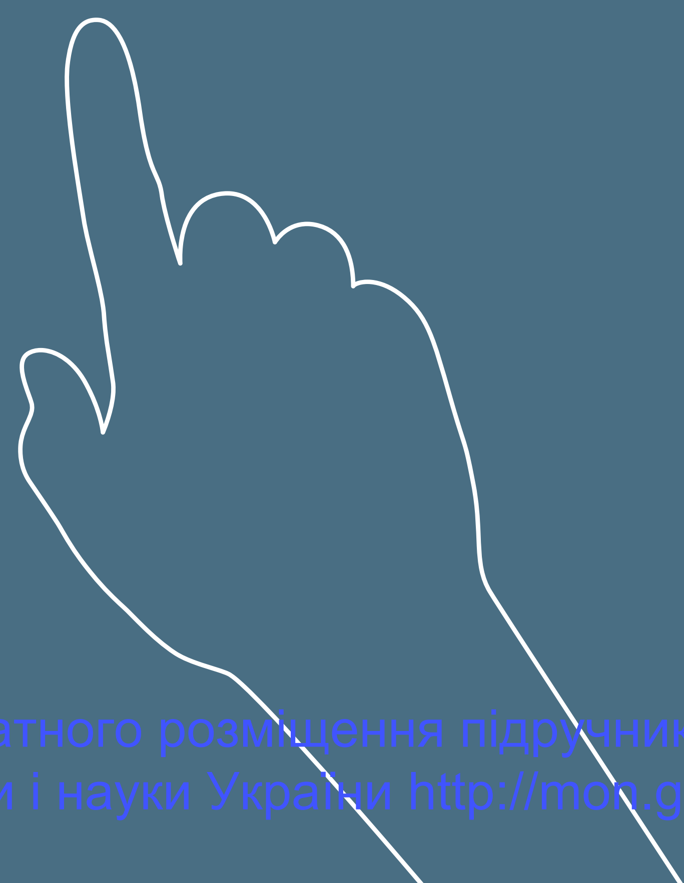
Наукове мислення
Співробітництво
Лідерство Розуміння
Взаємодія Передавання досвіду
Формулювання суджень
Прийняття рішень Критичне осмислення
Ініціювання Індивідуальна відповідальність
Творче мислення Планування роботи
Результати Уміння
Знання Цінності Ставлення
Досвід застосування Продукування

Компетентності



ISBN 978-617-656-751-6

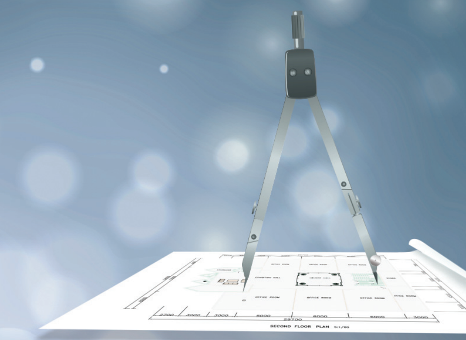
2017

Геометрія

Г. П. Бевз
В. Г. Бевз
Н. Г. Владімірова

9

Видавничий дім Освіта



Г. П. Бевз
В. Г. Бевз
Н. Г. Владімірова

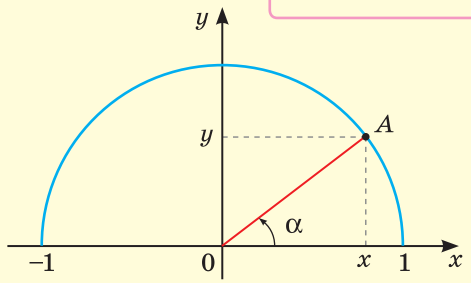
Геометрія

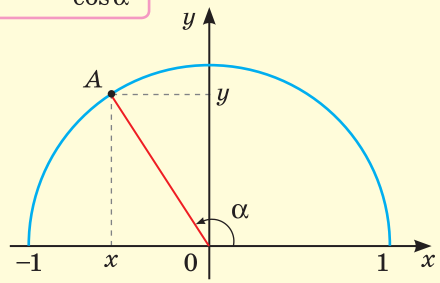
Geometry

9 клас

Тригонометричні функції

$\sin\alpha = y;\ \cos\alpha = x;\ \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$





Значення тригонометричних функцій деяких кутів

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	–1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	–1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

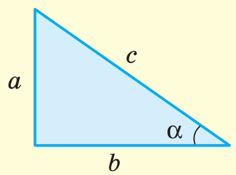
Тригонометричні тотожності

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ \ \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha;\ \ \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha;$

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$ і $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha.$

Співвідношення між сторонами і кутами трикутника

прямокутного



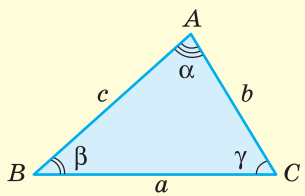
$a^2 + b^2 = c^2$

$a = c\sin\alpha$

$b = c\cos\alpha$

$a = b\operatorname{tg}\alpha$

довільного



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ — теорема косинусів,

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ — теорема синусів.

Декартові координати на площині

Формула відстані між двома точками

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Координати середини відрізка

$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2},\ \ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

Загальне рівняння прямої

$ax + by = c$, де $a^2 + b^2 \neq 0$

Рівняння кола

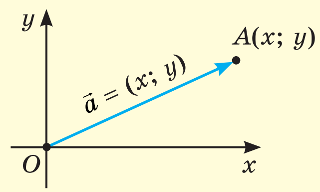
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$,

де $M(a;\, b)$ — центр кола,

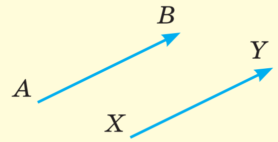
R — радіус кола

Вектори і дії над ними

Координати вектора



Рівні вектори

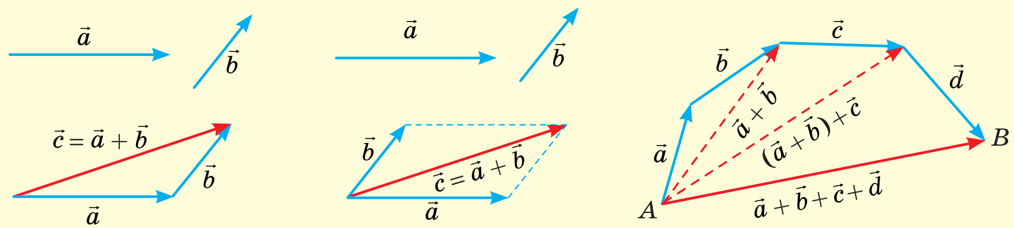


$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XY}$

Модуль вектора

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Додавання векторів



Якщо $\vec{a} = (x_1;\, y_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\, y_2)$, то $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2;\, y_1 + y_2)$ і $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\, y_1 - y_2)$,

$k\vec{a} = (kx_1;\, ky_1)$, де k — деяке число, $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

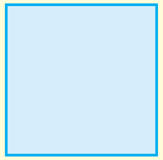
$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi.\ \ |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}.$

$\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$ або $\vec{a} = k\vec{b}$ — умова колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$,

$x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ або $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ — умова їх перпендикулярності $(\vec{a} \neq \vec{0};\ \vec{b} \neq \vec{0})$.

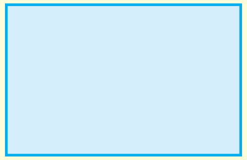
Площі плоских фігур

Квадрат



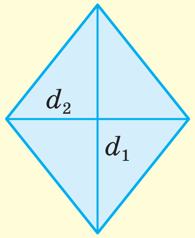
$S = a^2$

Прямокутник



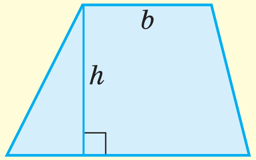
$S = ab$

Ромб

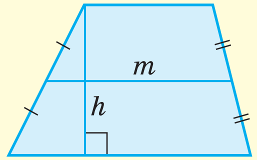


$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$

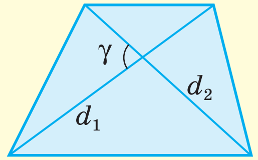
Трапеція



$S = \frac{1}{2}(a+b)h$

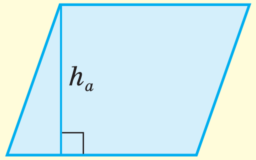


$S = mh$



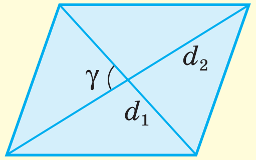
$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\gamma$

Паралелограм



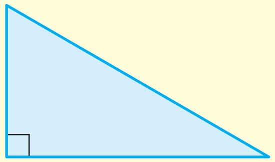
$S = ah_a$

$S = ab\sin\alpha$

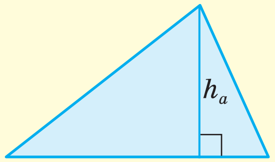


$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\gamma$

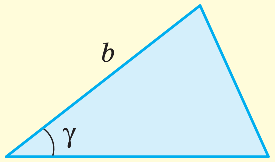
Трикутник



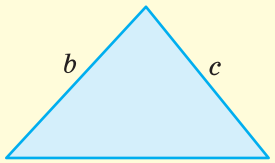
$S = \frac{1}{2}ab$



$S = \frac{1}{2}ah_a$

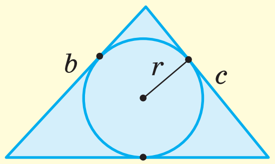


$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$



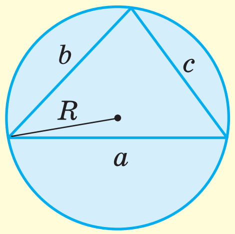
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$p = \frac{a+b+c}{2}$



$S = pr$,

$p = \frac{a+b+c}{2}$



$S = \frac{abc}{4R}$

Для правильних многокутників

Внутрішній кут	Зовнішній кут	Центральний кут
$\frac{180°(n-2)}{n}$	$\frac{360°}{n}$	$\frac{360°}{n}$

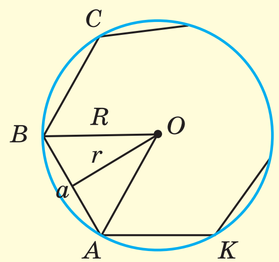
Сторона a_n правильного n-кутника $a_n = 2R_n \sin\frac{180°}{n}$ і $a_n = 2r_n \operatorname{tg}\frac{180°}{n}$

Радіус описаного кола

$$R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}$$

Радіус вписаного кола

$$r_n = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}$$



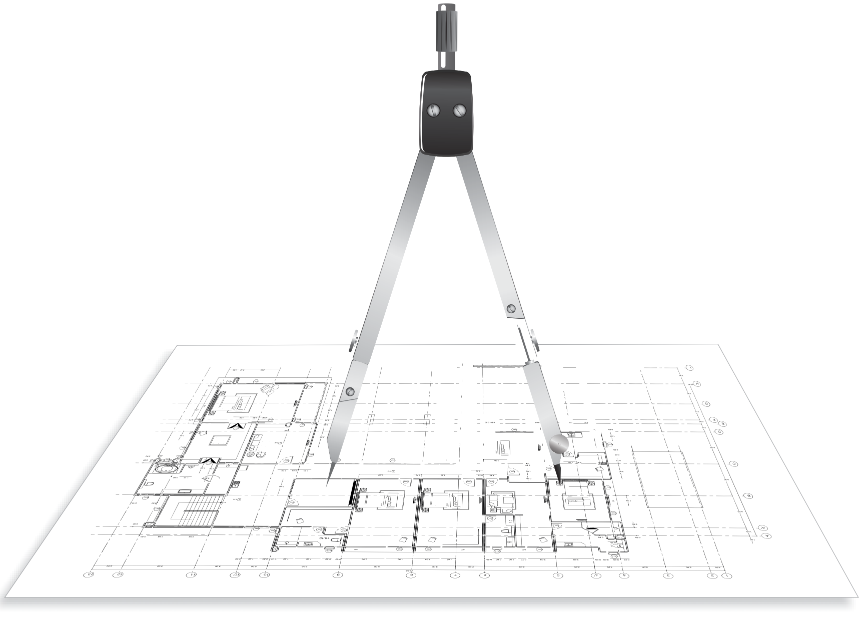
	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
R	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a
r	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
P	$3a$	$4a$	$6a$
S	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	a^2	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова

Геометрія

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України



Київ
Видавничий дім «Освіта»
2017

УДК 514(075.3)
Б36

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 20.03.2017 р. № 417)

ВИДАНО ЗА РАХУНОК ДЕРЖАВНИХ КОШТІВ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Романчук Н. О., кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова Миколаївської області;

Ткаченко Л. Л., вчитель-методист, вчитель Комунального закладу «Загальноосвітня школа I-III ступенів № 5» Бобринецької міської ради Кіровоградської області;

Герасимович О. М., методист Інституту післядипломної педагогічної освіти Київського університету імені Бориса Грінченка.

Науковий рецензент
Нелін Є. П., професор кафедри математики Харківського національного педагогічного університету імені Г. С. Сковороди

Бевз Г. П.
Б36 Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. — 272 с. : іл.

ISBN 978-617-656-751-6.

УДК 514(075.3)

ISBN 978-617-656-751-6

Шановні дев'ятикласники і дев'ятикласниці!

У цьому навчальному році ви продовжуєте опановувати геометрію — цікаву і важливу частину математики. Знання з геометрії, її ідеї та методи знадобляться вам для подальшого навчання у старшій школі, для успішного вивчення математики та інших навчальних предметів, для дослідження навколишнього світу, для повноцінного життя у сучасному суспільстві.

Значення геометрії для людини розкривали відомі математики:

- *Геометрія є пізнання всього існуючого* (Платон).
- *Серед рівних розумом — за однакових інших умов — переважає той, хто знає геометрію* (Б. Паскаль).

За допомогою цього підручника ви будете завершувати вивчення геометрії в основній школі. Щоб уявити весь курс геометрії основної школи і зрозуміти, яке місце в ній займає матеріал 9 класу, розгляньте зазначений нижче перелік тем. Кольором виділено матеріал, який ви вивчатимете в цьому році.

ГЕОМЕТРІЯ (7–9 класи)

Елементарні геометричні фігури та їх властивості. Взаємне розміщення прямих на площині. Трикутники. Ознаки рівності трикутників. Подібність трикутників. Розв'язування прямокутних трикутників. Коло і круг. Чотирикутники. Многокутники. Площі многокутників
Метод координат і вектори на площині. Розв'язування трикутників. Правильні многокутники. Довжина кола. Площа круга. Геометричні перетворення

У величезному саду Геометрії кожний може дібрати собі букет за смаком: строгі доведення і практичні застосування, цитати визначних математиків і оригінальні задачі, поняття сучасної математики та історичні відомості.

Геометрія потрібна всім: інженерам, архітекторам, конструкторам, креслярам, столярам, слюсарям, токарям, кравцям, художникам та багатьом іншим фахівцям. Застосовують знання з геометрії будівельники, мореплавці, військові, митці, астрономи і навіть кондитери. Яку б науку для вивчення ви не обрали в майбутньому, у якій би галузі не працювали, то для високих результатів потрібні гарні знання з геометрії. Запрошуємо вас у світ Геометрії. Цей світ дивний: щедрий, досконалий, тісно пов'язаний зі світами Праці, Розуму, Мистецтва.

Сподіваємося, що наш підручник стане вам добрим помічником в опануванні геометричних знань, у набутті нових умінь і досвіду, у гармонійному розвитку вашої особистості.

Бажаємо успіхів у навчанні!

Автори

Як працювати з підручником

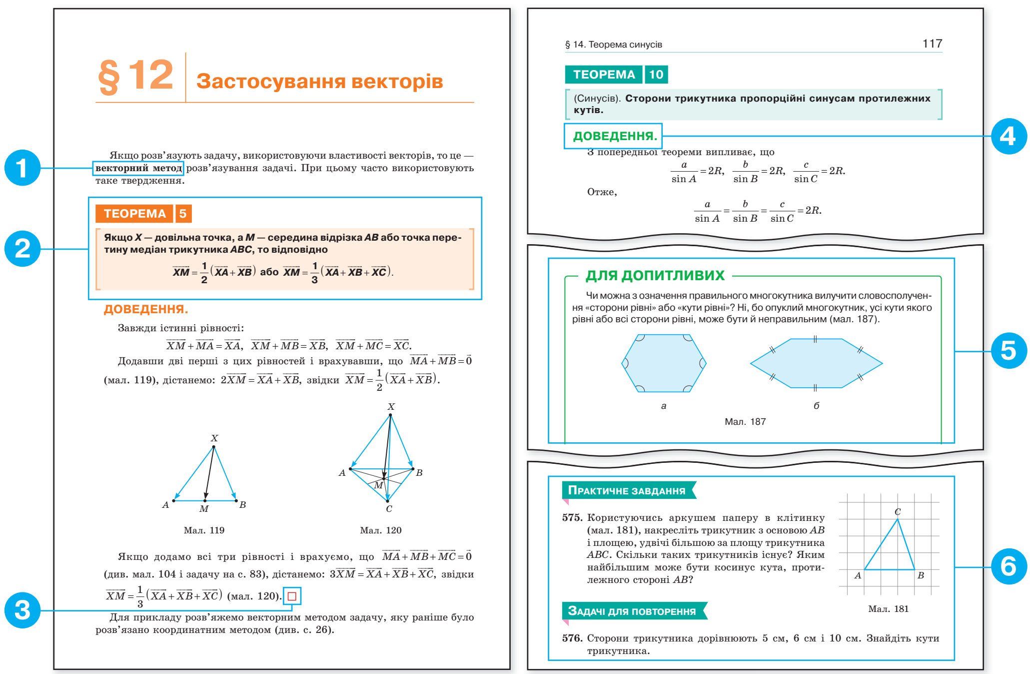
Дорогі дев'ятикласники і колеги!

Ви тримаєте у руках новий підручник геометрії. Автори сподіваються, що ця книжка стане для вас надійним помічником і порадником. Пропонуємо своєрідну навігацію його сторінками.

Вагомим мотивом і гарним стимулом для навчання є відомості про творців геометрії та приклади практичного застосування навчального матеріалу. Висловлювання видатних математиків можуть стати для вас дороговказом не лише у навчанні, а й на життєвому шляху.

На початку кожного розділу подано короткий огляд його змісту українською та англійською мовами, а також приклади матеріальних об'єктів, моделями яких є геометричні фігури.

1 Вивчаючи теоретичний матеріал, звертайте увагу на слова, надруковані **жирним** шрифтом, — це нові геометричні терміни. Ви повинні усвідомити, що вони означають, і запам'ятати їх.



§ 12 Застосування векторів

Якщо розв'язують задачу, використовуючи властивості векторів, то це — **векторний метод** розв'язування задачі. При цьому часто використовують таке твердження.

ТЕОРЕМА 5

Якщо *X* — довільна точка, а *M* — середина відрізка *AB* або точка перетину медіан трикутника *ABC*, то відповідно

$$\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}) \text{ або } \overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}).$$

ДОВЕДЕННЯ.

Завжди істинні рівності:

$$\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{XA},\quad \overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{XB},\quad \overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{XC}.$$

Додавши дві перші з цих рівностей і врахувавши, що $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (мал. 119), дістанемо: $2\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}$, звідки $\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB})$.

Мал. 119

Мал. 120

Якщо додамо всі три рівності і врахуємо, що $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ (див. мал. 104 і задачу на с. 83), дістанемо: $3\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}$, звідки $\overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC})$ (мал. 120). □

Для прикладу розв'яжемо векторним методом задачу, яку раніше було розв'язано координатним методом (див. с. 26).

§ 14. Теорема синусів 117

ТЕОРЕМА 10

(Синусів). **Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.**

ДОВЕДЕННЯ.

З попередньої теореми випливає, що

$$\frac{a}{\sin A}=2R,\quad \frac{b}{\sin B}=2R,\quad \frac{c}{\sin C}=2R.$$

Отже,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Чи можна з означення правильного многокутника вилучити словосполучення «сторони рівні» або «кути рівні»? Ні, бо опуклий многокутник, усі кути якого рівні або всі сторони рівні, може бути й неправильним (мал. 187).

а б

Мал. 187

Практичне завдання

575. Користуючись аркушем паперу в клітинку (мал. 181), накресліть трикутник з основою *AB* і площею, удвічі більшою за площу трикутника *ABC*. Скільки таких трикутників існує? Яким найбільшим може бути косинус кута, протилежного стороні *AB*?

Мал. 181

Задачі для повторення

576. Сторони трикутника дорівнюють 5 см, 6 см і 10 см. Знайдіть кути трикутника.

2 **Жирний текст в квадратних дужках** — це теореми, доведення яких подано нижче.

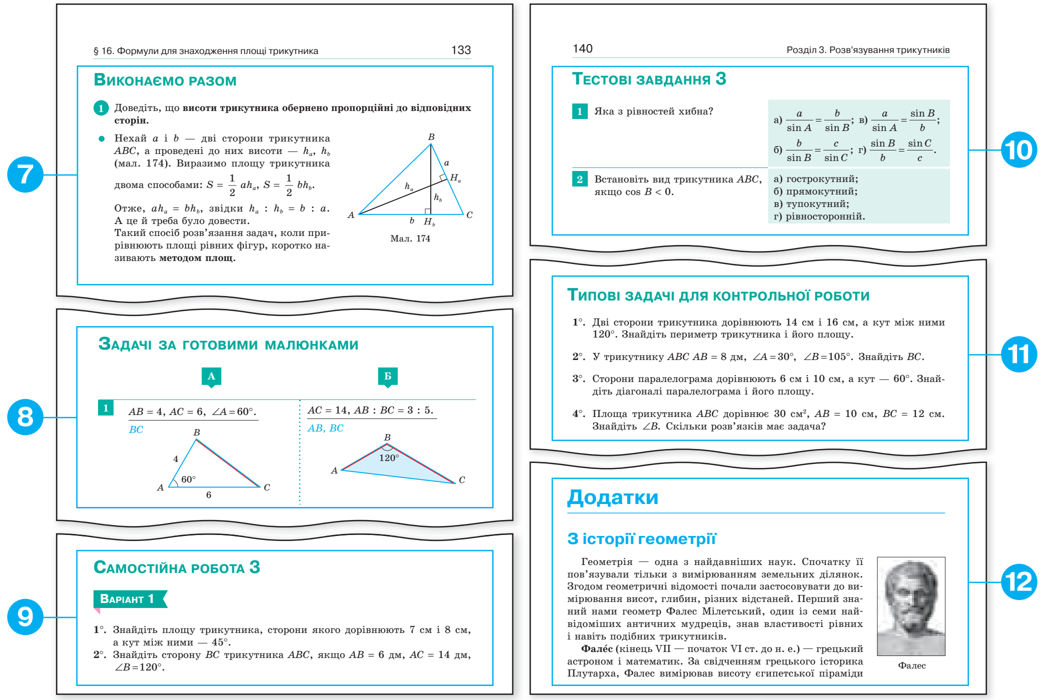
Кінець доведення теореми позначено 3 **червоним квадратиком**. 4 **Зеленим кольором** позначено доведення, які не є обов'язковими для вивчення.

У кожному параграфі підручника є рубрика 5 **«Для допитливих».** Вона містить додатковий матеріал, адресований зацікавленим учням.

Підручник містить вправи різних рівнів складності. Є задачі для усного розв'язування та повторення, задачі рівнів А і Б та підвищеної складності. Зацікавлять учнів і вчителів **відкриті задачі та практичні завдання**. 6

У рубриці **«Виконаємо разом»** 7 наведено зразки розв'язань важливих видів задач. Корисно ознайомитися з ними перед виконанням домашніх завдань, номери яких виділено блакитним кольором.

Наприкінці кожного розділу є рубрики **«Задачі за готовими малюнками»** 8, **Самостійні роботи** 9 із різнорівневими завданнями, **Тестові завдання** 10 і **Типові задачі для контрольної роботи** 11 трьох рівнів складності.



7

§ 16. Формули для знаходження площі трикутника 133

Виконаємо разом

1 Доведіть, що **висоти трикутника обернено пропорційні до відповідних сторін.**

• Нехай a і b — дві сторони трикутника ABC, а проведені до них висоти — h_a, h_b (мал. 174). Виразимо площу трикутника двома способами: $S = \frac{1}{2}ah_a$, $S = \frac{1}{2}bh_b$.

Отже, $ah_a = bh_b$, звідки $h_a : h_b = b : a$. А це й треба було довести.

Такий спосіб розв'язання задач, коли прирівнюють площі рівних фігур, коротко називають **методом площ.**

Мал. 174

8

Задачі за готовими малюнками

	А	Б
1	$AB = 4$, $AC = 6$, $\angle A = 60°$. *BC*	$AC = 14$, $AB : BC = 3 : 5$. *AB, BC*

9

Самостійна робота 3

Варіант 1

1°. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 7 см і 8 см, а кут між ними — 45°.

2°. Знайдіть сторону BC трикутника ABC, якщо $AB = 6$ дм, $AC = 14$ дм, $\angle B = 120°$.

10

140 Розділ 3. Розв'язування трикутників

Тестові завдання 3

1	Яка з рівностей хибна?	а) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$; в) $\frac{a}{\sin A} = \frac{\sin B}{b}$; б) $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$; г) $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$.
2	Встановіть вид трикутника ABC, якщо $\cos B < 0$.	а) гострокутний; б) прямокутний; в) тупокутний; г) рівносторонній.

11

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Дві сторони трикутника дорівнюють 14 см і 16 см, а кут між ними 120°. Знайдіть периметр трикутника і його площу.

2°. У трикутнику ABC $AB = 8$ дм, $\angle A = 30°$, $\angle B = 105°$. Знайдіть BC.

3°. Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 10 см, а кут — 60°. Знайдіть діагоналі паралелограма і його площу.

4°. Площа трикутника ABC дорівнює 30 см², $AB = 10$ см, $BC = 12$ см. Знайдіть $\angle B$. Скільки розв'язків має задача?

12

Додатки

З історії геометрії

Геометрія — одна з найдавніших наук. Спочатку її пов'язували тільки з вимірюванням земельних ділянок. Згодом геометричні відомості почали застосовувати до вимірювання висот, глибин, різних відстаней. Перший знаний нами геометр Фалес Мілетський, один із семи найвідоміших античних мудреців, знав властивості рівних і навіть подібних трикутників.

Фале́с (кінець VII — початок VI ст. до н. е.) — грецький астроном і математик. За свідченням грецького історика Плутарха, Фалес вимірював висоту єгипетської піраміди

Фалес

У додатках подано «Навчальні проекти» до кожного розділу, «Задачі підвищеної складності», «Задачі для повторення», «Тренувальні тести», **«Історичні відомості»** 12 тощо.

Бажаємо успіхів у вивченні геометрії!

Думаю, отже, існую.

Щоб удосконалити розум, потрібно більше розмірковувати, ніж заучувати.

Правильно вживайте слова, і ви звільните світ від половини непорозумінь.

РЕНЕ ДЕКАРТ

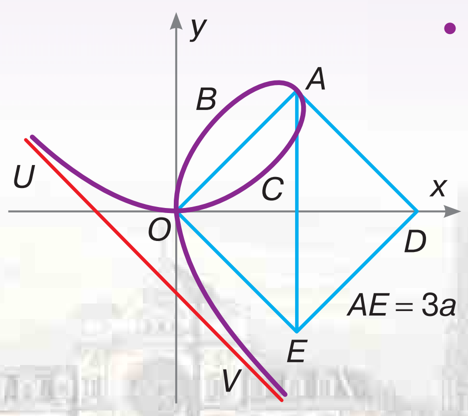
(1596–1650)

Видатний французький філософ, математик, фізик, фізіолог. Його «Геометрія» мала величезний вплив на розвиток математики — протягом майже 150 років алгебра й аналітична геометрія розвивалися у напрямах, вказаних Декартом.

- Створив метод координат
- Увів поняття незалежної змінної величини і функції
- Запровадив зручну математичну символіку

Декартів лист

$x^3 + y^3 = 3axy$



Розділ 1 | Section 1

Метод координат на площині | Coordinates on the Plane Method

Координатний метод у геометрії виявився настільки корисним і зручним, що започаткував створення окремої великої частини математики — аналітичної геометрії. Її вивчають у всіх вищих і середніх технічних закладах і на математичних факультетах університетів. За допомогою аналітичної геометрії вдалося перекинути міст між алгеброю і геометрією.

У цьому розділі ви ознайомитеся з декартовими координатами та методом координат, які дають змогу розв'язувати алгебраїчні задачі за допомогою геометрії, а геометричні — за допомогою алгебри. Ви зможете складати рівняння різних ліній і досліджувати їх властивості.

Для чого вивчати координати та метод координат?

Зручність координатного методу і простота алгоритмів, за допомогою яких описуються точки кривих алгебраїчними рівняннями, спричинили їх швидке поширення і активне застосування у багатьох галузях науки та людської життєдіяльності. Географічні координати використовуються у географії, картографії, геодезії, будівництві, військовій справі. За допомогою навігаційних приймачів визначають координати місцезнаходження під час руху в автомобілі, кораблі, літаку.

Жодна з областей сучасної науки не обходиться без графічного подання інформації. Невидима система координат міститься на екрані комп'ютера.

Вихідні сигнали миші можна розглядати як дві незалежні величини й перетворювати їх у координати положення на двовимірній площині. У графічному режимі значення x (нумерація стовпчиків) відраховується від лівого краю екрана вправо, а значення y (нумерація рядків) — від верхнього краю екрана вниз.

Координати застосовують у багатьох іграх (морський бій, шашки, шахи).

Спеціальні системи координат використовують в медичних дослідженнях, наприклад, у комп'ютерній томографії.

Координати використовують в алгебрі, фізиці, хімії, біології та інших науках і шкільних предметах.

А де ще використовують координати? Наведіть свої приклади.

Безпілотні літальні апарати, або квадрокоптери, використовують для масштабного будівництва, сільського господарства, спостереження за лісами та водоймами.

Ефективно використовуються у промисловості координатні верстати та столи і верстати з програмним управлінням.

Вивчивши матеріал розділу, ви дізнаєтеся про зв'язки алгебри, геометрії та тригонометрії, розширите свої знання з тригонометрії, зможете застосувати вивчений матеріал до розв'язування цікавих практичних задач.

§ 1 Синуси, косинуси і тангенси кутів від 0° до 180°

У фізиці та механіці тригонометричні функції використовують для дослідження періодичних процесів та обертальних рухів. А оскільки колесо (мал. 1) чи вал турбіни (мал. 2) може повернутися на будь-який великий кут в одному або протилежному напрямах, то розглядають тригонометричні функції кута α, де α може дорівнювати, наприклад, 500°, 700°, −600° і бути дуже великим додатним чи від'ємним числом. Із такими тригонометричними функціями ви ознайомитеся в 10 класі.

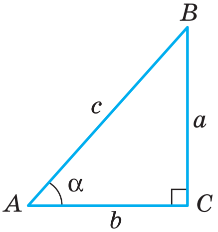
Мал. 1

Мал. 2

У геометрії для розв'язування трикутників досить розглядати тригонометричні функції кутів від 0° до 180°.

Ви вже знаєте, що таке синус, косинус, тангенс гострого кута прямокутного трикутника. Якщо в прямокутному $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ (мал. 3), то

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\quad \cos\alpha = \frac{b}{c},\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}.$$



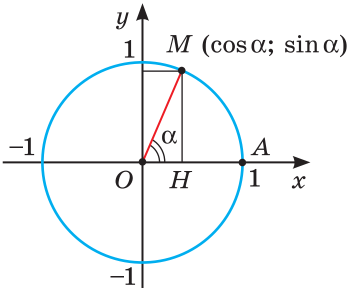
Мал. 3

Користуючись цими формулами, можна розв'язувати прямокутні трикутники.

Щоб розв'язувати не тільки прямокутні, а й довільні трикутники, потрібно використовувати тригонометричні функції не тільки гострих, а й тупих кутів.

Пояснимо, що означають вирази $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, де α — такий кут, що $0 \le \alpha \le 180°$.

Накреслимо на координатній площині коло радіуса $r = 1$ із центром у початку координат (мал. 4). Це — **одиничне коло**. Позначимо точку перетину додатної півосі OX з одиничним

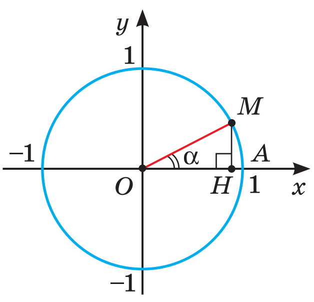


Мал. 4

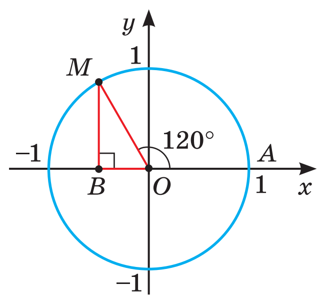
колом буквою A і домовимося відкладати кути від променя OA проти руху годинникової стрілки. Кути та їх міри позначатимемо грецькими літерами α (альфа), β (бета), γ (гамма) тощо.

Якщо M — така точка одиничного кола, що $\angle AOM = \alpha$, то абсцису точки M називають **косинусом кута** α, а ординату — **синусом кута** α. На малюнку 4 $OH = \cos\alpha$, $MH = \sin\alpha$.

Наприклад, якщо $\alpha = 30°$ (мал. 5), то ордината точки M дорівнює $\frac{1}{2}$, бо катет, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи. Тому якщо $OM = 1$, то $MH = \frac{1}{2}$. Таким чином, $\sin 30° = \frac{1}{2}$. За теоремою Піфагора $OH = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отже, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Мал. 5



Мал. 6

Якщо $\alpha = 120°$ (мал. 6), тобто $\angle AOM = 120°$, то $\angle MOB = 60°$ а $\angle OMB = 30°$. Тоді, за властивістю катета, що лежить проти кута 30°, $OB = 0{,}5OM = 0{,}5$. Оскільки точка M лежить у другій чверті, то її абсциса — від'ємне число. У даному випадку вона дорівнює $-0{,}5$, а тому $\cos 120° = -0{,}5$. За теоремою Піфагора

$$MB = \sqrt{MO^2 - BO^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ордината точки M дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а тому $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Тангенсом кута α називають відношення синуса цього кута до його косинуса:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Зрозуміло, що $\operatorname{tg}\alpha$ має зміст тільки при таких значеннях α, при яких $\cos\alpha \neq 0$, бо на нуль ділити не можна. Оскільки для кутів від 0° до 180° $\cos\alpha = 0$, якщо $\alpha = 90°$, то у даному випадку $\operatorname{tg}\alpha$ визначений для кутів $\alpha \neq 90°$.

Розглянемо, як обчислювати тангенси кутів від 0° до 180°.

Наприклад, $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \dfrac{1}{2} : \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

$\operatorname{tg} 120^\circ = \dfrac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} : \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}$.

Зміна $\sin\alpha$ при зміні α*

Точні значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ для деяких кутів α наведено в таблиці 1.

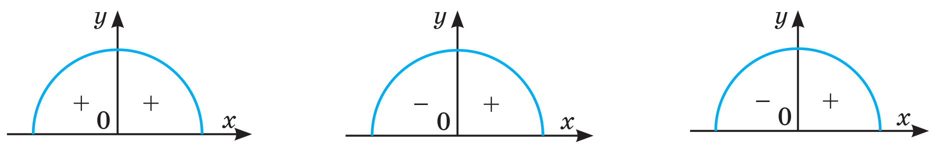
Таблиця 1

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Функції $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$ називають **тригонометричними функціями** кута α. Сформульовані у 8 класі означення тригонометричних функцій гострого кута прямокутного трикутника не суперечать новим.

Зверніть увагу!

1. Синуси, косинуси і тангенси гострих кутів набувають лише додатних значень, а косинуси і тангенси тупих кутів — від'ємних (мал. 7).



Знаки синусів Знаки косинусів Знаки тангенсів

а *б* *в*

Мал. 7

2. Якщо кут α збільшувати від 0° до 90°, то його синус збільшуватиметься від 0 до 1, а косинус зменшуватиметься від 1 до 0. Якщо кут α продовжувати збільшувати від 90° до 180°, то його синус зменшуватиметься від 1 до 0, а косинус — від 0 до −1.

3. Якщо кут α збільшувати від 0° до 90°, то його тангенс збільшуватиметься від 0 до нескінченності; tg 90° не існує. Якщо кут α збільшувати від 90° до 180°, то $\operatorname{tg}\alpha$ збільшуватиметься від мінус нескінченності до 0.

* Щоб скористатися QR-кодом, необхідно встановити спеціальне програмне забезпечення на смартфоні/планшеті. Наприклад, для пристроїв з операційною системою Android потрібно запустити застосунок Google Play Market та завантажити програму Powerful QR Code Scaner A+ або будь-яку аналогічну. Завантажити програми для зчитування QR-кодів для інших операційних систем допоможуть відповідні застосунки: Windows Mobile — Windows Store, iOS — App Store.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Задачі, які ми відносимо до тригонометрії, почали розв'язувати ще давні греки. Вони обчислювали довжини хорд у колі на основі відомих співвідношень між елементами правильних многокутників і радіусом кола, описаного навколо цих многокутників. Видатний давньогрецький вчений Клавдій Птолемей (100–178) у творі «Альмагест» склав таблицю хорд через півградуса від 0° до 180°, яка, із сучасної точки зору, є таблицею синусів для кутів від 0° до 90° через кожну чверть градуса. Радіус кола у Птолемея дорівнював 60 одиницям, що суттєво ускладнювало обчислення.

Хорезмський вчений-енциклопедист Абу Рейхан Аль-Біруні (973–1048) запропонував використовувати одиничне коло для введення поняття синуса і косинуса. У роботі «Канон Масуда» він писав так: «Ми вважаємо за краще для числа діаметра таке, щоб воно було з двох частин, тобто одиниць, щоб половина діаметра, яка називається найбільшим синусом, а іноді — повним синусом, була одиницею. Тоді в наших діях відпаде необхідність згадувати множення на нього і ділити на нього, а також перетворювати його у хвилини або понижати на розряд, як все це було б необхідним, якби він мав шістдесят частин».

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що називається одиничним колом?
2. Що називається синусом кута? Чому дорівнює sin 30°; sin 90°?
3. Що називається косинусом кута? Чому дорівнює cos 45°; cos 60°?
4. Як зміниться синус кута, якщо кут збільшити: а) від 0° до 90°; б) від 90° до 180°?
5. Як зміниться косинус кута, якщо кут збільшувати: а) від 0° до 90°; б) від 90° до 180°?
6. Що називається тангенсом кута? Чому дорівнює tg 30°; tg 90°?
7. Як зміниться тангенс кута, якщо кут збільшувати: а) від 0° до 90°; б) від 90° до 180°?
8. Які знаки мають тригонометричні функції гострого кута? А тупого?
9. Сформулюйте означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута прямокутного трикутника.

Виконаємо разом

1 Користуючись одиничним колом, знайдіть sin 135° і cos 135°.

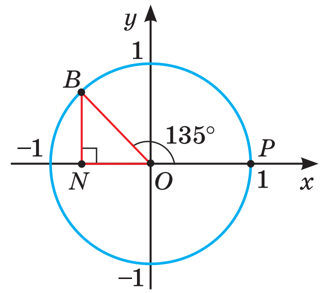
- На малюнку 8 зображено одиничне коло (коло радіуса $r = 1$ із центром у початку координат). Якщо на цьому малюнку $\angle POB = 135°$ і $\angle ONB = 90°$, то $\angle NOB = 45°$ і $\angle NBO = 45°$. Тоді $\triangle ONB$ — рівнобедрений і $NO = NB$. За теоремою Піфагора:

$OB^2 = NO^2 + NB^2$, або $1 = 2NO^2$, звідси

$NO^2 = \frac{1}{2}$, а $NO = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Оскільки $NO = NB$, то точка B має координати $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

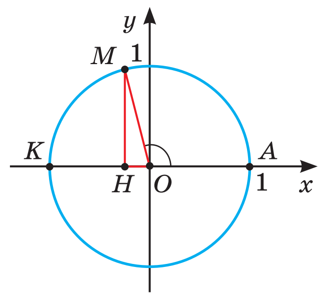
Отже, $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Мал. 8

2 Побудуйте кут, косинус якого дорівнює –0,25.

- Побудуємо в системі координат одиничне коло (мал. 9). Поділимо радіус OK на чотири рівні частини. Тоді $OH = \frac{1}{4}OK = 0,25$. Проведемо $HM \perp OK$. Точка M належить одиничному колу і лежить у другій чверті, тому її абсциса дорівнює –0,25. Отже, $\cos \angle AOM = -0,25$ і $\angle AOM$ — той, що потрібно було побудувати.

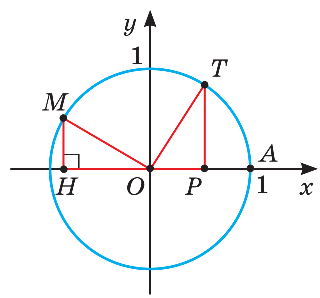


Мал. 9

3 Доведіть, що sin 150° = cos 60°.

- Нехай $\angle MOA = 150°$, а $\angle TOA = 60°$ (мал. 10). Тоді $\angle MOH = 30°$, а $\angle HMO = 60°$. За гіпотенузою і гострим кутом $\triangle MOH = \triangle OTP$, а тому $PO = MH$.
Оскільки PO = cos 60°, а MH = sin 150°, то sin 150° = cos 60°. Що і треба було довести.

Якщо задача має недостатню кількість даних, то її називають **відкритою**. Ви маєте на свій розсуд доповнити її умову і розв'язати отриману задачу. Бажано розглянути якомога більшу кількість можливих варіантів задачі та її розв'язання.



Мал. 10

4 ***Відкрита задача.*** Установіть вид трикутника ABC, якщо $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а sin B = **...** .

- Доповнимо умову кількома різними способами, наприклад: 1) sin B = 0, 2) sin B = 1, 3) $\sin B = \frac{1}{2}$, 4) sin B = a, де $0 < a < \frac{1}{2}$. З'ясуємо вид трикутника для кожного з цих випадків.

1) Якщо $\sin B = 0$, то $\angle B = 0°$ або $\angle B = 180°$. Трикутника з такими кутами не існує.
2) Якщо $\sin B = 1$, то $\angle B = 90°$. Маємо: $\angle A = 30°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 60°$. Отже, $\triangle ABC$ — прямокутний, але не рівнобедрений.
3) Якщо $\sin B = \frac{1}{2}$, то $\angle B = 30°$ або $\angle B = 150°$. Розглянемо кожен з цих випадків. У першому випадку маємо $\angle A = 30°$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 120°$. Отже, $\triangle ABC$ — тупокутний і рівнобедрений. У другому випадку маємо $\angle A = 30°$, $\angle B = 150°$, $\angle C = 0°$. Трикутника з такими кутами не існує.
4) Якщо $\sin B = a$, де $0 < a < \frac{1}{2}$, то $0 < \angle B < 30°$ або $150° < \angle B < 180°$. У першому випадку маємо $\angle A + \angle B < 60°$, а тому $\angle C > 120°$. Отже, $\triangle ABC$ — тупокутний, але не рівнобедрений. У другому випадку: $\angle A + \angle B > 180°$. Трикутника з такими кутами не існує.
Інші випадки розгляньте самостійно.

Задачі і вправи

Виконайте усно

1. Чи може абсциса або ордината точки одиничного кола дорівнювати 2?
2. Чи може синус або косинус кута дорівнювати 2? А −2?
3. Чи може синус кута, меншого від 180°, бути числом від'ємним? А косинус?
4. Тангенс якого кута дорівнює 1? А якого −1?
5. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$, якщо: а) $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$; б) $\mathrm{tg}\,\alpha = -1$.
6. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\mathrm{tg}\,\alpha$, якщо $\cos\alpha = 0,5$.
7. Які числа мають бути в порожніх клітинках таблиці?

α	0°	90°	180°
$\sin\alpha$			
$\cos\alpha$			
$\mathrm{tg}\,\alpha$			

А

8. Дано три точки: $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $B(1;\ 1)$. Знайдіть синус і косинус кута AOB.
9. Знайдіть синус і косинус кута AOK, якщо $A(1;\ 0)$, $O(0;\ 0)$, $K(0;\ 1)$.
10. Знайдіть, користуючись одиничним колом: sin 60°, cos 60°, sin 150°, cos 150°.

11. Доведіть, що $\sin 45° = \cos 45°$.

12. Побудуйте кут, косинус якого дорівнює: а) $\frac{3}{4}$; б) $-0{,}5$.

13. Побудуйте кут, синус якого дорівнює 0,75. Скільки розв'язків має задача?

14. Що більше: а) $\sin 10°$ чи $\cos 10°$; б) $\cos 45°$ чи $\sin 45°$?

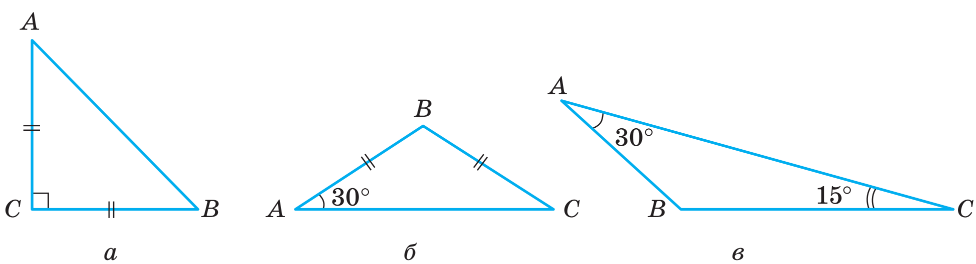
15. Який із кутів більший — α чи β, якщо:

а) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$;

б) $\sin\alpha = 0{,}75$, $\sin\beta = 0{,}93$ (кути α і β — гострі);

в) $\sin\alpha = 0{,}75$, $\sin\beta = \frac{1}{2}$ (кути α і β — тупі).

16. Користуючись малюнком 11, знайдіть синус, косинус і тангенс кута B трикутника ABC.



Мал. 11

17. Визначте знак добутку:
а) $\cos 30° \cdot \sin 15° \cdot \cos 125° \cdot \text{tg}\, 35°$;
б) $\sin 137° \cdot \cos 150° \cdot \text{tg}\, 22° \cdot \cos 35°$;
в) $\text{tg}\, 143° \cdot \sin 165° \cdot \text{tg}\, 87° \cdot \cos 126°$;
г) $\cos 32° \cdot \sin 132° \cdot \cos 135° \cdot \text{tg}\, 92°$.

18. Запишіть кути у три колонки: I — гострі кути; II — тупі кути; III — вид кута не можна встановити: $\sin A = 0{,}6$; $\cos B = -0{,}8$; $\sin C = \frac{1}{3}$;

$\text{tg}\, D = -2$; $\cos E = \frac{1}{4}$; $\cos L = \frac{11}{12}$; $\text{tg}\, R = \frac{12}{11}$; $\sin O = \frac{7}{15}$; $\cos Q = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

19. Замість * поставте знаки > або <:

а) $\cos 5° * \cos 7°$;
б) $\sin 82° * \sin 79°$;
в) $\text{tg}\, 29° * \text{tg}\, 32°$;
г) $\cos 113° * \cos 115°$;
ґ) $\sin 178° * \sin 108°$;
д) $\text{tg}\, 97° * \text{tg}\, 107°$.

20. Обчисліть значення виразів:
а) $\sin 45° - \cos 60° \cdot \cos 90° + \cos 135°$;
б) $\sin 30° \cdot \cos 150° - \sin^2 135° \cdot \text{tg}\, 120°$.

21. Обчисліть значення виразів:
а) $\sin 30° \cdot \cos 60° - \cos^2 120° + \sin 135° \cdot \cos 90°$;
б) $\operatorname{tg} 30° \cdot \operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg}^2 135° + \cos 150°$.

22. Знайдіть кути $\triangle ABC$, якщо $\sin A = 0{,}5$, а $\cos B = -0{,}5$.

23. Знайдіть кути $\triangle ABC$, якщо $\operatorname{tg} A = -1$, а $\sin C = \frac{1}{2}$.

24. Знайдіть кути ромба $ABCD$, якщо $\cos D = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

25. Установіть відповідність між значеннями виразів (1–4) та рівними їм значеннями виразів (А–Д).

1	$\sin 90°$	**А**	$\cos 60°$
2	$\cos 30°$	**Б**	$\sin 120°$
3	$\sin 150°$	**В**	$\cos 90°$
4	$\cos 45°$	**Г**	$\cos 0°$
		Д	$\sin 135°$

26. Знайдіть, користуючись калькулятором: а) $\sin 3°$, $\sin 4{,}8°$, $\sin 56{,}7°$; б) $\cos 64{,}25°$, $\cos 25°$, $\cos 45{,}8°$; в) $\operatorname{tg} 15°$, $\operatorname{tg} 23{,}5°$, $\operatorname{tg} 81{,}1°$; г) $\sin 25°1'$, $\cos 3°7'$, $\operatorname{tg} 56°36'$.

27. Користуючись калькулятором чи таблицями, знайдіть кут, якщо відомо:

а) його косинус дорівнює: 0,325; 0,78; $\frac{2}{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

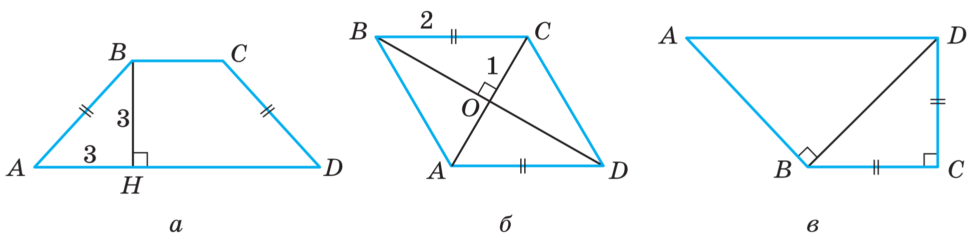
б) його тангенс дорівнює: 0,726; 2,605; $\frac{1}{5}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

28. Знайдіть гострий кут, синус якого дорівнює:

а) 0,26; б) $\frac{3}{7}$; в) 0,685; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Б

29. Користуючись малюнком 12, знайдіть синуси, косинуси, тангенси кутів A, B, C і D чотирикутника $ABCD$, якщо $BC \parallel AD$.



Мал. 12

30. Косинус одного з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Знайдіть кути трикутника.

31. Синус одного з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 0,5. Знайдіть кути трикутника. Скільки розв'язків має задача?

32. Знайдіть синуси, косинуси і тангенси кутів рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 16 см, а бічна сторона 6 см.

33. Знайдіть синуси, косинуси і тангенси кутів ромба, периметр якого дорівнює 16 см, а площа 8 см^2.

34. Знайдіть бічні сторони прямокутної трапеції, якщо косинус одного з її кутів дорівнює $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, а різниця основ дорівнює a.

35. ***Відкрита задача.*** Установіть вид трикутника ABC, якщо cos B **...** .

36. Побудуйте кут, косинус якого дорівнює $-\frac{3}{4}$. Знайдіть синус і тангенс цього кута.

37. Побудуйте кут, синус якого вдвічі більший за косинус.

38. Побудуйте кут, косинус якого в три рази більший за синус.

39. Синус кута у 5 разів менший за його косинус. Знайдіть тангенс цього кута.

40. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Знайдіть синуси, косинуси і тангенси найменшого і найбільшого кутів трикутника.

Практичне завдання

41. Накресліть на міліметровому папері півколо радіуса 100 мм і поділіть його транспортиром на 18 рівних частин. Користуючись цим малюнком:
а) покажіть, що у разі збільшення кута від 0° до 90° його синус збільшуватиметься від 0 до 1, а зі збільшенням кута від 90° до 180° його синус зменшуватиметься від 1 до 0;
б) покажіть, що у разі збільшення кута від 0° до 90° його косинус зменшуватиметься від 1 до 0, а зі збільшенням кута від 90° до 180° його косинус зменшуватиметься від 0 до −1;
в) складіть таблицю наближених значень синуса і косинуса для кутів 0°, 10°, 20°, 30°, ..., 180°.

Задачі для повторення

42. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо вони пропорційні числам 2 і 3, а гіпотенуза дорівнює $4\sqrt{13}$ см.

43. Площа рівностороннього трикутника дорівнює $16\sqrt{3}$ см. Знайдіть його периметр.

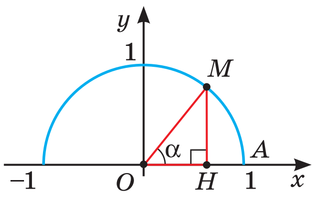
44. Один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 120°. Знайдіть периметр трикутника, якщо висота, проведена до основи, дорівнює h.

45. У колі проведено два взаємно перпендикулярні діаметри AB і CD. Знайдіть радіус кола, якщо $AC = m$.

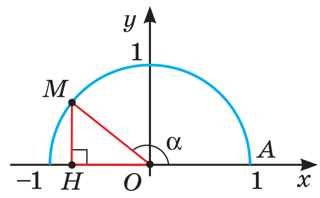
§ 2 Тригонометричні тотожності

Розглянемо найважливіші формули, що пов'язують синус, косинус і тангенс одного й того самого кута α. Нехай α — гострий кут. На одиничному колі позначимо точку M таку, що $\angle MOA = \alpha$ (мал. 13). Тоді $MH = \sin\alpha$, $OH = \cos\alpha$, $OM = 1$. За теоремою Піфагора $MH^2 + OH^2 = OM^2$, або

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \qquad (*)$$



Мал. 13



Мал. 14

Якщо кут α тупий (мал. 14), то з прямокутного трикутника OMH ($OM = 1$, $MH = \sin\alpha$, $OH = -\cos\alpha$) за теоремою Піфагора маємо: $MH^2 + HO^2 = OM^2$, або $\sin^2\alpha + (-\cos\alpha)^2 = 1$, звідки $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Рівність (*) правильна і в цьому випадку.

Якщо $\alpha = 0°$, то $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$; якщо $\alpha = 90°$, то $\sin\alpha = 1$, $\cos\alpha = 0$; якщо $\alpha = 180°$, то $\sin\alpha = 0$, $\cos\alpha = -1$.

У кожному з цих випадків рівність (*) правильна.

Отже, для кожного α, якщо $0° \le \alpha \le 180°$,

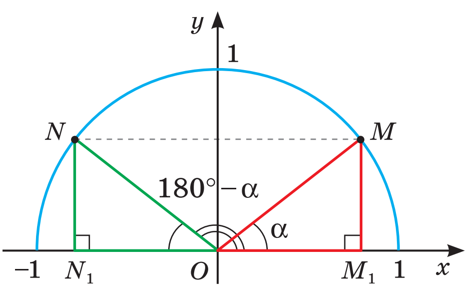
$$\mathbf{sin}^2\,\alpha + \mathbf{cos}^2\,\alpha = \mathbf{1}.$$

Це — **основна тригонометрична тотожність**. Вона пов'язує синус і косинус одного кута і дає змогу виражати одну з цих тригонометричних функцій через іншу:

$$\mathbf{sin}\,\alpha = \sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{cos}^2\,\alpha}, \quad \mathbf{cos}\,\alpha = \pm\sqrt{\mathbf{1} - \mathbf{sin}^2\,\alpha}.$$

У другій формулі перед коренем ставлять знак «–», якщо кут α тупий. Кутів, більших від розгорнутого, ми не розглядаємо.

Звернімо увагу на точки N і M одиничного кола, які відповідають кутам $180° - \alpha$ і α (мал. 15). Їх ординати NN_1 і MM_1 рівні, а абсциси ON_1 і OM_1 відрізняються тільки знаками.



Мал. 15

Отже, завжди

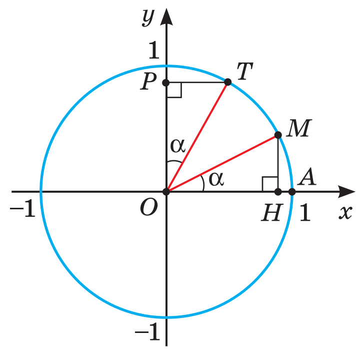
$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$

За цими формулами синус і косинус тупого кута $180° - \alpha$ можна виразити через синус і косинус гострого кута α. Наприклад:

$$\sin 147° = \sin(180° - 33°) = \sin 33°,$$
$$\cos 105° = \cos(180° - 75°) = -\cos 75°.$$

Доведемо ще формули:

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha.$$



Мал. 16

Нехай $\angle MOA = \alpha$, $\angle TOA = 90° - \alpha$ (мал. 16). Тоді $\angle POT = \alpha$. За гіпотенузою і гострим кутом $\triangle MOH = \triangle TOP$. Звідси $PT = MH$, $OP = OH$.

Оскільки $PT = \cos(90° - \alpha)$, $MH = \sin\alpha$, то $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$. Оскільки $OP = \sin(90° - \alpha)$, $OH = \cos\alpha$, то $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$.

Доведені дві формули дають змогу виразити синус і косинус будь-якого гострого кута, більшого від 45°, через косинус і синус кута, меншого від 45°. Отже, значення синусів кутів від 0° до 45° є водночас значеннями косинусів кутів від 90° до 45° (див. таблицю на форзаці).

Приклад.

$\sin 10° = \cos 80° \approx 0{,}174;$

$\cos 50° = \sin 40° \approx 0{,}643.$

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Оскільки $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$ і $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$, то

$$\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \frac{\sin(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \mathrm{ctg}\,\alpha.$$

Оскільки $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ і $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, то

$$\mathrm{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Усі ці рівності правильні за умови, якщо знаменники відмінні від нуля, тобто якщо тангенси і котангенси існують. За таких умов

$$\mathrm{tg}(90° - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha,\quad \mathrm{tg}(180° - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте основну тригонометричну тотожність.
2. Якими мають бути праві частини тотожностей: а) $\sin(90°-\alpha)=...$; б) $\cos(90°-\alpha)=...$; в) $\sin(180°-\alpha)=$ ...; г) $\cos(180°-\alpha)=...$?
3. Як змінюється значення $\sin(90°-\alpha)$, якщо значення α збільшувати від $0°$ до $90°$?
4. Як змінюється значення $\cos(180°-\alpha)$, якщо значення α збільшувати від $0°$ до $90°$?

Виконаємо разом

1 Знаючи, що $\cos\alpha=0,6$, знайдіть $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$.

● Відомо, що $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Оскільки синус кожного кута α, якщо $0°\le\alpha\le180°$, є число додатне, то $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

Якщо $\cos\alpha=0,6$, то $\sin\alpha=\sqrt{1-0,6^2}=\sqrt{0,64}=0,8$,

а $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{0,8}{0,6}=1\dfrac{1}{3}$.

Отже, $\sin\alpha=0,8$, $\operatorname{tg}\alpha=1\dfrac{1}{3}$.

2 Доведіть, що коли $\alpha\ne0°$, то $\sin\alpha:\cos(90°-\alpha)=1$.

● $\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$. Тому $\sin\alpha:\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha:\sin\alpha=1$.

3 Обчисліть значення виразу $\sin 77°\cdot\cos 13° - \sin 167°\cdot\cos 77°$.

● $\sin 77°\cdot\cos 13°-\sin 167°\cdot\cos 77°=\sin(90°-13°)\cdot\cos 13°+\sin(180°-13°)\times$
$\times\cos(90°-13°)=\cos 13°\cdot\cos 13°+\sin 13°\cdot\sin 13°=\cos^2 13°+\sin^2 13°=1$.

Задачі і вправи

Виконайте усно

46. Знайдіть $\cos\alpha$ і $\sin\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=1$.
47. Знайдіть $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha=-0,5$.
48. Знаючи, що $\cos\alpha=0,7$, знайдіть:
а) $\sin(90°-\alpha)$; б) $\cos(180°-\alpha)$; в) $\cos(90°-\alpha)$.
49. Спростіть: а) $\sin(180°-35°)$; б) $\cos(180°-43°)$; в) $\operatorname{tg}(180°-20°)$; г) $\sin(90°-23°)$; ґ) $\cos(90°-27°)$; д) $\operatorname{tg}(90°-14°)$.

50. Закінчіть перетворення: а) sin 140° = sin (180° − 40°) = ...;
б) cos 126° = cos (180° − 54°) = ...; в) sin 85° = sin (90° − 5°) = ...;
г) cos 62° = cos (90° − 28°) = ...

51. Які з тверджень хибні? Чому?
а) sin 136° = sin (180° − 44°) = sin 44°;
б) cos 147° = cos (180° − 33°) = cos 33°;
в) sin 75° = sin (90° − 15°) = −cos 15°;
г) cos 153° = cos (180° − 27°) = −sin 27°.

А

52. Знайдіть синус і тангенс кута α, якщо:

а) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\cos\alpha = 0,2$; в) $\cos\alpha = -0,5$.

53. Знайдіть косинус і тангенс гострого кута α, якщо:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{4}$; б) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin\alpha = 0,72$.

54. Знайдіть косинус і тангенс тупого кута α, якщо:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$; б) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; в) $\sin\alpha = 0,28$.

55. Які числа мають бути в порожніх клітинках таблиці?

$\sin\alpha$	0	0,5	0,6	0,8	1
$\sin(90° - \alpha)$					
$\cos(90° - \alpha)$					
$\sin(180° - \alpha)$					
$\cos(180° - \alpha)$					

56. Запишіть через тригонометричні функції гострого кута:
а) sin 117°; б) cos 142°; в) tg 118°; г) sin 136°.

57. Запишіть через тригонометричні функції кута, меншого за 45°:
а) cos 130°; б) sin 145°; в) tg 87°; г) cos 95°.

58. З наведених рівностей випишіть тільки правильні:
а) sin 130° = sin 50°; г) tg 117° = tg 27°; е) cos 126°= −cos 54°;
б) sin 129° = −cos 39°; ґ) cos 87° = sin 3°; є) cos 149° = −sin 31°;
в) tg 118° = −tg 62°; д) cos 113° = cos 67°; ж) tg 29° = −tg 151°.

59. Косинус гострого кута паралелограма дорівнює 0,25. Чому дорівнює косинус його тупого кута? А синус?

60. Косинус тупого кута ромба дорівнює −0,7. Чому дорівнює косинус його гострого кута? А синус?

61. За таблицею, що на форзаці, знайдіть:
а) $\sin 12°$, $\sin 40°$, $\sin 145°$, $\sin 162°$, $\sin 155°$;
б) $\cos 12°$, $\cos 50°$, $\cos 159°$, $\cos 183°$, $\cos 100°$;
в) $\operatorname{tg} 12°$, $\operatorname{tg} 18°$, $\operatorname{tg} 142°$, $\operatorname{tg} 148°$, $\operatorname{tg} 170°$.

62. Установіть відповідність між значеннями синуса кута α (1–4) та відповідними значеннями косинуса цього кута (А–Д).

1 0,5 (кут α — гострий)	**А** $-0{,}8$
2 0,6 (кут α — тупий)	**Б** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
3 $\frac{4}{5}$ (кут α — гострий)	**В** $\frac{\sqrt{3}}{2}$
4 $\frac{1}{3}$ (кут α — тупий)	**Г** $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$
	Д 0,6

63. Установіть відповідність між значеннями виразів (1–4) та значеннями виразів (А–Д).

1 $\sin 10°$	**А** $\sin 44°$
2 $\cos 46°$	**Б** $\sin 57°$
3 $\sin 123°$	**В** $\cos 134°$
4 $\cos 45°$	**Г** $\cos 80°$
	Д $\sin 45°$

Б

64. Обчисліть:
а) $\sin 29° \cdot \cos 61° - \cos 29° \cdot \cos 151°$;
б) $1 - \sin 37° \cdot \sin 143° - \cos^2 37°$;
в) $\operatorname{tg} 43° \cdot \cos 137° \cdot \cos 47° - \cos 43° \cdot \sin 47°$.

65. Замість * поставте знаки $>$, $<$ або $=$:
а) $\sin 12° * \cos 80°$; в) $\operatorname{tg} 36° * \operatorname{tg} 112°$; ґ) $\sin 115° * \cos 27°$;
б) $\cos 54° * \sin 36°$; г) $\cos 36° * \sin 31°$; д) $\cos 139° * \sin 140°$.

66. Знайдіть міри тупих кутів α, β і γ, якщо відомо:
а) $\sin\alpha = 0{,}156$; $\sin\beta = 0{,}309$; $\sin\gamma = 0{,}719$;
б) $\cos\alpha = -0{,}921$; $\cos\beta = -0{,}998$; $\cos\gamma = -0{,}777$;
в) $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}111$; $\operatorname{tg}\beta = -1{,}306$; $\operatorname{tg}\gamma = -2{,}050$.

67. Доведіть, що: а) $\sin 135° = \sin 45° = \cos 45°$;
б) $\cos 140° = -\cos 40° = -\sin 50°$.

68. Доведіть тотожності:
а) $\sin^2\alpha - \cos(180° - \alpha)\cdot\sin(90° - \alpha) - 1 = 0$;
б) $1 + \operatorname{tg}(180° - \alpha)\cdot\sin(90° - \alpha)\cdot\sin\alpha = \cos^2(180° - \alpha)$.

69. Доведіть, що: а) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; **б)** $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

70. Використовуючи формули з №69, знайдіть:

а) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$;

б) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha=2$.

71. Спростіть вирази:

а) $\sin^2\alpha+\sin^2(90^\circ-\alpha)+\operatorname{tg}^2(180^\circ-\alpha)$;

б) $\left(1-\cos^2(90^\circ-\alpha)\right)\operatorname{tg}^2\alpha+\sin^2(90^\circ-\alpha)$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}^2(180^\circ-\alpha)}{\sin^2\alpha}-1$; г) $\dfrac{\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{\sin^2(180^\circ-\alpha)}{\sin^2(90^\circ-\alpha)}$.

72. Косинус гострого кута прямокутної трапеції дорівнює $\frac{5}{7}$. Знайдіть синуси та косинуси кутів трапеції.

73. Косинус гострого кута паралелограма дорівнює a. Знайдіть синус його тупого кута.

74. Синус тупого кута ромба дорівнює a. Знайдіть косинуси його кутів. При яких значеннях a задача має розв'язки?

75. Доведіть: а) синуси будь-яких двох кутів паралелограма або рівнобічної трапеції рівні; б) сума косинусів усіх кутів паралелограма або трапеції дорівнює нулю.

Практичне завдання

76. Накресліть довільний паралелограм $ABCD$. Виміряйте за допомогою транспортира його кути і знайдіть їх синуси, косинуси і тангенси. Отримані дані занесіть у таблицю. Який висновок можна зробити?

	α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\angle A$				
$\angle B$				
$\angle C$				
$\angle D$				

Задачі для повторення

77. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо тангенс одного з них дорівнює -1.

78. Спортсмен біжить у південному напрямі 4 км, а потім повертає на північ і біжить ще 3 км. Знайдіть: а) на якій відстані опинився спортсмен від початкової точки; б) на який кут змістився спортсмен по відношенню до руху у південному напрямі?

79. Сторона ромба дорівнює a, а гострий кут α. Знайдіть діагоналі ромба.

80. Знайдіть знак добутку: а) $\sin 146^\circ\cdot\cos 108^\circ\cdot\cos 67^\circ\cdot\operatorname{tg} 145^\circ$;
б) $\operatorname{tg} 78^\circ\cdot\sin 92^\circ\cdot\sin 167^\circ\cdot\operatorname{tg} 178^\circ\cdot\cos 83^\circ$.

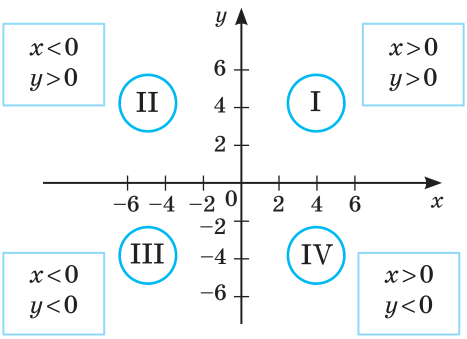
§ 3 Декартові координати

Нагадаємо деякі уже відомі вам поняття. Пряму, на якій вибрано напрям, початок відліку та одиничний відрізок, називають **координатною прямою**. Кожній точці координатної прямої відповідає єдине дійсне число.

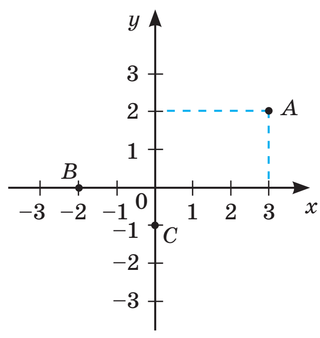
Дві взаємно перпендикулярні координатні прямі, які перетинаються у їх спільному початку відліку і одиничні відрізки яких рівні, називають **прямокутною системою координат**. Спільний початок відліку — точка, у якій перетинаються осі координат, називають **початком координат**. Горизонтальну вісь — вісь OX, називають **віссю абсцис**, а вертикальну вісь — вісь OY — **віссю ординат**.

Площину, на якій задано систему координат, називають **координатною площиною**.

Осі координат розбивають координатну площину на чотири чверті, у кожній з яких зберігаються знаки обох координат (мал. 17).



Мал. 17



Мал. 18

Положення точки на координатній площині задається двома числами — її координатами. Наприклад, точка A має абсцису 3 і ординату 2 (мал. 18). Записують так: $A(3;\ 2)$. Точка O — початок відліку — має координати 0 і 0. Точки, які лежать на осі OX, мають ординати, що дорівнюють нулю ($y = 0$); точки, які лежать на осі OY, мають абсциси, що дорівнюють нулю ($x = 0$). На малюнку 18 це точки $B(-2;\ 0)$ і $C(0;\ -1)$.

Запис $X\ (m;\ n)$ означає: точка X має координати m (абсциса) і n (ордината).

Кожній точці координатної площини відповідає єдина пара дійсних чисел, а кожній парі дійсних чисел — єдина точка координатної площини. Завдяки взаємно однозначній відповідності між парами дійсних чисел і точками координатної площини залежність між точками координатної площини можна виражати алгебраїчними співвідношеннями між їх координатами. Це дає можливість розв'язувати геометричні задачі *координатним* методом. Але для цього треба знати властивості координат.

ТЕОРЕМА 1

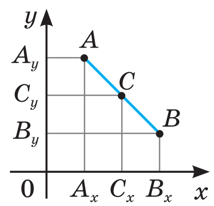
Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців.
Тобто якщо точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ — кінці відрізка AB, а точка $C(x; y)$ — його середина, то:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \text{ тобто } C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай точки A і B розміщені, як показано на малюнку 19. Проведемо через них прямі, паралельні осям координат. При цьому утворяться трапеції ABB_yA_y і ABB_xA_x, у яких

$$AA_y = x_1,\ BB_y = x_2,\ AA_x = y_1,\ BB_x = y_2.$$



Мал. 19

Оскільки C — середина відрізка AB, то CC_y і CC_x — середні лінії цих трапецій. За теоремою про середню лінію трапеції:

$$CC_y = \frac{AA_y + BB_y}{2}; \quad CC_x = \frac{AA_x + BB_x}{2}, \text{ або } CC_y = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad CC_x = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Маємо:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Ми розглянули випадок, коли відрізок AB не паралельний жодній осі координат і не перетинає їх. Після розгляду інших можливих випадків (зробіть це самостійно) приходимо до загального висновку: якщо точка $C(x; y)$ — середина відрізка з кінцями $A(x_1; y_1)$ і $B\ (x_2; y_2)$, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad \square$$

Приклад. Серединою відрізка з кінцями $A(-3; 5)$ і $B(3; 7)$ є точка $C(0; 6)$, оскільки

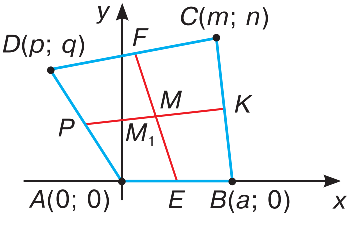
$$\frac{-3+3}{2} = 0 \text{ і } \frac{5+7}{2} = 6.$$

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Розв’язуючи задачу *координатним методом*, розглядувані фігури розміщують на координатній площині. Приписавши окремим точкам фігур координати, а лініям — рівняння, обчислюють координати інших точок, виводять рівняння інших ліній. Зіставивши початкові й інші координати точок і рівняння, знаходять відповідь.

Задача. Доведіть, що середини відрізків, які сполучають середини протилежних сторін чотирикутника, збігаються.

Розв’язання. Нехай $ABCD$ — довільний чотирикутник, E, K, F, P — середини його сторін, M і M_1 — середини відрізків EF і KP (мал. 20). Доведемо, що точки M і M_1 збігаються.



Мал. 20

Введемо систему координат так, щоб її початком була точка A, а сторона AB лежала на осі x. Позначимо координати вершин даного чотирикутника: $A(0; 0)$, $B(a; 0)$, $C(m; n)$, $D(p; q)$. Виразимо через них координати середин відрізків AB, CD, BC, AD, KP, EF: $E\left(\frac{a}{2}; 0\right)$, $F\left(\frac{m+p}{2}; \frac{n+q}{2}\right)$,

$K\left(\frac{a+m}{2}; \frac{n}{2}\right)$, $P\left(\frac{p}{2}; \frac{q}{2}\right)$, $M\left(\frac{a+m+p}{4}; \frac{n+q}{4}\right)$, $M_1\left(\frac{a+m+p}{4}; \frac{n+q}{4}\right)$.

Відповідні координати точок M і M_1 рівні. Отже, ці точки збігаються.

Щоб розв’язувати складніші задачі, використовують загальну теорему.

ТЕОРЕМА 2

Якщо точка $C(x_C; y_C)$ ділить відрізок AB у відношенні $AC : CB = \lambda$, то

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} \text{ і } y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}.$$

Доведіть її самостійно.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що називають системою координат?
2. Що називають координатною площиною?
3. Що називають початком системи координат?
4. Як називають координатні осі?
5. Що називають координатами точки?
6. Сформулюйте і доведіть теорему про координати середини відрізка.

Виконаємо разом

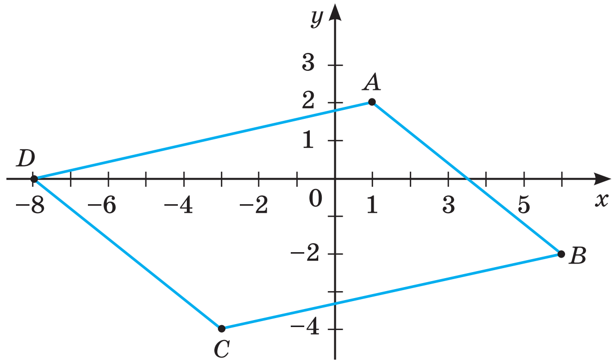
1 Точка C — середина відрізка AB. Знайдіть координати точки B, якщо $A(2; -7)$, $C(4; 1)$.

- Оскільки C — середина відрізка AB, то

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ і } y_C = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Тоді $4 = \frac{2 + x_B}{2}$; $2 + x_B = 8$; $x_B = 6$. Аналогічно $1 = \frac{-7 + y_B}{2}$;
$-7 + y_B = 2$; $y_B = 9$.
Отже, $B(6; 9)$.

2 Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, якщо $A(1; 2)$, $B(6; -2)$, $C(-3; -4)$, $D(-8; 0)$ (мал. 21).



Мал. 21

- Чотирикутник, у якого діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, — паралелограм. Доведемо, що для даного чотирикутника ця ознака виконується. Нехай M — середина діагоналі AC, тоді

$$x_M = \frac{1-3}{2} = -1, \quad y_M = \frac{2-4}{2} = -1. \text{ Отже, } M(-1; -1).$$

Якщо K — середина діагоналі BD, то

$$x_K = \frac{6-8}{2} = -1, \quad y_K = \frac{-2+0}{2} = -1. \text{ Отже, } K(-1; -1).$$

Точки M і K мають однакові координати. Це означає, що точки M і K суміщаються, тобто діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці з координатами $(-1; -1)$ і діляться в цій точці навпіл. Отже, $ABCD$ — паралелограм.

Задачі і вправи

Виконайте усно

81. Провідміняйте словосполучення: *ордината точки, осі координат, вісь абсцис*.

82. Які з точок $A(0;\ 2)$, $B(-3;\ 0)$, $C(2;\ 7)$, $D(0;\ 4)$, $E(2;\ 0)$, $F(-7;\ 0)$, $O(0;\ 0)$ лежать на: а) осі OX; б) осі OY; в) осях OX і OY одночасно?

83. Дано точки: $A(2;\ -3)$, $B(4;\ 6)$, $C(-5;\ 7)$, $D(-1;\ -3)$. Які з відрізків AB, BC, CD, AD, AC, BD перетинають: а) вісь OX; б) вісь OY; в) кожну з осей? Які з цих відрізків паралельні осі OX?

84. Дано точки: $O(0;\ 0)$, $A(4;\ 6)$, $B(-2;\ 8)$, $M(m;\ n)$. Знайдіть координати середини відрізків: а) OA; б) OB; в) OM; г) AB.

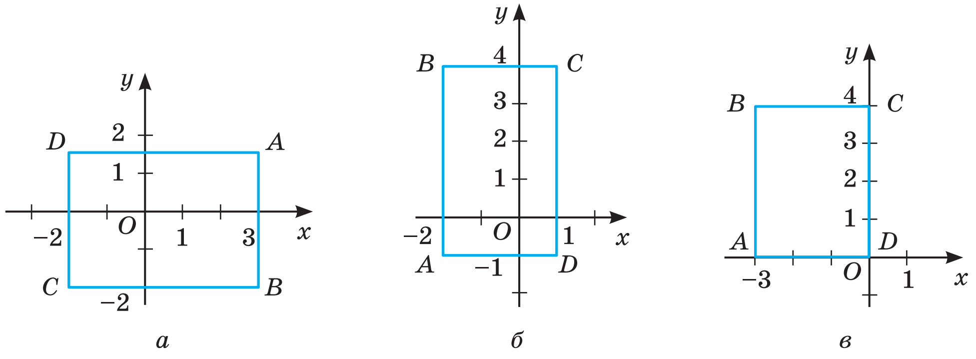
85. Чи є точка $K(-3;\ 7)$ серединою відрізка AB, якщо $A(-9;\ 4)$, $B(3;\ 10)$; точка $P(-6;\ 5)$ — серединою відрізка AK? Знайдіть координати середини відрізка BK.

А

86. Позначте на координатній площині точки: $A(4;\ 1)$, $B(-2;\ -3)$, $C(0;\ 3)$, $D(-1;\ 2)$, $E(4;\ 0)$.

87. Побудуйте на координатній площині відрізок, кінцями якого є точки $A(3;\ -1)$ і $B(-2;\ 4)$. Знайдіть координати точок перетину відрізка AB з осями координат.

88. За малюнком 22 знайдіть координати вершин прямокутника $ABCD$, сторони якого паралельні осям координат.



Мал. 22

89. Побудуйте прямокутник, три вершини якого містяться в точках $(2;\ 5)$, $(-1;\ 5)$, $(-1;\ -3)$. Знайдіть координати четвертої вершини.

90. Сторона квадрата дорівнює 5 одиниць. Одна з його вершин міститься в початку координат, а дві — на осях і мають невід'ємні координати. Знайдіть координати всіх вершин квадрата.

91. Точка перетину діагоналей ромба збігається з початком координат, а його діагоналі лежать на осях координат. Знайдіть координати вершин ромба, якщо довжини діагоналей 6 одиниць і 10 одиниць. Скільки розв'язків має задача?

92. Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо $A(1;\ 3)$, $B(4;\ 5)$.

93. Перенесіть у зошит таблицю. У порожніх клітинках укажіть координати середин відповідних відрізків.

Зразок: середина відрізка XB — точка з координатами (1; 4).

	$A(0;\ 4)$	$B(2;\ 6)$	$C(-2;\ 5)$
$X(0;\ 2)$		(1; 4)	
$Y(-4;\ 6)$			
$Z(-6;\ 12)$			

94. BM — медіана $\triangle ABC$. Знайдіть координати точки M, якщо $A(-1;\ 15)$, $C(7;\ -9)$.

95. M — середина відрізка AB. Знайдіть координати точки B, якщо $A(1;\ 4)$, $M(2;\ -3)$.

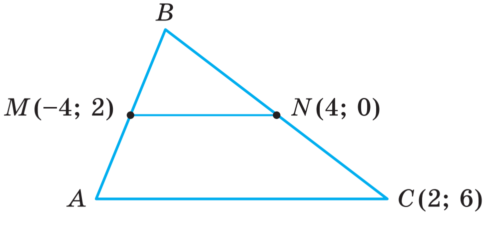
96. $O(4;\ -1)$ — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Знайдіть координати точки: а) C, якщо $A(-2;\ 3)$; б) B, якщо $D(6;\ -4)$.

97. Відрізки AB і CD перетинаються в точці M, яка є серединою кожного з них. Знайдіть координати точок M і D, якщо $A(-2;\ 5)$, $B(4;\ 1)$, $C(-1;\ -3)$.

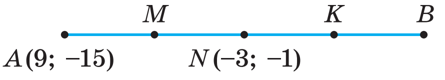
98. Дано точки $A(-1;\ 2)$, $B(2;\ 7)$, $C(4;\ 3)$. Знайдіть координати кінців середніх ліній $\triangle ABC$.

Б

99. MN — середня лінія $\triangle ABC$, $MN \parallel AC$ (мал. 23). Знайдіть координати точок A і B, якщо $C(2;\ 6)$, $M(-4;\ 2)$, $N(4;\ 0)$.



Мал. 23



Мал. 24

100. Точки K, P, T ділять відрізок AB на 4 рівні частини. Знайдіть координати точок K, P, T, якщо $A(2;\ 3)$ і $B(6;-4)$.

101. Відрізок AB поділено на чотири рівні частини: $AM = MN = NK = KB$ (мал. 24). Знайдіть координати точок M, K, B, якщо $A(9;\ -15)$, $N(-3;\ -1)$.

102. Дано точки $A(-3; 4)$, $B(a; 2)$, $C(5; b)$. При яких значеннях a і b: а) A — середина BC; б) B — середина AC; в) C — середина AB?

103. Точки $M(1; 2)$, $N(0; 4)$, $P(3; 5)$ є серединами сторін $\triangle ABC$. Знайдіть координати точок A, B, C.

104. Доведіть, що чотирикутник з вершинами $A(0; 3)$, $B(3; 4)$, $C(5; 2)$ і $D(2; 1)$ — паралелограм.

105. Дано точки $A(3; 7)$, $B(-1; 3)$, $C(-7; 4)$, $D(-3; 8)$. Доведіть, що: а) $ABCD$ — паралелограм; б) чотирикутник, вершини якого є серединами сторін чотирикутника $ABCD$, — паралелограм.

106. Дано три послідовні вершини паралелограма $ABCD$: $A(3; 5)$, $B(5; 1)$, $C(-1; 3)$. Знайдіть координати точки D.

107. Дано три вершини паралелограма $P(1; 3)$, $H(3; 4)$, $E(4; 2)$. Знайдіть координати четвертої вершини. Скільки розв'язків має задача?

108. Відрізок AB точками M і N поділено на три рівні частини. Знайдіть координати точок M і N, якщо $A(7; -2)$, $B(4; 4)$.

109. Знайдіть координати точки перетину медіан $\triangle ABC$, якщо $A(-1; 5)$, $B(3; 7)$, $C(1; -3)$.

110. M — точка перетину медіан $\triangle ABC$. Знайдіть координати точки C, якщо $A(0; 8)$, $B(1; -4)$, $M(-2; 2)$.

Практичне завдання

111. У географії для визначення місцерозташування того чи іншого пункту застосовують своєрідну систему координат. Географічні координати зазначаються в градусах і мінутах. У таблиці наведено географічні координати деяких міст України. Знайдіть на карті точку, координати якої збігаються з координатами середини відрізка, що сполучає міста: а) Луцьк і Харків; б) Львів і Одесу. Чи розташовані ці точки на території України? Які населені пункти розміщено поблизу знайдених точок?

Місто	Широта	Довгота
Київ	$50°27'$	$30°30'$
Луцьк	$50°45'$	$25°15'$
Харків	$50°00'$	$36°13'$
Львів	$49°51'$	$24°02'$
Одеса	$46°28'$	$30°44'$

Задачі для повторення

112. Обчисліть:

а) $\dfrac{\sin 35^\circ}{\sin 145^\circ} + \operatorname{tg} 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ$; б) $\dfrac{\sin 12^\circ}{\cos 78^\circ} + \dfrac{\cos 12^\circ}{\sin 78^\circ}$.

113. Центральний кут дорівнює 30°. Знайдіть міру відповідного вписаного кута.

114. Знайдіть площу прямокутного трикутника, різниця катетів якого дорівнює 2 см, а гіпотенуза 10 см.

115. Знайдіть площу прямокутного трикутника з гострим кутом α, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює R.

116. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою гострого кута. Знайдіть площу трапеції, якщо її периметр дорівнює 52 см, а основи пропорційні числам 5 і 11.

Геометрія навколо нас

Орієнтування на місцевості

§ 4 Відстань між точками

Якщо відомі координати двох точок координатної площини, можна визначити відстань між цими точками.

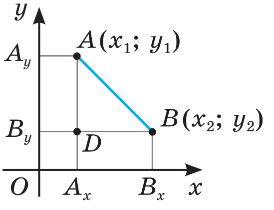
ТЕОРЕМА 3

Квадрат відстані між двома точками дорівнює сумі квадратів різниць їх відповідних координат.
Тобто якщо відомі координати точок $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, то

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

ДОВЕДЕННЯ.

Розглянемо спочатку випадок, коли $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$ (мал. 25). Проведемо перпендикуляри AA_x, BB_x на вісь x і AA_y, BB_y на вісь y. В утвореному прямокутному трикутнику ABD (D — точка перетину прямих BB_y і AA_x) AB — гіпотенуза, а катети $AD = |y_2 - y_1|$ і $BD = |x_2 - x_1|$. За теоремою Піфагора:



Мал. 25

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \qquad (*)$$

Якщо $y_1 = y_2$ і $x_1 \neq x_2$, то $AB = |x_2 - x_1|$. Такий самий результат у цьому випадку дає і формула (*). Якщо $x_1 = x_2$ і $y_1 \neq y_2$, то $AB = |y_2 - y_1|$. Такий результат дає і формула (*). Нарешті, якщо $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$, тобто якщо точки A і B збігаються, формула (*) дає потрібний результат: $AB = 0$.

Отже, як би не були розміщені на координатній площині точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$, завжди

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \ \square$$

Цю рівність можна записати і так:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Приклад. Знайдемо відстань між точками $A(6; -1)$ і $B(2; -4)$.

$$AB = \sqrt{(2-6)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

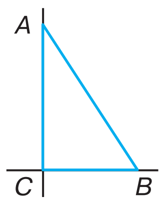
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Зверніть ще раз увагу на малюнок 25. A_xB_x — це проекція відрізка AB на вісь x, A_yB_y — проекція відрізка AB на вісь y. Як випливає з попередніх міркувань,

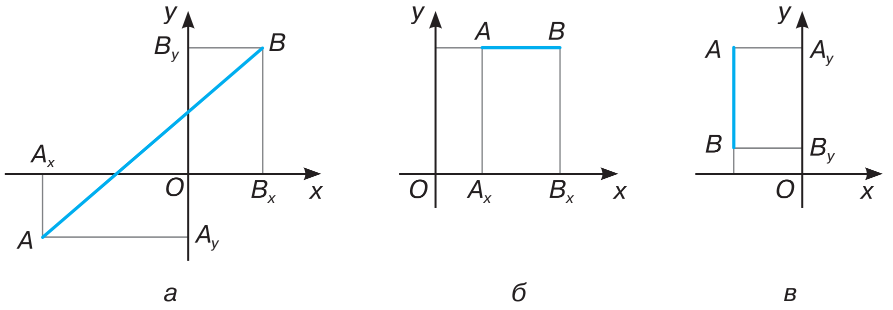
$$AB^2 = A_xB_x^2 + A_yB_y^2.$$

Квадрат довжини відрізка дорівнює сумі квадратів його проекцій на дві взаємно перпендикулярні прямі.

Це твердження — узагальнення теореми Піфагора. Адже катети кожного прямокутного трикутника є проекціями його гіпотенузи на дві взаємно перпендикулярні прямі, яким належать його катети (мал. 26). Але сформульоване твердження правильне не тільки для прямих, яким належать катети трикутника, а для будь-яких взаємно перпендикулярних прямих і для довільного відрізка AB, зокрема й для таких, як на малюнку 27.



Мал. 26



Мал. 27

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте теорему про квадрат відстані між двома точками.
2. Доведіть теорему про квадрат відстані між двома точками.
3. Як знайти довжину відрізка, якщо відомі координати його кінців?
4. Як знайти відстань від початку координат до деякої точки $A(x;\ y)$?

Виконаємо разом

1 Доведіть, що $\triangle ABC$ — рівнобедрений, і знайдіть довжину медіани, проведеної до основи, якщо $A(-5;\ 3)$, $B(2;\ 7)$, $C(3;\ -1)$.

● Знайдемо довжини сторін трикутника:

$$AB=\sqrt{(2+5)^2+(7-3)^2}=\sqrt{49+16}=\sqrt{65};$$

$$AC=\sqrt{(3+5)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{64+16}=\sqrt{80}=4\sqrt{5};$$

$$BC=\sqrt{(3-2)^2+(-1-7)^2}=\sqrt{1+64}=\sqrt{65}.$$

Отже, $AB = BC$. А це означає, що $\triangle ABC$ — рівнобедрений з основою AC. Щоб знайти довжину медіани, проведеної до основи, знайдемо координати точки M — середини відрізка AC:

$$x=\frac{-5+3}{2}=-1;\quad y=\frac{3-1}{2}=1.$$

Отже, $M(-1;\ 1)$. Тоді $BM=\sqrt{(-1-2)^2+(1-7)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

Таким чином, $\triangle ABC$ — рівнобедрений і його медіана $BM=3\sqrt{5}$.

2 Чи правильно, що кожна з точок: $A(m;\ n)$, $B(-m;\ n)$, $C(-m;\ -n)$, $K(n;\ m)$, $P(-n;\ m)$, $T(-n;\ -m)$ — рівновіддалена від початку координат?

● Оскільки початок координат — точка $O(0;\ 0)$, то

$$OA=\sqrt{(m-0)^2+(n-0)^2}=\sqrt{m^2+n^2};$$

$$OB=\sqrt{(-m-0)^2+(n-0)^2}=\sqrt{m^2+n^2}.$$

Аналогічно знаходимо, що кожна з відстаней OC, OK, OP, OT також дорівнює $\sqrt{m^2+n^2}$. Отже, точки A, B, C, K, P, T рівновіддалені від початку координат.

Задачі і вправи

Виконайте усно

117. Знайдіть відстань від початку координат до точок: $A(0;\ 3)$, $B(3;\ 4)$, $C(-4;\ 3)$, $D(1;\ 1)$, $E(3;\ 1)$.

118. Знайдіть відстань від точки $M(4;\ -3)$ до: а) осі OX; б) осі OY; в) початку координат.

119. Знайдіть відстань між точками: а) $A(4;\ 0)$ і $B(7;\ 0)$; б) $M(0;\ 3)$ і $N(0;\ 5)$; в) $P(3;\ 0)$ і $K(0;\ 4)$.

120. Знайдіть x, якщо: а) точка $M(x;\ 4)$ рівновіддалена від осей координат; б) точка $P(-2;\ x)$ віддалена на 5 одиниць від осі OX; в) точка $K(x;\ -5)$ віддалена на 3 одиниці від осі OY.

А

121. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $A(-4; 4)$ і $B(2; -4)$.

122. Знайдіть відстань між точками:

а) $K(0; 5)$ і $P(-2; 6)$;

б) $A(-2; 6)$ і $B(3; -2)$;

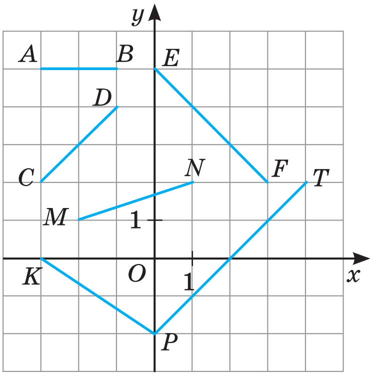
в) $X\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right)$ і $Y\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right)$;

г) $O(0; 0)$ і $B(5; 5)$.

123. Знайдіть відстані від початку координат до точок $A(2; 3)$, $B(-2; 6)$, $C(-3; 4)$, $D(-12; 5)$.

124. Знайдіть довжини відрізків, зображених на малюнку 28, якщо $AB = 2$.

125. Користуючись даними таблиці, знайдіть довжини відрізків XA, XB і т. д. Перенесіть таблицю у зошит і заповніть її.



Мал. 28

	$A(2; 4)$	$B(-1; 3)$	$C(1; -5)$	$D(6; 7)$
$X(-2; 4)$				
$Y(0; 3)$				

126. Знайдіть периметр $\triangle ABC$, якщо $A(-2; 5)$, $B(7; 8)$, $C(2; -7)$.

127. Дано $\triangle ABC$ з вершинами $A(-2; 5)$, $B(6; 3)$, $C(4; -3)$. Знайдіть довжини середніх ліній трикутника.

128. Знайдіть довжину середньої лінії трапеції $ABCD$ $(AB \parallel CD)$, якщо $A(-3; -1)$, $B(3; 7)$, $C(7; 3)$, $D(4; -1)$.

129. Знайдіть довжини діагоналей чотирикутника $ABCD$, якщо $A(4; -3)$, $B(7; 10)$, $C(-8; 2)$, $D(-1; -5)$.

130. Знайдіть довжини медіан $\triangle ABC$, якщо: а) $A(-4; -2)$, $B(2; 6)$, $C(4; 2)$; б) $A(-5; 1)$, $B(-3; 5)$, $C(-1; -1)$.

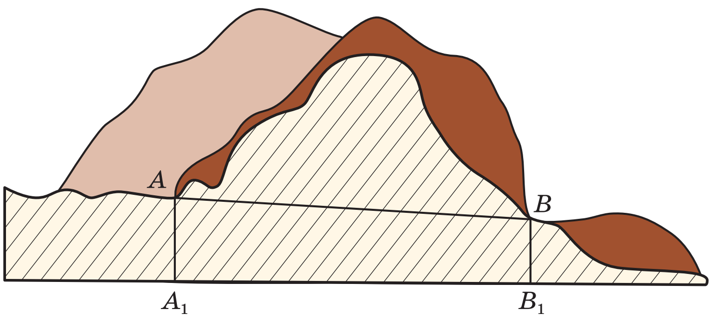
131. Станок запрограмований так, що у кожній деталі він пробиває 7 тоненьких отворів. Центр деталі розміщують у початку координат, а отвори пробивають у точках з координатами: $(1; 2)$, $(2; -3)$, $(3; 0)$, $(0; 0)$, $(-1; 2)$, $(-2; -3)$, $(-3; 0)$. Знайдіть найбільшу відстань між отворами у деталі.

132. Доведіть, що трикутник з вершинами: а) $A(-1; 1)$, $B(2; -2)$, $C(6; 2)$ — прямокутний; б) $M(-5; 2)$, $N(3; 6)$, $K(4; -6)$ — рівнобедрений.

133. Доведіть, що трикутник з вершинами $A(2; 3)$, $B(-2; 1)$, $C(0; -3)$ — рівнобедрений прямокутний.

Б

134. Гірська дорога проходить через тунель, довжина AB якого дорівнює $\sqrt{10}$ км (мал. 29). Найвища точка тунелю має координати $A(2; 4)$. Знайдіть ординату найнижчої точки тунелю, якщо її абсциса дорівнює 5 (координати точок подано у кілометрах). Чому дорівнює кут нахилу тунелю?



Мал. 29

135. Знайдіть x, якщо: а) $AB = 2$, $A(2; 1)$, $B(x; -1)$; б) $AB = 10$, $A(2x; 7)$, $B(x; 1)$; в) $AB = 5$, $A(-1; x)$, $B(2x; -3)$.

136. Знайдіть координати точки, рівновіддаленої від точок $A(-5; 1)$ і $B(3; -1)$, якщо вона лежить на: а) осі абсцис; б) осі ординат; в) прямій $y = x$.

137. На прямій $y = 2x$ знайдіть точку, рівновіддалену від точок $M(5; 2)$ і $N(-1; 4)$.

138. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-4; -2)$, $B(-1; 2)$, $C(11; -3)$, $D(8; -7)$ — паралелограм. Знайдіть його периметр.

139. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-5; -2)$, $B(-3; 2)$, $C(3; -1)$, $D(1; -5)$ — прямокутник. Знайдіть його периметр, площу та радіус описаного кола.

140. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-5; -2)$, $B(-4; 5)$, $C(3; 6)$, $D(2; -1)$ — ромб. Знайдіть його периметр та довжини діагоналей.

141. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-2; 0)$, $B(-4; 6)$, $C(2; 8)$, $D(4; 2)$ — квадрат. Знайдіть його периметр, площу, радіус вписаного й описаного кіл.

142. Не виконуючи побудови, з'ясуйте, чи лежать точки A, B, C на одній прямій, якщо $A(-6; -5)$, $B(2; 1)$, $C(6; 4)$.

143. Доведіть, що точки $M(-2; -1)$, $N(2; 7)$, $K(-1; 1)$ лежать на одній прямій. Знайдіть відношення довжин відрізків MK і KN.

144. Чи подібні трикутники ABC і KBP, якщо:
а) $A(-5; -3)$, $B(-1; 5)$, $C(3; 1)$, $K(-4; -1)$, $P(2; 2)$;
б) $A(3; 1)$, $B(-1; 5)$, $C(-5; -3)$, $K(2; 2)$, $P(-2; 4)$?

145. Знайдіть радіус кола, описаного навколо $\triangle ABC$, якщо $A(-2; 4)$, $B(-6; 4)$, $C(-4; 2)$.

146. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо його вершини задані координатами $A(-5; 5)$, $B(2; 9)$, $C(1, 1)$.

147. AL — бісектриса трикутника ABC. Знайдіть довжини відрізків BL і CL, якщо $A(-3; 1)$, $B(1; 4)$, $C(5; -5)$.

Практичне завдання

148. Позначте на координатній площині точки $A(3; 2)$ і $C(7; 4)$. Побудуйте квадрат $ABCD$. Знайдіть периметр і площу квадрата, а також відстані від його центра і точок B, C до початку координат.

Задачі для повторення

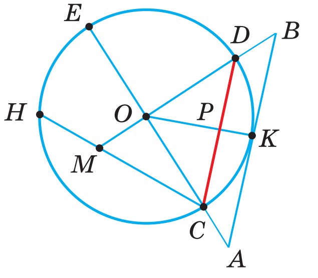
149. Квадрат розміщений у системі координат так, що його діагоналі лежать на осях координат. Знайдіть координати вершин квадрата, якщо його діагональ дорівнює 4.

150. Знайдіть координати середин сторін трикутника ABC, якщо $A(-4; 1)$, $B(2; 5)$, $C(4; 5)$.

151. Знайдіть координати вершини A паралелограма $ABCD$, якщо $B(11; -3)$, $C(8; 7)$, $D(-4; -2)$.

152. На малюнку 30 зображено коло та його елементи. Установіть відповідність між елементами кола (1–4) та їх позначеннями на малюнку (А–Д).

1	Хорда	**А**	CE
2	Дотична	**Б**	OM
3	Діаметр	**В**	CO
4	Радіус	**Г**	HC
		Д	AB



Мал. 30

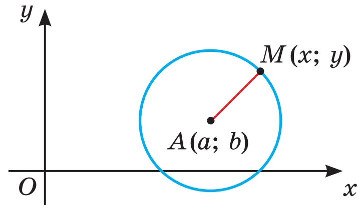
§ 5 Рівняння кола

Рівнянням фігури на координатній площині називають рівняння з двома змінними, яке задовольняють координати кожної точки даної фігури, і тільки координати точок даної фігури.

Розглянемо рівняння двох фігур, які найчастіше зустрічаються в геометрії: кола і прямої (див. § 6).

Нехай дано коло радіуса r з центром у точці $A(a;\ b)$ (мал. 31). Якщо $M\ (x;\ y)$ — довільна точка цього кола, то $AM^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$. Але $AM = r$, тому

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2. \quad (*)$$



Мал. 31

Із рівняння (*) випливає, що координати x і y кожної точки $M(x;\ y)$ даного кола задовольняють рівняння (*). Навпаки, будь-яка точка $M(x;\ y)$, координати якої задовольняють рівняння (*), лежить на даному колі, бо її відстань від точки A дорівнює r. Отже, рівняння (*) є рівнянням кола радіуса r з центром $A(a;\ b)$. Якщо центром кола є початок координат, тобто $a = 0$ і $b = 0$, то рівняння такого кола радіуса r матиме вигляд:

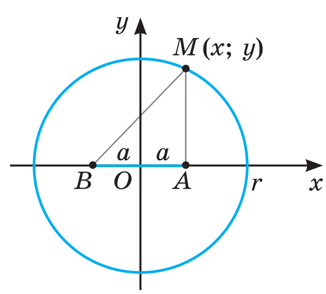
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Знаючи рівняння кола, можна розв'язувати і такі геометричні задачі про кола, які іншими способами розв'язувати надто важко.

Задача. Дано відрізок AB завдовжки $2a$ і коло радіуса r із центром у середині AB. Доведіть, що сума квадратів відстаней від будь-якої точки кола до точок A і B є сталою. Знайдіть цю суму.

Розв'язання. Розмістимо даний відрізок і коло на координатній площині, як показано на малюнку 32. Кінці відрізка мають такі координати: $A(a;\ 0)$, $B(-a;\ 0)$.

Якщо $M(x;\ y)$ — довільна точка кола, то $x^2 + y^2 = r^2$, $MA^2 = (x - a)^2 + y^2$, $MB^2 = (x + a)^2 + y^2$. Тоді $MA^2 + MB^2 = (x - a)^2 + y^2 + (x + a)^2 + y^2 = x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + x^2 + 2ax + y^2 = 2(x^2 + y^2 + a^2) = 2(r^2 + a^2)$.



Мал. 32

За даних a і r вираз $2(r^2 + a^2)$ має стале значення.

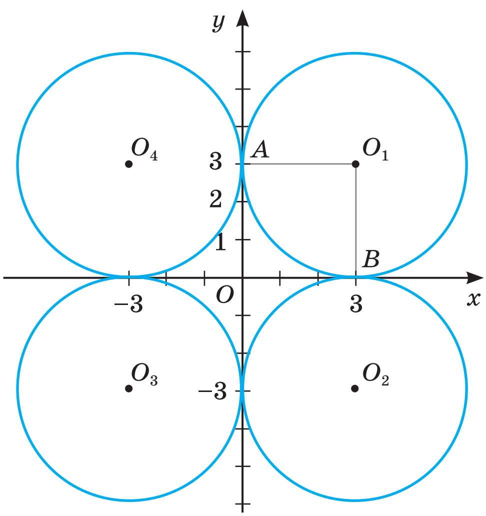
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення рівняння фігури.
2. Сформулюйте означення кола.
3. Яке рівняння має коло з центром у точці $A(a; b)$ радіуса r?
4. Виведіть рівняння кола.
5. Яке рівняння має коло радіуса r з центром у початку координат?

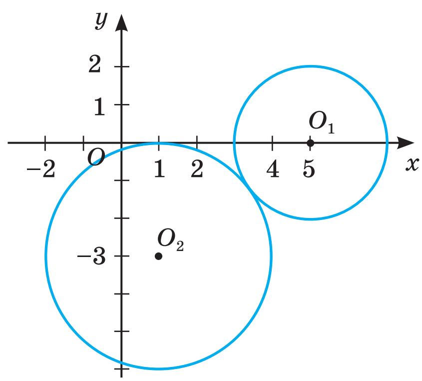
Виконаємо разом

1 Запишіть рівняння кола радіуса 3, яке дотикається до обох осей координат.

● На малюнку 33 видно, що таких кіл чотири. Оскільки OAO_1B — квадрат зі стороною 3, то O_1 (3; 3). Тому рівняння кола з центром у точці O_1 має вигляд: $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$.
Аналогічно можна записати рівняння інших кіл. Оскільки $O_2(3; -3)$, $O_3(-3; -3)$, $O_4(-3; 3)$, то рівняння відповідних кіл: $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$, $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$, $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$.



Мал. 33



Мал. 34

2 При яких значеннях параметра a ($a \neq 0$) мають зовнішній дотик кола, рівняння яких $x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$ і $x^2 + y^2 - 2x + 6y = a^2 - 10$?

● Знайдемо координати центрів і радіуси даних кіл (мал. 34). Перетворимо перше рівняння:
$(x^2 - 10x + 25) - 25 + y^2 + 21 = 0$; $(x - 5)^2 + y^2 = 4$.

Отже, перше рівняння — це рівняння кола з центром $O_1(5; 0)$ радіуса $R_1 = 2$.

Аналогічно для другого рівняння отримаємо: $(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 6y + 9) - 9 = a^2 - 10$; $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = a^2$.

Отже, друге рівняння — рівняння кола з центром $O_2(1; -3)$ радіуса $|a|$.

Два кола мають зовнішній дотик, якщо відстань між центрами дорівнює сумі їх радіусів. Оскільки $O_1O_2 = \sqrt{(1-5)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = 5$, то кола дотикаються, якщо $2 + |a| = 5$, звідки $|a| = 3$, тобто $a = \pm 3$. Отже, дані кола дотикаються зовні при $a = \pm 3$.

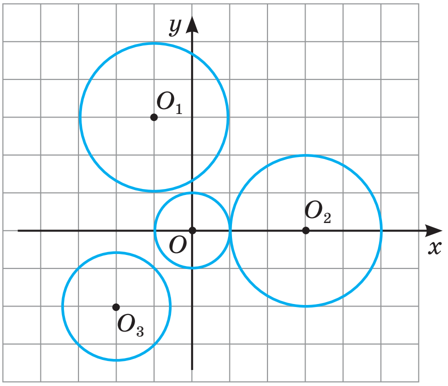
Задачі і вправи

Виконайте усно

153. Вкажіть координати центра та радіус кола, заданого рівнянням:
а) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$; б) $x^2 + (y + 1)^2 = 16$;
в) $x^2 + y^2 = 1$; г) $(x + 5)^2 + y^2 = 7$.

154. Які з рівнянь є рівняннями кола:
а) $x^2 + y^2 = 25$;
б) $5x^2 + 5(y - 1) = 9$;
в) $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$;
г) $3x^2 + y^2 = 27$;
ґ) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = -4$;
д) $4(x - 1)^2 + 4(y + 5)^2 = 16$?

155. Якому з кіл, зображених на малюнку 35, відповідає рівняння кола:
а) $x^2 + y^2 = 1$;
б) $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$;
в) $(x - 3)^2 + y^2 = 4$;
г) $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$?



Мал. 35

А

156. Установіть відповідність між місцем розташування центрів кіл (1–4) і відповідними рівняннями цих кіл (А–Д).

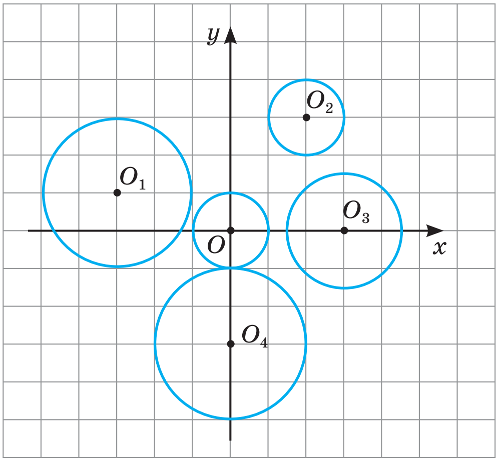
1	Лежить у початку координат	**А**	$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$
2	Лежить на осі OX	**Б**	$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$
3	Лежить на осі OY	**В**	$x^2 + (y + 5)^2 = 25$
4	Рівновіддалений від осей координат і не лежить у початку координат	**Г**	$x^2 + y^2 = 5$
		Д	$(x + 3)^2 + y^2 = 9$

157. Запишіть рівняння кола з центром у точці $A(x; y)$ радіуса R, якщо:
а) $A(-1; 2)$, $R = 5$; б) $A(0; 0)$, $R = 3$; в) $A(3; -1)$, $R = \sqrt{2}$; г) $A(-3; -3)$, $R = 6$.

158. Запишіть рівняння кіл, зображених на малюнку 36.

159. Побудуйте в системі координат три кола різних радіусів і з різними центрами. Запишіть рівняння цих кіл.

160. Складіть рівняння кола діаметра AB, якщо:
а) $A(1; 3)$, $B(-5; -3)$;
б) $A(-2; 4)$, $B(6; -2)$;
в) $A(5; -1)$, $B(-3; 5)$;
г) $A(0; -3)$, $B(1; 4)$.



Мал. 36

161. Запишіть рівняння кола з центром у точці $A(-1; 4)$, яке: а) дотикається до осі OX; б) дотикається до осі OY.

162. Запишіть рівняння кола радіуса 5: а) з центром на осі ординат, яке дотикається до осі абсцис; б) з центром на осі абсцис, яке дотикається до осі ординат.

163. Запишіть рівняння кола радіуса 4 з центром у точці $A(-2; 3)$. Чи належать цьому колу точки $B(2; 4)$, $C(-2; 7)$, $D(1; -1)$, $E(2; 3)$, $F(-6; 3)$, $K(17; 2)$, $P(-4; 3)$, $T\left(-4; 3+2\sqrt{3}\right)$, $M\left(-2-2\sqrt{3}; 1\right)$?

164. Запишіть рівняння кола з центром у точці $M(-1; 4)$, що проходить через точку $P(3; 1)$.

165. Запишіть рівняння кола з центром у початку координат, що проходить через точку $K(-3; -4)$.

166. Запишіть рівняння кола, що дотикається до координатних осей і проходить через точку $M(2; 0)$.

167. Дано точки $A(1; -2)$ і $B(5; 4)$. Складіть рівняння кола: а) з центром у точці A, яке проходить через точку B; б) з центром у точці B, яке проходить через точку A.

168. Запишіть рівняння кола, описаного навколо прямокутного $\triangle ABC$, якщо $A(3; 1)$, $B(3; 7)$, $C(-5; 1)$. Зробіть малюнок.

169. Напишіть рівняння кола, описаного навколо квадрата $ABCD$ і вписаного в нього, якщо $A(-5; 2)$, $B(-1; 6)$, $C(3; 2)$, $D(-1; -2)$. Зробіть малюнок.

Б

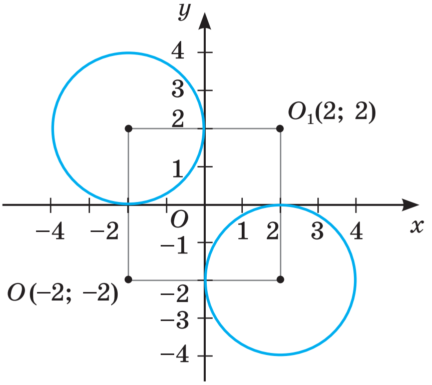
170. Запишіть рівняння кола з центром на осі абсцис, що дотикається до прямих $x = -2$ і $x = 4$. Зробіть малюнок.

171. Запишіть рівняння кола з центром на осі ординат, що дотикається до прямих $y = -3$ і $y = 5$. Зробіть малюнок.

172. Запишіть рівняння кола з центром на осі абсцис, що проходить через точку $M(4; 2)$ і дотикається до кола $x^2 + y^2 = 9$.

173. ***Відкрита задача.***

Складіть і розв'яжіть задачу за малюнком 37.



Мал. 37

174. Дано рівняння кола $x^2 + y^2 = 25$. Доведіть, що AB — хорда кола, і знайдіть відстань від центра кола до цієї хорди, якщо:

а) $A(-4;\ 3)$, $B(-4;\ -3)$;
б) $A(4;\ 3)$, $B(5;\ 0)$;
в) $A(3;\ 4)$, $B(4;\ -3)$.

175. Знайдіть центр і радіус кола, заданого рівнянням:

а) $x^2 + y^2 + 2x = 0$;
б) $x^2 + y^2 - 4y = 5$;
в) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$;
г) $x^2 + y^2 - 10x + 2y = -6$.

176. Знайдіть відстань між центрами кіл, рівняння яких:

а) $x^2 + y^2 + 6x = 1$ і $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 6$;
б) $x^2 + y^2 + 4x - 10y = -4$ і $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 7$.

177. Як розміщені кола (дотикаються, перетинаються, не мають спільних точок), задані рівняннями:

а) $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$ і $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 14$;
б) $x^2 + y^2 + 6x = 0$ і $x^2 + y^2 - 8y = -12$;
в) $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ і $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$;
г) $x^2 + y^2 - 4x - 8y = -12$ і $x^2 + y^2 - 10x - 2y = -24$?

178. Запишіть рівняння кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо:

а) $A(3;\ 0)$, $B(0;\ 0)$, $C(0;\ -4)$;
б) $A(-2;\ -2)$, $B(-2;\ 1)$, $C(-6;\ -2)$;
в) $A(-3;\ -1)$, $B(0;\ 3)$, $C(3;\ -1)$.

179. AH — висота рівностороннього трикутника ABC, $A(1;\ -2)$, $H(4;\ 7)$. Запишіть рівняння кола: а) описаного навколо трикутника ABC; б) вписаного у трикутник ABC.

180. Запишіть рівняння кола, яке проходить через точки з координатами: а) $(4;\ -1)$, $(2;\ 7)$, $(-1;\ 2)$; б) $(5;\ 1)$, $(-1;\ -3)$, $(0;\ 2)$; в) $(-6;\ -5)$, $(-2;\ 1)$, $(-1;\ -4)$.

181. Дано коло $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$. Знайдіть геометричне місце центрів кіл радіуса 1, які мають з колом: а) зовнішній дотик; б) внутрішній дотик.

182. Залежно від значень параметра a дослідіть взаємне розміщення кіл $x^2 + y^2 - 2x = 0$ і $x^2 + y^2 + 4x = a^2 - 4$.

183. При яких значеннях параметра a кола $x^2 + y^2 + 8y + 15 = 0$ і $x^2 + y^2 - 6x - a^2 - 4a + 5 = 0$ мають: а) зовнішній дотик; б) внутрішній дотик?

Практичне завдання

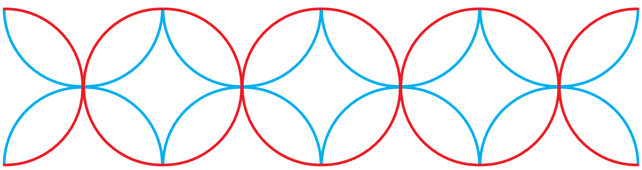
184. а) Зобразіть прямокутник, вершини якого знаходяться в точках (0; −2), (0; 2), (6; 2), (6; −2), взявши за одиничний відрізок дві клітинки. Побудуйте в цьому прямокутнику графіки поданих нижче рівнянь, і ви побачите фрагмент решітки для огорожі.

$(x - a)^2 + y^2 = 1$; $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $0 \le x \le 6$; $-2 \le y \le 2$.

$(x - a)^2 + (y + 2)^2 = 1$; $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $0 \le x \le 6$; $-2 \le y \le 2$;

$(x - a)^2 + (y - 2)^2 = 1$; $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $0 \le x \le 6$; $-2 \le y \le 2$.

б) На малюнку 38 зображено орнамент, утворений перетином одиничних кіл. Запишіть сукупність рівнянь, за допомогою яких можна одержати такий орнамент.



Мал. 38

Задачі для повторення

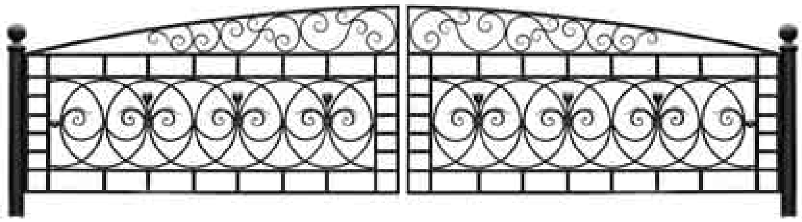
185. Знайдіть периметр і площу трапеції $ABCD$, якщо $A(-5; 2)$, $B(-2; 6)$, $C(1; 6)$, $D(4; 2)$.

186. Знайдіть координати вершин квадрата периметра 16, якщо одна з його вершин (−1; 2), а сторони паралельні осям координат. Скільки розв'язків має задача?

187. Знайдіть синус, косинус і тангенс гострих кутів прямокутного трикутника з вершинами (4; −1), (2; 5), (6; 1).

188. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках (−3; −2), (−2; 5), (5; 6), (4; −1) — ромб. Знайдіть його площу та периметр.

Геометрія навколо нас



Геометричні фігури у кованих виробах

§ 6 Рівняння прямої

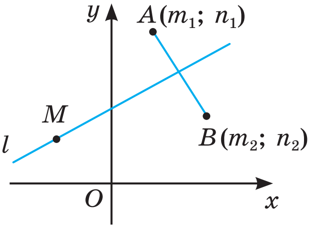
З курсу алгебри 7 класу ви вже знаєте, що графіком кожного рівняння першого степеня з двома змінними є пряма. Покажемо, що правильним є й обернене твердження: **кожній прямій координатної площини відповідає лінійне рівняння з двома змінними.**

Нехай на координатній площині дано пряму l (мал. 39). Позначимо дві точки $A(m_1;\ n_1)$ і $B(m_2;\ n_2)$ такі, що пряма l буде серединним перпендикуляром відрізка AB. За властивістю серединного перпендикуляра кожна точка $M(x;\ y)$ прямої l рівновіддалена від точок A і B, тобто $MA = MB$. Тоді $(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2$, звідки

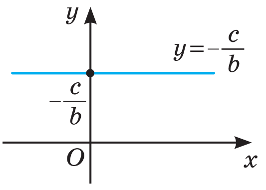
$$x^2 - 2xm_1 + m_1^2 + y^2 - 2yn_1 + n_1^2 - x^2 + 2xm_2 - m_2^2 - y^2 + 2yn_2 - n_2^2 = 0;$$

$$2xm_2 - 2xm_1 + 2yn_2 - 2yn_1 + m_1^2 + n_1^2 - m_2^2 - n_2^2 = 0;$$

$$x\left(2m_2 - 2m_1\right) + y\left(2n_2 - 2n_1\right) + m_1^2 + n_1^2 - m_2^2 - n_2^2 = 0.$$



Мал. 39



Мал. 40

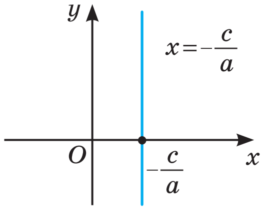
Позначивши $2m_2 - 2m_1 = a$, $2n_2 - 2n_1 = b$, $m_1^2 + n_1^2 - m_2^2 - n_2^2 = c$, отримаємо рівняння $ax + by + c = 0$, що і потрібно було довести.

Варті уваги окремі випадки.

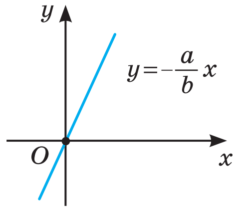
1. Якщо $a = 0$, $b \neq 0$, то рівняння прямої матиме вигляд $by + c = 0$, звідки $y = -\dfrac{c}{b}$. Це — рівняння прямої, паралельної осі OX (мал. 40).

2. Якщо $b = 0$, $a \neq 0$, то рівняння прямої матиме вигляд $ax + c = 0$, звідки $x = -\dfrac{c}{a}$. Це — рівняння прямої, паралельної осі OY (мал. 41).

3. Якщо $c = 0$, $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то рівняння прямої матиме вигляд $y = -\dfrac{a}{b}x$. Це — рівняння прямої, яка проходить через початок координат (мал. 42).



Мал. 41



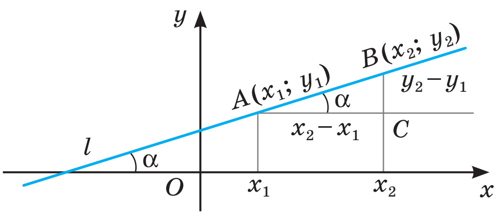
Мал. 42

Рівняння $ax + by + c = 0$ називають **загальним рівнянням прямої.**

Запишемо це рівняння в іншому вигляді. Якщо $b \neq 0$, то поділимо ліву і праву частини рівняння на b і отримаємо $\frac{a}{b}x + y = \frac{c}{b}$ або $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Позначивши $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{b} = p$, отримаємо рівняння $y = kx + p$. Пригадайте формулу лінійної функції та її графік.

З'ясуємо геометричний зміст коефіцієнта k. Візьмемо на прямій l дві довільні точки $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ (мал. 43). Тоді $y_1 = kx_1 + p$ і $y_2 = kx_2 + p$. Віднявши від другого рівняння перше, отримаємо $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, звідки при $x_1 \neq x_2$ $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. З малюнка 43 видно, що $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\alpha$, де α — кут, який утворює пряма з додатним напрямом осі OX.



Мал. 43

Випадок, коли $90° \leq \alpha < 180°$, розгляньте самостійно.

Отже, у рівнянні прямої $y = kx + p$ коефіцієнт $k = \operatorname{tg}\alpha$, де α — кут, який утворює пряма з додатним напрямом осі OX. Тому число k називають **кутовим коефіцієнтом**, а рівняння прямої, записане у вигляді $y = kx + p$, — **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.**

Можна довести таке твердження.

Якщо прямі l_1 і l_2 задані рівняннями $y = k_1x + p_1$ і $y = k_2x + p_2$, то:

1) $l_1 \parallel l_2$ тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $p_1 \neq p_2$;

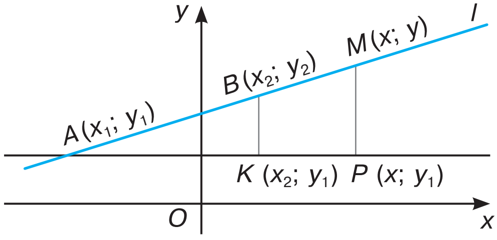
2) $l_1 \perp l_2$ тоді й тільки тоді, коли $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Наприклад, прямі $y = 2x + 3$ і $y = 2x$ — паралельні, бо $k_1 = k_2 = 2$, а прямі $y = 2x + 3$ і $y = -\frac{1}{2}x$ — перпендикулярні, бо $k_1 \cdot k_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

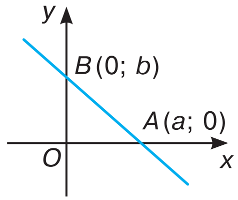
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Крім загального рівняння прямої та рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, існують й інші види рівнянь прямих. Розглянемо деякі з них.

Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ (мал. 44). Візьмемо на прямій l довільну точку $M(x;\ y)$. Прямокутні трикутники AKB і APM подібні, бо їх гострі кути при вершині A рівні. Тоді $AP : AK = MP : BK$ або $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Отримали рівняння прямої l, яка проходить через точки A і B.



Мал. 44



Мал. 45

І навпаки, якщо координати x і y деякої точки $M(x;\ y)$ задовольняють це рівняння, то $AP : AK = MP : BK$, з чого випливає подібність трикутників APM і AKB. Тоді $\angle PAM = \angle KAB$, а це означає, що точка M лежить на прямій l.

Отже, рівняння $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ — це *рівняння прямої, що проходить через дві дані точки*.

Якщо пряма l перетинає осі координат у точках $A(a;\ 0)$ і $B(0;\ b)$ (мал. 45), то, користуючись попереднім рівнянням, отримаємо: $\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}$.

Тоді $-\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b}$ або $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Це *рівняння прямої у відрізках на осях*, бо числа a і b показують, які відрізки відтинає пряма l на осях координат.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Якою фігурою є графік рівняння першого степеня з двома змінними? А графік лінійної функції?
2. Яким є загальне рівняння прямої?
3. Яким є рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом?
4. Який геометричний зміст кутового коефіцієнта?
5. Сформулюйте умову паралельності двох прямих.
6. Сформулюйте умову перпендикулярності двох прямих.

Виконаємо разом

1 Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(2; 1)$ і $B(4; -3)$.

- *Перший спосіб.*
Скористаємося рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом $y = kx + p$. Оскільки пряма проходить через точки A і B, то координати даних точок задовольняють рівняння, тобто $1 = 2k + p$ і $-3 = 4k + p$. Отримали систему рівнянь

$$\begin{cases} 2k + p = 1; \\ 4k + p = -3. \end{cases}$$

Віднімемо перше рівняння від другого й отримаємо: $2k = -4$, звідки $k = -2$.
Тоді з першого рівняння: $p = 1 - 2k = 5$. Отже, рівняння прямої матиме вигляд: $y = -2x + 5$.

Другий спосіб.

Оскільки $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, то в даному випадку $k = \dfrac{-3-1}{4-2} = \dfrac{-4}{2} = -2$. Тоді рівняння матиме вигляд: $y = -2x + p$. Підставимо у це рівняння координати точки $A(2; 1)$. Отримаємо: $1 = -4 + p$, звідки $p = 5$. Тоді рівняння прямої матиме вигляд $y = -2x + 5$.

Третій спосіб.
Скористаємося рівнянням прямої, що проходить через дві дані точки, $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. У нашому випадку $\dfrac{x-2}{4-2} = \dfrac{y-1}{-3-1}$, тобто $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{-4}$ або $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-1}{-2}$, звідки $-2(x - 2) = y - 1$. Спростивши рівняння, отримаємо: $y = -2x + 5$.

2 Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M\left(3; 5\sqrt{3}\right)$ і утворює кут $60°$ з додатним напрямом осі OX.

- Запишемо рівняння даної прямої у вигляді $y = kx + p$. Оскільки $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, то рівняння прямої можна записати у вигляді $y = \sqrt{3}x + p$. Підставивши в це рівняння координати точки M, отримаємо: $5\sqrt{3} = 3\sqrt{3} + p$, звідки $p = 2\sqrt{3}$. Отже, рівняння шуканої прямої $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$.

Задачі і вправи

Виконайте усно

189. Чи проходить через початок координат пряма, рівняння якої: а) $x + y = 0$; б) $2x + y = 3$; в) $x - y = 0$; г) $y = -3x$; ґ) $y = 4x + 2$?

190. Яке рівняння має пряма, проведена паралельно осі OY через точку: а) $M(5; -3)$; б) $N(-2; 8)$; в) $P(0; 3)$; г) $K(4; 0)$?

191. Яке рівняння має пряма, проведена паралельно осі OX через точку: а) $E(2; -7)$; б) $F(-1; 5)$; в) $L(0; -2)$; г) $K(3; 0)$?

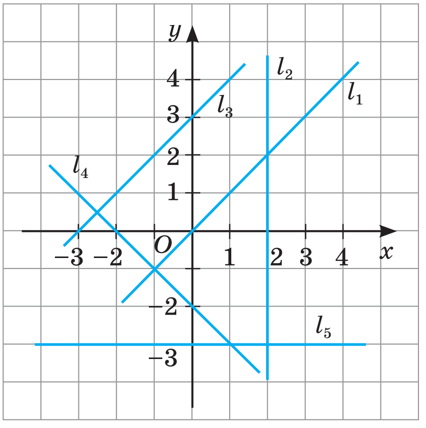
192. Знайдіть відстань від початку координат до прямої, заданої рівнянням: а) $y - 2 = 0$; б) $x + 5 = 0$; в) $y = 2x$; г) $x + 3y = 0$.

193. Вкажіть рівняння прямих, які дотикаються до кола $x^2 + y^2 = 16$ і паралельні: а) осі OX; б) осі OY.

194. Якій із прямих, зображених на малюнку 46, відповідає рівняння: а) $x = 2$; б) $y = x + 3$; в) $y = -3$; г) $y = x$; ґ) $y = -x - 2$?

195. Назвіть кутові коефіцієнти прямих, заданих рівняннями: $y = 3x$; $y = 2x + 5$; $y = 8 - 4x$; $x - y = 0$; $5x + y = 2$; $2x - 6y = 3$.

196. Чому дорівнює кутовий коефіцієнт прямої, яка відтинає на осях координат рівні відрізки?



Мал. 46

А

197. Побудуйте прямі та знайдіть координати точок їх перетину з осями координат: а) $y = 2x + 3$; б) $x + y = 5$; в) $2x + 5y = 10$.

198. Побудуйте прямі, що проходять через точку $M(2; -4)$ паралельно до осей координат. Запишіть їх рівняння.

199. Чи проходить пряма, задана рівнянням $6x - 5y - 10 = 0$, через точки $A(-5; -8)$, $B(1; -0{,}8)$, $C(4; 4)$, $D(0; -2)$, $E(-3; -2)$?

200. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину прямої $2x + 3y = 6$ з осями координат.

201. Знайдіть координати точок перетину прямих $4x + 5y + 10 = 0$ і $x + 4y - 3 = 0$.

202. Запишіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку: а) $(3; 2)$; б) $(-5; 5)$; в) $(-1; 3)$; г) $(-4; -2)$.

203. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точки: а) $A(1; 3)$ і $B(5; -1)$; б) $C(-1; 2)$ і $D(0; 3)$; в) $M(0; 4)$ і $N(5; 0)$; г) $E(3; -5)$ і $F(4; 1)$.

204. Користуючись даними таблиці, запишіть рівняння прямих AB, AC і т. д.

	$B(1;\ 3)$	$C(-2;\ 5)$	$D(2;\ -2)$	$E(-3;\ -4)$
$A(0;\ 0)$				
$M(-1;\ 4)$				

205. Який кут утворює пряма з додатним напрямом осі OX: а) $x + y - 2 = 0$; б) $x - y = 4$; в) $x-\sqrt{3}y=3$; г) $3x+\sqrt{3}y-1=0$?

206. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2;\ -4)$ і має кутовий коефіцієнт k, якщо: а) $k = 2$; б) $k = 1$; в) $k = -3$; г) $k = -0{,}5$.

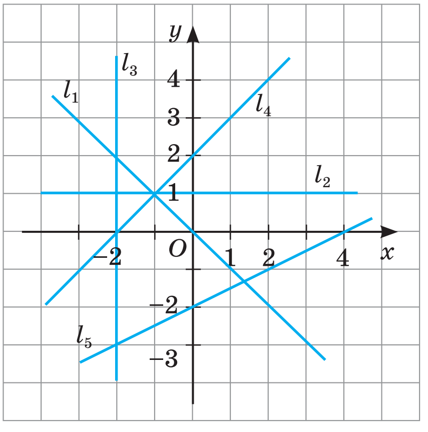
207. Запишіть рівняння прямих, які проходять через точку $M(3;\ -2)$ паралельно до прямої: а) $y = 2x + 5$; б) $y = -x + 2$; в) $x + 2y - 2 = 0$; г) $2x + 3y - 4 = 0$.

208. Відомо, що графік функції $y = ax + 2$ проходить через точку $A(-2;\ 6)$. Знайдіть значення параметра a. Побудуйте цю пряму.

209. При якому значенні b пряма $y = -3x + b$ проходить через точку $M(-1;\ 4)$?

Б

210. Запишіть рівняння прямих, зображених на малюнку 47.



Мал. 47

211. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $A(1;\ 4)$ і утворює з додатним напрямом осі OX кут: а) $30°$; б) $60°$; в) $45°$; г) $120°$; ґ) $135°$.

212. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1;\ 4)$ і обмежує разом з осями координат рівнобедрений трикутник. Знайдіть площу цього трикутника.

213. Доведіть, що відрізок з кінцями в точках $M(-3;\ 2)$ і $N(6;\ -4)$ проходить через початок координат.

214. Складіть рівняння прямих AB, AC і BC, якщо $A(-3;\ 3)$, $B(3;\ 5)$, $C(7;\ -5)$.

215. Точки $A(-2;\ 0)$ і $C(4;\ 0)$ — вершини рівностороннього $\triangle ABC$. Напишіть рівняння прямих, яким належать сторони і висоти даного трикутника.

216. Складіть рівняння прямих, яким належать медіани і висоти $\triangle MNK$, якщо $M(-4;\ 2)$, $N(2;\ 6)$, $K(8;\ -4)$.

217. Складіть рівняння прямих, яким належать сторони квадрата периметра $20\sqrt{2}$, якщо його діагоналі лежать на осях координат.

218. Складіть рівняння прямих, яким належать сторони ромба з гострим кутом $60°$, якщо більша діагональ дорівнює 10 і лежить на осі OY, а менша — на осі OX.

219. Дано рівняння прямих, яким належать сторони трикутника: $2x - y + 4 = 0$, $y + x - 7 = 0$, $x - 3y - 3 = 0$. Знайдіть координати його вершин.

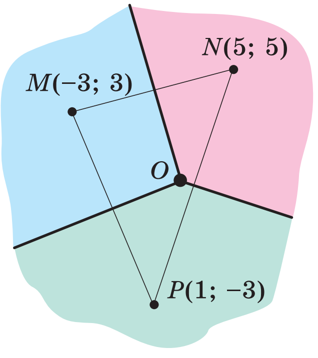
220. Чи можуть сторони паралелограма лежати на прямих $x - y + 3 = 0$; $x + 6y - 25 = 0$; $x - y - 4 = 0$; $x + 6y - 3 = 0$? Якщо так, то знайдіть координати його вершин.

221. Установіть відповідність між прямими (1–4) та довжинами хорд (А–Д), які ці прямі відтинають на колі $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$.

1	$y = x - 3$	**А**	$4\sqrt{5}$
2	$y = 3$	**Б**	8
3	$y = -2x$	**В**	$7\sqrt{2}$
4	$x = 6$	**Г**	6
		Д	$2\sqrt{17}$

222. Установіть взаємне розміщення кола і прямої, заданих рівняннями:
а) $x^2 + y^2 = 25$; $3x + y - 15 = 0$;
б) $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 8$; $2x + y = 6$;
в) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 14 = 0$; $x - y + 2 = 0$;
г) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 17 = 0$; $x - y + 3 = 0$.

223. На малюнку 48 зображено три антени M, N, P, їх координати та області обслуговування. У математиці розбиття скінченної кількості точок площини, при якому кожна область розбиття (клітинка) утворює множину точок, найближчих до одного з елементів множини, називають діаграмою Вороного. Ребра клітинок на діаграмі Вороного будуються як серединні перпендикуляри до відрізків MN, NP і MP. Запишіть рівняння ребер діаграми Вороного і координати точки O — вершини діаграми Вороного для областей обслуговування антен M, N, P.



Мал. 48

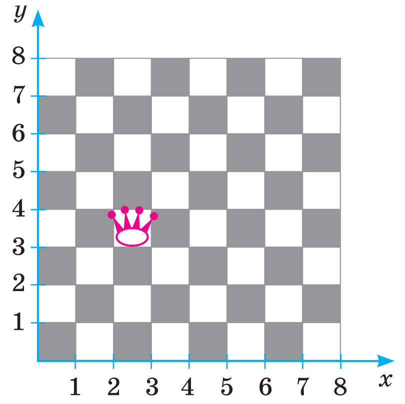
Вороний Георгій Феодосійович
(1868–1908)

224. Чому дорівнюють коефіцієнти a і b прямої $ax + by = 2$, якщо вона проходить через точки $M(-2; -2)$, $N(8; 3)$?

225. При яких значеннях параметра a пряма $y = x + 5$ і коло $x^2 + y^2 = a^2$ дотикаються?

Практичне завдання

226. На малюнку 49 у прямокутній системі координат зображено шахову дошку, що містить 64 поля.
а) Яку найбільшу кількість полів дошки можна перетнути однією прямою? Скільки існує таких прямих? Запишіть рівняння однієї такої прямої.
б) Запишіть рівняння прямих, що задають кілька можливих ходів ферзя, зображеного на малюнку. Координати ферзя (2,5; 3,5).



Мал. 49

Задачі для повторення

227. Побудуйте коло $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$.
228. Чи концентричні кола $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 4$ і $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$?
229. Установіть вид $\triangle ABC$, якщо $A(-2; 3)$, $B(4; 6)$, $C(8; -2)$.
230. Знайдіть периметр і площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 5 см і 12 см, а кут між ними 90°.

Геометрія навколо нас

Паралельність в інтер'єрі

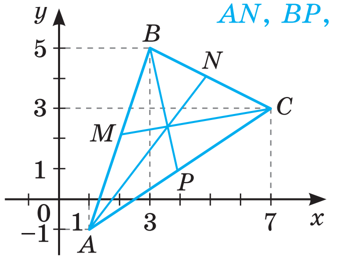
Задачі за готовими малюнками

А | **Б**

1

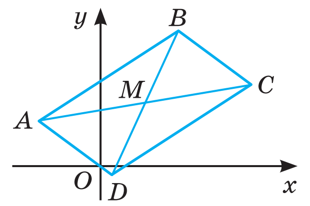
А. AN, BP, CM — медіани.

AN, BP, CM



Б. $ABCD$ — паралелограм, $A(-4;\ 3)$, $D(1;\ -1)$, $M(5;\ 4)$.

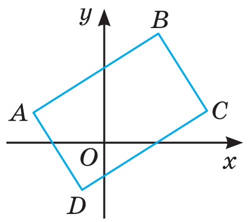
Координати точок B і C



2

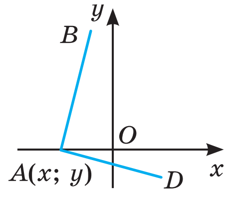
А. $A(-4;\ 3)$, $B(4;\ 7)$, $C(7;\ 1)$, $D(-1;\ -3)$.

Довести: $ABCD$ — прямокутник



Б. $B(-1;\ 6)$, $D(3;\ -2)$, $AB = AD$.

$A(x;\ y)$

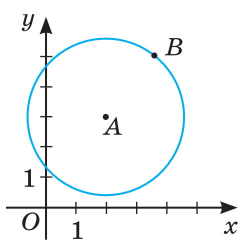


Запишіть рівняння прямих і кіл

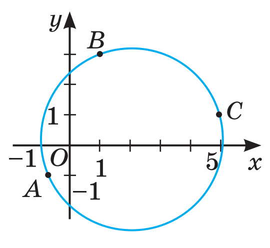
А | **Б**

3

А. $A(2;\ 3)$, $B(4;\ 5)$.



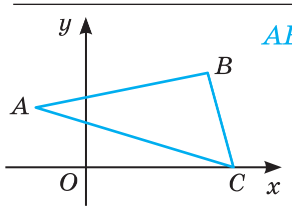
Б. $A(-1;\ -1)$, $B(1;\ 3)$, $C(5;\ 1)$.



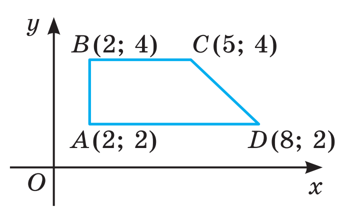
4

А. $A(-2;\ 2)$, $B(6;\ 4)$, $C(8;\ 0)$.

AB, BC, AC



Б. AB, BC, CD, AD



Самостійна робота 1

Варіант 1

1°[*]. Порівняйте з нулем значення виразу $\sin 130° \cdot \cos 50° \cdot \operatorname{tg} 80° \cdot \cos 150°$.

2°. Напишіть рівняння кола з центром у точці $A(-2;\ 3)$, яке проходить через точку $B(1;\ -1)$.

3•. Напишіть рівняння медіани AM $\triangle ABC$ та знайдіть її довжину, якщо $A(-3;\ 2)$, $B(4;\ 1)$, $C(5;\ -4)$.

Варіант 2

1°. Порівняйте з нулем значення виразу $\cos 125° \cdot \sin 135° \cdot \cos 20° \cdot \operatorname{tg} 130°$.

2°. Напишіть рівняння кола з центром у точці $A(4;\ 3)$, яке дотикається до осі OX.

3•. Напишіть рівняння середньої лінії MN $\triangle ABC$ $(MN \parallel AC)$ і знайдіть її довжину, якщо $A(-1;\ -3)$, $B(3;\ 7)$, $C(5;\ 1)$.

Варіант 3

1°. Порівняйте з нулем значення виразу $\operatorname{tg} 123° \cdot \sin 132° \cdot \cos 15° \cdot \sin 15°$.

2°. Напишіть рівняння кола з центром у точці $A(1;\ -3)$, яке проходить через початок координат.

3•. Напишіть рівняння медіани AM $\triangle ABC$ і знайдіть її довжину, якщо $A(3;\ 5)$, $B(-4;\ 2)$, $C(2;\ -4)$.

Варіант 4

1°. Порівняйте з нулем значення виразу $\cos 20° \cdot \sin 135° \cdot \cos 120° \cdot \operatorname{tg} 23°$.

2°. Напишіть рівняння кола з центром у точці $A(4;\ 3)$, яке дотикається до осі OY.

3•. Напишіть рівняння середньої лінії MN трапеції $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ і знайдіть її довжину, якщо $A(3;\ -3)$, $B(-1;\ 1)$, $C(3;\ 3)$, $D(5;\ 1)$.

---

[*] Тут і далі:
° — початковий і середній рівні;
• — достатній рівень;
•• — високий рівень.

Тестові завдання 1

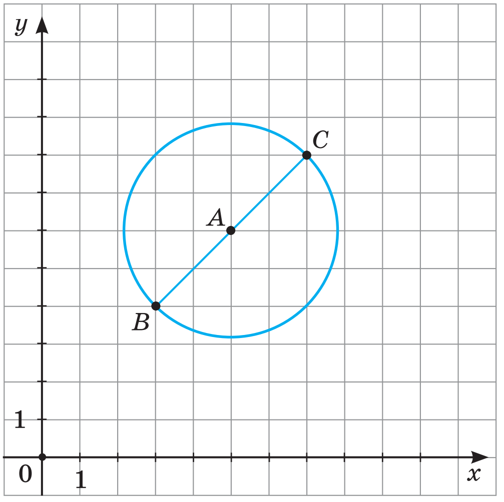
1	Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $A(1;\ 2)$, $B(1;\ 6)$.	а) $2\sqrt{17}$; в) $2\sqrt{5}$; б) 4; г) 16.
2	Дано точки $A(-1;\ 3)$ і $B(5;\ 6)$. Знайдіть координати точки M, яка ділить відрізок AB навпіл.	а) $M(4;\ 9)$; в) $M(3;\ 1{,}5)$; б) $M(6;\ 3)$; г) $M(2;\ 4{,}5)$.
3	Яка пряма паралельна до прямої $y = 3x + 5$?	а) $y = 5$; в) $y - 3x = 2$; б) $3x + y = 4$; г) $x + 3y = 6$.
4	Який знак слід поставити замість *: sin 128° * cos 128°?	а) $>$; в) $=$; б) $<$; г) не можна встановити.
5	Яка пряма утворює кут 135° з додатним напрямом осі OX?	а) $y - x = 3$; в) $x + y = 5$; б) $y = 2 - 0{,}5x$; г) $\sqrt{3}x - y = 7$.
6	Радіус якого кола дорівнює 4?	а) $x^2 + y^2 = 4$; б) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$; в) $(x + 2)^2 + y^2 = 2$; г) $x^2 + (y - 2)^2 - 8 = 0$.
7	AB — діаметр кола. Яке з рівнянь є рівнянням цього кола, якщо $A(1;\ 3)$, $B(-1;\ -3)$?	а) $x^2 + y^2 = 10$; б) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10$; в) $x^2 + y^2 = \sqrt{10}$; г) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{10}$.
8	Вкажіть хибну рівність.	а) $\sin^2 140° + \cos^2 140° = 1$; б) $\sin 23° = -\sin 157°$; в) $\cos 57° = \sin 33°$; г) $\cos 123° = -\cos 57°$.
9	Яке з рівнянь є рівнянням діаметра кола $x^2 + y^2 = 25$, проведеного через точку $A(3;\ 4)$?	а) $3x + 4y = 25$; в) $y = \frac{4}{3}x$; б) $y = \frac{3}{4}x$; г) $3x + 4y = 5$.
10	Яка з прямих не є дотичною до кола $x^2 + (y - 2)^2 = 9$?	а) $x = 3$; в) $x = -3$; б) $y = 3$; г) $y = -1$.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Знайдіть довжину відрізка KP та координати його середини, якщо $K(1; -3)$, $P(7; 5)$.

2°. Знайдіть кути прямокутної трапеції, якщо косинус одного з них дорівнює $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3°. На малюнку 50 зображено коло з центром A та його діаметр BC. Запишіть координати точок A, B і C.
Складіть рівняння: а) кола, зображеного на малюнку; б) прямої BC.



Мал. 50

4°. M — середина відрізка AB. Знайдіть координати точки A, якщо $M(1; 4)$, $B(3; -5)$.

5•. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A(-3; -1)$, $B(-1; 5)$, $C(5; 3)$ —рівнобедрений.

6•. Знайдіть координати точки M, яка лежить на осі OX та рівновіддалена від точок $A(5; 4)$ і $B(-2; -3)$.

7•. Дано три послідовні вершини паралелограма $ABCD$: $A(-1; 1)$, $B(3; 3)$, $C(3; 0)$. Знайдіть координати вершини D.

8•. Знайдіть довжину хорди, утвореної при перетині кола: $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$ прямою $y = x - 4$.

9••. Встановіть вид чотирикутника з вершинами в точках $A(-5; 1)$, $B(-3; 5)$, $C(3; 2)$, $D(1; -2)$. Знайдіть його периметр, площу та напишіть рівняння кола, описаного навколо нього.

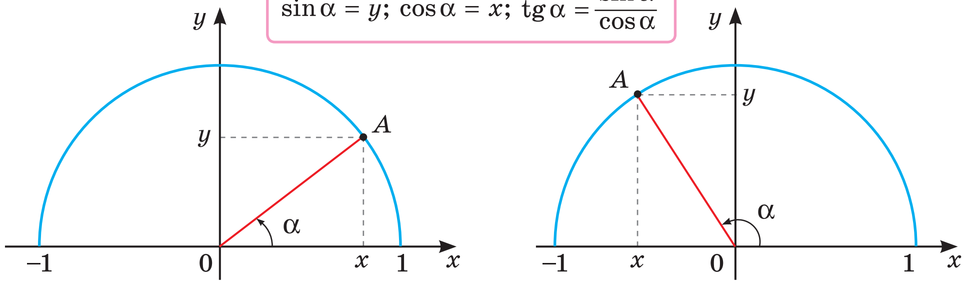
10••. При яких значеннях параметра a кола $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$ і $x^2 + y^2 - 6x + 2y = a^2 - 10$ мають: а) зовнішній дотик; б) внутрішній дотик?

Велика справа Декарта — створення аналітичної геометрії — перекинула міст між алгеброю і геометрією.
С. Г. Вавилов

Головне в розділі 1

Синус і косинус кута α — ордината і абсциса точки одиничного кола, яка відповідає даному куту (мал. 51). Тангенс кута — відношення синуса цього кута до його косинуса.

$$\sin\alpha = y;\ \cos\alpha = x;\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



Мал. 51

Синус, косинус і тангенс кута разом називають **тригонометричними функціями** цього кута.

Для кожного кута α правильні тотожності:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

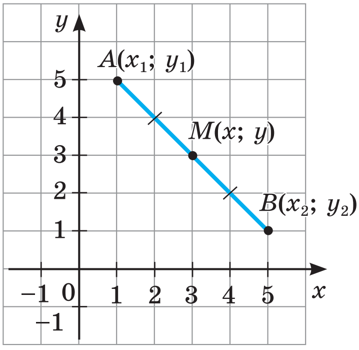
$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha;\ \ \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha;$$

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha \ \text{ і } \ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha.$$

Для будь-яких точок $A\ (x_1;\ y_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2)$ можна обчислити координати середини відрізка AB і довжину відрізка AB.

Кожна координата середини відрізка дорівнює півсумі відповідних координат його кінців (мал. 52). Тобто, якщо кінці відрізка $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$, то серединою даного відрізка є точка M з координатами

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \ \text{ і } \ \frac{y_1 + y_2}{2}.$$



Мал. 52

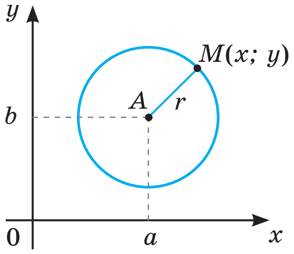
Відстань між точками $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

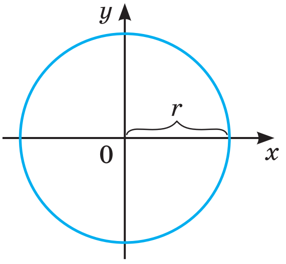
Рівнянням фігури на координатній площині називають рівняння з двома змінними, яке задовольняють координати кожної точки даної фігури і тільки координати її точок.

Рівняння кола радіуса r (мал. 53) з центром у точці $A(a;\ b)$ має вигляд $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Якщо центр кола радіуса r лежить у початку координат, то його рівняння $x^2 + y^2 = r^2$ (мал. 54).



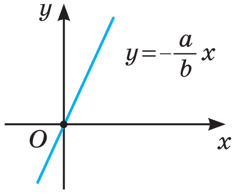
Мал. 53



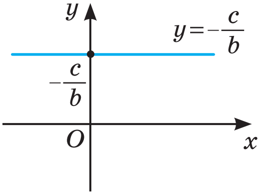
Мал. 54

Кожній прямій координатної площини відповідає лінійне рівняння з двома змінними $ax + by + c = 0$. Таке рівняння називають **загальним рівнянням прямої.**

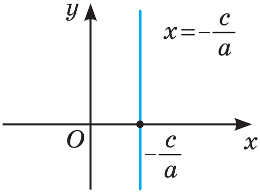
Якщо $c = 0$, а коефіцієнти a і b відмінні від 0, то такому рівнянню відповідає пряма $y = -\frac{a}{b}x$, що проходить через початок координат (мал. 55).



Мал. 55



Мал. 56



Мал. 57

Якщо коефіцієнт $a = 0$, а $b \neq 0$, то рівнянню відповідає пряма $y = -\frac{c}{b}$, яка паралельна осі абсцис (мал. 56).

Якщо $b = 0$ і $a \neq 0$, то такому рівнянню відповідає пряма $x = -\frac{c}{a}$, яка паралельна осі ординат (мал. 57).

Якщо $a = 0$, $b = 0$ і $c = 0$, то рівняння $ax + by + c = 0$ задовольняє кожна точка координатної площини.

Якщо ж $a = 0$, $b = 0$ і $c \neq 0$, то таке рівняння не задовольняють координати жодної точки.

Рівність $y = kx + b$ — **рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.**

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg} \alpha \ (x_1 \neq x_2)$, де α — кут, який утворює пряма з додатним напрямом осі OX.

Якщо прямі l_1 і l_2 задані рівняннями $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$, то:

1) $l_1 \parallel l_2$ тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $p_1 \neq p_2$;

2) $l_1 \perp l_2$ тоді й тільки тоді, коли $k_1 \cdot k_2 = -1$.

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ — це **рівняння прямої**, що проходить через дві точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$.

*Існує відмінність, але жодного протистояння,
між теорією і практикою: теорія залежить від практики,
а практика повинна передувати теорії.*

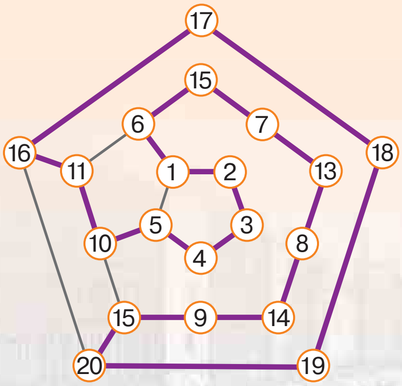
*На землі немає нічого більш вражаючого за людину
і нічого більш особливого за людський розум.*

ВІЛЬЯМ РОВЕН ГАМІЛЬТОН

(1806–1865)

- Видатний ірландський математик, фізик, астроном.
- Один із найвідоміших світових математиків XIX століття.
- Його праці вирізняються глибиною думки та оригінальністю методів з притаманним їм знаком геніальності.

У багатьох своїх винаходах він випередив своїх сучасників. Його фундаментальні відкриття у матиматиці стосуються комплексних чисел, кватерніонів, векторного числення та векторного аналізу, теорії диференціальних рівнянь тощо.



Одне з розв’язань головоломки Гамільтона «Навколо світу»

Розділ 2 | Section 2

Вектори на площині | Vectors In The Plane

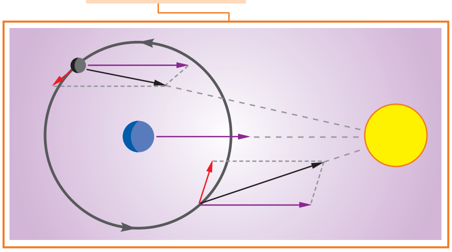
Вектор — одне з фундаментальних понять математики. Цікавою та складною є історія його виникнення та розвитку. Принаймні три джерела створювали основу і надавали сил векторному численню. Це — геометричне (числення відрізків), механічне (дослідження векторних величин) і алгебраїчне (теорія кватерніонів). Найбільш загальна теорія векторів побудована на початку XX століття на аксіоматичній основі.

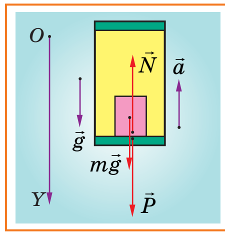
Векторний метод розв'язання задач — важливий і потужний метод елементарної геометрії. Доведені за його допомогою твердження правильні не лише для фігур на площині, а й для тривимірного і навіть для *n*-вимірних просторів.

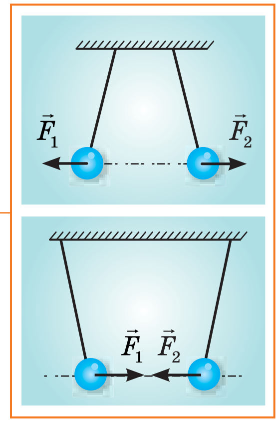
У цьому розділі ви ознайомитеся з поняттям вектора та його різними інтерпретаціями, навчитеся виконувати дії з векторами та використовувати властивості векторів до розв'язування задач.

Для чого вивчати вектори?

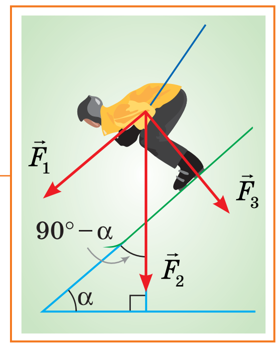
За допомогою векторного методу зручно характеризувати геометричні та інші об'єкти та співвідношення між ними. Саме тому вектори ефективно використовуються у математиці, фізиці, хімії, астрономії та інших природничих науках.

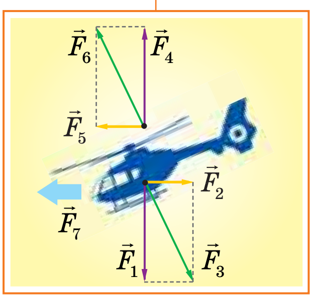


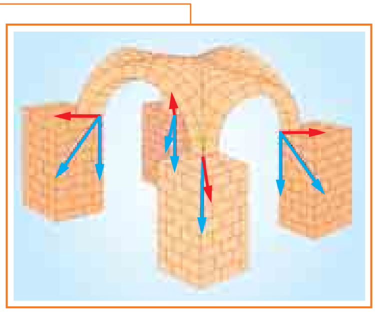




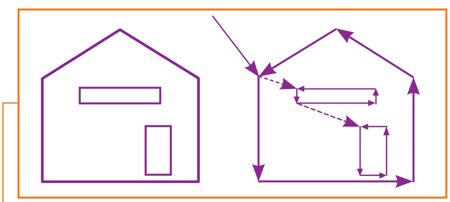
Використовують вектори та їх властивості також у багатьох сферах людської діяльності (у спорті, транспорті, у будівництві тощо).

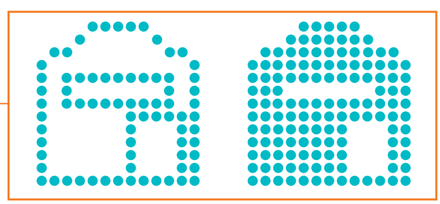






У видавництвах, рекламних агентствах і дизайнерських бюро щодня створюють і виводять на екран та друк багато різних зображень. Такі роботи виконують засобами комп'ютерних технологій на основі спеціальних програм, а саме — комп'ютерної графіки. Одним із видів комп'ютерної графіки є векторна графіка, у якій для опису зображення використовують вектори (на відміну від растрової графіки, яка описує зображення як масив точок).





А де ще використовують вектори? Наведіть свої приклади.

§ 7 Вектори

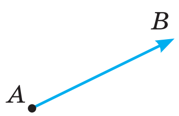
Багато фізичних величин, таких, як сила, швидкість, прискорення, характеризуються не лише числовими значеннями, а й напрямами. Наприклад, щоб охарактеризувати рух якого-небудь тіла, не достатньо сказати, що воно рухається зі швидкістю 10 метрів за секунду, треба вказати і напрям його руху. На дорогах обов'язкові напрями руху визначають дорожні знаки (мал. 58).

Мал. 58

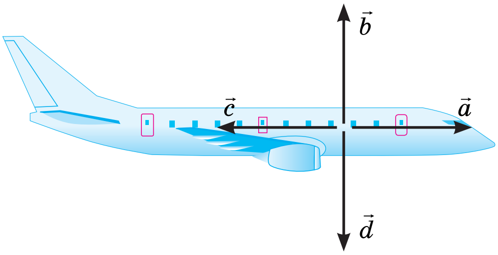
Величини, які характеризуються не лише числовими значеннями, а й напрямами, називають **векторними**, а значення векторних величин — **векторами.** Вектори найчастіше зображуються напрямленими відрізками.

Напрямлений відрізок — це відрізок із вказаним напрямом. Один із його кінців вважається *початком*, другий — *кінцем*. На малюнку напрям зображується *стрілкою*. Якщо A і B — початок і кінець напрямленого відрізка, його позначають так: $\overrightarrow{AB}$ (мал. 59). Іноді напрямлені відрізки позначають і малими буквами: $\vec{a}$, $\vec{x}$ тощо.

Відстань між початком і кінцем — довжина напрямленого відрізка. Її називають також **модулем,** або **довжиною вектора** $\overrightarrow{AB}$, і позначають $|\overrightarrow{AB}|$ або $|\vec{a}|$. Зображати вектори напрямленими відрізками зручно, бо такі зображення наочні. На малюнку 60 чотири напрямлені відрізки зображають найважливіші сили, які діють на літак у польоті: $\vec{a}$ — сила тяги, $\vec{b}$ — підіймальна сила, $\vec{c}$ — сила опору повітря, $\vec{d}$ — сила тяжіння.



Мал. 59

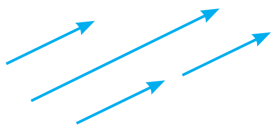


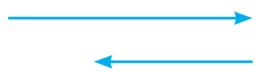
Мал. 60

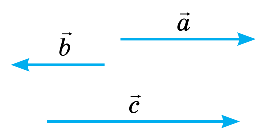
Зауваження. Вектор і напрямлений відрізок, який зображає цей вектор, — не одне й те саме. Однак для спрощення викладу далі замість словосполучень «вектор, зображений напрямленим відрізком $\overrightarrow{AB}$» і «напрямлений відрізок, що зображає вектор $\overrightarrow{AB}$» будемо писати коротше: «вектор $\overrightarrow{AB}$».

Два вектори називають **колінеарними**, якщо вони розміщені на одній прямій або на паралельних прямих.

Колінеарні вектори можуть бути **співнапрямленими**, тобто однаково напрямленими (мал. 61), або **протилежно напрямленими** (мал. 62). Співнапрямлені вектори позначають знаком $\uparrow\uparrow$, а протилежно напрямлені — знаком $\uparrow\downarrow$. Наприклад, на малюнку 63: $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{c}$, а $\vec{b}\uparrow\downarrow\vec{c}$.


Мал. 61

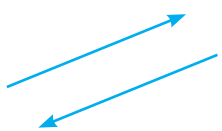

Мал. 62

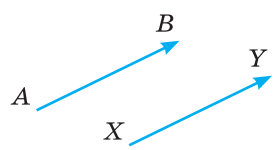


Мал. 63

Протилежно напрямлені вектори з рівними модулями називають **протилежними векторами** (мал. 64).

Два вектори називають **рівними**, якщо вони співнапрямлені і мають рівні модулі (мал. 65). Записують: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{XY}$.


Мал. 64



Мал. 65

Якщо модуль вектора дорівнює 1, його називають **одиничним вектором**.

Напрямленими відрізками зображають тільки ненульові вектори. Крім них, існує й **нульовий вектор**, який не має ні довжини, ні напряму. Його позначають символом $\vec{0}$ або $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$ тощо. Геометрично нульовий вектор можна уявити таким, кінець якого збігається з початком. Нульовий вектор вважається колінеарним з будь-яким іншим вектором. Модуль нульового вектора вважається рівним нулю.

Від будь-якої точки можна відкласти вектор, який дорівнює даному вектору, і лише один. Відкласти вектор $\overrightarrow{AB}$ від точки X — це означає накреслити напрямлений відрізок $\overrightarrow{XY}$ такий, що $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{AB}$. Нехай дано вектор $\overrightarrow{AB}$ і точку X. Покажемо, як від точки X відкласти вектор $\overrightarrow{XY}$, який дорівнює вектору $\overrightarrow{AB}$.

1. Якщо точка X лежить на прямій a, яка містить вектор $\overrightarrow{AB}$ (мал. 66, *а*), то від точки X потрібно відкласти відрізок XY, довжина якого дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AB}$. Напрям вектора $\overrightarrow{XY}$ збігається з напрямом вектора $\overrightarrow{AB}$ (мал. 66, *б*).

а *б*

Мал. 66

2. Якщо точка X не лежить на прямій a, яка містить вектор $\overrightarrow{AB}$ (мал. 67, *а*), то через точку X потрібно провести пряму b, паралельну прямій a, і від точки X відкласти відрізок XY, довжина якого дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AB}$. Напрям вектора $\overrightarrow{XY}$ збігається з напрямом вектора $\overrightarrow{AB}$ (мал. 67, *б*).

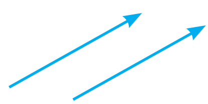
3. Якщо $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, то шуканим вектором буде вектор $\overrightarrow{XX}$.

а *б*

Мал. 67

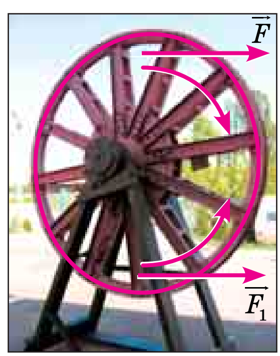
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Одним і тим самим словом «вектор» часто називають різні поняття, бо вектори бувають вільні, прикладені та інші. Вільний вектор визначається тільки довжиною і напрямом, а прикладений — довжиною, напрямом і точкою прикладання. Два рівні за довжиною і однаково напрямлені відрізки позначають один і той самий вільний вектор (мал. 68).



Мал. 68

Два прикладені вектори, позначені рівними за довжиною й однаково напрямленими відрізками, не завжди рівні (мал. 69). Силу $\vec{F}$ не можна замінити силою $\vec{F}_1$, бо одна з них обертає шків в одному напрямі, а друга — у протилежному.



Мал. 69

Фізики частіше використовують прикладені вектори і зображають їх прямолінійними стрілками, бо такі зображення наочні. У математиці розглядають лише вільні вектори і задають їх не лише стрілками, а й парами точок, парами чисел тощо.

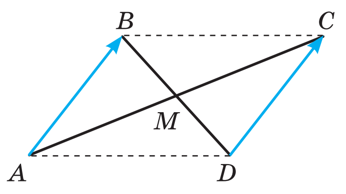
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які величини називають векторними?
2. Наведіть приклади векторних величин.
3. Як зображають і позначають вектори?
4. Які вектори називають колінеарними?
5. Які вектори називають рівними? А протилежними?
6. Що називають модулем вектора?
7. Який вектор називають одиничним? А нульовим?

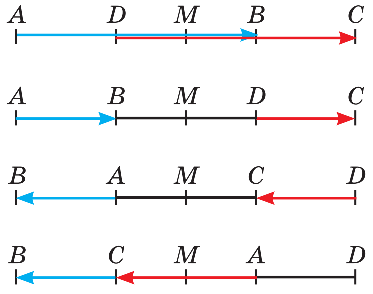
Виконаємо разом

1 Доведіть, що якщо середини відрізків AC і BD збігаються, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

- Нехай M — спільна середина відрізків AC і BD. Якщо дані відрізки не лежать на одній прямій, то чотирикутник $ABCD$ — паралелограм (мал. 70). Протилежні сторони паралелограма паралельні й рівні. Тому $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Якщо дані відрізки лежать на одній прямій, то вони можуть бути розташовані, як показано на малюнку 71.



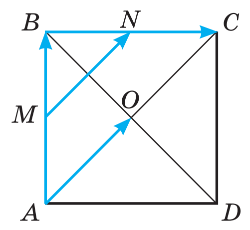
Мал. 70



Мал. 71

У кожному з цих випадків напрямлені відрізки $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$ мають рівні довжини і однакові напрями. Отже, завжди $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2 $ABCD$ — квадрат (мал. 72). Чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$? А вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{AO}$ (M і N — середини сторін AB і BC)?



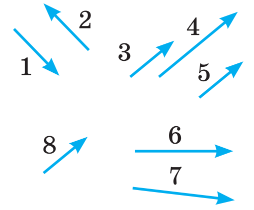
Мал. 72

- Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ не рівні. Хоч вони і мають однакові довжини, але напрями у них різні. MN — середня лінія $\triangle ABC$, тому $MN \parallel AC$, а це означає, що $MN \parallel AO$ і $MN = 0{,}5\,AC = AO$. Отже, вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{AO}$ — співнапрямлені і мають рівні довжини, тому $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AO}$.

Задачі і вправи

Виконайте усно

231. Які з векторів, зображених на малюнку 73: а) колінеарні; б) співнапрямлені; в) протилежно напрямлені?



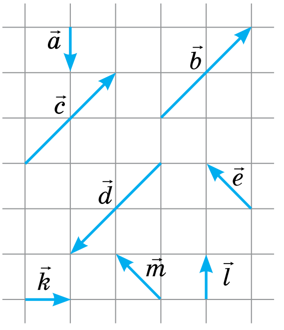
Мал. 73

232. Точка O — середина відрізка AB. Чи колінеарні вектори $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{OB}$? А вектори $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{BO}$? Чи рівні ці вектори?

233. Трикутник ABC — рівносторонній. Чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AC}$?

234. $ABCD$ — квадрат. Чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$?

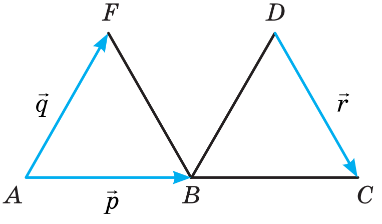
235. Які з векторів, зображених на малюнку 74: а) колінеарні; б) співнапрямлені; в) протилежно напрямлені? Визначте довжини цих векторів, прийнявши довжину сторони квадратика за 1. Чи є серед них рівні вектори? А протилежні?



Мал. 74

236. На малюнку 75 зображено два рівні рівносторонні трикутники AFB і BDC, у яких точки A, B і C лежать на одній прямій. Відомо, що $\overrightarrow{AB}=\vec{p}$, $\overrightarrow{AF}=\vec{q}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{r}$. Яке з наведених нижче тверджень є правильним?

а) $\overrightarrow{BD}=\vec{q}$; г) $\overrightarrow{BC}=\vec{p}$;
б) $\overrightarrow{FB}=\vec{q}$; ґ) $\overrightarrow{BF}=\vec{r}$;
в) $\vec{q}=\vec{r}$; д) $\overrightarrow{FD}=\vec{p}$.



Мал. 75

А

237. Накресліть два напрямлені відрізки, розміщені: а) на одній прямій; б) на паралельних прямих; в) на перпендикулярних прямих.

238. Накресліть напрямлені відрізки AB і AC завдовжки 2 см і 3 см відповідно, якщо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$: а) неколінеарні; б) співнапрямлені; в) протилежно напрямлені.

239. Накресліть два вектори, які мають рівні довжини і: а) неколінеарні; б) співнапрямлені; в) протилежно напрямлені. У якому випадку вектори рівні? А протилежні?

240. $ABCD$ — прямокутник. Чи є рівні вектори серед векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$? Які з даних векторів мають рівні довжини?

241. Дано точки $A(2; 5)$ і $B(-2; 2)$. Побудуйте вектор $\overrightarrow{AB}$. Знайдіть довжини векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$. Чи рівні ці вектори?

242. Накресліть ненульовий вектор $\vec{a}$ та точки M, N, P. Відкладіть від цих точок вектори, що дорівнюють вектору $\vec{a}$.

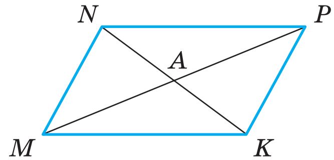
243. $ABCD$ — ромб. Відкладіть вектор, що дорівнює $\overrightarrow{AB}$, від: а) точки C; б) середини сторони BC; в) середини діагоналі AC.

244. $ABCD$ — паралелограм. Доведіть рівність векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$.

245. Доведіть, що $ABCD$ — паралелограм, якщо $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

246. Використовуючи малюнок 76, установіть відповідність між векторами, заданими умовами (1–4), та векторами (А–Д).

1	Вектор, що дорівнює $\overrightarrow{MN}$	**А**	$\overrightarrow{KP}$
2	Вектор, протилежний $\overrightarrow{NP}$	**Б**	$\overrightarrow{AM}$
3	Вектор, співнапрямлений з $\overrightarrow{AP}$	**В**	$\overrightarrow{MP}$
4	Вектор, колінеарний $\overrightarrow{AN}$	**Г**	$\overrightarrow{KM}$
		Д	$\overrightarrow{NK}$



Мал. 76

Б

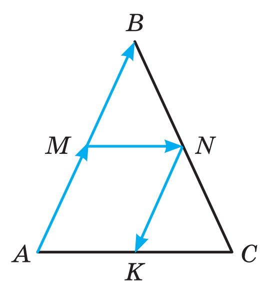
247. Трикутник ABC — рівнобедрений, $AB = BC$ (мал. 77). M, N, K — середини його сторін. Запишіть усі вектори, зображені на малюнку. Які з цих векторів: а) колінеарні; б) рівні; в) протилежні?

248. Дано точки $A(2; 3)$ і $B(-1; 6)$. Побудуйте вектор $\overrightarrow{AB}$. Відкладіть від початку координат вектор, який дорівнює вектору: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BA}$. Відкладіть ці ж вектори від точки $P(-3; 2)$.

249. Дано точки $M(2; 2)$ і $N(6; 5)$. Побудуйте довільний вектор $\vec{a}$, який: а) дорівнює вектору $\overrightarrow{MN}$; б) дорівнює вектору $\overrightarrow{NM}$; в) співнапрямлений з вектором $\overrightarrow{NM}$ і $|\vec{a}|=2|\overrightarrow{MN}|$; г) не є колінеарним до вектора $\overrightarrow{MN}$ і $|\vec{a}|=0,5|\overrightarrow{MN}|$.

250. Побудуйте прямокутник $ABCD$, площа якого дорівнює 30 см^2, а периметр 22 см. Зобразіть і випишіть чотири пари рівних векторів, позначивши точку перетину діагоналей O. Які їх довжини?

251. O — точка перетину діагоналей прямокутника $EHPK$, $EH = 6$ см, $HP = 8$ см. Знайдіть довжини векторів $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OH}$ і $\overrightarrow{PO}$. Чи є серед цих векторів рівні?



Мал. 77

252. Встановіть вид чотирикутника $ABCD$, якщо $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$ і $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$.

253. Встановіть вид чотирикутника $ABCD$ і зобразіть його, якщо:

а) вектори $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$ — колінеарні, а $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ — ні;

б) вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ — протилежні;

в) вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ — співнапрямлені та $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$.

Практичне завдання

254. Вибравши масштаб, накресліть вектори, які зображають політ літака спочатку на 300 км на південь від міста A до B, а потім на 500 км на схід від міста B до C. Накресліть вектор $\overrightarrow{AC}$ і знайдіть його довжину двома способами. Порівняйте отримані значення. Як можна інтерпретувати вектор $\overrightarrow{AC}$ і його довжину?

Задачі для повторення

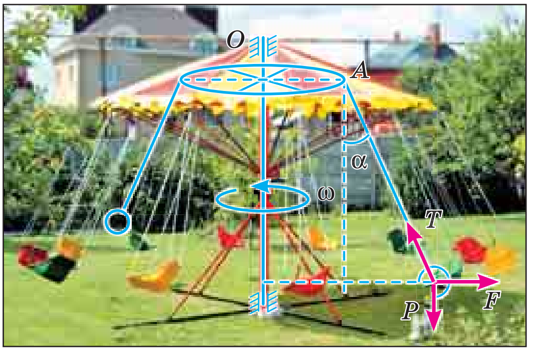
255. Напишіть рівняння кола радіуса 3 см із центром у точці $A(-1;\ 3)$.

256. Знайдіть периметр і площу трикутника ABC, заданого координатами його вершин $A(-2;\ 5)$, $B(5;\ 6)$, $C(1;\ 2)$.

257. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 14 см і 48 см. Знайдіть довжину найкоротшої медіани.

258. Сторони паралелограма дорівнюють 8 см і 12 см, а його площа 48 см^2. Знайдіть відстані від точки перетину діагоналей паралелограма до його сторін.

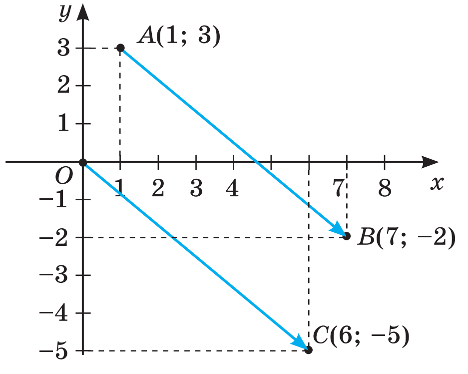
Геометрія навколо нас



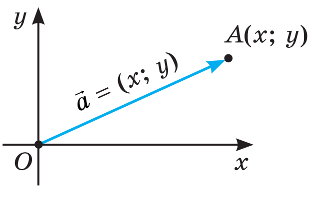
Вектори у спорті та дозвіллі

§ 8 Координати вектора

Вектори можна задавати різними способами. Розглянемо, як це можна зробити за допомогою координат. **Координатами вектора** $\overrightarrow{AB}$ з початком $A(x_1;\ y_1)$ і кінцем $B(x_2;\ y_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1$ і $y = y_2 - y_1$. Записують такий вектор, вказуючи його координати: $\overrightarrow{AB} = (x;\ y)$, або $\vec{a} = (x;\ y)$, або $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$. Наприклад, якщо дано точки $A(1;\ 3)$ і $B(7;\ -2)$, то $\overrightarrow{AB} = (6;\ -5)$. Числа 6 і –5 — координати вектора $\overrightarrow{AB}$ (мал. 78). Вектор $\overrightarrow{OC}$, початок якого — точка $O(0;\ 0)$, а кінець — $C(6;\ -5)$, має такі самі координати. Якщо O — початок координат, а числа x і y — координати точки A, то ці самі числа є також координатами вектора $\overrightarrow{OA}$ (мал. 79).



Мал. 78



Мал. 79

Координати вектора можуть бути будь-якими дійсними числами. Якщо обидві координати вектора — нулі, його називають **нульовим вектором** (позначають $\vec{0}$). Нагадаємо, що це — єдиний вектор, який не має певного напряму і якому не відповідає напрямлений відрізок.

Якщо два рівні вектори (співнапрямлені й однакових довжин) відкласти від початку координат, то їх кінці збігатимуться. Отже, **вектори рівні тоді й тільки тоді, коли їх відповідні координати рівні.**

Відповідні координати протилежних векторів — протилежні числа.

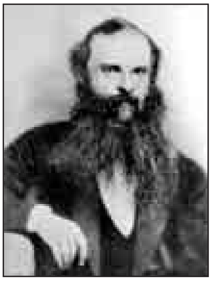
Модуль вектора з координатами x і y дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2}$. Це випливає з формули відстані між двома точками (§ 4). Отже, якщо вектор $\vec{a} = (x;\ y)$, то його модуль

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Якщо точка $A(x_1;\ y_1)$ — початок, а $B(x_2;\ y_2)$ — кінець вектора, то його модуль $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Впорядкована пара чисел, впорядкована пара точок, що визначають початок і кінець руху, напрямлений відрізок — усе це різні моделі поняття «вектор». Такий підхід до розуміння вектора обумовлений історично. Розвиток векторного числення відбувався різними шляхами: геометричним (числення напрямлених відрізків), фізичним (дослідження векторних величин) і алгебраїчним (розширення поняття числа і операцій). Числення напрямлених відрізків розвивали К. Вессель, Л. Карно.



Василь Єрмаков (1845–1922)

Серед вітчизняних вчених геометричний напрям у формуванні теорії векторного числення представляв професор Київського університету В. Єрмаков. 1887 р. в Києві він видав роботу «Теорія векторів на площині. Застосування до дослідження конічних перерізів».

Векторні величини стосовно проблем механіки досліджували Д. Валліс, Л. Пуансо, А. де Сен-Венан. Алгебраїчний напрям розвивали У. Гамільтон, Д. Максвелл. Одним із перших вітчизняних вчених, який побудував теорію векторів на алгебраїчній основі, був професор Київського університету П. Ромер.

Використовуючи координати, можна досить просто досліджувати властивості фігур не тільки площини (простору двох вимірів), а й тривимірного, чотиривимірного і взагалі n-вимірного простору. Вектори тривимірного простору, про які ви дізнаєтеся в старших класах, визначаються трьома координатами $\vec{a}=(x;\ y;\ z)$, вектори чотиривимірного простору — чотирма координатами $\vec{m}=(a;\ b;\ c;\ d)$ тощо.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що називають координатами вектора?
2. Як знайти координати вектора, якщо відомі координати його початку і кінця?
3. Що таке модуль вектора? Як знайти модуль вектора, заданого координатами?
4. Які координати має нульовий вектор?
5. Сформулюйте умову рівності векторів, заданих у координатній формі.
6. Які координати мають протилежні вектори?

Виконаємо разом

1 Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-4;\ 1)$, $B(-1;\ 2)$, $C(5;\ 0)$, $D(2;\ -1)$ — паралелограм. Знайдіть його периметр.

● Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{AB}=(-1+4;\ 2-1)=(3;\ 1)$, $\overrightarrow{DC}=(5-2;\ 0+1)=(3;\ 1)$.

Координати векторів рівні, отже, ці вектори рівні, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. А з цього випливає, що $AB \parallel DC$ і $AB = DC$. Тоді, за ознакою, $ABCD$ — паралелограм. Знайдемо його периметр. $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$ і $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(5+1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$. Тоді $P=2\left(\sqrt{10}+2\sqrt{10}\right)=6\sqrt{10}$.

2 Дано точки $K(2;\ 2)$, $P(3;\ -1)$, $T(2;\ 8)$. Знайдіть координати точки $M(x;\ y)$ такої, що $\overrightarrow{TM}=\overrightarrow{KP}$.

● Нехай $M(x;\ y)$. Знайдемо координати векторів: $\overrightarrow{TM}=(x-2;\ y-8)$, $\overrightarrow{KP}=(1;\ -3)$. Вектори рівні, якщо їх відповідні координати рівні. Тому:

$\begin{cases}1=x-2,\\-3=y-8,\end{cases}$ звідки $\begin{cases}x=3,\\y=5.\end{cases}$ Отже, $M(3;\ 5)$.

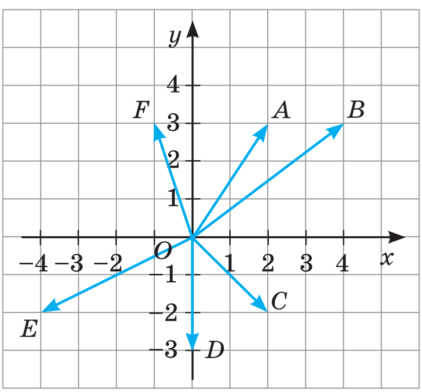
Задачі і вправи

Виконайте усно

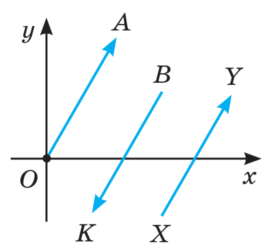
259. Дано точки $A(1;\ 3)$, $B(2;\ -4)$, $C(-3;\ 5)$, $D(-2;\ -7)$, $O(0;\ 0)$. Вкажіть координати векторів $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$.

260. Назвіть вектори, зображені на малюнку 80. Модуль якого з них найбільший? А найменший?

261. Знайдіть координати векторів, зображених на малюнку 80.



Мал. 80



Мал. 81

262. На малюнку 81 зображені три рівні за довжиною колінеарні вектори. Відомо, що $\overrightarrow{XY}=(2;\ 3)$. Знайдіть:

а) координати вектора $\overrightarrow{BK}$;

б) координати точки A.

263. Знайдіть $|\vec{a}|$, якщо:

а) $\vec{a}=(1; 1)$; б) $\vec{a}=(3; 4)$; в) $\vec{a}=(-6; 8)$; г) $\vec{a}=(2; 2)$.

264. Вкажіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$, якщо:

а) $A(0; 0)$, $B(-2; 2)$; в) $A(1; 0)$, $B(0; 2)$;

б) $A(0; 1)$, $B(4; 1)$; г) $A(1; 1)$, $B(-2; 6)$.

А

265. Дано точки $A(2; 4)$, $B(-1; 0)$, $C(8; -6)$, $D(-3; -4)$, $O(0; 0)$. Побудуйте вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$. Знайдіть їх координати і модулі.

266. Дано точки $A(-1; 3)$, $B(4; 2)$, $C(-3; -1)$, $D(2; -2)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$. Чи є серед них рівні вектори?

267. Знайдіть координати векторів, зображених на малюнку 82, та їх модулі.

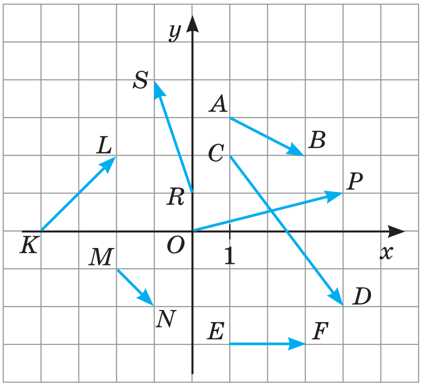
268. Відкладіть від початку координат вектори $\vec{a}=(1; 5)$, $\vec{b}=(5; 1)$, $\vec{c}=(3; -4)$, $\vec{d}=(-2; -2)$.

269. Відкладіть вектори $\vec{m}=(2; 4)$ і $\vec{n}=(3; -1)$ від точок $O(0; 0)$, $A(-4; 2)$, $B(-2; -3)$, $C(5; 0)$.

270. Знайдіть модуль вектора, якщо його координати x і y відповідно дорівнюють:

а) 5 і 12; в) 1 і 7;

б) −3 і 4; г) −6 і −8.



Мал. 82

271. Дано вектори $\overrightarrow{AB}=(5; 3)$, $\overrightarrow{CD}=(-4; 6)$, $\overrightarrow{MN}=(3; -2)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{NM}$.

272. Дано точки $M(1; 3)$, $N(7; 5)$, $K(5; -1)$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{NK}$, $\overrightarrow{MK}$ та їх модулі. Встановіть вид трикутника MNK.

273. Чи буде чотирикутник $ABCD$ паралелограмом, якщо:

а) $A(1; 3)$, $B(4; -1)$, $C(2; -3)$, $D(-1; 1)$;

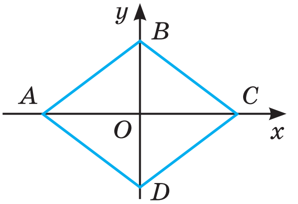
б) $A(-3; 0)$, $B(-1; 2)$, $C(2; 1)$, $D(1; -1)$?

Б

274. AD — медіана трикутника з вершинами $A(2; 3)$, $B(4; 5)$, $C(7; 3)$. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AD}$.

275. Дано точки $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$, $C(a_1 + k; a_2 + p)$, $D(b_1 + k; b_2 + p)$. Чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$? А вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$?

276. $ABCD$ — ромб (мал. 83). Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, якщо $AC = 8$, $BD = 4$.



Мал. 83

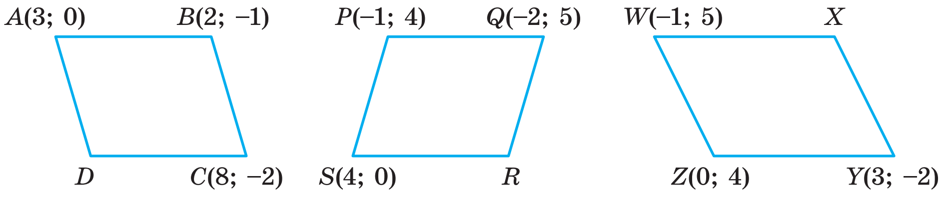
277. ***Відкрита задача.*** Дано точки $A(2;\ 5)$, $B(-1;\ 1)$, $C(4;\ 1)$, $D(1;\ 5)$. Знайдіть координати та довжини векторів **...** .

278. Знайдіть координати точки B, якщо:

а) $\overrightarrow{AB} = (1;\ 3)$ і $A(2;\ 5)$; в) $\overrightarrow{PB} = (-11;\ -4)$ і $P(1;\ 5)$;

б) $\overrightarrow{BM} = (-2;\ 7)$ і $M(-5;\ 3)$; г) $\overrightarrow{BD} = (1;\ -6)$ і $D(-10;\ 2)$.

279. Знайдіть координати четвертої вершини паралелограма, зображеного на малюнку 84.



Мал. 84

280. При якому значенні x модуль вектора $\vec{a}$ дорівнює 10, якщо:

а) $\vec{a} = (6;\ x)$; б) $\vec{a} = (x-1;\ 6)$; в) $\vec{a} = (x;\ x+2)$; г) $\vec{a} = (x+2;\ 3x-4)$?

281. При якому значенні m вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні, якщо:

а) $\vec{a} = (4;\ m^2)$, $\vec{b} = (4;\ m)$;

б) $\vec{a} = (m-1;\ 16)$, $\vec{b} = (3;\ m^2)$;

в) $\vec{a} = (12;\ -4-2m)$, $\vec{b} = (12;\ m^2-3)$?

Практичне завдання

282. ***Навчальне дослідження.***

1. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, якщо:

а) $A(-1;\ 3)$, $B(2;\ 4)$, $C(-2;\ -1)$, $D(-5;\ -2)$;

б) $A(5;\ 0)$, $B(4;\ -3)$, $C(-2;\ -1)$, $D(-1;\ 2)$;

в) $A(5;\ -2)$, $B(1;\ 3)$, $C(2;\ 5)$, $D(6;\ 0)$.

Результати для кожного з випадків а)–в) запишіть у таблицю. Яку залежність можна побачити? Сформулюйте гіпотезу.

		$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{AD}$	$\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$
а)	x				
	y				

2. Виконайте аналогічне завдання для інших точок:
   а) $A(4;\ 3)$, $B(2;\ 4)$, $C(-2;\ -1)$, $D(5;\ -2)$;
   б) $A(0;\ 5)$, $B(-3;\ 4)$, $C(-1;\ -2)$, $D(2;\ -1)$;
   в) $A(5;\ -2)$, $B(1;\ 3)$, $C(2;\ 5)$, $D(6;\ 0)$.
   Чи підтвердилася висунута вами гіпотеза?
3. Зобразіть у системі координат задані у попередніх завданнях точки. Встановіть вид кожного чотирикутника. Зробіть висновок.

Задачі для повторення

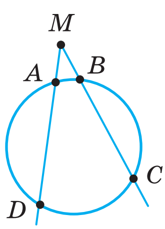
283. Відомо, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Доведіть: а) точки A, B і C лежать на одній прямій; б) точка B — середина відрізка AC.

284. M, N, P — середини сторін AB, BC, AC різностороннього трикутника ABC. Доведіть: а) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AP}$; б) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PN}$.

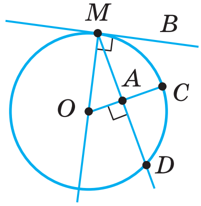
285. Знайдіть площу прямокутного трикутника, якщо різниця катетів дорівнює 2 см, а найменша медіана дорівнює 5 см.

286. Установіть відповідність між малюнками (1–4) і формулами (А–Д), які можна використати для визначення зображеного на відповідному малюнку кута AMB.

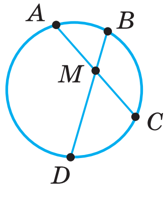
1



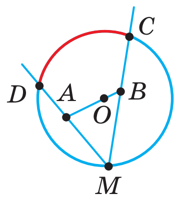
2



3



4



А $\angle AMB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{DC} - \overset{\frown}{AB})$

Б $\angle AMB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DM}$

В $\angle AMB = \overset{\frown}{DC}$

Г $\angle AMB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DC})$

Д $\angle AMB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}$

§ 9 Додавання і віднімання векторів

Вектори, як і числа, можна додавати і віднімати. **Сумою векторів** $\vec{a}=(x_1; y_1)$ і $\vec{b}=(x_2; y_2)$ називають вектор

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2; y_1+y_2).$$

Наприклад, якщо $\vec{a}=(3; 2)$, $\vec{b}=(-1; 4)$, то $\vec{a}+\vec{b}=(3-1; 2+4)=(2; 6)$.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ справджуються *переставний і сполучний закони додавання:*

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a},$$
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}.$$

Доведемо переставний закон. Якщо $\vec{a}=(x_1; y_1)$ і $\vec{b}=(x_2; y_2)$, то

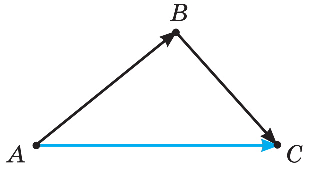
$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2; y_1+y_2) \text{ і } \vec{b}+\vec{a}=(x_2+x_1; y_2+y_1).$$

Оскільки $x_1+x_2=x_2+x_1$ і $y_1+y_2=y_2+y_1$, бо для дійсних чисел справджується переставний закон додавання, то і

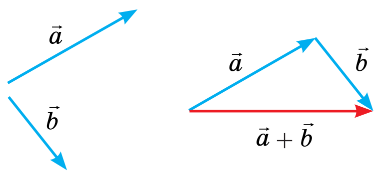
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Сполучний закон можна довести аналогічно. Геометрично суму двох векторів можна знайти за правилом трикутника.

Які б не були вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$, завжди $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (мал. 85).



Мал. 85



Мал. 86

Справді, для будь-яких трьох точок $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$
$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1; y_2-y_1)$, $\overrightarrow{BC}=(x_3-x_2; y_3-y_2)$, $\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1; y_3-y_1)$.
Тому $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(x_2-x_1+x_3-x_2; y_2-y_1+y_3-y_2)=(x_3-x_1; y_3-y_1)=\overrightarrow{AC}$.

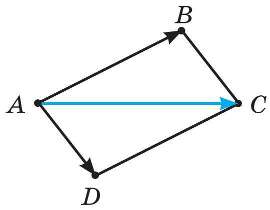
Щоб додати два вектори за правилом трикутника, потрібно розмістити ці вектори послідовно, тобто так, щоб початок другого вектора збігався з кінцем першого. Сумою векторів буде вектор, початок якого збігається з початком першого вектора, а кінець — з кінцем другого.

Наприклад, щоб додати вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображені на малюнку 86, потрібно від довільної точки відкласти вектор $\vec{a}$, а від кінця вектора $\vec{a}$ відкласти вектор $\vec{b}$. Сумою цих векторів буде вектор $\vec{c}$, початок якого збігається з початком $\vec{a}$, а кінець — з кінцем $\vec{b}$.

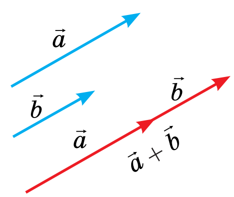
Суму векторів можна знаходити і за *правилом паралелограма*. У цьому випадку вектори потрібно розмістити так, щоб вони виходили з однієї точки, і на цих векторах, як на сторонах, побудувати паралелограм.

Додавання векторів

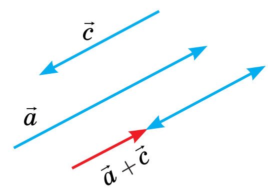
Якщо $ABCD$ — паралелограм, то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (мал. 87).



Мал. 87



Мал. 88

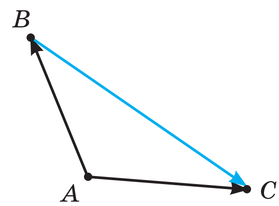


Мал. 89

Адже в цьому випадку $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, тому $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Щоб додати два колінеарні вектори, їх розміщують послідовно. Сумою векторів буде вектор, початок якого збігається з початком першого, а кінець — з кінцем другого. На малюнку 88 показано, як знайти суму векторів, якщо вони співнапрямлені, а на малюнку 89 — якщо вектори протилежно напрямлені.

Із правила додавання колінеарних векторів випливає, що сума протилежних векторів дорівнює $\vec{0}$, тобто $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ і $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.



Мал. 90

Різницею векторів $\vec{a}$ **і** $\vec{b}$ **називають такий вектор** $\vec{c}$, **який у сумі з вектором** $\vec{b}$ **дає вектор** $\vec{a}$. Якщо $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$, то $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2;\ y_1-y_2)$.

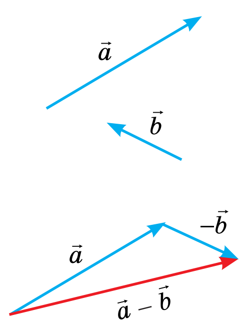
Адже $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}=(x_1-x_2+x_2;\ y_1-y_2+y_2)=(x_1;\ y_1)=\vec{a}$.

Які б не були вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, завжди $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$ (мал. 90), бо за правилом трикутника $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Щоб знайти різницю двох векторів, потрібно розмістити вектори так, щоб вони виходили з однієї точки. Різницею векторів буде вектор, початок якого збігається з кінцем другого вектора, а кінець — з кінцем першого, тобто вектор, який іде від кінця другого вектора до кінця першого.

Можна користуватися й іншим правилом. Щоб знайти різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, треба до вектора $\vec{a}$ додати вектор $-\vec{b}$, протилежний даному вектору $\vec{b}$ (мал. 91). Завжди правильні рівності:

$$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA},\quad \vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$



Мал. 91

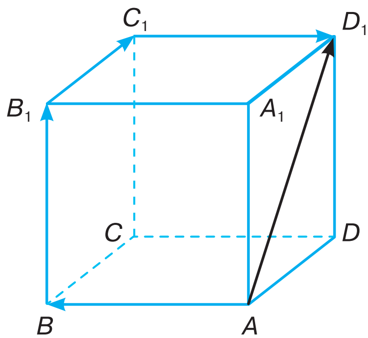
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Додавати можна не тільки два вектори, а й три, чотири тощо. Які б не були точки A, B, C, D, завжди $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

Довести таку рівність можна, скориставшись сполучним законом додавання векторів: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$.

Подібним способом можна довести, що $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{AK}$ тощо. Іншими словами, яка б не була ламана ABC ... KP, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\ldots+\overrightarrow{KP}=\overrightarrow{AP}$.

Такі рівності правильні не тільки для ламаних однієї площини, а й для простору. Наприклад, якщо вектори розташовані на ребрах паралелепіпеда (мал. 92), то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{AD_1}$.

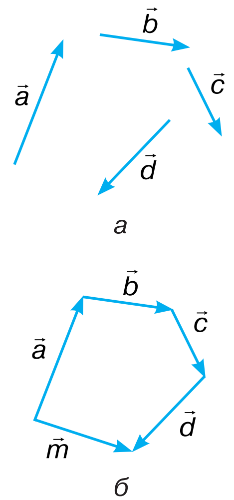


Мал. 92

Для знаходження суми кількох векторів користуються правилом многокутника.

Щоб додати вектори за правилом многокутника, потрібно розташувати ці вектори послідовно. Сумою векторів буде вектор, початок якого збігається з початком першого, а кінець — з кінцем останнього.

Наприклад, щоб додати вектори, зображені на малюнку 93, *а*, потрібно їх розмістити послідовно (мал. 93, *б*). Сумою векторів буде вектор $\vec{m}$, який сполучає початок першого вектора з кінцем останнього. Векторні доданки можна переставляти.



Мал. 93

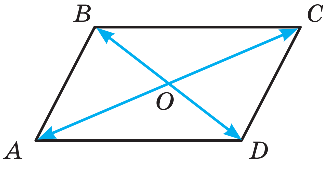
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що називають сумою двох векторів?
2. Як знайти суму двох векторів, заданих у координатній формі?
3. Сформулюйте правило трикутника для додавання векторів.
4. Сформулюйте правило паралелограма для додавання векторів.
5. Як знайти суму колінеарних векторів?
6. Чому дорівнює сума протилежних векторів?
7. Як знайти різницю векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

Виконаємо разом

1 Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (мал. 94). Чому дорівнює сума векторів $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OD}$?

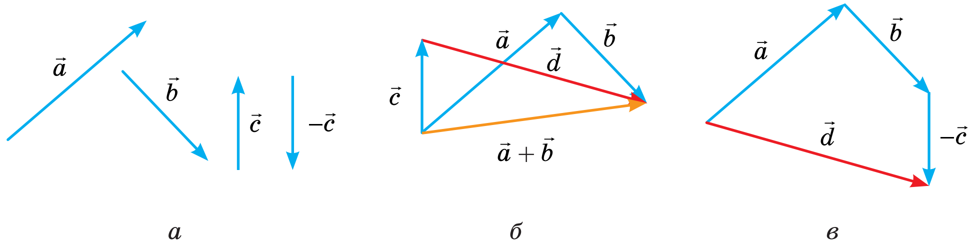
- Вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OC}$ протилежні, тому їх сума дорівнює $\vec{0}$. Протилежні також вектори $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OD}$. Тому $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$.



Мал. 94

2 На малюнку 95, *а* зображено вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Побудуйте вектор $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

- *Перший спосіб*. Побудуємо суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Отримаємо вектор $\vec{a}+\vec{b}$, від якого віднімемо вектор $\vec{c}$ (мал. 95, *б*). Отримаємо вектор $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.
Другий спосіб. Накреслимо спочатку вектор $-\vec{c}$, протилежний даному вектору $\vec{c}$. Потім побудуємо суму векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $-\vec{c}$ (мал. 95, *в*). Шуканий вектор $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}+(-\vec{c})$.



Мал. 95

Задачі і вправи

Виконайте усно

287. Знайдіть суму та різницю векторів:
а) $\vec{a}=(2;\,3)$ і $\vec{b}=(-1;\,4)$;
б) $\vec{c}=(-2;\,4)$ і $\vec{d}=(3;\,-2)$;
в) $\vec{a}=(1;\,0)$ і $\vec{b}=(-3;\,-5)$;
г) $\vec{c}=(3;\,-5)$ і $\vec{d}=(0;\,0)$.

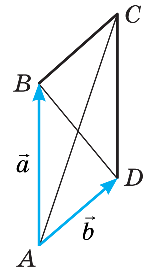
288. Дано вектори $\vec{a}=(2;\,-3)$ і $\vec{b}=(-4;\,1)$. Знайдіть координати векторів $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{a}$, $\vec{b}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{a}$.

289. Знайдіть суму векторів:
а) $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{XT}$;
б) $\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OK}$;
в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}$.

290. Знайдіть різницю векторів:

а) $\overrightarrow{XA}-\overrightarrow{XT}$; б) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MD}$; в) $\overrightarrow{KP}-\overrightarrow{KL}$.

291. *ABCD* — паралелограм, у якого $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ (мал. 96). Виразіть через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{DB}$.



Мал. 96

А

292. Знайдіть суму векторів:

а) $\vec{a}=(4;\ 2)$ і $\vec{b}=(1;\ 7)$;
в) $\vec{n}=(-6;\ 8)$ і $\vec{m}=(-2;\ -9)$;
б) $\vec{c}=(8;\ -1)$ і $\vec{0}=(0;\ 0)$;
г) $\vec{p}=\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$ і $\vec{q}=(1;\ 7)$.

293. Знайдіть суму векторів:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CT}$; б) $\overrightarrow{KP}+\overrightarrow{PT}+\overrightarrow{TX}+\overrightarrow{XK}$.

294. Дано точки $O(0;\ 0)$, $A(a_1;\ a_2)$ і $B(b_1;\ b_2)$. Виразіть через їх координати суми:

а) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}$.

295. Знайдіть різницю векторів:

а) $\vec{a}=(9;\ 5)$ і $\vec{c}=(6;\ 2)$;
в) $\vec{n}=(8;\ -6)$ і $\vec{0}$;
б) $\vec{k}=(1;\ 7)$ і $\vec{p}=(4;\ -4)$;
г) $\vec{0}$ і $\vec{b}=(-2;\ 7)$.

296. Знайдіть різницю векторів:

а) $\overrightarrow{XM}-\overrightarrow{XK}$; б) $\overrightarrow{PT}-\overrightarrow{PK}$; в) $\vec{0}-\overrightarrow{AB}$.

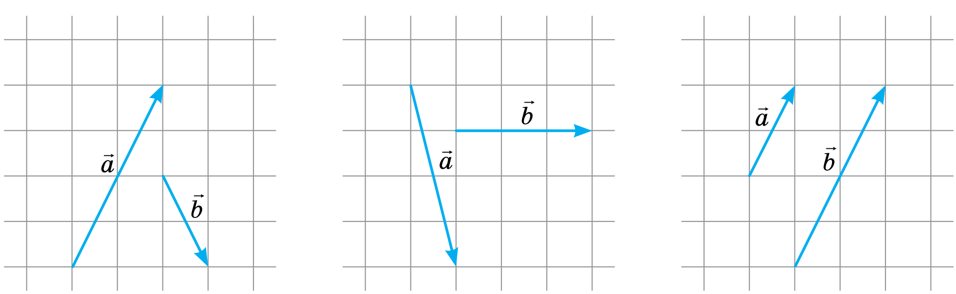
297. *ABCD* — паралелограм. Знайдіть різницю векторів:

а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}$.

298. Знайдіть $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a}+\vec{b}|$, $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо:

а) $\vec{a}=(2;\ 3)$, $\vec{b}=(4;\ 5)$;
в) $\vec{a}=(6;\ -2)$, $\vec{b}=(6;\ -3)$;
б) $\vec{a}=(-1;\ 3)$, $\vec{b}=(4;\ 1)$;
г) $\vec{a}=(-4;\ 2)$, $\vec{b}=(-2;\ 6)$.

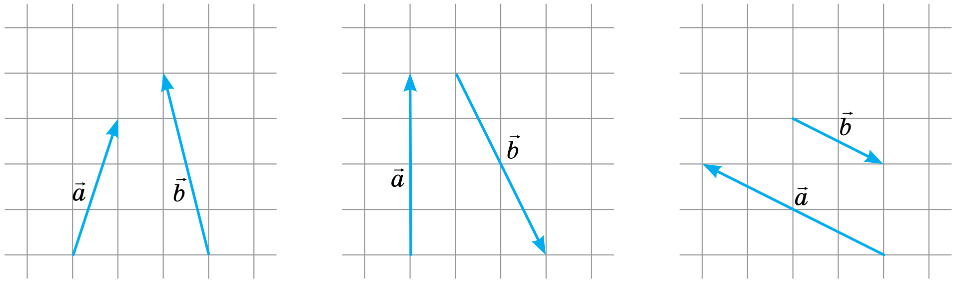
299. Знайдіть суму векторів, зображених на малюнку 97.



а *б* *в*

Мал. 97

300. Знайдіть різницю векторів, зображених на малюнку 98.



а *б* *в*

Мал. 98

301. Відкладіть від початку координат вектори $\overrightarrow{OA}=(3;\ 2)$ і $\overrightarrow{OB}=(-4;\ 3)$. Побудуйте вектори:

а) $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$; б) $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$; в) $\vec{m}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$; г) $\vec{n}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$.

302. Накресліть два довільні вектори і переконайтеся у справедливості переставного закону додавання векторів, додаючи ці вектори за правилом: а) трикутника; б) паралелограма.

303. Накресліть три довільні вектори і, додаючи їх, переконайтеся у справедливості сполучного закону додавання векторів.

304. Знайдіть x, якщо сума векторів $\vec{a}=(2;\ 7)$ і $\vec{b}=(3;\ x)$ дорівнює вектору:

а) $\vec{m}=(5;\ 10)$; б) $\vec{c}=(5;\ -4)$.

305. Знайдіть x і y, якщо сума векторів $\vec{m}=(6;\ y)$ і $\vec{n}=(x;\ 7)$ дорівнює вектору:

а) $\vec{q}=(-1;\ 8)$; б) $\vec{p}=(8;\ -1)$.

306. Доведіть векторну рівність:

а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{KP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PK}$; б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$.

Б

307. Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ (мал. 99). Побудуйте вектори:

а) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; б) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$; в) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$;
г) $\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}-\vec{d}$; ґ) $\vec{a}-\vec{c}-\vec{d}+\vec{b}$.

308. Спростіть вирази:

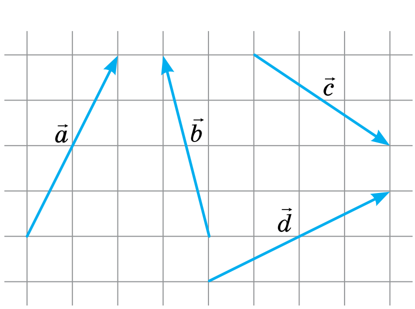
а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}\right)$;

б) $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{KN}+\overrightarrow{KP}$;

в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}-\overrightarrow{AP}$;

г) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PC}$;

ґ) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MK}$.



Мал. 99

309. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. Побудуйте вектори:

а) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$; б) $\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}$; в) $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{BO}$.

310. Чи правильно, що завжди $|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|\geq|\overrightarrow{AC}|$?

311. Дано вектори $\vec{a}=(2;-3)$, $\vec{b}=(-1;4)$, $\vec{c}=(6;-2)$, $\vec{d}=(x;y)$. При яких значеннях x і y виконується рівність:

а) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}-\vec{d}$; в) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}=\vec{c}-\vec{d}$;

б) $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$; г) $\vec{a}+\vec{d}=\vec{b}-\vec{d}+\vec{c}$?

312. Дано точки $A(2; 3)$, $B(-1; 5)$. Знайдіть координати точки $C(x; y)$ такої, що: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

313. Дано точки $A(-4; -2)$, $B(2; 6)$, $C(x; y)$. Знайдіть геометричне місце точок площини, для яких виконується рівність:

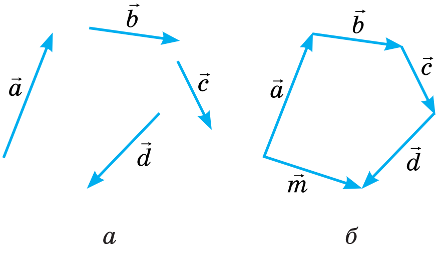
а) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AB}|$;

б) $|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AB}|$;

в) $|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AC}|$.

Практичне завдання

314. На малюнку 100 показано, як можна геометрично знайти суму чотирьох векторів $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$. Переконайтесь, що від перестановки доданків сума не змінюється. Скільки сум із різних послідовностей чотирьох таких доданків можна утворити?



Мал. 100

Задачі для повторення

315. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $M(-3; -2)$, $N(-2; 1)$, $P(4; -1)$, $K(3; -4)$ — паралелограм.

316. Дано точки $A(-2; 1)$, $B(1; 3)$, $C(5; 3)$. Знайдіть координати точки $D(x; y)$ такої, що: а) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

317. Середня лінія рівнобічної трапеції дорівнює l. Знайдіть площу трапеції, якщо її діагоналі взаємно перпендикулярні.

318. Чи можна накрити прямокутний трикутник з катетами 8 см і $10\sqrt{2}$ см кругом радіуса 7,5 см? А радіуса 8,5 см?

§ 10 Множення вектора на число

Добутком вектора $\vec{a}=(x;\, y)$ **на число** n називають вектор $n\vec{a}=(nx;\, ny)$.
Наприклад, якщо $\vec{a}=(4;\, 3)$, то $5\vec{a}=(20;\, 15)$, $-2\vec{a}=(-8;\, -6)$, $0\vec{a}=(0;\, 0)$.
Із наведеного означення випливає, що:

1) для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і числа n: $n(\vec{a}+\vec{b})=n\vec{a}+n\vec{b}$;

2) для будь-яких чисел n, m і вектора $\vec{a}$: $(n+m)\vec{a}=n\vec{a}+m\vec{a}$;

3) для будь-яких чисел n, m і вектора $\vec{a}$: $n(m\vec{a})=(nm)\vec{a}$.

Доведемо перше твердження. Нехай $\vec{a}=(x_1;\, y_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\, y_2)$.

Тоді $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2;\, y_1+y_2)$; $n(\vec{a}+\vec{b})=(nx_1+nx_2;\, ny_1+ny_2)$; (1)

$n\vec{a}+n\vec{b}=(nx_1;\, ny_1)+(nx_2;\, ny_2)=(nx_1+nx_2;\, ny_1+ny_2)$. (2)

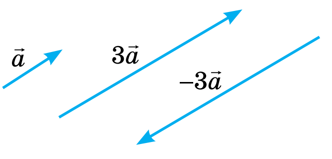
Праві частини рівностей (1) і (2) рівні, тому й ліві частини теж рівні:

$$n(\vec{a}+\vec{b})=n\vec{a}+n\vec{b}.$$

Подібним способом можна довести й інші твердження. Якщо число n натуральне, то

$$n\vec{a}=\underbrace{\vec{a}+\vec{a}+\ldots+\vec{a}}_{n \text{ разів}}.$$

Наприклад, $3\vec{a}=\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$. Довжина вектора $3\vec{a}$ в 3 рази більша за довжину вектора $\vec{a}$ (якщо $\vec{a}\neq 0$). Напрями векторів $3\vec{a}$ і $-3\vec{a}$ протилежні (мал. 101).



Мал. 101

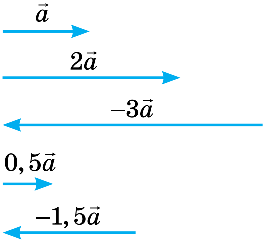
Взагалі добутком $n\vec{a}$ є вектор, довжина якого дорівнює $|n\vec{a}|=|n|\cdot|\vec{a}|$, а напрям збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $n > 0$, і протилежний йому, якщо $n < 0$.

Якщо $n = \vec{0}$ або $\vec{a}=\vec{0}$, то $n\vec{a}=0$. Тому, щоб побудувати вектор $n\vec{a}$, потрібно:

1) відкласти вектор, колінеарний вектору $\vec{a}$, довжина якого дорівнює $|n|\cdot|\vec{a}|$;

2) вибрати такий напрям, як і у вектора $\vec{a}$, якщо $n > 0$, і протилежний до нього, якщо $n < 0$.

Наприклад, на малюнку 102 зображено вектори, отримані при множенні вектора $\vec{a}$ на числа 2; −3; 0,5.



Мал. 102

При множенні вектора $\vec{a}$ на число отримуємо вектор, колінеарний даному. Тобто якщо $\vec{b}=n\vec{a}$, то $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. І навпаки, якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то, позначивши відношення їх довжин через $|n|$, отримаємо, що $\vec{b}=n\vec{a}$. Тому має місце така ознака колінеарності двох ненульових векторів.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли існує таке число n, що $\vec{b}=n\vec{a}$.

Якщо вектори задані координатами, тобто $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$, то вони колінеарні тоді й тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні: $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$.

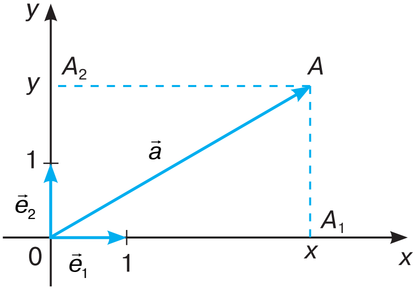
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Вектори $\vec{e}_1=(1;\ 0)$ і $\vec{e}_2=(0;\ 1)$ називають **ортами**, або **координатними векторами**. Будь-який вектор $\vec{a}=(x;\ y)$ можна подати у вигляді

$$\vec{a}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2.$$

Справді, $\vec{a}=(x;\ y)=(x;\ 0)+(0;\ y)=x(1;\ 0)+y(0;\ 1)=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$.

Таке представлення вектора $\vec{a}$ називають **розкладанням** даного вектора **за координатними векторами**. Його геометричний зміст зрозумілий з малюнка 103. Будь-який вектор можна розкласти за координатними векторами, і тільки одним способом.



Мал. 103

Часто виникає потреба розкласти даний вектор $\vec{c}$ за двома даними неколінеарними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, тобто знайти такі числа m і n, щоб виконувалась рівність $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$. Нехай, наприклад, вектор $\vec{c}=(1;\ 4)$ треба розкласти за векторами $\vec{a}=(2;\ -3)$ і $\vec{b}=(-1;\ 2)$.

Знайдемо числа m і n такі, щоб виконувалась рівність $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$.

$$m\vec{a}=(2m;\ -3m);\quad n\vec{b}=(-n;\ 2n),$$

$$m\vec{a}+n\vec{b}=(2m-n;\ -3m+2n).$$

Шукані числа m і n знайдемо із системи рівнянь:

$$\begin{cases}2m-n=1,\\-3m+2n=4;\end{cases}\quad \begin{cases}4m-2n=2,\\-3m+2n=4;\end{cases}\quad \begin{cases}m=6,\\n=11.\end{cases}$$

Отже, $\vec{c}=6\vec{a}+11\vec{b}$.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Що називають добутком вектора на число?
2. Сформулюйте властивості множення вектора на число.
3. Чи зміниться напрям вектора, якщо його помножити на: а) додатне число; б) від'ємне число; в) нуль?
4. Сформулюйте ознаку колінеарності двох ненульових векторів.
5. Як, знаючи вектор $\vec{a}$, побудувати вектор $n\vec{a}$?

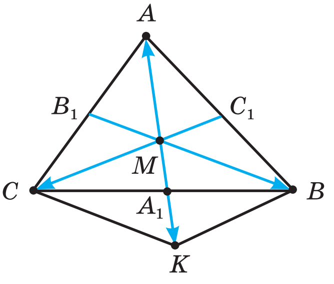
Виконаємо разом

1 Дано вектори $\vec{a}=(-2;\,3)$ і $\vec{b}=(4;\,1)$. Знайдіть $|\vec{c}|$, якщо $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

- Знайдемо координати векторів $3\vec{a}$ і $2\vec{b}$: $3\vec{a}=3(-2;\,3)=(-6;\,9)$; $2\vec{b}=2(4;\,1)=(8;\,2)$. Тоді $\vec{c}=(-6;\,9)-(8;\,2)=(-14;\,7)$, звідки $|\vec{c}|=\sqrt{(-14)^2+7^2}=\sqrt{196+49}=\sqrt{245}=7\sqrt{5}$.
Отже, $|\vec{c}|=7\sqrt{5}$.

2 M — точка перетину медіан трикутника ABC. Доведіть, що $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

- Медіани AA_1, BB_1, CC_1 трикутника ABC точкою перетину M діляться у відношенні 1 : 2. Відкладемо вектор $\overrightarrow{MK}=2\cdot\overrightarrow{MA_1}$ (мал. 104). Вектори $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MK}$ мають рівні довжини і протилежно напрямлені, тому $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MK}=\vec{0}$. Чотирикутник $BMCK$ — паралелограм, тому за правилом паралелограма $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MK}$. Отже, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MK}=\vec{0}$.



Мал. 104

Задачі і вправи

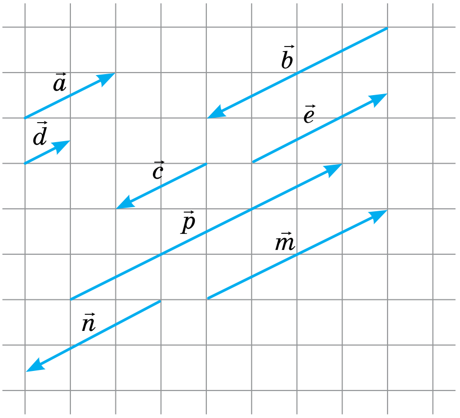
Виконайте усно

319. Спростіть вирази: а) $\vec{c}+\vec{c}+\vec{c}+\vec{c}$; б) $3\vec{a}+5\vec{a}$; в) $2(3\vec{a}+4\vec{b})-6\vec{a}$.

320. Помножте вектор $\vec{a}=(-3;\,5)$: на 2; на 3; на -7; на 1,2; на $\frac{1}{3}$.

321. Знайдіть довжини векторів $2\vec{p}$ і $-2\vec{p}$, якщо $\vec{p}=(3;\,4)$.

322. Вектори, зображені на малюнку 105, отримали при множенні вектора $\vec{m}$ на деяке число. Знайдіть це число.



Мал. 105

323. Чи колінеарні вектори:

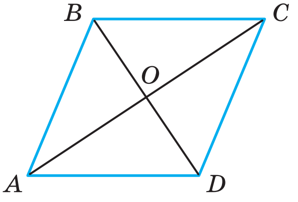
а) $\vec{a}=(4;\,6)$ і $\vec{b}=(2;\,3)$;

б) $\vec{c}=(1;\,5)$ і $\vec{d}=(5;\,1)$;

в) $\vec{x}=(-1;\,1)$ і $\vec{y}=(-1;\,1)$;

г) $\vec{m}=(2;\,-5)$ і $\vec{n}=(-1;\,2,5)$?

324. $ABCD$ — паралелограм (мал. 106). Знайдіть число k таке, щоб виконувалась рівність:
$\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{AC}$;
$\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{BO}$; $\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{AO}=k\overrightarrow{AC}$.



Мал. 106

А

325. Дано вектори $\vec{a}=(2;\,-3)$ і $\vec{b}=(-6;\,1)$. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$, якщо:

а) $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$; б) $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; в) $\vec{c}=5\vec{a}+7\vec{b}$; г) $\vec{c}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$.

326. Спростіть вирази:

а) $2\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{a}-4\vec{b}+\vec{a}$;

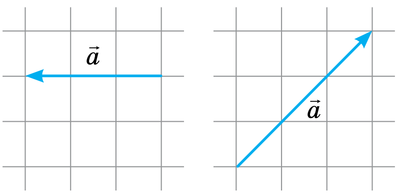
б) $2(\vec{m}-3\vec{n})-3(2\vec{m}+\vec{n})$;

в) $2(\vec{a}+2\vec{b})-3(\vec{b}-4\vec{c})-(2\vec{a}+\vec{b}-5\vec{c})$;

г) $1,2\vec{a}-0,3(4\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c})-0,1\vec{c}$.

327. Для векторів, зображених на малюнку 107, побудуйте вектори:

$2\vec{a}$; $-3\vec{a}$; $\frac{1}{2}\vec{a}$; $\frac{1}{4}\vec{a}$; $2,5\vec{a}$; $-1,5\vec{a}$; $\frac{2}{3}\vec{a}$.



а *б*

Мал. 107

328. Знайдіть модуль вектора $\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(-4;\,2)$, $\vec{b}=(6;\,-6)$ і:

а) $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$;

б) $\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$;

в) $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$;

г) $\vec{c}=1,5\vec{a}-\frac{5}{6}\vec{b}$.

329. Знайдіть число k та координати вектора $\vec{p}$, якщо $\vec{p}=k\vec{b}$, $|\vec{p}|=10$, $\vec{b}=(3;\ 4)$.

330. Вектор $\vec{a}=(2;\ 0)$ задає швидкість течії річки. Власна швидкість човна у 2 рази більша. Зобразіть вектори, що задають: а) швидкість човна за течією; б) швидкість човна проти течії. Знайдіть швидкості, з якими човен рухався за течією і проти течії.

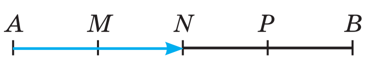
331. Дано точки $A(-1;\ 3)$, $B(-2;\ 7)$, $C(2;\ 5)$, $D(4;\ 1)$. Чи колінеарні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$? А вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BD}$?

332. При якому значенні m вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні:

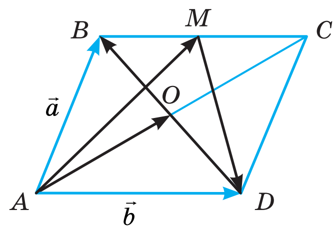
а) $\vec{a}=(2;\ m)$, $\vec{b}=(3;\ 12)$; в) $\vec{a}=(m;\ 12)$, $\vec{b}=(3;\ m)$;

б) $\vec{a}=(m;\ -4)$, $\vec{b}=(1;\ 3)$; г) $\vec{a}=(m+1;\ 2)$, $\vec{b}=(4;\ m-1)$?

333. Точки M, N, P ділять відрізок AB на чотири рівні частини (мал. 108). $\overrightarrow{AN}=\vec{a}$. Виразіть через $\vec{a}$ вектори $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{MA}$.



Мал. 108



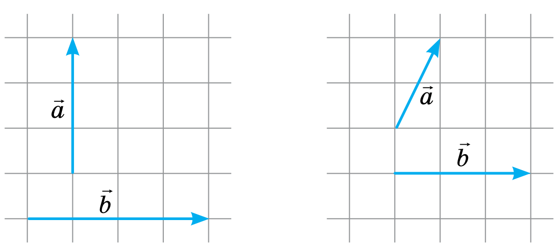
Мал. 109

334. $ABCD$ — паралелограм (мал. 109), M — середина BC. Виразіть через вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$ вектори $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{MD}$.

Б

335. Дано вектор $\vec{a}=(-2;\ 7)$ і точку $M(1;\ -4)$. Знайдіть координати точки N, для якої: а) $\overrightarrow{MN}=2\vec{a}$; б) $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\vec{a}$.

336. Для векторів, зображених на малюнку 110, побудуйте вектори $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$; $\vec{d}=-\vec{a}+3\vec{b}$; $\vec{m}=\frac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}$; $\vec{n}=2(\vec{a}-\vec{b})$; $\vec{p}=\frac{1}{3}(3\vec{a}+2\vec{b})$.



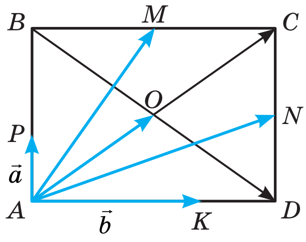
а б

Мал. 110

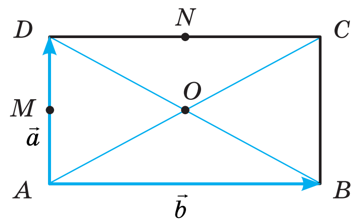
337. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AK}$ і $\overrightarrow{AB}$, якщо $\overrightarrow{KB}=(2;3)$.

338. $ABCD$ — прямокутник (мал. 111), $\vec{a}=\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

Виразіть через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, де M і N — середини сторін BC і CD.



Мал. 111



Мал. 112

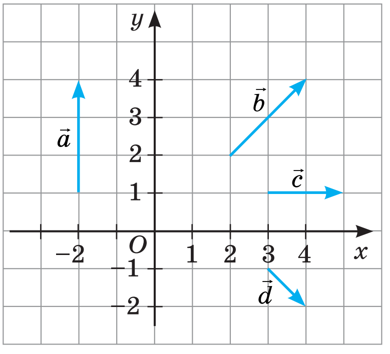
339. ***Відкрита задача.*** $ABCD$ — прямокутник (мал. 112). O — точка перетину його діагоналей. Точки M і N — середини сторін AD і CD. Виразіть вектори **...** через вектори $\vec{a}=\overrightarrow{AD}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$.

340. Знайдіть координати одиничного вектора, колінеарного вектору $\vec{a}=(-5;12)$.

341. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, співнапрямленого з вектором $\vec{a}=(6;-8)$, якщо $|\vec{b}|=5$.

342. Установіть відповідність між зображеними на малюнку 113 векторами (1–4) і колінеарними до них векторами з координатами (А–Д).

1 $\vec{a}$	**А** (–3; 3)
2 $\vec{b}$	**Б** (–3; –4)
3 $\vec{c}$	**В** (0; 3)
4 $\vec{d}$	**Г** (3; 0)
	Д (–3;–3)



Мал. 113

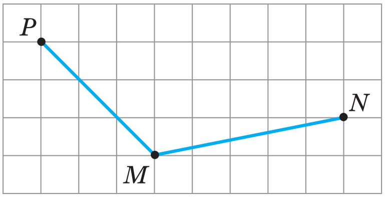
343. Знайдіть довжини векторів: $\vec{a}=3\vec{e}_1+4\vec{e}_2$, $\vec{b}=5\vec{e}_1+5\vec{e}_2$, $\vec{c}=2\vec{e}_1-4\vec{e}_2$, $\vec{d}=-2\sqrt{5}\vec{e}_1-4\vec{e}_2$.

344. Дано вектори $\vec{a}=(2;-3)$, $\vec{b}=(5;9)$ і $\vec{m}=(5;7)$. Знайдіть такі числа α і β, щоб виконувалась рівність $\vec{m}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$.

345. Розкладіть вектор $\vec{m}=(2;5)$ за векторами:

а) $\vec{a}=(1;-3)$ і $\vec{b}=(-2;5)$; б) $\vec{c}=(-2;3)$ і $\vec{d}=(3;-6)$.

Практичне завдання



Мал. 114

346. Перемалюйте малюнок 114 в зошит і відкладіть на ньому:

а) точку X таку, що: $\overrightarrow{MX}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$;

б) точку Y таку, що: $\overrightarrow{MY}=\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}$;

в) точку Z таку, що: $\overrightarrow{PZ}=2\overrightarrow{PM}$.

Встановіть вид чотирикутників $MPNY$ і $XYZM$.

Задачі для повторення

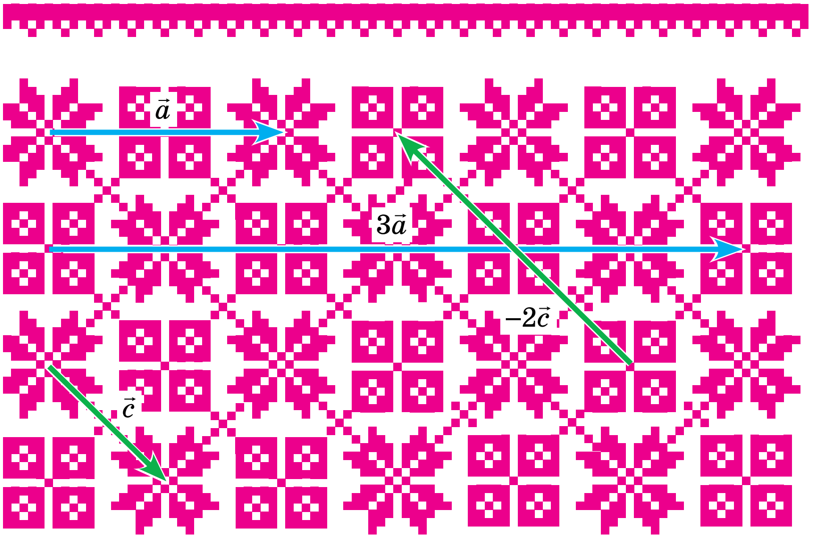
347. Чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MN}$, якщо $A(2;\ -5)$, $B(1;\ -3)$, $M(-7{,}5;\ 1{,}2)$, $N\left(-8\dfrac{1}{2};\ 3\dfrac{1}{5}\right)$?

348. Спростіть вираз $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NK}-\overrightarrow{MP}+\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OK}\right)+\overrightarrow{CP}$.

349. Дано вектори $\vec{a}=(-2;\ 4)$ і $\vec{b}=(4;\ -4)$. На скільки модуль різниці цих векторів більший за модуль їх суми?

350. ***Задача Архімеда.*** Якщо з точки, що лежить поза колом, провести дві січні так, що одна з них проходить через центр кола, а зовнішній відрізок іншої дорівнює радіусу кола, то кут між січними дорівнюватиме третині більшої з дуг, що знаходиться між його сторонами. Доведіть.

Геометрія навколо нас

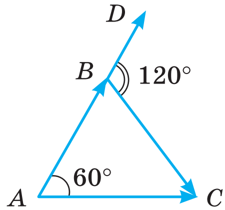


Орнаменти і вектори

§ 11 Скалярний добуток векторів

Досі ми множили вектори на число. Виявляється, можна множити і вектор на вектор. Оскільки розглядають таке множення, при якому добуток двох векторів дорівнює числу (скаляру), то його називають **скалярним добутком.** Для введення цього поняття пояснимо спочатку, що розуміють під кутом між двома ненульовими векторами.

Кутом між двома ненульовими векторами називають кут між відповідними їм напрямленими відрізками, які виходять з однієї точки. Кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180°, а між співнапрямленими — 0°.



Мал. 115

Наприклад, якщо ABC — рівносторонній трикутник (мал. 115), то кут між векторами AB і AC дорівнює 60°, а між AB і BC — 120°, бо кут між векторами AB і BC дорівнює куту між векторами BD і BC.

Скалярним добутком двох ненульових векторів називають добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними.

Якщо кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює φ, то їх скалярний добуток

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Якщо хоч один із двох векторів нульовий, їх добуток дорівнює нулю.

ТЕОРЕМА 4

Скалярний добуток векторів $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ дорівнює $x_1x_2 + y_1y_2$.

Приклад 1. Якщо $\vec{a} = (2;\ -1)$ і $\vec{b} = (1;\ 0)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 2$.

Ця теорема дуже важлива. Її застосовують для розв'язування багатьох абстрактних і прикладних задач.

Розглянемо основні властивості скалярного добутку.

Якими б не були вектори $\vec{a} = (x_1;\ y_1)$, $\vec{b} = (x_2;\ y_2)$ і $\vec{c} = (x_3;\ y_3)$, завжди:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

2) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$;

3) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Справедливість цих властивостей випливає з тотожностей:

$$x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1;$$
$$(x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3 = (x_1x_3 + x_2x_3) + (y_1y_3 + y_2y_3) =$$
$$= (x_1x_3 + y_1y_3) + (x_2x_3 + y_2y_3);$$
$$(kx_1)x_2 + (ky_1)y_2 = k(x_1x_2 + y_1y_2).$$

Доведені властивості дають можливість порівняно легко виконувати перетворення векторних виразів — за тими самими правилами, за якими виконують тотожні перетворення алгебраїчних виразів.

Знаючи скалярний добуток двох векторів та їх довжини, можна легко обчислити косинус кута між ними:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Якщо скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю, то $\cos\varphi = 0$ і $\varphi = 90°$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні. І навпаки, якщо два ненульові вектори перпендикулярні, тобто $\varphi = 90°$, то $\cos\varphi = 0$. За цієї умови скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю.

Отже, маємо умову перпендикулярності двох векторів.

Два ненульові вектори перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Якщо вектори задані координатами, то умова перпендикулярності двох векторів формулюється так:

Ненульові вектори $\vec{a} = (x_1;\, y_1)$ і $\vec{b} = (x_2;\, y_2)$ перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{a}$ позначають $\vec{a}^2$ і називають скалярним квадратом вектора $\vec{a}$. За означенням скалярного добутку $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0° = |\vec{a}|^2$. Отже, $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, тобто скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля. Звідси випливає, що $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Розглянемо приклад.

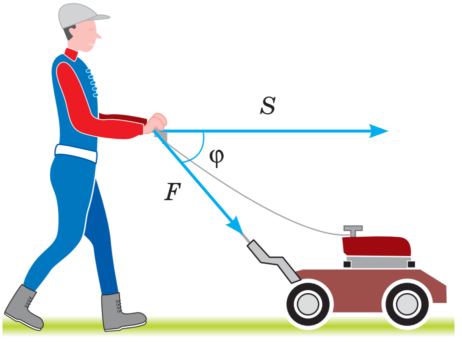
Приклад 2. Знайдемо $|\vec{a}+\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3\sqrt{3}$, $\left(\widehat{\vec{a};\, \vec{b}}\right) = 30°$.

Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$, то $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\cos 30° + \vec{b}^2} =$

$= \sqrt{2^2 + 2\cdot 2\cdot 3\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \left(3\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+18+27} = \sqrt{49} = 7.$ Отже, $|\vec{a}+\vec{b}| = 7$.

Приклад застосування скалярного добутку векторів відомий з фізики. Механічна робота A, яку виконує стала сила $\vec{F}$ при переміщенні $\vec{S}$ (мал. 116), дорівнює скалярному добутку даних векторів:

$$A = \vec{F}\cdot\vec{S} = |\vec{F}|\cdot|\vec{S}|\cdot\cos\varphi.$$



Мал. 116

Скалярний добуток векторів використовується і в алгебрі, зокрема для доведення нерівностей, визначення найменшого чи найбільшого значення функції (див. с. 96).

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Кут між ненульовими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають символом $(\vec{a};\ \vec{b})$. Тому означення скалярного добутку таких векторів записують у вигляді формули

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a};\ \vec{b}).$$

Чому говорять «скалярний добуток векторів», а не «добуток векторів»? Бо у вищій математиці розглядається ще векторний, косий та інші добутки.

Косим добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число, яке дорівнює добутку модулів цих векторів і синуса орієнтованого кута між першим і другим векторами. Косий добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають символом $\vec{a}\circ\vec{b}$.

Векторним добутком векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, кут між якими дорівнює φ, називають такий вектор $\vec{p}$, що його напрям перпендикулярний до напрямів векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, орієнтація трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ збігається з орієнтацією базисної трійки векторів і $|\vec{p}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$. Тому, взагалі кажучи, для таких добутків переставний закон не справджується. Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають символом $\vec{a}\times\vec{b}$.

Мішаним добутком $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ трьох векторів називають їх векторно-скалярний добуток:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Сформулюйте означення скалярного добутку двох векторів.
2. Сформулюйте означення кута між двома векторами.
3. Чому дорівнює скалярний добуток векторів $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$?
4. Чому дорівнює скалярний добуток векторів, якщо принаймні один із них нульовий?
5. Яка умова перпендикулярності двох векторів?
6. Як знайти довжину вектора $\vec{a}$?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ

1 Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}=(1;\ -2)$ і $\vec{b}=(-4;\ 2)$.

● Нехай $(\vec{a};\ \vec{b})=\varphi$. За означенням $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$. Тому

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1\cdot(-4)+(-2)\cdot 2}{\sqrt{1^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+2^2}}=\frac{-8}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{20}}=\frac{-8}{10}=-\frac{4}{5}.$$

Отже, $\cos\varphi=-\frac{4}{5}$.

2 Знайдіть $(\vec{a}+2\vec{b})(3\vec{a}-\vec{b})$, якщо $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2, (\vec{a};\vec{b})=60°$.

● $(\vec{a}+2\vec{b})(3\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{a}\vec{b}-2\vec{b}^2=\vec{a}^2+5\vec{a}\vec{b}-2\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+5|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60°-$

$-2|\vec{b}|^2=4+5\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot 4=4+10-8=6.$

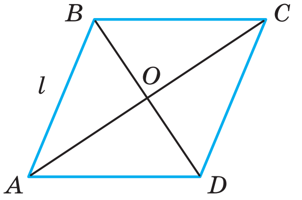
Задачі і вправи

Виконайте усно

351. $ABCD$ — ромб зі стороною l і кутом $A = 60°$ (мал. 117). Знайдіть:

а) кути між векторами: $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{AO}$ і $\overrightarrow{CO}$;

б) скалярні добутки векторів $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{AO}$; $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{DO}$.



Мал. 117

352. Знайдіть кут між двома одиничними векторами, якщо їх скалярний добуток дорівнює: $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 0;1; –0,5; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

353. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}=(0;1)$, $\vec{b}=(-3;0)$;
б) $\vec{a}=(1;1)$, $\vec{b}=(2;3)$;
в) $\vec{a}=(6;0)$, $\vec{b}=(-2;-5)$;
г) $\vec{a}=(4;2)$, $\vec{b}=(4;-2)$.

А

354. У трикутнику ABC $\angle A = 50°$, $\angle C = 90°$. Знайдіть кути між векторами: а) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$.

355. Знайдіть скалярний добуток векторів:

а) $\vec{a}=(1;2)$ і $\vec{b}=(-8;2)$;
б) $\vec{m}=(-3;-2)$ і $\vec{n}=(2;3)$;
в) $\vec{p}=(-3;-7)$ і $\vec{k}=(-2;-5)$;
г) $\vec{c}=\left(4\frac{1}{2};-2\frac{2}{3}\right)$ і $\vec{d}=(2;3)$.

356. Дано вектори $\vec{p}=(1;-5)$ і $\vec{q}=(3;1)$. Знайдіть скалярний добуток векторів: а) $\vec{a}=\vec{p}+\vec{q}$ та $\vec{b}=\vec{p}-\vec{q}$; б) $\vec{m}=\vec{p}+2\vec{q}$ та $\vec{n}=3\vec{p}-\vec{q}$.

357. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(3;1)$;
б) $\vec{a}=(2;6)$, $\vec{b}=(3;0)$;
в) $\vec{a}=(-4;-8)$, $\vec{b}=(-3;3)$;
г) $\vec{a}=(-3;-4)$, $\vec{b}=(3;-1)$.

358. Знайдіть кут між векторами:

а) $\vec{a}=(-2;\ 2)$ і $\vec{b}=(0;\ 4)$; в) $\vec{c}=(3;\ -1)$ і $\vec{d}=(2;\ 1)$;

б) $\vec{x}=(1;\ 1)$ і $\vec{y}=(0;\ -1)$; г) $\vec{p}=(0;\ 2)$ і $\vec{k}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{3}{2}\right)$.

359. Доведіть, що:

а) трикутник з вершинами в точках $A(2;\ 1)$, $B(0;\ 5)$, $C(8;\ 4)$ — прямокутний;

б) чотирикутник з вершинами в точках $A(-3;\ 1)$, $B(-1;\ 4)$, $C(5;\ 0)$, $D(3;\ -3)$ — прямокутник.

360. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=12$, $(\vec{a};\ \vec{b})=60°$; в) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=7$, $(\vec{a};\ \vec{b})=120°$;

б) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=3\sqrt{2}$, $(\vec{a};\ \vec{b})=45°$; г) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=4$, $(\vec{a};\ \vec{b})=150°$.

361. Трикутник ABC — рівносторонній, $AB = 12$.

Знайдіть: а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

362. При якому значенні x вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні, якщо:

а) $\vec{a}=(0;\ 1)$, $\vec{b}=(-3;\ x)$; в) $\vec{a}=(6;\ x)$, $\vec{b}=(-2;\ -5)$;

б) $\vec{a}=(1;\ 1)$, $\vec{b}=(x;\ 3)$; г) $\vec{a}=(x;\ 2)$, $\vec{b}=(4;\ -2)$?

Б

363. Знайдіть косинуси кутів трикутника ABC, якщо:

а) $A(-4;\ 1)$, $B(4;\ 2)$, $C(-2;\ -2)$; б) $A(-1;\ 5)$, $B(1;\ 1)$, $C(5;\ 3)$.

364. Дано точки $A(-4;\ 0)$ і $B(3;\ 3)$. Під яким кутом відрізок AB видно з початку координат?

365. Дано точки: $A(1;\ 1)$, $B(1;\ 2)$, $C(-2;\ 2)$, $D(-3;\ 1)$. Знайдіть кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$.

366. Дано три точки: $A(-5;\ 2)$, $B(1;\ 4)$, $C(-1;\ 1)$. Знайдіть координати точки D такої, щоб виконувалася умова $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$, якщо точка D лежить: а) на осі OX; б) на осі OY.

367. Дано вектори $\vec{a}=(3;\ 4)$ і $\vec{b}=(-1;\ 2)$. Знайдіть число l, при якому вектор $\vec{a}+l\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.

368. При якому значенні m скалярний добуток $\vec{p}\cdot\vec{q}$ дорівнює 6, якщо:

а) $\vec{p}=(2;\ 3)$, $\vec{q}=(m;\ 4)$; б) $\vec{p}=(m;\ 1)$, $\vec{q}=(m;\ -3)$; в) $\vec{p}=(2m;\ -11)$, $\vec{q}=(m;\ m)$.

369. Доведіть: а) якщо довжини ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні, то вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярні; б) якщо вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ перпендикулярні, то довжини ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні.

370. Дано $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $(\vec{a};\ \vec{b})=60°$. Знайдіть скалярний добуток векторів:

а) $2\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$; в) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$;

б) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$; г) $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})$.

371. Обчисліть кут між векторами $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}$ і $\vec{n}=\vec{a}+3\vec{b}$, де $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

372. Обчисліть $|\vec{a}+\vec{b}|$ та $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо:

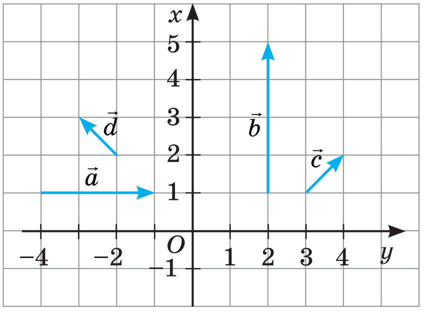
а) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\ \vec{a}\perp\vec{b}$;   в) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1,\ \left(\vec{a};\vec{b}\right)=60°$;

б) $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=5,\ \vec{a}\perp\vec{b}$;   г) $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4,\ \left(\vec{a};\vec{b}\right)=120°$.

373. Обчисліть $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=13,\ |\vec{b}|=19,\ |\vec{a}+\vec{b}|=24$.

Практичне завдання

374. Перемалюйте у зошит малюнок 118. Знайдіть кути між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\vec{a}$ і $\vec{c}$, $\vec{a}$ і $\vec{d}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ двома способами:
а) безпосереднім вимірюванням, відклавши попарно ці вектори від початку координат;
б) за допомогою формули, визначивши попередньо координати кожного вектора.



Мал. 118

Задачі для повторення

375. Від точки $A(2;\ -5)$ відкладено вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Знайдіть координати:

а) точки B, якщо $\vec{a}=(1;\ 3)$;

б) точки C, якщо $\vec{c}=(-3;\ 4)$;

в) одиничного вектора, співнапрямленого з вектором $\overrightarrow{BC}$.

376. ***Старовинна німецька задача.*** Драбина завдовжки 13 футів приставлена до стіни так, що нижня її частина віддалена від стіни на 5 футів. На скільки спуститься вона по стіні, якщо її основу відсунути ще на 7 футів.
Дослідіть, як змінюватиметься положення верху драбини, якщо нижню частину драбини відсовувати від заданого положення на a футів.

377. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника ділить медіану, проведену до основи, на відрізки 10 см і 8 см. Обчисліть периметр і площу трикутника.

§ 12 Застосування векторів

Якщо розв'язують задачу, використовуючи властивості векторів, то це — **векторний метод** розв'язування задачі. При цьому часто використовують таке твердження.

ТЕОРЕМА 5

Якщо X — довільна точка, а M — середина відрізка AB або точка перетину медіан трикутника ABC, то відповідно

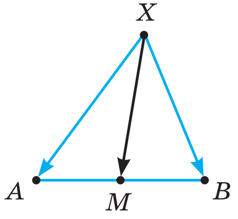
$$\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\right) \text{ або } \overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right).$$

ДОВЕДЕННЯ.

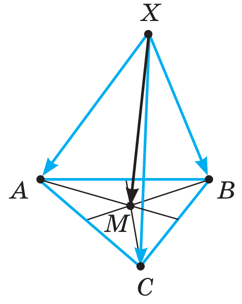
Завжди істинні рівності:

$$\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{XA},\quad \overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{XB},\quad \overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{XC}.$$

Додавши дві перші з цих рівностей і врахувавши, що $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ (мал. 119), дістанемо: $2\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}$, звідки $\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\right)$.



Мал. 119



Мал. 120

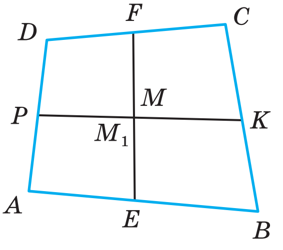
Якщо додамо всі три рівності і врахуємо, що $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ (див. мал. 104 і задачу на с. 83), дістанемо: $3\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}$, звідки $\overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right)$ (мал. 120). □

Для прикладу розв'яжемо векторним методом задачу, яку раніше було розв'язано координатним методом (див. с. 26).

Задача 1. Доведіть, що середини відрізків, які сполучають середини протилежних сторін чотирикутника, збігаються.

Розв'язання. Якщо M і M_1 — середини відрізків EF і KP (мал. 121), а X — довільна точка (її тільки уявляємо), то

$$\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XE}+\overrightarrow{XF}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}\right);$$
$$\overrightarrow{XM_1}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XK}+\overrightarrow{XP}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XD}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}+\overrightarrow{XD}\right).$$



Мал. 121

Праві частини цих рівностей рівні, тому $\overrightarrow{XM}=\overrightarrow{XM_1}$. А це можливо тільки тоді, коли точки M і M_1 збігаються.

Багатьом властивостям геометричних фігур відповідають ті чи інші векторні рівності.

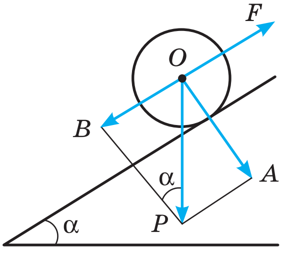
1. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$ — точки A і B збігаються;
2. $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ — прямі AB і CD паралельні;
3. $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ — точки A, B, C лежать на одній прямій;
4. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ — прямі AB і CD перпендикулярні;
5. $\overrightarrow{AM}=\frac{m}{n}\overrightarrow{MB}$, а числа m і n додатні — точка M ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = m : n$;
6. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$ — один із кутів, утворених прямими, на яких лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює φ.

Користуючись цими співвідношеннями, можна розв'язувати багато геометричних задач та доводити теореми.

Вектори часто застосовують у фізиці. Але здебільшого —прикладені вектори, які визначаються не тільки довжиною і напрямом, а й точкою прикладання.

Задача 2. Вантаж вагою $\vec{P}$ перебуває на похилій площині, нахиленій до горизонту під кутом α (мал. 122). Яку треба прикласти силу $\vec{F}$, спрямовану в напрямі найбільшого підйому площини, щоб вантаж не скочувався вниз?

Розв'язання. Силу тяжіння $\vec{P}$ розкладемо за двома взаємно перпендикулярними напрямами: $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$. Сила $\overrightarrow{OA}$ перпендикулярна до площини і не спричиняє переміщення вантажу. Його скочування викликає сила $\overrightarrow{OB}$, модуль якої дорівнює $P\sin\alpha$. Її утримує протилежна їй сила $\vec{F}$. Отже, $\vec{F}=P\sin\alpha$.



Мал. 122

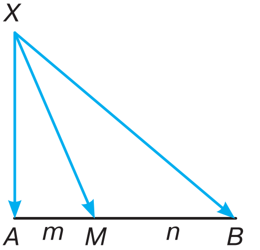
ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Першу частину теореми 5 можна узагальнити (мал. 123).

ТЕОРЕМА 6

Якщо точка *M* ділить відрізок *AB* у відношенні *AM* : *MB* = *m* : *n*, а *X* — будь-яка точка площини, то

$$\overrightarrow{XM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}.$$



Мал. 123

ДОВЕДЕННЯ.

Оскільки $\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{XA}$, $\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{XB}$, то
$n\overrightarrow{XM}+n\overrightarrow{MA}=n\overrightarrow{XA}$, $m\overrightarrow{XM}+m\overrightarrow{MB}=m\overrightarrow{XB}$.

Якщо додати почленно ці векторні рівності і врахувати, що $n\overrightarrow{MA}+m\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, то дістанемо $(m+n)\overrightarrow{XM}=n\overrightarrow{XA}+m\overrightarrow{XB}$, звідки

$$\overrightarrow{XM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}.$$

Якщо $m=n$, то $\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB})$. □

Вектори можна застосовувати не тільки в геометрії, а й при розв'язуванні алгебраїчних задач. Особливо зручно це робити при доведенні нерівностей і знаходженні найбільшого і найменшого значень функції або виразу.

Наприклад, знайдемо найбільше значення функції $y=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}$. Її область визначення $D(y)=[0;\ 2]$.

Введемо вектори $\vec{a}=(1;\ 1)$ і $\vec{b}=\left(\sqrt{x};\ \sqrt{2-x}\right)$. Тоді дану функцію можна записати у вигляді $y=\vec{a}\cdot\vec{b}$, адже $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot\sqrt{x}+1\cdot\sqrt{2-x}$. Оскільки $|\vec{a}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{x+2-x}=\sqrt{2}$, то $y=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos\varphi=2\cos\varphi$.

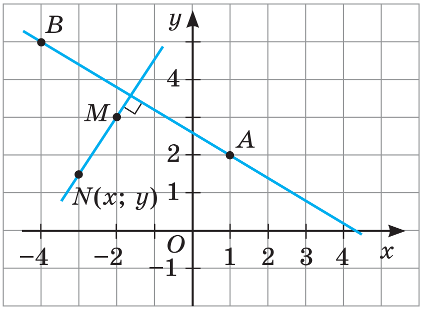
Найбільше значення $\cos\varphi$ дорівнює 1. Тому найбільше значення функції $y=2$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що називають векторним методом розв'язування задач?
2. Які векторні формули вам відомі?
3. Як мовою векторів записати, що: а) прямі паралельні; б) прямі перпендикулярні; в) точки збігаються; г) точки лежать на одній прямій?
4. Чи можна застосовувати векторний метод до задач, умови яких не містять векторів? Наведіть приклади.

Виконаємо разом

1 Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-2; 3)$ перпендикулярно до прямої AB, якщо $A(1; 2)$, $B(-4; 5)$ (мал. 124).



Мал. 124

- Нехай $N(x; y)$ — довільна точка шуканої прямої MN і $MN \perp AB$. Тоді $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Оскільки $\overrightarrow{AB} = (-5; 3)$, $\overrightarrow{MN} = (x+2; y-3)$, то $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = -5(x+2) + 3(y-3)$. Тоді $-5(x + 2) + 3(y - 3) = 0$, звідки $-5x + 3y - 17 = 0$ або $5x - 3y + 19 = 0$. Отже, рівняння шуканої прямої матиме вигляд: $5x - 3y + 19 = 0$.

2 Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $A(1; 2)$, $B(4; 1)$, $C(3; 3)$.

- Знайдемо $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$ і $\cos A$: $\overrightarrow{AB} = (3; -1)$, тому $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$.

$\overrightarrow{AC} = (2; 1)$, тому $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$. $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|AB| \cdot |AC|} = \dfrac{3 \cdot 2 - 1 \cdot 1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{5}{5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Якщо $\cos A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Знайдемо площу трикутника: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}|AB| \cdot |AC| \cdot \sin A = \dfrac{1}{2}\sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2{,}5$.

Задачі і вправи

Виконайте усно

378. Що можна сказати про відрізки AB і CD, якщо $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$?

379. Встановіть взаємне розміщення точок A, B, C, якщо:

а) $\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{BA}$.

380. Чи лежать точки A, B, C на одній прямій, якщо:

а) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC}$; в) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$?

381. Встановіть вид чотирикутника $ABCD$, якщо:

а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{BC} = 0{,}3\overrightarrow{AD}$.

382. Встановіть вид трикутника ABC, якщо $\overrightarrow{CA} = (-2; 3)$, $\overrightarrow{CB} = (3; 2)$.

А

383. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $M(-4; -2)$, $N(-6; 2)$, $P(4; 7)$, $K(6; 3)$ — прямокутник.

384. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-1; -2)$, $B(-8; 4)$, $C(1; 6)$, $D(8; 0)$ — ромб.

385. Доведіть, що точки $M(1; 3)$, $N(-2; 7)$, $K(-8; 15)$ лежать на одній прямій. Яка з точок лежить між двома іншими? У якому відношенні вона ділить відрізок?

386. У якому відношенні вісь OX ділить відрізок AB, якщо $A(1; 6)$, $B(7; -12)$?

387. AM — медіана трикутника ABC. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AM}$ та його модуль, якщо $A(-3; 2)$, $B(1; 1)$, $C(3; 5)$.

388. Знайдіть координати точки перетину медіан трикутника ABC, якщо $A(-7; 12)$, $B(-3; -2)$, $C(4; 5)$.

389. Напишіть рівняння висот трикутника ABC, якщо $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$, $C(7; -3)$.

390. Напишіть рівняння прямої, що дотикається до кола з центром $P(-4; 2)$ в точці $A(1; 4)$.

391. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $A(2; 1)$, $B(8; 7)$, $C(6; 2)$.

392. Діагоналі чотирикутника перпендикулярні. Доведіть, що суми квадратів протилежних сторін цього чотирикутника рівні.

393. Нехай K, P, T, L — середини сторін AB, BC, CD, DA довільного чотирикутника. Доведіть, що точки перетину медіан трикутників APT і CKL збігаються.

Б

394. Доведіть теорему про середню лінію трапеції.

395. Доведіть, що медіани трикутника перетинаються в одній точці.

396. Доведіть, що коли a, b, c — сторони трикутника, а m_c — медіана, проведена до сторони c, то $m_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

397. Доведіть, що чотирикутник, у якого діагоналі в точці перетину діляться навпіл, — паралелограм.

398. ***Відкрита задача.*** Доведіть теорему **...**, використовуючи векторний метод.

399. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $A(1; -3)$, $B(-4; -8)$. Знайдіть координати точки C, якщо відомо, що вони рівні.

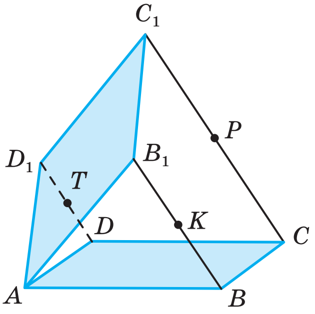
400. Напишіть рівняння дотичних, проведених з точки $A(1; 1)$ до кола $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$.

401. Знайдіть координати одиничного вектора, колінеарного з бісектрисою кута B трикутника ABC, якщо $A(2; 7)$, $B(4; 3)$, $C(8; 1)$.

402. Дано прямокутник $ABCD$. Доведіть, що для будь-якої точки M виконується рівність: $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.

403. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини основ трапеції, проходить і через точку перетину її діагоналей.

404. $ABCD$ і $AB_1C_1D_1$ — паралелограми, точки K, P, T — середини відрізків BB_1, CC_1 і DD_1. Доведіть, що $AK = PT$ і $AT = KP$ (мал. 125).



Мал. 125

405. На сторонах AB, BC, CA трикутника ABC позначено точки A_1, B_1, C_1, такі, що $AA_1 = k \cdot AB$, $BB_1 = k \cdot BC$, $CC_1 = k \cdot CA$. Доведіть, що точки перетину медіан трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ збігаються.

406. Знайдіть найбільше значення виразу $3x + 4\sqrt{1-x^2}$ і вкажіть x, при якому це значення досягається.

407. Доведіть нерівність $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} \le 2\sqrt{p+1}$, де $p = a + b$.

Практичне завдання

408. Для точок $M(-3; 2)$ і $N(5; 4)$ задайте формулою та зобразіть на координатній площині множину точок $G(x; y)$, які задовольняють умову:
а) $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$;   б) $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{GN} = 0$.

Задачі для повторення

409. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b}$ і $\vec{n} = \vec{a} + 3\vec{b}$, якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — одиничні взаємно перпендикулярні вектори.

410. Знайдіть модуль вектора $\vec{a}$, якщо $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$, де $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 2$, а кут між ними $60°$.

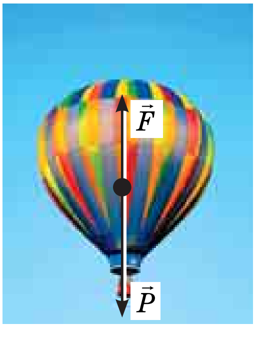
411. Діагоналі трапеції перпендикулярні, і одна з них дорівнює 15 см. Знайдіть площу трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.

Геометрія навколо нас

$\vec{F} = \vec{P}$

$\vec{F} > \vec{P}$

$\vec{F} < \vec{P}$



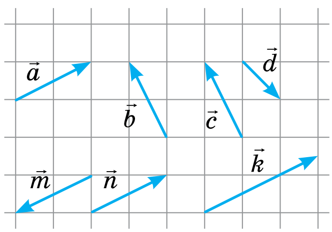
Вектори у фізичних явищах

Задачі за готовими малюнками

А | **Б**

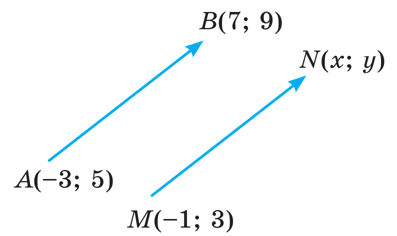
1

А. Вкажіть вектори: колінеарні, рівні, протилежні.



Б. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$.

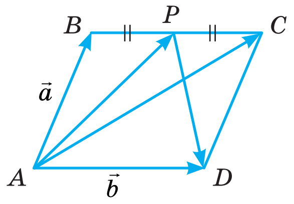
$N(x;\ y)$



2

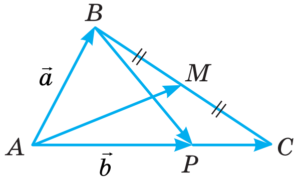
А. $ABCD$ — паралелограм.

Виразіть $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PD}$ через $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



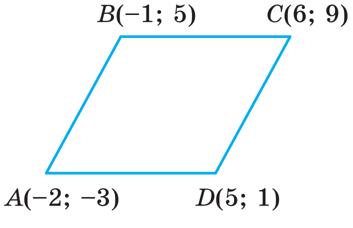
Б. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PC} = 3:1$.

Виразіть через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$, $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$.

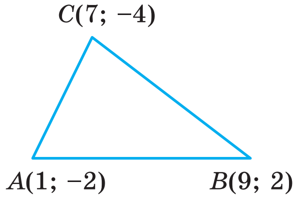


3

А. Доведіть: $ABCD$ — ромб.



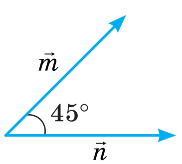
Б. $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$.



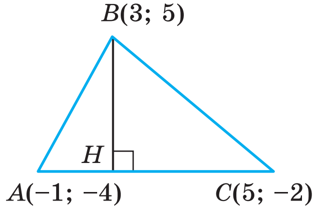
4

А. $|\vec{m}| = 2\sqrt{2}$; $|\vec{n}| = 3$.

$|\vec{m} + \vec{n}|$; $|\vec{m} - \vec{n}|$



Б. Рівняння BH.



Самостійна робота 2

Варіант 1

1°. Накресліть два довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та побудуйте вектор $\vec{c}=2\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$.

2°. Знайдіть косинус кута A трикутника ABC, якщо $A(-3;\ 1)$, $B(1;\ 3)$, $C(5;\ -5)$.

3•. Знайдіть модуль вектора $\vec{a}=5\vec{p}+2\vec{q}$, якщо $|\vec{p}|=\sqrt{2}$, $|\vec{q}|=1$, $\left(\widehat{\vec{p};\ \vec{q}}\right)=45°$.

Варіант 2

1°. Накресліть два довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та побудуйте вектор $\vec{c}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.

2°. Знайдіть косинус кута B трикутника ABC, якщо $A(3;\ 7)$, $B(-3;\ -1)$, $C(5;\ 3)$.

3•. Знайдіть модуль вектора $\vec{n}=2\vec{a}-3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=2$, $\left(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}\right)=60°$.

Варіант 3

1°. Накресліть два довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та побудуйте вектор $\vec{c}=-2\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$.

2°. Знайдіть косинус кута C трикутника ABC, якщо $A(-3;\ -3)$, $B(5;\ 1)$, $C(3;\ 5)$.

3•. Знайдіть модуль вектора $\vec{n}=4\vec{a}-3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $\left(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}\right)=30°$.

Варіант 4

1°. Накресліть два довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та побудуйте вектор $\vec{c}=\dfrac{1}{3}\vec{a}-2\vec{b}$.

2°. Знайдіть косинус кута B трикутника ABC, якщо $A(-3;\ -5)$, $B(3;\ 3)$, $C(5;\ -1)$.

3•. Знайдіть модуль вектора $\vec{p}=3\vec{m}-4\vec{n}$, якщо $|\vec{m}|=3$, $|\vec{n}|=1$, $\left(\widehat{\vec{m};\ \vec{n}}\right)=60°$.

Тестові завдання 2

1	Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(-1; -3)$, $B(-7; 12)$.	а) $(6; -15)$; б) $(-6; 15)$;	в) $(-8; 9)$; г) $(-6; 9)$.
2	Яка умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$?	а) $\vec{a}+\vec{b}=0$; б) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{0}$;	в) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{0}$; г) не можна встановити.
3	Дано: $\vec{p}=(-2; 1)$, $\vec{q}=(4; -3)$. Знайдіть координати вектора $\vec{m}=2\vec{p}+3\vec{q}$.	а) $(8; -7)$; б) $(-14; 0)$;	в) $(8; 11)$; г) $(-2; 3)$.
4	Знайдіть довжину вектора $\vec{a}=(-2; 4)$.	а) $2\sqrt{10}$; б) $\pm 2\sqrt{3}$;	в) $\pm 2\sqrt{5}$; г) $2\sqrt{5}$.
5	Який із векторів колінеарний вектору $\vec{a}=(-1; 4)$?	а) $(-2; -8)$; б) $(0,5; 2)$;	в) $(3; -3)$; г) $(4; -16)$.
6	Встановіть вид трикутника ABC, якщо $\overrightarrow{AB}=(-1; 3)$, $\overrightarrow{AC}=(6; 2)$.	а) рівнобедрений; б) гострокутний; в) прямокутний; г) тупокутний.	
7	Знайдіть кут між одиничними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b}=0,5$.	а) $30°$; б) $60°$;	в) $120°$; г) $45°$.
8	При якому значенні m вектори $\vec{a}=(-2; 6)$ і $\vec{b}=(9; m)$ перпендикулярні?	а) -3; б) 27;	в) 3; г) -27.
9	При якому значенні x вектори $\vec{m}=(3; x)$ і $\vec{n}=(-6; 7)$ колінеарні?	а) 14; б) $3,5$;	в) $-3,5$; г) -14.
10	У якому з випадків точки M_1 і M_2 збігаються?	а) $\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{BM_2}$; б) $\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM_2}$;	в) $\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{M_1M_2}$; г) $\overrightarrow{M_1M_2}\neq\vec{0}$.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Накресліть два довільні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Побудуйте вектори:
а) $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$; в) $\vec{m}=2\vec{a}+3\vec{b}$; г) $\vec{n}=0,5\vec{a}-2\vec{b}$.

2°. Дано точки $A(-1;\ 4)$, $B(-3;\ 1)$, $C(5;\ 0)$, $D(3;\ -3)$. Доведіть, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

3°. Дано: $\vec{a}=(-1;\ 3)$, $\vec{b}=(-2;\ 4)$. Знайдіть $|\vec{c}|$, якщо $\vec{c}=5\vec{a}-2\vec{b}$.

4°. При якому значенні m вектори $\vec{a}=(m;\ 2)$ і $\vec{b}=(4;\ m+2)$:
а) перпендикулярні; б) колінеарні?

5•. Дано точки $A(3;\ 1)$, $B(5;\ -2)$, $C(-4;\ 5)$. Знайдіть координати точки D, якщо $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

6•. Знайдіть модуль вектора $\vec{c}=\vec{p}-2\vec{q}$, якщо $|\vec{p}|=5$, $|\vec{q}|=4$, $\left(\widehat{\vec{p};\ \vec{q}}\right)=60°$.

7•. $ABCD$ — прямокутник, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MD}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $M\in BC$ і $BM : MC = 1 : 2$.

8•. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(-7;\ -5)$, $B(-5;\ 1)$, $C(9;\ 3)$, $D(7;\ -3)$ — паралелограм, і знайдіть кут між його діагоналями.

9••. Знайдіть $|\vec{a}-\vec{b}|$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{a}+\vec{b}|=5$.

10••. Чи лежать точки M, P і K на одній прямій, якщо $M(-7;\ 8)$, $P(4;\ 1)$, $K(-40;\ 29)$?

> *У тих народів, які знають геометрію,*
> *навіть найпростіші речі мають якусь особливу красу.*
> *Ф. Прокопович*

Головне в розділі 2

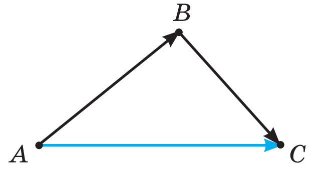
Векторні величини — ті, які визначаються не тільки числовими значеннями, а й напрямами. Значення векторних величин — **вектори.** Геометрично вектори (ненульові) зображуються **напрямленими відрізками.** Напрямлений відрізок має початок і кінець. Відстань між ними — **модуль** (або довжина) **вектора.**

Два вектори називають **колінеарними**, якщо відповідні їм напрямлені відрізки розміщені на одній прямій або на паралельних прямих. Колінеарні вектори бувають співнапрямленими або протилежно напрямленими. Два вектори **рівні**, якщо вони співнапрямлені і мають рівні модулі. Два вектори називають **протилежними**, якщо вони мають рівні модулі і протилежно напрямлені.

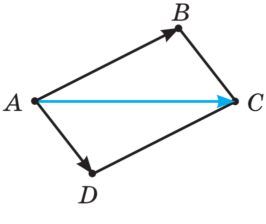
Координатами вектора з початком $A(x_1; y_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1$ і $y = y_2 - y_1$. Записують такий вектор у вигляді $\overrightarrow{AB} = (x; y)$, або $\vec{a} = (x; y)$, або $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Модуль вектора $\overrightarrow{AB} = (x; y)$ позначають символом $|\overrightarrow{AB}|$, він дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Сумою двох векторів $\vec{a} = (x_1; y_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2)$ називають вектор $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$. При додаванні векторів справджуються переставний і сполучний закони. Геометрично додавати вектори можна за правилом трикутника (мал. 126, *а*) або паралелограма (мал. 126, *б*).



а



б

Мал. 126

Завжди правильні векторні рівності

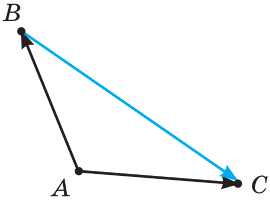
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Якщо $ABCD$ — паралелограм, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Різницею векторів $\vec{a} = (x_1; y_1)$ і $\vec{b} = (x_2; y_2)$ називають вектор $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$. Щоб відняти від одного вектора другий, треба до першого додати вектор, протилежний до другого, тобто $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Які б не були вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, завжди

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \text{ (мал. 127).}$$



Мал. 127

Добутком вектора $\vec{a}=(x;\ y)$ на число n називають вектор $n\vec{a}=(nx;\ ny)$. Завжди правильні рівності: $(n+m)\vec{a}=n\vec{a}+m\vec{a}$ і $n(\vec{a}+\vec{b})=n\vec{a}+n\vec{b}$.

Скалярним добутком двох ненульових векторів називають добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi.$$

Косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначають за формулою

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$ або $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

$\vec{a}=k\vec{b}$ — умова колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ — умова їх перпендикулярності.

У координатній формі:

Якщо $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

Ненульові вектори $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$ **перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.**

Вектори $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$ колінеарні тоді й тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні: $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$.

Якщо X — довільна точка, а M — середина відрізка AB або точка перетину медіан трикутника ABC, то відповідно

$$\overrightarrow{XM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}\right) \text{ або } \overrightarrow{XM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XC}\right).$$

Багатьом властивостям геометричних фігур відповідають ті чи інші векторні рівності.

1. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$ — точки A і B збігаються.
2. $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$ — прямі AB і CD паралельні.
3. $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$ — точки A, B, C лежать на одній прямій.
4. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$ — прямі AB і CD перпендикулярні.
5. $\overrightarrow{AM}=\frac{m}{n}\overrightarrow{MB}$, а числа m і n додатні — точка M ділить відрізок AB у відношенні $AM : MB = m : n$.
6. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$ — кут між прямими, на яких лежать вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює φ.

Саме математика передусім захищає нас від обману чуттів і вчить, що одна справа — як насправді побудовані предмети, що сприймаються чуттями, інша — якими вони здаються.

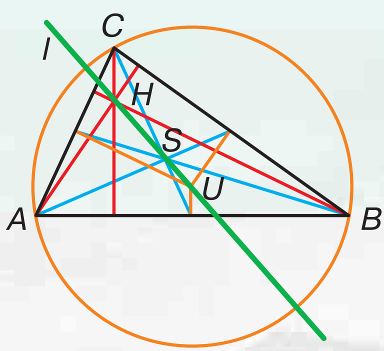
ЛЕОНАРД ЕЙЛЕР

(1707–1783)

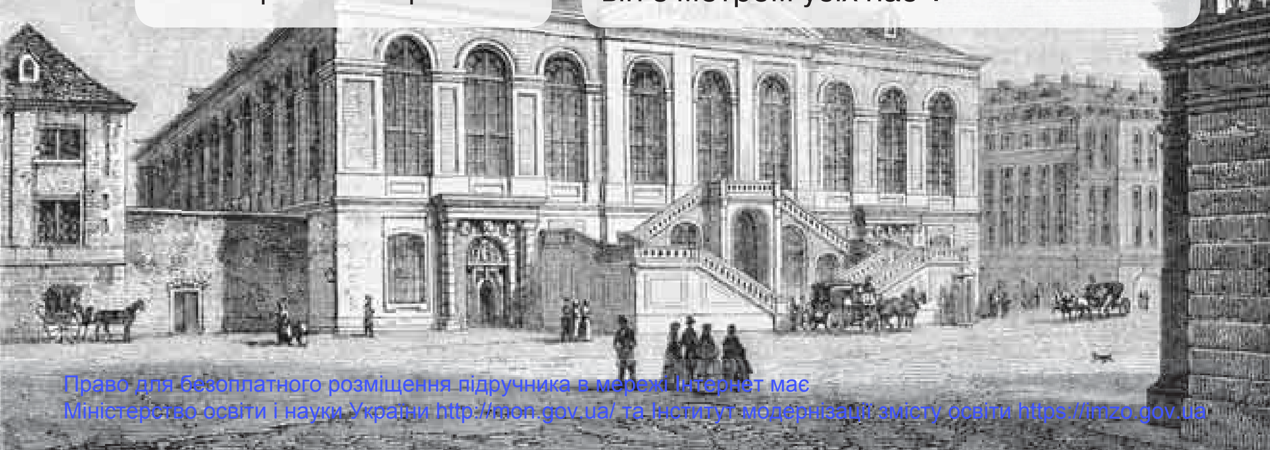
Видатний швейцарський, російський і німецький математик, фізик, астроном, інженер тощо. Один із найвидатніших математиків XVIII ст.

- У математиці його фундаментальні відкриття стосуються елементарної математики, тригонометрії, теорії чисел, математичного аналізу, диференціальної геометрії, топології.
- Розробив значну частину сучасної термінології.
- Майже в усіх галузях математики та її застосувань є терміни, пов'язані з його ім'ям.

Вплив Ейлера на математику описує висловлювання П. Лапласа: «Читайте Ейлера, читайте Ейлера, він є метром усіх нас».



Пряма Ейлера



Розділ 3 | Section 3

Розв’язування трикутників | Triangels solving

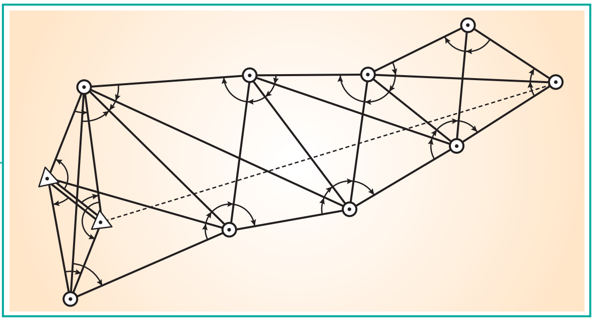
Розв’язати трикутник — це означає за кількома відомими елементами трикутника визначити інші його елементи. Прямокутні трикутники розв’язують, використовуючи синус, косинус і тангенс гострого кута, а довільні трикутники — за теоремами косинусів і синусів. Такі задачі здавна доводилося розв’язувати багатьом ученим, тому ще в античні часи було створено окрему математичну науку — *тригонометрію*. Даний розділ — скорочений виклад найважливіших відомостей тригонометрії.

НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЕКТ «Знайома і незнайома тригонометрія» | **EDUCATIONAL PROJECT “Familiar and Unfamiliar Trigonometry”**

Для чого вивчати тригонометрію?

Тригонометрія, насамперед, потрібна для того, щоб вимірювати відстані між об'єктами та розміри предметів там, куди важко або неможливо дістатися: в космосі, в океані, під землею тощо.

Геодезисти, визначаючи положення об'єктів на земній поверхні, використовують геодезичну сітку, метод тріангуляції та сучасні геодезичні прилади: електронний тахеометр та GPS-приймач.



Під землею встановлюють розміри родовища корисних копалин і підземних вод, будують тунелі для транспорту тощо. Перш ніж будувати шахту для видобування вугілля, потрібно знати розміри та кут нахилу пласта. Щоб їх визначити, роблять 3 свердловини у трьох різних місцях і з'ясовують, на якій глибині у кожному місці залягає пласт. На основі цих даних і спеціальних розрахунків, пов'язаних з тригонометричними функціями, встановлюють потрібні дані.

Розрахунки на основі тригонометричних функцій використовують у біології (рентгеноструктурний аналіз), медичній візуалізації (комп'ютерна томографія і УЗД).

А де ще використовують тригонометрію? Наведіть свої приклади.

§ 13 Теорема косинусів

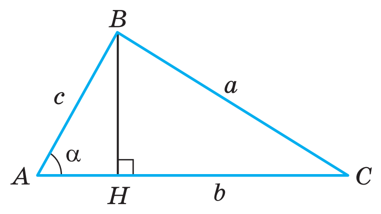
Щоб розв'язувати не тільки прямокутні, а й будь-які трикутники, треба знати теореми косинусів і синусів. Для кращого їх розуміння домовимося, що сторони трикутника — це їх довжини, а кути — їх градусні міри. Переважно позначатимемо сторони латинськими буквами a, b і c, а протилежні їм кути (при вершинах A, B, C) — грецькими літерами α, β і γ.

ТЕОРЕМА 7

(Косинусів). **Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними.**

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай ABC — довільний трикутник (мал. 128), $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ і $\angle A = \alpha$. Доведемо, що $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

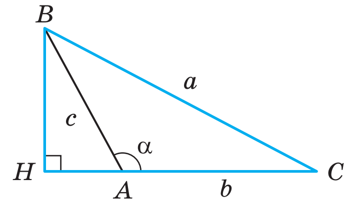


Мал. 128

Проведемо висоту BH даного трикутника і знайдемо квадрат сторони a за теоремою Піфагора з $\triangle BHC$.

1) Якщо $\alpha < 90°$, то $BH = c \sin \alpha$, $AH = c \cos \alpha$, $CH = AC - AH = b - c \cos \alpha$.

Тоді $a^2 = BH^2 + CH^2 = (c \sin \alpha)^2 + (b - c \cos \alpha)^2 = c^2 \sin^2 \alpha + b^2 - 2bc \cos \alpha + c^2 \cos^2 \alpha = c^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + b^2 - 2bc \cos \alpha = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha$. Випадок, коли $\angle C$ — тупий, розгляньте самостійно.



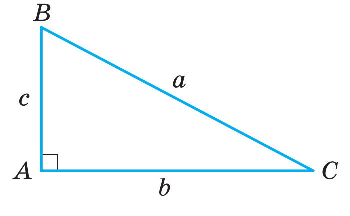
Мал. 129

2) Якщо $\alpha > 90°$ (мал. 129), то
$BH = c \sin (180° - \alpha) = c \sin \alpha$,
$AH = c \cos (180° - \alpha) = -c \cos \alpha$,
$HC = AC + AH = b + (-c \cos \alpha) = b - c \cos \alpha$.

Як і в першому випадку:

$a^2 = BH^2 + CH^2 = (c \sin \alpha)^2 + (b - c \cos \alpha)^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha$.

3) Якщо $\alpha = 90°$ (мал. 130), то $\triangle ABC$ прямокутний і $\cos \alpha = 0$. За теоремою Піфагора $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.



Мал. 130

Отже, яким би не був кут α трикутника ABC завжди

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}. \quad \square$$

Зверніть увагу!

Теорема Піфагора — окремий випадок теореми косинусів. За теоремою косинусів $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Якщо ж $\gamma = 90°$, то $\cos\gamma = 0$ і $c^2 = a^2 + b^2$.

З формули $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ випливає:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Ця формула дає можливість за даними сторонами трикутника обчислювати його кути. Взагалі теорема косинусів пов’язує чотири елементи трикутника: три сторони трикутника і кут. Тому за цією теоремою завжди можна знайти один із невідомих елементів, якщо відомі інші три.

Використовуючи теорему косинусів, доведемо таку теорему.

ТЕОРЕМА 8

(Властивість діагоналей паралелограма). **Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.**

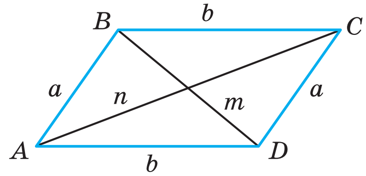
ДОВЕДЕННЯ.

Нехай сторони паралелограма a, b, a, b, а діагоналі — m і n (мал. 131). За теоремою косинусів з $\triangle ABD$ і $\triangle ABC$ відповідно маємо:

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos A,$$
$$n^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B.$$

Оскільки $\angle B = 180° - \angle A$, а косинуси таких кутів відрізняються тільки знаками, то $\cos B = -\cos A$. Тому $m^2 + n^2 = 2a^2 + 2b^2 - 2ab\cos A + 2ab\cos A = 2a^2 + 2b^2$.

А це й треба було довести. □



Мал. 131

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Використовуючи теорему косинусів, можна встановити вид трикутника (гострокутний, прямокутний чи тупокутний), не обчислюючи його кути. Відомо, що прямий чи тупий кут трикутника лежить проти найбільшої його сторони. Нехай у $\triangle ABC$ сторони a, b, c і найбільша з них — a. У цьому випадку кути B і C гострі, а кут A може бути гострим, прямим або тупим. Щоб це з’ясувати, скористаємося формулою $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Якщо $b^2 + c^2 > a^2$, то $\cos A > 0$, з чого випливає, що $\angle A$ — гострий. Якщо $b^2 + c^2 = a^2$, то $\cos A = 0$ і $\angle A$ — прямий. Якщо ж $b^2 + c^2 < a^2$, то $\cos A < 0$ і $\angle A$ буде тупим. Отже, якщо:

$b^2 + c^2 > a^2$, то $\angle A$ — гострий;
$b^2 + c^2 = a^2$, то $\angle A$ — прямий;
$b^2 + c^2 < a^2$, то $\angle A$ — тупий.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте теорему косинусів.
2. Покажіть, що теорема Піфагора — наслідок теореми косинусів.
3. Як знайти кути трикутника за відомими його сторонами?
4. Чому дорівнює сума квадратів діагоналей паралелограма?

Виконаємо разом

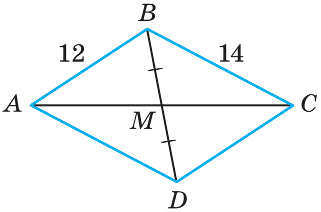
1 Знайдіть косинус найменшого кута трикутника, сторони якого 3, 5 і 6. Вкажіть наближене значення міри цього кута.

- Найменший кут α лежить проти найменшої сторони. За теоремою косинусів $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ маємо:
$3^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos\alpha$, звідси

$$60\cos\alpha = 5^2 + 6^2 - 3^2 = 52,\quad \cos\alpha = \frac{52}{60} = \frac{13}{15} \approx 0,8667.$$

За таблицею на форзаці знаходимо: $\alpha \approx 30°$.

2 Знайдіть довжину медіани трикутника зі сторонами 12 см, 14 см і 22 см, проведену до найбільшої сторони.



Мал. 132

- Нехай у $\triangle ABC$ $AB = 12$ см, $BC = 14$ см, $AC = 22$ см, BM — медіана (мал. 132). Продовжимо медіану за точку M на відстань $MD = BM$ і сполучимо точку D з точками A і C. Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, бо його діагоналі в точці перетину діляться навпіл.
Тоді $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$, тобто $22^2 + BD^2 = 2(12^2 + 14^2)$, маємо: $484 + BD^2 = 2(144 + 196)$, звідки $BD^2 = 2 \cdot 340 - 484 = 196$.
Отже, $BD = 14$ см, тоді $BM = 7$ см.

Задачі і вправи

Виконайте усно

412. Якою буде рівність $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, якщо $\alpha = 90°$?

413. Чому дорівнює кут β в трикутнику ABC, якщо: а) $b^2 = a^2 + c^2$; б) $a = b = c$?

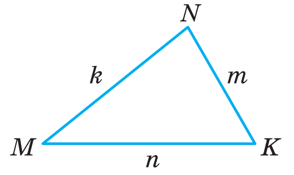
414. Дві сторони трикутника сталі, а кут між ними збільшується. Доведіть, що при цьому третя сторона збільшується.

415. Користуючись малюнком 133, виразіть за теоремою косинусів кожну сторону трикутника MNK.

416. Виразіть косинус кожного кута трикутника MNK (мал. 133).

417. Знайдіть суму квадратів діагоналей ромба зі стороною a.

418. Знайдіть суму квадратів діагоналей прямокутника зі сторонами a і b.



Мал. 133

А

419. Знайдіть невідому сторону трикутника ABC, якщо:
а) $AB = 5$ см, $AC = 8$ см, $\angle A = 60°$; б) $AB = 4$ см, $BC = 10$ см, $\angle B = 120°$.

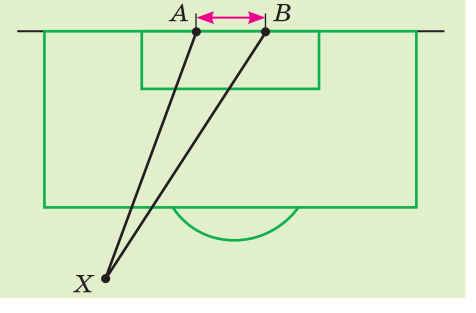
420. Знайдіть невідому сторону трикутника MNK, якщо:
а) $MN = 4$ см, $NK = 2$ см, $\angle N = 60°$;
б) $MN = 3$ см, $MK = 2\sqrt{2}$ см, $\angle M = 135°$;
в) $NK = 2$ см, $MK = 2\sqrt{3}$ см, $\angle K = 30°$;
г) $MK = 7$ см, $MN = 8$ см, $\angle M = 120°$.

421. Знайдіть $\angle B$ трикутника ABC, якщо:
а) $AB = 5$ дм, $BC = 8$ дм, $AC = 7$ дм;
б) $AB = 8$ км, $BC = 7$ км, $AC = 13$ км.

422. Знайдіть косинуси кутів трикутника зі сторонами:
а) 5 см, 6 см і 7 см; б) 2 см, 4 см і 5 см.

423. Футбольні ворота AB мають ширину 8 ярдів (мал. 134). Гравець X забив гол, коли знаходився на відстані 25 ярдів від однієї стійки воріт і 28 ярдів від іншої. Під яким кутом гравець бачить ворота з цього місця?

424. Гострокутним чи тупокутним є трикутник зі сторонами:
а) 3 см, 5 см і 7 см;
б) 5 см, 7 см і 8 см?



Мал. 134

425. Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 14 см і 16 см. Знайдіть середній за мірою кут.

426. Знайдіть найбільший кут трикутника зі сторонами 6 см, 10 см і 14 см.

427. Знайдіть діагоналі паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 7 см і $3\sqrt{2}$ см, а гострий кут 45°.

428. Діагоналі паралелограма дорівнюють $8\sqrt{3}$ см і 16 см, а кут між ними 30°. Знайдіть сторони паралелограма.

429. Сторони паралелограма дорівнюють 13 см і 15 см, а одна з діагоналей дорівнює 14 см. Знайдіть довжину другої діагоналі.

430. Діагоналі паралелограма дорівнюють 7 см і 11 см, а його периметр 26 см. Знайдіть сторони паралелограма.

431. Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 7 см, а діагоналі пропорційні числам 11 і 7. Знайдіть довжини діагоналей.

432. Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 12 см і 13 см. Знайдіть довжину медіани, проведеної до найбільшої сторони.

433. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 8 см, а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює $\sqrt{14}$ см. Знайдіть третю сторону трикутника.

Б

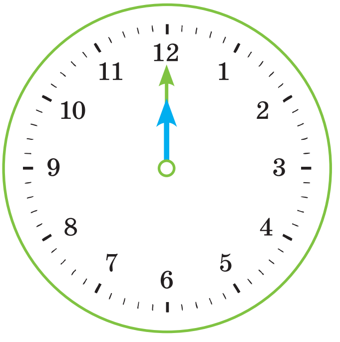
434. У $\triangle ABC$ $AB = 6$ см, $AC = 14$ см, $\angle B = 120°$. Знайдіть BC.

435. Сторони AC і BC трикутника ABC відповідно дорівнюють 9 см і 21 см, а $\angle A = 60°$. Знайдіть AB.

436. Дві сторони трикутника пропорційні числам 3 і 8 та утворюють кут 60°. Знайдіть периметр трикутника, якщо третя сторона дорівнює 35 см.

437. Сума двох сторін трикутника дорівнює 32 см, а кут між ними — 120°. Знайдіть ці сторони, якщо третя сторона дорівнює 28 см.

438. Довжина хвилинної стрілки годинника дорівнює 6 см, а годинної — 5,2 см. Годинник показує полудень (мал. 135). Через яку найменшу кількість хвилин відстань між кінцями стрілок дорівнюватиме 3,2 см? А 11,2 см?



Мал. 135

439. На малюнку 135 зображено непрацюючий годинник, який показує полудень. Довжина хвилинної стрілки цього годинника дорівнює 20 см, а годинної — 17 см. Дитина, граючись, повертає лише хвилинну стрілку. Установіть відповідність між кількістю хвилин (1–4), яку показує за цих умов хвилинна стрілка, і відстанню між кінцями стрілок годинника (А–Д).

1	10 хв	**А**	≈ 23 см
2	15 хв	**Б**	≈ 19 см
3	25 хв	**В**	≈ 36 см
4	7,5 хв	**Г**	≈ 26 см
		Д	≈ 14 см

440. Один із кутів рівнобедреного трикутника з основою $2\sqrt{21}$ см дорівнює 120°. Знайдіть медіани трикутника.

441. BM — медіана трикутника ABC. Знайдіть AB, якщо AC = 16 см, BC = 13 см, $\angle BMC = 120°$.

442. Медіана, проведена до сторони трикутника завдовжки 32 см, дорівнює 14 см і утворює з цією стороною кут 60°. Знайдіть інші сторони трикутника.

443. У трикутнику медіана і сторона, до якої вона проведена, дорівнюють відповідно 10 см і 30 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 64 см.

444. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 10 см, а медіана, проведена до третьої сторони, дорівнює $\sqrt{19}$ см. Знайдіть:
а) третю сторону трикутника;
б) найбільший кут трикутника.

445. Сторони трикутника — a, b і c. Доведіть, що медіана, проведена до сторони a, дорівнює $m = \frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right) - a^2}$.

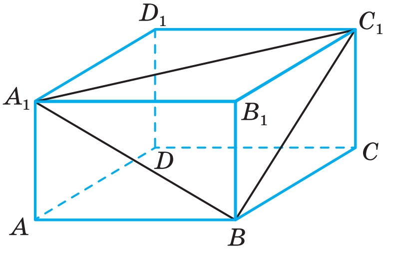
446. У паралелограмі $ABCD$ AD = 8 см, $\angle A = 60°$, а висота $BH = 2\sqrt{3}$. Знайдіть діагоналі паралелограма.

447. Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 5 см, а синус кута між ними дорівнює 0,6. Знайдіть третю сторону трикутника. Скільки розв'язків має задача?

448. У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) AD = 11 см, BC = 3 см, AC = 6 см, BD = 10 см. Знайдіть:
а) кут між діагоналями трапеції;
б) косинуси кутів, які утворюють діагоналі з основами трапеції.

449. ***Відкрита задача.*** Вийшовши з автобуса, Тетяна і Михайло поспішили додому. Кожен з них рухався прямолінійно, але під кутом один до одного: Тетяна зі швидкістю 6 км/год, а Михайло зі швидкістю 8 км/год. Знайдіть відстань між їх будинками, якщо **...** .

450. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 12$, $BC = 18$, $BB_1 = 6$. Знайдіть косинус найбільшого кута трикутника A_1BC_1 (мал. 136).



Мал. 136

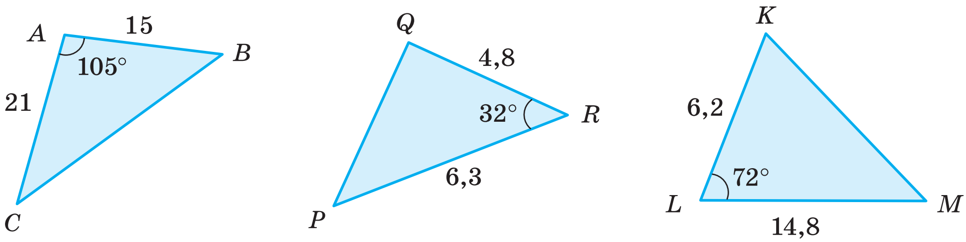
451. Доведіть, що в паралелограмі проти більшого кута лежить більша діагональ. Чи правильне обернене твердження?

452. Дві сторони трикутника дорівнюють a і b, а кут між ними α. Знайдіть довжину бісектриси, проведеної з вершини цього кута.

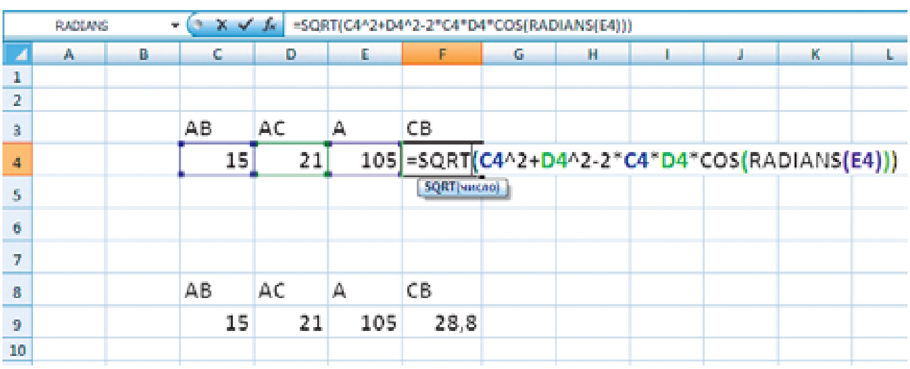
453. BL — бісектриса трикутника ABC. Знайдіть косинус $\angle ABL$, якщо $AB = a$, $BC = b$, $BL = l$.

Практичне завдання

454. Знайдіть невідомі сторони і кути трикутників, зображених на малюнку 137, використовуючи програму Excel і зразок, поданий на малюнку 138.



Мал. 137



Мал. 138

Задачі для повторення

455. Обчисліть:

а) $2\sin 120° + \cos 90° \cdot \sin 135° - \mathrm{tg}\ 60°$;

б) $\cos 120° - \mathrm{ctg}\ 60° + \sin 90° \cos 135°$.

456. Спростіть вираз:

а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2$;

б) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 1$.

457. Дано вектори $\vec{a} = (1; -3)$ і $\vec{b} = (7; 2)$. Знайдіть скалярний добуток векторів:

а) $(\vec{a} + \vec{b})$ і $(\vec{a} - \vec{b})$;

б) $(2\vec{a} - \vec{b})(\vec{b} + 3\vec{a})$.

458. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника зі сторонами 25 см, 25 см і 14 см.

§ 14 Теорема синусів

ТЕОРЕМА 9

Діаметр кола, описаного навколо трикутника, дорівнює відношенню сторони трикутника до синуса протилежного кута.

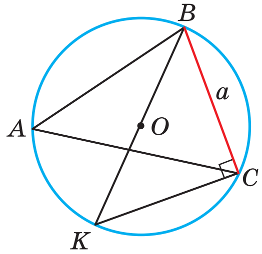
ДОВЕДЕННЯ.

1) Нехай дано гострокутний трикутник ABC, у якого відомі сторона $BC = a$ і протилежний їй кут A (мал. 139). Проведемо діаметр BK кола, описаного навколо трикутника, і відрізок KC.

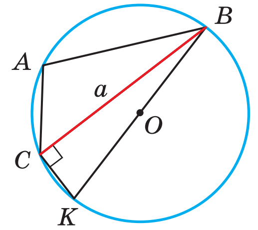
Кут BCK — прямий, бо вписаний і спирається на діаметр; кути K і A — рівні, бо вписані і спираються на одну й ту саму дугу BC. Трикутник BCK прямокутний з гіпотенузою $BK = 2R$. Тому $BC : BK = \sin K$, звідки $BC = 2R \sin K = 2R \sin A$, тобто $a = 2R \sin A$.

2) Якщо кут A тупий (мал. 140), то $\angle K = 180° - \angle A$. Синуси таких двох кутів рівні: $\sin(180° - \angle A) = \sin A$. Тому і в цьому випадку

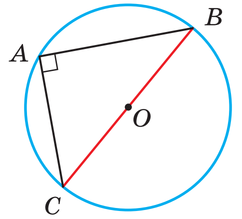
$$BC = BK \sin K = BK \sin(180° - \angle A) = BK \sin A,\ \ a = 2R \sin A.$$



Мал. 139



Мал. 140



Мал. 141

3) Якщо кут A прямий, то він спирається на діаметр (мал. 141), тобто $a = 2R = 2R \sin A$, бо синус прямого кута дорівнює 1.

Отже, завжди $a = 2R \sin A$, звідки $2R = \dfrac{a}{\sin A}$. Це й треба було довести. □

Зверніть увагу!

Використовуючи цю теорему, можна знаходити радіус кола, описаного навколо довільного трикутника, за формулою $R = \dfrac{a}{2\sin A}$.

ТЕОРЕМА 10

(Синусів). **Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.**

ДОВЕДЕННЯ.

З попередньої теореми випливає, що

$$\frac{a}{\sin A}=2R,\quad \frac{b}{\sin B}=2R,\quad \frac{c}{\sin C}=2R.$$

Отже,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

А це й означає, що сторони трикутника a, b, c пропорційні синусам протилежних кутів A, B і C. □

Теорему синусів використовують для знаходження невідомих сторін трикутника за відомою стороною і двома кутами, а також для знаходження кутів трикутника, якщо відомі дві сторони і кут, який лежить проти однієї з них.

***Приклад*.** Відома сторона трикутника і два кути: a = 27,3 см, $\angle B=43°$, $\angle C=75°$. Знайдіть дві інші його сторони.

***Розв'язання*.** $\angle A=180°-43°-75°=62°$. $\dfrac{27,3}{\sin 62°}=\dfrac{b}{\sin 43°}=\dfrac{c}{\sin 75°}$, звідки

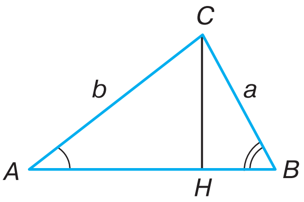
$$b=\frac{27,3\cdot\sin 43°}{\sin 62°}\approx 21,1,\quad c=\frac{27,3\cdot\sin 75°}{\sin 62°}\approx 29,9.$$

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Теорему синусів можна довести інакше. Наприклад, виразити висоту CH трикутника ABC двома різними способами (мал. 142):

$CH=b\sin A$ і $CH=a\sin B$, звідки

$b\sin A=a\sin B$, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ і т. д.



Мал. 142

Ті, кому відома формула площі трикутника $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C$, можуть визначити площу того самого трикутника трьома різними способами:

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B,$$

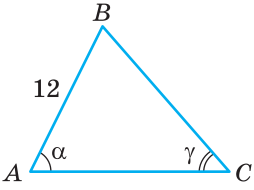
і кожну частину рівності поділити на 0,5abc. Спробуйте самостійно закінчити кожне з цих доведень.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте теорему синусів.
2. Які задачі можна розв'язувати за теоремою синусів?
3. Чому дорівнює відношення сторони трикутника до синуса протилежного кута?
4. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо трикутника?
5. Як знайти сторону трикутника, знаючи радіус описаного кола і протилежний кут?

Виконаємо разом

1 Знайдіть сторону BC трикутника ABC, якщо $AB = 12$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$ (мал. 143).



Мал. 143

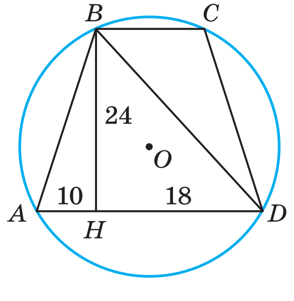
- За теоремою синусів для $\triangle ABC$ маємо:

$$\frac{AB}{\sin\gamma} = \frac{BC}{\sin\alpha}, \text{ звідки } BC = \frac{12\sin\alpha}{\sin\gamma}.$$

2 Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобічної трапеції $ABCD$, висота якої BH дорівнює 24 см і ділить більшу основу на відрізки 10 см і 18 см.

- Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція, у якої $BH = 24$ см, $AH = 10$ см і $HD = 18$ см (мал. 144). Коло, описане навколо трапеції $ABCD$, описане й навколо $\triangle ABD$. Тому знайдемо радіус кола, описаного навколо трикутника. Для цього скористаємося формулою:

$$R = \frac{BD}{2\sin A}.$$



Мал. 144

За теоремою Піфагора з $\triangle ABH$:

$AB = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$ (см).

Отже, $\sin A = \frac{BH}{AB} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$.

За теоремою Піфагора з $\triangle BHD$: $BD = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30$ (см).

Тоді $R = \frac{BD}{2\sin\alpha} = \frac{30 \cdot 13}{2 \cdot 12} = \frac{65}{4} = 16{,}25$ (см).

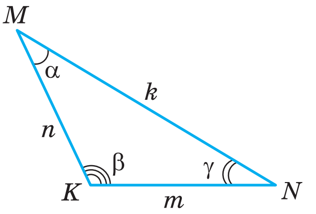
Задачі і вправи

Виконайте усно

459. Розгляньте малюнок 145. Замініть * виразом так, щоб утворилась правильна рівність:

а) $\frac{m}{\sin\alpha}=\frac{n}{*}$; в) $\frac{*}{\sin\gamma}=\frac{m}{\sin\alpha}$;

б) $\frac{k}{\sin\beta}=\frac{*}{\sin\alpha}$; г) $\frac{m}{*}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$.



Мал. 145

460. Користуючись малюнком 145, вкажіть хибну рівність:

а) $\frac{n}{\sin\gamma}=\frac{m}{\sin\alpha}$; в) $\frac{n}{\sin\gamma}=\frac{k}{\sin\alpha}$; ґ) $\frac{\sin\gamma}{k}=\frac{\sin\beta}{n}$;

б) $\frac{k}{\sin\gamma}=\frac{m}{\sin\alpha}$; г) $\frac{\sin\alpha}{m}=\frac{\sin\beta}{k}$; д) $\frac{m}{n}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$.

461. Чи існує трикутник, у якого:

а) $\sin A = 0{,}4$; $\sin B = 0{,}8$; $\sin C = 0{,}3$; б) $\sin A=\frac{1}{2}$; $\sin B=\frac{1}{3}$; $\sin C=\frac{1}{4}$;

в) $\sin A = 0{,}4$; $\sin B = 0{,}6$; $\sin C = 0{,}2$?

462. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника зі стороною a?

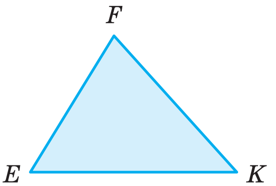
463. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою a і кутом при вершині 120°?

464. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобічної трапеції з діагоналлю 10 см і гострим кутом 45°.

А

465. Виразіть за теоремою синусів кожну сторону трикутника EFK (мал. 146).

466. Користуючись малюнком 146 і теоремою синусів, виразіть синуси кутів E, F і K трикутника EFK.



Мал. 146

467. Знайдіть сторону AB трикутника ABC, якщо:

а) BC = 8 см, $\angle A=30°$, $\angle C=45°$;

б) AC = 9 см, $\angle B=60°$, $\angle C=45°$;

в) BC = 16 см, $\angle A=45°$, $\angle B=105°$.

468. Знайдіть сторону AC трикутника ABC, якщо:

а) AB = 20 см, $\angle B=30°$, $\angle C=45°$;

б) BC = 15 см, $\angle A=60°$, $\angle B=45°$;

в) AB = 18 см, $\angle A=105°$, $\angle C=30°$.

469. Знайдіть гострий кут C трикутника ABC, якщо:

а) $AB = 6\sqrt{2}$ см, BC = 6 см, $\angle A = 30°$;

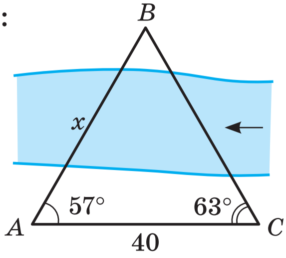
б) AC = 18 см, $AB = 9\sqrt{6}$ см, $\angle B = 45°$;

в) AC = 9 см, $AB = 3\sqrt{6}$ см, $\angle B = 120°$.

470. Знайдіть гострий кут A трикутника ABC, якщо:

а) AB = 6 см, $BC = 3\sqrt{6}$ см, $\angle C = 45°$;

б) AC = 12 см, $BC = 4\sqrt{3}$ см, $\angle B = 60°$.

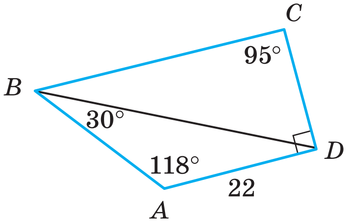


Мал. 147

471. Щоб визначити відстань від точки A до недоступної точки B (мал. 147), виміряли відстань AC = 40 м і кути: $\angle BAC = 57°$, $\angle ACB = 63°$. Знайдіть відстань AB.

472. Діагональ паралелограма дорівнює d і утворює зі сторонами кути α і β. Знайдіть сторони паралелограма.

473. Використовуючи дані малюнка 148, установіть відповідність між відрізками (1–4), зображеними на цьому малюнку, і їхніми довжинами (А–Д).



Мал. 148

1	AB	**А**	≈ 33
2	BD	**Б**	≈ 18
3	CD	**В**	≈ 39
4	BC	**Г**	≈ 23
		Д	≈ 41

474. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 6 см, а кут при вершині дорівнює 150°. Знайдіть радіус описаного кола.

475. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см, а кут при основі дорівнює 30°. Знайдіть радіус описаного кола.

476. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобічної трапеції з діагоналлю 10 см і гострим кутом 45°.

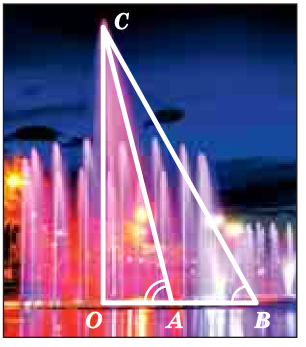
Б

477. Знайдіть $\angle A$ і $\angle B$ трикутника ABC, якщо AB = 12 см, $BC = 6\sqrt{6}$ см, $\angle C = 45°$. Скільки розв'язків має задача?

478. У трикутнику MNK $MN = 3$ см, $MK = \sqrt{3}$ см, $\angle N = 30°$. Знайдіть невідомі кути. Скільки розв'язків має задача?

479. Чи існує трикутник ABC, у якого AB = 15 см, BC = 8 см, $\sin\angle A = 0{,}6$?

480. За даними малюнка 149 обчисліть висоту струменя води фонтану CO, якщо $AB = 0{,}5$ м, $\angle A = 87°$, $\angle B = 84°$.



Мал. 149

481. На катеті BC трикутника ABC $(\angle C = 90^\circ)$ взято точку K так, що $BK = a$, $\angle KAB = \alpha$, $\angle AKB = \beta$. Знайдіть сторони трикутника ABC.

482. На продовженні катета AC за точку A у трикутнику ABC $(\angle C = 90^\circ)$ взято точку M так, що $AM = m$, $\angle CAB = \alpha$, $\angle CMB = \beta$. Знайдіть сторони трикутника ABC.

483. Діагональ рівнобічної трапеції дорівнює d й утворює з більшою основою кут α, а з бічною стороною — кут β. Знайдіть сторони трапеції.

484. Кути трикутника дорівнюють α, β і γ. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює P.

485. У рівнобедреному трикутнику ABC $(AB = BC)$ через середину висоти BH проведено пряму, яка перетинає сторони AB і BC у точках M і N відповідно. Знайдіть BH, якщо $MN = m$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle BMN = \beta$.

486. Основи трапеції дорівнюють a і b $(a > b)$, а гострі кути при основі — α і β. Знайдіть бічні сторони трапеції.

487. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює b, а кут при вершині — α. Знайдіть радіус описаного кола.

488. Кути трикутника дорівнюють α і β. Знайдіть висоту, проведену з вершини третього кута, якщо радіус описаного кола дорівнює R.

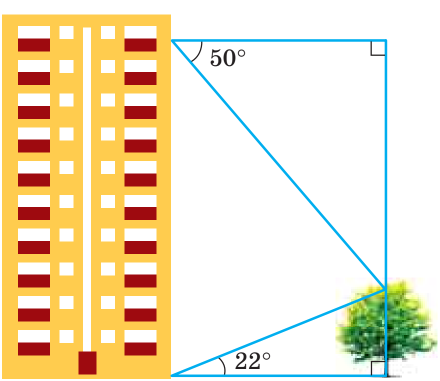
489. Знайдіть кути трикутника, дві сторони якого дорівнюють 6 см і $2\sqrt{6}$ см, якщо радіус описаного кола дорівнює $2\sqrt{3}$. Скільки розв'язків має задача?

490. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції, основи якої дорівнюють 5 см і 13 см, а висота — 12 см.

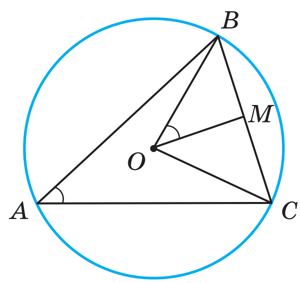
491. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції, бічна сторона якої дорівнює 15 см, а радіус вписаного кола — 6 см.

492. Щоб дістатися поглядом верхівки дерева від підніжжя будинку, потрібно дивитися вгору під кутом 22°. А щоб побачити верхівку дерева з балкона, що розташований на відстані 50 метрів над поверхнею землі, слід дивитися вниз під кутом 50° (мал. 150). Знайдіть: а) висоту дерева; б) відстань від дерева до будинку.

493. Доведіть теорему 9, користуючись малюнком 151.



Мал. 150



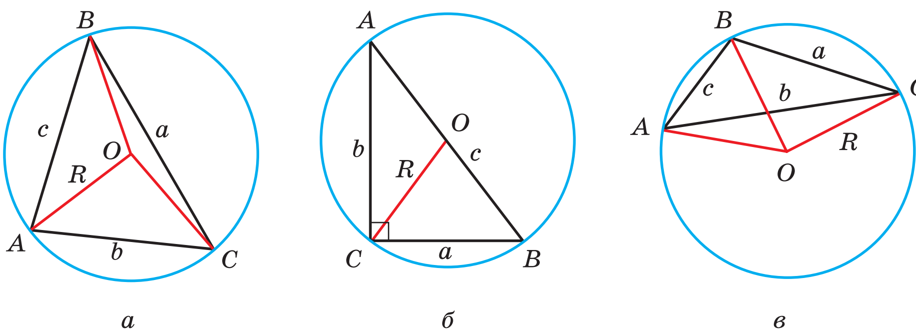
Мал. 151

Практичне завдання

494. Літак має летіти на схід від одного міста до іншого зі швидкістю 400 км/год. Однак постійно дме північно-східний вітер зі швидкістю 50 км/год. У якому напрямі повинен рухатися літак і з якою швидкістю, щоб вчасно прибути у пункт призначення?

495. На малюнку 152 зображено три кола, у кожне з яких вписано трикутник. Виміряйте довжини сторін і міри кутів кожного трикутника. Перевірте правильність твердження: радіус кола, описаного навколо будь-якого трикутника, виражається формулою:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}.$$



Мал. 150

Задачі для повторення

496. Знайдіть:

а) косинус найбільшого кута трикутника зі сторонами 3 см, 5 см і 6 см. Вкажіть вид даного трикутника;

б) сторону BC трикутника ABC, якщо $AB = 10$ см, $AC = 14$ см, $\angle B = 60°$. Встановіть вид даного трикутника.

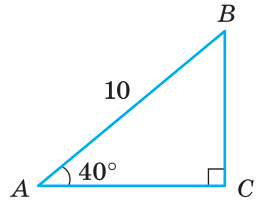
497. ***Задача Брахмагупти.*** Добуток довжин двох сторін трикутника, поділений на довжину перпендикуляра, опущеного на третю сторону з протилежної вершини трикутника, дорівнює довжині діаметра описаного кола. Доведіть.

498. Знайдіть висоти паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 6 см і 9 см та утворюють кут 30°.

§ 15 Розв’язування трикутників

Розв’язати трикутник — це означає знайти невідомі його сторони і кути за кількома відомими сторонами і кутами. Пригадаємо, як розв’язувати прямокутні трикутники.

Задача. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10, а один із гострих кутів — 40°. Знайдіть інші сторони і кути трикутника.



Мал. 153

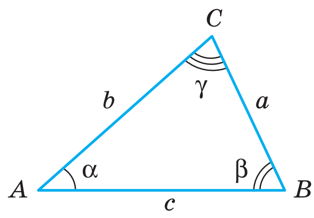
Розв’язання. Нехай у $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 40°$, $AB = 10$ (мал. 153).

Тоді $\angle B = 90° - 40° = 50°$; $BC = 10\sin 40° \approx 10 \cdot 0{,}643 \approx$ $\approx 6{,}43$; $AC = 10\cos 40° \approx 10 \cdot 0{,}766 \approx 7{,}66$.

Відповідь. $\angle B = 50°$, $BC \approx 6{,}43$, $AC \approx 7{,}66$.

Теореми синусів і косинусів дають можливість розв’язати будь-який трикутник (мал. 154) за трьома його даними елементами (крім трьох кутів). Існують чотири види основних задач на розв’язування трикутників:

1) за двома сторонами і кутом між ними;
2) за стороною і двома прилеглими кутами;
3) за трьома сторонами;
4) за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них.



Мал. 154

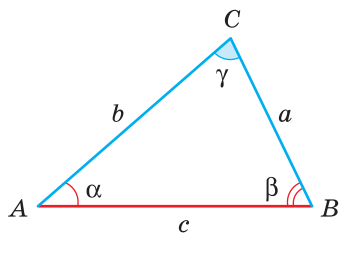
Розглянемо кожен з цих випадків.

1. Якщо дано дві сторони і кут між ними, то за теоремою косинусів знаходять третю сторону, а за теоремою синусів — невідомі кути.

Дано: a, b, γ. Потрібно знайти c, α і β (мал. 155).

Розв’язання. Сторону c знаходимо за теоремою косинусів: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Один з невідомих кутів (не той, що лежить проти більшої сторони) зручніше визначати за теоремою синусів:



Мал. 155

$$\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c}, \text{ тоді } \beta = 180° - (\alpha + \gamma).$$

Якщо ж потрібно першим визначити найбільший кут трикутника, то краще користуватися не теоремою синусів, а теоремою косинусів, бо знак косинуса відразу вкаже на те, тупий кут чи гострий, а за значенням синуса цього зробити не можна.

2. Якщо дано сторону і прилеглі до неї кути, то спочатку знаходять третій кут трикутника, а потім за теоремою синусів — сторони.

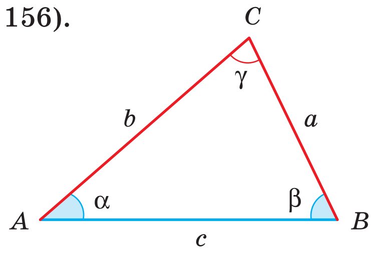
Дано: c, α і β. Потрібно знайти γ, a, b (мал. 156).

Розв'язання. $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.

Сторони знаходимо за теоремою синусів:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$, звідки $a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$.

Аналогічно $b = \frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$.

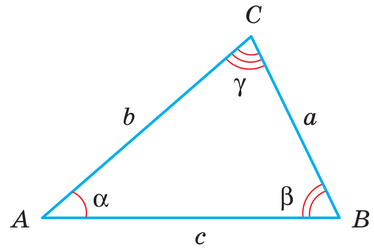


Мал. 156

3. Якщо дано три сторони, то один із кутів (краще найбільший) знаходять за теоремою косинусів, другий — за теоремою синусів або теоремою косинусів.

Дано: a, b, c ($a \le b \le c$). Потрібно знайти α, β і γ (мал. 157).

Розв'язання. Один із кутів визначаємо за теоремою косинусів (краще першим визначати найбільший кут, щоб знати, тупий він чи гострий):



Мал. 157

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Другий із кутів визначаємо за теоремою синусів або косинусів:

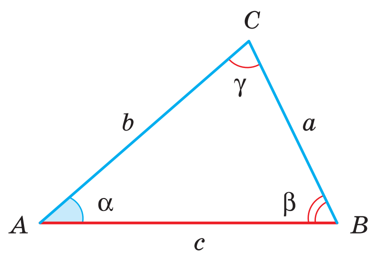
$$\sin\alpha = \frac{a\sin\gamma}{c} \text{ або } \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Тоді $\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$.

4. Якщо дано дві сторони і кут навпроти однієї з них, то за теоремою синусів знаходять спочатку кут, протилежний другій даній стороні. Таких кутів може бути два (якщо один α, то другий $180° - \alpha$).

Дано: a, b, α. Потрібно знайти c, β і γ (мал. 158).

Розв'язання. За теоремою синусів знаходимо кут β:



Мал. 158

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}.$$

Потрібно пам'ятати, що даному значенню $\sin\beta$ будуть відповідати два кути: β і $180° - \beta$. Тому задача може мати два розв'язки, і потрібно розглядати два випадки: коли кут β — гострий і коли він тупий.

Далі знаходимо кут γ: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$.

За теоремою синусів знаходимо c: $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Іноді розв'язування трикутників розуміють ширше: серед даних можуть бути не тільки сторони і кути трикутника, а й деякі інші його елементи — медіани, бісектриси, висоти тощо.

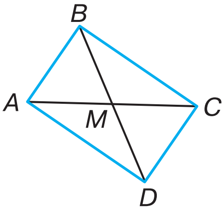
Задача. Дві сторони і медіана трикутника, які виходять з однієї вершини, дорівнюють відповідно 10, 24 і 13. Знайдіть третю сторону і кути трикутника.

Розв'язання. Нехай BM — медіана трикутника ABC (мал. 159). Відкладемо на прямій BM відрізок MD так, щоб $MD = BM$, і сполучимо точку D з точками C і A. Оскільки $AM = MC$ (за умовою) і $BM = MD$ (за побудовою), то $ABCD$ — паралелограм. Тоді за властивістю діагоналей паралелограма $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$. Можемо знайти AC.

$AC^2 = 2(10^2 + 24^2) - 26^2 = 2 \cdot 676 - 676 = 676$, звідки $AC = 26$.

За теоремою косинусів з трикутника ABC:

$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC \cdot AB \cos B$, звідки



Мал. 159

$$\cos B = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2BC \cdot AB} = \frac{24^2 + 10^2 - 26^2}{2 \cdot 24 \cdot 10} = 0.\text{ Отже, } \angle B = 90^\circ.$$

Тоді $\cos A = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{10}{26} \approx 0{,}385$. $\angle A \approx 68^\circ$. $\angle C \approx 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ$.

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте теорему синусів.
2. Сформулюйте теорему косинусів.
3. Як розв'язують трикутники за двома сторонами і кутом між ними?
4. Як розв'язують трикутники за стороною і двома кутами?
5. Як розв'язують трикутники за трьома сторонами?
6. Як розв'язують трикутники за двома сторонами і кутом проти однієї з них? Скільки розв'язків може мати ця задача?

Виконаємо разом

1 Розв'яжіть трикутник за двома даними сторонами $a = 39{,}7$, $b = 73{,}2$ і кутом між ними $\gamma = 46{,}5^\circ$ (мал. 160).

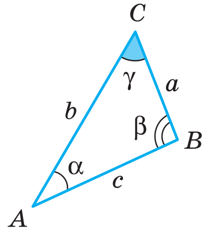
- За теоремою косинусів

$$c = \sqrt{39{,}7^2 + 73{,}2^2 - 2 \cdot 39{,}7 \cdot 73{,}2 \cdot \cos 46{,}5^\circ} \approx 54{,}2.$$

За теоремою синусів $\dfrac{39{,}7}{\sin\alpha} = \dfrac{54{,}2}{\sin 46{,}5^\circ}$, звідки

$$\sin\alpha = \frac{39{,}7 \cdot \sin 46{,}5^\circ}{54{,}2} \approx 0{,}531.$$

Тоді $\alpha \approx 32{,}1^\circ$, $\beta = 180^\circ - 46{,}5^\circ - 32{,}1^\circ \approx 101{,}4^\circ$.
Отже, $c \approx 54{,}2$, $\alpha \approx 32{,}1^\circ$, $\beta \approx 101{,}4^\circ$.



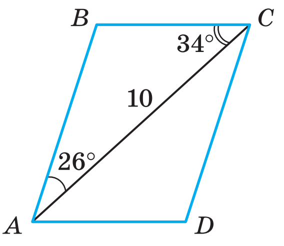
Мал. 160

2 Діагональ паралелограма дорівнює 10 і утворює зі сторонами кути 26° і 34°. Знайдіть сторони паралелограма.

Нехай $ABCD$ — паралелограм (мал. 161), у якого $AC = 10$, $\angle BAC = 26°$, $\angle BCA = 34°$.
Тоді $\angle B = 180° - (26° + 34°) = 120°$. За теоремою синусів з $\triangle ABC$ знайдемо сторони AB і BC.

$$\frac{AB}{\sin 34°} = \frac{AC}{\sin 120°}.$$

Звідси $AB = \dfrac{AC \cdot \sin 34°}{\sin 120°} = \dfrac{10 \cdot 0,559}{0,866} \approx 6,5.$



Мал. 161

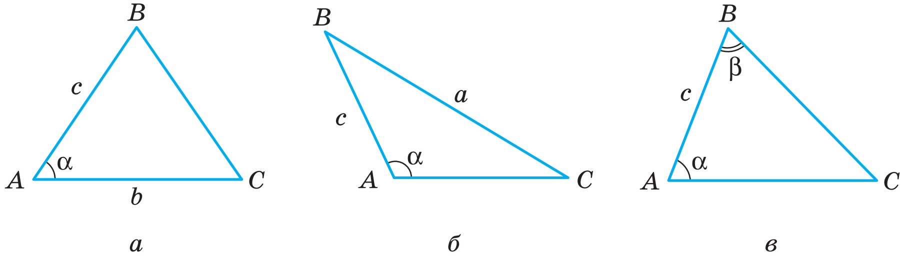
$\dfrac{BC}{\sin 26°} = \dfrac{AC}{\sin 120°}$. Звідси $BC = \dfrac{AC \cdot \sin 26°}{\sin 120°} = \dfrac{10 \cdot 0,438}{0,866} \approx 5,1.$

Отже, $AB = 6,5$, $BC = 5,1$.

Задачі і вправи

Виконайте усно

499. Користуючись малюнком 162, розкажіть, як знайти невідомі елементи трикутника для кожного випадку: а), б) і в).



Мал. 162

500. Як знайти кути ромба, сторона якого дорівнює a, а менша діагональ d?

А

501. Розв'яжіть трикутник за двома даними сторонами і кутом між ними:
а) $b = 22$, $c = 26$, $\alpha = 78°$;
б) $a = 10$, $b = 5$, $\gamma = 102°$;
в) $a = 0,8$, $c = 0,6$, $\beta = 50°$;
г) $a = 49,3$, $b = 26,4$, $\gamma = 47,3°$.

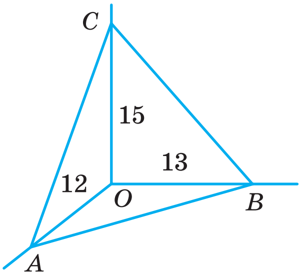
502. Розв'яжіть трикутник за даною стороною і прилеглими кутами:
а) $a = 32$, $\beta = 36°$, $\gamma = 42°$;
б) $b = 20$, $\alpha = 31°$, $\gamma = 124°$;
в) $c = 17,4$, $\alpha = 64°$, $\beta = 44°$;
г) $a = 7,3$, $\beta = 28°$, $\gamma = 109°$.

503. Розв'яжіть трикутник за трьома сторонами:
а) $a = 15,\ b = 18,\ c = 25$;
в) $a = 3,\ b = 6,\ c = 3\sqrt{3}$;
б) $a = 41,\ b = 19,\ c = 40$;
г) $a = 91{,}2,\ b = 125{,}3,\ c = 176{,}2$.

504. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 4$ см, $AD = 5$ см, $\angle A = 45°$.
Знайдіть довжину діагоналі BD.

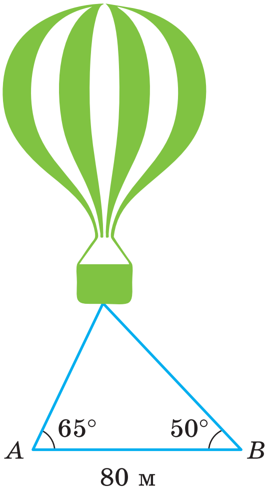
505. Сторона ромба дорівнює 38 см, а його кут 58°. Знайдіть діагоналі.

506. У просторі на променях OA, OB, OC, кожний з яких перпендикулярний до двох інших, на відстанях 12, 13 і 15 одиниць довжини від точки O взято точки A, B, C (мал. 163). Знайдіть косинус найбільшого кута трикутника ABC.



Мал. 163

507. На яку висоту піднялося дно корзини повітряної кулі, якщо в деякий момент часу вдалося зафіксувати таке її положення відносно точок A і B, як зображено на малюнку 164? Знайдіть відстань, яка була на той час, між кулею і кожною з точок A і B.



Мал. 164

508. Розв'яжіть трикутник за двома даними сторонами і кутом, що лежить проти однієї з них:
а) $a = 4{,}2,\ b = 3{,}5,\ \alpha = 70°$;
б) $c = 1{,}5,\ b = 2{,}4,\ \gamma = 28{,}5°$;
в) $a = 4{,}5,\ c = 3{,}2,\ \gamma = 85°$.

509. Сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 8 см, а гострий кут — 48°. Знайдіть більшу діагональ паралелограма і кути, які вона утворює зі сторонами.

510. Діагоналі паралелограма дорівнюють 12 см і 20 см, а кут між ними — 37°. Знайдіть сторони паралелограма.

511. Знайдіть сторони паралелограма, діагональ якого дорівнює 9 см і утворює з його сторонами кути 24° і 57°.

Б

512. Знайдіть сторони рівнобічної трапеції, якщо її діагональ дорівнює 16 см й утворює з бічною стороною і основою відповідно кути 53° і 48°.

513. Основи трапеції дорівнюють 14 м і 18 м, а бічні сторони — 7 м і 10 м. Знайдіть кути трапеції.

514. У трикутнику ABC сторона $AC = 16$ м, $\angle CAB = 122°$. $AL = 10$ м — бісектриса даного трикутника. Знайдіть довжини сторін AB і BC.

515. Використовуючи теорему синусів, доведіть, що бісектриса кута трикутника ділить його сторону на відрізки, пропорційні до прилеглих сторін.

516. BM — медіана трикутника ABC. Знайдіть AB і BC, якщо $BM = 5$ см, $AC = 12$ см, $\angle ABM = 56°$.

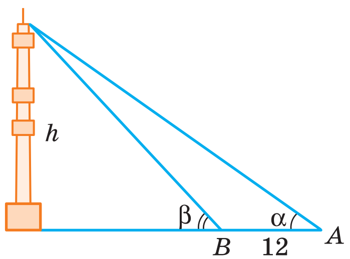
517. Медіани AM і CN трикутника ABC перетинаються у точці O. Знайдіть сторони трикутника, якщо $AM = 9$ см, $CN = 12$ см, $\angle AON = 35°$.

518. У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $AC = 20$ см, $\angle A = 68°$. Знайдіть медіани трикутника.

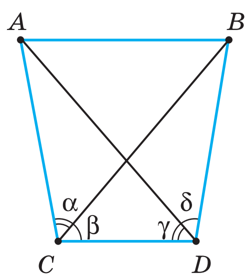
519. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 18 см, а один з кутів — 100°. Знайдіть бісектриси трикутника.

520. Щоб визначити висоту телевізійної вежі (мал. 165), виміряли відстань $AB = 12$ м і кути $\alpha = 35°$, $\beta = 49°$. Знайдіть висоту вежі.

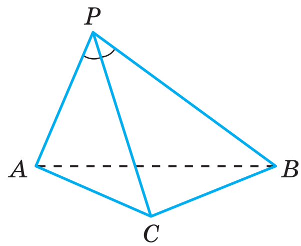
521. Щоб знайти відстань між пунктами A і B (мал. 166), виміряли відстань CD і кути α, β, γ, δ (дельта). Як знайти AB?



Мал. 165



Мал. 166



Мал. 167

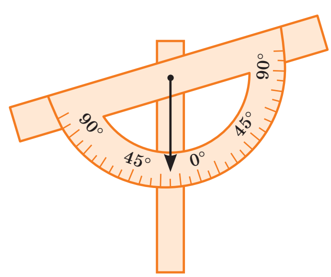
522. Як, знаючи відстань $AB = l$ і кути α, β, γ, δ, показані на малюнку 166, визначити відстань CD?

523. Із двох пунктів A і B на березі моря спостерігають за катером, який рухається рівномірно і прямолінійно. О 10.00 катер було видно з пункту A під кутом 100° до напряму AB, а з пункту B — під кутом 51° до напряму BA. О 10.10 кути змінилися і стали дорівнювати відповідно 84° і 74°. Знайдіть швидкість катера, якщо $AB = 2{,}5$ км.

524. У трикутній піраміді $PABC$ бічні ребра PA, PB, PC дорівнюють відповідно 3 дм, 4 дм і 5 дм, а кут між кожними двома з них — 60°. Знайдіть периметр трикутника ABC (мал. 167).

Практичне завдання

525. Використовуючи малюнок 168, зробіть екліметр (найпростіший прилад для вимірювання кутів у вертикальній площині). Обґрунтуйте принцип його використання. За його допомогою спробуйте виміряти кути, під якими видно багатоповерхівку (церкву, телевізійну вежу тощо) з різних відстаней.



Мал. 168

Задачі для повторення

526. Знайдіть кут між діагоналями паралелограма $ABCD$, якщо $AB = 7$ см, $AC = 16$ см і $BD = 6$ см.

527. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює $30°$. Знайдіть відношення сторін трикутника.

528. Периметр ромба дорівнює 40 см, а одна з діагоналей — 10 см. Знайдіть кути ромба і другу діагональ.

529. Діагональ прямокутника дорівнює d і утворює з меншою стороною кут α. Знайдіть площу прямокутника.

Геометрія навколо нас

Трикутники і чотирикутники в архітектурі

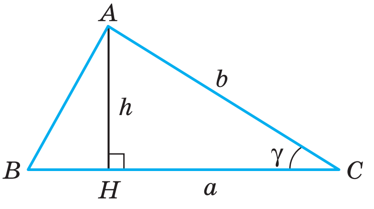
§ 16 Формули для знаходження площі трикутника

Як ви вже знаєте, площу S трикутника з основою a і висотою h знаходять за формулою:

$$S = \frac{1}{2}ah.$$

Користуючись тригонометричними функціями, можна вивести кілька інших формул для обчислення площі трикутника. Нехай у трикутнику ABC основа $BC = a$, $AC = b$, $\angle C = \gamma$, $AH = h$ — висота (мал. 169). З прямокутного трикутника ACH маємо: $h = b \sin \gamma$. Отже,

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$



Мал. 169

Формула площі трикутника $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ правильна й тоді, коли кут γ прямий або тупий (доведіть це самостійно). Отже, **площа трикутника дорівнює півдобутку будь-яких двох його сторін на синус кута між ними.**

За теоремою синусів $2R = \frac{c}{\sin\gamma}$, де R — радіус описаного кола. Тому $\sin\gamma = \frac{c}{2R}$. Отже, $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$.

Площа трикутника дорівнює добутку трьох його сторін, поділеному на почетверений радіус описаного кола.

Існує ще одна формула, яку часто використовують для визначення площі трикутника.

Якщо p — півпериметр трикутника зі сторонами a, b, c, то:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Це — **формула Герона**. Доведемо її. За теоремою косинусів $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, звідки $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Тому $\sin^2\gamma = 1-\cos^2\gamma = 1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2 = \frac{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{(2ab)^2} = \frac{1}{(2ab)^2}\left(c^2-(a-b)^2\right)\left((a+b)^2-c^2\right)$.

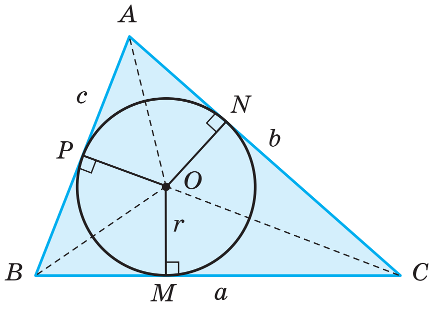
Тоді $\sin\gamma = \frac{1}{2ab} = \sqrt{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}$.

Підставивши це значення $\sin\gamma$ у формулу $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$ і позначивши півпериметр трикутника буквою p, дістанемо:

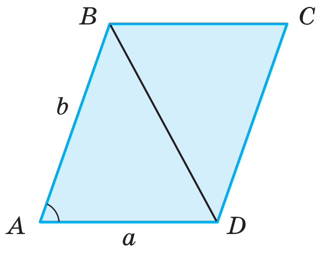
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Використовуючи малюнок 170, доведіть самостійно наступне твердження.

Площа трикутника дорівнює добутку радіуса кола, вписаного у трикутник, на півпериметр цього трикутника, тобто $S = pr$.



Мал. 170



Мал. 171

Отже, площу трикутника можна знаходити, користуючись будь-якою з формул:

$$S=\frac{1}{2}ah,\ S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma,\ S=pr,\ S=\frac{abc}{4R},\ S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Якщо у трикутнику ABC відомі сторони a, b і c, то з формул $S = pr$ і $S=\frac{abc}{4R}$ можна знайти радіуси вписаного (r) і описаного (R) кіл:

$$r=\frac{S}{p},\quad R=\frac{abc}{4S}.$$

Використовуючи формулу $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, можна довести, що формула **площі паралелограма зі сторонами a і b та кутом γ між ними має вигляд:**

$$\mathbf{S = ab\sin\gamma.}$$

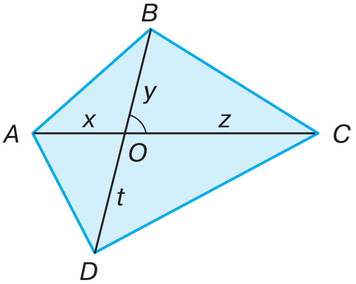
Адже якщо $ABCD$ — паралелограм, то його площа удвічі більша за площу трикутника ABD (мал. 171). Тому

$$S_{ABCD}=2\cdot S_{ABD}=2\cdot\frac{1}{2}ab\sin\gamma=ab\sin\gamma.$$

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Виведемо ще формулу площі опуклого чотирикутника з діагоналями d_1 і d_2 та кутом α між ними.

Нехай діагоналі AC і BD опуклого чотирикутника перетинаються в точці O (мал. 172). Якщо один з чотирьох кутів при вершині O дорівнює α, то і вертикальний до нього кут дорівнює α, а два інші — по $(180° - \alpha)$. Оскільки $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$, то синуси кожного з кутів AOB, BOC, COD, AOD дорівнюють $\sin\alpha$.



Мал. 172

Позначимо частини діагоналей чотирикутника буквами x, y, z, t, як на малюнку 172. Площа всього чотирикутника $ABCD$ дорівнює сумі площ чотирьох утворених трикутників.

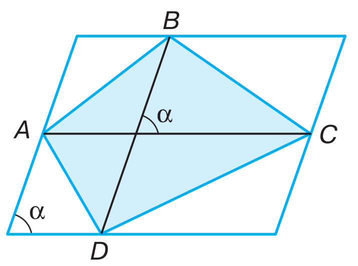
Тому $S_{ABCD} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA} = \frac{1}{2}(xy\sin\alpha + yz\sin\alpha + zt\sin\alpha + xt\sin\alpha) =$

$$= \frac{1}{2}(xy + yz + zt + xt)\sin\alpha = \frac{1}{2}(y(x+z) + t(z+x))\sin\alpha = \frac{1}{2}(x+z)\cdot(y+t)\sin\alpha = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha.$$

Отже, **якщо діагоналі чотирикутника завдовжки d_1 і d_2 перетинаються під кутом α, то площа чотирикутника обчислюється за формулою:**

$$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha.$$

Спробуйте вивести цю формулу, описавши навколо даного чотирикутника паралелограм, сторони якого паралельні діагоналям чотирикутника (мал. 173). Чи правильна ця формула для неопуклого чотирикутника? Спробуйте її довести.



Мал. 173

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

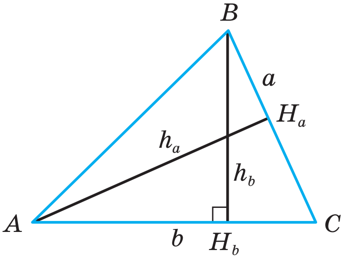
1. Як знайти площу трикутника за стороною і проведеною до неї висотою?
2. Як знайти площу трикутника за двома сторонами і кутом між ними?
3. Як знайти площу трикутника за сторонами і радіусом описаного кола?
4. Як знайти площу трикутника за його периметром і радіусом вписаного кола?
5. Сформулюйте формулу Герона.
6. Як знайти радіус кола, описаного навколо трикутника?
7. Як знайти радіус кола, вписаного у трикутник?
8. Як знайти площу паралелограма?

Виконаємо разом

1 Доведіть, що **висоти трикутника обернено пропорційні до відповідних сторін.**

- Нехай a і b — дві сторони трикутника ABC, а проведені до них висоти — h_a, h_b (мал. 174). Виразимо площу трикутника двома способами: $S = \frac{1}{2}ah_a$, $S = \frac{1}{2}bh_b$.

Отже, $ah_a = bh_b$, звідки $h_a : h_b = b : a$. А це й треба було довести.
Такий спосіб розв'язання задач, коли прирівнюють площі рівних фігур, коротко називають **методом площ**.



Мал. 174

2 Доведіть, що **медіана трикутника розбиває його на два рівновеликих трикутники.**

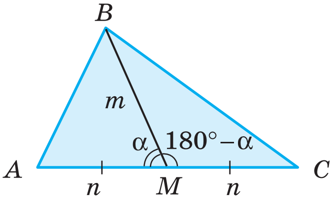
- Нехай $BM = m$, $AM = MC = n$ (мал. 175).

Тоді $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}m \cdot n \cdot \sin\alpha$.

$S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2}m \cdot n \cdot \sin(180° - \alpha) = \frac{1}{2}m \cdot n \cdot \sin\alpha$.

Отже, $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle BMC}$.

Розв'яжіть задачу іншим способом.



Мал. 175

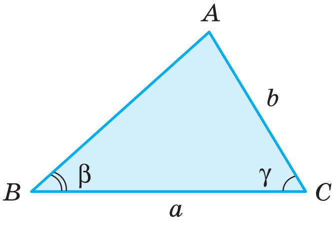
3 Виведіть формулу площі трикутника за його стороною і прилеглими кутами.

- Нехай дано $\triangle ABC$, у якого $CB = a$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$ (мал. 176). $\angle A = 180° - (\beta + \gamma)$, тому $\sin\angle A = \sin(\beta + \gamma)$. За теоремою синусів $\frac{a}{\sin(\beta+\gamma)} = \frac{b}{\sin\beta}$, звідки $b = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$.

Площа трикутника:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}a\frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}\sin\gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}.$$

Отже, шукана площа трикутника $S = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$.



Мал. 176

Задачі і вправи

Виконайте усно

530. Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 2 і 3, а кут між ними 30°.

531. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого $b = 6$ см, а кут при вершині: а) 45°; б) 60°; в) 120°.

532. Знайдіть площу рівностороннього трикутника, сторона якого: а) 8 см; б) 1 дм; в) $\sqrt{3}$ м.

533. Як змінюватиметься площа трикутника, якщо довжини двох його сторін a і b залишатимуться незмінними, а кут γ між ними збільшувати від 0° до 180°?

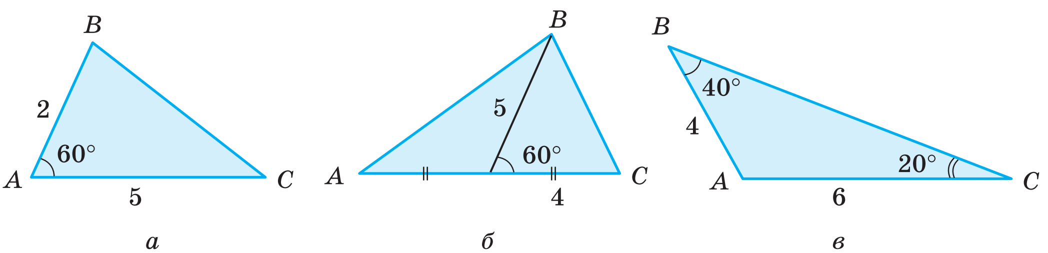
534. Яку найбільшу площу може мати трикутник, дві сторони якого дорівнюють 2 см і 3 см?

535. Площа трикутника 15 см^2, а його сторони 10 см і 6 см. Знайдіть кут між ними.

536. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 10 см. Чи може його площа дорівнювати 12 см^2, 15 см^2, 18 см^2?

А

537. Користуючись малюнком 177, знайдіть площу трикутника ABC.



Мал. 177

538. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо:
а) $BC = 4$ см, $AC = 8$ см, $\angle C = 45°$; б) $AB = 12$ см, $BC = 7$ см, $\angle B = 150°$.

539. Доведіть, що **площа рівностороннього трикутника зі стороною a визначається за формулою** $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

540. Знайдіть площу, радіуси вписаного і описаного кіл для рівностороннього трикутника зі стороною 6 см.

541. Площа рівностороннього трикутника дорівнює $16\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть периметр трикутника.

542. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а кут при основі — 15°. Знайдіть площу трикутника.

543. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, площа якого дорівнює $25\sqrt{3}$ см², а кут при вершині 120°.

544. Одна зі сторін трикутника на 3 см більша за іншу. Знайдіть ці сторони, якщо кут між ними 30°, а площа трикутника дорівнює 22 см².

545. Дві сторони трикутника пропорційні числам 7 і 8, а кут між ними — 120°. Знайдіть периметр трикутника, якщо його площа $56\sqrt{3}$ см².

546. Дві сторони трикутника дорівнюють 16 см і 18 см, а кут між ними 60°. Знайдіть висоти, проведені до цих сторін.

547. Медіана трикутника і сторона, до якої вона проведена, дорівнюють відповідно 10 см та 26 см і утворюють кут 60°. Знайдіть площу трикутника.

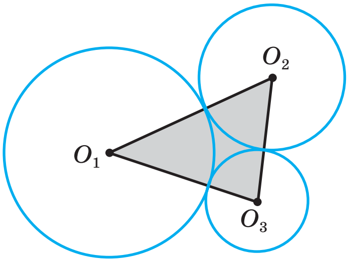
548. Медіана трикутника і сторона, до якої вона проведена, дорівнюють відповідно 6 см і 16 см. Знайдіть кут між ними, якщо площа трикутника 24 см².

549. Сторони трикутника 10 см, 10 см і 12 см. Знайдіть радіуси вписаного і описаного кіл.

550. Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 25 см і 29 см. Знайдіть його площу та радіуси вписаного і описаного кіл.

551. Знайдіть найбільшу висоту трикутника зі сторонами 6 см, 10 см і 14 см.

552. Три кола радіусів 8 см, 9 см і 17 см попарно дотикаються одне до одного зовні (мал. 178). Знайдіть площу трикутника з вершинами в центрах кіл.



Мал. 178

553. Бісектриса AM паралелограма $ABCD$ ділить сторону BC на відрізки $BM = 10$ см, $MC = 8$ см. Знайдіть площу паралелограма, якщо $\angle A = 30°$.

554. Знайдіть площу ромба, сторона якого 8 см, а кути пропорційні числам 1 і 3.

555. Знайдіть кути ромба, якщо його площа 8 см², а периметр — 16 см.

556. Знайдіть площу паралелограма $ABCD$, якщо $AB = a$, $AC = d$, $\angle BAC = \alpha$.

Б

557. Медіани AM і CN трикутника ABC дорівнюють 9 см та 12 см і перетинаються в точці O. Знайдіть площу трикутника AOC і чотирикутника $BMON$, якщо $\angle AOC = 120°$.

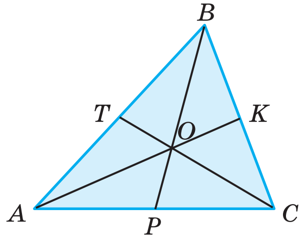
558. BL — бісектриса трикутника ABC. Знайдіть його площу, якщо $AL = 15$ см, $LC = 24$ см, $BC = 40$ см.

559. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = 4$ см, $BO = 6$ см, $CO = 10$ см, $DO = 8$ см. Знайдіть площі $\triangle AOC$ і $\triangle BOD$, якщо сума їх площ дорівнює 22 см².

560. Основи трапеції $ABCD$ дорівнюють 7 см і 14 см, а діагоналі 9 см і 15 см. Знайдіть площі трикутників AOB, BOC, COD, AOD, де O — точка перетину діагоналей.

561. На сторонах AB і BC трикутника ABC взято точки M і N так, що $AM = 7$ см, $BM = 8$ см, $BN = 3$ см, $NC = 11$ см. Знайдіть площу чотирикутника $AMNC$, якщо площа трикутника MBN дорівнює 4 см^2.

562. Доведіть, що **три медіани трикутника ділять його на 6 рівновеликих трикутників** (мал. 179).



Мал. 179

563. Центр кола, вписаного у трикутник зі сторонами 6 см, 25 см і 29 см, сполучено з вершинами трикутника. Знайдіть площі утворених трикутників.

564. Висота, проведена до основи рівнобедреного трикутника, дорівнює 16 см, а бічна сторона — 20 см. Знайдіть відстань між центрами описаного і вписаного кіл.

565. Сторони трикутника дорівнюють 40 см, 40 см і 48 см. Знайдіть відстані від центра описаного кола до сторін трикутника.

566. Сторони трикутника дорівнюють 15 см, 15 см і 24 см. Знайдіть відстані від центра вписаного кола до вершин трикутника.

567. Знайдіть площу $\triangle ABC$, якщо $AC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$.

568. Три кола радіусів 6 см, 7 см і 14 см попарно дотикаються одне до одного зовні. Знайдіть радіус кола, на якому лежать центри даних кіл.

569. У трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см вписано коло, до якого проведено дотичну, паралельну середній стороні. Знайдіть площі частин, на які ця дотична розбиває трикутник.

570. Використовуючи малюнок 180, доведіть, що площу кожного трикутника можна обчислити за формулою

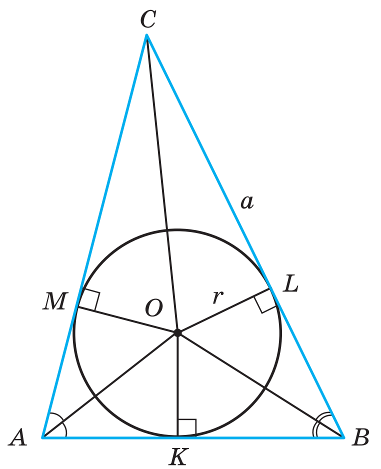
$$S = r\left(a + r\,\mathrm{ctg}\,\frac{A}{2}\right),$$ де $a = BC$, r — радіус кола, вписаного в $\triangle ABC$.

571. Знайдіть площу паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 8 см і 11 см, а кут між ними — 30°.

572. Знайдіть діагоналі паралелограма площею $96\sqrt{2}$ см^2, якщо одна з них на 8 см довша за другу, а кут між ними — 45°.

573. Діагоналі паралелограма дорівнюють 30 см і 74 см, а одна зі сторін — 26 см. Знайдіть площу паралелограма.

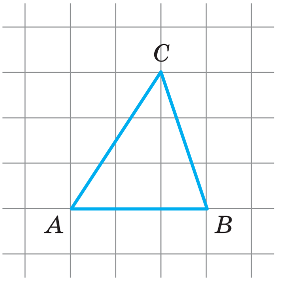
574. Знайдіть площу паралелограма $ABCD$, якщо $BD = d$, $\angle ABD = \alpha$, $\angle ADB = \beta$.



Мал. 180

Практичне завдання

575. Користуючись аркушем паперу в клітинку (мал. 181), накресліть трикутник з основою AB і площею, удвічі більшою за площу трикутника ABC. Скільки таких трикутників існує? Яким найбільшим може бути косинус кута, протилежного стороні AB?



Мал. 181

Задачі для повторення

576. Сторони трикутника дорівнюють 5 см, 6 см і 10 см. Знайдіть кути трикутника.

577. Доведіть, що трикутник зі сторонами 7 см, 24 см і 25 см прямокутний.

578. Знайдіть площу прямокутника, якщо перпендикуляр, проведений з вершини прямого кута, ділить діагональ на відрізки 2 см і 8 см.

579. Запишіть рівняння кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$ та вписаного в нього, якщо: $A(-3; -3)$, $B(-5; 3)$, $C(1; 5)$, $D(3; -1)$.

Геометрія навколо нас

Трикутники на суші і на морі

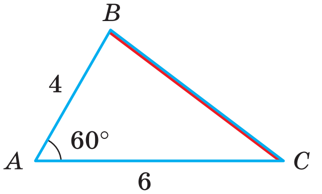
Задачі за готовими малюнками

А | **Б**

1

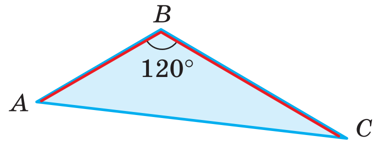
А. $AB = 4,\ AC = 6,\ \angle A = 60°.$

BC



Б. $AC = 14,\ AB : BC = 3 : 5.$

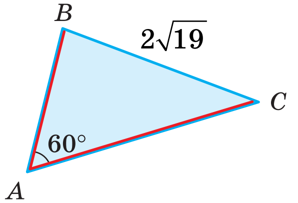
$AB,\ BC$



2

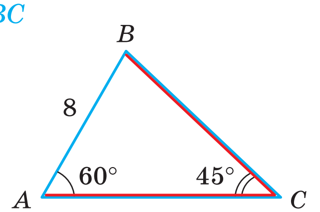
А. $BC = 2\sqrt{19},\ AC - AB = 6.$

$AC,\ AB$



Б. $\angle A = 60°,\ \angle C = 45°,\ AB = 8.$

$AC,\ BC$

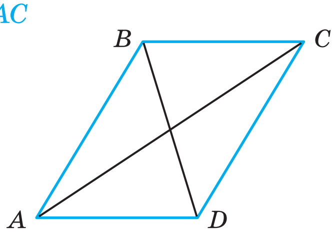


3

А. ▱$ABCD$

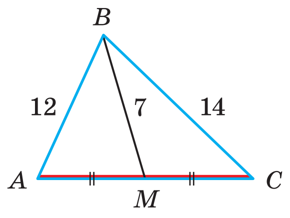
$AB = 9,\ BC = 7,\ BD = 8.$

AC



Б. $AM = MC.$

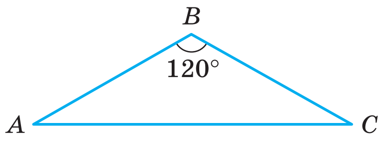
AC



4

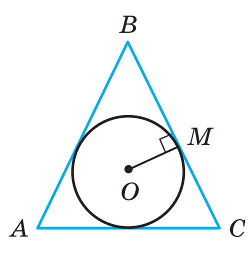
А. $AB + BC = 18;\ S_{\triangle ABC} = 18\sqrt{3}.$

$AB,\ BC,\ AC$



Б. $BM : MC = 9 : 8,\ r = OM = 24.$

R — радіус описаного кола



Самостійна робота 3

Варіант 1

1°. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 7 см і 8 см, а кут між ними — 45°.

2°. Знайдіть сторону BC трикутника ABC, якщо $AB = 6$ дм, $AC = 14$ дм, $\angle B = 120°$.

3•. Бічна сторона і основа рівнобедреного трикутника пропорційні числам 5 і 8. Знайдіть радіус описаного кола, якщо периметр трикутника дорівнює 54 м.

Варіант 2

1°. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 6 см і 9 см, а кут між ними — 120°.

2°. Знайдіть сторону AB трикутника ABC, якщо $BC = 8$ м, $AC = 7$ м, $\angle B = 60°$.

3•. Бічна сторона рівнобедреного трикутника на 1 см більша за основу. Знайдіть радіус вписаного кола, якщо периметр трикутника дорівнює 50 см.

Варіант 3

1°. Знайдіть площу трикутника, сторони якого дорівнюють 9 м і 12 м, а кут між ними — 150°.

2°. Знайдіть сторону AC трикутника ABC, якщо $AB = 7$ см, $BC = 13$ см, $\angle A = 120°$.

3•. Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника відносяться як 6 : 5. Знайдіть радіус описаного кола, якщо периметр трикутника дорівнює 64 дм.

Варіант 4

1°. Знайдіть площу ромба зі стороною 6 м і кутом 135°.

2°. Знайдіть сторону BC трикутника ABC, якщо $AB = 14$ см, $AC = 10$ см, $\angle C = 60°$.

3•. Основа рівнобедреного трикутника на 6 дм менша за бічну сторону. Знайдіть радіус вписаного кола, якщо периметр трикутника дорівнює 72 дм.

Тестові завдання 3

1	Яка з рівностей хибна?	а) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$; в) $\frac{a}{\sin A}=\frac{\sin B}{b}$; б) $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$; г) $\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$.
2	Встановіть вид трикутника ABC, якщо $\cos B<0$.	а) гострокутний; б) прямокутний; в) тупокутний; г) рівносторонній.
3	Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо $AC = 3$ см, $\angle B = 30°$.	а) 3 см; в) $\sqrt{3}$ см; б) 6 см; г) 12 см.
4	Знайдіть квадрат довжини меншої діагоналі паралелограма, сторони якого дорівнюють 5 і 8, а кут між ними 60°.	а) 129; в) 49; б) 69; г) 69.
5	Знайдіть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 6 см і 14 см, а кут між ними 30°.	а) 42 см²; в) $21\sqrt{2}$ см²; б) $21\sqrt{3}$ см²; г) 21 см².
6	Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 10 см, а кут при основі дорівнює 45°.	а) $25\sqrt{3}$ см²; в) $25\sqrt{2}$ см²; б) 50 см²; г) $50\sqrt{3}$ см².
7	Дві сторони трикутника площею $6\sqrt{3}$ см² дорівнюють 4 см і 6 см. Знайдіть кут між цими сторонами.	а) 30°; в) 30° або 60°; б) 60°; г) 60° або 120°.
8	За якою формулою обчислюють радіус кола, описаного навколо трикутника?	а) $\frac{abc}{4S}$; в) $\frac{S}{p}$; б) $\frac{4S}{abc}$; г) $\frac{p}{S}$.
9	Знайдіть площу трикутника, якщо його периметр дорівнює 10 см, а радіус вписаного кола — 2 см.	а) 20 см²; в) 5 см²; б) 10 см²; г) 2,5 см².
10	Укажіть площу рівностороннього трикутника зі стороною 2 дм.	а) 4 дм²; в) $\sqrt{3}$ дм²; б) $2\sqrt{3}$ дм²; г) $0,5\sqrt{3}$ дм².

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Дві сторони трикутника дорівнюють 14 см і 16 см, а кут між ними 120°. Знайдіть периметр трикутника і його площу.

2°. У трикутнику ABC $AB = 8$ дм, $\angle A = 30°$, $\angle B = 105°$. Знайдіть BC.

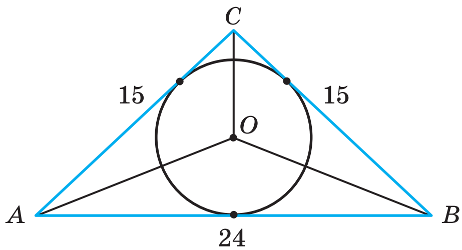
3°. Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 10 см, а кут — 60°. Знайдіть діагоналі паралелограма і його площу.

4°. Площа трикутника ABC дорівнює 30 см², $AB = 10$ см, $BC = 12$ см. Знайдіть $\angle B$. Скільки розв'язків має задача?

5•. Діагоналі паралелограма дорівнюють 14 см і 22 см, а сторони пропорційні числам 6 і 7. Знайдіть периметр паралелограма.

6•. Сторони трикутника дорівнюють 17 м, 25 м і 26 м. Знайдіть найбільшу висоту трикутника.

7•. У трикутник зі сторонами 15 м, 15 м і 24 м вписано коло, центр якого з'єднано з вершинами трикутника (мал. 182). Знайдіть площі утворених трикутників.



Мал. 182

8•. Периметр трикутника дорівнює 36 см, а дві його сторони, пропорційні числам 8 і 3, утворюють кут 60°. Знайдіть сторони трикутника та радіуси вписаного й описаного кіл.

9••. Бічні сторони трапеції дорівнюють 5 см і $5\sqrt{3}$ см, а основи — 8 см і 18 см. Знайдіть кути трапеції.

10••. Одна зі сторін трикутника дорівнює c, а прилеглі до неї кути — α і β. Знайдіть бісектриси трикутника, проведені із вершин цих кутів.

Навколишній світ — це світ геометрії...
Усе навкруги — геометрія.
Ле Корбюзьє

Головне в розділі 3

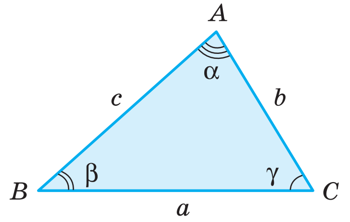
Якщо a, b, c — сторони трикутника, а α, β, γ — протилежні їм кути трикутника, то завжди

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ — **теорема косинусів,**

$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ — **теорема синусів.**

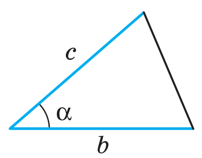
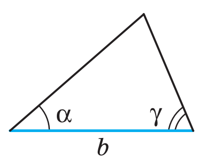
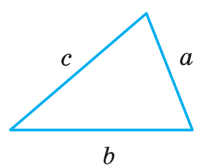
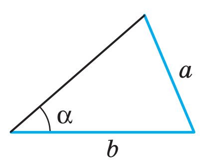
Кожен з трьох останніх дробів дорівнює $2R$, де R — радіус кола, описаного навколо даного трикутника:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$



Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.

Розв'язати трикутник — це означає знайти невідомі його сторони і кути за кількома відомими його сторонами і кутами.

№ з/п	Малюнок	Тип задачі	Алгоритм розв'язування
1		За двома сторонами і кутом між ними	1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$; 2) $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; 3) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$
2		За стороною і двома кутами	1) $\beta = 180° - (\alpha + \gamma)$; 2) $a = \dfrac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$; 3) $c = \dfrac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$
3		За трьома сторонами	1) $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; 2) $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; 3) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$
4		За двома сторонами і кутом, протилежним одній з них	1) $\sin\beta = \dfrac{b \cdot \sin\alpha}{a}$; 2) $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$; 3) $c = \dfrac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$

Радіуси кіл, вписаного (r) у трикутник ABC і описаного (R) навколо нього:

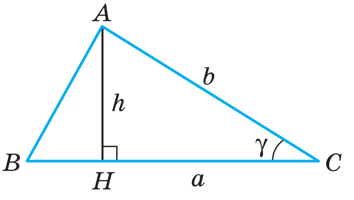
$$r = \frac{S}{p}, \quad R = \frac{abc}{4S} \text{ або } R = \frac{a}{2\sin\alpha}.$$

Площу трикутника можна визначати за такими формулами:

$S = \frac{1}{2}ah$, $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$;

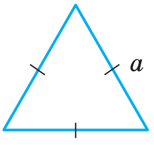
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — **формула Герона**.

$S = \frac{abc}{4R}$, $S = pr$.

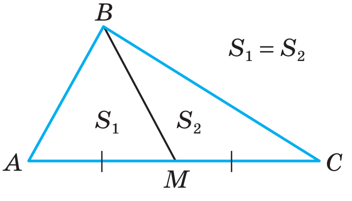


Площу рівностороннього трикутника зі стороною a визначають за формулою:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

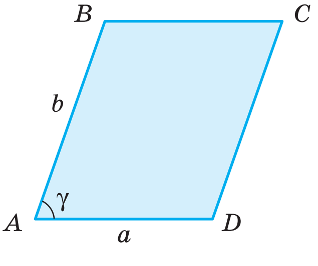


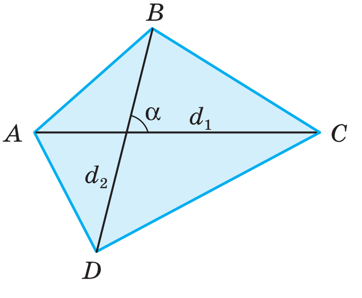
Медіана трикутника розбиває його на два рівновеликі трикутники.



Площа паралелограма: $S = ab\sin\gamma$, де a, b — його сторони, а γ — кут між ними.

Площа опуклого чотирикутника: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$, де d_1 і d_2 — діагоналі чотирикутника, а α — кут між ними.





Нічого не зроблено,
якщо щось залишилося недоробленим.

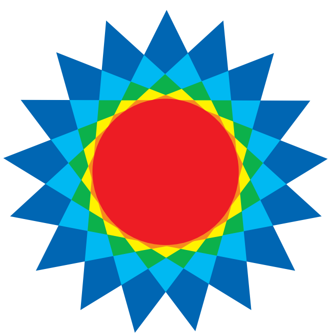
Математики стоять на плечах один одного

КАРЛ ФРІДРІХ ҐАУСС

(1777–1855)

Видатний німецький математик, астроном, фізик і геодезист.

- Один із найвеличніших і найвпливовіших математиків усіх часів. Його називають Королем математики.
- Характерними рисами досліджень Гауса є надзвичайна їх різнобічність і органічний зв'язок між теоретичною і прикладною математикою.
- На його честь Міжнародним математичним союзом і Німецьким математичним товариством засновано премію «Приз Ґаусса» за видатні досягнення в галузі прикладної математики.



Правильний зірчастий 17-кутник

Розділ 4 | Section 4

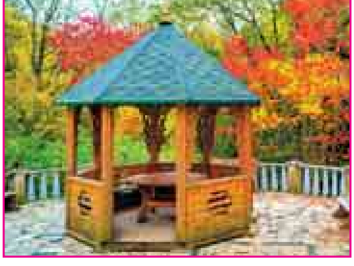
Правильні многокутники | Regular Polygons

Правильними називають такі опуклі многокутники, у яких всі сторони рівні і всі кути рівні. Вони відіграють важливу роль не лише в геометрії, а й у кристалографії, хімії, мінералології тощо. Їх властивості часто використовують архітектори, дизайнери. Довжину кола і площу круга також визначають, використовуючи властивості правильних многокутників.

Для чого вивчати правильні многокутники?

Правильні многокутники — це абстрактні поняття, створені науковцями. У природі абсолютно правильних многокутників не існує. Трапляються об'єкти у формі майже правильних многокутників. Наприклад, бджоли роблять стільники у формі майже правильних шестикутників. Квіти багатьох рослин ростуть так, що кінчики їх пелюсток розташовані у вершинах правильних многокутників, а кінчики сніжинок розташовані у вершинах правильних шестикутників. Форми майже правильних многокутників мають грані деяких кристалів. Наприклад, грані кристалів кухонної солі — квадрати, грані кристалів алмаза — правильні трикутники.

Правильні многокутники зустрічаються і в багатьох виробах (голівках болтів і гайок, пельменницях).



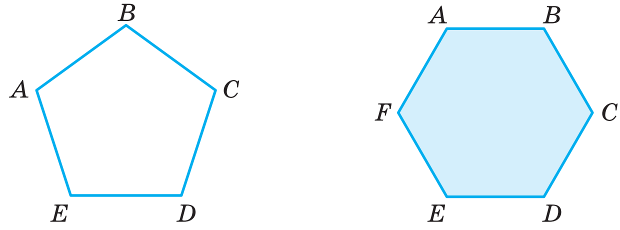
В архітектурі часто можна побачити будови, що мають форми правильних многокутників або їх частин. Особливо часто з правильними многокутниками мають справу паркетники, плиточники, архітектори. У деяких палацах, залах настеляють паркет з кількох правильних многокутників: правильних трикутників і шестикутників, квадратів і правильних восьмикутників тощо.

А де ще використовують правильні многокутники? Наведіть свої приклади.

§ 17 Правильні многокутники та їх властивості

Опуклий многокутник називається **правильним**, якщо всі його сторони рівні і всі кути рівні.

Рівносторонній трикутник і квадрат — приклади правильних многокутників. На малюнку 183 зображено правильний п'ятикутник і правильний шестикутник.



Мал. 183

Якщо правильний многокутник має n сторін, то сума всіх його кутів (внутрішніх) дорівнює $180°(n-2)$, а один з них — у n разів менший, тобто дорівнює

$$\frac{180°(n-2)}{n}.$$

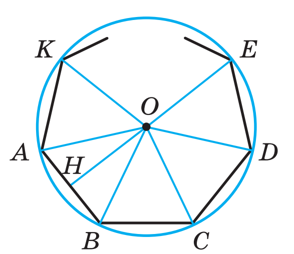
Чим більше число n, тим більший кут правильного n-кутника.

ТЕОРЕМА 11

Якщо многокутник правильний, то навколо нього можна описати коло і в нього можна вписати коло.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $ABCDE...K$ — правильний n-кутник (мал. 184). Бісектриси його кутів A і B перетинаються в деякій точці O. Трикутник AOB рівнобедрений, бо $\angle OAB = \angle OBA = \frac{\alpha}{2}$, де α — кут даного многокутника. Сполучимо точку O відрізками з усіма вершинами многокутника. Трикутники OBC і OBA рівні, бо в них сторона OB спільна, $BC = BA$ і $\angle OBC = \angle OBA$. Подібним способом переконуємось, що $\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle OCD = \triangle ODE...$



Мал. 184

Отже, $OA = OB = OC = OD = \ldots = OK$, тобто всі вершини даного правильного многокутника $ABCDE\ldots K$ рівновіддалені від точки O. Тому коло радіуса OA — описане навколо даного многокутника. Першу частину теореми доведено.

Оскільки трикутники OAB, OBC, OCD, ODE, ..., OKA рівні, то рівні і їх відповідні висоти, тобто перпендикуляри, опущені з точки O на всі сторони даного правильного многокутника. Отже, коло з центром O, яке дотикається до сторони AB, дотикається і до всіх сторін многокутника $ABCDE\ldots K$. Це коло — вписане в даний многокутник. Другу частину теореми також доведено. $\square$

Як випливає з попередніх міркувань, центром кола, вписаного в правильний многокутник, і кола, описаного навколо нього, є одна й та сама точка O. Її називають **центром правильного многокутника.**

Кут, під яким з центра правильного многокутника видно його сторону, називають **центральним кутом многокутника.** Перпендикуляр, опущений з центра правильного многокутника на його сторону, — **апофема** правильного многокутника. На малюнку 184 $\angle AOB$ — центральний кут правильного многокутника $AB\ldots K$, а OH — його апофема. Міра центрального кута правильного n-кутника дорівнює $\dfrac{360^\circ}{n}$. Чому?

У вершинах правильних многокутників звичайно знаходяться центри кульок у підшипниках, центри отворів на фланцях, кінці зубів круглих пилок (мал. 185) тощо.

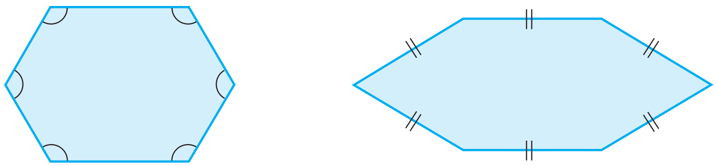
Мал. 185

Плитки і плити для покриття підлоги в будинках, площ і вулиць, аеродромів здебільшого виготовляють у формі правильних многокутників.

Мал. 186

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

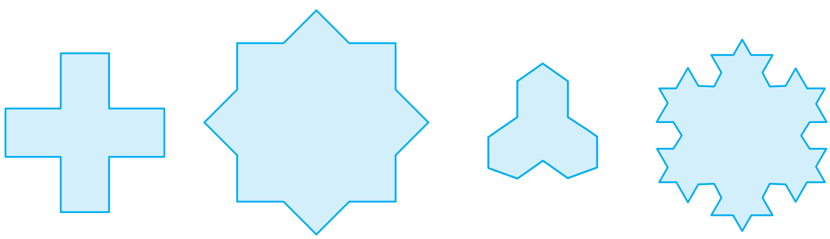
Чи можна з означення правильного многокутника вилучити словосполучення «сторони рівні» або «кути рівні»? Ні, бо опуклий многокутник, усі кути якого рівні або всі сторони рівні, може бути й неправильним (мал. 187).



а *б*

Мал. 187

Приклади неопуклих многокутників, усі сторони яких рівні, наведено на малюнку 188. Їх не вважають правильними многокутниками.



а *б* *в* *г*

Мал. 188

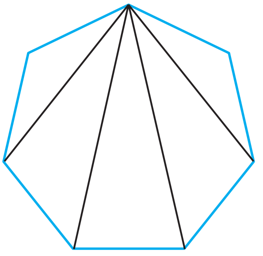
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення правильного многокутника.
2. Як інакше називають правильний трикутник? А правильний чотирикутник?
3. Чому дорівнює сума кутів правильного многокутника?
4. Чому дорівнює міра внутрішнього кута правильного n-кутника?
5. Чому дорівнює міра центрального кута правильного n-кутника?
6. Чи можна навколо кожного правильного многокутника описати коло?
7. Чи можна у кожний правильний многокутник вписати коло?
8. Що називають центром правильного многокутника?
9. Що називають апофемою правильного многокутника?
10. Наведіть приклади предметів з оточуючого середовища, які мають форму правильних многокутників.

Виконаємо разом

1 Скільки діагоналей має правильний n-кутник?

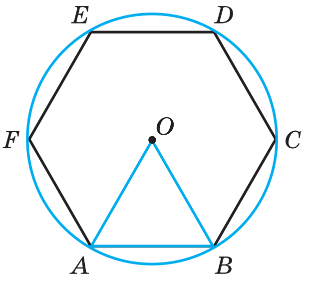
● Із кожної вершини правильного n-кутника виходить $n - 3$ діагоналі (мал. 189). Усього вершин n. Маємо добуток $n(n - 3)$. Але кожна діагональ виходить із двох різних вершин. Тому $n(n - 3)$ — подвоєна кількість діагоналей. Отже, кожний правильний n-кутник (як і кожний опуклий многокутник) має $0{,}5n(n - 3)$ діагоналей. Трикутник діагоналей не має.



Мал. 189

2 Доведіть, що сторона правильного шестикутника, вписаного в коло, дорівнює радіусу цього кола.

● На малюнку 190 зображено правильний шестикутник $ABCDEF$, вписаний у коло з центром у точці O. Доведемо, що $AB = OA$. Розглянемо трикутник AOB. Оскільки $AO = BO$, як радіуси одного кола, то трикутник AOB — рівнобедрений. $\angle AOB = \dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ як центральний кут правильного шестикутника. Тоді $\angle OAB = \angle OBA = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ = \angle AOB$. Отже, $\triangle AOB$ — рівносторонній, а тому $AB = OA$.



Мал. 190

Задачі і вправи

Виконайте усно

580. Як інакше називають правильний трикутник і правильний чотирикутник?

581. Сторона правильного n-кутника дорівнює a. Знайдіть його периметр.

582. Периметр правильного n-кутника дорівнює $2p$. Знайдіть довжину його сторони.

583. Знайдіть сторону правильного п'ятикутника, якщо вона менша від периметра на 20 см.

584. Чому дорівнює сума кутів правильного: а) трикутника; б) чотирикутника; в) п'ятикутника; г) шестикутника?

585. Скільки діагоналей має правильний: а) трикутник; б) чотирикутник; в) п'ятикутник; г) шестикутник?

586. Чому дорівнює сума зовнішніх кутів квадрата, взятих по одному при кожній його вершині? А правильного трикутника?

А

587. Скільки діагоналей має правильний n-кутник, якщо:
а) $n = 5$; б) $n = 7$; в) $n = 12$; г) $n = 100$?

588. Знайдіть суму кутів правильного n-кутника, якщо:
а) $n = 5$; б) $n = 8$; в) $n = 10$; г) $n = 18$.

589. Знайдіть кут правильного n-кутника, якщо:
а) $n = 5$; б) $n = 10$; в) $n = 15$; г) $n = 20$.

590. Знайдіть зовнішній і центральний кути правильного n-кутника, якщо:
а) $n = 3$; б) $n = 6$; в) $n = 12$; г) $n = 100$.

591. **Сума зовнішніх кутів правильного n-кутника, взятих по одному при кожній його вершині, дорівнює 360°.** Доведіть.

592. Скільки сторін має правильний многокутник, кожний із кутів якого дорівнює 108°, 120°, 135°, 140°, 144°, 150°?

593. Скільки сторін має правильний многокутник, кожний із зовнішніх кутів якого дорівнює: а) 24°; б) 30°; в) 36°; г) 18°?

594. Сторона квадрата дорівнює 10 см. Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл.

595. Проведіть у колі два перпендикулярні діаметри і сполучіть їх кінці. Доведіть, що утворений чотирикутник правильний.

596. Установіть відповідність між мірами центральних кутів правильних многокутників (1–4) та мірами їх внутрішніх кутів (А–Д).

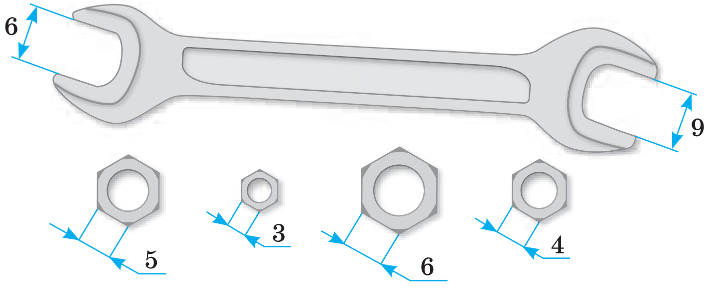
1 36°	**А** 150°
2 45°	**Б** 135°
3 30°	**В** 145°
4 24°	**Г** 144°
	Д 156°

597. Сторона правильного многокутника дорівнює a, а радіус описаного навколо нього кола R. Знайдіть радіус вписаного кола.

598. Сторона правильного многокутника дорівнює a, а радіус вписаного в нього кола r. Знайдіть радіус описаного навколо нього кола.

599. R і r — радіуси описаного навколо правильного многокутника і вписаного в нього кіл. Знайдіть сторону многокутника.

600. На малюнку 191 зображено гайковий ключ і 4 гайки. Які з гайок можна відкрутити цим ключем?



Мал. 191

Б

601. Доведіть, що в правильному шестикутнику протилежні сторони паралельні.

602. Знайдіть діагоналі правильного шестикутника, сторона якого дорівнює a.

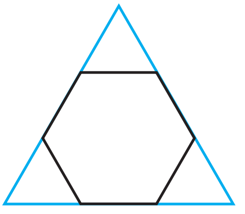
603. Відстань між паралельними сторонами правильного шестикутника дорівнює l. Знайдіть сторону шестикутника.

604. У правильному восьмикутнику зі стороною 6 см сполучено середини чотирьох сторін, взятих через одну. Доведіть, що утворений чотирикутник — квадрат, і знайдіть його сторону.

605. У правильному дванадцятикутнику зі стороною 8 см сполучено середини сторін, взятих через одну. Доведіть, що утворений шестикутник — правильний, і знайдіть його периметр.

606. Доведіть, що середини сторін правильного n-кутника є вершинами іншого правильного n-кутника.

607. Зрізуючи кути правильного трикутника зі стороною m, отримали правильний шестикутник (мал. 192). Знайдіть його сторону.



Мал. 192

608. Зрізуючи кути квадрата, отримали правильний восьмикутник. Знайдіть його сторону, якщо сторона квадрата дорівнює a.

609. Доведіть, що в правильному п'ятикутнику:
а) всі діагоналі рівні;
б) кожна діагональ паралельна одній із його сторін;
в) дві діагоналі, що виходять з однієї вершини, утворюють 3 рівнобедрені трикутники.

610. У якому відношенні діагональ правильного п'ятикутника ділить кут, із вершини якого вона виходить?

611. Під яким кутом перетинаються дві діагоналі правильного п'ятикутника, проведені з різних вершин?

612. Чому плити для покриття площ, вулиць, аеродромів не виготовляють у формі правильних п'ятикутників?

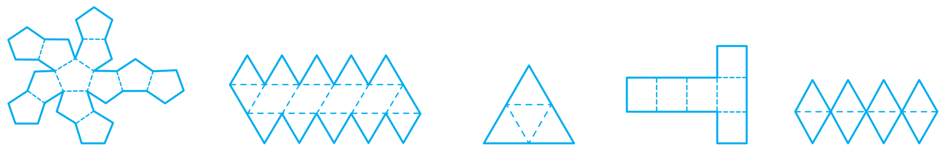
613. ***Задача Каталана.*** Розбийте даний правильний шестикутник на 7 правильних шестикутників і 12 рівносторонніх трикутників.

Практичне завдання

614. 1) Виріжте з цупкого паперу такі три рівні ромби, щоб із них можна було скласти правильний шестикутник. Знайдіть: а) кути кожного ромба та утвореного шестикутника; б) відношення периметрів шестикутника і ромба.
2) Виріжте з цупкого паперу десять рівних правильних трикутників і складіть із них правильний трикутник і правильний шестикутник. Знайдіть відношення: а) периметрів утворених фігур; б) площ утворених фігур.

Задачі для повторення

615. Із правильних многокутників (трикутників, чотирикутників і п'ятикутників) складаються розгортки правильних многогранників. За поданими нижче розгортками спробуйте виготовити моделі правильних многогранників (врахуйте допуски на склеювання). Установіть відповідність між розгортками правильних многогранників (1–5) і відповідними многогранниками (А–Д).



1 **2** **3** **4** **5**

А **Б** **В** **Г** **Д**

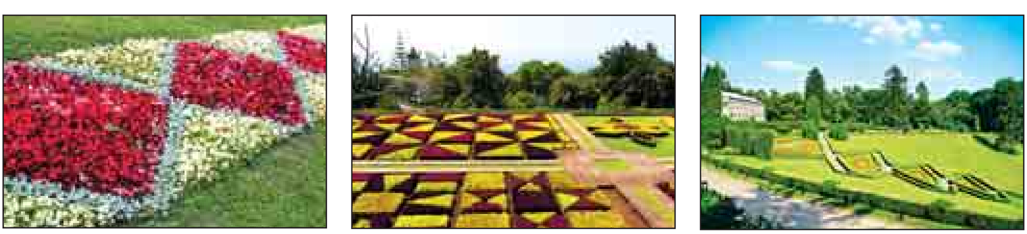
616. Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого на 3 см менша за основу, а менша висота дорівнює 12 см.

617. Знайдіть висоти паралелограма, якщо його сторони 5 см і 12 см, а кут між ними 60°.

618. Знайдіть радіус кола, якщо хорда довжиною 24 см віддалена від центра на 5 см.

619. Знайдіть кути рівнобічної трапеції, периметр якої дорівнює 48 см, а радіус вписаного кола 3 см.

Геометрія навколо нас

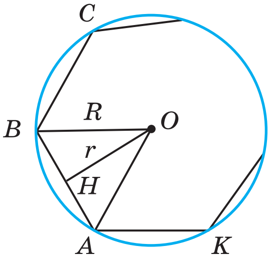


Многокутники у ландшафтному дизайні

§ 18 Правильні многокутники та кола

Встановимо співвідношення між стороною правильного n-кутника a_n і радіусами R_n і r_n описаного і вписаного в нього кіл.

Нехай $ABC...K$ — правильний n-кутник з центром O і стороною $AB = a_n$ (мал. 193).



Мал. 193

Тоді $OA = OB = R$, $OH = r$. Центральний кут AOB, який спирається на сторону AB правильного n-кутника, дорівнює $\frac{360°}{n}$. Тоді $\angle AOH = \frac{180°}{n}$, $AH = \frac{1}{2}a_n$, бо висота OH рівнобедреного $\triangle AOB$ є одночасно і бісектрисою, і медіаною.

Із прямокутного $\triangle AOH$ маємо:

1) $\frac{AH}{AO} = \sin\frac{180°}{n}$ або $\frac{a_n}{2R_n} = \sin\frac{180°}{n}$, звідки $a_n = 2R_n \sin\frac{180°}{n}$ і $R_n = \frac{a_n}{2\sin\frac{180°}{n}}$.

2) $\frac{AH}{HO} = \mathrm{tg}\frac{180°}{n}$ або $\frac{a_n}{2r_n} = \mathrm{tg}\frac{180°}{n}$, звідки $a_n = 2r_n\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$ і $r_n = \frac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}}$.

Ці формули дають можливість виражати сторони правильного n-кутника через радіуси описаного або вписаного кіл і, навпаки, можна знаходити радіуси описаного або вписаного кіл, знаючи сторону правильного n-кутника.

Наприклад, підставивши у формули $a_n = 2R_n \sin\frac{180°}{n}$ і $a_n = 2r_n\,\mathrm{tg}\frac{180°}{n}$ замість n числа 3, 4 і 6, отримаємо вираження довжин сторін правильних трикутників, чотирикутників і шестикутників через радіус R описаного кола і радіус r вписаного кола.

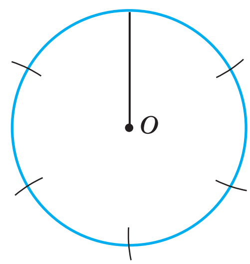
Кількість сторін правильного n-кутника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Сторона правильного n-кутника	$a_3 = R\sqrt{3}$	$a_4 = R\sqrt{2}$	$a_6 = R$
	$a_3 = 2r\sqrt{3}$	$a_4 = 2r$	$a_6 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$

Якщо у формули $R_n = \dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$ і $r_n = \dfrac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$ замість n підставити числа 3, 4 і 6, то отримаємо вираження радіуса R описаного кола і радіуса r вписаного кола через сторону правильних трикутника, чотирикутника і шестикутника зі стороною a_n.

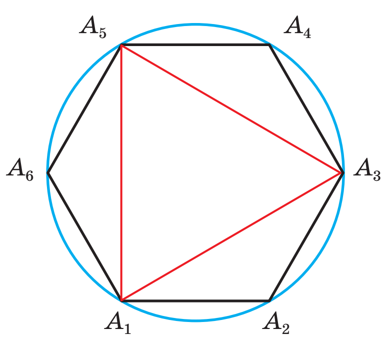
Кількість сторін правильного n-кутника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Радіус описаного кола	$R_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радіус вписаного кола	$r_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \dfrac{a}{2}$	$r_6 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Зверніть увагу!

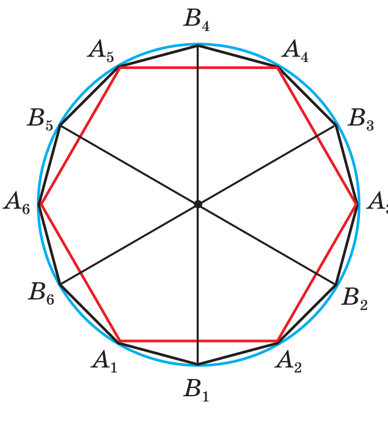
Сторона правильного шестикутника дорівнює радіусу описаного кола. Отже, щоб поділити коло на 6 рівних частин, досить послідовно відкласти 6 хорд, що дорівнюють радіусу кола (мал. 194). Якщо точки поділу з'єднати через одну, то отримаємо правильний трикутник (мал. 195). Якщо ж кожну з утворених 6 дуг поділити навпіл і точки поділу послідовно сполучити, то утвориться правильний дванадцятикутник (мал. 196) і т. д. Отже, якщо коло поділено на n рівних частин, то це коло неважко поділити на $2n$ рівних частин.



Мал. 194

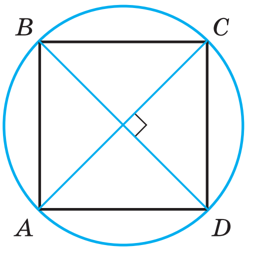


Мал. 195



Мал. 196

Щоб побудувати правильний чотирикутник (квадрат), у колі проводять два перпендикулярні діаметри, наприклад AC і BD (мал. 197) і послідовно сполучають їх кінці. Утворений у такий спосіб чотирикутник $ABCD$ — квадрат.

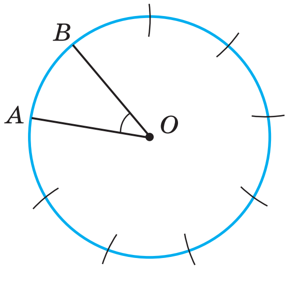


Мал. 197

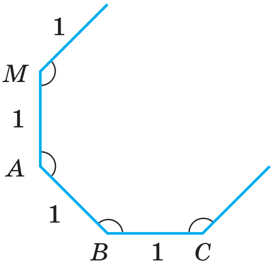
Використовуючи малюнок 197, спробуйте самостійно побудувати правильний восьмикутник.

Ви вже знаєте, як будувати правильні трикутник, чотирикутник і шестикутник. А як побудувати правильний п'ятикутник чи будь-який n-кутник?

Якщо коло поділити на n рівних частин і одержані точки поділу послідовно сполучити відрізками, то утвориться правильний n-кутник. Отже, задача про побудову правильного n-кутника зводиться до поділу кола на n рівних частин. Центральний кут $\angle AOB$, який спирається на сторону правильного n-кутника, вписаного в коло, дорівнює $\frac{360^\circ}{n}$. Тому, якщо потрібно поділити коло, наприклад, на 9 рівних частин, ми спочатку обчислюємо відповідний центральний кут ($360^\circ : 9 = 40^\circ$) і за допомогою транспортира будуємо такий центральний кут — $\angle AOB = 40^\circ$ (мал. 198).



Мал. 198



Мал. 199

А далі розхилом циркуля, що дорівнює AB, «обходимо» все коло. Якщо точки поділу послідовно сполучити відрізками, то утвориться правильний дев'ятикутник. Він правильний, бо його сторони рівні (як хорди, що стягують рівні дуги) і кути рівні (як вписані кути, що спираються на рівні дуги).

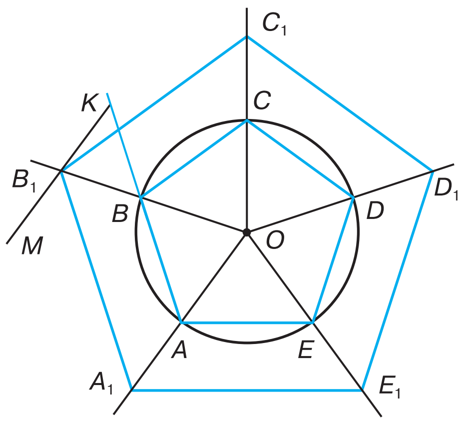
Можна будувати правильні многокутники і без використання кола. Побудуємо, наприклад, правильний восьмикутник зі стороною 1 см. Оскільки кут правильного восьмикутника дорівнює 135°, то за допомогою транспортира будуємо спочатку $\angle A = 135^\circ$ (мал. 199) і на його сторонах відкладаємо відрізки $AM = AB = 1$ см. А далі послідовно добудовуємо кути 135° і відкладаємо на них відрізки довжиною 1 см. Отриманий восьмикутник буде правильним, бо його кути і сторони рівні за побудовою. Однак побудований у такий спосіб восьмикутник практично може дуже відрізнятися від правильного восьмикутника, бо неминучі креслярські похибки додаються і в результаті можуть бути надто великими. У класичних побудовах дозволяється користуватися лише циркулем і лінійкою, а не транспортиром.

Як можна знайти площу правильного n-кутника? Як відомо, площу будь-якого многокутника з периметром $2p$, описаного навколо кола радіуса r, можна знайти за формулою $S = pr$. Ця формула справедлива і для правильного n-кутника.

Якщо його сторона a, то $p = \frac{1}{2}na$, тоді $S = \frac{1}{2}nar$.

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Вище йшлося про побудову довільного правильного n-кутника. А як побудувати правильний n-кутник із заданою довжиною сторони a (або радіуса r чи R кола, вписаного в цей многокутник чи описаного навколо нього)? Такі побудови виконують, користуючись методом подібності. Наприклад, щоб побудувати правильний п'ятикутник зі стороною $a_5 = 2$ см, спочатку будують довільний правильний п'ятикутник $ABCDE$ (мал. 200) і проводять промені OA, OB, OC, OD, OE. На промені AB відкладають відрізок $AK = a_5 = 2$ см і проводять $KM \parallel OA$. Якщо KM перетинає промінь OB у точці B_1, то далі проводять $B_1A_1 \parallel BA$, $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$ і т. д. П'ятикутник $A_1B_1C_1D_1E_1$ — той, який треба було побудувати.



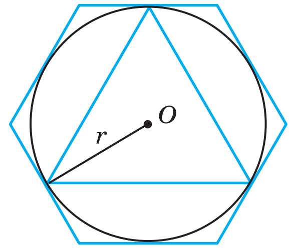
Мал. 200

Запитання і завдання для самоконтролю

1. Як виражається через радіус описаного кола сторона правильного: а) n-кутника; б) трикутника; в) чотирикутника; г) шестикутника?
2. Як виражається через радіус вписаного кола сторона правильного: а) n-кутника; б) трикутника; в) чотирикутника; г) шестикутника?
3. Як виражається радіус описаного кола через сторону правильного: а) n-кутника; б) трикутника; в) чотирикутника; г) шестикутника?
4. Як виражається радіус вписаного кола через сторону правильного: а) n-кутника; б) трикутника; в) чотирикутника; г) шестикутника?
5. Як знайти площу правильного n-кутника?
6. Як побудувати правильний n-кутник?
7. Як побудувати правильний n-кутник за його стороною?

Виконаємо разом

1 Сторона правильного шестикутника, описаного навколо кола, дорівнює 4 см. Знайдіть сторону правильного трикутника, вписаного в це коло.



Мал. 201

- Нехай радіус кола r (мал. 201). Тоді для шестикутника це буде радіус вписаного кола, а для трикутника — радіус описаного кола. Отже, $r_6 = \frac{a_6\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ см. Оскільки $r_6 = R_3$, то $a_3 = R_3\sqrt{3}$, $a_3 = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 6$ см.

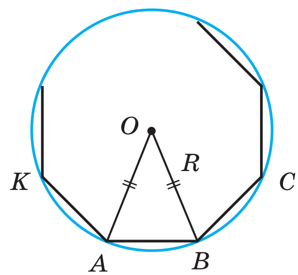
2 Доведіть, що площу правильного n-кутника, вписаного в коло радіуса R, можна визначити за формулою

$$S = \frac{1}{2} nR^2 \sin\frac{360°}{n}.$$

- На малюнку 202 зображено правильний n-кутник $ABC...K$, вписаний у коло радіуса R. Розглянемо $\triangle AOB$:

$$AO = BO = R,\ \angle AOB = \frac{360°}{n},$$

а тому $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin\frac{360°}{n}.$



Мал. 202

Оскільки $ABC...K$ — правильний n-кутник, то його площа S у n разів більша за площу трикутника AOB.
Отже,

$$S = n\cdot S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} nR^2 \sin\frac{360°}{n}.$$

Зверніть увагу на формули, за допомогою яких можна знайти площу правильних трикутника, чотирикутника і шестикутника зі стороною a.

Кількість сторін правильного n-кутника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Площа правильного n-кутника	$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$S = a^2$	$S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

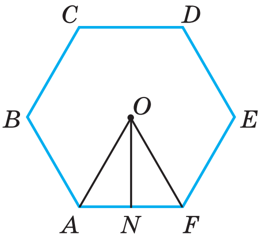
Задачі і вправи

Виконайте усно

620. Сторона правильного чотирикутника дорівнює a. Чому дорівнює: а) його периметр; б) довжина діагоналі; в) кут між діагоналями; г) радіус описаного кола; ґ) радіус вписаного кола; д) площа чотирикутника?

621. Діагональ правильного чотирикутника дорівнює d. Чому дорівнює: а) сторона чотирикутника; б) його периметр; в) радіус описаного кола; г) радіус вписаного кола; ґ) площа чотирикутника?

622. Сторона правильного шестикутника дорівнює a (мал. 203). Знайдіть: а) його периметр; б) радіус описаного кола; в) радіус вписаного кола; г) відстань між найвіддаленішими точками шестикутника; ґ) площу шестикутника.



Мал. 203

623. Сторона квадрата, описаного навколо кола, дорівнює a. Знайдіть сторону правильного шестикутника, вписаного в це коло.

А

624. Побудуйте правильний n-кутник, якщо:
а) $n = 3$; б) $n = 6$; в) $n = 8$; г) $n = 12$.

625. Побудуйте правильний n-кутник зі стороною 2 см, якщо:
а) $n = 5$; б) $n = 6$; в) $n = 9$; г) $n = 12$.

626. Побудуйте правильний трикутник за даним радіусом R описаного кола, якщо $h = 3$ см.

627. Побудуйте правильний шестикутник за: а) даним радіусом описаного кола; б) даною стороною; в) даним периметром.

628. Радіус кола дорівнює 8 см. Знайдіть сторону вписаного в це коло правильного n-кутника, якщо:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 12$.

629. Радіус кола дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону описаного навколо нього правильного n-кутника, якщо:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 18$.

630. Сторона правильного n-кутника дорівнює $4\sqrt{3}$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо нього, якщо:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 12$.

631. Сторона правильного n-кутника дорівнює $3\sqrt{6}$ см. Знайдіть радіус вписаного в нього кола, якщо:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 18$.

632. Сторона правильного многокутника, вписаного в коло, дорівнює 12 см. Знайдіть периметр і площу цього многокутника, якщо:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 5$; г) $n = 6$.

633. Знайдіть площу правильного n-кутника, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює 6 см. Розгляньте випадки:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 5$; г) $n = 6$; ґ) $n = 12$.

634. У коло вписано правильний шестикутник, периметр якого 24 см. Знайдіть периметр і площу вписаного в це коло правильного: а) трикутника; б) чотирикутника.

635. Знайдіть площу правильного n-кутника, якщо радіус вписаного в нього кола дорівнює 4 см і:
а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) $n = 12$.

636. У скільки разів площа квадрата, описаного навколо кола, більша за площу квадрата, вписаного в це коло?

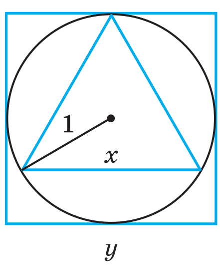
637. Периметри квадрата, рівностороннього трикутника і правильного шестикутника дорівнюють 36 см. Яка з цих фігур має найменшу площу, а яка — найбільшу?

Б

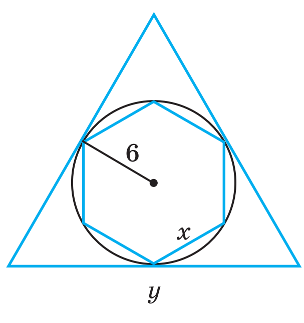
638. Дано правильний трикутник ABC. Побудуйте правильний шестикутник $AKBPCT$. Як відносяться їх периметри і площі?

639. Дано квадрат. Побудуйте правильний восьмикутник, чотири вершини якого збігалися б із вершинами даного квадрата. Як відносяться їхні периметри і площі?

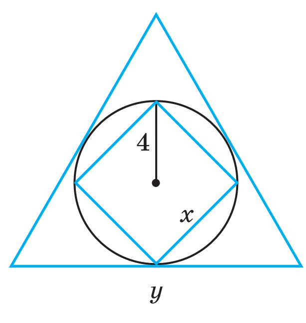
640. Користуючись малюнками 204–206, знайдіть невідомі сторони x і y правильних многокутників.



Мал. 204



Мал. 205



Мал. 206

641. Знайдіть довжини діагоналей правильного восьмикутника: а) за радіусом описаного кола R; б) за стороною a.

642. Знайдіть довжини діагоналей правильного дванадцятикутника: а) за радіусом описаного кола R; б) за стороною a.

643. У коло радіуса 12 см вписано правильний n-кутник і послідовно сполучено середини його сторін. Визначте сторону утвореного многокутника і радіус описаного навколо нього кола, якщо: а) $n = 4$; б) $n = 6$.

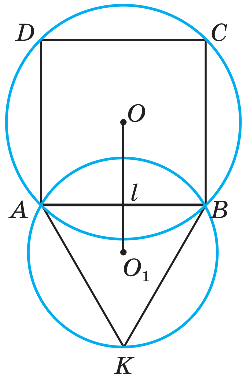
644. У коло, радіус якого дорівнює R, вписано правильний трикутник, а на його стороні побудовано квадрат. Знайдіть радіус кола, описаного навколо квадрата.

645. У коло з радіусом R вписано правильний трикутник, у трикутник вписано коло, у яке вписано квадрат. Знайдіть сторону квадрата.

646. У коло вписано правильний шестикутник зі стороною a, а навколо кола описано правильний трикутник. Він є також вписаним у деяке коло. Знайдіть відношення радіусів цих кіл.

647. ***Відкрита задача.*** У коло з радіусом R вписано правильний трикутник. У трикутник вписано **...** , а в нього вписано **...** . Знайдіть сторону **...** .

648. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, дорівнює l і служить для одного з кіл стороною правильного вписаного трикутника, а для другого — стороною вписаного квадрата (мал. 207). Знайдіть відстань між центрами кіл. Розгляньте інший випадок.



Мал. 207

649. Сторона правильного шестикутника дорівнює 10 см. Знайдіть сторону рівновеликого йому правильного трикутника.

650. Площа правильного шестикутника, описаного навколо кола, дорівнює $72\sqrt{3}$ см². Знайдіть площу правильного трикутника, описаного навколо цього кола.

651. Площа правильного восьмикутника, вписаного в коло, дорівнює $162\sqrt{2}$ м². Установіть відповідність між правильними многокутниками (1–4), вписаними в це коло, та значеннями їх площ (А–Д).

1 Трикутник
2 Чотирикутник
3 Шестикутник
4 Дванадцятикутник

А $\dfrac{243\sqrt{3}}{2}$
Б 243
В $\dfrac{243\sqrt{2}}{4}$
Г 162
Д $\dfrac{243\sqrt{3}}{4}$

Практичне завдання

652. Великий інтерес до геометричних побудов виявили всесвітньо відомі художники Леонардо да Вінчі, Альбрехт Дюрер, Сальвадор Далі, Мауріц Ешер. За допомогою правильних геометричних побудов вони досягали досконалості в зображенні простору.

Розгляньте ескіз Леонардо да Вінчі до його «Таємної вечері» (мал. 208), на якому, крім іншого, зображено побудову правильного восьмикутника, вписаного в коло, за його стороною.

а) Доведіть, що така побудова забезпечує правильне визначення центра кола, описаного навколо правильного восьмикутника із заданою стороною.

б) Побудуйте в такий спосіб правильний восьмикутник, сторона якого дорівнює 2 см.

Мал. 208

Задачі для повторення

653. Скільки діагоналей має правильний 75-кутник?

654. Знайдіть кути правильного 30-кутника.

655. У якому відношенні ділять кут діагоналі правильного шестикутника, які виходять з вершини цього кута?

656. Діагоналі ромба пропорційні числам 3 і 4, а площа дорівнює 12 $см^2$. Знайдіть периметр ромба.

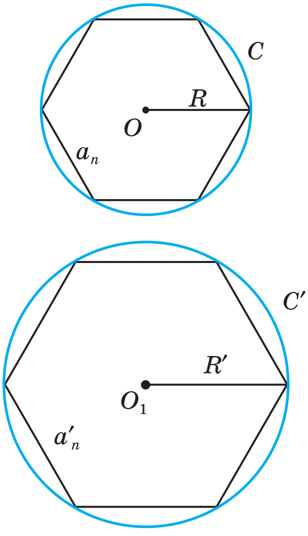
§ 19 Довжина кола і дуги кола

У молодших класах довжину кола визначають за допомогою нитки (згадайте, як це робиться). Але нитка — не геометричне поняття, до того ж вимірювання довжини кола ниткою дає лише наближені результати. Тому розглянемо це питання з погляду геометрії.

Уявімо, що в коло вписано правильний 10-кутник, потім — правильний 20-кутник, 40-кутник і т. д. Їх периметри P_{10}, P_{20}, P_{40}, ... дедалі менше і менше відрізняються від довжини даного кола C. Якщо кількість сторін многокутника (n) необмежено збільшується, то P_n наближається до C. Можна сказати так: **довжина кола** — це число, до якого наближається числове значення периметра вписаного в це коло правильного n-кутника при необмеженому збільшенні кількості його сторін.

Виведемо формулу, що виражає довжину кола через його радіус. Нехай маємо два довільні кола (мал. 209). Позначимо їх радіуси буквами R і R', а довжини — буквами C і C'. У кожне з цих кіл впишемо правильний n-кутник з однаковим числом сторін. Якщо a_n і a'_n — сторони цих многокутників, а P_n і P'_n — їх периметри, то

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R \sin\frac{180^\circ}{n} \text{ і } P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R' \sin\frac{180^\circ}{n}.$$



Мал. 209

Звідки

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}.$$

Ця пропорція правильна при кожному значенні n. Тому якщо значення n необмежено збільшувати, то периметри P_n і P'_n прямуватимуть до довжин кіл C і C', а відношення периметрів — до відношення $\frac{C}{C'}$. Отже,

$$\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'} \text{ або } \frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

Оскільки $2R$ — діаметр кола радіуса R, то **відношення довжини кола до його діаметра одне й те саме для кожного кола.**

Це стале відношення прийнято позначати грецькою буквою π (читається «пі»). Число π ірраціональне, його наближене значення з точністю до сотих $\pi \approx 3{,}14$. Наприкінці минулого століття за допомогою спеціального програмного забезпечення на комп'ютері було знайдено мільйон цифр цього числа.

Отже, якщо C — довжина кола радіуса R, то $\frac{C}{2R} = \pi$, звідки

$$C = 2\pi R.$$

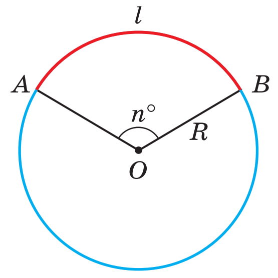
Це **формула довжини кола.**

Наприклад, якщо радіус кола $R = 150$ см, то його довжина

$$C \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 150 = 942 \text{ (см)}.$$

Виведемо формулу для обчислення довжини дуги кола (його частини).

Довжина дуги пропорційна до міри відповідного центрального кута. Дуга, що відповідає центральному куту $1°$, має довжину $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$. Тоді центральному куту $n°$ відповідає дуга довжиною $\frac{\pi R n}{180}$ (мал. 210).



Мал. 210

Отже, довжина l дуги кола радіуса R, градусна міра якої становить $n°$, обчислюється за формулою:

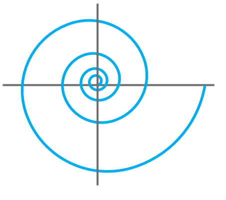
$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Довжину кола та його частин (з певним рівнем точності) уміли визначати ще 2000 років до н. е. у Стародавніх Єгипті та Вавилоні. Пізніше у Стародавній Греції Архімед, прийнявши діаметр кола за одиницю, вписував у коло і описував навколо кола правильні многокутники. Знайшовши периметри вписаного і описаного 96-кутника, він встановив, що довжина кола діаметром 1 знаходиться у таких межах:

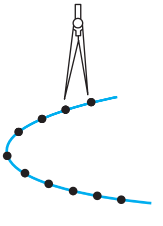
$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

Оскільки $3\frac{1}{7} \approx 3{,}142857$, то як наближене значення числа π для розв'язування багатьох практичних задач брали число 3,14.


Мал. 211

Досі йшлося про довжини кіл і їх частин. Крім них існує безліч інших кривих ліній: параболи, еліпси, спіралі (мал. 211) тощо. Як визначати довжини таких кривих або їх частин? З історії математики відомо, що це була дуже складна задача, яка мала назву «спрямлення кривої». Визначити довжину дуги кривої, крім кола, вдалося лише у XVII столітті. Нині довжини кривих визначають методами математичного аналізу.

На практиці довжини таких ліній визначають наближено. Довжину кривої, яка не є частиною кола, наближено можна визначити, крокуючи по ній циркулем відомого розхилу (мал. 212).


Мал. 212

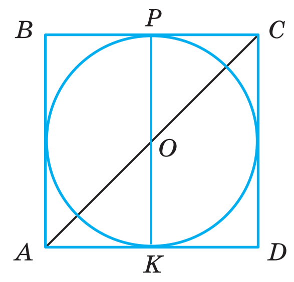
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Як позначається відношення довжини кола до його діаметра?
2. Чому дорівнює наближене значення числа π з точністю до сотих?
3. За якою формулою знаходять довжину кола?
4. За якою формулою знаходять довжину дуги кола?

Виконаємо разом

1 Знайдіть діагональ квадрата, описаного навколо кола, довжина якого дорівнює l.

● Позначимо радіус розглядуваного кола буквою r. Тоді $l = 2\pi r$, звідки $r = \frac{l}{2\pi}$. Сторона описаного квадрата дорівнює діаметру кола (мал. 213). $AB = KP = 2 \cdot r = \frac{l}{\pi}$. Шукана довжина діагоналі $AC = AB\sqrt{2} = \frac{l\sqrt{2}}{\pi}$.



Мал. 213

2 Знайдіть радіус кола, довжина якого дорівнює третині довжини кола радіуса 30 см.

● Довжина меншого кола дорівнює $\frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 30$ або 20π. Якщо шуканий радіус r, то $2\pi r = 20\pi$, звідки $r = 10$ (см).

Задачі і вправи

Виконайте усно

657. Знайдіть наближене значення 10π; 2π; $\frac{\pi}{2}$.

658. Чому дорівнює довжина кола радіуса 1 см; 1 м?

659. Діаметр кола дорівнює 2 м. Чому дорівнює довжина кола?

660. Чому дорівнює радіус кола завдовжки 2π см; 10π дм; $2m\pi$ см?

661. Більше чи менше 5 м дорівнює довжина кола радіуса 1 м?

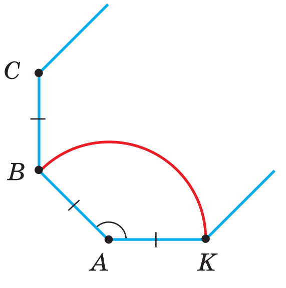
662. Знайдіть довжину кола, описаного навколо прямокутного трикутника з гіпотенузою 10 м.

663. Чому дорівнює довжина дуги AB кола з центром у точці O і радіусом 3 см, якщо $\angle AOB = 120°$?

А

664. Знайдіть довжину кола радіуса: а) 30 см; б) 12 см; в) 25 см.
665. Знайдіть радіус кола, довжина якого: а) 12π см; б) 6,28 см; в) 40π см.
666. Як збільшиться довжина кола, якщо його радіус збільшити в k разів?
667. Знайдіть довжину кола, описаного навколо квадрата зі стороною 8 см, і довжину кола, вписаного в цей квадрат.
668. Діагональ квадрата дорівнює d. Знайдіть довжину вписаного кола.
669. Знайдіть довжину кола, описаного навколо прямокутника, сторони якого дорівнюють 33 см і 56 см.
670. Сторона правильного шестикутника дорівнює 9 см. Обчисліть довжину кола, описаного навколо цього шестикутника, і кола, вписаного в нього.
671. Сторона правильного трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть довжину кола: а) вписаного в трикутник; б) описаного навколо трикутника.
672. Знайдіть довжину дуги кола, радіус якого 6 см, а відповідний центральний кут: а) 30°; б) 60°; в) 90°; г) 120°.
673. Навколо рівностороннього трикутника ABC зі стороною 6 см описано коло. Знайдіть довжини дуг AB, BC і AC.
674. Точки M і N ділять коло діаметра 20 см на частини, пропорційні числам 2 і 3. Знайдіть довжини утворених дуг.
675. Точки P і K ділять коло радіуса 4 см на дві дуги так, що різниця їх довжин дорівнює $1{,}4\pi$ см. Знайдіть довжину більшої дуги.
676. На стороні AC, що дорівнює 6 см, рівностороннього трикутника ABC, як на діаметрі, побудовано півколо. Знайдіть довжини дуг, на які це півколо ділять сторони AB і BC.
677. Хорда кола дорівнює його радіусу. Знайдіть довжини дуг, на які ця хорда розбиває коло, якщо діаметр кола 36 см.
678. Дано правильний многокутник $ABC...K$ (мал. 214), сторона якого дорівнює 18 см. BK — дуга кола з центром у точці A і радіуса AB. Установіть відповідність між мірою кута A (1–4) та довжиною дуги BK (А–Д).

1	60°	**А**	14π
2	108°	**Б**	$10{,}8\pi$
3	140°	**В**	6π
4	156°	**Г**	15π
		Д	$15{,}6\pi$



Мал. 214

679. На котушці діаметра 0,6 м є 30 витків дроту. Знайдіть довжину дроту.
680. Знайдіть довжину орбіти штучного супутника Землі, якщо він рухається по колу на відстані 320 км від поверхні Землі. Радіус Землі дорівнює приблизно 6370 км.

Б

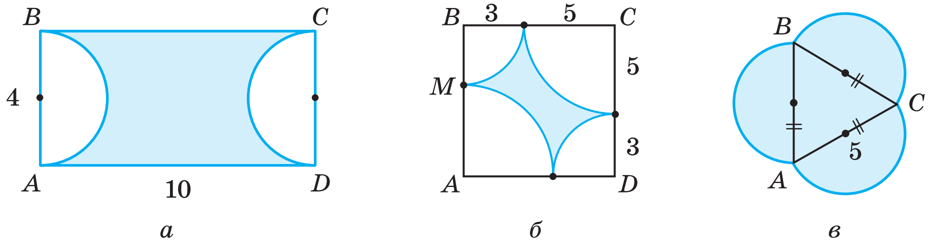
681. Уявіть, що кулю радіуса 6370 км оперезано по екватору обручем. Якщо довжину цього обруча збільшити на 1 м, він відійде від поверхні кулі (скрізь однаково) на якусь відстань. Знайдіть її.

682. Діаметр колеса тепловоза 0,8 м. Скільки обертів за хвилину робить це колесо, коли тепловоз їде зі швидкістю 60 км/год?

683. Катет прямокутного трикутника дорівнює a, а прилеглий гострий кут β. Знайдіть довжину описаного кола.

684. Як відносяться довжини двох кіл, одне з яких описане навколо правильного трикутника, а друге вписане в нього?

685. Знайдіть довжини ліній, які обмежують фігури, зображені на малюнку 215.



Мал. 215

686. Сторона ромба дорівнює 15 см, а кут — 30°. Знайдіть довжину вписаного кола.

687. Знайдіть довжину кола, описаного навколо трапеції зі сторонами a, a, a і $2a$.

688. Спільна хорда двох кіл, що перетинаються, дорівнює l і служить для одного з кіл стороною правильного вписаного трикутника, а для другого — стороною вписаного квадрата. Знайдіть довжини цих кіл.

689. Знайдіть довжину кола, яке довше від свого діаметра на 21,4 см.

690. Коло радіуса 3 см розігнуте в дугу радіуса 9 см. Знайдіть градусну міру утвореної дуги і міру відповідного їй центрального кута.

691. Навколо трикутника, кути якого пропорційні числам 3, 4 і 5, описано коло радіуса 6 см. Знайдіть довжини його дуг AB, BC і CA.

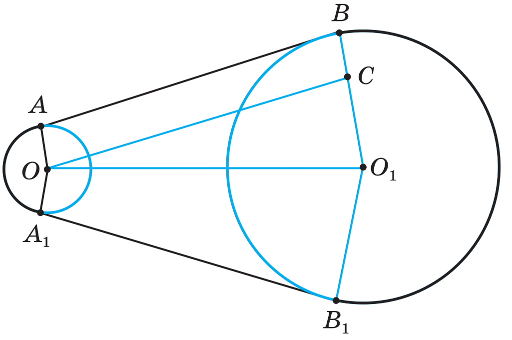
692. Знайдіть довжини дуг, на які коло довжиною 20π см ділить хорда, проведена на відстані $5\sqrt{2}$ см від центра кола.

693. Довжина кола 24π см. Знайдіть довжини дуг, на які це коло ділить хорда довжиною $12\sqrt{3}$ см.

694. З точки A кола з центром O проведено хорди AB і AC так, що $AC = 6\sqrt{2}$ см, $\angle BOC = 120°$. Знайдіть довжини дуг AB, AC і BC, якщо довжина кола 12π см. Скільки розв'язків має задача?

695. Хорда стягує дугу кола завдовжки l, градусна міра якої $n°$. Знайдіть довжину хорди.

696. Знайдіть довжину приводного паса, який сполучає два шківи, якщо їх радіуси дорівнюють 10 см і 30 см, а відстань між центрами $OO_1 = 1$ м (мал. 216).

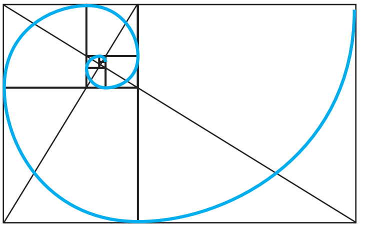


Мал. 216

Практичне завдання

697. а) У декартовій системі координат, у якій одиничний відрізок має довжину 1 см, на проміжку [−2; 3] побудуйте графік функції $y = x^2$. За допомогою циркуля і лінійки знайдіть наближену довжину цього графіка.

б) Аналогічно знайдіть наближену довжину частини золотої спіралі, зображеної на малюнку 217. Який розхил циркуля доцільно взяти у цьому випадку? Дізнайтеся більше про цю спіраль. Чому її так називають?


Мал. 217

Задачі для повторення

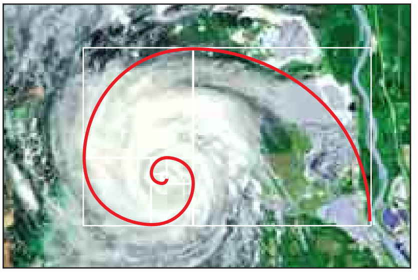
698. Знайдіть суму відстаней від центра кола діаметра d до сторін правильного трикутника, вписаного в це коло.

699. Знайдіть периметр шестикутника, вписаного в коло радіуса R.

700. У коло радіуса 3 см впишіть правильний 12-кутник.

701. Сторона ромба дорівнює a, а гострий кут α. Знайдіть діагоналі ромба, площу і радіус вписаного кола.

Геометрія навколо нас

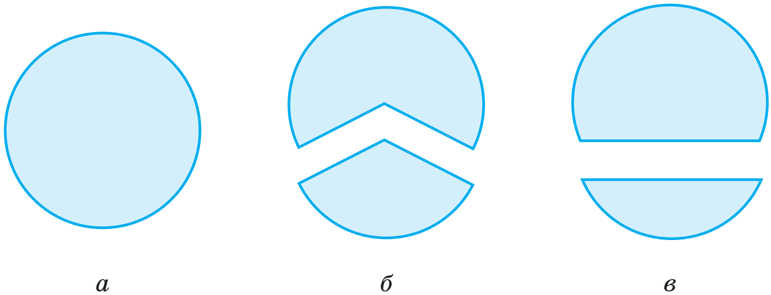


Золота спіраль у природі

§ 20 Площа круга та його частин

Кругом називається частина площини, обмежена колом. **Центром, радіусом, діаметром, хордою круга** називають відповідно центр, радіус, діаметр, хорду кола, яке обмежує даний круг. **Многокутником, вписаним у круг,** називають многокутник, вписаний у коло даного круга.

Частина круга, обмежена двома його радіусами, називається **сектором** (мал. 218, *б*). Хорда круга розбиває його на два **сегменти** (мал. 218, *в*). На малюнку 218 зображено круг, два сектори і два сегменти.



Мал. 218

Що таке площа круга? Відповісти на це запитання нелегко, бо строга теорія площ фігур, обмежених кривими лініями, досить складна; ми її не розглядатимемо. Зауважимо лише, що кожний круг має площу і що площа вписаного в круг правильного n-кутника при необмеженому збільшенні числа n прямує до площі круга. На основі цих тверджень виведемо формулу для обчислення площі круга.

Нехай дано круг довільного радіуса R. Впишемо в нього правильний n-кутник $ABCD...F$ (мал. 219).

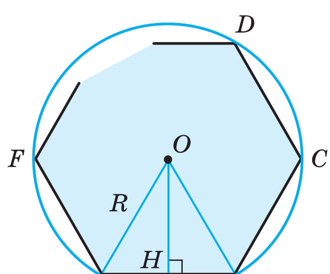
Якщо OH — висота трикутника OAB, то

$$AH = \frac{1}{2}AB, \quad \angle AOH = \frac{180^\circ}{n} \text{ і } OH = R\cos\frac{180^\circ}{n}.$$

$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}AB \cdot OH = \frac{1}{2}AB \cdot R\cos\frac{180^\circ}{n}$. Многокутник $ABCD...F$ складається з n таких трикутників, тому його площа

$$S_n = n \cdot \frac{1}{2}AB \cdot R\cos\frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2}PR\cos\frac{180^\circ}{n},$$

де P — периметр даного многокутника.



Мал. 219

Якщо число n нескінченно збільшувати, то периметр P наближатиметься до довжини кола $2\pi R$, кут $\frac{180°}{n}$ — до 0°, а його косинус — до 1. Тому

$$S = \pi R \cdot R \cdot 1 = \pi R^2.$$

Площу круга радіуса *R* знаходять за формулою

$$S = \pi R^2.$$

Виведемо формули для обчислення площі сектора та сегмента.

Площа сектора, що відповідає центральному куту 1°, дорівнює $\frac{\pi R^2}{360}$.

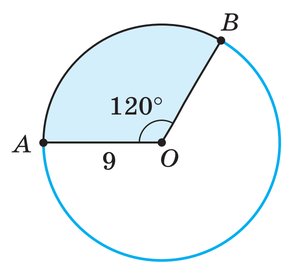
Тоді центральному куту $n°$ відповідає сектор, площа якого дорівнює $\frac{\pi R^2 n}{360}$.

Отже, **площа сектора** круга радіуса R, градусна міра якого становить $n°$, обчислюється за формулою

$$S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$

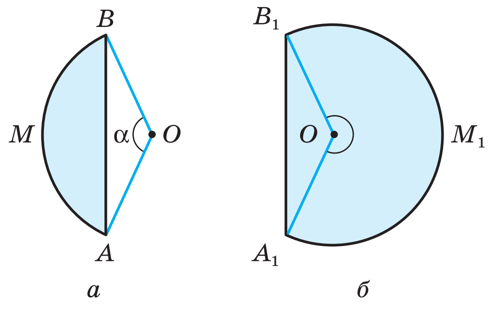
Наприклад, якщо радіус сектора $OA = 9$ см, а $\angle AOB = 120°$ (мал. 220), то площа цього сектора

$$S_{\text{сек}} = \pi \cdot 9^2 \cdot \frac{120}{360} = 27\pi \ (\text{см}^2).$$

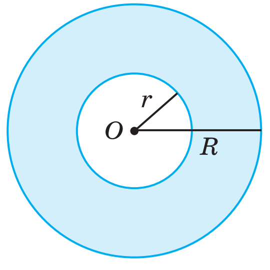


Мал. 220

Щоб знайти **площу сегмента** AMB (мал. 221), треба від площі відповідного сектора відняти площу трикутника OAB, якщо кут сектора $\alpha < 180°$ (мал. 221, *а*), або додати площу трикутника OAB, якщо $\alpha > 180°$ (мал. 221, *б*). Сектор з кутом 180° — **півкруг**, його площа дорівнює половині площі відповідного круга.



Мал. 221



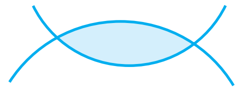
Мал. 222

Частиною круга є також **кільце**, обмежене двома концентричними колами (мал. 222). Якщо радіуси кіл, які обмежують кільце, дорівнюють R і r, то площа кільця

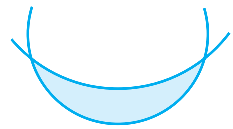
$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2).$$

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Цікаві з погляду геометрії частини круга, обмежені дугами двох кіл, — **лінзи** (мал. 223) і **серпики** (мал. 224). Подумайте, як можна визначати площі таких фігур, знаючи, наприклад, радіуси кіл, які їх обмежують, і відстань між їх центрами.



Мал. 223



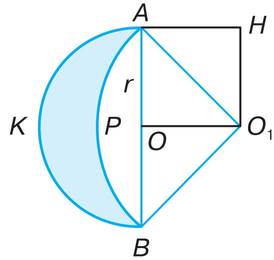
Мал. 224

Для прикладу розглянемо такий серпик, обмежений півколом радіуса r і чвертю кола радіуса $r\sqrt{2}$ (мал. 225). Його площа

$$S = \frac{\pi r^2}{2} - \left(\frac{1}{4}\pi\left(r\sqrt{2}\right)^2 - r^2\right) = r^2.$$

Площа серпика $AKBP$ дорівнює площі квадрата AOO_1H. Існують серпики, квадратура яких можлива! Це довів ще в V ст. до н. е. Гіппократ Хіоський. (Не плутайте з давньогрецьким лікарем, автором «Клятви Гіппократа», який жив у III ст. до н. е.)

Квадратура фігури — це обчислення її площі. Раніше говорили, що квадратура фігури можлива, якщо можна побудувати (циркулем і лінійкою!) квадрат, рівновеликий даній фігурі.



Мал. 225

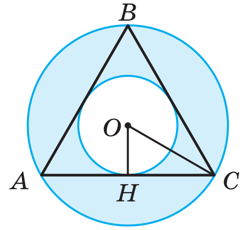
Запитання для самоконтролю

1. Що називається кругом?
2. За якою формулою знаходять площу круга?
3. Що називається сектором?
4. За якою формулою знаходять площу сектора?
5. Що називається сегментом?
6. За якою формулою знаходять площу сегмента?
7. Що називається кільцем? За якою формулою знаходять площу кільця?

Виконаємо разом

1 У правильний трикутник вписано коло радіуса r і навколо нього описано коло. Знайдіть площу кільця, обмеженого цими колами.

- Задачі відповідає малюнок 226, на якому $OH = r$, $OC = R$. Оскільки у правильному трикутнику $R = 2r$, то площа кільця $S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(4r^2 - r^2) = 3\pi r^2$.



Мал. 226

2 Три кола радіуса r попарно мають зовнішній дотик. Обчисліть площу «криволінійного трикутника», обмеженого дугами цих кіл.

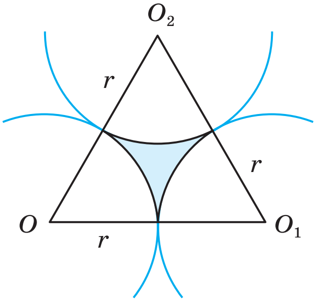
- Центри даних кіл утворюють рівносторонній трикутник OO_1O_2 зі стороною $2r$ (мал. 227). Його площа

$$S = \frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4r^2\sqrt{3}}{4} = r^2\sqrt{3}.$$

Оскільки $\angle O_2OO_1 = 60°$, то площа кожного з утворених секторів дорівнює $\frac{1}{6}\pi r^2$.

Тоді площа шуканої фігури

$$S = \sqrt{3}r^2 - 3\cdot\frac{1}{6}\pi r^2 = r^2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\right).$$

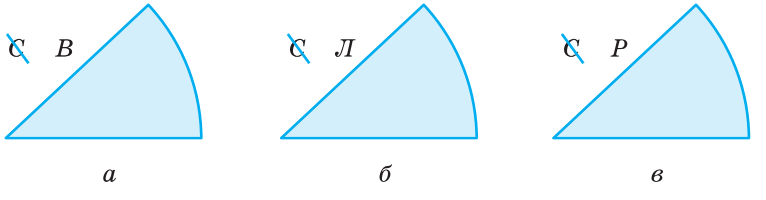


Мал. 227

Задачі і вправи

Виконайте усно

702. Знайдіть площу круга радіуса 1 м; 2 дм; 5 см.
703. Знайдіть площу круга діаметра 2 дм; 6 см; 3 м.
704. Знайдіть площу півкруга радіуса 6 см.
705. Площа круга дорівнює 3π м^2. Чому дорівнює його радіус?
706. Знайдіть площу круга, описаного навколо квадрата з діагоналлю d.
707. Знайдіть площу круга, вписаного в квадрат зі стороною a.
708. Як зміниться площа круга, якщо його радіус збільшити у 2 рази?
709. Як зміниться площа круга, якщо його діаметр зменшити у 3 рази?
710. Розв'яжіть ребус за малюнком 228.



Мал. 228

А

711. Обчисліть площу круга, радіус якого дорівнює 8 см; 10 см; 5 см.
712. Обчисліть площу круга, діаметр якого дорівнює 6 см; 18 см; 22 см.
713. Площа круга дорівнює S. Знайдіть довжину кола, яке обмежує його, якщо S дорівнює: а) 12,56 см^2; б) 16π см^2; в) $1{,}44\pi$ см^2.

714. Знайдіть площу циркової арени, довжина кола якої 41 м.

715. Побудуйте круг, площа якого дорівнює 4π см^2, впишіть у нього квадрат. Знайдіть площу круга, вписаного в цей квадрат.

716. Площі двох кругів відносяться як 4 : 9. Знайдіть відношення довжин їх кіл.

717. Знайдіть площу круга, якщо сторони вписаного в нього прямокутника дорівнюють 12 см і 16 см.

718. Знайдіть відношення площ кругів: а) вписаного у правильний трикутник; б) описаного навколо того самого трикутника.

719. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть площу: а) круга, вписаного в трикутник; б) круга, описаного навколо трикутника.

720. Знайдіть площу кільця, обмеженого концентричними колами радіусів 2 см і 5 см.

721. Площа кільця, обмеженого двома концентричними колами, дорівнює 63π см^2. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо:
а) один з них на 3 см більший за другий;
б) вони пропорційні числам 3 і 4;
в) їх сума дорівнює 21 см.

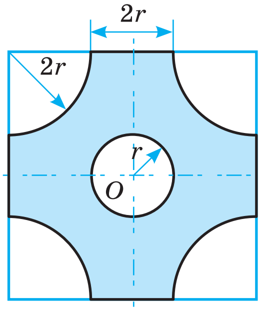
722. Знайдіть площу сектора круга радіуса 12 см, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює:
а) 40°; б) 60°; в) 120°; г) 270°.

723. Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 6 см, а дуга містить:
а) 60°; б) 90°; в) 120°; г) 150°.

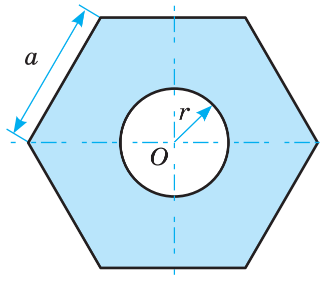
724. Із квадратного листа жерсті вирізали круг найбільшої площі. Скільки відсотків листа становлять відходи?

Б

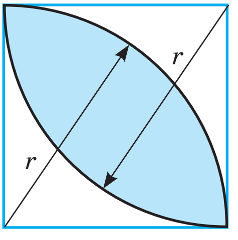
725. Знайдіть площі зафарбованих фігур (мал. 229–231).



Мал. 229



Мал. 230



Мал. 231

726. Сума катетів прямокутного трикутника на 10 см більша від гіпотенузи. Знайдіть площу круга, вписаного в цей трикутник.

727. На сторонах прямокутного трикутника, як на діаметрах, побудовано три півкруги. Доведіть, що площа найбільшого з них дорівнює сумі площ двох інших.

728. Сторона правильного шестикутника дорівнює 3 см. Знайдіть площі кругів: вписаного в цей шестикутник і описаного навколо нього.

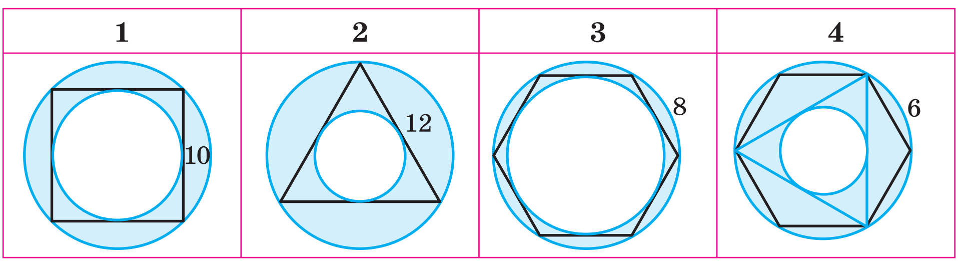
729. Площа круга, описаного навколо рівнобедреного трикутника, дорівнює 100π см^2. Знайдіть площу круга, вписаного в цей трикутник, якщо висота, проведена до основи, дорівнює 18 см.

730. Площа круга, вписаного в прямокутну трапецію, дорівнює 144π см^2. Знайдіть площу трапеції, якщо її більша основа 36 см.

731. Сторони трикутника дорівнюють 13 см, 14 см і 15 см. Знайдіть площу кільця, утвореного вписаним і описаним навколо трикутника колами.

732. Навколо правильного n-кутника зі стороною a описано коло і в нього вписано коло. Доведіть, що площа кільця, обмеженого цими колами, не залежить від числа n.

733. Установіть відповідність між зафарбованими фігурами (1–4), зображеними на малюнку 232, та їх площами (А–Д).

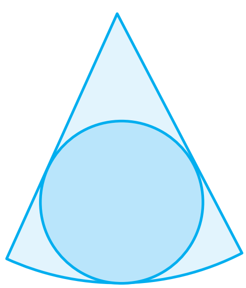


Мал. 232

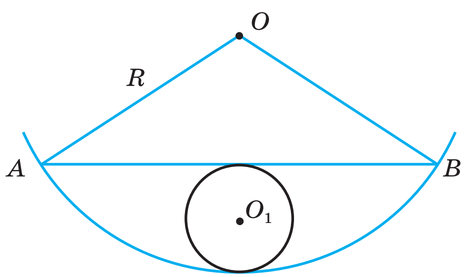
А	Б	В	Г	Д
36π	27π	25π	16π	9π

734. У круговий сектор з кутом 60° вписано круг (мал. 233). Знайдіть відношення площі сектора до площі вписаного круга.

735. Знайдіть площу круга, вписаного в сегмент круга радіуса R, дуга якого 120° (мал. 234).



Мал. 233



Мал. 234

736. Знайдіть радіус круга, якщо площа сектора цього круга дорівнює 20π см^2, а відповідний центральний кут дорівнює $72°$.

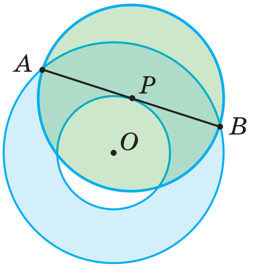
737. Хорда довжиною $9\sqrt{3}$ см ділить круг діаметра 18 см на два сегменти. Знайдіть площі цих сегментів.

738. У крузі радіуса R проведено дві паралельні хорди, кожна з яких стягує дугу $60°$. Знайдіть площу частини круга, що міститься між хордами.

739. Знайдіть площу спільної частини круга діаметра AB і трикутника ABC, якщо $AB = BC = CA = a$.

Практичне завдання

740. Накресліть два концентричні кола радіусів R і r та хорду AB більшого з них, яка дотикається до меншого (мал. 235). Порівняйте площу кільця, обмеженого цими колами, з площею круга діаметра AB. Дослідіть, чи завжди ці площі рівні.



Мал. 235

Задачі для повторення

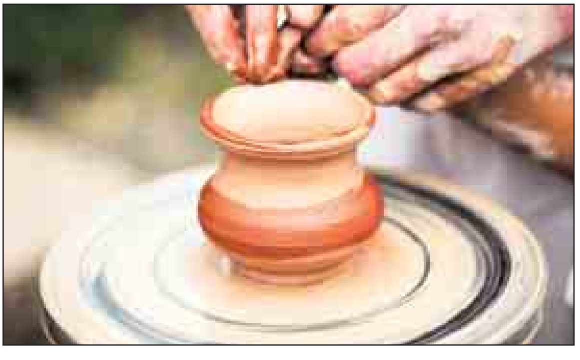
741. Знайдіть довжину кола, описаного навколо рівнобедреного прямокутного трикутника з катетом a.

742. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки 10 см і 26 см. Знайдіть довжину кола, вписаного в трикутник.

743. Основи рівнобічної трапеції пропорційні числам 4 і 9, а периметр дорівнює 52 см. Знайдіть довжину кола, вписаного в трапецію.

744. Знайдіть найбільший кут трикутника зі сторонами 9 см, 15 см, 21 см.

Геометрія навколо нас



Круг у побуті та мистецтві

Задачі за готовими малюнками

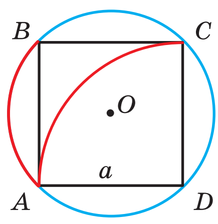
А **Б**

Знайдіть довжину дуги

1

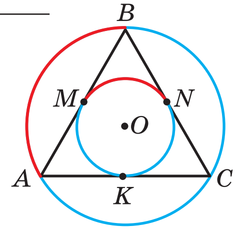
А. $ABCD$ — квадрат
$AD = a$

AB; AC



Б. $AB = BC = AC = a$

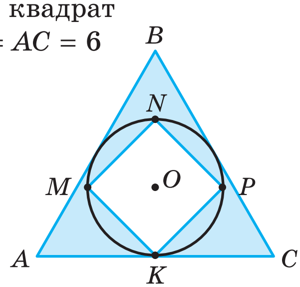
AB; MN



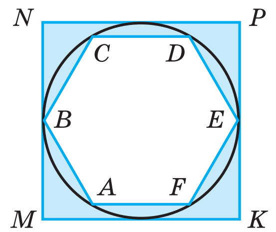
Знайдіть площі зафарбованих фігур

2

А. $MNPK$ — квадрат
$AB = BC = AC = 6$

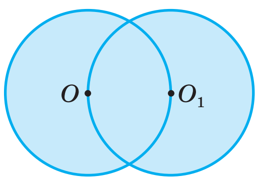


Б. $ABCDEF$ — правильний шестикутник,
$MNPK$ — квадрат,
$MN = 8$

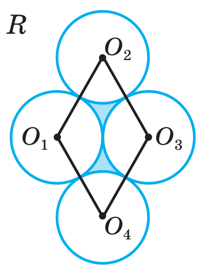


3

А. $OO_1 = 8$

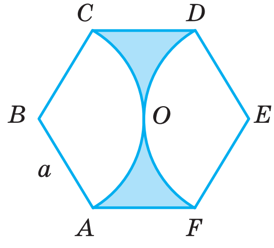


Б. $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$

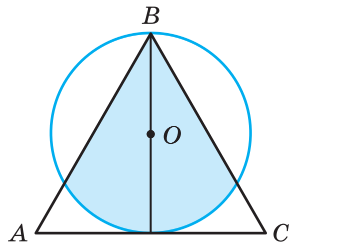


4

А. $ABCDEF$ — правильний шестикутник
$AB = a$



Б. $AB = BC = AC = 12$



Самостійна робота 4

Варіант 1

1°. Знайдіть міру внутрішнього і центрального кутів правильного 12-кутника.

2°. Сторона правильного 6-кутника дорівнює 8 см. Знайдіть довжину кола і площу круга, вписаного в шестикутник.

3•. У коло вписано квадрат периметра 24 см. Знайдіть периметр правильного трикутника, описаного навколо цього кола.

Варіант 2

1°. Знайдіть міру внутрішнього і центрального кутів правильного 9-кутника.

2°. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 18 см і 24 см. Знайдіть довжину кола і площу круга, описаного навколо трикутника.

3•. У коло вписано правильний 6-кутник периметра 36 см. Знайдіть периметр правильного трикутника, описаного навколо цього кола.

Варіант 3

1°. Знайдіть міру внутрішнього і центрального кутів правильного 10-кутника.

2°. Діагональ і бічна сторона рівнобічної трапеції перпендикулярні та дорівнюють 24 см і 10 см. Знайдіть довжину кола і площу круга, описаного навколо цієї трапеції.

3•. У коло вписано правильний трикутник периметра 12 см. Знайдіть периметр квадрата, описаного навколо цього кола.

Варіант 4

1°. Знайдіть міру внутрішнього і центрального кутів правильного 18-кутника.

2°. Сторони прямокутника дорівнюють 7 см і 24 см. Знайдіть довжину кола і площу круга, описаного навколо прямокутника.

3•. Периметр правильного трикутника, описаного навколо кола, дорівнює 36 см. Знайдіть периметр правильного 6-кутника, вписаного в це коло.

Тестові завдання 4

1	Довжина кола радіуса 6 см дорівнює:	а) 3π см; б) 6π см;	в) 12π см; г) 36π см.
2	Кут правильного шестикутника дорівнює:	а) 110°; б) 120°;	в) 135°; г) 150°.
3	Центральний кут правильного 8-кутника дорівнює:	а) 60°; б) 40°;	в) 45°; г) 72°.
4	R і r — радіуси описаного і вписаного в правильний трикутник кіл. Який знак слід поставити замість *: $R * 2r$?	а) >; б) <;	в) =; г) не можна встановити.
5	Площа півкруга діаметра 10 см дорівнює:	а) 25π см^2; б) 100π см^2;	в) $12{,}5\pi$ см^2; г) 50π см^2.
6	Сторона квадрата, описаного навколо кола завдовжки 16π см, дорівнює:	а) 16 см; б) 8 см;	в) 4 см; г) $4\sqrt{2}$ см.
7	Правильний $\triangle ABC$ вписаний в коло. Знайдіть довжину кола, якщо довжина дуги BAC дорівнює 6 см.	а) 12π см; б) 12 см;	в) 9 см; г) $4\sqrt{3}\pi$ см.
8	Знайдіть площу сектора круга радіуса 6 см з центральним кутом 60°.	а) 6π см^2; б) 36π см^2;	в) 9π см^2; г) 2π см^2.
9	Площа круга дорівнює 100π см^2. Знайдіть довжину його кола.	а) 100π см; б) 50π см;	в) 20π см; г) 2500π см.
10	Периметр правильного шестикутника дорівнює 48 см. Знайдіть довжину кола, описаного навколо нього.	а) 16π см; б) 96π см;	в) 8π см; г) 12π см.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Знайдіть внутрішній кут правильного десятикутника.

2°. Знайдіть площу сектора, радіус якого дорівнює 9 см, а центральний кут — 80°.

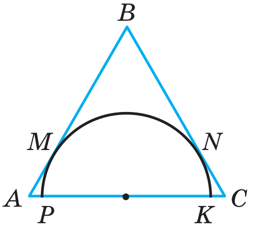
3°. Радіус кола, вписаного у квадрат, дорівнює 10 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього квадрата.

4°. Площа кільця, утвореного двома концентричними колами, дорівнює 32π см^2. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо один з них у 3 рази більший за другий.

5•. Знайдіть периметр правильного многокутника, сторона якого дорівнює 5 см, а кут — 156°.

6•. Сторона правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює 12 см. Знайдіть сторону правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.

7•. У правильний трикутник ABC вписано півколо з центром на стороні AC (мал. 236), яке дотикається до сторін AB і BC у точках M і N. Знайдіть довжини дуг PM, MN, NK, якщо $PK = 4$ см.

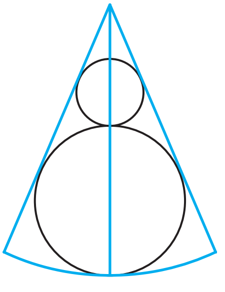


Мал. 236

8•. Бічна сторона і основа рівнобедреного трикутника пропорційні відповідно числам 13 і 10, а висота, проведена до основи, дорівнює 24 см. Знайдіть відношення площі круга, вписаного у трикутник, до площі круга, описаного навколо цього трикутника.

9••. Доведіть, що середини сторін правильного 10-кутника є вершинами іншого правильного 10-кутника.

10••. У сектор радіуса R з центральним кутом 60° вписано два кола, які дотикаються одне одного, і радіусів, що обмежують сектор (мал. 237). Знайдіть відношення довжин цих кіл, якщо радіус одного з них на 4 см більший за радіус другого. Чому дорівнює R?



Мал. 237

> *Справжній світ — найкращий із світів.*
> *Г. Лейбніц*

Головне в розділі 4

Правильним многокутником називається опуклий многокутник, у якого всі сторони рівні і всі кути рівні. Якщо многокутник правильний, то навколо нього можна описати коло і в нього можна вписати коло. Центрами цих кіл є одна й та сама точка — **центр правильного многокутника**. Перпендикуляр, опущений з центра правильного многокутника на його сторону, — **апофема** даного многокутника.

Для обчислення кутів, що стосуються правильного n-кутника, використовують формули:

Внутрішній кут	**Зовнішній кут**	**Центральний кут**
$\dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$	$\dfrac{360^\circ}{n}$	$\dfrac{360^\circ}{n}$

Щоб побудувати правильний n-кутник, можна поділити коло на n рівних частин і послідовні точки поділу сполучити відрізками.

Сторона a_n правильного n-кутника через радіус R описаного кола і радіус r вписаного кола виражається формулами:

$$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} \text{ і } a_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}.$$

Зокрема,

$a_3 = R\sqrt{3},\ \ a_4 = R\sqrt{2},\ a_6 = R$ і $a_3 = 2\sqrt{3}r,\ a_4 = 2r,\ a_6 = r.$

Сторона правильного шестикутника дорівнює радіусу описаного кола.

Для правильного n-кутника зі стороною a радіус описаного кола (R) та радіус вписаного кола (r) обчислюються за формулами:

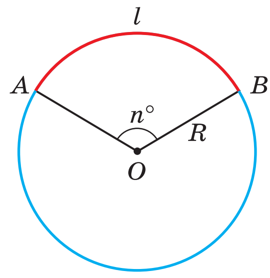
$$R = \frac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}} \text{ і } r = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,\dfrac{180^\circ}{n}}.$$

Зокрема, при $n = 3$, 4, 6 ці та інші величини обчислюються за формулами:

	$n=3$	$n=4$	$n=6$
R	$\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	a
r	$\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
P	$3a$	$4a$	$6a$
S	$\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$	a^2	$\dfrac{3\sqrt{3}a^2}{2}$

Відношення довжини кола до його діаметра дорівнює сталому числу $\pi \approx 3,14$. Тому довжину C кола радіуса R можна визначати за формулою $C = 2\pi R$. Довжину l дуги кола радіуса R, яка має n градусів, можна визначити за формулою

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$



Частина площини, обмежена колом, — **круг. Центром, радіусом, діаметром, хордою круга** називають відповідно центр, радіус, діаметр, хорду кола, яке обмежує даний круг.

Площу S круга радіуса R знаходять за формулою

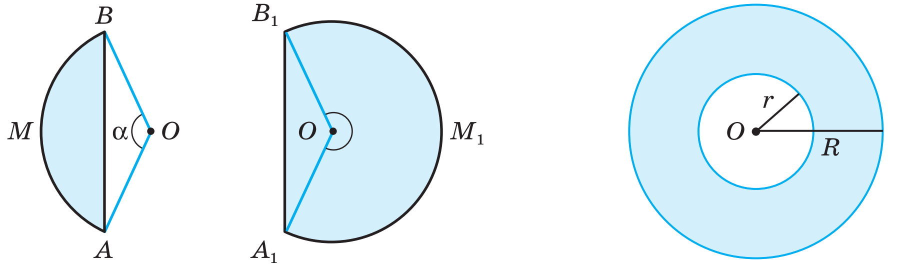
$$S = \pi R^2.$$

Частину круга, обмежену двома його радіусами, називають **сектором**, а частину круга, обмежену його хордою і дугою, — **сегментом.** Сегмент може бути меншим від півкруга або більшим.

Якщо сектор круга радіуса R має n градусів, то його площу обчислюють за формулою

$$S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$

Щоб знайти **площу сегмента** AMB, треба від площі відповідного сектора відняти площу трикутника OAB, якщо кут сектора $\alpha < 180°$, або додати площу трикутника OAB, якщо $\alpha > 180°$. Сектор з кутом $180°$ — **півкруг,** його площа дорівнює половині площі відповідного круга.



Частиною круга є також **кільце**, обмежене двома концентричними колами. Якщо радіуси кіл, які обмежують кільце, дорівнюють R і r, то площа кільця

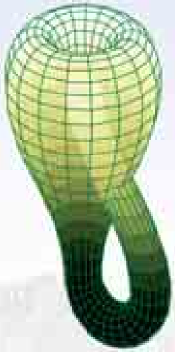
$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2).$$

Геометрична модель,
з точки зору наочності, дуже повчальна і цікава.
Конструктивна робота математика, який уперше відкрив теорему, принаймні така ж цінна, як і дедуктивна робота того, хто першим її довів

ФЕЛІКС ХРИСТИЯН КЛЕЙН

(1849–1925)

Відомий німецький математик, історик математики і педагог. Основні роботи стосуються геометрії, теорії алгебраїчних рівнянь, теорії груп, теорії функцій, топології. Його «Ерлангенська програма», у якій подавалася класифікація різних геометрій на основі груп перетворень, мала значний вплив на математиків, суттєво змінила їх погляди на геометрію і подальший розвиток математики. Перший голова Міжнародної комісії з математичної освіти, реформатор шкільної математичної освіти.



Одностороння поверхня — «Пляшка Клейна»

Розділ 5 | Section 5

Геометричні перетворення | Geometric Transformations

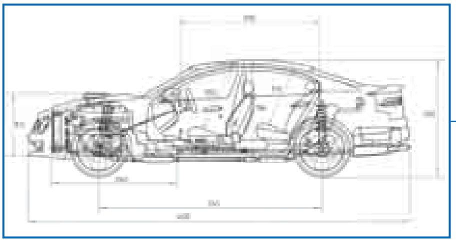
Геометричні перетворення — один із найважливіших розділів сучасної геометрії. У геометрії вони відіграють приблизно таку саму роль, як функції в алгебрі. На основі геометричних перетворень доводять складні твердження з різних розділів математики та розв'язують задачі, які іншими методами розв'язати надто важко чи зовсім неможливо.

Геометричні перетворення використовують не тільки геометри, а й фахівці інших галузей: архітектори, конструктори, майстри прикладного мистецтва.

Для чого вивчати геометричні перетворення?

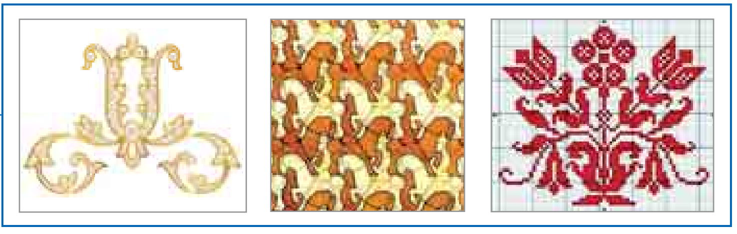
Геометрія допомагає краще вивчати довкілля, досліджувати не тільки стани (різні види фігур, їх розміри і форми), а й процеси. Для цього найбільше підходять геометричні перетворення.

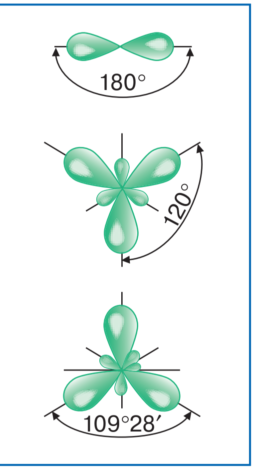
Хто має справу з геометричними перетвореннями? Насамперед науковці, інженери, архітектори, конструктори, митці та інші.



Геометричні перетворення — значна частина особливої мови, якою спілкуються творці задумів з робітниками, інженерами. Перш ніж створити який-небудь механізм, конструктори створюють креслення.

Фізики, механіки, інженери й інші фахівці мають справу з подібними, симетричними відносно осі чи точки фігурами. Навіть ювеліри, художники і вишивальниці мають справу з геометричними перетвореннями.





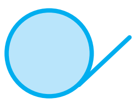
Геометричні перетворення ви використовуєте для побудови графіків і дослідження властивостей функцій, для вивчення різних процесів у фізиці і валентних зв’язків у хімії, для характеристики живих організмів у біології, для оздоблення та конструювання одягу тощо.

Важливу роль геометричні перетворення відіграють у комп’ютерах. Повертання малюнків на різні кути, паралельні перенесення їх — усе це рухи. Збільшення чи зменшення малюнків і шрифтів — приклади перетворень подібності.

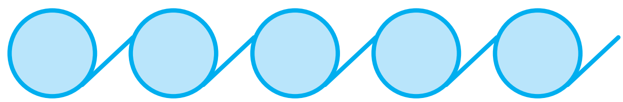
А де ще використовують геометричні перетворення? Наведіть свої приклади.

§ 21 Переміщення та його властивості

Розглянемо, як утворюють орнаменти, які використовують для оздоблення шпалер, килимів, одягу, прикрас та інших предметів побуту. Спочатку обирають базовий елемент орнаменту (мотив) — частину візерунка, що багаторазово повторюється (мал. 238). Найпростіший стрічковий орнамент можна отримати, якщо змістити мотив у вибраному напрямі та повторити цю операцію декілька разів (мал. 239).

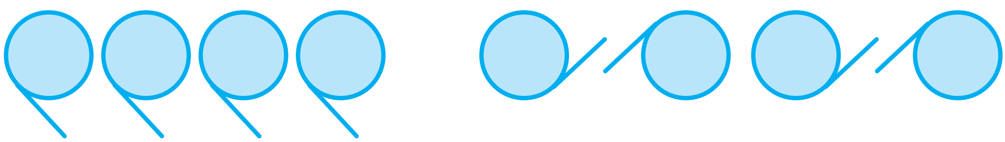


Мал. 238



Мал. 239

Зміщуючи мотив орнаменту в різних напрямах, можна отримати багато різних орнаментів за допомогою одного і того самого мотиву (мал. 240).

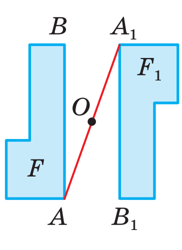


а *б*

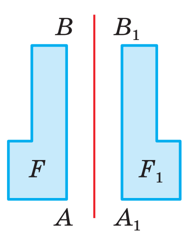
Мал. 240

Якщо точки фігури F змістити яким-небудь способом, то дістанемо нову фігуру F_1. Якщо при цьому різні точки фігури F переходять (відображаються) в різні точки фігури F_1, то говорять про **геометричне перетворення фігури** F у фігуру F_1. При цьому фігуру F_1 називають образом фігури F, а фігуру F — прообразом фігури F_1.

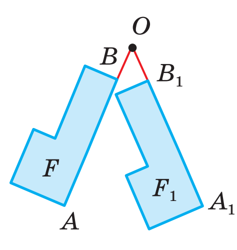
На малюнках 241–245 зображено приклади геометричних перетворень фігур F у фігури F_1. Зверніть увагу, що в результаті чотирьох перших перетворень (мал. 241–244) відстані між відповідними точками зберігаються: $AB = A_1B_1$. У п'ятому випадку (мал. 245) відстані між точками фігури F і відповідними точками фігури F_1 не зберігаються: $AB \neq A_1B_1$.



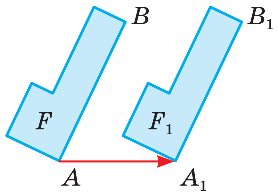
Мал. 241



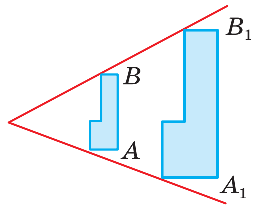
Мал. 242



Мал. 243



Мал. 244



Мал. 245

Геометричні перетворення, при яких зберігаються відстані між точками, називають **переміщеннями** (або **рухами**).

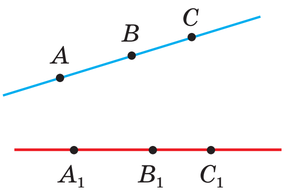
Далі ми розглянемо окремі види переміщень: симетрію відносно точки (мал. 241), симетрію відносно прямої (мал. 242), поворот (мал. 243) і паралельне перенесення (мал. 244). Спочатку звернемо увагу на загальні властивості переміщень. Пригадаємо, що точка B лежить між точками A і C тоді і тільки тоді, коли B — внутрішня точка відрізка AC, тобто коли виконується рівність $AB + BC = AC$.

ТЕОРЕМА 12

Якщо точка B лежить між точками A і C, а переміщення відображає їх відповідно на точки B_1, A_1 і C_1, то B_1 лежить між A_1 і C_1.

ДОВЕДЕННЯ.

Якщо точка B лежить між точками A і C, то $AB + BC = AC$ (мал. 246). При переміщенні відстані між точками зберігаються: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Підставивши ці значення в рівність $AB + BC = AC$, дістанемо: $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$. А це й означає, що точка B_1 лежить між точками A_1 і C_1. □



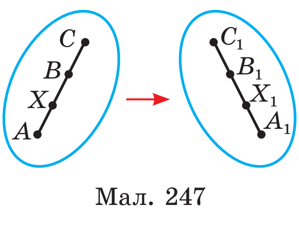
Мал. 246

ТЕОРЕМА 13

Переміщення відображає відрізок на рівний йому відрізок.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай AC — відрізок, а B — його довільна внутрішня точка (мал. 247). Розглянемо довільне переміщення. Згідно з теоремою 12 кожне переміщення відображає точки A, C і B на такі точки A_1, C_1 і B_1, що точка B_1 лежить між точками A_1 і C_1. Отже, це переміщення кожну точку відрізка AC відображає на деяку точку відрізка A_1C_1.



Мал. 247

Розглянемо ще довільну точку X_1 відрізка A_1C_1. Відкладемо на AC відрізок AX, який дорівнює A_1X_1. Оскільки при переміщенні відстані між точками зберігаються, то точка X відрізка AC відображається на точку X_1 відрізка A_1C_1.

Отже, кожна точка відрізка AC при переміщенні відображається на деяку точку відрізка A_1C_1, і при цьому переміщенні кожну точку відрізка A_1C_1 одержано з деякої точки відрізка AC. Це й означає, що переміщення відображає відрізок AC на відрізок A_1C_1. При цьому $A_1C_1 = AC$. □

Із двох попередніх теорем випливає, що переміщення відображає: пряму — на пряму, промінь — на промінь, кут — на рівний йому кут, трикутник — на рівний йому трикутник.

Користуючись поняттям переміщення, можна ввести загальне поняття рівності довільних геометричних фігур.

Дві фігури називають рівними, якщо вони переміщенням переводяться одна в одну.

Із цього означення випливає:

1) **якщо фігура F дорівнює F_1, то і F_1 дорівнює F;**

2) **якщо фігура F дорівнює F_1, а F_1 дорівнює F_2, то F дорівнює F_2.**

Відомі вам із попередніх класів означення рівності відрізків, кутів і трикутників не суперечать новому загальному означенню рівності фігур.

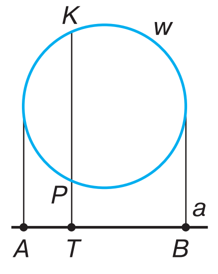
Із попередніх міркувань випливають такі твердження:

1) **кожне переміщення відображає будь-яку фігуру на рівну їй фігуру;**

2) **якщо дві геометричні фігури рівні, то існує переміщення, яке відображає одну з них на другу.**

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Уявіть, що кожну точку кола w спроектували на пряму a (мал. 248). У результаті утвориться відрізок AB. Чи можна таке відображення кола на відрізок AB вважати геометричним перетворенням даного кола? Ні, бо при такому відображенні дві різні точки K і P кола відобразилися на одну точку T відрізка.



Мал. 248

Геометричним перетворенням фігури F у F_1 називають таке відображення, при якому:

1) кожній точці фігури F відповідає єдина точка фігури F_1;

2) кожна точка фігури F_1 є образом деякої точки фігури F;

3) різним точкам фігури F відповідають різні точки фігури F_1.

Переміщення фігури на площині можна уявити як зміну положення цієї фігури на площині, а краще — у вигляді зміщення всієї площини разом з фігурою на ній.

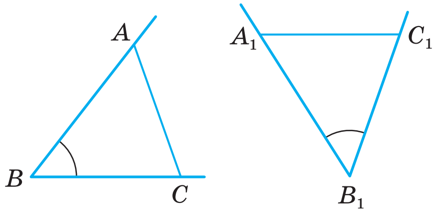
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які геометричні перетворення називають переміщеннями?
2. На яку фігуру переміщення відображає:
   а) відрізок; б) пряму; в) кут; г) трикутник?
3. Сформулюйте загальне означення рівності двох фігур.
4. Які властивості мають рівні фігури?

Виконаємо разом

1 Доведіть, що переміщення відображає кут на рівний йому кут.

● Нехай дано кут ABC (мал. 249). Сполучимо відрізком довільні точки A і C його сторін, одержимо $\triangle ABC$. Цей трикутник переміщенням відображається на $\triangle A_1B_1C_1$, що дорівнює $\triangle ABC$ (бо $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$), а даний кут ABC — на кут $A_1B_1C_1$. Оскільки відповідні кути рівних трикутників рівні, то $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$. А це й треба було довести.



Мал. 249

Задачі і вправи

Виконайте усно

745. Чи правильно виражає співвідношення між переміщеннями і геометричними перетвореннями діаграма, зображена на малюнку 250?

Мал. 250

746. Скільки існує точок, які лежать між точками A і B?

747. Чи правильно, що кожне геометричне перетворення відображає відрізок на відрізок?

748. Чи правильно, що кожне переміщення відображає відрізок на відрізок?

749. Чи може геометричне перетворення відобразити відрізок завдовжки 2 см на відрізок завдовжки 3 см?

750. Чи може переміщення відобразити відрізок на нерівний йому відрізок?

751. Чи може переміщення відобразити коло на круг? А круг — на коло?

752. Чи може переміщення відобразити рівнобедрений трикутник на різносторонній трикутник?

753. Чи існує переміщення, яке відображає трикутник на чотирикутник? А чотирикутник — на трикутник?

754. Чи рівні фігури, зображені на малюнку 251?

Мал. 251

А

755. Дано відрізки $AB = 3$ см, $CP = 5$ см і $KM = 5$ см. Доведіть, що існує переміщення, яке відображає відрізок KM на CP, і не існує переміщення, яке відображає CP на AB.

756. Трикутник ABC — рівносторонній. Чи існує переміщення, яке відображає відрізок AB на відрізок AC, кут A на кут B? Відповідь обґрунтуйте.

757. Доведіть, що переміщення відображає трикутник на рівний йому трикутник.

758. Знайдіть кути трикутника, якщо існує переміщення, яке відображає трикутник, один із кутів якого дорівнює 30°, на трикутник, один із кутів якого — 50°.

759. В одному трикутнику є кут 100°, а в другому — кут 120°. Чи існує переміщення, яке відображає один трикутник на другий? Чи можуть бути рівними ці трикутники?

760. Установіть вид трикутника, якщо існує переміщення, яке кожну сторону трикутника відображає на іншу його сторону.

761. Дано рівнобедрений прямокутний трикутник. Доведіть, що існує переміщення, яке відображає катет на другий катет. Чи існує переміщення, яке відображає катет на гіпотенузу?

762. Установіть вид чотирикутника, якщо існує переміщення, яке кожну його сторону відображає на іншу сторону.

763. Градусні міри двох дуг рівні. Чи можуть бути нерівними їх довжини? Чи завжди існує переміщення, яке відображає одну з цих дуг на іншу? Зробіть відповідні малюнки.

764. Периметр квадрата дорівнює 28 см. Чи існує переміщення, яке відображає даний квадрат на:

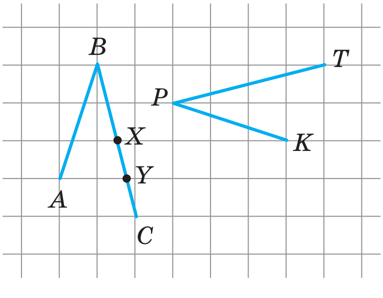
а) квадрат площею 49 см;

б) прямокутник периметра 28 см;

в) квадрат, описаний навколо кола радіуса 3,5 см;

г) ромб з діагоналями 4 см і $2\sqrt{3}$ см?

765. Переміщення відображає ламану ABC на ламану KPT (мал. 252). Побудуйте точки, на які відображаються цим переміщенням точки X, Y.



Мал. 252

Б

766. Доведіть, що переміщення відображає коло на коло.

767. Доведіть, що переміщення відображає паралельні прямі на паралельні прямі.

768. Переміщення відображає $\triangle ABC$ на $\triangle KPT$. Доведіть, що це переміщення відображає:
а) медіани першого трикутника на медіани другого;
б) бісектриси першого трикутника на бісектриси другого;
в) висоти першого трикутника на висоти другого.

769. При переміщенні точка O відображається на точку $O_1(-4; 5)$. Запишіть рівняння кола з центром у точці O_1, якщо $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 17$ — рівняння кола з центром у точці O.

770. ***Відкрита задача.*** Переміщення відображає коло **...** на коло з центром у точці **...** . Знайдіть **...** .

771. Дано точки $A(-3; 2)$, $B(1; 4)$, $C(-5; -1)$, $D(-1; -3)$. Доведіть, що:
а) існує переміщення, яке відображає відрізок AB на відрізок CD;
б) не існує переміщення, яке відображає відрізок AC на відрізок BD.

772. Ромб $ABCD$ з периметром 20 см і кутом 60° при деякому переміщенні відображається на чотирикутник $MNPK$. Знайдіть діагоналі й площу цього чотирикутника.

773. При переміщенні $\triangle ABC$ $(\angle C = 90°)$ з катетами 5 см і 12 см відображається на $\triangle KMN$. Знайдіть синуси кутів $\triangle KMN$.

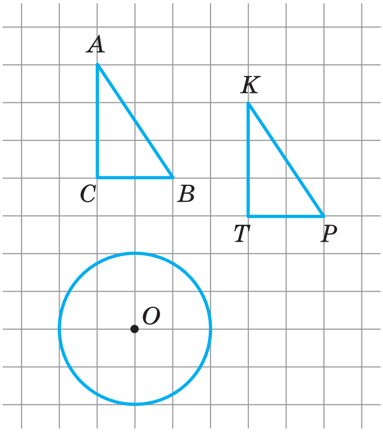
774. Якщо діагоналі одного ромба дорівнюють відповідно діагоналям другого ромба, то такі ромби рівні. Доведіть.

775. Якщо діагональ і сторона одного прямокутника дорівнюють відповідно діагоналі і стороні другого, то такі прямокутники рівні. Доведіть.

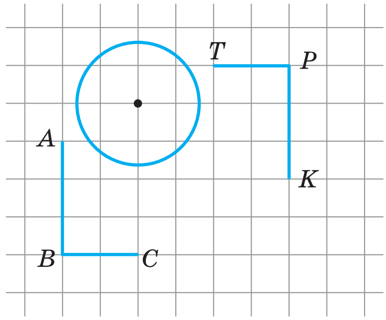
776. Сформулюйте і доведіть яку-небудь ознаку рівності паралелограмів.

Практичне завдання

777. а) Перемалюйте в зошит малюнок 253 і побудуйте фігуру, на яку відображається дане коло переміщенням, що переводить $\triangle ABC$ в $\triangle KPT$.
б) Перемалюйте в зошит малюнок 254. Зобразіть фігуру, у яку переходить коло внаслідок переміщення, яке відображає ламану ABC на ламану KPT.



Мал. 253



Мал. 254

Задачі для повторення

778. Синус одного з кутів прямокутного трикутника дорівнює 0,4. Знайдіть синуси двох інших кутів трикутника.

779. Через кінець діаметра кола проведено хорду, вдвічі коротшу від діаметра. Знайдіть кут між ними.

780. Прямі a і c перетинаються під кутом α. Під яким кутом перетинаються прямі x і y, якщо:
а) $a \parallel x$ і $c \parallel y$; б) $a \perp x$ і $c \perp y$?

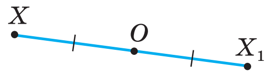
781. Знайдіть кути трикутника, якщо два його зовнішні кути дорівнюють $100°$ і $120°$.

Геометрія навколо нас

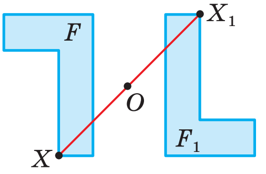
Такі різні переміщення

§ 22 Симетрія відносно точки

Точки X і X_1 називаються **симетричними відносно точки O**, якщо O — середина відрізка XX_1 (мал. 255). Якщо відносно O кожна точка фігури F симетрична деякій точці фігури F_1 і навпаки, то фігури F і F_1 симетричні відносно точки O (мал. 256). Таке відображення фігури F на F_1 називають **перетворенням симетрії відносно точки O**.



Мал. 255



Мал. 256

ТЕОРЕМА 14

Симетрія відносно точки — переміщення.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай симетрія відносно точки O відображає довільні точки A і B фігури F на точки A_1 і B_1 фігури F_1 (мал. 257). Доведемо, що $AB = A_1B_1$.

Точка O — середина відрізків AA_1 і BB_1, тому $OA = OA_1$ і $OB = OB_1$.

Якщо точки A, B і O не лежать на одній прямій, то кути AOB і A_1OB_1 рівні, бо вертикальні. За двома сторонами і кутом між ними трикутники ABO і A_1B_1O рівні, тому $AB = A_1B_1$.

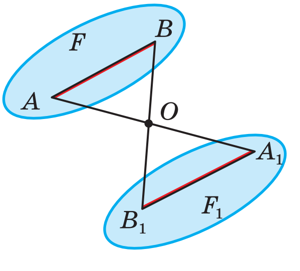
Якщо, наприклад, точка B лежить між A і O (мал. 258), то

$$AB = OA - OB = OA_1 - OB_1 = A_1B_1.$$

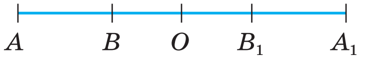
Якщо точка O лежить між A і B (мал. 259), то

$$AB = OA + OB = OA_1 + OB_1 = A_1B_1.$$

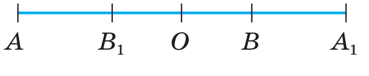
Отже, якщо точки A і B симетричні точкам A_1 і B_1 відносно точки O, то завжди $AB = A_1B_1$. Тому симетрія відносно точки — переміщення. □



Мал. 257



Мал. 258



Мал. 259

Оскільки симетрія відносно точки є переміщенням, то вона відображає пряму на пряму, промінь — на промінь, відрізок — на рівний йому відрізок, кут — на рівний йому кут і взагалі — будь-яку фігуру на рівну їй фігуру.

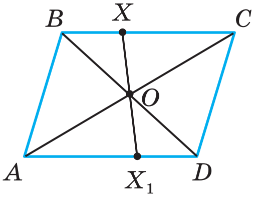
Симетрію відносно точки (або перетворення симетрії відносно точки) часто називають також **центральною симетрією**.

Іноді трапляється, що симетрія відносно точки дану фігуру F відображає на цю саму фігуру F.

Якщо перетворення симетрії відносно деякої точки O відображає фігуру F на себе (тобто на цю саму фігуру), то таку фігуру називають **центрально-симетричною**, а точку O — її **центром симетрії**. Наприклад, кожний паралелограм — центрально-симетрична фігура. Центром симетрії паралелограма є точка перетину його діагоналей.

Кожна точка X паралелограма симетрична відносно O деякій точці X_1 цього самого паралелограма (мал. 260). Чому? Точку O називають також **центром паралелограма**. Центрально-симетричними фігурами є коло, квадрат, правильний шестикутник тощо.

Приклади центрально-симетричних фігур, які трапляються в природі, техніці, побуті, спорті, зображені на малюнках 261–263.



Мал. 260

Мал. 261

Мал. 262

Мал. 263

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

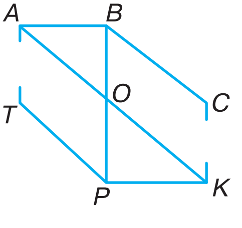
Розглянемо важливі властивості центрально-симетричних многокутників. Якщо n-кутник має центр симетрії O, то число n парне, бо кожній його вершині відповідає протилежна їй вершина — симетрична відносно O.

ТЕОРЕМА 15

Протилежні сторони центрально-симетричного многокутника паралельні і рівні.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $ABC...KPT...$ — центрально-симетричний многокутник, а O — його центр симетрії (мал. 264). Проведемо діагоналі AK і BP. За двома сторонами і кутом між ними $\triangle ABO = \triangle KPO$. Тому $AB = KP$ і $\angle BAO = \angle PKO$. Ці кути — внутрішні різносторонні при січній AK і прямих AB і KP. Тому $AB \parallel KP$. □

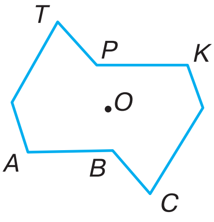


Мал. 264

Теорема правильна не тільки для опуклих центрально-симетричних многокутників, а й для неопуклих (мал. 265).

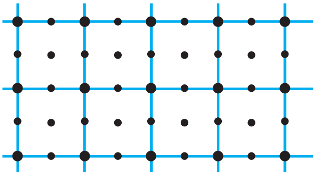
Якщо центрально-симетричні фігури обмежені, то вони мають тільки один центр симетрії. Необмежені фігури можуть мати безліч центрів симетрії. Наприклад, нескінченна в обидва боки крива, зображена на малюнку 266, має безліч центрів симетрії. Де вони містяться?

Необмежена у всі боки сітка з рівних квадратів також має безліч центрів симетрії. Ними є: центри всіх квадратиків, усі їх вершини і середини всіх сторін (мал. 267).



Мал. 265


Мал. 266


Мал. 267

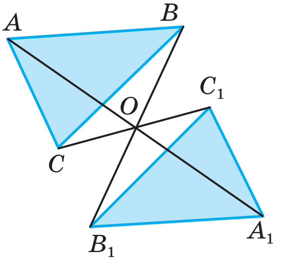
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які точки називають симетричними відносно точки?
2. Чи є перетворення симетрії переміщенням? Доведіть.
3. Сформулюйте властивості симетрії відносно точки.
4. Які фігури називають центрально-симетричними?
5. Наведіть приклади центрально-симетричних фігур.

Виконаємо разом

1 Побудуйте трикутник, симетричний $\triangle ABC$ відносно точки O, яка лежить поза трикутником (мал. 268).

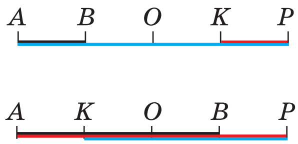
- Через вершини $\triangle ABC$ і точку O проводимо прямі AO, BO, CO і відкладаємо відрізки $OA_1 = OA$, $OB_1 = OB$, $OC_1 = OC$. Сполучивши точки A_1, B_1, C_1, отримаємо $\triangle A_1B_1C_1$, симетричний $\triangle ABC$ відносно точки O.



Мал. 268

2 На прямій дано два рівні відрізки. Вкажіть, де буде їх центр симетрії.

● Нехай рівні відрізки AB і KP лежать на одній прямій. Можливі різні випадки їх розташування (мал. 269), але завжди їх центр симетрії — точка O — ділить навпіл відстань між найвіддаленішими точками даних відрізків.



Мал. 269

3 Дано точку $A(a;\ b)$. Знайдіть координати точки B, симетричної точці A відносно точки $M(m;\ n)$.

● Якщо точка $B(x;\ y)$ симетрична точці $A(a;\ b)$ відносно точки M, то точка $M(m;\ n)$ — середина відрізка AB. Отже,

$\frac{x+a}{2}=m$, $\frac{b+y}{2}=n$, звідки $x = 2m - a$, $y = 2n - b$.

Отже, маємо точку $B(2m - a;\ 2n - b)$.

Задачі і вправи

Виконайте усно

782. Точки A і B симетричні відносно точки M. Знайдіть відношення: а) $AM : AB$; б) $AM : MB$.

783. На координатній прямій дано точки $A(-2)$, $B(-1)$, $O(0)$, $C(1)$, $D(2)$. Які з цих точок симетричні відносно інших?

784. Закінчіть формулювання правильного твердження: «Відносно точки перетину діагоналей паралелограма кожна його вершина симетрична..., кожна його сторона симетрична..., кожна його діагональ симетрична...».

785. Назвіть кілька геометричних фігур, які мають центри симетрії.

786. Чи існують фігури, які мають безліч центрів симетрії? Наведіть приклади.

787. Скільки центрів симетрії мають дві паралельні прямі? А дві прямі, які перетинаються?

788. Чи має центр симетрії трикутник або п’ятикутник?

789. Чи має центр симетрії графік функції $y = x^3$?

А

790. Зобразіть дві фігури, що мають центр симетрії.

791. Дано точки A і O. Побудуйте точку A_1, симетричну точці A відносно точки O.

792. Дано відрізок AB і точку O. Побудуйте відрізок A_1B_1, симетричний відрізку AB відносно точки O, якщо: а) $O \notin AB$; б) $O \in AB$; в) O — середина AB.

793. Побудуйте фігуру, симетричну прямій a відносно точки O, якщо: а) $O \notin a$; б) $O \in a$.

794. Побудуйте довільний трикутник і трикутник, симетричний йому відносно точки O, якщо:
а) O лежить поза трикутником;
б) O лежить на стороні трикутника;
в) O — вершина трикутника;
г) O — точка перетину медіан трикутника.

795. Дано точки $A(2; -3)$, $B(4; 2)$, $C(-3; -3)$, $D(-5; 1)$. Знайдіть координати точок, симетричних даним відносно:
а) початку координат;
б) точки $M(1; 1)$.

796. Відносно якої точки симетричні точки:
а) $A(1; 2)$ і $B(5; 6)$;
б) $M(-1; 0)$ і $H(3; 6)$;
в) $E(2; 6)$ і $C(-8; 3)$;
г) $P(9; 0)$ і $K(6; 8)$?

797. Доведіть, що точки $A(a; c)$ і $B(-a; -c)$ симетричні відносно початку координат.

798. Дано дві паралельні прямі. Побудуйте геометричне місце їх центрів симетрії.

799. Дано два рівні і паралельні відрізки. Побудуйте їх центр симетрії. Доведіть, що побудована точка — центр симетрії даних відрізків.

800. Накресліть квадрат, ромб, прямокутник і паралелограм. Позначте іншим кольором їх центри симетрії.

801. Доведіть, що центром симетрії ромба є точка перетину його діагоналей.

802. Доведіть, що дві центрально-симетричні прямі паралельні.

Б

803. Добудуйте до даного трикутника фігуру, симетричну цьому трикутнику відносно середини однієї з його сторін.

804. Добудуйте до даної трапеції фігуру, симетричну цій трапеції відносно середини однієї з бічних сторін.

805. Побудуйте центрально-симетричний шестикутник: а) опуклий; б) неопуклий.

806. Два кола рівних радіусів дотикаються зовні в точці M. Доведіть, що M — центр симетрії цих кіл.

807. Доведіть, що чотирикутник, який має центр симетрії, — паралелограм.

808. При яких значеннях x і y точки $M(-1; y)$ і $N(x; 3)$ симетричні відносно точки $K(2; -1)$?

809. Напишіть рівняння кола, яке симетричне колу $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$ відносно:
а) початку координат; б) точки $M(3; -2)$.

810. Установіть, відносно якої точки симетричні кола $(x-1)^2+(y-5)^2=6$ і $(x+7)^2+(y-9)^2=6$.

811. Напишіть рівняння прямої, яка симетрична прямій $2x+y-6=0$ відносно: а) початку координат; б) точки $K(1; 1)$.
Побудуйте дані прямі і доведіть, що вони паралельні.

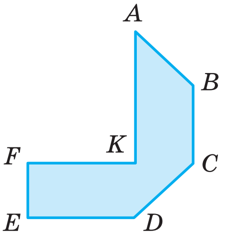
812. $x+2y+11=0$ і $2x-y+7=0$ — рівняння прямих, яким належать сторони квадрата, $M(-2; -2)$ — центр симетрії цього квадрата. Напишіть рівняння двох інших його сторін. Обчисліть периметр і площу квадрата.

813. Дано $\angle ABC$ і точку M всередині нього. Побудуйте відрізок з кінцями на сторонах кута такий, щоб точка M була його серединою.

814. Установіть відповідність між фігурами (1–4) та координатами (А–Д) їх центра симетрії (якщо він існує).

1 Відрізок AB, якщо $A(-1; 3)$, $B(5; 7)$	**А** (0,5; 4)
2 Чотирикутник $ABCD$, якщо $A(-2; 6)$, $B(0; 4)$, $C(3; 2)$, $D(1; 4)$	**Б** (2; −4)
3 Трикутник ABC, якщо $A(-2; 2)$, $B(3; 3)$, $C(2; -2)$	**В** (0; 0)
4 Коло $(x-2)^2+(y+4)^2=9$	**Г** не існує
	Д (2; 5)

815. Перемалюйте в зошит зображений на малюнку 270 семикутник. Добудуйте до нього семикутник, симетричний відносно середини сторони:
а) AB;
б) BC;
в) CD;
г) AK.



Мал. 270

Практичне завдання

816. 1. Виріжте з кольорового паперу дві рівні різнокольорові прямокутні трапеції і розташуйте їх на столі так, щоб вони виявились симетричними відносно:
а) однієї з вершин трапеції (4 випадки);
б) середини однієї її сторони (4 випадки);
в) довільної точки найбільшої сторони;
г) довільної точки, розташованої поза трапецією;
д) точки перетину діагоналей однієї трапеції.
2. На основі результатів завдання 1 намалюйте орнамент, мотивом якого є прямокутна трапеція. Сфотографуйте створений орнамент і ознайомте з ним своїх рідних і однокласників.

Задачі для повторення

817. Клумба має форму правильного восьмикутника, вписаного в круг, радіус якого дорівнює 5 м. Передбачається, що восьмикутник буде засаджено багаторічними квітучими рослинами, а решта круга — газонною травою. Скільки газонної трави потрібно підготувати для цієї клумби, якщо у середньому на 1 кв. м. землі висівають 9 г насіння трави?

818. Чи існує переміщення, яке відображає одну сторону квадрата на протилежну сторону? А на сусідню сторону?

819. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 7 см і 24 см. Знайдіть синус, косинус і тангенс його найменшого кута.

820. Знайдіть кути ромба, якщо його периметр у 4 рази більший за одну з його діагоналей.

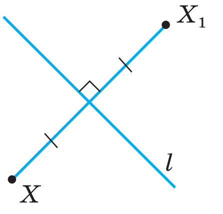
Геометрія навколо нас

Симетрія відносно точки у роботах Мауріца Ешера

§ 23 Симетрія відносно прямої

Точки X і X_1 називаються **симетричними відносно прямої l**, якщо ця пряма — серединний перпендикуляр відрізка XX_1 (мал. 271). Якщо точка X лежить на прямій l, вона вважається симетричною сама собі відносно прямої l.

Перетворення фігури F, при якому кожна її точка відображається на симетричну їй відносно прямої l точку, називається **перетворенням симетрії відносно прямої l**. Якщо при цьому перетворенні фігура F відображається на F_1, то ці дві фігури називають **симетричними відносно прямої l**.



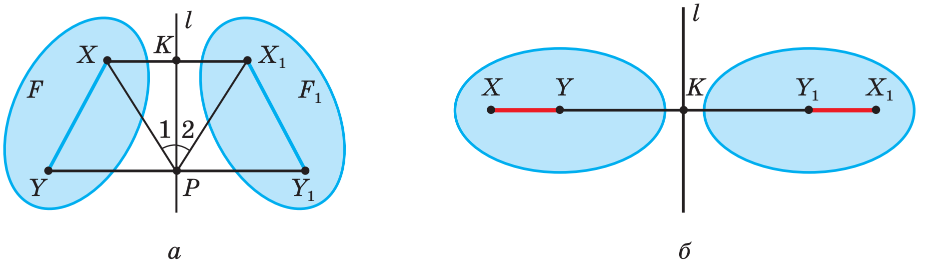
Мал. 271

ТЕОРЕМА 16

Перетворення симетрії відносно прямої є переміщенням.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай довільні точки X і Y фігури F перетворенням симетрії відносно прямої l відображаються на точки X_1 і Y_1 фігури F_1 (мал. 272, *а*). Доведемо, що $XY = X_1Y_1$.



Мал. 272

Якщо K і P — точки перетину відрізків XX_1 і YY_1 з прямою l, то $\triangle XKP = \triangle X_1KP$ (за двома катетами). Отже, $XP = X_1P$ і $\angle 1 = \angle 2$, звідки $\angle XPY = \angle X_1PY_1$. Оскільки $PY = PY_1$, то $\triangle XYP = \triangle X_1Y_1P$, тому $XY = X_1Y_1$.

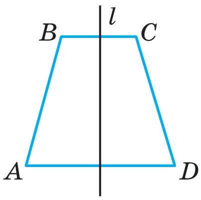
Якщо точки X, Y, X_1 і Y_1 лежать на одній прямій (мал. 272, *б*), то

$$XY = |KX - KY| = |KX_1 - KY_1| = X_1Y_1.$$

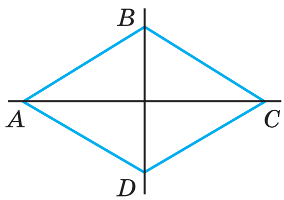
Отже, в обох випадках $XY = X_1Y_1$, тобто перетворення симетрії відносно прямої зберігає відстані між точками. Це перетворення — переміщення. □

З доведеної теореми випливає, що перетворення симетрії відносно прямої відображає пряму на пряму, будь-яку фігуру — на рівну їй фігуру.

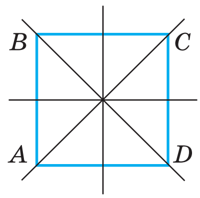
Якщо при симетрії відносно прямої l фігура F відображається на себе, таку фігуру називають **симетричною відносно прямої**, а пряму l — **віссю симетрії** фігури F. Наприклад, рівнобічна трапеція симетрична відносно прямої, що проходить через середини її основ (мал. 273). Ромб, відмінний від квадрата, має дві осі симетрії (мал. 274), квадрат — чотири (мал. 275), а коло — безліч. Правильний n-кутник має n осей симетрії. Усі вони проходять через його центр. Фігури, симетричні відносно прямої, часто трапляються в природі (мал. 276), техніці (мал. 277) і мистецтві (мал. 278).



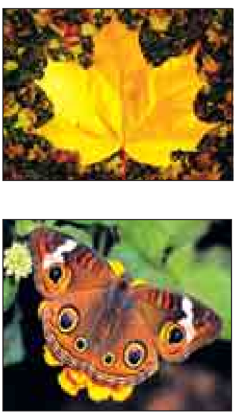
Мал. 273



Мал. 274



Мал. 275

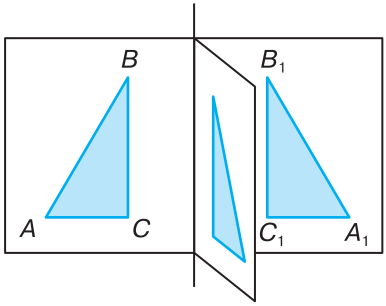

Мал. 276


Мал. 277

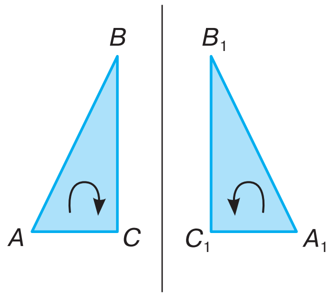

Мал. 278

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Дві симетричні відносно прямої фігури рівні і лежать в одній площині. А чи завжди, переміщаючи їх тільки в цій площині, можна сумістити їх накладанням? Ні. Наприклад, два симетричні відносно прямої прямокутні нерівнобедрені трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні. Але щоб сумістити їх накладанням, треба один із них перевернути іншим боком, а для цього винести його з площини в простір (мал. 279).



Мал. 279



Мал. 280

Кажуть, що такі трикутники рівні, але неоднаково орієнтовані. Якщо вершини A, B, C першого трикутника можна обійти в напрямі руху годинникової стрілки, то відповідні вершини трикутника $A_1B_1C_1$ — у протилежному напрямі (мал. 280).

Отже, симетрія відносно прямої змінює орієнтацію фігур.

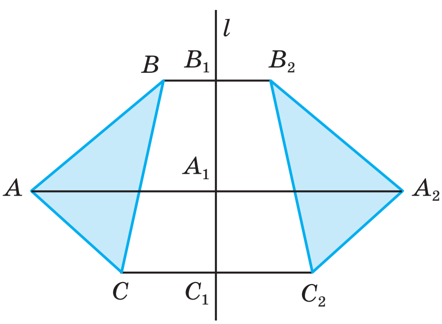
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Які точки називають симетричними відносно деякої прямої?
2. Яке перетворення називають симетрією відносно прямої?
3. Доведіть, що симетрія відносно прямої — переміщення.
4. Які фігури називають симетричними відносно прямої?
5. Скільки осей симетрії має: а) ромб; б) квадрат; в) коло?
6. Чи має вісь симетрії: а) трикутник; б) трапеція; в) паралелограм?

Виконаємо разом

1 Побудуйте трикутник, симетричний трикутнику ABC відносно прямої l, яка лежить поза трикутником (мал. 281).

- Через вершини $\triangle ABC$ проводимо прямі AA_1, BB_1, CC_1, перпендикулярні до l, і відкладаємо на них відрізки $A_1A_2 = AA_1$, $B_1B_2 = BB_1$, $C_1C_2 = CC_1$. Сполучивши точки A_2, B_2, C_2, отримаємо $\triangle A_2B_2C_2$, симетричний трикутнику ABC відносно прямої l.



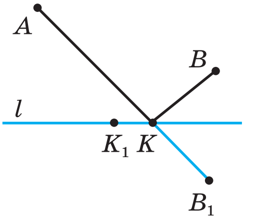
Мал. 281

2 Точки A і B лежать з одного боку від прямої l. Знайдіть на цій прямій таку точку K, щоб сума $AK + KB$ була найменшою.

- Позначимо точку B_1, симетричну B відносно l (мал. 282).
Точка K перетину прямих AB_1 і l — шукана. Справді, якщо K_1 — яка-небудь інша точка прямої l, то

$$AK_1 + K_1B = AK_1 + K_1B_1 > AK + KB_1 = AK + KB.$$

Сума $AK + KB$ менша від будь-якої суми $AK_1 + K_1B$.

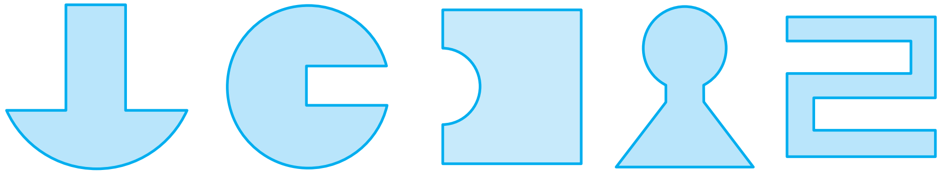


Мал. 282

Задачі і вправи

Виконайте усно

821. Які з фігур, зображених на малюнку 283, мають осі симетрії?


Мал. 283

822. Які з наведених нижче букв симетричні відносно прямої: А, Б, В, Г, Д, Е, Є, Ж, З, К, Л, М, Н, О, П, С, Т, Х, Ф?

823. Чи правильно, що бісектриса кута є його віссю симетрії?

824. Скільки осей симетрії має: а) відрізок; б) пряма; в) коло?

825. Чи може мати вісь симетрії ламана, що має 4 ланки? А 5 ланок, n ланок?

826. Скільки осей симетрії може мати: а) незамкнена ламана; б) замкнена ламана?

827. Фігура складається з двох рівних кіл, що перетинаються. Скільки осей симетрії має ця фігура?

828. Фігура складається з трьох рівних кіл, що дотикаються одне до одного. Скільки осей симетрії має ця фігура?

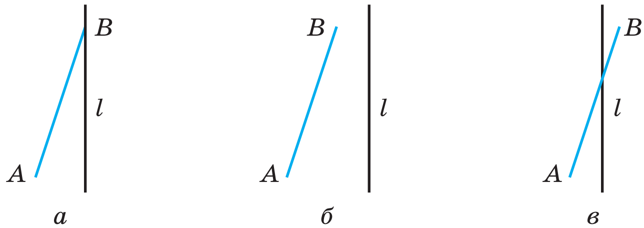
829. Які чотирикутники мають тільки одну вісь симетрії?

А

830. Побудуйте точку, симетричну даній точці A відносно прямої l.

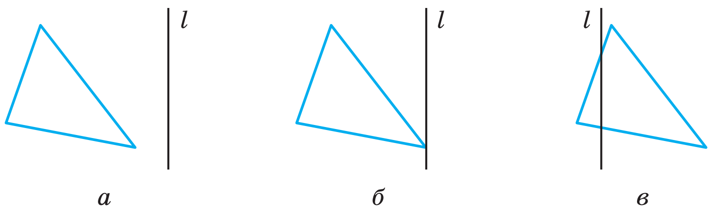
831. Дано дві точки. Побудуйте пряму, відносно якої вони симетричні.

832. Побудуйте фігуру, симетричну даному відрізку AB відносно даної прямої l. Розгляньте кілька випадків (мал. 284).



Мал. 284

833. Побудуйте трикутник, симетричний даному трикутнику відносно прямої l. Розгляньте різні випадки (мал. 285).



Мал. 285

834. Побудуйте фігуру, симетричну даному колу відносно прямої, яка:
а) не має з колом спільних точок;
б) дотикається до кола;
в) перетинає коло.

835. Всередині гострого кута AOB дано точку M. Точки M_1 і M_2 симетричні точці M відносно прямих OA і OB. Знайдіть міру кута M_1OM_2, якщо $\angle AOB = \alpha$.

836. Кола з центрами O і O_1 перетинаються в точках A і B. Доведіть, що точки A і B симетричні відносно прямої OO_1.

837. Доведіть, що трикутник, який має вісь симетрії, рівнобедрений.

838. Доведіть, що трикутник, який має дві осі симетрії, рівносторонній. Скільки осей симетрії має рівносторонній трикутник?

839. Доведіть, що бісектриса кута лежить на його осі симетрії.

840. Побудуйте точки $A(-3;\ 1)$, $B(4;\ 5)$, $C(-2;\ -6)$, $D(0;\ 3)$, $E(2;\ 0)$, $K(1;\ 1)$ і точки, симетричні даним відносно: а) осі OX; б) осі OY. Запишіть координати цих точок.

841. Встановіть вид трикутника ABC, якщо $A(-4;\ 2)$, $B(3;\ 6)$, $C(2;\ -2)$. Скільки осей симетрії має цей трикутник?

Б

842. У чотирикутнику $ABCD$ $AB = AD$ і $CB = CD$. Доведіть, що пряма AC — його вісь симетрії.

843. Діагоналі чотирикутника є його осями симетрії. Доведіть, що цей чотирикутник — ромб.

844. Дано пряму l, рівняння якої $y = 2x + 3$. Запишіть рівняння прямих, симетричних l відносно: а) осі x; б) осі y.

845. Напишіть рівняння осей симетрії чотирикутника $ABCD$, якщо $A(-5; 1)$, $B(-3; 5)$, $C(1; 3)$, $D(-1; -1)$.

846. Два відрізки симетричні відносно прямої a. Доведіть, що серединні перпендикуляри цих відрізків також симетричні відносно прямої a.

847. Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки основи рівнобедреного гострокутного трикутника до бічних сторін дорівнює висоті трикутника, опущеній на бічну сторону.

848. Відрізки AB і CD симетричні відносно деякої прямої l. Напишіть рівняння цієї прямої, якщо $A(-1; 4)$, $B(2; 3)$, $C(-3; 2)$, $D(-2; -1)$. Зробіть малюнок.

849. Скільки осей симетрії має фігура, яка є об'єднанням кіл:
а) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$ і $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 16$;
б) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$ і $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$;
в) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$ і $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$?
Зробіть малюнок.

850. Встановіть вид чотирикутника $ABCD$, якщо $A(-3; -1)$, $B(-5; 3)$, $C(-1; 5)$, $D(1; 1)$. Скільки осей симетрії він має? Напишіть їх рівняння.

851. Через внутрішню точку даного кута проведіть пряму, яка відтинає на його сторонах рівні відрізки.

852. Дано кут, вершина якого недоступна. Побудуйте кут, удвічі більший від даного.

853. Вершини A, B і C трикутника недоступні. Побудуйте відрізки, які дорівнюють AB, AC і BC.

854. Точки A і B лежать по різні боки від прямої l. Знайдіть на прямій l таку точку M, щоб бісектриса кута AMB належала цій прямій.

855. Опуклий чотирикутник, який має тільки одну вісь симетрії, що проходить через дві його вершини, називається **дельтоїдом**. Накресліть який-небудь дельтоїд і дослідіть його властивості.

856. Кожна з фігур (А–Д) має вісь симетрії, що задається деякою прямою (1–4). Установіть відповідність між прямими (1–4) та фігурами (А–Д).

1	$y = x + 1$	**А**	Чотирикутник $ABCD$, якщо $A(-1; 1)$, $B(1; 4)$, $C(4; 4)$, $D(4; 1)$
2	$y = -x - 2$	**Б**	Трикутник ABC, якщо $A(2; -1)$, $B(-1; 8)$, $C(8; 5)$
3	$y = 7 - x$	**В**	Коло $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16$
4	$y = 0$	**Г**	Чотирикутник $ABCD$, якщо $A(0; 1)$, $B(1; 6)$, $C(6; 7)$, $D(5; 2)$
		Д	Кут AOB, якщо $A(5; 5)$, $O(0; 0)$, $B(3; -3)$

Практичне завдання

857. Підготуйте презентацію на тему «Симетрія навколо нас». Крім іншого (симетрія у природі, побуті, техніці, спорті, мистецтві тощо), покажіть, де і коли ви особисто використовуєте симетрію та її властивості.

Задачі для повторення

858. Побудуйте квадрат зі стороною 3 см і квадрат, симетричний йому відносно деякої точки O. Знайдіть периметр і площу побудованого квадрата.

859. Периметр трикутника дорівнює $2p$. Знайдіть його сторони, якщо вони пропорційні числам 3, 4 і 5.

860. Ділянку, що має форму круга діаметра 90 м, потрібно обгородити сіткою рабиця. Скільки потрібно стовпчиків для цієї огорожі, якщо відстань між сусідніми стовпчиками (по дузі кола) має бути 90 см?

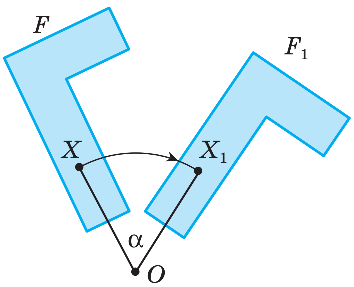
861. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють a і b.

Геометрія навколо нас

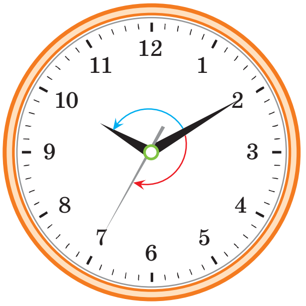
Маріїнський палац у Києві

§ 24 Поворот

Нехай дано точку O і довільну фігуру F (мал. 286). Повернемо точку X цієї фігури навколо точки O на кут α за рухом годинникової стрілки. При цьому точка X відобразиться на таку точку X_1, що кутова міра дуги XX_1 з центром O дорівнює α (OX і OX_1 — рівні радіуси). Якщо таким способом повернути навколо точки O на кут α кожну точку фігури F, то дістанемо фігуру F_1. Говорять, що поворот навколо точки O на кут α відображає фігуру F на фігуру F_1.



Мал. 286



Мал. 287

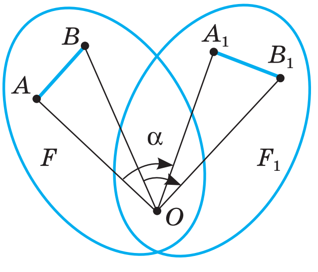
Точка O називається **центром повороту**, а кут XOX_1 — **кутом повороту**. Поворот можна здійснювати як за рухом годинникової стрілки, так і проти її руху (мал. 287).

ТЕОРЕМА 17

Поворот навколо точки — переміщення.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай при повороті фігури F навколо точки O на кут α точки A і B цієї фігури відображаються на точки A_1 і B_1 фігури F_1 (мал. 288). Тоді $OA = OA_1$, $OB = OB_1$ і $\angle AOA_1 = \angle BOB_1$. Якщо точки A, B і O не лежать на одній прямій, то $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$ (за двома сторонами і кутом між ними, оскільки $\angle AOB = \angle A_1OB_1$). Отже, в цьому випадку $AB = A_1B_1$.



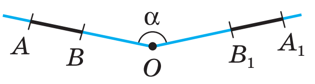
Мал. 288

Якщо точки A, B і O лежать на одній прямій (мал. 289), то

$$AB = |OA - OB| = |OA_1 - OB_1| = A_1B_1.$$

Випадок, коли точка O лежить між A і B, розгляньте самостійно.

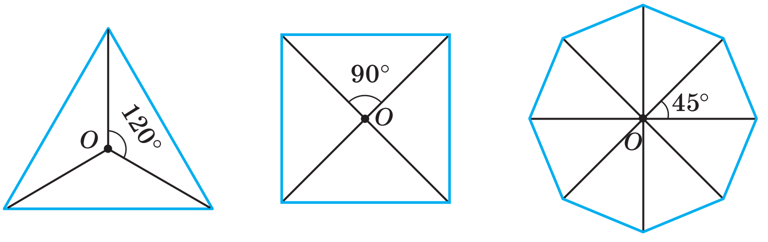
Отже, завжди $AB = A_1B_1$. □



Мал. 289

Як бачимо, поворот — один із видів переміщення. Тому при повороті пряма відображається на пряму, будь-яка фігура — на рівну їй фігуру.

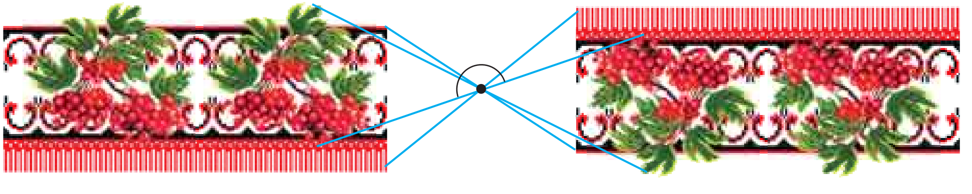
Існують фігури, які при повороті навколо однієї з точок переходять самі в себе. З попереднього розділу ви вже знаєте, що центральний кут правильного n-кутника дорівнює $\frac{360°}{n}$. Тому будь-який правильний n-кутник переходить у себе при повороті навколо свого центра на кут $\frac{360°}{n}$. Наприклад, переходять самі у себе правильні трикутник, чотирикутник і восьмикутник (мал. 290).



Мал. 290

Зверніть увагу!

Поворот на 180° навколо точки O — симетрія відносно цієї точки (мал. 291).

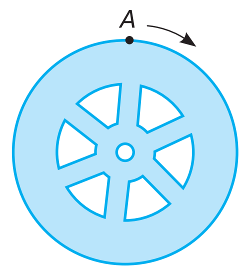


Мал. 291

Правильне і таке означення. **Симетрією відносно точки є поворот на 180° навколо цієї точки.**

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Геометричне поняття **поворот** слід відрізняти від фізичного обертання. **Обертання** — це процес, який визначається часом, кутовою швидкістю, кутовим прискоренням тощо. Обертання може бути рівномірним або нерівномірним, здійснюватися на який завгодно великий кут в одному й іншому напрямах. Наприклад, якщо шків (мал. 292) зробить два чи десять повних обертів, кажуть, що він обернувся, відповідно, на 720° чи 3600°. Поворот як геометричне перетворення не пов'язаний із часом чи швидкістю, а є відображенням однієї фігури на іншу, рівну їй.



Мал. 292

Вище йшлося про поворот фігури. Але науковці частіше розглядають поворот всієї площини. Поворот площини однозначно можна задати, вказавши його центр O і кут α, де $0 < \alpha \le 180°$.

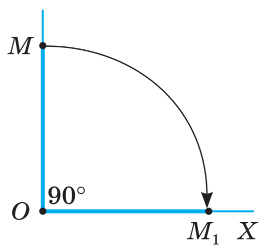
Запитання і завдання для самоконтролю

1. Яке геометричне перетворення називають поворотом?
2. Чи є поворот переміщенням? Чому?
3. Сформулюйте властивості повороту навколо точки.
4. Який поворот називають симетрією відносно точки?

Виконаємо разом

1 Дано дві різні точки M і O. Побудуйте точку M_1, у яку переходить точка M при повороті навколо точки O на кут 90°.

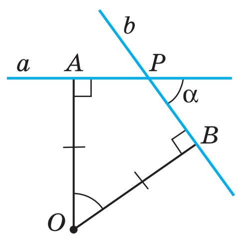
- Проведемо промінь OM і побудуємо промінь OX так, що $\angle MOX = 90°$ за рухом годинникової стрілки. На промені OX від точки O відкладемо відрізок, що дорівнює відрізку OM. Отримаємо точку M_1 (мал. 293).



Мал. 293

2 Дано пряму a і точку $O \notin a$. Поверніть пряму a навколо точки O на даний кут α за рухом годинникової стрілки.

- *Перший спосіб.*
Опустимо перпендикуляр OA на пряму a (мал. 294). Повернемо цей перпендикуляр навколо точки O на кут α за рухом годинникової стрілки. Для цього побудуємо кут $AOB = \alpha$ і на промені OB відкладемо відрізок $OB = OA$. Через точку B проведемо пряму b, перпендикулярну до OB. Пряма b — та, яку потрібно було побудувати.

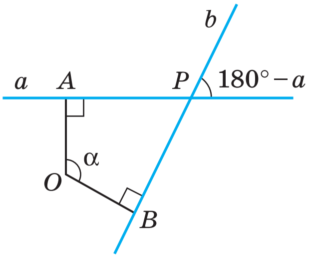


Мал. 294

Другий спосіб.
Позначимо будь-які дві точки A і B прямої a і повернемо кожну з них на кут α за рухом годинникової стрілки. Якщо при цьому вони відобразяться на точки A_1 і B_1, то пряма A_1B_1 — та, яку треба було побудувати. Малюнок зробіть самостійно.

3 Поворот на кут α навколо точки O відображає пряму a на b. Знайдіть кут β між цими прямими.

● Якщо прямі a і b перетинаються в точці P, а OA і OB — перпендикуляри до прямих a і b, то $\angle APB = 180° - \alpha$. Якщо кут α гострий або прямий, то $\beta = \alpha$ (мал. 294). Якщо кут α тупий, то $\beta = 180° - \alpha$ (мал. 295).

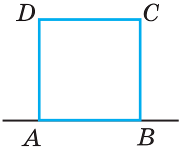


Мал. 295

Задачі і вправи

Виконайте усно

862. $ABCD$ — квадрат (мал. 296). На який кут треба повернути пряму AB навколо точки A, щоб вона пройшла через точку: а) C; б) D; в) B?



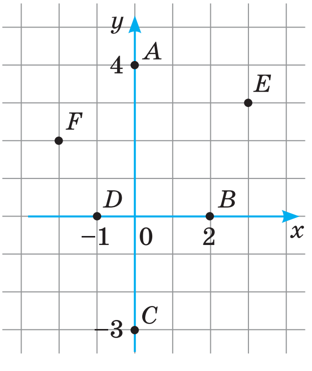
Мал. 296

863. На який кут треба повернути пряму AB навколо точки C, щоб утворена пряма стала: а) перпендикулярною до AB; б) паралельною AB?

864. Вкажіть координати точок, на які відобразяться точки A, B, C, D, E, F (мал. 297) при повороті навколо початку координат на кут 90°:
а) за годинниковою стрілкою;
б) проти годинникової стрілки.

865. Навколо якої точки і на який кут слід повернути одну із двох паралельних прямих, щоб вона сумістилась із другою?

866. Два рівні кола дотикаються в точці A. На який кут одне з них слід повернути навколо точки A, щоб воно сумістилось із другим колом?



Мал. 297

А

867. Дано точки O і A. Виконайте поворот точки A навколо точки O на кут 60° за рухом годинникової стрілки.

868. Дано відрізок AB і точку O, що не лежить на прямій AB. Поверніть відрізок AB навколо точки O на кут 45° проти годинникової стрілки.

869. Відрізок AB при повороті на $60°$ навколо точки A відобразився на відрізок AB_1. Знайдіть відстань BB_1, якщо $AB = a$.

870. Поверніть даний трикутник ABC за рухом годинникової стрілки на $90°$ навколо: а) вершини A; б) середини сторони BC.

871. Квадрат $ABCD$ повернули навколо точки A так, що його вершина B перейшла в D, а C — у C_1. Знайдіть відстань CC_1, якщо $AB = a$. На який кут виконано поворот?

872. Дано дві перпендикулярні прямі. Знайдіть геометричне місце точок, навколо яких можна повернути одну з прямих, щоб вона сумістилась із другою прямою.

873. Навколо якої точки і на який кут слід повернути рівносторонній трикутник, щоб він сумістився із собою?

874. Який чотирикутник можна повернути навколо деякої точки O на $90°$ так, щоб він сумістився сам із собою?

875. Правильний n-кутник при повороті навколо центра на кут β за годинниковою стрілкою відображається на себе. Знайдіть найменший кут β ($\beta \neq 0$) для: а) $n = 5$; б) $n = 6$; в) $n = 9$; г) $n = 10$; ґ) $n = k$.

876. Дано точки $A(-2;\ 5)$, $B(3;\ 6)$, $C(4;\ 1)$. Побудуйте трикутник $A_1B_1C_1$, у який перейде трикутник ABC при повороті навколо початку координат на кут $90°$ за годинниковою стрілкою. Знайдіть периметр і площу трикутника $A_1B_1C_{1.}$

Б

877. Точка $A(2;\ 3)$ при повороті навколо початку координат перейшла в точку $B(3;\ -2)$. На який кут було виконано поворот?

878. Знайдіть m і n, якщо:

а) точка $M(m;\ 1)$ переходить у точку $N(n;\ 4)$ при повороті навколо точки $O(0;\ 0)$ на кут $90°$ за годинниковою стрілкою;

б) точка $E(-4;\ m)$ переходить у точку $F(3;\ n)$ при повороті навколо точки $P(1;\ 4)$ на кут $90°$ проти годинникової стрілки.

879. Дано два рівні кола. Знайдіть геометричне місце точок, навколо яких можна здійснити поворот одного з кіл, щоб воно сумістилося з другим.

880. Трикутник AB_1C_1 — образ правильного трикутника ABC при повороті його навколо точки A на кут $60°$: а) за рухом годинникової стрілки; б) проти руху годинникової стрілки. Знайдіть BC_1, якщо $AB = a$.

881. При повороті правильного шестикутника $ABCDEF$ навколо його центра на кут $90°$ за рухом годинникової стрілки отримали шестикутник $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Знайдіть AA_1, AB_1, AC_1, AD_1.

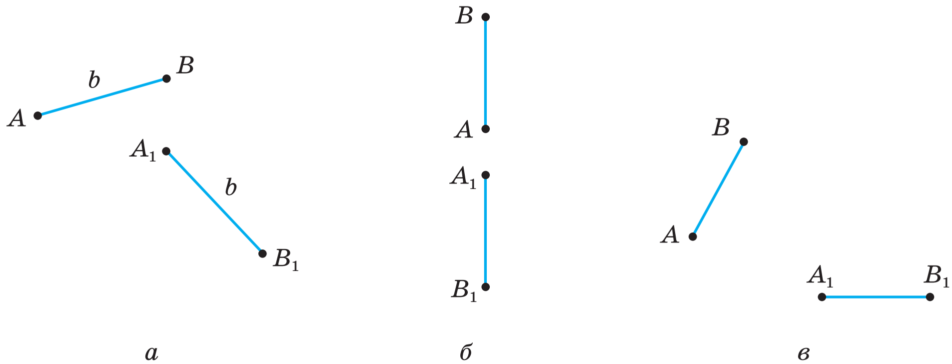
882. На сторонах AB і BC трикутника ABC зовні побудовано рівносторонні трикутники ABP і BKC. Доведіть, що $AK = PC$. Знайдіть кут між прямими AK і PC.

883. Чотирикутник $A_1B_1C_1D_1$ — образ квадрата $ABCD$ при повороті навколо точки A на кут $45°$. Знайдіть BC_1 і BD_1, якщо $AB = a$. Розгляньте два випадки:

а) поворот за рухом годинникової стрілки;

б) поворот проти руху годинникової стрілки.

884. Дано два рівні відрізки (мал. 298). Знайдіть точку, поворот навколо якої відображає один із цих відрізків на другий.



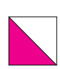
Мал. 298

885. На послідовних відрізках AB і BC прямої AC з одного боку від неї побудовано правильні трикутники ABK і BCP. Точки M і H — середини відрізків AP і CK. Доведіть, що трикутник BMH — правильний.

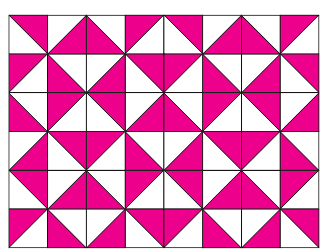
886. На сторонах AB і AC трикутника ABC зовні побудовано квадрати $ABMH$ і $ACPK$. Доведіть, що медіана AE трикутника ABC перпендикулярна до відрізка HK і дорівнює його половині.

Практичне завдання

887. Виріжте з паперу у клітинку один квадрат і розфарбуйте його, як показано на малюнку 299. За допомогою повороту на кут $90°$ і осьової симетрії спробуйте створити орнамент, зображений на малюнку 300. Із якого перетворення слід почати? Який інший мотив і перетворення можна використати, щоб отримати схожий орнамент?



Мал. 299



Мал. 300

Задачі для повторення

888. Сторони одного трикутника пропорційні числам 3, 5 і 7. Знайдіть сторони подібного йому трикутника, якщо його периметр дорівнює 3 м.

889. З катера в деякий момент видно маяк під кутом в 30° за курсом корабля, а коли катер пройшов курсом 20,4 км, маяк стало видно під кутом в 135° ліворуч від курсу. Знайдіть відстань від катера до маяка в кожний момент, коли вимірювався кут.

890. Катети прямокутного трикутника відносяться як 2 : 3. Обчисліть синуси, косинуси і тангенси його гострих кутів.

891. Прямокутний трикутник, один із катетів якого дорівнює n, вписано в коло радіуса r. Знайдіть периметр трикутника.

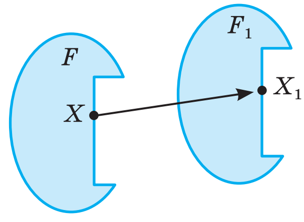
Геометрія навколо нас

Поворот у різних сферах людської діяльності

§ 25 Паралельне перенесення

Один із прикладів геометричного перетворення — **паралельне перенесення.**

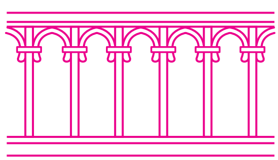
Нехай дано фігуру F (мал. 301). Якщо кожну її точку змістити в одному й тому самому напрямі на одну й ту саму відстань XX_1 (або на вектор $\overrightarrow{XX_1}$), то дістанемо фігуру F_1. У такому випадку говорять, що паралельне перенесення, яке відображає точку X на X_1, відображає фігуру F на F_1.

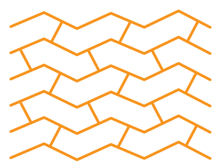


Мал. 301

Однакові малюнки, які періодично повторюються на тканинах, шпалерах, вишиванках (мал. 302), можна вважати виконаними за допомогою паралельних перенесень. Те саме можна сказати про однакові поверхи багатоповерхового будинку, секції огорожі (мал. 303), паркетини підлоги, плити на аеродромах, майданах (мал. 304) тощо.


Мал. 302


Мал. 303


Мал. 304

ТЕОРЕМА 18

Паралельне перенесення — переміщення.

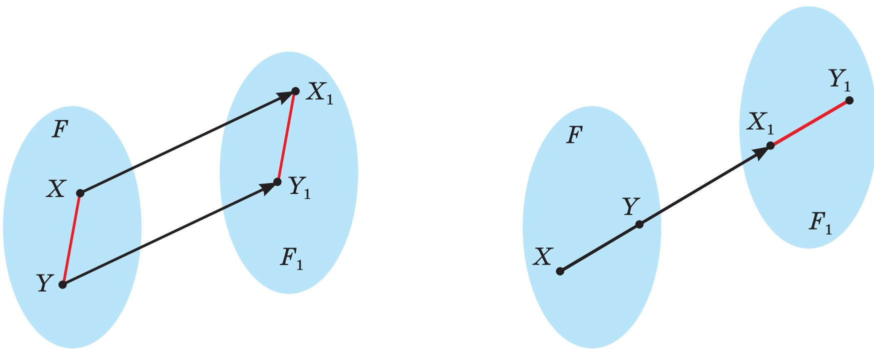
ДОВЕДЕННЯ.

Якщо відрізок X_1Y_1 — образ відрізка XY при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{XX_1}$, то відрізки XX_1 і YY_1 рівні й паралельні або лежать на одній прямій. Якщо ці відрізки рівні і паралельні, то чотирикутник XX_1Y_1Y — паралелограм. Отже, $XY = X_1Y_1$ (мал. 305, *а*).

Якщо рівні відрізки XX_1 і YY_1 лежать на одній прямій (мал. 305, *б*), то

$$XY = |XX_1 - YX_1| = |YY_1 - YX_1| = X_1Y_1.$$

Отже, в обох випадках $XY = X_1Y_1$. При паралельному перенесенні зберігаються відстані між точками. Тому паралельне перенесення — переміщення. □



а *б*

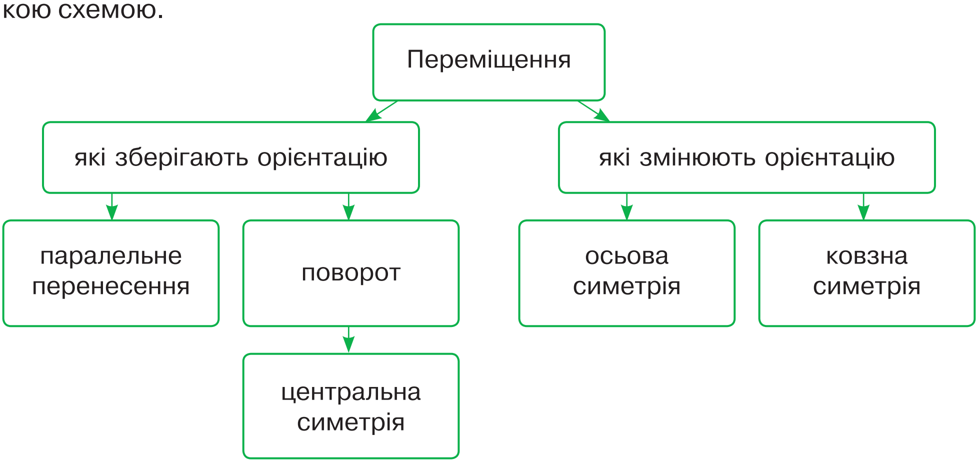
Мал. 305

Паралельне перенесення відображає пряму на паралельну їй пряму і будь-яку фігуру — на рівну їй фігуру. Розв'язуючи геометричні задачі або доводячи теореми, іноді здійснюють паралельне перенесення частини фігури. У таких випадках говорять про **метод паралельного перенесення.**

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

Досі ми розглядали окремі види переміщень: симетрію відносно точки, симетрію відносно прямої, поворот, паралельне перенесення. Заслуговують на увагу і їх **композиції** — послідовні виконання двох чи кількох із них. Наприклад, якщо паралельне перенесення відображає фігуру F на F_1, а симетрія відносно прямої відображає фігуру F_1 на F_2, то кажуть, що фігуру F на F_2 відображено композицією паралельного перенесення і симетрії відносно прямої. Композицію паралельного перенесення уздовж прямої l і симетрії відносно прямої l називають **ковзною симетрією**. Оскільки симетрія відносно прямої змінює орієнтацію фігур, а паралельне перенесення не змінює, то ковзна симетрія змінює орієнтацію фігур.

Співвідношення між розгляненими переміщеннями можна зобразити такою схемою.

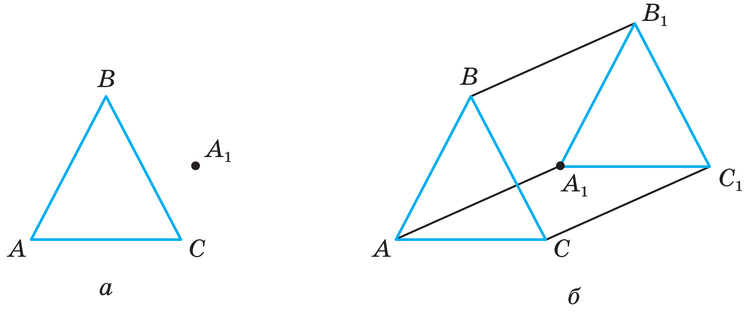


Запитання і завдання для самоконтролю

1. Яке перетворення називають паралельним перенесенням?
2. Наведіть приклади паралельного перенесення в навколишньому середовищі.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про властивість паралельного перенесення.
4. Чи зберігається рівність фігур при паралельному перенесенні?
5. Яка фігура є образом прямої при паралельному перенесенні на ненульовий вектор?
6. Що називають методом паралельного перенесення?

Виконаємо разом

1 Побудуйте трикутник, у який переходить трикутник ABC при паралельному перенесенні, що відображає точку A на A_1 (мал. 306, *а*).



Мал. 306

- Проведемо відрізок AA_1. Через точки B і C проведемо прямі, паралельні AA_1, і відкладемо на них відрізки $BB_1 = AA_1$ і $CC_1 = AA_1$. Сполучимо точки A_1, B_1, C_1 відрізками. Трикутник ABC — шуканий (мал. 306, *б*).

2 При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ точка $A(1; 3)$ відображається на точку $A_1(-2; 5)$. Знайдіть координати образу точки $B(-4; 7)$ при цьому паралельному перенесенні.

- Знайдемо координати $\vec{a}$, на який виконано паралельне перенесення. $\vec{a} = \overrightarrow{AA_1} = (-3; 2)$. Нехай образом точки $B(-4; 7)$ буде точка $B_1(x; y)$. Тоді $\overrightarrow{BB_1} = (x+4; y-7)$. Оскільки $\overrightarrow{BB_1} = a$, то $x + 4 = -3$, $y - 7 = 2$, звідси $x = -7$, $y = 9$.
Отже, $B_1(-7; 9)$.

Задачі і вправи

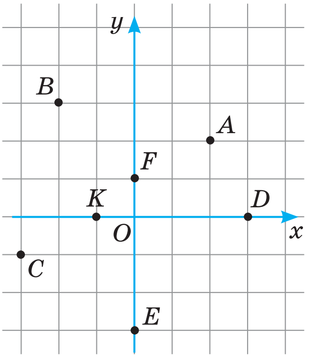
Виконайте усно

892. Вкажіть координати точок, на які відображаються точки, зображені на малюнку 307, при паралельному перенесенні, яке точку $O(0; 0)$ відображає на точку: а) $D(3; 0)$; б) $K(-1; 0)$; в) $A(2; 2)$.

893. Дано дві паралельні прямі. Скільки існує паралельних перенесень, які відображають одну з них на другу?

894. Два рівні відрізки лежать на одній прямій. Яким паралельним перенесенням один із них можна відобразити на другий?

895. Чи існує паралельне перенесення, яке одну зі сторін трапеції відображає на другу сторону?



Мал. 307

А

896. Позначте точки A, A_1 і B. Побудуйте точку, у яку переходить точка B при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AA_1}$.

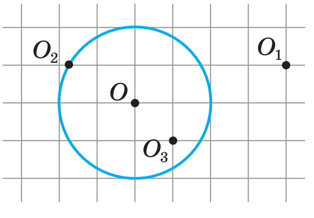
897. Дано відрізок AB і точку K. Виконайте паралельне перенесення відрізка AB так, щоб його середина відобразилась на точку K.

898. Побудуйте фігуру, у яку переходить даний трикутник ABC при паралельному перенесенні, що відображає точку A на точку C.

899. Побудуйте фігуру, у яку переходить даний паралелограм $ABCD$ при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AC}$.

900. Виконайте паралельне перенесення даної прямої AB так, щоб її точка A відобразилась на дану точку C. Розгляньте два випадки: а) $C \notin AB$; б) $C \in AB$.

901. Виконайте паралельне перенесення даного кола (мал. 308) так, щоб його центр O відобразився на дану точку: а) O_1; б) O_2; в) O_3.



Мал. 308

902. Знайдіть точки, які є образами точок $M(4; -2)$, $P(6; 0)$, $K(-7; 4)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a} = (1; -3)$.

903. При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ образом точки $A(1; -6)$ є точка $A_1(-7; 2)$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$.

904. Чи існує паралельне перенесення, яке точку $A(1; 5)$ відображає на точку $A_1(4; 2)$, а точку $B(-1; 3)$ на точку: а) $B_1(3; 1)$; б) $B_2(2; 0)$; в) $B_3(-4; 6)$?

905. Дано точки $M(-3; 7)$, $N(-1; 1)$, $P(1; 2)$. При паралельному перенесенні середина відрізка MN переходить у точку P. Зробіть малюнок і вкажіть координати точок, у які переходять точки M і N.

906. Трикутник KPT одержано паралельним перенесенням трикутника ABC. Доведіть, що відповідні медіани цих трикутників рівні і паралельні. А бісектриси?

Б

907. Виконайте паралельне перенесення кола, рівняння якого $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$, так, щоб його центр O відобразився на точку $O_1(3; -2)$. Запишіть рівняння утвореного кола.

908. При паралельному перенесенні пряма a, рівняння якої $2x + y = 5$, відображається на пряму l, що проходить через точку: а) $A(-1; -1)$; б) $B(2; 5)$. Запишіть рівняння прямої l.

909. При паралельному перенесенні образом точки $A(-1; 3)$ є точка $A_1(5; -2)$, а образом точки $B(x; -3)$ — точка $B_1(-2; y)$. Знайдіть x і y.

910. Точки $A_1(2; 9)$, $O_1(2; 5)$, $C_1(5; 5)$ є образами точок $A(0; y)$, $O(0; 0)$, $C(x; 0)$ при паралельному перенесенні. Знайдіть x і y та периметр трикутника AOC.

911. Доведіть, що кути при основі рівнобічної трапеції рівні.

912. Доведіть, що діагоналі рівнобічної трапеції рівні.

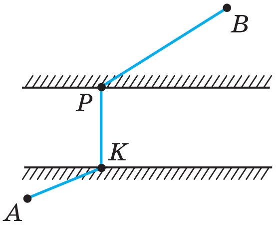
913. Доведіть, що паралельне перенесення можна здійснити, застосувавши дві симетрії відносно паралельних осей.

914. Точки $A(-2; 1)$, $B(2; 5)$, $C(4; 3)$ — вершини паралелограма $ABCD$. Знайдіть образи точок A, B, C і D при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AC}$.

915. На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ побудовано квадрати з центрами O і O_1. Доведіть, що середина відрізка OO_1 — центр паралелограма.

916. З одного боку від прямолінійної залізниці розташовані села A і B. У якому місці слід побудувати платформу KP, щоб сума відстаней AK, KP і PB була найменшою?

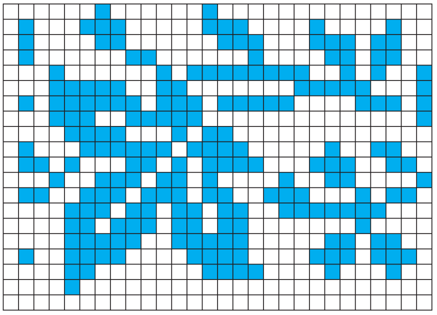
917. Де слід побудувати міст KP, перпендикулярний до берега річки, щоб шлях $AKPB$ між пунктами A і B був найкоротшим (мал. 309)?



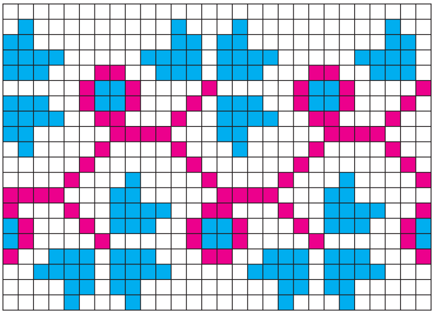
Мал. 309

Практичне завдання

918. 1) Розграфіть частину сторінки зошита на менші клітинки і перенесіть на них малюнок 310 або 311. Користуючись паралельним перенесенням, зробіть зображення вишивки удвічі довшим.



Мал. 310



Мал. 311

2) Створіть власну вишивку або орнамент.

Задачі для повторення

919. Чи відрізняються поняття «правильний трикутник» і «рівносторонній трикутник»?

920. Знайдіть сторони прямокутного трикутника, якщо найбільша з них дорівнює 20 см, а синус одного з кутів дорівнює 0,2.

921. Знайдіть катети прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза c, а площа S.

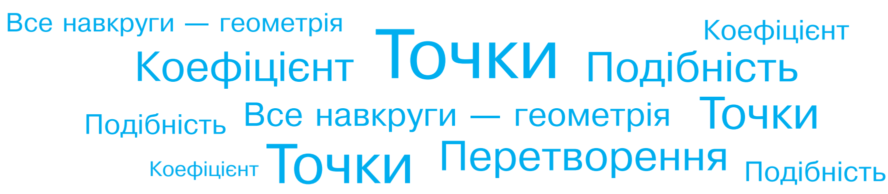
922. Дано трикутник зі сторонами 2 см, 3 см і 4 см. Знайдіть сторони подібного йому трикутника з периметром 27 см.

Геометрія навколо нас

Паралельне перенесення і сільське господарство

§ 26 Перетворення подібності

У повсякденному житті нам часто доводиться мати справу з предметами однакової форми, але різних розмірів. На площині це — картина та її репродукція, плани одного об'єкта різного масштабу, букви і цифри, набрані на комп'ютері одним шрифтом, але різного розміру.



Перетворення фігури F у фігуру F_1, при якому відстані між точками змінюються у тому самому відношенні в ту саму кількість разів k, $k > 0$, називають **перетворенням подібності**. Це означає, що коли довільні точки A і B фігури F при перетворенні подібності переходять у точки A_1 і B_1 фігури F_1, то $A_1B_1 = kAB$. Число k називають **коефіцієнтом подібності**.

Коефіцієнт подібності завжди додатний. Якщо $k = 1$, то перетворення подібності є переміщенням.

ТЕОРЕМА 19

Перетворення подібності переводить три точки, що лежать на одній прямій, у точки, що лежать на одній прямій, і зберігає порядок взаємного розміщення цих точок.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай точки A, B і C лежать на одній прямій так, що точка B лежить між точками A і C. Тоді $AC = AB + BC$. За означенням перетворення подібності для точок A_1, B_1 і C_1, що є образами точок A, B і C, виконуються такі рівності: $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$. З останньої рівності маємо:

$$A_1C_1 = kAC = k(AB + BC) = kAB + kBC = A_1B_1 + B_1C_1,$$

або $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$.

З останньої рівності випливає, що точки A_1, B_1 і C_1 лежать на одній прямій і точка B_1 лежить між точками A_1 і C_1. □

Можна довести ще й такі властивості подібності. Перетворення подібності відображає відрізок на відрізок, промінь — на промінь, паралельні прямі — на паралельні прямі, кут — на рівний йому кут (спробуйте зробити це самостійно).

Для будь-якого перетворення подібності з коефіцієнтом k існує обернене перетворення, яке є перетворенням подібності з коефіцієнтом $\frac{1}{k}$.

Дві фігури називаються **подібними**, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності. Якщо фігура F подібна фігурі F_1, то пишуть $F \sim F_1$.

Відношення подібності фігур має такі властивості:

1) завжди $F \sim F$;
2) якщо $F \sim F_1$, то і $F_1 \sim F$;
3) якщо $F \sim F_1$ і $F_1 \sim F_2$ то $F \sim F_2$.

У 8 класі ви ознайомилися з подібністю трикутників. Тепер відношення подібності можна поширити на будь-які геометричні фігури. Наприклад, можна довести, що **два многокутники подібні, якщо їх сторони пропорційні, а відповідні кути рівні.** Тому два квадрати завжди подібні. Подібними завжди будуть і два відрізки, два кола, два круга.

Ви вже знаєте, що відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності. Ця властивість правильна і для інших геометричних фігур.

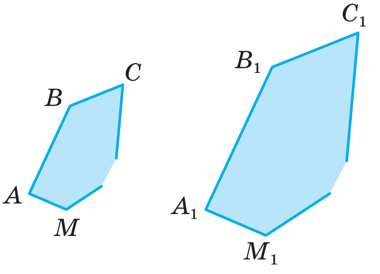
ТЕОРЕМА 20

Відношення периметрів подібних многокутників дорівнює коефіцієнту подібності.

ДОВЕДЕННЯ.

Нехай $ABC...M$ і $A_1B_1C_1...M_1$ — подібні многокутники з коефіцієнтом подібності k (мал. 312), тобто $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, ..., $M_1A_1 = kMA$. Тоді

$P_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + ... + M_1A_1 = kAB + kBC + ... + kMA = k(AB + BC + ... + MA) = kP$, звідки $P_1 : P = k$. □



Мал. 312

ТЕОРЕМА 21

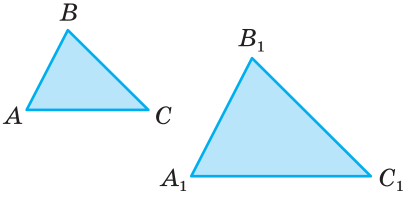
Відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

ДОВЕДЕННЯ.

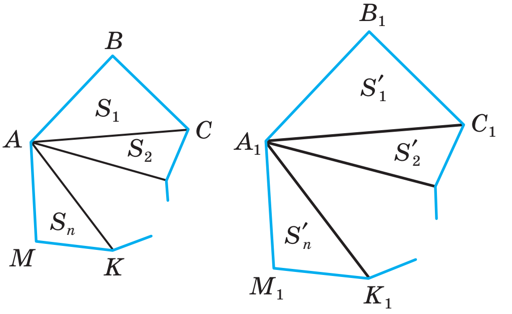
Доведемо спочатку цю теорему для трикутників (мал. 313). Нехай $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ з коефіцієнтом подібності k, тобто $A_1B_1 = kAB$, $A_1C_1 = kAC$, $\angle A_1 = \angle A$.

Тоді $S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} A_1B_1 \cdot A_1C_1 \cdot \sin A_1 = \frac{1}{2} kAB \cdot kAC \cdot \sin A =$

$= k^2 \left(\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A \right) = k^2 \cdot S_{\triangle ABC}$, звідки $S_{\triangle A_1B_1C_1} : S_{\triangle ABC} = k^2$.



Мал. 313



Мал. 314

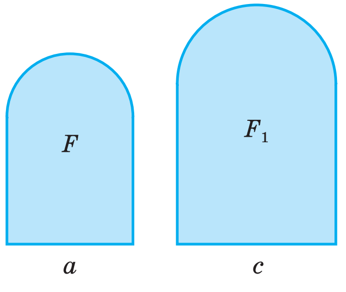
Доведемо теорему для довільних многокутників. Нехай дано два подібні многокутники, коефіцієнт подібності яких k, а площі S і S'. Розіб'ємо дані многокутники на трикутники діагоналями, які виходять з відповідних вершин (мал. 314). Тоді

$$S' = S'_1 + S'_2 + \ldots + S'_n = k^2 S_1 + k^2 S_2 + \ldots + k^2 S_n = k^2 \left(S_1 + S_2 + \ldots + S_n \right) = k^2 S.$$

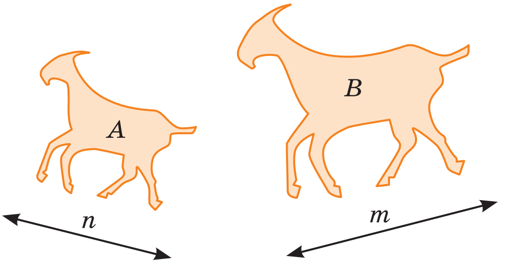
Отже, $S' : S = k^2$. □

Можна довести, що таку властивість мають площі будь-яких подібних фігур, а не тільки подібних многокутників. Наприклад, фігури F і F_1, що є об'єднанням квадратів і півкругів, подібні (мал. 315). Тому їх площі відносяться як квадрати відповідних лінійних елементів:

$$S : S_1 = a^2 : c^2.$$



Мал. 315



Мал. 316

Фігури A і B, зображені на малюнку 316, також подібні, тому їх площі відносяться як квадрати відстаней між відповідними точками цих фігур n і m:

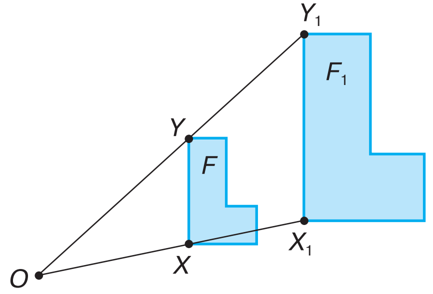
$$S_A : S_B = n^2 : m^2.$$

ДЛЯ ДОПИТЛИВИХ

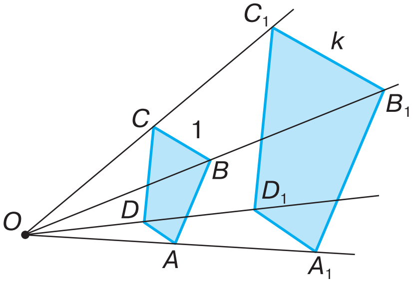
Нехай дано точку O і фігуру F (мал. 317). Проведемо через довільну точку X фігури F промінь OX і позначимо на ньому точку X_1 таку, що $OX_1 : OX = k$. Якщо таким способом побудувати відповідні точки для кожної точки фігури F, то одержимо нову фігуру F_1.

Таке відображення фігури F на F_1 називають **гомотетією** відносно точки O з коефіцієнтом k. Говорять також, що фігура F_1 гомотетична фігурі F відносно центра O з коефіцієнтом k.

Якщо $k > 1$, то гомотетія відображає дану фігуру на більшу: кожну відстань збільшує у k разів. Якщо $0 < k < 1$, то гомотетія кожну відстань зменшує у k разів. Якщо $k = 1$, то гомотетія кожну фігуру відображає на ту саму фігуру.



Мал. 317



Мал. 318

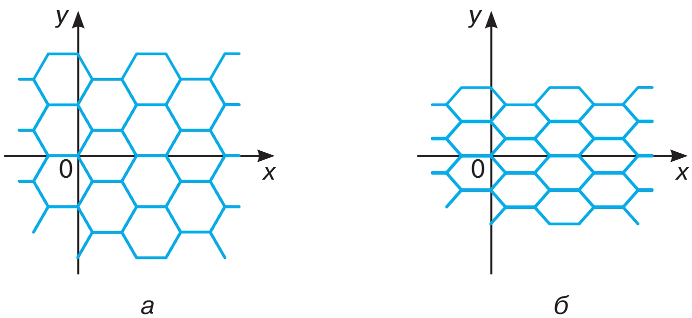
При $k \neq 1$ гомотетія не зберігає відстаней між точками. Наприклад, якщо $k = 2$, то точки X і Y гомотетією відображаються на X_1 і Y_1 такі, що $X_1Y_1 = 2XY$. Отже, $X_1Y_1 \neq XY$, тому гомотетія не є переміщенням. Але при гомотетії зберігається відношення відстаней між точками. Наприклад, якщо при гомотетії з коефіцієнтом k чотирикутник $ABCD$ відображається на $A_1B_1C_1D_1$, то кожне з відношень $\frac{A_1B_1}{AB}$, $\frac{B_1C_1}{BC}$, $\frac{C_1D_1}{CD}$, $\frac{D_1A_1}{DA}$, $\frac{A_1C_1}{AC}$, $\frac{B_1D_1}{BD}$ дорівнює k (мал. 318).

З означення перетворення подібності випливає, що кожні дві рівні фігури подібні. Але не кожні дві подібні фігури рівні. Аналогічно, кожні дві гомотетичні фігури подібні, але не кожні подібні фігури гомотетичні. Діаграмою це можна зобразити так (мал. 319 і 320).

Мал. 319

Мал. 320

Чи існують геометричні перетворення, відмінні від переміщень і перетворень подібності? Існують. Такими є, наприклад, **стиск** і **розтяг**. Наприклад, якщо кожна точка *A*(*x*; *y*) координатної площини відображається на точку *A*(*x*; *ky*), то говорять про стиск цієї площини до осі *x* з коефіцієнтом *k*. Якщо коефіцієнт $k > 1$, такий стиск називають розтягом. На малюнках зображено: сітка з правильними шестикутними сотами (мал. 321, *а*) і сітка, яка стиснута до осі *x* (мал. 321, *б*).



Мал. 321

Цікавим геометричним перетворенням є **інверсія** — своєрідна симетрія відносно кола. Множину точок, що лежать у внутрішній області кола, це перетворення відображає на точки його зовнішньої області, і навпаки. Інверсію розглядають у курсах вищої геометрії.

Запитання і завдання для самоконтролю

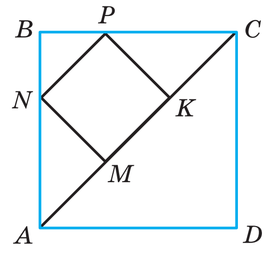
1. Яке геометричне перетворення називають перетворенням подібності?
2. Які властивості має перетворення подібності?
3. Які фігури називають подібними?
4. Назвіть властивості подібних фігур.
5. Як відносяться периметри подібних фігур?
6. Як відносяться площі подібних фігур?

Виконаємо разом

1 Периметри двох подібних многокутників пропорційні числам 2 і 5. Знайдіть площі цих многокутників, якщо їх різниця дорівнює 42 см².

● Якщо периметри пропорційні числам 2 і 5, то площі $S_1 : S_2 = 4 : 25$. Нехай коефіцієнт пропорційності x. Тоді $S_1 = 4x$, $S_2 = 25x$. За умовою задачі $25x - 4x = 42$, звідки $x = 2$. Тоді $S_1 = 8$ см², $S_2 = 50$ см².

2 Дано квадрат $ABCD$. У трикутник ABC вписано квадрат $MNPK$ (мал. 322). Чи подібні ці квадрати? З яким коефіцієнтом подібності?



Мал. 322

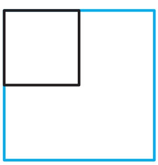
● Два квадрати завжди подібні. Знайдемо коефіцієнт подібності. Нехай $AB = a$, тоді $AC = a\sqrt{2}$. $\triangle AMN$ — рівнобедрений прямокутний, бо $\angle AMN = 90°$, $\angle NAM = \angle ANM = 45°$. Тоді $AM = MN$. Аналогічно, $KC = PK$.

Отже, $MK = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, звідки $k = \frac{MK}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{3a} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

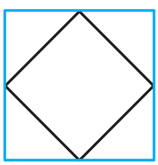
Задачі і вправи

Виконайте усно

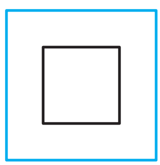
923. У якому з випадків квадрати, зображені на малюнках 323–326, подібні?



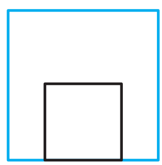
Мал. 323



Мал. 324



Мал. 325



Мал. 326

924. Чи завжди подібні два правильні шестикутники?

925. Назвіть фігури, які завжди подібні.

926. Чи завжди подібні два ромби? Чи подібні ромби, якщо один із них має кут 55°, а другий — 125°?

927. Радіус одного з кіл дорівнює діаметру іншого. Знайдіть коефіцієнт подібності.

928. Площі двох подібних многокутників відносяться як 9 : 16. Як відносяться їх периметри?

929. Сторони прямокутника 2 см і 6 см. Знайдіть периметр і площу подібного прямокутника, якщо: а) $k = 2$; б) $k = 0{,}5$.

930. Периметр многокутника 10 см. Знайдіть периметр подібного многокутника, якщо $k = 0{,}2$.

931. Дві фігури симетричні відносно деякої прямої. Чи подібні вони? З яким коефіцієнтом подібності?

А

932. Діагональ одного з квадратів є стороною іншого. Чому дорівнює коефіцієнт подібності цих квадратів?

933. Відрізок, паралельний основам трапеції, ділить її на дві трапеції. Чи подібна якась із них даній трапеції?

934. Середня лінія трапеції розбиває її на дві трапеції. Чи подібні вони?

935. Як відносяться довжини кіл:
а) вписаного в квадрат і описаного навколо нього;
б) вписаного в рівносторонній трикутник і описаного навколо нього?

936. Знайдіть відношення площ частин, на які трикутник ділить його середня лінія.

937. Перенесіть таблицю в зошит і заповніть її, якщо P_1, P_2, S_1, S_2 — периметри і площі двох подібних фігур, k — коефіцієнт подібності.

k	P_1	P_2	S_1	S_2
2	5			16
	12	3	48	
		5	90	10
0,6		10	72	

938. Знайдіть сторони чотирикутника периметра 88 см, якщо він подібний чотирикутнику, сторони якого 3 см, 5 см, 6 см і 8 см.

939. Периметри двох подібних многокутників відносяться як 2 : 5, а сума їх площ дорівнює 232 см². Знайдіть площу кожного з них.

940. Сторони одного прямокутника дорівнюють 5 см і 9 см. Знайдіть сторони подібного прямокутника, якщо його площа 180 см².

941. Діагоналі ромба 10 см і 24 см, а сторона подібного йому ромба дорівнює 26 см. Знайдіть площу другого ромба.

Б

942. M — середина сторони BC паралелограма $ABCD$, O — точка перетину прямих AC і MD. Знайдіть площу $\triangle MOC$, якщо $S_{\triangle AOD} = 12$.

943. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M. Знайдіть площу трапеції, якщо $AB : BM = 2 : 3$, а площа трикутника BMC дорівнює 18 см².

944. Знайдіть радіуси двох кругів, які мають зовнішній дотик, якщо їх площі відносяться як 4 : 25, а відстань між центрами дорівнює 14 см.

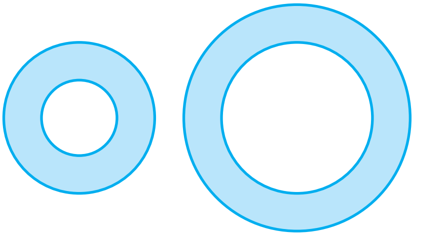
945. AM і BN — медіани трикутника ABC. Знайдіть площу чотирикутника $ABMN$, якщо площа трикутника ABC дорівнює 48 см².

946. Сформулюйте і доведіть ознаки подібності: а) двох ромбів; б) двох прямокутників.

947. Доведіть, що паралелограми подібні, якщо діагоналі ділять гострі кути на відповідно рівні кути.

948. Доведіть, що дві рівнобічні трапеції подібні, якщо їх гострі кути рівні, а діагоналі є бісектрисами цих кутів.

949. Є два кільця (мал. 327). Радіуси одного з них 1 см і 2 см, а другого — 2 см і 3 см. Чи подібні вони? Дослідіть, за якої умови два кільця, обмежені двома концентричними колами, подібні.



Мал. 327

950. O — точка перетину діагоналей трапеції $ABCD$ $(BC \parallel AD)$. Знайдіть площу трапеції, якщо площі трикутників AOD і BOC відповідно дорівнюють 90 см² і 40 см².

951. Знайдіть відношення довжин двох кіл з центрами O_1 і O_2, якщо їх спільна зовнішня дотична перетинає лінію центрів у точці P і $PO_1 : O_1O_2 = 2 : 7$.

952. Усередині опуклого п'ятикутника $ABCDE$ взято довільну точку O. A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 — точки, симетричні точці O відносно вершин п'ятикутника. Знайдіть площу п'ятикутника $ABCDE$, якщо площа п'ятикутника $A_1B_1C_1D_1E_1$ дорівнює 100 см².

953. Усередині опуклого чотирикутника, площа якого дорівнює S, взято довільну точку і її відображено симетрично відносно середин усіх сторін. Отримані точки послідовно з'єднані. Знайдіть площу утвореного чотирикутника.

954. У трикутнику ABC, площа якого 45 см², проведено висоти AN і BM. Знайдіть площу чотирикутника $ABNM$, якщо $\cos C = \frac{1}{3}$.

Практичне завдання

955. Доберіть кілька цитат про математику і за допомогою комп'ютера зробіть хмару слів, щоб на ній були подібні і не подібні зображення.

Задачі для повторення

956. Доведіть, що середини основ трапеції, точка перетину її діагоналей та точка перетину прямих, на яких лежать бічні сторони трапеції, лежать на одній прямій.

957. Найкоротша медіана прямокутного трикутника дорівнює 5 дм, а один із катетів 6 дм. Знайдіть площу трикутника.

958. У трикутнику медіана, проведена до сторони, утворює з нею кут 60°, а дві інші сторони дорівнюють 7 см і $\sqrt{19}$ см. Знайдіть невідому сторону трикутника.

Задачі за готовими малюнками

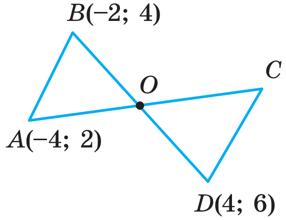
А | **Б**

1

А

AB симетричний CD відносно O

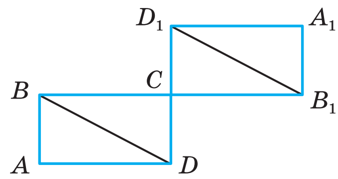
$C(x;\ y)$



Б

$A_1B_1C_1D_1$ симетричний $ABCD$ відносно C

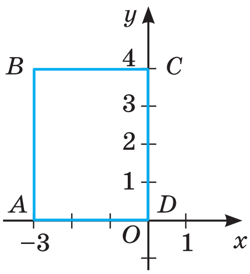
Довести: $BD \parallel B_1D_1$.



2

А

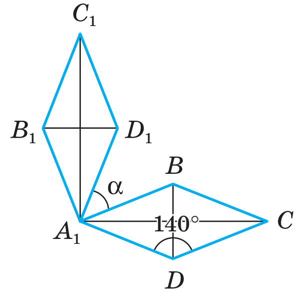
Рівняння осей симетрії чотирикутника $ABCD$



Б

Виконано поворот на 90°

α

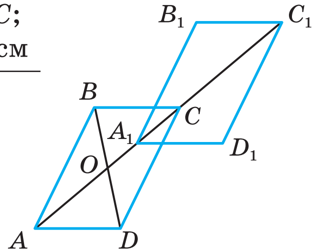


3

А

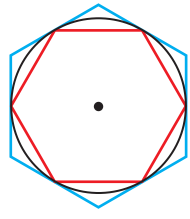
$OA_1 = A_1C$;
$AC = 10$ см

AC_1; BB_1



Б

Відношення площ правильних шестикутників

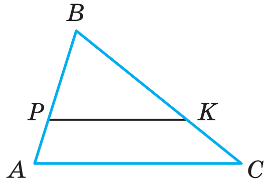


4

А

$PK \parallel AC$;
$S_{\triangle PBK} : S_{APKC} = 9 : 7$

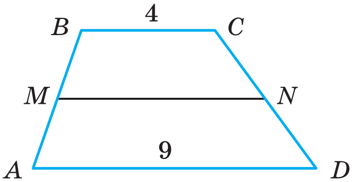
$AP : PB$



Б

$MBCN \sim AMND$

MN; $S_{MBCN} : S_{AMND}$



Самостійна робота 5

Варіант 1

1°. Побудуйте довільний трикутник ABC і виконайте його паралельне перенесення так, щоб вершина A відобразилась на C.

2°. Побудуйте квадрат $ABCD$ за його стороною $AB = 4$ см і поверніть його на $60°$ навколо середини сторони AB проти годинникової стрілки.

3•. Паралелограми $ABCD$ і AB_1CD_1 симетричні відносно прямої AC. Доведіть, що відрізки BD_1 і B_1D рівні і паралельні.

Варіант 2

1°. Побудуйте довільний паралелограм $ABCD$ і виконайте його паралельне перенесення так, щоб вершина A відобразилась на C.

2°. Побудуйте ромб $KPMT$ за стороною $KP = 3$ см і кутом $K = 45°$ та поверніть його на $60°$ навколо середини сторони KP за годинниковою стрілкою.

3•. Прямокутники $ABCD$ і $A_1BC_1D_1$ симетричні відносно вершини B. Доведіть, що відрізки AC_1 та A_1C рівні і паралельні.

Варіант 3

1°. Побудуйте довільний прямокутник $ABCD$ і виконайте його паралельне перенесення так, щоб вершина A відобразилась на середину BC.

2°. Побудуйте прямокутний трикутник з катетами 3 см і 4 см та поверніть його на $45°$ навколо середини гіпотенузи проти годинникової стрілки.

3•. Чотирикутники $ABCD$ і A_1B_1CD симетричні відносно прямої CD. Доведіть, що відрізки AA_1 і BB_1 паралельні.

Варіант 4

1°. Побудуйте довільний паралелограм $KPMT$ і виконайте його паралельне перенесення так, щоб вершина T відобразилась на середину PM.

2°. Побудуйте прямокутник $ABCD$, у якого $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, і поверніть його на $60°$ навколо середини O діагоналі AC за годинниковою стрілкою.

3•. Ромби $ABCD$ і $A_1B_1CD_1$ симетричні відносно вершини C. Доведіть, що відрізки AB_1 і A_1B рівні і паралельні.

Тестові завдання 5

1	Яке з перетворень не завжди зберігає відстань між точками?	а) поворот; б) центральна симетрія; в) перетворення подібності; г) осьова симетрія.
2	Точки A і B симетричні відносно точки O. Який знак слід поставити замість *: $AB * 2AO$?	а) $>$; в) $=$; б) $<$; г) $\neq$.
3	$\triangle ABC$ при повороті навколо точки A на кут 60° відобразився на $\triangle AB_1C_1$. Знайдіть $\angle BAC$, якщо $\angle B_1AC_1 = 85^\circ$.	а) 85°; в) 95°; б) 145°; г) 35°.
4	Яка з фігур має лише 4 осі симетрії?	а) коло; в) ромб; б) квадрат; г) прямокутник.
5	Точки $A(-4; 6)$ і $B(-2; 2)$ симетричні відносно точки M. Знайдіть її координати.	а) $(-6; 8)$; в) $(-3; 4)$; б) $(-3; 2)$; г) $(-1; 2)$.
6	Точки P і K симетричні відносно прямої l. Який знак слід поставити замість *: $PK * l$?	а) $\parallel$; в) $\perp$; б) $\in$; г) $=$.
7	При паралельному перенесенні точка $A(-3; 5)$ відобразилась на точку $B(-1; 3)$. У яку точку відобразиться середина відрізка AB?	а) $(-2; 4)$; в) $(1; 1)$; б) $(-4; -6)$; г) $(0; 2)$.
8	Які з фігур не завжди подібні?	а) два кола; б) два квадрати; в) два правильні трикутники; г) два ромба.
9	Площі двох півкругів відносяться як 4 : 9. Як відносяться їх радіуси?	а) 16 : 81; в) 1 : 1,5; б) 2 : 4,5; г) 2 : 3.
10	Який з правильних многокутників є центрально-симетричним?	а) трикутник; б) п’ятикутник; в) шестикутник; г) семикутник.

Типові задачі для контрольної роботи

1°. Дано відрізок AB і точку $O \notin AB$. Побудуйте:
а) відрізок, симетричний відрізку AB відносно точки O;
б) точку O_1, симетричну точці O відносно прямої AB;
в) відрізок, що утворюється при повороті відрізка AB на кут 60° навколо точки O за годинниковою стрілкою;

2°. $\triangle ABC$ симетричний $\triangle AMC$ відносно прямої AC. $\angle BCA = 20°$, $\angle MAC = 45°$. Знайдіть решту кутів цих трикутників.

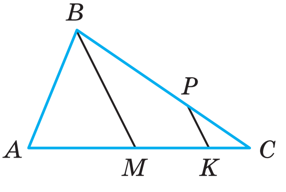
3°. Паралелограми $A_1B_1C_1D_1$ і $ABCD$ симетричні відносно деякої точки O. Знайдіть сторони паралелограмів, якщо периметр $ABCD$ дорівнює 30 см, а B_1C_1 = 10 см.

4°. Знайдіть коефіцієнт подібності двох прямокутників та їх площі, якщо сторони одного з них 5 см і 8 см, а периметр другого — 52 см.

5•. O — точка перетину діагоналей ромба $ABCD$. При паралельному перенесенні точка A відображається на точку O, точка C — на C_1. Знайдіть AC_1, якщо AC = 5 см.

6•. При яких значеннях a і b точки $A(a; 4)$ і $B(3; 2b)$ симетричні відносно точки $M(-1; 6)$?

7•. BM — медіана трикутника ABC (мал. 328). На сторонах BC і AC вибрано точки P і K так, що $BP : PC = MK : KC = 2 : 1$. Знайдіть площу чотирикутника $MBPK$, якщо площа трикутника ABC дорівнює 54 см².



Мал. 328

8•. Запишіть рівняння прямої, на яку відобразиться пряма $y = 2$ при повороті навколо точки $M(1; -1)$ на кут 90°:
а) за годинниковою стрілкою;
б) проти годинникової стрілки.

9••. На осі OX знайдіть точку, сума відстаней від якої до точок $M(-2; 5)$ і $N(4; 4)$ найменша.

10••. Доведіть, що якщо сторона і діагональ одного паралелограма пропорційні стороні і діагоналі другого паралелограма і кути між ними рівні, то паралелограми подібні.

Головне в розділі 5

Якщо точки фігури F змістити яким-небудь способом, то дістанемо нову фігуру F_1. Якщо при цьому різні точки фігури F переходять (відображаються) у різні точки фігури F_1, то говорять про **геометричне перетворення фігури** F у фігуру F_1. При цьому фігуру F_1 називають образом фігури F, а фігуру F — прообразом фігури F_1.

Найважливіші геометричні перетворення — переміщення і перетворення подібності.

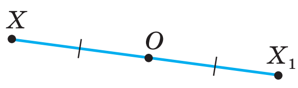
Переміщенням (або рухом) називають таке геометричне перетворення, при якому зберігаються відстані між відповідними точками.

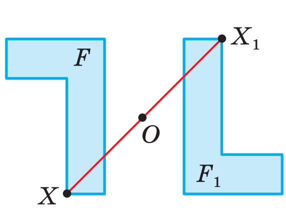
Переміщення відображає: відрізок — на рівний йому відрізок, пряму — на пряму, промінь — на промінь, кут — на рівний йому кут, трикутник — на рівний йому трикутник.

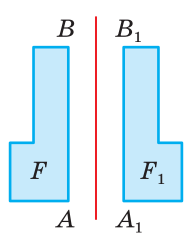
Дві фігури називають **рівними**, якщо існує переміщення, яке відображає одну з них на другу. Кожне переміщення відображає будь-яку фігуру на рівну їй фігуру. Якщо дві геометричні фігури рівні, то існує переміщення, яке відображає одну з них на другу.

Найважливіші переміщення фігур на площині: **симетрія відносно точки, симетрія відносно прямої, поворот, паралельне перенесення.**

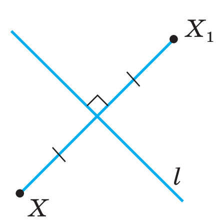
Точки X і X_1 називають **симетричними відносно точки O**, якщо O — середина відрізка XX_1. Якщо відносно O кожна точка фігури F симетрична деякій точці фігури F_1 і навпаки, то фігури F і F_1 симетричні відносно точки O. Таке відображення фігури F на F_1 називають **перетворенням симетрії відносно точки O.**



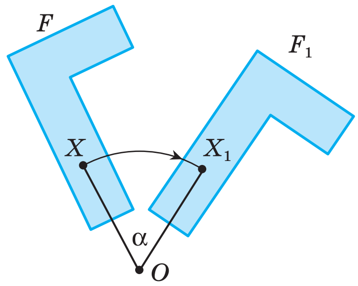




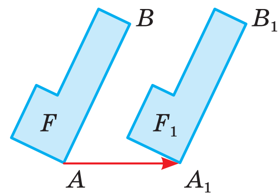
Точки X і X_1 називають **симетричними відносно прямої l**, якщо ця пряма — серединний перпендикуляр відрізка XX_1. Якщо точка X лежить на прямій l, вона вважається симетричною сама собі відносно прямої l.



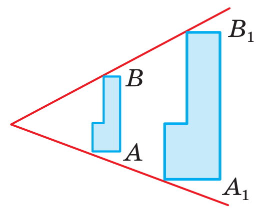
Перетворення фігури F, при якому кожна її точка відображається на симетричну їй відносно прямої l точку, називають **перетворенням симетрії відносно прямої l.** Якщо при цьому перетворенні фігура F відображається на F_1, то ці дві фігури називають **симетричними відносно прямої l.**



Нехай дано точку O і довільну фігуру F. Повернемо точку X цієї фігури навколо точки O на кут α за рухом годинникової стрілки. При цьому точка X відобразиться на таку точку X_1, що кутова міра дуги XX_1 з центром O дорівнює α (OX і OX_1 — рівні радіуси). Якщо таким способом повернути навколо точки O на кут α кожну точку фігури F, то дістанемо фігуру F_1. Говорять, що поворот навколо точки O на кут α відображає фігуру F на фігуру F_1. Точка O називається **центром повороту**, а кут XOX_1 — **кутом повороту**.



Якщо кожну точку фігури F змістити в одному й тому самому напрямі на одну й ту саму відстань XX_1 (або на вектор $\overrightarrow{XX_1}$), дістанемо фігуру F_1. У такому випадку говорять, що паралельне перенесення, яке відображає точку X на X_1, відображає фігуру F на F_1.



Перетворення фігури F у фігуру F_1, при якому відстані між точками змінюються у тому самому відношенні в ту саму кількість разів k, $k > 0$, називають **перетворенням подібності.** Це означає, що коли довільні точки A і B фігури F при перетворенні подібності переходять у точки A_1 і B_1 фігури F_1, то $A_1B_1 = kAB$. Число k називають **коефіцієнтом подібності.** Коефіцієнт подібності завжди додатний. Якщо $k = 1$, то подібність є переміщенням.

Дві фігури називають **подібними**, якщо існує перетворення подібності, яке відображає одну з них на другу.

Перетворення подібності відображає кожну фігуру на подібну їй фігуру.

Відношення периметрів двох подібних фігур дорівнює коефіцієнту подібності k:

$$P_1 : P = k.$$

Відношення площ подібних фігур дорівнює квадрату коефіцієнта подібності:

$$S : S_1 = k^2.$$

Площі подібних фігур відносяться як квадрати відповідних лінійних елементів:

$$S : S_1 = a^2 : c^2.$$

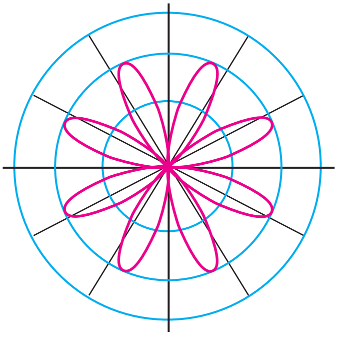
Додатки

НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЕКТ 1
Цікаві криві

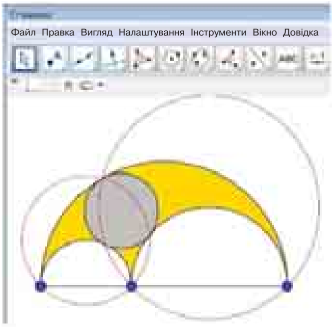
Клас поділяється на три групи: «історики», «математики», «комп'ютерні дизайнери». Кожен учень може взяти участь у роботі однієї або двох проектних груп. Учні формуються у групи і працюють індивідуально чи в парах над однією із запропонованих тем.

1. **«Історики»** досліджують, які криві були предметом вивчення математиків у різні часи, розглядають особливості використання цих кривих, з'ясовують походження їх назв, ознайомлюються з життєвим шляхом математиків, які досліджували ці криві. Учням можна запропонувати розглянути історію дослідження вже відомих їм кривих (параболи, гіперболи, еліпса, кола) або тих, що будуть вивчати в старшій школі (синусоїди, тангенсоїди). Крім цього, це, наприклад, можуть бути такі криві:
   - спіраль Архімеда;
   - ланцюгова лінія;
   - локон Аньєзі;
   - циклоїда;
   - Декартів лист.

2. **«Математики»** вивчають різні системи координат і правила побудови в них. Дізнаються, якими формулами задають відомі їм криві в нових системах координат. З'ясовують переваги і недоліки цих систем координат і способи використання. Конструюють свою криву та подають її аналітично і графічно у кількох системах координат. Учням можна запропонувати ознайомитися детальніше з однією із таких систем координат:
   - прямокутна система координат на площині;
   - прямокутна система координат у просторі;
   - полярна система координат;
   - сферична система координат.



3 **«Комп'ютерні дизайнери»** вивчають один з доступних програмних засобів (Excel, GeoGebra, Gran та інші) для зручної побудови кривих. За допомогою обраного програмного засобу будують криві, які важко побудувати традиційним способом.



Теми для проектної діяльності повідомляються учням наприкінці вересня.

Результати роботи над проектом бажано оформити у вигляді групового портфоліо з комп'ютерною презентацією.

Захист проектів доцільно провести на позакласному заході, запросивши учнів інших класів, учителів і батьків.

НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЕКТ 2
Векторний метод розв'язування задач

Цей проект доцільно виконувати індивідуально. Учням пропонується опрацювати матеріал параграфа 12 і знайти додаткові відомості щодо застосування векторів.

Векторний метод розв'язування задач пов'язаний з використанням властивостей векторів. Особливістю цього методу є те, що в процесі розв'язування задач не виникає потреби в розгляданні складних геометричних конфігурацій. Іноді за допомогою векторного методу геометричну задачу досить просто звести до алгебраїчної, яку легше розв'язати, ніж вихідну геометричну.

Задачі, які розв'язують за допомогою векторів, поділяються на афінні та метричні. Перші розв'язують із застосуванням лише лінійних операцій: додавання і віднімання векторів та множення вектора на число. Метричні задачі, крім іншого, стосуються знаходження довжини відрізка і міри кута, тому в процесі їх розв'язування використовують крім лінійних операцій скалярний добуток векторів.

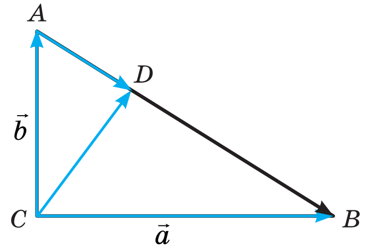
Учням слід усвідомити правило-орієнтир розв'язування метричних задач векторним методом. Проілюструємо правило-орієнтир для визначення довжини відрізка векторним методом на конкретній задачі.

Для обчислення довжини відрізка необхідно:

- вибрати на площині два неколінеарних вектори (базисні), довжини яких та кут між якими вважаються відомими;

- вектор, довжина якого дорівнює довжині шуканого відрізка, розкласти за базисними векторами;
- обчислити довжину шуканого відрізка, як модуль вектора, за формулою: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Задача. На гіпотенузі AB трикутника ABC взято точку D, що задовольняє умову: $BD : DA = 3 : 1$. Виразити довжину відрізка CD через довжини катетів: $CB = a$, $CA = b$.



Розв'язання. Нехай базисними будуть вектори CA і CB, $\angle C = 90°$, $|\vec{a}| = a$, $|\vec{b}| = b$. Виразимо вектор $\overrightarrow{CD}$ через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та знайдемо його довжину.

З трикутника CAD $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \vec{b} + \overrightarrow{AD}$; $AD \uparrow\uparrow AB$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$;

$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{4}$, а $\overrightarrow{CD} = \vec{b} + \frac{\vec{a} - \vec{b}}{4} = \frac{3\vec{b} + \vec{a}}{4}$.

Оскільки $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{\overrightarrow{CD}^2}$, то $|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{\left(\frac{3\vec{b} + \vec{a}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{9\vec{b}^2 + 6\vec{a}\vec{b} + \vec{a}^2}}{4}$.

За умовою $\vec{a} \perp \vec{b}$, тому $\vec{a}\vec{b} = 0$. Оскільки $\vec{a}^2 = a^2$, $\vec{b}^2 = b^2$, то $|\overrightarrow{CD}| = \frac{\sqrt{9b^2 + a^2}}{4}$.

Отже, $CD = \frac{\sqrt{9b^2 + a^2}}{4}$.

Векторним методом доцільно розв'язувати такі геометричні задачі:

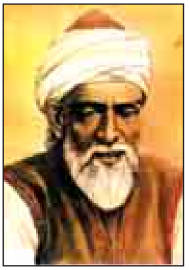
- задачі на доведення паралельності прямих та відрізків;
- задачі на доведення того факту, що деяка точка ділить відрізок у деякому відношенні;
- задачі на доведення належності трьох точок одній прямій;
- задачі на доведення перпендикулярності прямих та відрізків;
- задачі на доведення залежностей між довжинами відрізків;
- задачі на знаходження величини кута.

НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЕКТ 3
Знайома і незнайома тригонометрія

Клас поділяється на три групи: «історики», «математики», «практики». Кожен учень може взяти участь у роботі однієї або двох проектних груп. Учні формуються у групи і працюють індивідуально чи в парах над однією із запропонованих тем.

1 **«Історики»** досліджують виникнення тригонометрії та її розвиток в окремі періоди:
- зародження тригонометрії у Стародавній Греції;
- розвиток вчення про тригонометричні величини в країнах Сходу;
- розвиток тригонометрії в Європі.


Птолемей


Абуль-Вафа


Регіомонтан

Результати роботи над проектом учні з групи «Історики» оформляють у вигляді стіннівок і групового портфоліо з комп'ютерною презентацією.

2 «**Математики**» опановують додатковий теоретичний матеріал, що стосується геометрії. Це, наприклад, можуть бути такі питання:
- періодичні процеси і тригонометричні функції;
- графіки тригонометричних функцій;
- теореми додавання та формули кратних кутів.

Результати роботи над проектом учні з групи «Математики» оформляють у вигляді індивідуального портфоліо.

3 «**Практики**» досліджують, де і як використовуються відомості з тригонометрії.

Тригонометрія виникла як засіб для вимірювання відстаней і розмірів тіл. Тому найчастіше використовували її в астрономії, географії і мореплавстві. Спершу користувались примітивними вимірювальними інструментами: відстані міряли мотузками, кути — астролябіями, екерами, екліметрами. Згодом інструментарій удосконалювали і теорію збагачували, ввели поняття тригонометричних функцій.

Пізніше виявили, що тригонометричні функції чудово описують гармонічні коливання та різні періодичні процеси, тому особливо часто стали використовувати їх у фізиці — особливо там, де відбувається перехід кругових рухів у лінійні і навпаки (різні види кривошипів).

Тепер тригонометрію використовують в астрономії, геодезії, маркшейдерії, фізиці, кристалографії, хімії та інших науках, у яких розглядаються лінійні розміри і кути, а також у науках, які вивчають періодичні процеси.

Результати роботи над проектом учні з групи «Практики» оформляють у вигляді презентації.

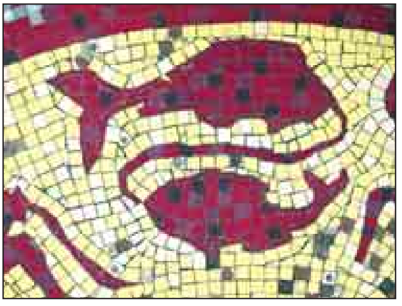
НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЕКТ 4
Замощення площини

Тема про замощення площини широка й багатогранна. Вона містить багато простих задач, доступних молодшим учням і досить важких, з якими не всі студенти можуть справитися.

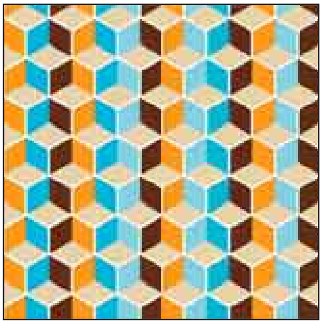
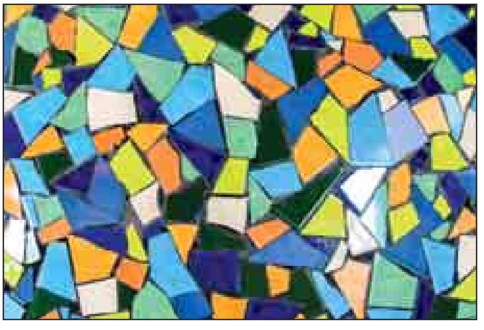
Учням 9 класу можна запропонувати такі теми:

1. Паркети і смуги.
2. Замощення площини правильними многокутниками.
3. Замощення площини напівправильними многокутниками.
4. Замощення площини рівними шестикутниками.
5. Замощення площини рівними п'ятикутниками.
6. Паркети з поліміно.
7. Сюжетні мозаїки.
8. Замощення площини кольоровими многокутниками.

Наведемо кілька прикладів сюжетних мозаїк.

Замощення площини кольоровими многокутниками імітує об'ємне зображення або зображення рельєфної поверхні.

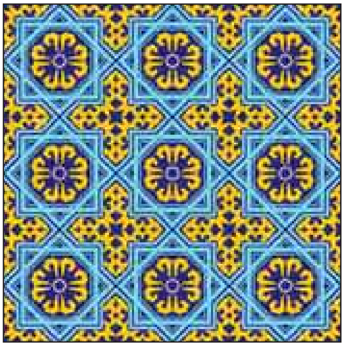



Добре, якщо в процесі роботи над проектом учні зможуть створити власні цікаві паркети чи сюжетні мозаїки. У цьому випадку доцільно провести конкурс творчих робіт.

НАВЧАЛЬНИЙ ПРОЕКТ 5
Орнаменти і геометричні перетворення

Учні класу формуються в малі групи по 2–3 особи. За бажанням учнів можна здійснювати індивідуальну проектну діяльність. Кожна група обирає для проектної діяльності одну із запропонованих нижче тем.

- Що таке орнамент. Коли і де з'явилися перші орнаменти.
- Види орнаментів.
- Характерні риси орнаментів у різних народів.



Орнамент Туркменистану

Орнамент Норвегії

- Орнаменти трипільської культури.
- Орнаменти і вишивки мого краю.
- Види геометричних перетворень на українських вишивках.
- Види геометричних перетворень в орнаментах на різьбленні по дереву.
- Технологія створення орнаментів.
- Створення орнаментів на основі паралельного перенесення.
- Створення орнаментів на основі центральної симетрії.
- Створення орнаментів на основі осьової симетрії.
- Створення орнаментів на основі повороту.
- Створення орнаментів на основі подібності.
- Створення орнаментів на основі композицій геометричних перетворень.
- Улюблені орнаменти моєї родини.
- Комп'ютерне створення орнаментів.

Завдання для проектної діяльності бажано повідомити учням перед вивченням теми «Геометричні перетворення». У процесі вивчення конкретного геометричного перетворення на уроці чи в позаурочний час учні зможуть показувати результати своєї проектної діяльності. Після вивчення теми доцільно провести виставку-конференцію.

Задачі підвищеної складності

959. Доведіть, що в прямокутному трикутнику з гострим кутом 15° добуток катетів дорівнює квадрату половини гіпотенузи.

960. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b. Знайдіть довжину бісектриси, проведеної до гіпотенузи.

961. Катет прямокутного трикутника дорівнює a, а діаметр вписаного кола d. Знайдіть гіпотенузу.

962. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайдіть відстань між центрами вписаного і описаного кіл.

963. Доведіть, що периметр прямокутного трикутника дорівнює діаметру кола, яке дотикається до його гіпотенузи і продовжень катетів.

964. Основи трапеції дорівнюють 3 і 7, а бічні сторони 2 і $2\sqrt{3}$. Знайдіть кути трапеції.

965. Доведіть, що сума катетів прямокутного трикутника дорівнює сумі діаметрів описаного і вписаного кіл.

966. Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить гіпотенузу на частини 4 см і 6 см. Знайдіть радіус кола.

967. Побудуйте трикутник, знаючи його медіану, бісектрису і висоту, проведені з однієї вершини.

968. ***Задача Наполеона.*** Користуючись лише циркулем, поділіть дане коло з позначеним центром на чотири рівні частини.

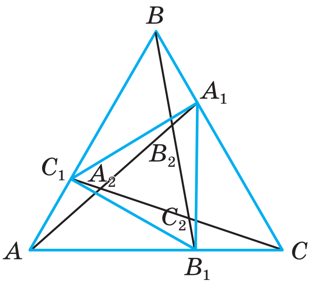
969. Сторона правильного шестикутника $ABCDEF$ дорівнює a. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник ACD.

970. Знайдіть координати вершин трикутника, якщо координати середин його сторін: $K(1; 2)$, $P(3; 4)$, $T(5; 1)$.

971. Дано точки $A(a_1; a_2)$, $B(b_1; b_2)$ і число n. Знайдіть координати такої точки P відрізка AB, що $AP : PB = 1 : n$.

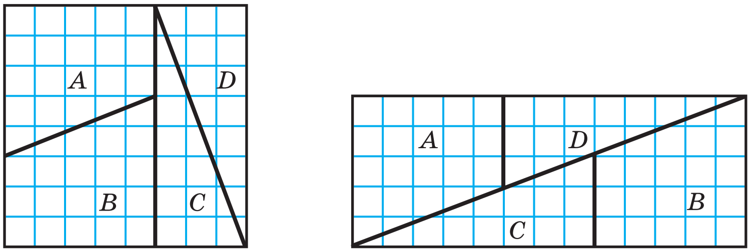
972. Доведіть, що площа трикутника з кутами α, β, γ і радіусом R описаного кола дорівнює $2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

973. На сторонах AB, BC, CA рівностороннього трикутника (мал. 329) позначимо точки C_1, A_1, B_1 такі, що $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 1 : 2$. Як відносяться площі:
а) трикутників ABC і $A_1B_1C_1$;
б) трикутника ABC і трикутника $A_2B_2C_2$, обмеженого прямими AA_1, BB_1 і CC_1?



Мал. 329

974. Квадрат площею 64 см^2 учень розрізав на чотири частини і склав з них прямокутник, сторони якого дорівнюють 5 см і 13 см (мал. 330). Чому площа прямокутника не дорівнює площі квадрата?



Мал. 330

975. Точка M розмішена всередині квадрата $ABCD$ так, що $\angle MAB = 30°$, $\angle MCB = 15°$. Знайдіть кут AMB.

976. Знайдіть кути опуклого чотирикутника $ABCD$, сторони якого: $AD = 4$, $DC = 2$, $CB = 5 - \sqrt{3}$, $AB = 5\sqrt{2}$, діагональ $AC = 2\sqrt{7}$.

977. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомі куги: $\angle BAC = 20°$, $\angle BCA = 35°$, $\angle BDC = 40°$, $\angle BDA = 70°$. Знайдіть кут між діагоналями чотирикутника.

978. Знайдіть кут між стороною AD опуклого чотирикутника $ABCD$ і його діагоналлю AC, якщо $\angle CAB = 50°$, $\angle ABD = 60°$, $\angle DBC = 20°$, $\angle CDB = 30°$.

979. На сторонах BC і CD квадрата позначено точки M і K такі, що периметр трикутника MKC дорівнює половині периметра квадрата. Знайдіть кут MAK.

980. На протилежних сторонах паралелограма як на сторонах поза ним побудовано квадрати. Доведіть, що пряма, яка проходить через центри квадратів, проходить також через точку перетину діагоналей паралелограма.

Доведіть твердження 981–986.

981. Якщо вписане в трикутник коло дотикається його сторін AB, BC і CA в точках C_1, A_1, B_1, то AA_1, BB_1, CC_1 перетинаються в одній точці.

982. Якщо коло, центр якого лежить на стороні AB трикутника, дотикається до його сторін AC і BC у точках B_1, A_1, а прямі AA_1 і BB_1 перетинаються в точці P, то $CP \perp AB$.

983. Добуток довжин відрізків, які сполучають центр вписаного в трикутники кола з вершинами трикутника, дорівнює $4Rr^2$.

984. Якщо O — центр описаного навколо трикутника ABC кола, а I — центр вписаного кола, то

$$\frac{AO}{AI} \cdot \frac{BO}{BI} \cdot \frac{CO}{CI} = \frac{R^2}{4r^2}.$$

984. Якщо чотири прямі, перетинаючись одна з одною, утворюють чотири трикутники, то чотири кола, описані навколо цих трикутників, проходять через одну точку, а їхні центри лежать на одному колі, яке також проходить через ту саму точку.

986. Сторони трикутника дорівнюють a, b, c, а його в вершини є центрами кіл, кожне з яких дотикається до двох інших. Знайдіть радіуси цих кіл, а також радіус кола, яке дотикається до кожного з цих трьох кіл. Розгляньте усі випадки.

987. Сторони вписаного в коло трикутника дорівнюють r, $r\sqrt{3}$, $2r$ і відтинають сегменти, площі яких дорівнюють S_1, S_2, S_3. Доведіть, що площа трикутника $S = S_3 - S_2 - S_1$.

988. На діаметрі AB взято довільні точки C, D і на відрізках AC, CD, DB, як на діаметрах, побудовано менші кола. Доведіть, що довжини трьох менших кіл у сумі дорівнюють довжині найбільшого кола.

989. Через точку кола радіуса r проходять дотичні до нього два менші кола, які ділять круг, обмежений колом радіуса r, на три рівновеликі фігури. Знайдіть радіуси менших кіл.

990. У коло радіуса r вписано три рівні кола так, що кожне з них внутрішнім способом дотикається до даного кола і зовнішнім — до двох рівних йому кіл. Знайдіть площі семи фігур, на які вписані кола поділяють даний круг радіуса r.

991. На радіусі OA кола, як на діаметрі, побудоване менше коло. Нехай B і C — точки, в яких менше і більше коло перетинає довільний промінь, проведений з точки O. Доведіть, що довжини дуг AB і AC рівні.

992. З точки кола проведені дві рівні хорди AB і AC, які ділять круг, обмежений цим колом, на три рівновеликі фігури. Знайдіть міру кута BAC.

993. Точка P знаходиться на відстані $2r$ від центра круга радіуса r. Через P проведено два промені, які ділять круг на три рівновеликі частини. Знайдіть міру кута між цими променями.

994. У круговий сектор з кутом $60°$ вписано круг. Знайдіть відношення площин даного сектора і вписаного круга.

995. Дано $\triangle ABC$. На прямих BC, CA і AB дано точки A_1, B_1 і C_1 відповідно такі, що $\overline{AC_1} = \alpha\overline{C_1B}$, $\overline{BB_1} = \beta\overline{A_1C}$, $\overline{CB_1} = \gamma\overline{B_1A}$. Доведіть, що якщо точки A_1, B_1, C_1 лежать на одній прямій, то $\alpha\beta\gamma = -1$. Чи правильно обернене твердження?

996. Через вершину C паралелограма $ABCD$ проведено пряму l, яка перетинає прямі AB і AD відповідно в точках M і N. Доведіть, що якщо $\overline{DC} = k\overline{AM}$, $\overline{BC} = l\overline{AN}$, то $k + l = 1$.

997. У якому відношенні ділить сторону AC промінь, що виходить з вершини B трикутника ABC і проходить через середину медіани, проведеної з вершини A?

998. Медіана AM_a точками K і M поділена па три рівні частини. На які частини ділять сторону AB промені CK і CM?

999. Знайдіть площу трикутника S: а) за його медіаною m_a і кутами B, C; б) за його медіанами m_a, m_b, m_c,

1000. Знаючи кути три кутника, виразіть кут між медіаною і висотою, що виходять з однієї вершини.

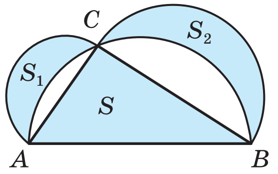
1001. Медіана — середня пропорційна сторін, що виходять з однієї вершини. Знайдіть кут трикутника при цій вершині.

1002. Знайдіть на медіані трикутника таку точку, через яку можна провести тільки одну пряму, яка ділить площу даного трикутника у відношенні 1 : 2.

1003. Знайдіть площі фігур, на які круг радіуса r розбивається хордами AC і BD, що перетинаються, коли дуги AB, BC, CD і DA мають відповідно $150°$, $30°$, $90°$ і $90°$.

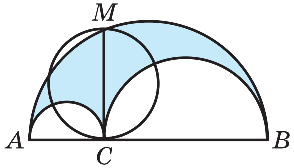
1004. h_1, h_2, h_3 — висоти трикутника, а r — радіус вписаного кола. Доведіть, що $\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}=\frac{1}{r}$.

1005. На сторонах прямокутного трикутника, як на діаметрах, побудовано півкола (мал. 331). Доведіть, що сума площ S_1 і S_2 утворених серпиків дорівнює площі S даного трикутника.



Мал. 331

1006. ***Задача Архімеда.*** З одного боку від прямої AB проведено півкола діаметрів AC, CB і AB (мал. 332). Пряма CM, перпендикулярна до AB, перетинає найбільше півколо в точці M. Доведіть, що площа фігури, обмеженої даними півколами, дорівнює площі круга діаметра CM.



Мал. 332

1007. ***Задача Птолемея.*** Доведіть, що в чотирикутнику, вписаному в коло, сума добутків протилежних сторін дорівнює добутку діагоналей.

Задачі для повторення

До розділу 1

1008. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайдіть синуси, косинуси і тангенси кутів трикутника.

1009. Обчисліть кути рівнобічної трапеції, якщо синус одного з них дорівнює $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1010. Обчисліть:

а) $\sin^2 36° + \cos^2 36° - \operatorname{tg}^2 45°$;

б) $\cos 60° \sin 30° - \sin 60° \cos 30° + \cos 120° \operatorname{tg} 135°$;

в) $\operatorname{tg} 135° \operatorname{tg} 45° - \sin 30° \cos 120°$;

г) $2\cos 45° \sin 45° - \sin^2 60° - \cos^2 60°$.

1011. Знайдіть $\cos\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $90° < \alpha < 180°$.

1012. Знайдіть $\sin\alpha$ і $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

1013. Спростіть вирази:

а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\beta$;

б) $\sin\alpha\sin(180^\circ - \alpha) - \cos\alpha\cos(180^\circ - \alpha)$;

в) $\sin^2(180^\circ - \alpha) + \cos^2\alpha + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2(180^\circ - \alpha)}$;

г) $\dfrac{\cos(180^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} \cdot \dfrac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)}$.

1014. *O* — центр кола, вписаного в трикутник *ABC*. Знайдіть:

а) $\angle B$, якщо косинус $\angle AOC$ дорівнює $-\frac{1}{2}$;

б) $\angle AOC$, якщо $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1015. Основи рівнобічної трапеції, у яку можна вписати коло, пропорційні числам 3 і 11. Знайдіть синуси кутів трапеції.

1016. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною 6 см і кутом при основі, косинус якого дорівнює $\frac{1}{3}$.

1017. Побудуйте рівнобедрений трикутник, якщо висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 4 см, а тангенс кута при основі дорівнює $\frac{4}{3}$.

1018. Косинуси гострих кутів рівнобічної трапеції дорівнюють 0,8 і 0,6. Чому дорівнюють синус, косинус і тангенс його тупих кутів?

1019. *AK*, *BL*, *CM* — медіани $\triangle ABC$. Знайдіть координати точки *L*, якщо $A(-3;\ -1)$, $B(-2;\ 1)$, $K(1;\ -1)$.

1020. Відрізок *MN* точками *K* і *P* поділено на три рівні частини ($MK = KP = PN$). Знайдіть координати точки *N*, якщо $M(2;\ -4)$, $P(-6;\ 2)$.

1021. Знайдіть сторони та площу $\triangle ABC$, якщо $A(a;\ b)$, $B(-a;\ b)$, $C(-a;\ -b)$ і точка *A* лежить у III координатній чверті.

1022. Дано $\triangle ABC$, у якого $A(7;\ 5)$, $B(4;\ 1)$, $C(-4;\ 7)$. Знайдіть довжини медіани, висоти і бісектриси, проведених з вершини *B*.

1023. Використовуючи умову попередньої задачі, напишіть рівняння медіани, висоти і бісектриси, проведених з вершини *B*.

1024. Точки $A(2;\ -5)$ і $C(2;\ -1)$ є вершинами квадрата *ABCD*. Напишіть рівняння кола, вписаного в цей квадрат, та кола, описаного навколо нього. Знайдіть невідомі вершини квадрата.

1025. На осі абсцис знайдіть точку M, яка рівновіддалена від початку координат і від точки $P(2; 3)$.

1026. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(1; 4)$ і $B(-2; 1)$. Знайдіть площу трикутника, який відтинає ця пряма від осей координат.

1027. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через центри двох кіл: $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ і $x^2 + y^2 + 4x - 6t = 3$.

1028. Доведіть, що трикутник з вершинами $A(3; 4)$, $B(6; -2)$, $C(-3; 1)$ — рівнобедрений. Знайдіть його площу.

1029. Встановіть вид чотирикутника $ABCD$, якщо $A(3; 1)$, $B(4; 6)$, $C(9; 7)$, $D(8; 2)$. Знайдіть його периметр і площу.

1030. Напишіть рівняння кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо $A(1; 8)$, $B(2; -4)$, $C(-3; -2)$.

1031. Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо $A(-4; 3)$, $B(-1; 6)$, $C(4; 1)$, $D(-1; -2)$? Чи існує коло, вписане в цей чотирикутник? Напишіть рівняння кола, якщо це можливо.

1032. Побудуйте коло, задане рівнянням:

а) $(x+2)^2 + y^2 = 9$;

б) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 16$;

в) $x^2 + (y-3)^2 = 4$.

1033. Знайдіть площу трикутника, утвореного при перетині прямої AB з осями координат, якщо $A(2; -3)$ і $B(6; 3)$. Напишіть рівняння кола, описаного навколо цього трикутника.

1034. Доведіть, що лінія, задана рівнянням $x^2 + 6x + y^2 = 0$, є рівнянням кола. Чи буде відрізок AB діаметром цього кола, якщо $A\left(-5; \sqrt{5}\right)$, $B\left(-1; -\sqrt{5}\right)$?

До розділу 2

1035. Побудуйте три довільні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Побудуйте вектор $\vec{d}$ такий, що:

а) $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$;

б) $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$;

в) $\vec{d} = 0,5\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$;

г) $\vec{d} = \vec{a} + 0,5\vec{b} - 2\vec{c}$.

1036. Чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо $A(1; 6)$, $B(3; 2)$, $C(0; -1)$, $D(2; -5)$?

1037. Знайдіть модуль вектора $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, якщо $\vec{a} = (1; 3)$, $\vec{b} = (-2; 0)$.

1038. При яких значеннях x вектори $\vec{a} = (x; -2)$ і $\vec{b} = (-4; 2x)$ колінеарні?

1039. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:
а) $A(1;\ 3)$, $B(-2;\ 4)$;
б) $A(-6;\ 8)$, $B(1;\ -3)$;
в) $A(0;\ a)$, $B(a;\ 0)$;
г) $A(m;\ n)$, $B(-m;\ n)$.

1040. Дано точки $M(-1;\ 4)$, $N(2;\ -3)$, $A(-2;\ 1)$. Знайдіть координати точки B такої, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}$.

1041. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, який співнапрямлений до вектора $\vec{p}=(3;-4)$, якщо $|\vec{a}|=15$.

1042. Доведіть, що точки $A(-1;\ 3)$, $B(4;\ 5)$, $C(19;\ 11)$ лежать на одній прямій.

1043. Знайдіть скалярний добуток векторів $(\vec{m}-2\vec{n})$ і $(2\vec{m}+\vec{n})$, якщо $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)=60°$.

1044. При якому значенні p скалярний добуток векторів $\vec{a}=(3;\ p)$ і $\vec{b}=(-4;3)$ дорівнює 6?

1045. Сторона правильного трикутника ABC дорівнює 2 см. Обчисліть $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$.

1046. Доведіть, що діагоналі чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні, якщо $A(-5;\ -4)$, $B(-4;\ 2)$, $C(1;\ 6)$, $D(1;\ -1)$.

1047. При яких значеннях x вектори $\vec{p}=(2;\ x)$ і $\vec{s}=(x;\ x+3)$ перпендикулярні?

1048. Знайдіть модуль вектора $\vec{m}=\vec{a}+2\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $\left(\widehat{\vec{a};\ \vec{b}}\right)=60°$.

1049. Знайдіть косинуси кутів трикутника ABC, якщо $A(-1;\ 2)$, $B(3;\ 5)$, $C(2;\ -1)$.

1050. При яких значеннях a кут між векторами $\vec{m}=(6;\ a)$ і $\vec{b}\,(-5;\ a-1)$ тупий?

1051. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо вектор $\vec{a}+2\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}-2\vec{b}$.

1052. Знайдіть координати вектора $\vec{p}$, якщо він перпендикулярний до вектора $\vec{m}\,(1;\ -3)$ і $|\vec{p}|=3\sqrt{10}$.

1053. Дано точки $A(4;\ -2)$ і $B(2;\ -5)$. Запишіть рівняння прямої, яка дотикається до кола діаметра AB у точці A.

1054. Напишіть рівняння дотичних, проведених з точки $A(5;\ 0)$ до кола $x^2+y^2=9$.

1055. Нехай O — точка перетину медіан трикутника ABC. Виразіть вектор $\overrightarrow{AO}$ через вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$.

1056. Нехай точки P і K — середини сторін BC і CD паралелограма $ABCD$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{PK}$ через вектори $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

До розділу 3

1057. Знайдіть невідомі сторони $\triangle ABC$, якщо:
а) $AB = 3$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$;
б) $AB = 6$ см, $AC = 4$ см, $\cos B = \frac{7}{9}$;
в) $AC - AB = 6$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 120°$;
г) $AC = 6$ см, $BC = 14$ см, $\angle A = 60°$.

1058. Сторони трикутника пропорційні числам 7, 8 і 13. Знайдіть найбільший кут трикутника, якщо його периметр 56 см.

1059. Діагоналі паралелограма дорівнюють 12 см і 32 см, а одна зі сторін 14 см. Знайдіть периметр паралелограма та кут між його діагоналями.

1060. Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 23 см і 30 см. Знайдіть довжину медіани, проведеної до найбільшої сторони.

1061. У $\triangle MNP$ $MN = 12$ см, $\sin N = 0{,}4$, $\sin P = 0{,}6$. Знайдіть MP.

1062. У $\triangle ABC$ $AB = BC = 6$ см, $\sin A = 0{,}4$. Знайдіть відстань від точки перетину медіан трикутника до центра кола, описаного навколо трикутника.

1063. AL — бісектриса рівнобедреного $\triangle ABC$ ($AB = BC$), $BL = a$, $\angle A = 2\alpha$. Знайдіть сторони трикутника і довжини його бісектрис.

1064. BM — медіана $\triangle ABC$, $BM = m$, $\angle ABM = \alpha$, $\angle CBM = \beta$. Знайдіть AB.

1065. Основи трапеції дорівнюють 6 см і 24 см. Знайдіть радіуси вписаного і описаного кіл.

1066. На сторонах AB і BC $\triangle ABC$ взято точки K і T так, що $AB = 10$ см, $AK = 2$ см, $BC = 14$ см, $TC = 9$ см. Знайдіть площу чотирикутника $AKTC$, якщо $S_{\triangle ABC} = 28$ см^2.

1067. Периметр паралелограма дорівнює 52 см, а його площа 60 см^2. Знайдіть сторони і висоти паралелограма, якщо його гострий кут 30°.

1068. Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 8 см, а висота, проведена з цієї самої вершини, — 4 см. Знайдіть радіус описаного кола.

1069. Основи рівнобічної трапеції $ABCD$ дорівнюють 11 см і 21 см, а бічна сторона — 13 см. Знайдіть радіуси кіл:
а) описаного навколо трапеції;
б) вписаного в $\triangle ABC$;
в) вписаного в $\triangle ACD$.

1070. У трапеції $ABCD$ основи BC і AD дорівнюють відповідно 9 см і 14 см, а $AB = 8$ см. Знайдіть CD, якщо $\angle A = 60°$.

1071. Знайдіть висоту трапеції, якщо її діагоналі AC і BD перетинаються в точці O і $AC = 10$ см, $BD = 6$ см, $\angle AOC = 120°$.

1072. Одна зі сторін трикутника на 6 см більша за іншу, а кут між ними 30°. Знайдіть ці сторони, якщо площа трикутника дорівнює 40 см.

1073. Знайдіть радіуси вписаного та описаного кіл трикутника зі сторонами 13 см, 20 см, 21 см.

1074. Знайдіть висоти трикутника, якщо його сторони дорівнюють 6 см, 25 см, 29 см.

1075. Три кола радіусів 6 см, 7 см, 8 см попарно дотикаються одне до одного. Знайдіть площу трикутника, вершини якого збігаються з центрами цих кіл.

1076. Центр кола, вписаного в трикутник зі сторонами 11 см, 25 см і 30 см, сполучено з вершинами трикутника. Знайдіть площі трикутників, які при цьому утворилися.

1077. Знайдіть площу трапеції, якщо її основи дорівнюють 4 см і 25 см, а бічні сторони 13 см і 20 см.

До розділу 4

1078. Знайдіть кути опуклого п'ятикутника, якщо вони пропорційні числам 3, 4, 5, 7, 8.

1079. Центральний кут правильного n-кутника у 4 рази менший за його внутрішній кут. Знайдіть n.

1080. Накресліть коло діаметра 6 см. Впишіть в коло і опишіть навколо нього правильні n-кутники та обчисліть їх периметри, якщо:
а) $n = 3$; в) $n = 6$;
б) $n = 4$; г) $n = 12$.

1081. Знайдіть кути правильного дванадцятикутника.

1082. Чи існує правильний многокутник, у якого кожен кут дорівнює 145°?

1083. У правильний трикутник вписано коло, а в коло вписано квадрат. Знайдіть сторону трикутника, якщо вона на 5 см більша за сторону квадрата.

1084. У коло вписано квадрат і правильний шестикутник. Периметр квадрата дорівнює 24 см. Знайдіть периметр і площу шестикутника.

1085. Навколо кола описаний правильний трикутник, а в коло вписаний правильний шестикутник, периметр якого 18 см. Знайдіть периметр і площу трикутника.

1086. Дано правильний шестикутник зі стороною 4 см. Знайдіть ширину і площу кільця, утвореного колами, вписаним і описаним навколо шестикутника.

1087. У круговий сектор AOB радіуса $OA = 10$ см вписано коло. Знайдіть відношення площ сектора і круга, якщо $S_{\triangle AOB} = 25\sqrt{3}$.

1088. У колі довжиною 24π см проведено хорду довжиною $12\sqrt{2}$ см. Знайдіть довжини дуг, на які ця хорда розділяє коло.

1089. У колі, довжина якого дорівнює 36π см, на відстані 9 см від центра проведено хорду. Знайдіть довжину меншої з утворених дуг.

1090. Знайдіть площу сектора радіуса 6 см, якщо градусна міра його дуги дорівнює 150°.

1091. У круговий сектор з центральним кутом 120° вписано круг. Знайдіть площу цього круга, якщо радіус даного круга дорівнює R.

1092. Навколо квадрата зі стороною 10 см описано коло. В один з утворених сегментів вписано квадрат. Знайдіть площу цього квадрата.

До розділу 5

1093. Знайдіть координати точки, яка симетрична точці $A(3; -5)$ відносно точки $Q(-1; 4)$.

1094. Чи має $\triangle ABC$, у якого $A(-6; -1)$, $B(-3; 5)$, $C(3; 2)$, вісь симетрії? Якщо має, то запишіть її рівняння.

1095. AC — діагональ квадрата, сторони якого паралельні осям координат. Запишіть рівняння осей симетрії цього квадрата, якщо $A(1; 2)$, $C(5; 6)$.

1096. Коло радіуса 3 дотикається до осей координат у I чверті. Запишіть рівняння цього кола і кола, симетричного даному відносно:

а) початку координат;
б) осі абсцис;
в) осі ординат;
г) прямої $y = 2x$.

1097. Чи можуть трикутники ABC і MNP бути симетричними відносно деякої точки? У разі позитивної відповіді знайдіть координати цієї точки, якщо $A(1;-3)$, $B(5;-2)$, $C(3;1)$, $M(-3;1)$, $N(-7;0)$, $P(-5;-3)$.

1098. Встановіть вид чотирикутника $ABCD$ і напишіть рівняння його осей симетрії, якщо $A(-2;2)$, $B(6;2)$, $C(6;-4)$, $D(-2;-4)$.

1099. Дано трикутники ABC і ADC. Доведіть, що точки B і D симетричні відносно прямої AC, якщо $AB = AD$ і $BC = CD$.

1100. При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ коло $(x-2)^2+(y+5)^2=16$ переходить у коло $(x+2)^2+(y+2)^2=16$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$.

1101. Знайдіть найменший, кут при повороті на який правильний п'ятикутник переходить сам у себе.

1102. Побудуйте квадрат зі стороною 4 см і поверніть його навколо точки перетину діагоналей на кут 45°. Скільки вершин має утворений n-кутник? А скільки осей симетрії?

1103. O — точка перетину медіан рівностороннього $\triangle ABC$. При паралельному перенесенні точка A відобразилася на точку O. Виконайте паралельне перенесення $\triangle ABC$. Знайдіть периметр побудованого трикутника, якщо $S_{\triangle AOB} = S\sqrt{3}$.

1104. Дано ромби $ABCD$ і $MNPK$. $\angle A = 50°$, $\angle N = 130°$, $AC : BD = 4 : 5$. Знайдіть діагоналі ромба $MNPK$, якщо його площа дорівнює 40 см².

1105. Пряма MN, паралельна основі AC $\triangle ABC$, ділить його на дві частини — трикутник і трапецію. Площі цих фігур пропорційні числам 1 і 3. Знайдіть периметр $\triangle ABC$, якщо периметр $\triangle MBN$ дорівнює 7 см.

1106. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються у точці P. Знайдіть площу трапеції, якщо $AD : BC = 5 : 3$ і $S_{\triangle BPC} = 27$ см.

Тренувальний тест № 1

1 Знайдіть координати точки A', симетричної точці $A(-1; 3)$ відносно початку координат.

А	Б	В	Г
$(1; -3)$	$(1; 3)$	$(-1; -3)$	$(3; -1)$

2 Знайдіть площу правильного шестикутника, вписаного в коло радіуса 6 см.

А	Б	В	Г
$108\sqrt{3}$ см^2	$9\sqrt{3}$ см^2	$54\sqrt{3}$ см^2	36 см^2

3 Знайдіть площу круга, описаного навколо $\triangle ABC$, якщо $AB = 10$ см, а $\angle ACB = 45°$.

А	Б	В	Г
200π см^2	50π см^2	$10\sqrt{2}\pi$ см^2	100π см^2

4 Запишіть рівняння кола з центром у точці $O(-3; 2)$, яке дотикається до осі ординат.

А	Б	В	Г
$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 3$	$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$	$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$	$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

5 При якому найменшому значенні a вектори $\vec{m}(a; 3)$ і $\vec{n}(-2a; 6)$ перпендикулярні?

А	Б	В	Г
3	9	-3	$-3\sqrt{2}$

6 Встановіть вид трикутника, якщо його сторони дорівнюють 2 см, 5 см, 6 см.

А	Б	В	Г
гострокутний	тупокутний	прямокутний	не можна встановити

7 Дано точку $M(-3; 5)$. Установіть відповідність між геометричними перетвореннями (1–4) та координатами образу точки M (А–Д) при цьому перетворенні.

1 Паралельне перенесення на вектор $\vec{a}=(1; 3)$
2 Симетрія відносно осі абсцис
3 Симетрія відносно точки $P(-1; 3)$
4 Симетрія відносно прямої $y = x$

А $(-3; -5)$
Б $(1; 1)$
В $(-2; 8)$
Г $(3; 5)$
Д $(5; -3)$

8 Дано точки $A(-2; 0)$ і $B(4; 0)$.
1) Запишіть рівняння геометричного місця центрів кіл, які проходять через точки A і B.
2) Запишіть рівняння кола, яке проходить через точки A і B, якщо його радіус дорівнює 5.

9 Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}+\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(3; 3)$, $\vec{b}=(3; 5)$, $\vec{c}=(-3; 7)$.

10 Знайдіть образи точок $A(-2; 3)$ і $B(4; 7)$, якщо при паралельному перенесенні відрізка AB образом його середини є точка $M(3; 1)$.

11 Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо центр вписаного кола віддалений від її кінців на 4 см і $2\sqrt{2}$ см.

12 У правильний $\triangle ABC$, площа якого дорівнює S, вписаний ромб $AMPK$ ($M \in AB$, $P \in BC$, $K \in AC$). Знайдіть площу чотирикутника $AMPC$.

Тренувальний тест № 2

1 Точки $A(2; -3)$ і $A'(-4; 5)$ симетричні відносно точки M. Знайдіть координати точки M.

А	Б	В	Г
$M(-2; 2)$	$M(-1; 1)$	$M(-10; 13)$	$M(8; -11)$

2 Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 10 см, а діагональ утворює з більшою основою кут 30°.

А	Б	В	Г
10 см	20 см	5 см	не можна встановити

3 Яке з рівнянь є рівнянням медіани BM трикутника ABC, якщо $A(1; -3)$, $B(3; 4)$, $C(7; 1)$?

А	Б	В	Г
$y = -2x + 10$	$y = -3x + 13$	$y = -6x + 14$	$y = -5x + 19$

4 Скільки сторін має правильний n-кутник, якщо його центральний кут дорівнює 30°?

А	Б	В	Г
$n = 6$	$n = 10$	$n = 12$	$n = 15$

5 При якому найменшому значенні a модуль вектора $\vec{p} = (a; 5)$ дорівнює 13?

А	Б	В	Г
−9	−12	12	13

6 Квадрат і правильний шестикутник вписані в одне коло. Знайдіть відношення периметра шестикутника до периметра квадрата.

А	Б	В	Г
$6\sqrt{2} : 1$	$2\sqrt{2} : 3$	$3\sqrt{3} : 8$	$3 : 2\sqrt{2}$

7 M і N — середини сторін AB і AD паралелограма $ABCD$. Установіть відповідність між фігурами (1–4) та їх площами (А–Д), якщо площа паралелограма дорівнює 120 см².

1 $\triangle AMN$	**А** 45 см²
2 $\triangle NDC$	**Б** 30 см²
3 Чотирикутник $MBDN$	**В** 15 см²
4 Чотирикутник $ABCN$	**Г** 60 см²
	Д 90 см²

8 Дано точки $A(-3; 5)$, $O(0; -1)$ і $B(4; 1)$.
1) Встановіть вид трикутника AOB.
2) Знайдіть площу паралелограма $ABCD$, якщо O — точка перетину його діагоналей.

9 Периметр правильного $\triangle ABC$ дорівнює 6 см. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$.

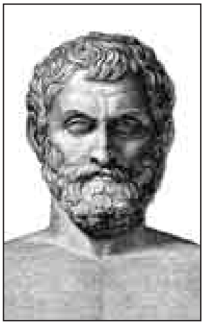
10 Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює 60°, відносяться як 5 : 8. Знайдіть периметр трикутника, якщо його третя сторона дорівнює 14 см.

11 Коло з центром O радіуса R описане навколо $\triangle ABC$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо $\triangle AOC$, якщо $\angle B = 60°$.

12 У круг вписано правильний шестикутник зі стороною a. Знайдіть площу меншого із сегментів, основою якого є сторона шестикутника.

З історії геометрії

Геометрія — одна з найдавніших наук. Як засвідчує її назва (*гео* — земля і *метрео* — міряю), спочатку її пов'язували тільки з вимірюванням земельних ділянок. Згодом геометричні відомості почали застосовувати до вимірювання висот, глибин, різних відстаней.



Фалес

Спочатку умільці вимірювали відстані і кути безпосередньо або користуючись властивостями подібних фігур. **Фалес Мілетський** (V ст. до н. е.) таким способом визначав відстані до недоступних предметів, виміряв висоту однієї з єгипетських пірамід. **Ератосфен Кіренський** (II ст. до н. е.) визначив приблизні розміри Землі. **Герон Александрійський** (I ст. до н. е.) написав книгу «Діоптрика», яку можна вважати першою працею з геодезії, а також сконструював прилад для вимірювання кутів у різних площинах, який став прообразом сучасних теодолітів.

Розв'язуванням трикутників раніше займалась окрема математична наука — *тригонометрія* (грецьке τριγωνον — трикутник, μετρε'ω — міряю). Давньогрецький математик і астроном **Гіппарх** ще в II ст. до н. е. склав таблиці хорд, за допомогою яких визначив відстань від Землі до Місяця і розв'язав багато інших прикладних задач. Він перший увів географічні координати — довготу і широту.

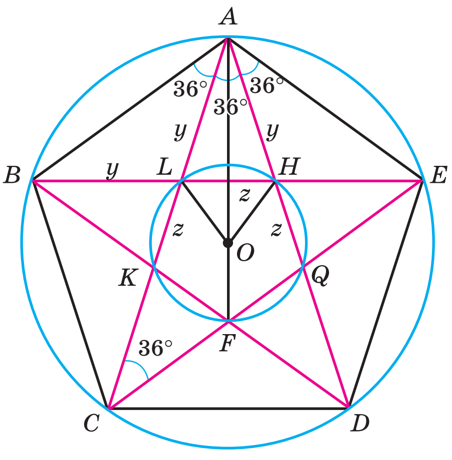
Великий внесок у розвиток тригонометрії зробив давньогрецький математик, астроном, географ **Птолемей Клавдій** (близько 100–178 рр.) — творець геоцентричної теорії світу. Його твір, перекладений арабською мовою під назвою «Альмагест», тривалий час служив підручником тригонометрії. Птолемей винайшов астролябію, склав також першу таблицю синусів гострих кутів.

Для розвитку тригонометрії як науки чимало зробили згодом індійські астрономи **Бхаскара**, **Брамагупта** (VII ст.), а також — арабські, зокрема **Альбаттані** (IX ст.). Індійці ввели терміни *синус*, *косинус*, а араби — *тангенс*.

Теорему синусів першим довів ще в XI ст. середньоазійський учений і поет **ал-Біруні** (973–1048), а *теорему косинусів* — французький математик **Франсуа Вієт** (1540–1603). У XVI ст. **Мюллер** із Кенігсберга (або, як його ще називали, *Регіомонтан*) склав уточнені таблиці для всіх тригонометричних функцій гострих кутів.

Символічне позначення $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ і строгу систему вивчення тригонометричних функцій розробив петербурзький академік **Леонард Ейлер** (1707–1783).

Правильні многокутники вивчали ще Піфагор і його учні. Вони довели, що рівними правильними n-кутниками покрити площину, мов паркетинами, можна тільки за умови, коли n дорівнює 3, 4 або 6. Розглядали піфагорійці і правильні зірчасті многокутники (не опуклі), особливо *пентаграму*, яку можна утворити, продовживши всі сторони правильного п'ятикутника. Вважали, що такий знак приносить щастя, тому, вітаючись, піфагорійці креслили на піску пентаграму. З погляду геометрії пентаграма справді досить цікава фігура (мал. 333). Точка K здійснює «золотий переріз» відрізка AC, точка L — відрізка AK і т. д.



Мал. 333

Побудова правильних многокутників тісно пов'язана з поділом кола на рівні частини.

На скільки рівних частин можна поділити коло, користуючись тільки циркулем і лінійкою? Ще математики Стародавньої Греції аналізували таку задачу. Вони вміли ділити коло на 2, 3 і 5 рівних частин, а також кожну дугу вміли ділити навпіл. Тож знали, як, користуючись тільки циркулем і лінійкою, поділити коло на 2^n, $3 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$ і $3 \cdot 5 \cdot 2^n$ рівних частин, де n — довільне натуральне число.

Протягом наступних майже 2000 років математики багатьох країн досліджували, на скільки ще рівних частин можна ділити коло, користуючись тільки циркулем і лінійкою, але нічого нового не могли придумати. Не знали навіть, чи можна, користуючись тільки циркулем і лінійкою, поділити коло на 7 чи 9 рівних частин.

Тільки великий німецький математик **Карл Ґаусс** (1777–1855), ще будучи студентом, довів, що за допомогою тільки циркуля і лінійки можна поділити коло на 17 рівних частин, але не можна — на 7. Згодом він довів загальну теорему. **Користуючись тільки циркулем і лінійкою, можна поділити коло на непарне число m рівних частин тоді й тільки тоді, коли число m просте і дорівнює $2^{2^n} + 1$ або добутку кількох простих чисел такого виду.** Числа виду $2^{2^n} + 1$ називають числами Ферма, вони є коренями певного виду рівнянь і відіграють важливу роль у теорії чисел. Так геометрична проблема про побудову правильних многокутників і поділ кола на рівні частини пов'язується з алгеброю і теорією чисел.

Здавна з правильними многокутниками пов'язували задачі на визначення довжини кола і площі круга. Вавилонські та єгипетські вчені вважали, що відношення довжини кола до його діаметра, яке тепер позначають буквою π, дорівнює 3.

Архімед дав точнішу оцінку цього числа: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Китайський математик **Цзу Чунчжі** (428–499) показав, що $3,1415926 < \pi < 3,1415927$. Іранський математик і астроном XV ст. **ал-Каші** підрахував, що $\pi \approx 3,1415926535897932$. Тепер відомо понад мільярд перших десяткових знаків числа π. Наприкінці XIX ст. доведено, що число π ірраціональне.

Систему географічних координат вперше запропонував у I ст. до н. е. давньогрецький вчений Гіппарх. У XIV ст. французький математик **Нікола Орем** (1323–1382) побудував аналогічну систему координат на площині, застосовуючи її для дослідження деяких залежностей між величинами. Але замість сучасних абсциси і ординати він використовував географічні терміни довгота і широта.

Згодом ідеї Н. Орема розвинули і збагатили французькі математики **П'єр Ферма** (1601–1665) і **Рене Декарт** (1596–1650). Ферма раніше від Декарта увів координати, вивів рівняння прямої, кола, еліпса, параболи, гіперболи й опублікував свої дослідження у праці «Вступ до теорії плоских і просторових місць» (1636). Декарт свій метод координат описав у праці «Геометрія» (1637). Але він тут, розглядаючи незалежні і залежні змінні, заклав основи вчення про функції. Згодом найпростішу систему координат назвали ім'ям Декарта. До того ж Декарт не тільки математик, а й відомий у всьому світі філософ, засновник картезіанства.

Декарт і Ферма розглядали системи координат тільки на площині. У XVIII ст. **Йоганн Бернуллі** (1667–1748) і **Алексі Клеро** (1713–1765) поширили систему координат і на тривимірний простір: кожній точці тривимірного простору ставили у відповідність впорядковану трійку дійсних чисел. Системи координат у просторі вивчають у старших класах.

Геометричні перетворення входили в геометрію ще повільніше, ніж координати. Окремі види симетрії відносно прямої і відносно точки багатьом людям були відомі давно: їх вони бачили на різних рослинах, живих істотах, тому митці створювали симетричні зображення. Наприклад, шумери близько 5 тисячоліть тому на вазах зображали симетричні малюнки. На фризі палацу Дарія в Сузах зображення перських лучників виконано ніби за допомогою паралельного перенесення. Кімерійці і скіфи, які жили на теренах сучасної України ще понад 2 тисячоліття тому, робили колеса, симетричні відносно точки і відносно осі, виготовляли симетричні прикраси. Чимало таких зображень дійшло до нас ще з античних часів. Зрозуміло, що творці тих зображень знали немало про симетрії і паралельні перенесення, хоч відповідних геометричних термінів і не вживали.

Елементи вчення про симетрію фігур уперше з'явились у книзі «Початки геометрії» французького математика **Адрієна Лежандра** (1752–1833).

У геометрію геометричні перетворення (як аналог функції) ввійшли тільки в XX ст. Німецький математик **Фелікс Клейн** (1849–1925) наголошував: «Геометричні перетворення є не чим іншим, як узагальненням поняття функції». Числова функція відображає одну числову множину на іншу, а геометричне перетворення — одну множину точок на іншу.

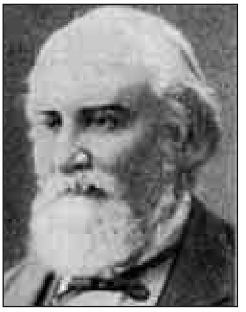
Вектори ввів у математику тільки у XIX ст. ірландський математик **Вільям Гамільтон** (1805–1865). Він увів і термін «вектор», що в перекладі з латинської означає «той, який несе». Позначення «Δ» запропонував у 1853 р. **О. Коші** (1789–1857). Першу працю «Теорія векторного числення» надрукував у 1887 р. професор Київського університету **В. П. Єрмаков** (1845–1922).

Василь Петрович Єрмаков (1845–1922) — доктор чистої математики, заслужений професор Київського університету (1890), член-кореспондент Петербурзької академії наук (1884).

Після закінчення у 1868 році Київського університету Василя Петровича залишили стипендіатом для підготовки до професорської діяльності. Після захисту магістерської дисертації у 1873 працював у Київському університеті (доцент, екстраординарний професор, ординарний професор, заслужений професор). З 1899 року — професор і перший завідувач кафедри вищої математики Київського політехнічного інституту. Опублікував низку курсів та посібників з тих дисциплін, які читав, серед яких: «Теорія векторів на площині» (1887), «Аналітична геометрія» (1899, 1900, 1918, 1920) та інші.

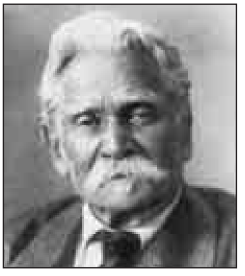
Василь Петрович Єрмаков був дуже відомий учений і мав великий авторитет. Заснував і видавав «Журнал елементарної математики». Був одним із організаторів Київського фізико-математичного товариства. Зробив вагомий внесок у розвиток математичної освіти.

На теренах України дослідження з геометрії проводили також М. Є. Ващенко-Захарченко, Б. Я. Букреєв, О. С. Смогоржевський, М. І. Кованцов, Погорєлов та інші.



Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко

Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко (1825–1912) народився в селі Макіївка на Полтавщині. Навчався в Києві і Парижі, був професором Київського університету. Досліджував питання історії розвитку геометрії, надрукував кілька посібників з геометрії, переклав російською «Основи» Евкліда.



Борис Якович Букреєв

Борис Якович Букреєв (1859–1962). Народився у Львові. Закінчив Київський університет, з 1885 року працював у ньому, тривалий час завідував кафедрою геометрії. Один із засновників Київського фізико-математичного товариства. Основні дослідження стосуються геометрії, аналізу, теорії функцій. Надрукував праці «Диференціальна геометрія», «Неевклідова геометрія в аналітичному викладі».

Олександр Степанович Смогоржевський

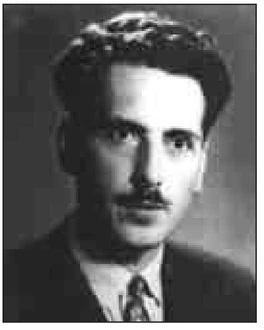
Олександр Степанович Смогоржевський (1896–1969) народився в селі Лісове на Вінниччині. Навчався в Немирові та Києві, був професором Київського політехнічного інституту. Досліджував питання, пов’язані з геометричними побудовами, надрукував кілька посібників і підручників, зокрема, підручник з основ геометрії для студентів університетів. Його праці перекладено англійською, болгарською, японською та іншими мовами.

Микола Іванович Кованцов

Микола Іванович Кованцов (1924–1988) народився в Саратовській області, навчався в Казахстані. З 1950 року жив і працював у Запорізькому педагогічному інституті, завідував кафедрою математики. У 1960–1988 рр. завідував кафедрою геометрії Київського університету ім. Тараса Шевченка. Створив наукову школу з теорії лінійчатих многовидів. Був головою предметної комісії з математики при Міністерстві освіти. Надрукував багато підручників з геометрії для вищих навчальних закладів: «Проективна геометрія», «Диференціальна геометрія». Цікава його робота — «Математика і романтика», у якій М. І. Кованцов писав:

«Любі друзі! З дитинства кожен з вас вивчає математику. Хтось — з інтересом, а хтось — неохоче.

Можна любити науку за сувору узгодженість її істин, за її силу і за її багатогранність, можна, навпаки, живити нелюбов до неї за її сухість і складність. Але ця любов і ця нелюбов являтимуть щось поверхове і нетривке, щось випадкове і необов'язкове, якщо від вас вислизне те, що можна було б назвати душею науки, її розумом і її інтелектом, її духовною красою і її гармонійною витонченістю. Ми навмисне скористалися термінами, характерними для оцінки людської особистості, оскільки саме такою особистістю, цілісною і нескінченно цікавою, має постати перед вами наука, щоб ви по-справжньому могли відчути, що вона собою являє...»



Олексій Васильович Погорєлов

Олексій Васильович Погорєлов (1919–2002) — відомий фахівець у галузі геометрії, академік АН УРСР (1961), академік АН СРСР, заслужений діяч науки і техніки України. Навчався у Харківському університеті (1937–1941) та Військово-Повітряній академії ім. М. Є. Жуковського (Москва, 1941–1945). У 1947 році, після захисту кандидатської та докторської дисертацій, повертається до Харкова і згодом очолює кафедру геометрії в ХДУ.

О. В. Погорєлов є автором понад 200 робіт, серед яких 60 монографій і підручників для вищих і середніх навчальних закладів, виданих українською, російською, англійською, німецькою та іспанською мовами.

Олексій Васильович Погорєлов удостоєний багатьох нагород і звань. Він здобув міжнародну премію ім. М. І. Лобачевського, кілька державних премій та іменні премії Національної академії наук України. Заслужений діяч науки і кавалер урядових нагород.

Розвивається геометрична наука і тепер. Геометрія продовжує служити людям. Ось що писав один із найвідоміших архітекторів XX ст. ЛеКорбюзьє: «Ніколи ще до нашого часу ми не жили в такий геометричний період... Навколишній світ — це світ геометрії, чистий, істинний, бездоганний у наших очах. Усе навколо — геометрія».

Відомості за курс основної школи

Прямокутний трикутник

$\frac{a}{c} = \sin\alpha$;

$\frac{b}{c} = \cos\alpha$;

$\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha$;

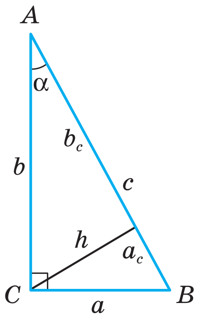
$\frac{b}{a} = \mathrm{ctg}\,\alpha$.

$a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Піфагора);

$a^2 = a_c \cdot c$;

$b^2 = b_c \cdot c$;

$h^2 = a_c \cdot b_c$; $h = \frac{ab}{c}$.



$S = \frac{1}{2}ab$; $S = \frac{1}{2}ch$; $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$;

$R = \frac{c}{2}$; $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Рівносторонній трикутник

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $r = \frac{1}{3}h$;

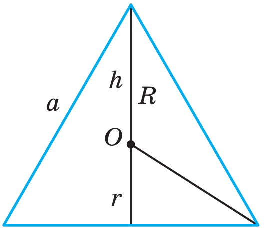
$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$;

$h = R + r$.

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$;

$R = \frac{2}{3}h$; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$;

$R = 2r$.



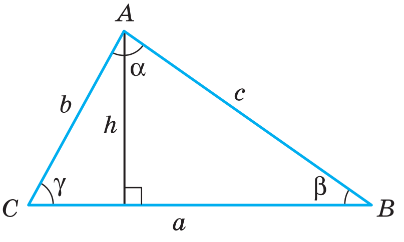
Довільний трикутник

$S = \frac{1}{2}ah$; $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$;

Формула Герона:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

$r = \frac{S}{p}$; $R = \frac{abc}{4S}$; $R = \frac{a}{2\sin\alpha}$.

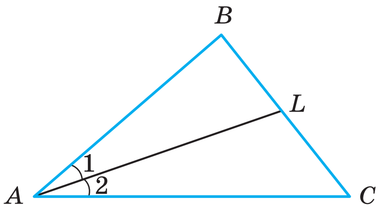


Теорема косинусів:

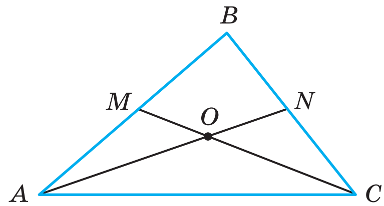
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Теорема синусів:

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

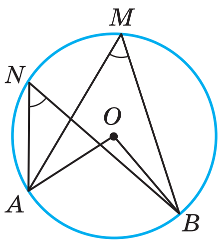


AL — бісектриса
1) $\angle 1 = \angle 2$;
2) $\dfrac{BL}{LC} = \dfrac{AB}{AC}$.



AN, CM — медіани
$AO : ON = 2 : 1$.

Коло

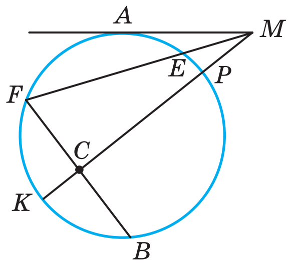


$C = 2\pi r$; $S = \pi r^2$.

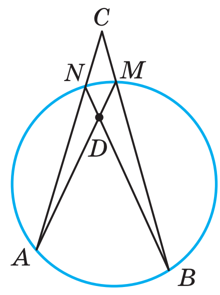
$\angle AMB = \dfrac{1}{2}\angle AOB =$

$= \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$;

$\angle AMB = \angle ANB$.



$AM^2 = ME \cdot MF$;
$ME \cdot MF = MP \cdot MK$;
$FC \cdot CB = KC \cdot CP$.



$\angle ADB = \dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{MN})$;

$\angle ACB = \dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{MN})$.

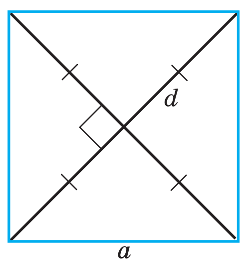
Квадрат

$d = a\sqrt{2}$;
$P = 4a$;
$S = a^2$.

$r = \dfrac{a}{2}$;

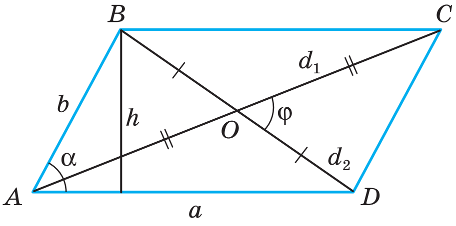
$R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

$S = \dfrac{1}{2}d^2$.



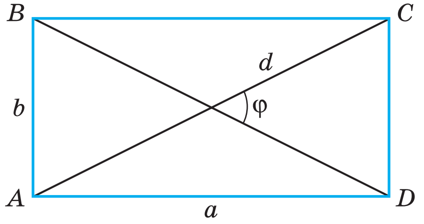
Паралелограм

$\angle A + \angle B = 180°$;
$P = 2(a + b)$;
$S = ah$; $S = ab \sin \alpha$;
$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi$;
$d_1^2 + d_2^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$.



Прямокутник

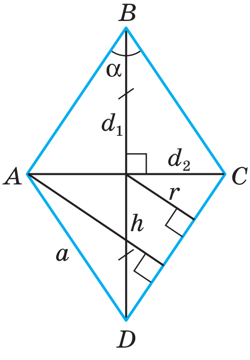
$AC = BD$;
$P = 2(a + b)$;
$S = ab$;
$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$; $R = \frac{1}{2} d$.



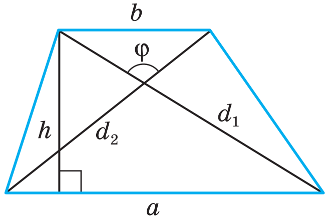
Ромб

$P = 4a$;
$S = ah$;
$S = a^2 \sin \alpha$;
$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$.

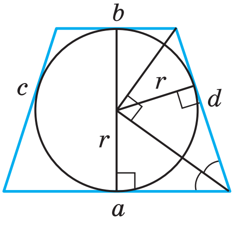
$r = \frac{1}{2} h$;
$r = \frac{d_1 d_2}{4a}$.



Трапеція



$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$;
$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin \varphi$.



$a + b = c + d$;
$h = 2r$.

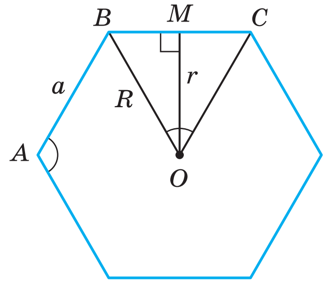
Правильний многокутник

Сума кутів: $180(n-2)$; $P = na$;

$$\angle A = \frac{180(n-2)}{n}; \quad \angle BOC = \frac{360^\circ}{n};$$

$$S = \frac{1}{2}arn; \quad S = \frac{1}{2}R^2 n \sin\frac{360^\circ}{n};$$

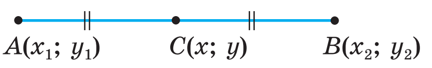
$$a_n = 2r\,\mathrm{tg}\,\frac{180^\circ}{n}; \quad a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n}.$$



Координати на площині

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



$x^2 + y^2 = R^2$ — рівняння кола із центром $O(0;\ 0)$ радіуса R.
$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ — рівняння кола із центром $O(a;\ b)$ радіуса R.

Рівняння прямої

$ax + by + c = 0$ — загальне рівняння прямої;

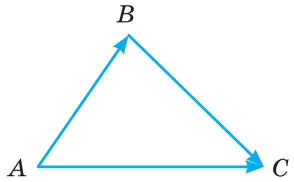
$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ — рівняння прямої, яка проходить через точки $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$;

$y = kx + b$ — рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

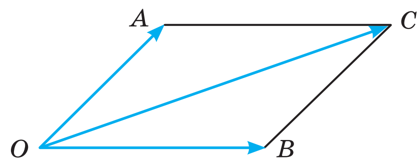
Для прямих $y_1 = k_1x + b_1$ і $y_2 = k_2x + b_2$:
$k_1 = k_2$ — умова паралельності;
$k_1 \cdot k_2 = -1$ — умова перпендикулярності;

$d = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ — відстань від точки $M(x_0;\ y_0)$ до прямої $ax + by + c = 0$.

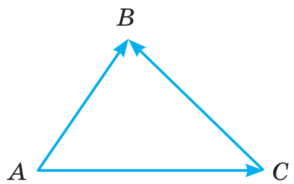
Вектори



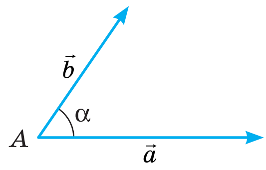
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ — додавання векторів за правилом трикутника.



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ — додавання векторів за правилом паралелограма.



$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ — різниця векторів.



$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$ — скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$.

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

У координатній формі:

Якщо точка $A\ (x_1;\ y_1)$ — початок, а $B\ (x_2;\ y_2)$ — кінець вектора, то:

$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ — координати вектора $\overrightarrow{AB}$;

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ — модуль вектора $\overrightarrow{AB}$.

Якщо $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$ і $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$, то

$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2)$ — сума векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2;\ y_1-y_2)$ — різниця векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$ — скалярний добуток векторів;

$x_1x_2+y_1y_2=0$ — умова перпендикулярності ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}$ — умова паралельності ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ — умова перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

$\vec{a}=\lambda\vec{b}$ — умова колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Предметний покажчик

Відповіді

20. а) 0; б) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **21.** а) 0; б) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **23.** $\angle A = 135°$; $\angle B = 15°$; $\angle C = 30°$. **25.** 1Г; 2Б; 3А; 4Д. **30.** 15°; 15°; 150°. **31.** 30°; 30°; 120° або 15°; 15°; 150°. **34.** a і $a\sqrt{2}$. **39.** 0,2. **40.** $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{3}$ і $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{5}$. **53.** а) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$; б) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$. **54.** а) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$. **59.** −0,25; $\frac{\sqrt{15}}{4}$. **60.** 0,7; $\sqrt{0,51}$. **62.** 1В; 2А; 3Д; 4Г. **63.** 1Г; 2А; 3Б; 4Д. **64.** а) 1; б) 0; в) −1. **70.** а) $\frac{3}{5}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{4}{3}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\frac{1}{2}$. **74.** а) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; б) 1; в) $\operatorname{tg}^2\alpha$; г) $-\frac{1}{\cos^2\alpha}$. **89.** (2; −3). **90.** (0; 0); (0; 5); (5; 5); (5; 0). **91.** (−3; 0); (0; 5); (3; 0); (0; −5) або (−5; 0); (0; 3); (5; 0); (0; −3). **92.** (2,5; 4). **94.** M(3; 3). **95.** B(3; −10). **96.** C(10; −5); B(2; 2). **97.** M(1; 3); D(3; 9). **98.** (0,5; 4,5); (3; 5); (1,5; 2,5). **99.** A(−14; 10); B(6; −6). **100.** K(3; 1,25); P(4; −0,5); T(5; −2,25). **101.** M(3; −8); K(−9; 6); B(−15; 13). **102.** а) $a = -11$; $b = 6$; б) $a = 1$; $b = 0$; в) $a = 13$; $b = 3$. **103.** (4; 3); (−2; 1); (2; 7). **106.** D(−3; 7). **107.** (2; 1) або (6; 3), або (0; 5). **108.** M(6; 0); N(5; 2). **109.** (1; 3). **110.** (−7; 2). **114.** 24 см². **115.** $2R^2 \sin\alpha \cos\alpha$. **116.** 125 см². **126.** $12\sqrt{10}$. **127.** 5; $\sqrt{17}$; $\sqrt{10}$. **128.** 7,5. **129.** 13 і 17. **134.** B(5; 3); $\alpha \approx 18°$. **135.** а) $x = 2$; б) $x = \pm 8$; в) $x = -3$ або $x = 1$. **136.** а) (−1; 0); б) (0; 4); в) $\left(-1\frac{1}{3}; -1\frac{1}{4}\right)$. **137.** (3; 6). **142.** Так. **143.** 1 : 3. **145.** 2. **146.** 26. **147.** $BL = \frac{\sqrt{97}}{3}$; $CL = \frac{2\sqrt{97}}{3}$. **151.** A(−7; −12). **152.** 1Г; 2Д; 3А; 4В. **160.** а) $(x + 2)^2 + y^2 = 18$. **161.** а) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$; б) $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 1$. **162.** а) $x^2 + (y - 5)^2 = 25$ або $x^2 + (y + 5)^2 = 25$. **164.** $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$. **165.** $x^2 + y^2 = 25$. **166.** $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ або $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. **168.** $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$. **169.** $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$; $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$. **170.** $(x - 1)^2 + y^2 = 9$. **172.** $(x - 5,5)^2 + y^2 = 6,25$ або $\left(x - \frac{11}{14}\right)^2 + y^2 = \frac{2809}{196}$. **175.** а) (−1; 0), $R = 1$; г) (5; −1), $R = 2\sqrt{5}$. **176.** а) 5; б) 10. **177.** а) Перетинаються; б) дотикаються. **178.** а) $(x - 1,5)^2 + (y + 2)^2 = 6,25$; б) $(x + 4)^2 + (y + 0,5)^2 = 6,25$; в) $x^2 + \left(y + \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{625}{64}$. **179.** а) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 40$; б) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 10$. **181.** а) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$; б) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$.

182. При $a \in (-\infty; -4) \cup (-2; 2) \cup (4; +\infty)$ — спільних точок нема; при $a = \pm 2$ — зовнішній дотик; при $a = \pm 4$ — внутрішній дотик; при $a \in (-4; -2) \cup (2; 4)$ — перетинаються. **183.** а) $a = 2$ або $a = -6$; б) $a = 4$ або $a = -8$. **198.** $x = 2$; $y = -4$. **200.** (0; 2); (3; 0). **201.** (−5; 2). **202.** а) $3y - 2x = 0$; б) $y = -x$; в) $y = -3x$; г) $y = 0{,}5x$. **203.** а) $y = 4 - x$; б) $y = x + 3$; в) $5y - 4x = 20$; г) $y - 6x = -23$. **205.** а) 135°; б) 45°; в) 30°; г) 150°. **206.** а) $y = 2x - 8$; б) $y = x - 6$; в) $y = -3x + 2$; г) $y = -0{,}5x - 3$. **207.** а) $y = 2x - 8$; б) $y = -x + 1$; в) $x + 2y + 1 = 0$; г) $2x + 3y = 0$. **208.** $a = -2$. **209.** $b = 1$. **210.** $l_1 : y = -x$; $l_2 : y = 1$; $l_3 : x = -2$; $l_4 : y = x + 2$; $l_5 : y = 0{,}5x - 2$. **212.** $y = -x + 5$; $S = 12{,}5$ або $y = x + 3$; $S = 4{,}5$. **214.** (AB): $3y - x = 12$; (AC): $5y + 4x = 3$; (BC): $2y + 5x = 25$. **215.** $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$; $y = -\sqrt{3x} + 4\sqrt{3}$; $y = 0$; $x = 1$; $3y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$; $3y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$ або $y = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$; $y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$; $y = 0$; $x = 1$; $3y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$; $3y = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$. **216.** $x = 2$; $x + 9y - 14 = 0$; $8x + 9y - 28 = 0$; $2x - y + 2 = 0$; $3x - 5y + 22 = 0$; $3y + 2y - 16 = 0$. **217.** $y = x + 5$; $y = x - 5$; $y = -x - 5$. **218.** $y = \sqrt{3}x + 5$; $y = -\sqrt{3}x + 5$; $y = \sqrt{3x} - 5$; $y = -\sqrt{3}x - 5$. **219.** (1; 6); (−3; −2); (6; 1). **220.** (1; 4); (7; 3); $\left(\frac{27}{7}; -\frac{1}{7}\right)$; $\left(-\frac{15}{7}; \frac{6}{7}\right)$. **221.** 1В; 2Г; 3А; 4Б. **222.** а), в), г) — перетинаються; б) не мають спільних точок. **223.** $4x + y - 8 = 0$; $x + 2y - 5 = 0$; $2x - 3y + 2 = 0$; $O\left(\frac{11}{7}; \frac{12}{7}\right)$. **224.** $a = 1$; $b = -2$. **225.** $a = \pm\frac{5\sqrt{2}}{2}$. **246.** 1А; 2Г; 3В; 4Д. **257.** 25 см. **258.** 2 см і 3 см. **271.** $\overline{BA} = (-5; -3)$; $\overline{DC} = (4; -6)$; $\overline{NM} = (-3; 2)$. **272.** $\overline{MN} = (6; 2)$; $\overline{NK} = (-2; -6)$; $\overline{MK} = (4; -4)$; $\left|\overline{MN}\right| = 2\sqrt{10}$; $\left|\overline{NK}\right| = 2\sqrt{10}$; $\left|\overline{MK}\right| = 4\sqrt{2}$. $\triangle MNK$ — рівнобедрений. **273.** а) Так; б) ні. **274.** (3,5; 1). **275.** Так. **276.** $\overline{AB} = (4; 2)$; $\overline{AD} = (4; -2)$; $\overline{BC} = (4; -2)$; $\overline{CD} = (-4; -2)$. **278.** а) $B(3; 8)$; б) $B(-3; -4)$; в) $B(-10; 1)$; г) $B(-11; 8)$. **279.** $D(9; -1)$; $R(3; 1)$; $X(2; -1)$. **280.** а) $x = \pm 8$; б) $x = 9$ або $x = -7$; в) $x = -8$ або $x = 6$; г) $x = 4$ або $x = -2$. **281.** а) $m = 0$ або $m = 1$; б) $m = 4$; в) $m = -1$. **286.** 1А; 2Б; 3Г; 4Д. **304.** а) $x = 3$; б) $x = -11$. **305.** а) $x = -7$; $y = 1$; б) $x = 2$; $y = -8$. **308.** а) $\overline{AD}$; б) $\overline{MP}$; в) $\overline{PK}$; г) $\overline{AN}$; ґ) $\overline{NK}$. **311.** а) $\vec{d} = (5; -3)$; б) $\vec{d} = (3; 5)$; г) $\vec{d} = (1{,}5; 2{,}5)$. **312.** а) $C(2; 3)$; б) $C(-1; 5)$. **313.** а), в) коло радіуса 10 з центром $A(-4; -2)$; б) коло радіуса 10 з центром $B(2; 6)$. **326.** а) $8\bar{a} - \bar{b}$; б) $-4\bar{m} - 9\bar{n}$; в) $17\bar{c}$; г) $0{,}6\bar{b} - \bar{c}$. **328.** а) $2\sqrt{2}$; б) 1; в) 30; г) $\sqrt{185}$. **329.** $x = 2$; $\bar{p} = (6; 8)$ або $x = -2$, $\bar{p} = (-6; -8)$. **332.** а) $m = 8$; б) $m = -\frac{4}{3}$; в) $m = \pm 6$; г) $m = \pm 3$. **333.** $\overline{AM} = \frac{1}{2}\bar{a}$; $\overline{NB} = \bar{a}$; $\overline{AB} = 2\bar{a}$; $\overline{BP} = -\frac{1}{2}\bar{a}$; $\overline{MP} = \bar{a}$; $\overline{MA} = -\frac{1}{2}\bar{a}$. **334.** $\overline{AO} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$; $\overline{DB} = \bar{b} - \bar{a}$; $\overline{AM} = \bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$; $\overline{MD} = \frac{1}{2}\bar{b} - \bar{a}$. **335.** а) $N(-3; 10)$; б) $N(0; -0{,}5)$. **337.** $\overline{AK} = \left(\frac{4}{3}; 2\right)$; $\overline{AB} = \left(\frac{10}{3}; 5\right)$. **338.** $\overline{AB} = 3\bar{a}$;

$\overline{BC}=\frac{3}{2}\bar{b}$; $\overline{AC}=3\bar{a}+\frac{3}{2}\bar{b}$; $\overline{BD}=\frac{3}{2}\bar{b}-3\bar{a}$; $\overline{AD}=\frac{1}{2}\left(3\bar{a}+\frac{3}{2}\bar{b}\right)$; $\overline{AM}=3\bar{a}+\frac{3}{4}\bar{b}$; $\overline{AN}=\frac{3}{2}\bar{a}+\frac{3}{2}b$. **340.** $\left(-\frac{5}{13};\frac{12}{13}\right)$. **341.** $\bar{b}=(3;-4)$. **342.** 1В; 2Д; 3Г; 4А. **343.** $|\bar{a}|=5$; $|\bar{b}|=5\sqrt{2}$; $|\bar{c}|=2\sqrt{5}$; $|\bar{d}|=6$. **344.** $\alpha=\frac{10}{33}$; $\beta=\frac{29}{33}$. **345.** а) $\bar{m}=-20\bar{a}-11\bar{b}$; б) $\bar{m}=-9\bar{c}-\frac{16}{3}\bar{d}$. **354.** а) 40°; б) 130°; в) 140°. **356.** а) 16; б) 48. **357.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{1}{\sqrt{10}}$; в) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$; г) $-\frac{1}{\sqrt{10}}$. **358.** а) 45°; б) 135°; в) 45°; г) 30°. **361.** а) 72; б) −72. **362.** а) $x=0$; б) $x=-3$; в) $x=-2{,}4$; г) $x=1$. **363.** а) $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\cos C=0$. **364.** 135°. **365.** 135°. **366.** а) $D(-2;0)$; б) $D\left(0;-\frac{4}{3}\right)$. **367.** $l=-5$. **368.** а) $m=-3$; б) $m=\pm3$; в) $m=6$ або $m=-0{,}5$. **370.** а) 3; б) −1,5; в) −1; г) 5,5. **371.** 135°. **372.** а) $\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{29}$ і $\sqrt{29}$; в) $\sqrt{3}$ і 1; г) $\sqrt{13}$ і $\sqrt{37}$. **373.** 22. **377.** 108 см; 432 см^2. **386.** 1 : 2. **387.** $\overline{AM}=(5;1)$; $|\overline{AM}|=\sqrt{26}$. **388.** (−2; 5). **389.** $x-2y+5=0$; $8x-5y+1=0$; $4x+3y-19=0$. **390.** $5x+2y-13=0$. **391.** 9 кв. од. **399.** $C(-2;-2)$ або $C(-5;-5)$. **400.** $2x-y-1=0$; $x+2y-3=0$. **401.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **419.** а) 7 см; б) $2\sqrt{39}$ см. **420.** а) $2\sqrt{3}$ см; б) $\sqrt{29}$ см; в) 2 см; г) 13 см. **421.** а) 60°; б) 120°. **423.** 16°. **425.** 60°. **426.** 120°. **427.** 5 см і $\sqrt{109}$ см. **428.** 4 см і $4\sqrt{13}$ см. **429.** $4\sqrt{37}$ см. **430.** 6 см і 7 см. **431.** 11 см і 7 см. **432.** 9,5 см. **433.** 12 см. **434.** 10 см. **435.** 24 см. **436.** 90 см. **437.** 20 см і 12 см. **438.** ≈ 5,3 хв. **439.** 1Б; 2Г; 3В; 4Д. **440.** 7 см; 7 см і $\sqrt{7}$ см. **441.** $\sqrt{57}$ см. **443.** 11 см; 23 см; 30 см. **444.** 120°. **446.** $4\sqrt{3}$ см і $4\sqrt{7}$ см. **447.** 3 см або $\sqrt{73}$ см. **448.** 60°. **450.** $\frac{\sqrt{2}}{10}$. **452.** $\frac{2ab\cos\frac{\alpha}{2}}{a+b}$. **453.** $\frac{l(a+b)}{2ab}$. **467.** а) $8\sqrt{2}$ см; б) $3\sqrt{6}$ см; в) $8\sqrt{2}$ см. **468.** а) $10\sqrt{2}$ см; б) $5\sqrt{6}$ см; в) $18\sqrt{2}$ см. **469.** в) 45°. **470.** а) 60°; б) 30°. **472.** $\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$; $\frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **473.** 1Г; 2В; 3Б; 4А. **474.** 6 см. **475.** $4\sqrt{3}$ см. **476.** $5\sqrt{2}$ см. **477.** 60° і 75° або 15° і 120°. **478.** 60° і 90° або 120° і 30°. **479.** Ні. **481.** $\frac{a\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$; $-\frac{a\sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$; $\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$. **482.** $\frac{m\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$; $\frac{m\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$; $\frac{m\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. **483.** $\frac{d\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; $\frac{d\sin(2\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$; $\frac{d\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

484. $\dfrac{p\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$; $\dfrac{p\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$; $\dfrac{p\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}$.

485. $\dfrac{2m\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)}$. **486.** $\dfrac{(a-b)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$; $\dfrac{(a-b)\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. **487.** $\dfrac{b}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

488. $2R\sin\alpha\sin\beta$. **489.** 45°; 60°; 75° або 45°; 15°; 120°. **490.** $2{,}5\sqrt{10}$ см. **491.** $\dfrac{15\sqrt{41}}{8}$. **492.** а) ≈ 13 м; б) ≈ 32 м. **504.** $\sqrt{41-20\sqrt{2}}\approx 3{,}6$ см. **505.** ≈ 37 см; ≈ 66 см. **506.** 65°. **507.** ≈ 61,3 м; 80 м; ≈ 67,6 м. **509.** 18,3 см; 19°; 29°. **510.** ≈ 6,3 см; ≈ 15,2 см. **511.** ≈ 3,7 см; ≈ 7,6 см. **512.** ≈ 12 см; ≈ 13 см; ≈ 8 см. **513.** 51°; 129°; 147°; 33°. **514.** ≈ 29 м; ≈ 40 м. **516.** $AB \approx 7$ см, $BC \approx 8{,}5$ см. **517.** $AB \approx 7{,}1$ см; $BC \approx 11{,}6$ см; $AC \approx 13{,}4$ см. **518.** ≈ 10,2 см; ≈ 18,9 см; ≈ 19 см. **519.** ≈ 7,6 см; ≈ 13,4 см; ≈ 13,4 см. **520.** ≈ 21,5 м. **523.** ≈ 16,8 км/год. **524.** ≈ 12,6 дм. **540.** $S=9\sqrt{3}$ см²; $r=\sqrt{3}$ см; $R=2\sqrt{3}$ см. **541.** 24 см. **542.** 16 см. **543.** 10 см; 10 см; $10\sqrt{3}$ см. **544.** 8 см; 8 см; 11 см. **545.** 56 см. **546.** $9\sqrt{3}$ см; $8\sqrt{3}$ см. **547.** $65\sqrt{3}$ см. **549.** 3 см; 6,25 см. **551.** $5\sqrt{3}$ см. **552.** $68\sqrt{3}$ см². **553.** 45 см². **555.** 30°; 150°. **556.** $ad\sin\alpha$. **557.** $12\sqrt{3}$ см; $12\sqrt{3}$ см². **558.** 468 см². **559.** 10 см²; 12 см². **560.** $\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$ см²; $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$ см²; $\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$ см²; $15\sqrt{3}$ см². **561.** 31 см². **563.** 6 см²; 25 см²; 29 см². **564.** 2,5 см. **565.** 15 см; 15 см; 7 см. **566.** $4\sqrt{10}$ см; $4\sqrt{10}$ см; 5 см. **567.** $\dfrac{a^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. **569.** 21 см²; 63 см². **571.** 22 см². **572.** 16 см; 24 см. **573.** 624 см². **574.** $\dfrac{d^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **592.** 5; 6; 8; 9; 10; 12. **593.** а) 15; б) 12. **594.** 5 см; $5\sqrt{2}$ см. **596.** 1Г; 2Б; 3А; 4Д. **597.** $\dfrac{\sqrt{4R^2-a^2}}{2}$. **598.** $\dfrac{\sqrt{4r^2+a^2}}{2}$. **599.** $2\sqrt{R^2-r^2}$. **601.** $a\sqrt{3}$; $2a$; $a\sqrt{3}$. **602.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **607.** $\dfrac{1}{3}m$. **608.** $a\left(\sqrt{2}-1\right)$. **610.** 1 : 2. **611.** 72°. **628.** а) $8\sqrt{3}$ см; г) $8\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см. **629.** а) 48 см. **634.** а) $12\sqrt{3}$ см; $12\sqrt{3}$ см²; б) $16\sqrt{2}$ см; 32 см². **636.** 2. **643.** а) 12 см; $6\sqrt{2}$ см; б) $6\sqrt{3}$ см; $6\sqrt{3}$ см. **644.** $\dfrac{R\sqrt{6}}{2}$. **645.** $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. **646.** 1 : 2. **648.** $\dfrac{l\left(3+\sqrt{3}\right)}{6}$ або $\dfrac{l\left(3-\sqrt{3}\right)}{6}$. **649.** $10\sqrt{6}$ см. **650.** $108\sqrt{3}$ см². **651.** 1Д; 2Г; 3А; 4Б. **667.** $8\sqrt{2}\pi$ см; 8π см. **668.** $\dfrac{\pi d\sqrt{2}}{2}$. **669.** 65π см. **670.** 18π см; 8π см. **671.** $4\sqrt{3}\pi$ см; $8\sqrt{3}\pi$ см. **672.** а) π см; б) 2π см; в) 3π см; г) 4π см. **673.** $\dfrac{4\pi\sqrt{3}}{3}$ см. **674.** 8π см; 12π см. **675.** $4{,}7\pi$ см. **677.** 6π см; 30π см. **678.** 1В; 2Б; 3А; 4Д. **679.** ≈ 56,5 м. **683.** $\dfrac{\pi a}{\cos\beta}$. **684.** 2 : 1. **685.** а) $4\pi + 20$;

б) 8π; в) $7,3\pi$. **686.** $7,5\pi$ см. **687.** $2\pi a$. **690.** $120°$. **691.** 3π; 4π; 5π. **692.** 5π см; 15π см. **693.** 8π см; 16π см. **694.** π см; 3π см; 8π см або 5π см; 3π см; 4π см. **716.** 2 : 3. **717.** 100π см^2. **718.** 1 : 4. **719.** 4π см^2; 25π см^2. **720.** 21π см^2. **721.** 9 см і 12 см. **722.** а) 16π см^2; б) 24π см^2; в) 48π см^2; г) 108π см^2. **723.** а) $3\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)$ см^2; б) $9(\pi-2)$ см^2. **724.** 21,5 %. **726.** 25π см^2. **728.** 9π см^2; $\frac{27}{4}\pi$ см^2. **729.** $4\pi\left(11-2\sqrt{10}\right)$ см^2. **730.** 648 см^2. **731.** $\frac{3201}{64}\pi$ см^2. **733.** 1В; 2А; 3Г; 4Б. **734.** 3 : 2. **735.** $\frac{\pi R^2}{16}$. **736.** $\sqrt{5}$ см. **737.** $\frac{27\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{4}$ см^2; $\frac{27\left(8\pi+3\sqrt{3}\right)}{4}$ см^2. **738.** $\frac{1}{6}R^2\left(4\pi+3\sqrt{3}\right)$. **739.** $\frac{a^2\left(\pi+3\sqrt{3}\right)}{24}$. **758.** $30°$; $50°$; $100°$. **759.** Ні. **764.** а) Так; б) ні; в) так; г) ні. **769.** $(x+4)^2+(y-5)^2=17$. **772.** 5 см; $5\sqrt{3}$ см; $12,5\sqrt{3}$ см. **773.** $\frac{5}{13}$; $\frac{12}{13}$; 1. **795.** а) $A_1(-2; 3)$; $B_1(-4; -2)$; $C_1(3; 3)$; $D(5; -1)$; б) $A'(0; 5)$; $B'(-2; 0)$; $C'(5; 5)$; $D'(7; 1)$. **796.** а) (3; 4); б) (1; 3); в) (−3; 4,5); г) (7,5; 4). **808.** $x=5$; $y=-5$. **809.** а) $(x+2)^2+(y-3)^2=20$; б) $(x-4)^2+(y+1)^2=20$. **810.** (−3; 7). **811.** а) $y=-2x-6$; б) $y=-2x$. **812.** $y=2x-3$; $2y+x+1=0$; $P=8\sqrt{5}$; $S=20$ кв. од. **814.** 1Д; 2А; 3Г; 4Б. **835.** 22. **844.** $y=-2x-3$; $y=-2x+3$. **845.** $x-3y+8=0$; $y+3x+4=0$; $y-2x-6=0$; $x+2y-2=0$. **848.** $y=-x+1$. **849.** а) 2; б) 1; в) 2. **851.** Проведіть через дану точку пряму, перпендикулярну до бісектриси даного кута. **852.** $y=-x+1$. **854.** Побудуйте точку B_1, симетричну B відносно l, і проведіть пряму AB_1. Якщо $AB_1 \parallel l$, то задача не має розв'язку. **856.** 1Г; 2В; 3Б; 4Д. **869.** a. **871.** $2a$; $90°$. **872.** Дві прямі, яким належать бісектриси кутів між даними прямими. **873.** На $120°$ навколо центра трикутника. **875.** а) $72°$; б) $60°$; в) $40°$; г) $36°$; ґ) $\frac{360°}{k}$. **876.** $P=\sqrt{26}\left(2+\sqrt{2}\right)$; $S=13$. **877.** $90°$. **879.** Серединний перпендикуляр відрізка, що сполучає центри даних кіл. **880.** а) $a\sqrt{3}$; б) a. **881.** $AA_1=AD_1=a\sqrt{2}$; $AC_1=AB_1=a\sqrt{2+\sqrt{3}}$. **882.** $60°$. **883.** а) $BC_1=a\sqrt{3}$; $BD_1=a\sqrt{2+\sqrt{2}}$; б) $BC_1=a\left(\sqrt{2}-1\right)$; $BD_1=a\sqrt{2-\sqrt{2}}$. **902.** $M_1(5; -5)$; $P_1(7; -3)$; $K_1(-6; 1)$. **903.** $\bar{a}=(-8; 8)$. **904.** а) Ні; б) так; в) ні. **905.** $M_1(0; 5)$, $N_1(2; -1)$. **907.** $(x-3)^2+(y+2)^2=9$. **908.** а) $y=-2x-3$; б) $y=-2x+9$. **909.** $x=-8$; $y=-8$. **910.** $x=3$; $y=4$. **914.** $A_1(4; 3)$; $B_1(8; 7)$; $C_1(10; 5)$; $D_1(6; 1)$. **917.** Здійсніть паралельне перенесення точки A таке, при якому K переходить в P. Отриману точку сполучіть з B. **933.** Ні. **934.** Ні. **938.** 12 см; 20 см; 24 см; 32 см. **939.** 32 см^2; 200 см^2. **940.** 10 см; 18 см. **941.** 480 см^2. **942.** 3. **943.** 32 см^2. **944.** 4 см і 10 см. **945.** 36 см^2. **950.** 250 см^2. **951.** 2 : 9 або 2 : 5. **952.** 25 см^2. **953.** $4S$. **954.** 40 см^2. **959.** Покажіть, що найменша висота трикутника дорівнює половині гіпотенузи. **960.** $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. **961.** $\frac{a^2-ad+d^2}{a-d}$. **962.** $\sqrt{16,25}$ см. **964.** $30°$; $60°$; $120°$; $150°$. **966.** 2 см. **967.** Спочатку побудуйте прямокутний трикутник, гіпотенуза і катет якого дорівнюють даним медіані і висоті, і відкладіть у ньому відрізок, що дорівнює даній бісектрисі. **968.** Поділіть коло на 6 рівних частин і врахуйте, що $\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2-1$. **969.** $\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$. **970.** (3; −1); (−1; 5); (7; 3). **971.** $x=\frac{b_1+na_1}{1+n}$, $y=\frac{b_2+na_2}{1+n}$. **972.** Врахуйте, що $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$, $S = 0{,}5ab\sin C$. **975.** 75°. Побудуйте рівносторонній трикутник M_1AD і покажіть, що точка M_1 збігається з точкою M. **976.** 45°, 45°, 150° і 120°. За теоремою косинусів знайдіть кути B і D, розгляньте прямокутний рівнобедрений трикутник з гіпотенузою AB. **977.** 75°. Через точки A, B, C проведіть коло і покажіть, що точка D — центр цього кола. **978.** 30°. Побудуйте на AB рівносторонній трикутник ABM. Якщо прямі AM і BC перетинаються в точці K, то трикутник DMK — також рівносторонній. **979.** 45°. **987.** Покажіть, що даний трикутник прямокутний, а одна з його сторін — діаметр кола. **988.** Якщо $2r_1 + 2r_2 + 2r_3 = 2R$, то $2\pi r_1+2\pi r_2+2\pi r_3=2\pi R$. **989.** $r_1=\frac{\sqrt{3}}{3}r$, $r_2=\frac{\sqrt{6}}{3}r$. **990.** $3r^2\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$, три круги, площа кожного з яких $r^2\sqrt{3}$ і три рівні криволінійні фігури, площі яких по $\frac{r^2}{6\left(7+4\sqrt{3}\right)}\left(8\sqrt{3\pi}-\pi-6\sqrt{3}\right)$.

991. Нехай $OA = r$, тоді радіус меншого кола $O_1A=\frac{r}{2}$. Якщо $\angle AOC=\alpha$, $\angle AO_1B=2\alpha$. $\overset{\frown}{AC}=\frac{2\pi r\alpha}{360}=\frac{\pi r\alpha}{180}$. $\overset{\frown}{AB}=2\pi\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{2\alpha}{360}=\frac{\pi r\alpha}{180}$; довжини цих дуг рівні. **994.** 1,5. **997.** 1 : 2. **998.** Пропорційні числам 2, 3 і 5. **999.** $m_a^2\sin(B+C):\left(\sin^2 B+\sin^2 C-0{,}5\sin^2(B+C)\right)$. **1001.** $\cos A=(4cb-b^2-c^2):2bc$. **1003.** $\frac{r^2}{12}\left(3\pi+2\sqrt{3}\right)$, $\frac{r^2}{12}\left(3\pi-2\sqrt{3}\right)$, $\frac{r^2}{12}\left(5\pi+\sqrt{3}\right)$, $\frac{r^2}{12}\left(\pi-\sqrt{3}\right)$. **1004.** Покажіть, що сторони трикутника дорівнюють $2S : h_1$, $2S : h_2$, $2S : h_3$, а півпериметр $p = S : r$. **1006.** Нехай r і R — радіуси двох менших півкіл. Тоді $CM = 2Rr$. **1009.** 60°, 60°, 120° і 120°. **1010.** а) 0; б) 0. **1013.** а) $\sin^2\beta$; б) 1. **1014.** а) 60°. **1020.** (−10; 5). **1022.** $\frac{5\sqrt{5}}{2}$; $2\sqrt{5}$; $\frac{10\sqrt{2}}{3}$. **1027.** $y = 1 - x$. **1038.** $x = \pm 2$. **1047.** $x = 0$; $x = -5$. **1048.** $2\sqrt{3}$. **1050.** $a\in(-5;6)$. **1052.** (9; 3); (−9; −3). **1054.** $3x + 4y - 15 = 0$; $3x - 4y - 15 = 0$. **1057.** а) 7 см; б) 6 см або $3\frac{1}{3}$ см. **1058.** 120°. **1060.** 10 см. **1062.** 5,9 см. **1064.** $\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **1066.** 20 см². **1067.** 20 см і 6 см; 3 см і 10 см. **1068.** 24 см². **1069.** $10\frac{5}{6}$ см². **1070.** 7 см. **1078.** 60°, 80°, 100°, 140°, 160°. **1079.** 10. **1085.** $18\sqrt{3}$ см³; $27\sqrt{3}$ см. **1094.** $y = -3x - 4$. **1096.** $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$; а) $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$; г) $(x + 1)^2 + (y + 1) = 9$. **1103.** $6\sqrt{3}S$. **1104.** 8 см і 10 см. **1105.** 14 см.

ЗМІСТ

Розділ 4. Правильні многокутники

Розділ 5. Геометричні перетворення

Додатки