* Виконайте заміну $\frac{x}{y} = t$. **15.8.** 1) (−2; 3), (12; 24). *Вказівка.* Виконайте заміну $\sqrt{4-x+y} = u$, $\sqrt{9-2x+y} = v$; 2) (2; 3), (−2; −3), (−2; 3), (2; −3). **15.9.** 1) (−10; 26), (4; 5); 2) (2; 1), (−2; −1). **15.10.** 1) (3; 1), (−3; −1), $\left(-\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\right)$; 2) (2; 1), (−2; −1), (1; 2), (−1; −2). **15.11.** 1) (0; 0), (2; 2), (0,5; −0,1); 2) $\left(-\frac{5}{4}; \frac{1}{2}\right)$, (−5; 2).

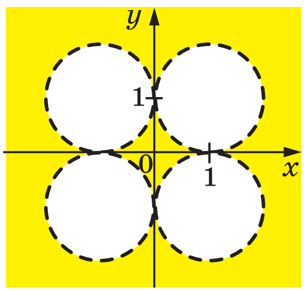
15.12. 1) (1; 2), (−1; −2); 2) (4; 2), (−4; −2); 3) (1; 1), (−1; −1), $\left(-\frac{25}{3\sqrt{149}}; \frac{1}{\sqrt{149}}\right)$, $\left(\frac{25}{3\sqrt{149}}; -\frac{1}{\sqrt{149}}\right)$; 4) $\left(-\frac{8}{\sqrt{11}}; \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, $\left(\frac{8}{\sqrt{11}}; -\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, (3; 4), (−3; −4). **15.13.** 1) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, (2; −1), (−2; 1); 2) (1; 2), (−1; −2); 3) (2; 1), (−2; −1); 4) (2; −1), (−2; 1), $\left(-\frac{5}{\sqrt{78}}; \frac{23}{\sqrt{78}}\right)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{78}}; -\frac{23}{\sqrt{78}}\right)$. **15.14.** 1) (3; 1), (1; 3); 2) (2; 1). **15.15.** (2; 1), (−1; −2). **15.16.** 1) (1; 2), (2; 1); 2) (1; 1); 3) (2; 3), (3; 2), (−5; 2), (−2; −5). **15.17.** 1) (4; 1), (1; 4); 2) (3; 4), (4; 3), $\left(-2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3}\right)$, $\left(-2+\sqrt{3}; -2-\sqrt{3}\right)$. **15.18.** 1) (3; 4), (4; 3), $\left(11+2\sqrt{31}; 11-2\sqrt{31}\right)$, $\left(11-2\sqrt{31}; 11+2\sqrt{31}\right)$; 2) (4; 1), (1; 4); 3) (2; 1), (1; 2), (−2; 1), (1; −2), (0; −3), (−3; 0). **15.19.** 1) (2; 2), $\left(-2-2\sqrt{2}; -2+2\sqrt{2}\right)$, $\left(-2+2\sqrt{2}; -2-2\sqrt{2}\right)$. *Вказівка*. Розкрийте дужки в першому рівнянні системи; 2) (−2; 3), (3; −2). **15.20.** 1) (4; 1), (1; 4), $\left(\frac{-5+\sqrt{41}}{2}; \frac{-5-\sqrt{41}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5-\sqrt{41}}{2}; \frac{-5+\sqrt{41}}{2}\right)$; 2) (6; 6), $\left(\frac{3\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}; -\frac{3\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}; \frac{3\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}\right)$; 3) $\left(1+\sqrt{3}; 1-\sqrt{3}\right)$, $\left(1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}\right)$. **15.21.** 1) (4; 8), (8; 4); 2) (1; 1), (1; −2), (−2; 1). **15.22.** 1) (2; 1), (1; 2), (−2; 1), (1; −2), (2; −1), (−1; 2), (−2; −1), (−1; −2); 2) (2; 1), (1; 2), (−2; −1), (−1; −2), (0; 2), (2; 0), (0; −2), (−2; 0); 3) (2; −1), (−1; 2), (−2; 1), (1; −2). **15.23.** 1) (1; 3), (3; 1), (−1; −3), (−3; −1); 2) (−3; −2), (−2; −3), (2; 3), (3; 2); 3) (2; 1), (1; 2), (−1; −2), (−2; −1), $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{10}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{10}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{10}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. **15.24.** 1) (5; 4), (−5; −4), (15; −12), (−15; 12); 2) (5; 3), (5; −3), $\left(-\sqrt{\frac{59}{2}}; \sqrt{\frac{9}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{59}{2}}; -\sqrt{\frac{9}{2}}\right)$. *Вказівка*. Перепишемо перше рівняння системи так: $x^2 - y^2 + (x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 20$. Нехай $(x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = t$. Тоді $t^2 + t - 20 = 0$. Звідси $t = -5$ або $t = 4$. Маємо:

$$\left[\begin{array}{l}(x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = -5,\\ (x+y)\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = 4;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-\sqrt{(x+y)(x-y)} = -5,\\ x+y<0,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{(x+y)(x-y)} = 4,\\ x+y>0;\end{cases}\end{array}\right.$$

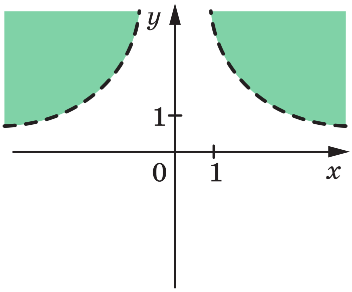
3) (−1; −1), (−1; 3), (−2; −1), (2; 3).

Вказівка. Виконайте заміну $x^2 - x = u$, $y^2 - 2y = v$; 4) (1; 1). *Вказівка*. Поділіть обидві частини другого рівняння системи на xy. **15.25.** 1) (5; 4), (5; −4), $\left(-\frac{\sqrt{114}}{2}; \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{114}}{2}; -\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$; 2) $\left(\frac{3}{2}; 1\right)$, (1; 3), $\left(-\frac{5+\sqrt{11}}{4}; 2+\sqrt{11}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{11}-5}{4}; 2-\sqrt{11}\right)$. **15.26.** 1) $\left(\sqrt{6}; -2\sqrt{6}\right)$, $\left(-\sqrt{6}; 2\sqrt{6}\right)$. *Вказівка*. Розгляньте перше рівняння системи як квадратне відносно x і доведіть, що $y^2 \geqslant 24$; 2) (1; −1). *Вказівка*. Розглянувши кожне рівняння системи як квадратне відносно x, можна показати, що y задовольняє умову $\begin{cases} y^4 \leqslant 1, \\ y^3 \leqslant -1; \end{cases}$ 3) (2; 2). **15.27.** 1) $\left(\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$, $\left(-\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$; 2) (−2; −1); 3) (2; −1). **15.28.** 1) (2; 1), (2; −1). *Вказівка*. Запишіть перше рівняння системи так: $y^2 = (x-2)^2 + 1$. Тоді зрозуміло, що $y^2 \geqslant 1$; 2) (8; −1). *Вказівка*. З першого рівняння системи випливає, що $x - y \leqslant 9$, а з другого рівняння: $x - y \geqslant 9$. **15.29.** 1) (2; 3), (−2; 3); 2) (3; 2). **15.30.** $a = -2$. *Вказівка*. Якщо пара $(x_0; y_0)$ є розв'язком системи, то пара $(y_0; x_0)$ також є її розв'язком. **15.31.** $a = -1$ або $a = \frac{4}{3}$. **15.32.** $a = 2$. **15.33.** (0; 1), (1; 0). *Вказівка*. З першого рівняння системи випливає, що $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$. Тоді $x^5 \leqslant x^2$, $y^5 \leqslant y^2$, звідси $x^5 + y^5 \leqslant x^2 + y^2 = 1$. **15.34.** (0; 1), (1; 0). *Вказівка*. Доведіть, що $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. **15.35.** (0; 0), (1; 1). *Вказівка*. Віднімемо від першого рівняння системи друге, отримаємо: $(y^3 - y^2 + y) - (x^3 - x^2 + x) = x^2 - y^2$. Звідси $x^3 + x = y^3 + y$. Далі скористайтеся тим, що функція $f(t) = t^3 + t$ є зростаючою. **15.36.** (0; 0), (3; 3), (−3; −3). **15.37.** (0; 0), (1; 1), (−1; −1). *Вказівка*. І спосіб. Потрібно зауважити, що всі розв'язки системи задовольняють умову $|x| \leqslant 1$ і $|y| \leqslant 1$ (див. приклад 2 п. 2). Зрозуміло, що пара чисел (0; 0) — розв'язок системи. Далі, перемноживши рівняння системи, отримаємо: $\frac{4xy}{(1+x^2)(1+y^2)} = xy$. При $x \neq 0$ і $y \neq 0$ маємо: $\frac{4}{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$. Остання рівність можлива лише за умови $\begin{cases} x^2 = 1, \\ y^2 = 1. \end{cases}$ ІІ спосіб. Розгляньте функцію $f(t) = \frac{2t}{1+t^2}$. Доведіть, що вона зростає на проміжку [−1; 1]. Задана система набуває вигляду $\begin{cases} f(x) = y, \\ f(y) = x. \end{cases}$ Звідси $f(f(x)) = x$. Оскільки функція f зростає на проміжку [−1; 1], то за теоремою 3.7 маємо: $f(x) = x$. **15.38.** (0; 0), (1; 1). **15.39.** При $a < 0$ або $a = \sqrt{\frac{2}{3}}$. **15.40.** 3 км/год. **15.42.** $x^2 + 14x + 21 = 0$.

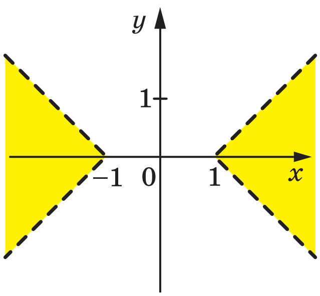
16.4. $2x+3y \geqslant -1$. **16.5.** $3x - y > 2$. **16.14.** 6) Див. рисунок; 7) див. рисунок; 11) див. рисунок. **16.15.** 5) Див. рисунок; 6) див. рисунок; 7) див. рисунок.



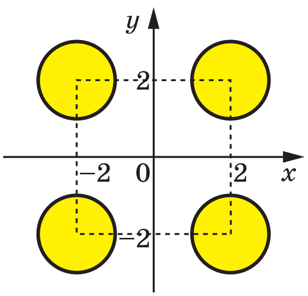
До задачі 16.14 (6)



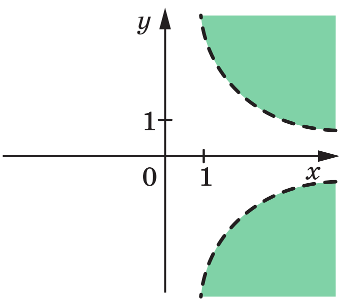
До задачі 16.14 (7)



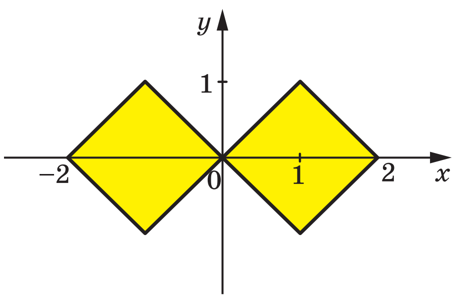
До задачі 16.14 (11)



До задачі 16.15 (5)

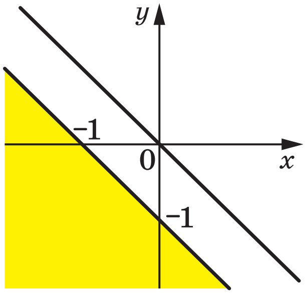


До задачі 16.15 (6)

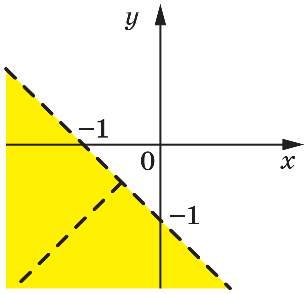


До задачі 16.15 (7)

16.16. 1) Графіком є об'єднання півплощини та прямої (див. рисунок); 2) графіком є відкрита півплощина, з якої «вирізано» промінь (див. рисунок).

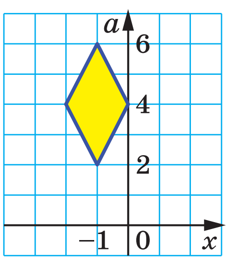


До задачі 16.16 (1)

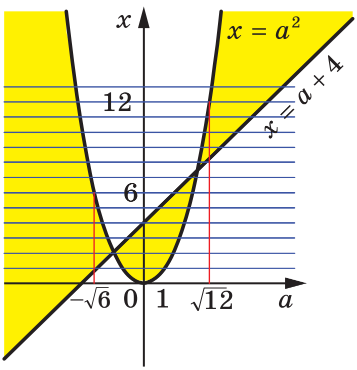


До задачі 16.16 (2)

16.18. $3 \leqslant a \leqslant 5$. *Вказівка*. У системі координат xa графіком даної нерівності є ромб, зображений на рисунку.



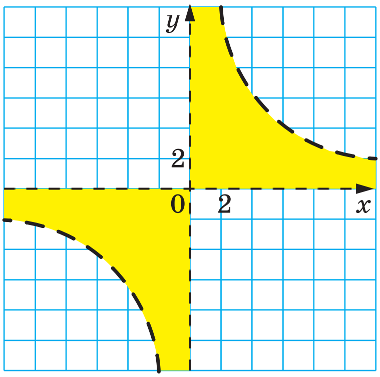
До задачі 16.18



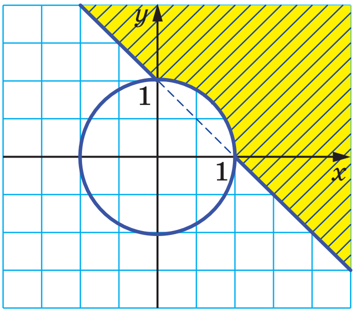
До задачі 16.20

16.19. $a \leqslant 0$ або $a \geqslant 12$. **16.20.** $-\sqrt{6} < a < 0$, або $0 < a < 1$, або $1 < a < \sqrt{12}$. *Вказівка*. Перепишіть дану нерівність так: $(x - a^2)(x - a - 4) \leqslant 0$. На рисунку зображено графік цієї нерівності в системі координат ax. Проведемо горизонтальні прямі $x = k$, де $k \in \mathbb{Z}$. Потрібно знайти ті значення параметра a, при яких вертикальні прямі перетинають у зафарбованих областях не більше чотирьох прямих виду $x = k$, $k \in \mathbb{Z}$. **16.21.** 15 км/год. **16.22.** $a = -1$. **16.23.** *Вказівка*. $11 \cdot 3^{2n} + 10 \cdot 2^n = 11 \cdot 9^n + 10 \cdot 2^n = 11 \cdot 9^n - 11 \cdot 2^n + 21 \cdot 2^n$.

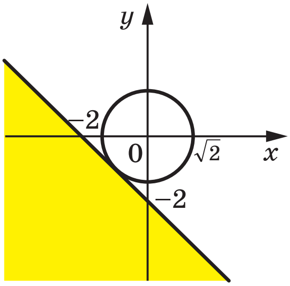
17.10. 4) Див. рисунок. **17.12.** 2) Див. рисунок. **17.13.** 3) Графіком є об'єднання півплощини та кола (див. рисунок). **17.14.** Квадрат (див. рисунок). *Вказівка*. Якщо пара чисел $(x_0; y_0)$ є розв'язком нерівності, то пари чисел $(-x_0; y_0)$, $(x_0; -y_0)$, $(-x_0; -y_0)$ також є розв'язками нерівності. Тому досить побудувати графік нерівності $x + y + |x - y| \leqslant 2$ за умови $x \geqslant 0$ і $y \geqslant 0$, а потім застосувати перетворення симетрії відносно осей координат. **17.15.** Паралелограм (див. рисунок).



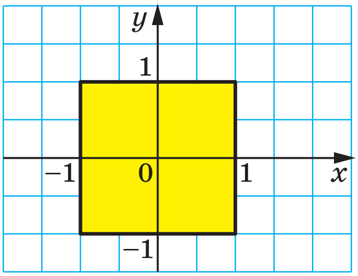
До задачі 17.10 (4)



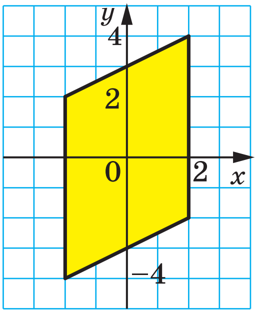
До задачі 17.12 (2)



До задачі 17.13 (3)

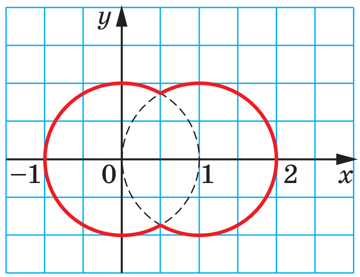


До задачі 17.14

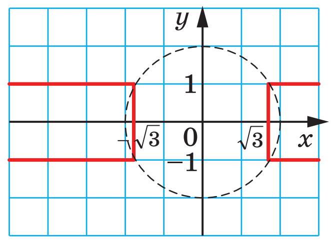


До задачі 17.15

17.18. 1) *Вказівка.* Задана умова визначається сукупністю двох систем: $\begin{cases} 2x \geqslant 1, \\ 2x = x^2 + y^2 \end{cases}$ і $\begin{cases} 2x < 1, \\ 1 = x^2 + y^2. \end{cases}$ Шуканий графік — об'єднання дуг двох кіл (див. рисунок). **17.19.** 1) Див. рисунок. **17.20.** $a = -3$ або $a = 1$. *Вказівка.* На координатній площині xa побудуйте зображення множини розв'язків системи.

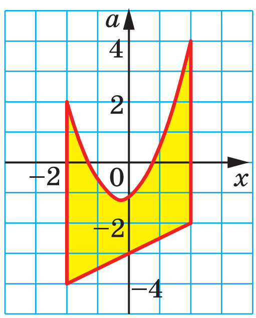


До задачі 17.18 (1)



До задачі 17.19 (1)

17.21. $a = 0$ або $a = 4$. **17.22.** $-2 < a < 0$. *Вказівка.* Розкладіть на множники ліву частину нерівності системи. Побудуйте зображення множини розв'язків системи на координатній площині xa. **17.23.** $-\sqrt{2} < a < -\frac{16}{17}$ або $0 < a < \sqrt{2}$. **17.24.** $-\frac{9}{4} < a < 2$. *Вказівка.* Див. приклад 3 п. 17. **17.25.** 1) $-4 \leqslant a \leqslant 4$; 2) $a = -4$ або $a = 4$; 3) $-4 \leqslant a < -3$; 4) $2 < a \leqslant 4$; 5) $a \leqslant -3{,}5$ або $a \geqslant 0{,}5$; 6) $-4 \leqslant a < -3{,}5$ або $2 < a \leqslant 4$. *Вказівка.* Скористайтеся графіком даної системи, зображеним на рисунку. **17.28.** $(3; 4) \cup (4; +\infty)$. **17.29.** $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{12}$.



До задачі 17.25

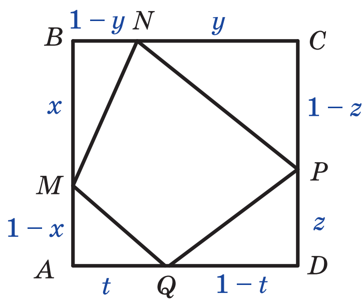
18.10. 1) *Вказівка.* $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 = (a^2 + 6a + 9) + (b^2 - 4b + 4)$. **18.16.** *Вказівка.* Розгляньте суму даних виразів. **18.17.** 1) *Вказівка.* Скористайтеся методом різниці. **18.19.** *Вказівка.* Скористайтеся методом різниці. **18.23.** *Вказівка.* Скористайтеся методом різниці. **18.24.** *Вказівка.* Скористайтеся методом різниці. **18.25.** *Вказівка.* Скористайтеся методом різниці. **18.26.** *Вказівка.* Ліву частину нерівності можна записати так: $(a^8 - 2a^4 + 1) + (a^6 - 2a^4 + a^2)$. **18.28.** *Вказівка.* Скористайтеся методом доведення від супротивного. **18.29.** *Вказівка.* Скористайтеся методом доведення від супротивного. **18.31.** *Вказівка.* Оскільки $0 \leqslant x \leqslant 1$ і $0 \leqslant y \leqslant 1$, то $\frac{x}{1+y} \leqslant \frac{x}{x+y}$ і $\frac{y}{1+x} \leqslant \frac{y}{y+x}$.

18.34. *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 18.15 (1). **18.37.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $1+x^2 \geqslant 2x$. **18.38.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $x^4+4 \geqslant 4x^2$ і $4y^4+1 \geqslant 4y^2$. **18.39.** *Вказівка*. Доведіть, що $4y^3+y \geqslant 4y^2$ при $y \geqslant 0$. **18.42.** *Вказівка*. Застосуйте нерівність $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$ для $x=2a$, $y=b$, $z=1$. **18.48.** *Вказівка*. Запишіть нерівність, що доводиться, у вигляді $2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ac) \leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$. **18.49.** *Вказівка*. Маємо: $(x-2)^2+(y+2)^2-8=(x-y)^2-4(x-y)+2xy$. **18.50.** *Вказівка*. Покажіть, що $a^2+b^2+ab-3(a+b-1)=(a-1)^2+(b-1)^2+(a-1)(b-1)$. **18.51.** *Вказівка*. Припустимо, що твердження, яке доводиться, хибне. Тоді є правильними нерівності $a-b^2-\frac{1}{4}>0$, $b-c^2-\frac{1}{4}>0$, $c-a^2-\frac{1}{4}>0$. Додайте почленно ці нерівності та отримайте суперечність. **18.52.** *Вказівка*. Зауважимо, що коли є правильною одна з нерівностей $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$, $c \geqslant 1$, то твердження, що доводиться, є очевидним. Нехай $a<1$, $b<1$, $c<1$ і є правильними нерівності $a(1-b)>\frac{1}{4}$, $b(1-c)>\frac{1}{4}$, $c(1-a)>\frac{1}{4}$. Звідси $a(1-a)\times$ $\times b(1-b)c(1-c)>\frac{1}{64}$. Доведіть, що при $0<x<1$ виконується нерівність $0<x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$. **18.53.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що при $a>0$ і $b>0$ виконується нерівність $\frac{1}{a^2+b^2} \leqslant \frac{1}{2ab}$. **18.54.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $2ab \leqslant a^2+b^2$. **18.56.** *Вказівка*. Доведіть, що $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ac)$. **18.58.** *Вказівка*. Оскільки при заданій умові $x^2 \leqslant x$ і $y^2 \leqslant y$, то достатньо довести нерівність $(x+y+1)^2 \geqslant 4(x+y)$. **18.59.** *Вказівка*. Скористайтеся тем, що $\frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n+1}$, де $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. **18.60.** *Вказівка*. Ліва частина нерівності тотожно дорівнює виразу $\frac{xy^2}{x^3+2xyz}+\frac{yz^2}{y^3+2xyz}+\frac{zx^2}{z^3+2xyz}$. Далі див. розв'язання задачі 18.54. **18.61.** *Вказівка*. $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=\left(a^2+\frac{1}{4}e^2\right)+\left(b^2+\frac{1}{4}e^2\right)+$ $+\left(c^2+\frac{1}{4}e^2\right)+\left(d^2+\frac{1}{4}e^2\right)$. **18.62.** *Вказівка*. Скористайтеся тем, що $1 \cdot n \geqslant n$; $2\cdot(n-1) \geqslant n$; ...; $k\cdot(n-k+1) \geqslant n$, де $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant n$. **18.63.** *Вказівка*. Перетворіть ліву частину нерівності, що доводиться, за допомогою рівності $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$, де $k \in \mathbb{N}$. **18.64.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $k \cdot k! = (k+1)! - k!$, $k \in \mathbb{N}$. **18.65.** *Вказівка*. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+$ $+\frac{1}{n(n+1)}$. Далі див. приклад 3 п. 18. **18.66.** *Вказівка*. Нехай

$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$, $B=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n+1}$. Маємо: $A < B$. Звідси $A^2 < AB = \frac{1}{2n+1}$. **18.67.** *Вказівка.* Нехай $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}$, $C=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}$. Маємо: $A > C$, $A^2 > AC = \frac{1}{4n}$. **18.68.** *Вказівка.* Нехай $S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}}$, $S_1=\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}}$. Очевидно, що $S > S_1$. Тоді $2S > S + S_1$. **18.70.** 1; −1; $2\pm-\sqrt{3}$. **18.72.** [−1; 0,5). **18.73.** $a = 2$.

19.10. *Вказівка.* $a^2+4=(a^2+3)+1$. **19.12.** *Вказівка.* $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{a^2+1}+\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$. **19.17.** *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $(a; -b)$ і $(c; d)$. **19.23.** 12. **19.24.** 20. **19.25.** 3. **19.26.** 12. **19.27.** 8. **19.28.** 18. **19.29.** $\frac{1}{6}$. **19.30.** $\frac{1}{7}$. **19.36.** *Вказівка.* $\sqrt{(1-a)(1-b)}\leqslant\frac{1-a+1-b}{2}$. **19.38.** *Вказівка.* І спосіб. Скористайтеся тим, що $x^2+y^2\geqslant\frac{(x+y)^2}{2}$. ІІ спосіб. Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів (1; 1) і $(a; b)$. **19.41.** *Вказівка.* Скористайтеся тим, що середнє гармонічне чисел a і b не більше за їхнє середнє арифметичне. **19.42.** *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $\left(a; \sqrt{1-a^2}\right)$ і $\left(\sqrt{1-b^2}; b\right)$. **19.43.** *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів (1; 1; 1) і $(x; y; z)$. **19.46.** 5, −5. *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів (3; 4) і $(x; y)$. **19.47.** 1. **19.51.** *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $(a^2; b^2; c^2)$ і $\left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}\right)$. **19.52.** *Вказівка.* $(a+c)\times(b+d)=ab+ad+cb+cd=(ad+bc)+(cd+ba)$. **19.53.** *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $\left(\sqrt{3a+1}; \sqrt{3b+1}; \sqrt{3c+1}\right)$ і (1; 1; 1). **19.55.** 3. *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $\left(\sqrt{x-2}; \sqrt{4-x}\right)$ і (1; 1). **19.56.** 0. **19.57.** 5. *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $(2; x)$ і $\left(\sqrt{x-1}; 5\right)$. Далі скористайтеся умовою досягнення рівності в нерівності Коші—Буняковського. **19.58.** *Вказівка.* Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $(x; y; z)$ і (3; −1; 1). **19.59.** *Вказівка.* $|2x+y-z|\leqslant\sqrt{x^2+3y^2+z^2}\cdot\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+(-1)^2}$. **19.60.** *Вказівка.* І спосіб. $\sqrt{b-1}=\sqrt{(b-1)\cdot 1}\leqslant\frac{b-1+1}{2}=\frac{b}{2}$. ІІ спосіб. $\frac{a}{\sqrt{b-1}}+\frac{b}{\sqrt{a-1}}\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{\sqrt{a-1}}\cdot\frac{b}{\sqrt{b-1}}}\geqslant 4$. **19.61.** *Вказівка.* Маємо: $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$.

Також, порівнюючи середнє квадратичне та середнє арифметичне чисел $\sqrt{a}$ і $\sqrt{b}$, можна записати: $\sqrt{\frac{a+b}{2}} \geqslant \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$. **19.62.** *Вказівка.* $\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{a}\right)^2 \geqslant$ $\geqslant \frac{\left(a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{a}\right)^2}{2}$. Далі скористайтеся тим, що з умови $a > 0$, $b > 0$, $a+b=1$ випливає нерівність $ab \leqslant \frac{1}{4}$. **19.63.** *Вказівка.* $\sqrt{a^2+1}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2+1}{2}} \geqslant \sqrt{2}\cdot\frac{a+1}{2}$. **19.64.** *Вказівка.* Маємо: $\sqrt{(1-a-b)^2+c^2+c^2}+\sqrt{(1-b-c)^2+a^2+a^2}+$ $+\sqrt{(1-c-a)^2+b^2+b^2}=\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{(1-a-b)^2+c^2+c^2}{3}}+\sqrt{\frac{(1-b-c)^2+a^2+a^2}{3}}+\sqrt{\frac{(1-c-a)^2+b^2+b^2}{3}}\right)$. Далі порівняйте середнє квадратичне трьох чисел з їхнім середнім арифметичним. **19.65.** *Вказівка.* Нехай сторона квадрата дорівнює 1. Скористаємося позначеннями, показаними на рисунку. Залишилося довести нерівність $\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{y^2+(1-z)^2}+\sqrt{z^2+(1-t)^2}+\sqrt{t^2+(1-x)^2} \geqslant 2\sqrt{2}$. Далі див. приклад 1 п. 19.

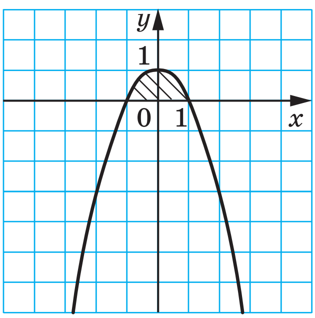


До задачі 19.65

19.66. *Вказівка.* $1+a=2-b-c=(1-b)+(1-c) \geqslant 2\sqrt{(1-b)(1-c)}$. **19.67.** *Вказівка.* І спосіб. Застосуйте нерівність Коші—Буняковського до наборів $\left(\frac{x}{\sqrt{y+z}}; \frac{y}{\sqrt{x+z}}; \frac{z}{\sqrt{x+y}}\right)$ і $\left(\sqrt{y+z}; \sqrt{x+z}; \sqrt{x+y}\right)$. ІІ спосіб. У силу нерівності Коші $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4} \geqslant x$ і т. д. **19.68.** *Вказівка.* Оскільки при $a > 0$ і $b > 0$ є правильною нерівність $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \frac{a+b}{2}$, то $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$. **19.69.** *Вказівка.* $\sqrt{\frac{a}{b+c}}=\sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot 1} \geqslant \frac{\frac{2a}{b+c}\cdot 1}{\frac{a}{b+c}+1}=\frac{2a}{a+b+c}$. **19.70.** $a < 0$ або $a = 1{,}5$. **19.71.** Достатньо показати, що при будь-якому натуральному n НСД $(30n + 2;\ 12n + 1) = 1$. Для доведення цього скористайтеся теоремою: для будь-яких натуральних чисел a і b таких, що $a > b$, НСД $(a;\ b) =$ НСД $(a - b;\ b)$. **19.72.** 2 км/год. **19.73.** $-1 \pm \sqrt{3}$; $\frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

20.1. 80 км/год, 60 км/год. **20.2.** 90 км/год, 45 км/год. **20.3.** 80 км/год, 60 км/год. **20.4.** 2 км/год. **20.5.** $\frac{5}{12}$ км/год. **20.6.** Не більше 15 машин. **20.7.** Не більше 6 промахів. **20.8.** 18 км/год. **20.9.** 27 км/год, 3 км/год. **20.10.** 24 год. **20.11.** 15 : 2. **20.12.** 24 км/год, 16 км/год. **20.13.** 50 км/год, 40 км/год. **20.14.** 12 км/год, 18 км/год. **20.15.** 60 км/год. **20.16.** 7 кг, 21 кг. **20.17.** 1,2 кг; 2,4 кг. **20.18.** 2 км/год, 12 км/год. **20.19.** 8,4 г/см^3, 6,4 г/см^3. **20.20.** 12 днів, 24 дні або 40 днів, 10 днів. **20.21.** 16 год, 48 год. **20.22.** 10 год, 15 год. **20.23.** 10 год 25 хв. **20.24.** Через 1 год 30 хв. **20.25.** 150 м × 150 м. **20.26.** 12 год, 9 год. **20.27.** 500 м. **20.28.** 1 м/с. **20.29.** 30 км/год. **20.30.** 48 хв. **20.31.** 4 год. **20.32.** 90 м^3, 60 м^3. **20.33.** 10 лип і 4 берези або 11 лип і 5 беріз. **20.34.** 6 автомобілів і 11 автомобілів. **20.35.** 4 км/год, 3 км/год. **20.36.** 12 деталей. **20.37.** 5 деталей. **20.38.** 44 комплекти. **20.39.** 144 солдати. **20.40.** По 2 цехи кожного типу. **20.43.** $[-1;\ 0)$. **20.44.** Якщо $a > 8$, то два розв'язки; якщо $a = 8$, то безліч розв'язків; якщо $a < 8$, то розв'язків немає.

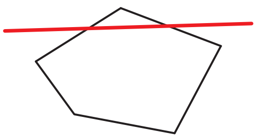
21.1. 20 %. **21.2.** 6298,56 грн. **21.3.** 20 736 одиниць. **21.4.** 3600 грн. **21.5.** 600 грн. **21.6.** 5 %. **21.7.** На 15 %. **21.8.** 7,2 %. **21.9.** 20 %. **21.10.** 60 кг. **21.11.** 200 кг. **21.12.** 13,5 кг. **21.13.** 40 пістолів або 60 пістолів. **21.14.** 10 грн. **21.15.** 2 год. **21.16.** 50 %. **21.17.** 4 кг, 6 кг. **21.18.** На 10 % першого разу та на 20 % другого. **21.19.** 20 %. **21.20.** 5 %. **21.21.** 20 000 грн. **21.22.** 6 %. **21.23.** 10 %. **21.24.** 6 кг, 18 кг або 9 кг, 21 кг. **21.25.** 160 г, 20 %. **21.26.** 3 кг. **21.27.** 11 %, 5 %. **21.28.** 20 л. **21.29.** 20 т або $2\frac{2}{3}$ т. **21.30.** 33 кг. *Вказівка.* Нехай було отримано x кг соляної кислоти. Тоді математичною моделлю задачі буде рівняння $\frac{11}{x} - \frac{2}{x-9} = \frac{1}{4}$, коренями якого є числа 33 і 12. Але корінь 12 не задовольняє умову задачі, виходячи з хімічних властивостей соляної кислоти. **21.31.** 6 л. **21.32.** 2 л. **21.34.** $c > 0{,}1$. **21.35.** $(-2;\ -1)$, $(2;\ 1)$, $\left(5;\ \frac{3}{4}\right)$, $\left(-5;\ -\frac{3}{4}\right)$. **21.36.** Див. рисунок.



До задачі 21.36

22.6. $\frac{n}{2n+1}$. **22.7.** $(-1)^n \cdot n$. **22.8.** $\frac{n}{n+1}$. **22.14.** 1) *Вказівка.* $3^{2k+3} + 2^{k+3} = (3^{2k+1} + 2^{k+2}) \times 9 - 7 \cdot 2^{k+2}$; 2) *Вказівка.* Достатньо показати, що різниця $(6^{2k+2} + 19^{k+1} - 2^{k+2}) - 19\,(6^{2k} + 19^k - 2^{k+1})$ кратна 17. **22.15.** 1) *Вказівка.*

$7^{k+2}+8^{2k+1}=7(7^{k+1}+8^{2k-1})+57\cdot 8^{2k-1}$. **22.22.** *Вказівка.* $\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+$ $+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}\right)+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$. Далі доведіть, що $\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}>0$. **22.24.** *Вказівка.* $a_{k+1}=(k+2)(k+3)\cdot\ldots\cdot(2k+1)(2k+2)=$ $=(k+2)(k+3)\cdot\ldots\cdot 2k\cdot(2k+1)\cdot 2(k+1)=(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\ldots\cdot 2k\cdot(2k+1)\cdot 2=a_k\times$ $\times\, 2(2k+1)$. **22.26.** *Вказівка.* Теорема «база індукції» виконується: існує чотирикутник з трьома гострими кутами. Очевидно, що в будь-якому n-кутнику $(n\geqslant 4)$ існує кут, який не є гострим. «Відріжемо» його (див. рисунок). Отримаємо $(n+1)$-кутник, який має стільки ж гострих кутів, скільки й даний n-кутник. **22.27.** $1+\frac{n(n+1)}{2}$. **22.28.** *Вказівка.* Для $n = 2$ твердження є очевидним. Нехай твердження є правильним при $n = k$ і за результатами турніру між k шахістами їх упорядкували так: a_1, a_2, ..., a_k. Тепер у турнірі між $(k + 1)$ шахістами розглянемо ще одного шахіста, який зіграв із кожним із цих k шахістів по одному разу. Рухаючись у записаній послідовності зліва направо, виявимо першого шахіста, у якого виграв розглядуваний шахіст, і поставимо його перед ним. **22.29.** $[-4; 2)\cup(2; 5]$. **22.30.** -3; -1. **22.31.** $[-1; 2]$. **22.32.** $a = 1$.



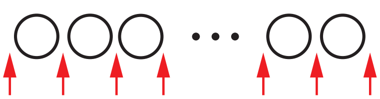
До задачі 22.26

23.1. 7!. **23.2.** 5!. **23.3.** 20!. **23.4.** 5!. **23.5.** 1) 4!; 2) 3!. **23.6.** 6^4. **23.7.** 5^3. **23.8.** $5\cdot 6^3$. **23.9.** $4\cdot 5^2$. **23.10.** $9\cdot 10^6$. **23.11.** $6\cdot 7\cdot 4$. **23.12.** $6\cdot 7\cdot 3$. **23.13.** I спосіб. $4\cdot 4!$; II спосіб. $5!-4!$. **23.14.** $4!\cdot 2$; **23.15.** $9\cdot 10^3\cdot 2$. **23.16.** $9\cdot 10^4\cdot 4$. **23.18.** $64\cdot 49$. **23.19.** $4\cdot 3\cdot 2+5\cdot 2+6\cdot 4$. **23.20.** $5^7+4\cdot 5^6$. **23.21.** $4+4^2+4^3+4^4+4^5$. **23.22.** 2^{10}. **23.23.** $(7!\cdot 4!\cdot 2!)\cdot 3!$. **23.24.** $(5!)^2$. **23.25.** $9\cdot 10^4-4\cdot 5^4$. *Вказівка.* Кількість усіх п'ятицифрових чисел дорівнює $9\cdot 10^4$. Кількість п'ятицифрових чисел, усі цифри яких є парними, дорівнює $4\cdot 5^4$. **23.26.** $9\cdot 10^4-5^5$. **23.27.** $9\cdot 10^4-9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$. *Вказівка.* Кількість п'ятицифрових чисел, усі цифри яких різні, дорівнює $9\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6$. **23.28.** 6^3-5^3. **23.29.** $2\cdot 9!$. *Вказівка.* Припустимо, що знайомі сіли на один стілець. 9 людей можна розмістити на 9 стільцях 9! способами. Оскільки знайомі можуть сісти справа або зліва один від одного, то всього варіантів $2\cdot 9!$. **23.30.** $5!-2\cdot 4!$. **23.31.** 1) $\frac{6!}{3!}$. *Вказівка.* Якщо вважати всі букви цього слова різними (це умовно можна записати так: $МО_1ЛО_2КО_3$), то отримаємо 6! різних слів. Проте слова, які відрізняються лише перестановкою букв $О_1$, $О_2$, $О_3$, насправді є однаковими; 2) $\frac{10!}{3!\,2!\,2!}$; 3) $\frac{13!}{2!2!2!}$.

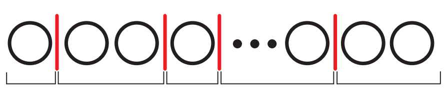
23.32. 8^5. *Вказівка*. Пасажир вибирає поверх. Такий вибір для кожного пасажира можна здійснити 8 способами. **23.33.** $-\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant \frac{1}{3}$ або $a = \frac{4}{3}$. **23.34.** 3. **23.36.** 6000 грн, 1500 грн.

24.1. A_{11}^2. **24.2.** A_{15}^3. **24.3.** A_{18}^6. **24.4.** A_{16}^2. **24.5.** A_9^3. **24.6.** A_5^3. **24.7.** 1) 10; 2) 3; 3) 1. **24.9.** 1) 12; 2) 7; 3) 7; 4) 14. **24.10.** 1) 5; 2) 9, 10; 3) 4. **24.11.** A_{32}^2. **24.12.** $A_3^2 \cdot A_5^4$. **24.13.** $6 \cdot A_6^2 - 5 \cdot A_5^2$. **24.14.** 9 км/год, 12 км/год. **24.15.** Якщо $a < 0$, то рівняння не має коренів; якщо $a = 0$, то рівняння має 3 корені; якщо $0 < a < 4$, то рівняння має 6 коренів; якщо $a = 4$, то рівняння має 4 корені; якщо $a > 4$, то рівняння має 2 корені. **24.16.** $[-2; 0) \cup (0; 6]$.

25.5. 1) 18; 2) 6; 3) 10; 4) 4; 5) 17. **25.6.** 1) 16; 2) 6; 3) 12; 4) 5. **25.7.** C_{29}^5. **25.8.** C_{10}^3. **25.9.** C_n^4. **25.10.** C_7^2. **25.11.** $C_{25}^{12} = C_{25}^{13}$. **25.12.** $C_5^2 \cdot C_{12}^5$. **25.13.** $C_{11}^3 \cdot C_{20}^3$. **25.14.** $C_n^2 \cdot C_m^2$. **25.15.** $C_{12}^2 \cdot C_7^2$. **25.16.** $C_7^2 \cdot C_{13}^3$. **25.17.** $C_{12}^3 \cdot C_{88}^7$. **25.18.** $C_{35}^1 \cdot C_{34}^1 \cdot C_{33}^4$. **25.19.** $7 \cdot C_{12}^2 + 12 \cdot C_7^2$. **25.20.** $C_8^1 + C_8^3 + C_8^5 + C_8^7$. **25.21.** $C_{15}^{10} + C_{15}^{11} + C_{15}^{12} + C_{15}^{13} + C_{15}^{14} + C_{15}^{15}$. **25.22.** I спосіб. $C_7^2 \cdot C_{13}^3 + C_7^3 \cdot C_{13}^2 + C_7^4 \cdot C_{13}^1 + C_7^5 \cdot C_{13}^0$; II спосіб. $C_{20}^5 - C_7^0 C_{13}^5 - C_7^1 C_{13}^4$. **25.23.** $C_{100}^{10} - C_{12}^0 C_{88}^{10} - C_{12}^1 C_{88}^9$. **25.24.** I спосіб. $C_{18}^7 + C_{19}^6 + C_{19}^6$; II спосіб. $C_{20}^7 - C_{18}^5$. **25.25.** $C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4$. **25.26.** $\frac{C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4}{3!}$. **25.27.** $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3$. **25.28.** $C_{12}^4 \cdot C_{15}^4 \cdot P_4$. **25.29.** C_{m+1}^n. *Вказівка*. Розмістимо в ряд m білих куль. Чорна куля може зайняти одне з $m + 1$ положень: крайня зліва, між будь-якими двома білими кулями, крайня справа (див. рисунок). **25.30.** C_{16}^4. *Вказівка*. Розмістимо кулі в ряд. Чотири «перегородки» ділять ці кулі на п'ять груп (див. рисунок). Отже, кількість способів розкладання куль по ящиках дорівнює кількості способів розміщення 4 перегородок на 16 місцях.



До задачі 25.29

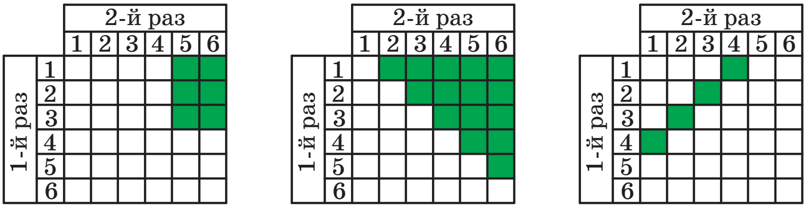


До задачі 25.30

25.31. C_{n-1}^{k-1}. *Вказівка*. Запишемо $n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$. Далі скористайтеся ідеєю розв'язування задачі 25.30. **25.32.** $a = 2$, або $a = -2$, або $a = 0$. **25.33.** 0. **25.34.** $(5; 6) \cup (6; +\infty)$.

26.16. $a = 1$. **26.17.** 10 км/год. **26.18.** 3.

27.20. 1) $\frac{1}{25}$; 2) $\frac{1}{20}$. **27.23.** 10 куль. **27.24.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{10}$; 3) $\frac{1}{9}$. **27.25.** $\frac{2}{3}$. **27.26.** $\frac{2}{3}$. **27.27.** 8 олівців. **27.28.** 19 олівців. **27.30.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $\frac{1}{9}$. *Вказівка*. Сприятливі події позначено на рисунку зеленим кольором.



1) 2) 3)

До задачі 27.30

27.31. 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{5}{36}$; 3) $\frac{5}{12}$. *Вказівка*. Кинути кубик двічі — це те саме, що незалежно один від одного кинути два кубики. Далі скористайтеся рисунком 27.2. **27.32.** У Петра. **27.33.** 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$. **27.34.** $\frac{1}{5}$. **27.35.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{7}{8}$. *Вказівка*. Кинути монету тричі — те саме, що незалежно одну від одної кинути три монети. Якщо пронумерувати монети, то маємо 8 рівноможливих результатів, як показано на рисунку.

Перша монета	Друга монета	Третя монета
Г	Г	Г
Г	Г	Ц
Г	Ц	Г
Г	Ц	Ц
Ц	Г	Г
Ц	Г	Ц
Ц	Ц	Г
Ц	Ц	Ц

До задачі 27.35

27.36. $\frac{2}{n-1}$. *Вказівка*. Якщо один зі знайомих сидить, то другий може з однаковою ймовірністю сісти на одне з решти $n-1$ місць. **27.37.** $\frac{1}{2}$. *Вказівка*. Кожному варіанту розстановки, у якому A стоїть попереду B, відповідає варіант, де їх поміняли місцями й A стоїть після B. Тому кількість сприятливих варіантів становить половину всіх варіантів. **27.38.** Графіком є парабола $y = x^2 + 1$, у якої «виколото» точки з абсцисами 2 і -2. **27.39.** $c = -11\frac{3}{4}$. **27.40.** 50 км/год. **27.41.** $6\frac{1}{3}$.

28.1. $\frac{1}{C_5^4}$. **28.2.** $\frac{1}{C_6^4}$. **28.3.** $\frac{1}{A_7^4}$. **28.4.** $\frac{1}{A_7^6}$. **28.5.** $\frac{C_4^2}{C_{10}^2}$. **28.6.** $\frac{C_{10}^3}{C_{50}^3}$. **28.7.** $\frac{C_{93}^4}{C_{100}^4}$. **28.8.** $\frac{C_{30}^5}{C_{50}^5}$. **28.9.** $\frac{C_5^2}{C_{10}^2}$. **28.10.** $\frac{5 \cdot 5}{C_{10}^2}$. **28.11.** $\frac{C_7^2 \cdot C_{93}^4}{C_{100}^6}$. **28.12.** $\frac{C_{10}^3 \cdot C_7^2}{C_{17}^5}$. **28.13.** $\frac{7!}{7^7}$. **28.14.** 1) $\frac{4}{6^4}$; 2) $\frac{6}{6^4}$; 3) $\frac{5^4 + 4 \cdot 5^3}{6^4}$; 4) $\frac{C_4^2 \cdot 5^2}{6^4}$. **28.15.** 1) $\frac{3!}{4!}$; 2) $\frac{3 \cdot 3!}{4!}$. **28.16.** $\frac{C_{15}^3 \cdot C_6^2 \cdot C_4^2}{C_{25}^7}$. **28.17.** $\frac{C_7^5 + C_{10}^1 \cdot C_7^4 + C_{10}^2 \cdot C_7^3}{C_{17}^5}$. **28.18.** $\frac{C_{40}^4 \cdot C_{10}^2 + C_{40}^5 \cdot C_{10}^1 + C_{40}^6}{C_{50}^6}$. **28.19.** $\frac{C_{93}^6 + C_7^1 \cdot C_{93}^5 + C_7^2 \cdot C_{93}^4}{C_{100}^6}$. **28.20.** 1) $\frac{1}{8^5}$; 2) $\frac{8}{8^5}$; 3) $\frac{A_8^5}{8^5}$; 4) $\frac{3^5}{8^5}$. **28.21.** $\frac{4! \cdot 9! \cdot 9! \cdot 9! \cdot 9!}{36!}$. **28.22.** $x^2 - 14x + 35 = 0$. **28.24.** $(-5; 0)$.

30.11. 8 членів. **30.12.** 13. **30.13.** 1; 2; 3; 4; 5. **30.14.** 8. **30.15.** 1) $a_n = n^2$; 2) $a_n = 3n + 2$; 3) $a_n = \frac{n-1}{n}$; 4) $a_n = (-1)^n + 1$; 5) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$; 6) $a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{n}$. **30.16.** 1) $a_n = n^3 + 1$; 2) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$; 3) $a_n = \frac{(-1)^n - n}{n}$; 4) $a_n = n^{(-1)^n}$; 5) $a_n = n - |n - 3|$. **30.17.** 1. **30.18.** 1) $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + 2$; 2) $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 1}{3 - a_n}$; 3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \left(\sqrt{a_n} + 1\right)^2$. **30.19.** 3) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + 1}$. **30.20.** 1) $a = 2$ або $a = 3$; 2) не існують. **30.21.** $a_{101} = \frac{1}{2}$. *Вказівка*. Покажіть, що $a_{n+6} = a_n$ для будь-якого натурального n. **30.22.** $a_{101} = -1$. **30.23.** *Вказівка*. Скористайтеся методом математичної індукції. **30.24.** *Вказівка*. Доведення проведіть методом математичної індукції з кроком 2. **30.28.** 1) $a_n = 2^n - 1$. *Вказівка*. Випишіть кілька перших членів послідовності та зробіть індуктивне припущення; 2) $a_n = \frac{n}{n+1}$; 3) $n^2 - 1$. **30.29.** *Вказівка*. Доведіть, що $a_n = (2n - 1)^2$. **30.30.** *Вказівка*. $a_{n+2} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{n+1}^2 + n + 1$. Покажіть, що $a_{n+2} = a_{n+1}^2 + a_{n+1} + 1$. Звідси $a_{n+1}^2 < a_{n+2} < (a_{n+1} + 1)^2$. **30.31.** $x_1 = 1$ або $x_1 = 2$. *Вказівка*. Виконавши заміну $x_n - 1 = y_n$, отримаємо: $y_{n+1} = y_n^2$. Тоді $y_{1000} = y_{999}^2 = \ldots = y_1^{2^{999}}$. Звідси $y_1 = 0$ або $y_1 = 1$. **30.32.** 60 км/год. **30.33.** $a \in [-1; 0)$. **30.34.** 3. **30.35.** $(-\infty; -3] \cup [5; +\infty) \cup \{1\}$.

31.9. 1) Так, $n = 16$; 2) ні. **31.10.** 15. **31.13.** 23. **31.14.** -6. **31.15.** 1) Так, $a_1 = -3$, $d = -6$; 2) ні; 3) так, $a_1 = -2{,}8$, $d = -2{,}8$; 4) ні. **31.16.** 1) Так, $a_1 = 13$, $d = 7$; 2) так, $a_1 = \frac{1}{5}$, $d = \frac{2}{5}$; 3) ні. **31.18.** 18. **31.19.** 16. **31.20.** $-0{,}6$. **31.21.** -6;

$-4{,}5$; -3; $-1{,}5$; 0; 1,5; 3. **31.22.** 2,2; 0,4; $-1{,}4$; $-3{,}2$. **31.23.** 1) $a_1 = 5$, $d = 2{,}5$; 2) $a_1 = -6$, $d = 4$ або $a_1 = 15$, $d = \frac{1}{2}$. **31.24.** 1) $a_1 = -2$, $d = 3$; 2) $a_1 = 20$, $d = -8$ або $a_1 = 51{,}5$, $d = -11{,}5$. **31.25.** Якщо перший член прогресії дорівнює її різниці або різниця прогресії дорівнює нулю. **31.32.** 60°. **31.38.** При $x = -1$: $a_1 = -3$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$; при $x = 8$: $a_1 = 60$, $a_2 = 43$, $a_3 = 26$. **31.39.** $y = 3$, $a_1 = 10$, $a_2 = 12$, $a_3 = 14$. **31.40.** $y = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 17$, $a_4 = 26$. **31.41.** $x = -1$, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$. **31.42.** 0. **31.46.** 3, 13, 23. *Вказівка*. Числа p, $p + 10$, $p + 20$, де p — просте число, дають різні остачі при діленні на 3. **31.47.** 3, 5, 7. **31.48.** *Вказівка*. Нехай $a_k = m^2$, $m \in \mathbb{N}$. Тоді для $n \geqslant k$ маємо $a_n = m^2 + d(n - 1)$. Покажіть, що член з номером $n = 2m + d + 1$ також є квадратом натурального числа. **31.49.** *Вказівка*. Маємо $a^2 = a + kd$, $k \in \mathbb{N}$, $b = a + dm$, $m \in \mathbb{N}$. Тоді $b^2 = a^2 + 2adm + d^2m^2 = a + d(k + 2ma + dm^2)$. **31.50.** *Вказівка*. Нехай $a_n = a_1 + d(n - 1)$, $a_m = a_1 + d(m - 1)$ і a_1 — k-значне натуральне число. Виберемо m і n так, щоб $n - 1 = 10^k$, $m - 1 = 10^p$, де $p > k$. **31.51.** *Вказівка*. Нехай множина простих чисел виду $3n + 2$ є скінченною. Позначимо її елементи $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Розгляньте число $3 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 2$. **31.52.** Не існує. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що можна вказати проміжки натурального ряду будь-якої довжини, які не містять жодного простого числа. **31.54.** 30 м³, 40 м³. **31.55.** $a = -4$. **31.56.** $\frac{1}{6}$.

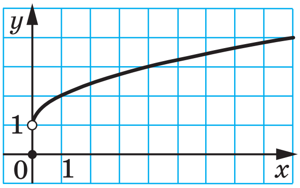
32.9. 1) 204; 2) 570. **32.10.** -310. **32.11.** 156 ударів. **32.12.** 1400. **32.13.** 710. **32.14.** 1188. **32.15.** 1) $\frac{n(n+1)}{2}$; 2) n^2. **32.16.** $n(n + 1)$. **32.17.** 8; 14; 20. **32.18.** -17. **32.19.** $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20, $29\frac{1}{6}$, $38\frac{1}{3}$. **32.20.** 3. **32.21.** $-67{,}2$. **32.22.** 63. **32.23.** 5880. **32.24.** 2112. **32.25.** 1632. **32.26.** 61 376. **32.27.** 70 336. **32.28.** 0,3. **32.29.** 10. **32.30.** 20. **32.31.** 16. **32.32.** Так; 19, 23, 27, 31, 35. **32.33.** Ні. **32.34.** 10 с. **32.35.** 42 сторінки. **32.36.** -1976. **32.37.** 348. **32.38.** $a_1 = 14$, $d = -3$. **32.39.** -10. **32.40.** 10. **32.41.** 690. **32.42.** 250. **32.43.** 1) 12; 2) 26. **32.44.** 1) 10; 2) 69. **32.45.** $a_1 = 1$, $d = 2$. **32.48.** 2610. **32.49.** 0. **32.50.** $-(m + n)$. **32.51.** 0. *Вказівка*. Нехай прогресія містить $(2n + 1)$ членів. З умови випливає, що $\frac{2a_2 + 2d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + 2dn}{2} \cdot (n+1)$. Звідси випливає, що $a_1 + dn = 0$. **32.52.** 0. *Вказівка*. Загальна кількість ігор дорівнює $0{,}5n(n - 1)$. Тоді кількість очок, набраних всіма командами, дорівнює $n(n - 1)$. Нехай остання команда набрала x очок. Якщо d — різниця прогресії, тоді кількість очок, набраних всіма командами, дорівнює $0{,}5\,(2x + d(n - 1))n$. Отримуємо рівняння $n(n - 1) = 0{,}5\,(2x + d(n - 1))\,n$. **32.53.** $(-3;\ 1)$, $(1;\ -3)$, $(1;\ 1)$. **32.54.** 40 км/год, 60 км/год. **32.56.** Якщо $a = -1$, то розв'язків немає; якщо $a = 1$, то $x \in \mathbb{R}$; якщо $a < -1$ або $a > 1$, то $x \leqslant \frac{1}{a+1}$; якщо $-1 < a < 1$, то $x \geqslant \frac{1}{a+1}$.

33.4. Так. **33.13.** 1) 2; 2) $\frac{3}{5}$ або $-\frac{3}{5}$. **33.14.** 1) $\frac{7}{16}$; 2) 0,001. **33.15.** 6. **33.16.** 9. **33.17.** 30 і 150. **33.18.** 1, 2, 4, 8. **33.19.** Так, $b_1=\frac{5}{4}$, $q=4$. **33.20.** $x_1=49$, $q=7$. **33.21.** 1) 15 або −15; 2) $2\sqrt{5}$ або $-2\sqrt{5}$. **33.22.** 6 або −6. **33.23.** 216. **33.24.** 243. **33.25.** $P_n=\frac{3a}{2^{n-1}}$. **33.29.** 3) Послідовність є геометричною прогресією, якщо $q\neq-1$. **33.31.** 80, 40, 20, 10, 5 або 80, −40, 20, −10, 5. **33.32.** 6, 18, 54, 162, 486 або 6, −18, 54, −162, 486. **33.33.** 1) $b_1=2\sqrt{3}$, $q=\sqrt{3}$ або $b_1=-2\sqrt{3}$, $q=-\sqrt{3}$; 2) $b_1=162$, $q=\frac{1}{3}$; 3) $b_1=7$, $q=-2$ або $b_1=\frac{14}{9}$, $q=-3$. **33.34.** 1) $b_1=\frac{1}{2}$, $q=4$; 2) $b_1=-1$, $q=3$. **33.35.** При $x=1$ маємо 3, 6, 12; при $x=-14$ маємо −27, −9, −3. **33.36.** При $x=2$ маємо 8, 4, 2; при $x=-7$ маємо −1, −5, −25. **33.37.** 96, 48, 24, 12, 6, 3. **33.38.** 3, 7, 11. **33.39.** 8, 10, 12 або 17, 10, 3. **33.40.** 5, 15, 45 або 45, 15, 5. **33.41.** 2, 6, 18 або 18, 6, 2. **33.42.** 18, 6, 2 або 2, 6, 18. **33.43.** 2, 4, 8, 12 або $\frac{25}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{3}{2}$. **33.44.** 1, 5, 9, 13. **33.45.** 4 км/год. **33.46.** $a=3$.

34.5. 1) 1456; 2) $155\left(5+\sqrt{5}\right)$. **34.6.** 762. **34.7.** 1210. **34.8.** −68,2. **34.9.** 27. **34.10.** −7 або 6. **34.11.** 13. **34.12.** 5. **34.13.** 72. **34.14.** $\frac{9}{8}$. **34.15.** 4368. **34.16.** −12 285. **34.17.** $\frac{A}{B}$. **34.19.** $2n+\frac{(4^n-1)(4^{n+1}+1)}{3\cdot4^n}$. **34.20.** 8. **34.21.** 5. **34.23.** $\left(\frac{A}{B}\right)^{50}$. *Вказівка.* Доведіть, що $b_1\cdot b_{100}=\frac{A}{B}$, далі скористайтеся задачею 33.25. **34.24.** 15 год, 10 год. **34.26.** Якщо $a<\frac{11}{4}$, то $x\geqslant\frac{11}{4}$ або $x=a$; якщо $a\geqslant\frac{11}{4}$, то $x\geqslant a$. **34.27.** (3; 3), (−1; −1).

35.7. 1) $2\left(\sqrt{2}-1\right)$; 2) $\frac{9\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}+5}{2}$. **35.8.** 1) $\frac{3\left(\sqrt{6}+2\right)}{2}$; 2) $3\sqrt{2}+4$. **35.9.** 35. **35.10.** $-\frac{1}{12}$. **35.11.** 1) $16+8\sqrt{2}$ або $16-8\sqrt{2}$; 2) 27. **35.12.** 1) 243; 2) 312,5. **35.14.** $b_1=1$, $q=\frac{1}{2}$ або $b_1=3$, $q=-\frac{1}{2}$. **35.15.** $b_1=192$, $q=\frac{1}{4}$. **35.16.** $27+9\sqrt{3}$ або $27-9\sqrt{3}$. **35.17.** $\frac{25\left(5+\sqrt{5}\right)}{2}$ або $\frac{25\left(\sqrt{5}-5\right)}{2}$. **35.18.** 1) $\frac{3}{4}$; 2) −3. **35.19.** $-\frac{1}{4}$ або $\frac{1}{4}$. **35.20.** $\frac{2}{5}$. **35.21.** $-\frac{1}{3}$ або $\frac{1}{3}$. **35.22.** $b_1=4\sqrt{5}$, $q=\frac{2}{\sqrt{5}}$.

35.23. $b_1 = 32$, $q = \frac{1}{3}$. **35.24.** $2a^2$. **35.25.** Так. **35.26.** 1) $6R\sqrt{3}$; 2) $R^2\sqrt{3}$; 3) $4\pi R$; 4) $\frac{4}{3}\pi R^2$. **35.27.** 1) $4a\left(2+\sqrt{2}\right)$; 2) $2a^2$; 3) $\pi a\left(2+\sqrt{2}\right)$; 4) $\frac{\pi a^2}{2}$. **35.29.** Див. рисунок. **35.30.** Перший робітник — за 8 год, другий — за 12 год. **35.31.** $\frac{3}{6^3}$. **35.32.** $a = 1$. **35.33.** 1; $-\frac{5}{3}$.



До задачі 35.29

36.1. 1) $\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4}$; 2) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. **36.2.** $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$. **36.3.** $\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4\cdot 5^n}$. **36.4.** $n(n+1)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^n}$. **36.5.** 1) $\frac{10(10^n-1)}{9} - n$; 2) $\frac{50(10^n-1)}{81} - \frac{5n}{9}$. **36.7.** 1) $\frac{n-1}{4n-3}$; 2) $\frac{n(n+2)}{n+1}$; 3) $1-\frac{1}{(n+1)!}$. *Вказівка.* $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$; 4) $1 - \frac{1}{(n+1)^2}$. *Вказівка.* $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$. **36.8.** 1) $\frac{n}{2(5n+2)}$; 2) $\frac{n(n^2+2n+3)}{2(n+1)}$. *Вказівка.* $\frac{n^3+n^2+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + n$. **36.9.** $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$. *Вказівка.* $\frac{1}{(n+1)^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$. **36.10.** $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$. *Вказівка.* $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$. **36.11.** $S_n = \frac{na^n}{a-1} - \frac{a^n-1}{(a-1)^2}$. *Вказівка.* Розгляньте рівність $aS_n = a + 2a^2 + 3a^3 + 4a^4 + \ldots + n\cdot a^n$. **36.12.** 15 сторінок. **36.13.** $0 < a < \frac{3}{2}$. **36.15.** 2; 4; -1; $-\frac{1}{2}$.

Вказівки до вправ оповідання «Ефективні прийоми доведення нерівностей»

У даних вказівках номери (1), (2), (3) посилаються на відповідні нерівності оповідання «Ефективні прийоми доведення нерівностей».

1. *Вказівка*. I спосіб. Скористайтеся нерівністю (1). II спосіб. Скористайтеся нерівністю (3). **3.** *Вказівка*. Скористайтеся нерівністю (2). **4.** *Вказівка*. $\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{z}+\frac{z^3}{x}=\frac{(x^2)^2}{yx}+\frac{(y^2)^2}{zy}+\frac{(z^2)^2}{xz}$. **5.** *Вказівка*. I спосіб. Скористайтеся нерівністю (3). II спосіб. $\frac{a^2}{b+2c}+\frac{b^2}{c+2a}+\frac{c^2}{a+2b}=\frac{1}{9}\left(\frac{(3a)^2}{b+2c}+\frac{(3b)^2}{c+2a}+\frac{(3c)^2}{a+2b}\right)$. Далі скористайтеся нерівністю (1). **6.** *Вказівка*. I спосіб. $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}=\frac{(a^2)^2}{ab+ac}+\frac{(b^2)^2}{bc+ba}+\frac{(c^2)^2}{ca+cb}$. Далі скористайтеся нерівністю (3). II спосіб. $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}=\frac{1}{4}\left(\frac{(2a^2)^2}{ab+ac}+\frac{(2b^2)^2}{bc+ba}+\frac{(2c^2)^2}{ca+cb}\right)$. Далі скористайтеся нерівністю (1). **8.** *Вказівка*. $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}=\frac{1^2}{1+ab}+\frac{1^2}{1+bc}+\frac{1^2}{1+ac}$. Далі скористайтеся нерівністю (3). **9.** *Вказівка*. Ліву частину нерівності подайте у вигляді $\frac{x^2}{x^2+2yx+3zx}+\frac{y^2}{y^2+2zy+3xy}+\frac{z^2}{z^2+2xz+3yz}$. Далі скористайтеся нерівністю (3) і нерівністю $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$. **11.** *Вказівка*. Скориставшись ключовою задачею 18.17 (1), можна записати, що $(x+1)(y+1)=xy+1+x+y\geqslant 2(x+y)$. **12.** *Вказівка*. На підставі ключової задачі 18.17 (1) та умови $x\in[0;\,1]$ можна записати, що $\frac{x}{2+yz}=\frac{x}{1+yz+1}\leqslant\frac{x}{1+y+z}\leqslant\frac{x}{x+y+z}$. **14.** *Вказівка*. Скориставшись ключовою задачею 18.13, можна записати, що $\frac{1}{a^3+b^3+abc}\leqslant\frac{1}{a^2b+b^2a+abc}=\frac{1}{ab\,(a+b+c)}=\frac{c}{abc\,(a+b+c)}$. **15.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 18.13. **16.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 18.13. **17.** *Вказівка*. Скористайтеся задачею 18.19. **18.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 18.22. **19.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 18.25. **20.** *Вказівка*. Скориставшись задачею 17.29 (1), можна записати: $\frac{1}{\sqrt{1}}<2\sqrt{1}-2\sqrt{0}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}<2\sqrt{2}-2\sqrt{1}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}<2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$; ...; $\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$. **21.** *Вказівка*. Скористайтеся задачею 17.29 (2).

Предметний покажчик

ЗМІСТ

Нерівності, які зв'язують середні величини

Якщо $a > 0$ і $b > 0$, то

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \geqslant \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

Нерівність Коші—Буняковського

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right)$$

КОМБІНАТОРИКА

Кількість перестановок *n*-елементної множини

$$P_n = n!$$

Кількість розміщень з *n* елементів по *k* елементів

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1),\quad k \leqslant n$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Кількість комбінацій з *n* елементів по *k* елементів

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k},\quad k \leqslant n$$

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$$

Прогресії

Арифметична прогресія / **Геометрична прогресія**

Формула n-го члена

$$a_n = a_1 + d(n-1) \qquad b_n = b_1 q^{n-1}$$

Формула суми n перших членів прогресії

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}n \qquad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1},\ q \neq 1$$

Властивість членів прогресії

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+2}}{2} \qquad b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$$

Сума нескінченної геометричної прогресії зі знаменником $|q| < 1$

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$

Відсоткові розрахунки

Знаходження p % від числа a:

$$b = \frac{ap}{100}$$

Знаходження числа, p % якого дорівнює a:

$$b = \frac{a\cdot 100}{p}$$

Знаходження відсоткового відношення числа a до числа b:

$$c = \frac{a}{b}\cdot 100\ \%$$

Формула складних відсотків

$$a_n = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

9 789664 742945