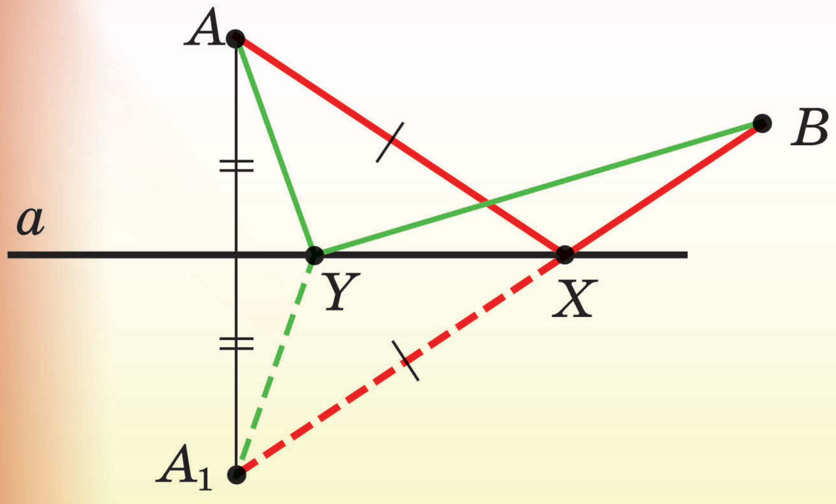
А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

9

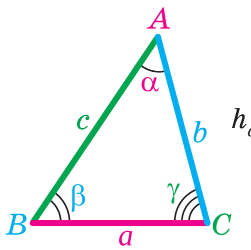
ГЕОМЕТРІЯ

ДЛЯ ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ



ГІМНАЗІЯ

ТРИКУТНИК ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ



a, b, c — довжини сторін BC, AC, AB відповідно

α, β, γ — величини кутів A, B, C відповідно

m_a, m_b, m_c — довжини медіан, проведених з вершин A, B, C відповідно

l_a, l_b, l_c — довжини бісектрис, проведених з вершин A, B, C відповідно

h_a, h_b, h_c — довжини висот, проведених з вершин A, B, C відповідно

r і R — радіуси вписаного й описаного кіл трикутника відповідно

p — півпериметр трикутника

r_a, r_b, r_c — радіуси зовнівписаних кіл, які дотикаються до сторін BC, AC і AB відповідно

ФОРМУЛИ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ ТРИКУТНИКА

$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

$$S = \frac{1}{2} ab \sin\gamma$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$S = pr$$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ ТА КУТАМИ ТРИКУТНИКА

Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Теорема косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

ФОРМУЛИ ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ РАДІУСІВ ВПИСАНОГО, ОПИСАНОГО Й ЗОВНІВПИСАНОГО КІЛ ТРИКУТНИКА

$$r = \frac{S}{p} \qquad R = \frac{abc}{4S} = \frac{a}{2\sin\alpha} \qquad r_a = \frac{S}{p-a}$$

ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

Формула відстані між двома точками

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Координати точки, яка ділить даний відрізок у відношенні λ

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

Загальне рівняння прямої

$$ax + by = c, \text{ де } a^2 + b^2 \neq 0$$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через дану точку

$$y = k(x - x_0) + y_0$$

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Рівняння кола

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

де $M(a; b)$ — центр кола, R — радіус кола

ЗНАЧЕННЯ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА Й КОТАНГЕНСА ДЕЯКИХ КУТІВ

	$\alpha = 0°$	$\alpha = 30°$	$\alpha = 45°$	$\alpha = 60°$	$\alpha = 90°$	$\alpha = 180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—

ВЛАСТИВОСТІ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА Й КОТАНГЕНСА

$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha \qquad \sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha \qquad \operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонський
М. С. Якір

ГЕОМЕТРІЯ

ДЛЯ ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ
З ПОГЛИБЛЕНИМ ВИВЧЕННЯМ МАТЕМАТИКИ

підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків
«Гімназія»
2017

УДК 373.167.1:512
М52

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 20.03.2017 № 417)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

І. Г. Ленчук, професор кафедри алгебри та геометрії Житомирського державного університету імені Івана Франка, доктор педагогічних наук, професор;

В. В. Луцак, методист Науково-методичного центру Подільського району м. Києва;

І. В. Тарасова, учитель багатопрофільного ліцею м. Лисичанська, учитель вищої категорії, старший учитель

Експерт з антидискримінації в освіті
В. В. Селіваненко, координатор освітніх програм Amnesty International в Україні, кандидат юридичних наук

Мерзляк А. Г.
М52 Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 304 с. : іл.
ISBN 978-966-474-296-9.

УДК 373.167.1:512

ISBN 978-966-474-296-9

ВІД АВТОРІВ

Любі діти!

Ми маємо надію, що ви не розчарувалися, вибравши нелегкий шлях — навчатися в математичному класі. У цьому навчальному році ви продовжите вивчати математику за програмою для класів з поглибленим вивченням математики. Сподіваємося, що цьому сприятиме підручник, який ви тримаєте в руках.

Ознайомтеся, будь ласка, з його структурою.

Підручник поділено на сім параграфів, кожний з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Вивчаючи його, особливу увагу звертайте на текст, який надруковано **жирним шрифтом**, ***жирним курсивом*** і *курсивом*; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв'язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв'язання.

До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв'язування, приступати до яких радимо лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі.

Якщо після виконання домашніх завдань залишається вільний час і ви хочете дізнатися більше, то рекомендуємо звернутися до рубрики «Коли зроблено уроки». Матеріал, викладений там, непростий. Але тим цікавіше випробувати свої сили!

Дерзайте! Бажаємо успіху!

Шановні колеги та колежанки!

Ми знаємо, що підготовка до уроку в класі з поглибленим вивченням математики — робота нелегка. Організація такого навчального процесу вимагає великих зусиль учителя, який формує навчальний матеріал по крихтам, збираючи його в багатьох посібниках. Ми сподіваємося, що цей підручник стане надійним помічником у вашій нелегкій та шляхетній праці, і будемо щиро раді, якщо він вам сподобається.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи рівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

Зеленим кольором позначено номери задач, що рекомендуються для домашньої роботи, **синім** кольором — номери задач, які на розсуд учителя (з урахуванням індивідуальних особливостей учнів класу) можна розв'язувати усно.

Матеріал рубрики «Коли зроблено уроки» може бути використаний для організації роботи математичного гуртка та факультативних занять.

Бажаємо творчого натхнення й терпіння.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

n° завдання, що відповідають початковому та середньому рівням навчальних досягнень;

$n^{\bullet}$ завдання, що відповідають достатньому рівню навчальних досягнень;

$n^{\bullet\bullet}$ завдання, що відповідають високому рівню навчальних досягнень;

n^{*} задачі для математичних гуртків і факультативів;

 ключові задачі, результати яких можуть бути використані під час розв'язування інших задач;

◄ закінчення доведення теореми, розв'язання задачі, розгляду прикладу;

 рубрика «Коли зроблено уроки».

ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 8 КЛАСУ

§1

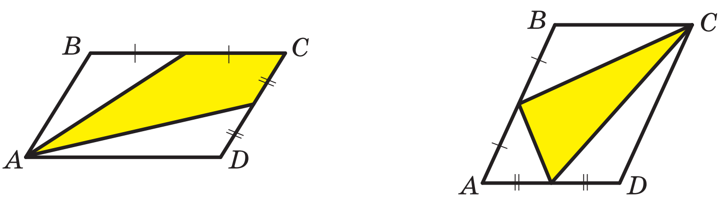
1. Задачі на повторення навчального матеріалу з курсу геометрії 8 класу

1.1.° Бічна сторона AB і менша основа BC трапеції $ABCD$ дорівнюють відповідно 16 см і 15 см. Який із відрізків перетинає бісектриса кута BAD — основу BC чи бічну сторону CD?

1.2.° Пряма AB дотикається до кола в точці B, а пряма AC перетинає коло в точках C і D. Знайдіть відрізок CD, якщо $AB = 6$ см, $AC = 9$ см.

1.3.° На одній стороні кута з вершиною в точці A позначили точки B і C, а на другій — точки D і E, причому $AB = 10$ см, $AC = 18$ см, $AD : AE = 5 : 9$. Знайдіть відрізок CE, якщо $BD = 20$ см.

1.4.° Площа паралелограма $ABCD$, зображеного на рисунку 1.1, дорівнює S. Знайдіть площу зафарбованої фігури.



а *б*

Рис. 1.1

1.5.° Знайдіть відношення площ S_1 і S_2 трикутників, зображених на рисунку 1.2.

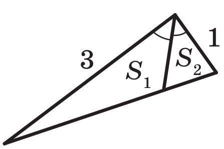


Рис. 1.2

1.6.° Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC, площа трикутника ABD дорівнює 12 см², а трикутника ACD — 20 см². Знайдіть відношення сторони AB до сторони AC.

1.7.° Діагоналі рівнобічної трапеції є бісектрисами її гострих кутів і точкою перетину діляться у відношенні 5 : 13. Знайдіть площу трапеції, якщо її висота дорівнює 90 см.

1.8.° Катети прямокутного трикутника дорівнюють 18 см і 24 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини меншого гострого кута.

1.9.° Медіани AM і CK трикутника ABC перпендикулярні. Знайдіть сторони трикутника, якщо $AM = 9$ см і $CK = 12$ см.

1.10.° У трикутнику ABC медіани BM і CK перпендикулярні та перетинаються в точці O. Знайдіть відрізок AO, якщо $BM = 36$ см і $CK = 15$ см.

1.11.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, відрізки BD і AM — висоти трикутника, $BD : AM = 3 : 1$. Знайдіть $\cos C$.

1.12.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, відрізки BD і CK — висоти трикутника, $\cos A = \frac{3}{7}$. Знайдіть відношення $CK : BD$.

1.13.° Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони та утворює з основою трапеції кут 30°. Знайдіть висоту трапеції, якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює R.

1.14.° Побудуйте квадрат, площа якого дорівнює сумі площ двох даних квадратів.

1.15.° На медіані AM трикутника ABC позначено точку D так, що $AD : DM = 1 : 3$. Через точку D проведено пряму, паралельну стороні AC. У якому відношенні ця пряма ділить сторону BC, рахуючи від вершини C?

1.16.° У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $AB = AD$, $CB = CD$. Доведіть, що $AD \perp BC$.

1.17.° На основі AC рівнобедреного трикутника ABC позначили точку M, а на бічних сторонах AB і BC відповідно точки K і N так, що $MK \parallel BC$, $MN \parallel AB$. Знайдіть довжину бічної сторони, якщо відомо, що периметр чотирикутника $MKBN$ дорівнює 30 см.

1.18.° У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $AB = 2AD$. Точка K — середина сторони AB. Знайдіть кут CKD.

1.19.° Побудуйте квадрат за трьома точками, які є серединами трьох його сторін.

1.20.° Діагоналі рівнобічної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) перетинаються в точці M. Відомо, що $\angle CMD = \angle BAD$. Доведіть, що $BC = AB$.

1.21.° У рівнобічній трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) бісектриси гострих кутів BAD і CDA перетинаються в точці, яка належить основі BC. Знайдіть периметр трапеції, якщо $BC = 36$ см, $\angle BAD = 60°$.

1.22.• Побудуйте паралелограм за його вершиною та серединами сторін, яким ця вершина не належить.

1.23.• Перпендикуляр, опущений із вершини кута прямокутника на його діагональ, ділить цю діагональ на відрізки, довжини яких відносяться як $1 : 3$. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника.

1.24.• На стороні AD прямокутника $ABCD$ позначили точку M так, що $MD = CD$, $MA = MC$. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника.

1.25.• Висоти BN і DM ромба $ABCD$, проведені з його тупих кутів B і D, перетинаються в точці F. Знайдіть кути ромба, якщо $NF : FB = MF : FD = 1 : 2$.

1.26.• Сума довжин катетів AB і BC прямокутного трикутника ABC дорівнює a. На гіпотенузі AC поза трикутником побудовано квадрат $ACMN$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Із точки O на прямі BA і BC опустили перпендикуляри OK і OF відповідно. Знайдіть периметр чотирикутника $BKOF$.

1.27.• Серединний перпендикуляр діагоналі прямокутника утворює з його більшою стороною кут $60°$. Відрізок цього перпендикуляра, який міститься всередині прямокутника, дорівнює 12 см. Знайдіть більшу сторону прямокутника.

1.28.• На медіані BD трикутника ABC позначено точку M так, що $BM : MD = 3 : 2$. Пряма AM перетинає сторону BC у точці E. У якому відношенні точка E ділить сторону BC, рахуючи від вершини B?

1.29.• Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає діагональ BD і сторону BC у точках E і F відповідно так, що $BE : ED = 2 : 7$. Знайдіть відношення $BF : FC$.

1.30.• Медіани AD і BM трикутника ABC перетинаються в точці O. Через точку O проведено пряму, яка паралельна стороні AC і перетинає сторону BC у точці K. Знайдіть відрізки BD, DK і KC, якщо $BC = 18$ см.

1.31.• Коло, центр якого належить гіпотенузі прямокутного трикутника, дотикається до більшого катета та проходить через вершину протилежного гострого кута. Знайдіть радіус кола, якщо катети даного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см.

1.32.° Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть відстань від вершини меншого гострого кута трикутника до центра вписаного кола.

1.33.° Площа рівнобічної трапеції дорівнює $36\sqrt{2}$ см², а гострий кут — 45°. Знайдіть висоту трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

1.34.° Бісектриса кута A трикутника ABC ($\angle C = 90°$) ділить катет BC на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайдіть радіус кола, яке проходить через точки A, C і точку перетину цієї бісектриси з катетом BC.

1.35.° Центр кола, вписаного в рівнобічну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони на 12 см і 16 см. Знайдіть периметр трапеції.

1.36.° Діагональ рівнобічної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 12 см, а бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

1.37.° Більша діагональ прямокутної трапеції ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки завдовжки 15 см і 9 см. Більша бічна сторона трапеції дорівнює її меншій основі. Знайдіть площу трапеції.

1.38.° У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точка M — середина сторони AB. Знайдіть площу трикутника CMD, якщо площа даної трапеції дорівнює S.

1.39.° Коло, побудоване на діагоналі AC ромба $ABCD$ як на діаметрі, проходить через середину сторони AB. Знайдіть кути ромба.

1.40.°° На сторонах AB і BC трикутника ABC побудовано в зовнішній бік квадрати $ABDE$ і $BCFG$. Виявилося, що $DG \parallel AC$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

1.41.°° У трикутнику ABC проведено висоту AH і медіану BM. Відрізок MH перетинає бісектрису CK у її середині. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

1.42.°° Побудуйте чотирикутник за його сторонами та відстанню між серединами діагоналей.

1.43.°° Точка C належить прямому куту BOA (рис. 1.3). Доведіть, що периметр трикутника ABC більший, ніж $2OC$.

1.44.°° На аркуші паперу в клітинку накреслено трикутник ABC із вершинами у вузлах сітки (рис. 1.4). За допомогою лінійки побудуйте точку перетину медіан цього трикутника.

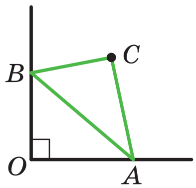


Рис. 1.3

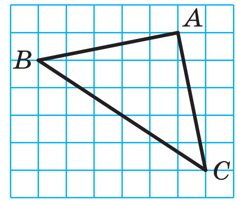


Рис. 1.4

1.45.•• У трапеції довжина однієї з діагоналей дорівнює сумі основ, а кут між діагоналями дорівнює 60°. Доведіть, що трапеція є рівнобічною.

1.46.•• На стороні AC трикутника ABC позначили точку K так, що вписані кола трикутників ABK і BCK дотикаються. Доведіть, що точка K належить вписаному колу трикутника ABC.

1.47.•• На сторонах AB і CD трапеції $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ відповідно позначили точки K і L такі, що $\angle BAL = \angle CDK$. Доведіть, що $\angle BLA = \angle CKD$.

1.48.•• У гострокутному трикутнику ABC відрізок AH є висотою. Із точки H на сторони AB і AC опущено перпендикуляри HK і HL відповідно. Доведіть, що чотирикутник $BKLC$ вписаний.

1.49.•• Точка J належить трикутнику ABC і $\angle BJC = 90° + \frac{1}{2}\angle BAC$. Відомо, що пряма AJ містить центр описаного кола трикутника BJC. Доведіть, що точка J — центр вписаного кола трикутника ABC.

1.50.•• Дано два кола. Перше з них проходить через центр O другого кола та перетинає це коло в точках A і B. Хорда OC першого кола перетинає друге коло в точці J. Доведіть, що точка J — центр вписаного кола трикутника ABC.

1.51.•• У трикутнику ABC проведено висоти AH і CP. Знайдіть кут B, якщо відомо, що $AC = 2PH$.

1.52.•• На стороні AC трикутника ABC позначили точку D таку, що $\angle ABD = \angle BCD$ і $AB = CD$. Бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці E. Доведіть, що $DE \parallel AB$.

1.53.•• Точка D — середина сторони AC трикутника ABC, відрізки DE і DF — бісектриси відповідно трикутників ABD і CBD. Відрізки BD і EF перетинаються в точці M. Доведіть, що $DM = \frac{1}{2}EF$.

1.54.•• У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) відрізки CH, CL і CM — відповідно висота, бісектриса та медіана трикутника. Знайдіть відрізок CL, якщо $CH = 6$ см, $CM = 10$ см.

1.55.•• У трикутнику ABC проведено бісектрису BD. Відомо, що $AB = 15$ см, $BC = 10$ см. Доведіть, що $BD < 12$ см.

1.56.•• В опуклому чотирикутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Відомо, що $\angle BAC = \angle CBD$, $\angle BCA = \angle CDB$. Доведіть, що $CO \cdot CA = BO \cdot BD$.

1.57.•• Бісектриси кутів A і B трикутника ABC перетинають описане коло трикутника ABC у точках K і L відповідно. Відрізки AK і BL перетинаються в точці O так, що $\frac{AO}{OK} = \frac{BO}{OL}$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

1.58.•• Трапеція $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ така, що коло, описане навколо трикутника ABD, дотикається до прямої BC. Доведіть, що коло, описане навколо трикутника BCD, дотикається до прямої AD.

1.59.•• У трикутнику ABC проведено бісектрису BK. На сторонах BA і BC позначили відповідно точки M і N такі, що

$$\angle AKM = \angle CKN = \frac{1}{2}\angle ABC.$$

Доведіть, що пряма AC — дотична до кола, описаного навколо трикутника MBN.

1.60.•• У колі проведено хорду CD паралельно діаметру AB так, що в трапецію $ABCD$ можна вписати коло. Знайдіть хорду CD, якщо $AB = 2R$.

1.61.•• На медіані AM трикутника ABC позначили точку F. Точки K і N — основи перпендикулярів, опущених із точки F на сторони AB і AC відповідно. Знайдіть відрізки FK і FN, якщо $FK + FN = d$, $AB = c$, $AC = b$.

1.62.•• У трикутнику ABC проведено чевіани AA_1, BB_1, CC_1, які перетинаються в точці M. Відомо, що трикутники AMB_1 і AMC_1 рівновеликі, трикутники BMC_1 і BMA_1 рівновеликі, трикутники CMA_1 і CMB_1 рівновеликі. Доведіть, що M — точка перетину медіан трикутника ABC.

1.63.•• У трапеції $ABCD$ $(AD \parallel BC,\ AD > BC)$ на діагоналі AC позначили точку E так, що $BE \parallel CD$. Доведіть, що площі трикутників ABC і DEC рівні.

1.64.* На медіані BM трикутника ABC позначили точку D. Через точки C і D провели прямі, паралельні відповідно прямим BM і AB. Проведені прямі перетинаються в точці E. Доведіть, що $BE = AD$.

1.65.* На основі AD трапеції $ABCD$ позначили точку M. Відомо, що периметри трикутників ABM, MBC і CMD рівні. Доведіть, що $AD = 2BC$.

1.66.* У коло вписано чотирикутник $ABCD$. На хорді AB побудуйте точку M таку, що $\angle ADM = \angle BCM$.

1.67.* Точки M і N — середини основ AD і BC трапеції $ABCD$ відповідно. На сторонах AB і CD позначили точки P і Q відповідно так, що $PQ \parallel AD$ $(AP \neq PB)$. Доведіть, що прямі PN, MQ і AC перетинаються в одній точці.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ §2

У цьому параграфі ви дізнаєтесь, що являють собою синус, косинус, тангенс і котангенс кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Ви навчитеся за двома сторонами трикутника та кутом між ними знаходити третю сторону, а також за стороною та двома прилеглими до неї кутами знаходити дві інші сторони трикутника.

У 8 класі ви навчилися розв'язувати прямокутні трикутники. Вивчивши матеріал цього параграфа, ви зможете розв'язувати будь-які трикутники.

Ви дізнаєтеся про нові формули, за допомогою яких можна знаходити площу трикутника.

2. Синус, косинус, тангенс і котангенс кута від 0° до 180°

Поняття синуса, косинуса, тангенса й котангенса гострого кута вам відомі з курсу геометрії 8 класу. Розширимо ці поняття для довільного кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

У верхній півплощині координатної площини розглянемо півколо із центром у початку координат, радіус якого дорівнює 1 (рис. 2.1). Таке півколо називають **одиничним**.

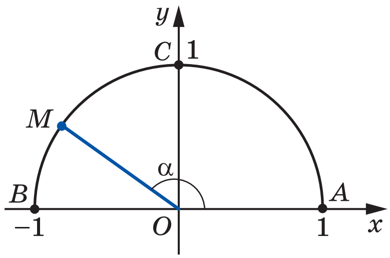


Рис. 2.1

Будемо говорити, що **куту** α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ **відповідає точка** M одиничного півкола, якщо $\angle MOA = \alpha$, де точки O і A мають відповідно координати (0; 0) і (1; 0) (рис. 2.1). Наприклад, на рисунку 2.1

куту, який дорівнює 90°, відповідає точка C; куту, який дорівнює 180°, — точка B; куту, який дорівнює 0°, — точка A.

Нехай α — гострий кут. Йому відповідає деяка точка M $(x;\ y)$ дуги AC одиничного півкола (рис. 2.2). У прямокутному трикутнику OMN маємо:

$$\cos\alpha = \frac{ON}{OM}, \quad \sin\alpha = \frac{MN}{OM}.$$

Оскільки $OM = 1$, $ON = x$, $MN = y$, то

$$\cos\alpha = x,\ \sin\alpha = y.$$

Отже, косинус і синус гострого кута α — це відповідно абсциса й ордината точки M одиничного півкола, яка відповідає куту α.

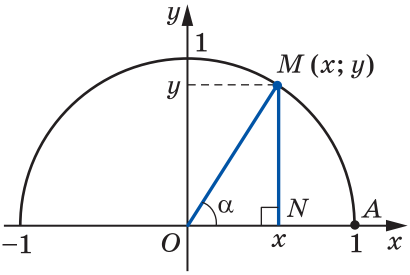


Рис. 2.2

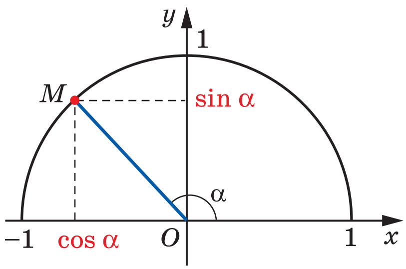


Рис. 2.3

Отриманий результат підказує, як означити синус і косинус довільного кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$.

Означення. Косинусом і синусом кута α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ називають відповідно абсцису й ординату точки M одиничного півкола, яка відповідає куту α (рис. 2.3).

Користуючись цим означенням, можна, наприклад, установити, що $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$.

Якщо M $(x;\ y)$ — довільна точка одиничного півкола, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$ і $0 \leqslant y \leqslant 1$. Отже, для будь-якого кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$, маємо:

$$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1,$$
$$-1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

Якщо α — тупий кут, то абсциса точки, що відповідає цьому куту, є від'ємною. Отже, косинус тупого кута є від'ємним числом. Справедливе й таке твердження: якщо $\cos\alpha < 0$, то α — тупий або розгорнутий кут.

Із курсу геометрії 8 класу ви знаєте, що для будь-якого гострого кута α виконуються рівності:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos\alpha,\\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin\alpha\end{aligned}}$$

Ці формули залишаються справедливими також для $\alpha = 0^\circ$ і для $\alpha = 90^\circ$ (переконайтеся в цьому самостійно).

Нехай кутам α і $180^\circ - \alpha$, де $\alpha \neq 0^\circ$, $\alpha \neq 90^\circ$ і $\alpha \neq 180^\circ$, відповідають точки $M(x_1; y_1)$ і $N(x_2; y_2)$ одиничного півкола (рис. 2.4).

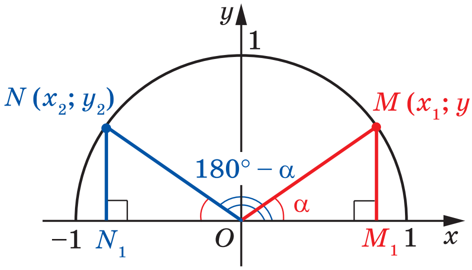


Рис. 2.4

Прямокутні трикутники OMM_1 і ONN_1 рівні за гіпотенузою та гострим кутом ($OM = ON = 1$, $\angle MOM_1 = \angle NON_1 = \alpha$). Звідси $y_2 = y_1$ і $x_2 = -x_1$. Отже,

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(180^\circ - \alpha) &= \sin\alpha,\\ \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos\alpha\end{aligned}}$$

Переконайтеся самостійно, що ці рівності залишаються правильними для $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$.

Якщо α — гострий кут, то, як ви знаєте з курсу геометрії 8 класу, є справедливою тотожність, яку називають **основною тригонометричною тотожністю**:

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

Ця рівність залишається правильною для $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 180^\circ$ (переконайтеся в цьому самостійно).

Нехай α — тупий кут. Тоді кут $180^\circ - \alpha$ є гострим. Маємо:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = (\sin(180^\circ - \alpha))^2 + (-\cos(180^\circ - \alpha))^2 =$$
$$= \sin^2(180^\circ - \alpha) + \cos^2(180^\circ - \alpha) = 1.$$

Отже, рівність $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ виконується для всіх $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$.

Для того щоб порівнювати значення $\sin\alpha$ і $\sin\beta$, а також $\cos\alpha$ і $\cos\beta$, скористаємося такими наочно зрозумілими міркуваннями:

якщо $0° \leqslant \alpha < \beta \leqslant 90°$, то $\sin\alpha < \sin\beta$ (рис. 2.5);
якщо $90° \leqslant \alpha < \beta \leqslant 180°$, то $\sin\alpha > \sin\beta$ (рис. 2.6);
якщо $0° \leqslant \alpha < \beta \leqslant 180°$, то $\cos\alpha > \cos\beta$ (рис. 2.5, 2.6).

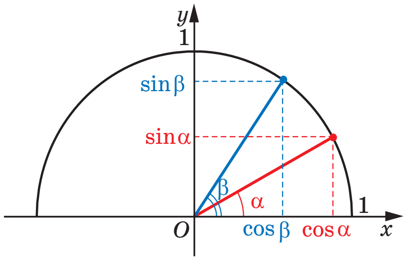


Рис. 2.5

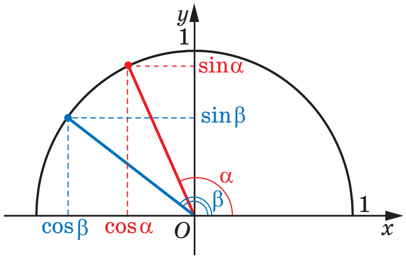


Рис. 2.6

Означення. Тангенсом кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ і $\alpha \neq 90°$, називають відношення $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, тобто

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

Оскільки $\cos 90° = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha$ не визначений для $\alpha = 90°$.

Означення. Котангенсом кута α, де $0° < \alpha < 180°$, називають відношення $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, тобто

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

Оскільки $\sin 0° = \sin 180° = 0$, то $\operatorname{ctg}\alpha$ не визначений для $\alpha = 0°$ і $\alpha = 180°$.

Очевидно, що кожному куту α ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) відповідає *єдина* точка одиничного півкола. Отже, кожному куту α відповідає єдине число, яке є значенням синуса (косинуса, тангенса для $\alpha \neq 90°$, котангенса для $\alpha \neq 0°$ і $\alpha \neq 180°$). Тому залежність значення синуса (косинуса, тангенса, котангенса) від величини кута є функціональною.

Функції $f(\alpha) = \sin\alpha$, $g(\alpha) = \cos\alpha$, $h(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $p(\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$, які відповідають цим функціональним залежностям, називають **тригонометричними функціями** кута α.

Задача 1. Доведіть, що $\text{tg}\,(180° - \alpha) = -\text{tg}\,\alpha$, $\text{ctg}\,(180° - \alpha) = -\text{ctg}\,\alpha$.

Розв'язання. $\text{tg}\,(180° - \alpha) = \dfrac{\sin\,(180° - \alpha)}{\cos\,(180° - \alpha)} = \dfrac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\text{tg}\,\alpha$;

$\text{ctg}\,(180° - \alpha) = \dfrac{\cos\,(180° - \alpha)}{\sin\,(180° - \alpha)} = \dfrac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\text{ctg}\,\alpha$. ◄

Задача 2. Знайдіть $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\text{tg}\,120°$, $\text{ctg}\,120°$.

Розв'язання. Маємо: $\sin 120° = \sin\,(180° - 60°) = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 120° = \cos\,(180° - 60°) = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$;

$\text{tg}\,120° = \text{tg}\,(180° - 60°) = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$.

$\text{ctg}\,120° = \text{ctg}\,(180° - 60°) = -\text{ctg}\,60° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ◄

?

1. Яке півколо називають одиничним?
2. Що називають синусом кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
3. Що називають косинусом кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
4. У яких межах знаходяться значення $\sin\alpha$, якщо $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
5. У яких межах знаходяться значення $\cos\alpha$, якщо $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$?
6. Чому дорівнює $\sin\,(180° - \alpha)$? $\cos\,(180° - \alpha)$?
7. Як пов'язані між собою синус і косинус одного й того самого кута?
8. Що називають тангенсом кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ і $\alpha \neq 90°$?
9. Що називають котангенсом кута α, де $0° < \alpha < 180°$?

ВПРАВИ

2.1.° Чому дорівнює:

1) $\sin\,(180° - \alpha)$, якщо $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$;

2) $\cos\,(180° - \alpha)$, якщо $\cos\alpha = 0{,}7$;

3) $\text{tg}\,(180° - \alpha)$, якщо $\text{tg}\,\alpha = -5$;

4) $\text{ctg}\,(180° - \alpha)$, якщо $\text{ctg}\,\alpha = -\dfrac{1}{3}$?

2.2.° Кути α і β суміжні, $\cos\alpha = -\frac{1}{6}$.

1) Знайдіть $\cos\beta$.

2) Який із кутів α і β є гострим, а який — тупим?

2.3.° Знайдіть значення виразу:

1) $2\sin 90° + 3\cos 0° + \operatorname{ctg} 90°$;

2) $3\sin 0° - 5\cos 180° + \operatorname{tg} 180°$;

3) $\operatorname{tg} 23° \cdot \operatorname{tg} 0° \cdot \operatorname{tg} 106°$;

4) $6\operatorname{tg} 180° + 5\sin 180° + \cos 180°$;

5) $\cos^2 165° + \sin^2 165°$;

6) $\dfrac{\sin 0° + \sin 90°}{\cos 0° - \cos 90°}$.

2.4.° Обчисліть:

1) $4\cos 90° + 2\cos 180° - \operatorname{ctg} 90°$;

2) $\cos 0° - \cos 180° + \sin 90° + \operatorname{tg} 180°$.

2.5.° Чому дорівнює синус кута, якщо його косинус дорівнює:

1) 1; 2) 0?

2.6.° Чому дорівнює косинус кута, якщо його синус дорівнює:

1) 1; 2) 0?

2.7.° Чому дорівнює тангенс кута, якщо його котангенс дорівнює:

1) 1; 2) $-\frac{1}{3}$?

2.8.° Чому дорівнює котангенс кута, якщо його тангенс дорівнює:

1) -1; 2) 3?

2.9.° Знайдіть $\sin 135°$, $\cos 135°$, $\operatorname{tg} 135°$, $\operatorname{ctg} 135°$.

2.10.° Знайдіть $\sin 150°$, $\cos 150°$, $\operatorname{tg} 150°$, $\operatorname{ctg} 150°$.

2.11.° Чи існує кут α, для якого:

1) $\sin\alpha = 0{,}3$; 2) $\cos\alpha = -0{,}99$; 3) $\cos\alpha = 1{,}001$; 4) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$?

2.12.° Знайдіть:

1) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ і $90° \leqslant \alpha \leqslant 180°$;

2) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$;

3) $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = -0{,}8$;

4) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ і $90° < \alpha \leqslant 180°$;

5) $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{12}{13}$ і $0° < \alpha \leqslant 90°$.

2.13.° Знайдіть:

1) $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{5}{13}$; 3) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ і $0° \leqslant \alpha < 90°$;

2) $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{1}{6}$; 4) $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = -\frac{8}{17}$.

2.14.° Чи є правильним твердження (відповідь обґрунтуйте):
1) косинус гострого кута більший за косинус тупого кута;
2) існує тупий кут, синус і косинус якого рівні;
3) існує кут, синус і косинус якого дорівнюють нулю;
4) косинус кута трикутника може дорівнювати від'ємному числу;
5) синус кута трикутника може дорівнювати від'ємному числу;
6) косинус кута трикутника може дорівнювати нулю;
7) синус кута трикутника може дорівнювати нулю;
8) синуси суміжних кутів рівні;
9) косинуси нерівних суміжних кутів є протилежними числами;
10) якщо косинуси двох кутів рівні, то рівні й самі кути;
11) якщо синуси двох кутів рівні, то рівні й самі кути;
12) тангенс гострого кута більший за тангенс тупого кута;
13) тангенс гострого кута більший за котангенс тупого кута?

2.15.° Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $\sin 110° \cos 140°$;
2) $\sin 80° \cos 100° \cos 148°$;
3) $\sin 128° \cos^2 130° \operatorname{tg} 92°$;
4) $\sin 70° \cos 90° \operatorname{tg} 104°$;
5) $\operatorname{ctg} 100° \sin 114° \cos 11°$;
6) $\cos 85° \sin 171° \operatorname{ctg} 87°$.

2.16.° Знайдіть значення виразу:
1) $2\sin 120° + 4\cos 150° - 2\operatorname{tg} 135°$;
2) $2\cos^2 120° - 8\sin^2 150° + 3\cos 90° \cos 162°$;
3) $\cos 180° (\sin 135° \operatorname{ctg} 30° - \cos 135°)^2$;
4) $2\sin^2 30° + \cos^2 60° + \sin^2 45° + \operatorname{tg}^2 60° - \operatorname{tg}^2 120°$.

2.17.° Чому дорівнює значення виразу:
1) $2\sin 150° - 4\cos 120° + 2\operatorname{ctg} 135°$;
2) $\sin 90° (\operatorname{tg} 150° \cos 135° + \operatorname{ctg} 150° \sin 135°)^2$?

2.18.° Знайдіть значення виразу, не користуючись калькулятором:

1) $\frac{\sin 18°}{\sin 162°}$; 2) $\frac{\cos 18°}{\cos 162°}$; 3) $\frac{\operatorname{tg} 18°}{\operatorname{tg} 162°}$; 4) $\frac{\operatorname{ctg} 18°}{\operatorname{ctg} 162°}$.

2.19.° Знайдіть значення виразу, не користуючись калькулятором:

1) $\frac{\cos 49°}{\cos 131°}$; 2) $\frac{\operatorname{tg} 14°}{\operatorname{tg} 166°}$; 3) $\frac{\sin 53°}{\sin 127°}$.

2.20.° Знайдіть суму квадратів синусів усіх кутів прямокутного трикутника.

2.21.° Знайдіть суму квадратів косинусів усіх кутів прямокутного трикутника.

2.22.° Порівняйте:

1) $\sin 17°$ і $\sin 35°$; 3) $\cos 89°$ і $\cos 113°$; 5) $\frac{1}{2}$ і $\sin 40°$;

2) $\cos 1°$ і $\cos 2°$; 4) $\sin 50°$ і $\sin 140°$; 6) $-\frac{1}{2}$ і $\cos 130°$.

2.23.° Порівняйте:

1) $\sin 118°$ і $\sin 91°$;
2) $\cos 179°$ і $\cos 160°$;
3) $\cos 75°$ і $\cos 175°$;
4) $\sin 70°$ і $\sin 105°$;
5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ і $\cos 20°$;
6) $\frac{1}{2}$ і $\sin 130°$.

2.24.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle B = 60°$, точка O — центр вписаного кола. Чому дорівнює косинус кута AOC?

2.25.° Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC, $\cos \angle BOC = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Знайдіть кут A трикутника.

2.26.• У непрямокутному трикутнику ABC відомо, що $\angle B = 30°$, точка H — ортоцентр. Чому дорівнює тангенс кута AHC?

2.27.• Точка H — ортоцентр трикутника ABC. Відомо, що $\cos \angle AHC = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Знайдіть кут B трикутника.

2.28.• Точка O — центр вписаного кола трикутника ABC. Відомо, що $\sin \angle AOC = \frac{1}{2}$. Знайдіть кут B трикутника.

2.29.• Точка H — ортоцентр трикутника ABC. Відомо, що $\sin \angle AHC = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Знайдіть кут B трикутника.

2.30.• Точка O — центр описаного кола трикутника ABC. Відомо, що $\sin \angle AOC = \frac{1}{2}$. Знайдіть кут B трикутника.

2.31.•• Обчисліть $\text{ctg}\, 5° \,\text{ctg}\, 15° \,\text{ctg}\, 25° \cdot \ldots \cdot \text{ctg}\, 75° \,\text{ctg}\, 85°$.

2.32.•• Обчисліть $\text{tg}\, 10° \,\text{tg}\, 20° \,\text{tg}\, 30° \cdot \ldots \cdot \text{tg}\, 70° \,\text{tg}\, 80°$.

3. Теорема косинусів

Із першої ознаки рівності трикутників випливає, що дві сторони та кут між ними однозначно визначають трикутник. Отже, за вказаними елементами можна, наприклад, знайти третю сторону трикутника. Як це зробити, показує така теорема.

Теорема 3.1 (теорема косинусів). ***Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін і косинуса кута між ними.***

Доведення. Розглянемо трикутник ABC. Доведемо, наприклад, що

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

Можливі три випадки:

1) кут A гострий;

2) кут A тупий;

3) кут A прямий.

Перший випадок. Нехай кут A гострий. Тоді хоча б один із кутів B або C є гострим.

● Нехай $\angle C < 90°$. Проведемо висоту BD. Вона повністю належатиме трикутнику ABC (рис. 3.1).

У прямокутному трикутнику ABD:

$$BD = AB \cdot \sin A, \quad AD = AB \cdot \cos A.$$

У прямокутному трикутнику BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$

$$= BD^2 + (AC - AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 A + (AC - AB \cdot \cos A)^2 =$$

$$= AB^2 \cdot \sin^2 A + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A + AB^2 \cdot \cos^2 A =$$

$$= AB^2 \cdot (\sin^2 A + \cos^2 A) + AC^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

● Нехай $\angle B < 90°$. Проведемо висоту трикутника ABC із вершини C. Вона повністю належатиме трикутнику ABC. Доведення для цього випадку аналогічне розглянутому. Проведіть його самостійно.

Другий випадок. Нехай кут A тупий. Проведемо висоту BD трикутника ABC (рис. 3.2).

У прямокутному трикутнику ABD: $BD = AB \cdot \sin \angle BAD =$

$$= AB \cdot \sin(180° - \angle BAC) = AB \cdot \sin \angle BAC;$$

$$AD = AB \cdot \cos \angle BAD = AB \cdot \cos(180° - \angle BAC) = -AB \cdot \cos \angle BAC.$$

У прямокутному трикутнику BDC: $BC^2 = BD^2 + CD^2 =$

$$= BD^2 + (AC + AD)^2 = AB^2 \cdot \sin^2 \angle BAC + (AC - AB \cdot \cos \angle BAC)^2 =$$

$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC.$$

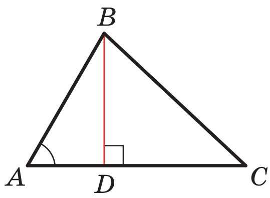


Рис. 3.1

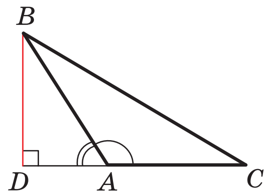


Рис. 3.2

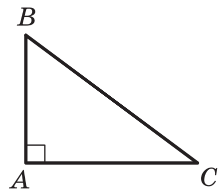


Рис. 3.3

Третій випадок. Нехай кут A прямий (рис. 3.3). Тоді $\cos A = 0$. Треба довести, що $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Ця рівність випливає з теореми Піфагора для трикутника ABC. ◀

Доведення теореми косинусів показує, що *теорема Піфагора є окремим випадком теореми косинусів, а теорема косинусів є узагальненням теореми Піфагора.*

Якщо скористатися позначенням для довжин сторін і величин кутів трикутника ABC (див. форзац), то, наприклад, для сторони, довжина якої дорівнює a, можна записати:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

За допомогою теореми косинусів, знаючи три сторони трикутника, можна визначити, чи є він гострокутним, тупокутним або прямокутним.

Теорема 3.2 (наслідок з теореми косинусів). ***Нехай a, b і c — довжини сторін трикутника, причому a — довжина його найбільшої сторони. Якщо $a^2 < b^2 + c^2$, то трикутник є гострокутним. Якщо $a^2 > b^2 + c^2$, то трикутник є тупокутним. Якщо $a^2 = b^2 + c^2$, то трикутник є прямокутним.***

Доведення. За теоремою косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Звідси $2bc \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$.

Нехай $a^2 < b^2 + c^2$. Тоді $b^2 + c^2 - a^2 > 0$. Звідси $2bc \cos \alpha > 0$, тобто $\cos \alpha > 0$. Тому кут α гострий.

Оскільки a — довжина найбільшої сторони трикутника, то проти цієї сторони лежить найбільший кут, який, як ми довели, є гострим. Отже, у цьому випадку трикутник є гострокутним.

Нехай $a^2 > b^2 + c^2$. Тоді $b^2 + c^2 - a^2 < 0$. Звідси $2bc \cos \alpha < 0$, тобто $\cos \alpha < 0$. Тому кут α тупий. Отже, у цьому випадку трикутник є тупокутним.

Нехай $a^2 = b^2 + c^2$. Тоді $2bc \cos \alpha = 0$. Звідси $\cos \alpha = 0$. Отже, $\alpha = 90°$. У цьому випадку трикутник є прямокутним. ◀

Теорема 3.3. ***Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів усіх його сторін.***

Доведення. На рисунку 3.4 зображено паралелограм $ABCD$. Нехай $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $\angle BAD = \alpha$, тоді $\angle ADC = 180° - \alpha$. Із трикутника ABD за теоремою косинусів отримуємо:

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha. \qquad (1)$$

Із трикутника ACD за теоремою косинусів отримуємо: $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha)$. Звідси

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha. \qquad (2)$$

Додавши рівності (1) і (2), отримаємо:

$$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2. ◄$$

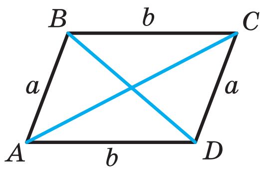


Рис. 3.4

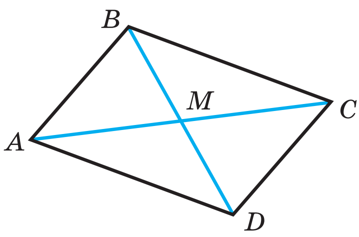


Рис. 3.5

Задача 1. Доведіть, що в трикутнику ABC (див. позначення на форзаці):

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4},$$

$$m_b^2 = \frac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4},$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Розв'язання. Нехай відрізок BM — медіана трикутника ABC. На промені BM позначимо таку точку D, що $BM = MD$ (рис. 3.5). Тоді чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Використовуючи теорему 3.3, можна записати:

$$BD^2 + AC^2 = 2AB^2 + 2BC^2 \text{ або}$$

$$4m_b^2 + b^2 = 2c^2 + 2a^2.$$

Звідси $m_b^2 = \dfrac{2c^2 + 2a^2 - b^2}{4}$.

Аналогічно можна довести дві інші формули. ◄

Задача 2. На стороні AC трикутника ABC позначили точку D так, що $CD : AD = 1 : 2$. Знайдіть відрізок BD, якщо $AB = 14$ см, $BC = 13$ см, $AC = 15$ см.

Розв'язання. За теоремою косинусів із трикутника ABC (рис. 3.6) отримуємо:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C.$$

Звідси $\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} =$

$$= \frac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{225 + 169 - 196}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \frac{33}{65}.$$

Оскільки $CD : AD = 1 : 2$, то $CD = \frac{1}{3} AC = 5$ (см).

Тоді з трикутника BCD отримуємо:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos C = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \frac{33}{65} = 128.$$

Отже, $BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (см).

Відповідь: $8\sqrt{2}$ см. ◄

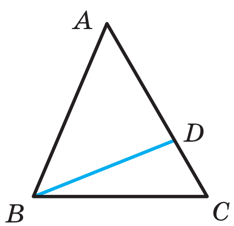


Рис. 3.6

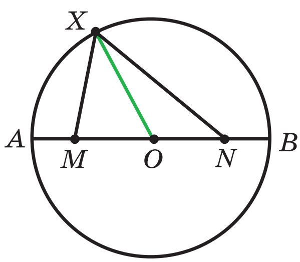


Рис. 3.7

Задача 3. На діаметрі AB кола із центром O вибрали точки M і N так, що $OM = ON$. На колі позначили точку X. Доведіть, що сума $XM^2 + XN^2$ не залежить від вибору точки X.

Розв'язання. Нехай X — точка кола, відмінна від точок A і B. Тоді радіус OX — медіана трикутника MXN (рис. 3.7). Скориставшися ключовою задачею 1, запишемо:

$$XO^2 = \frac{2XM^2 + 2XN^2 - MN^2}{4}. \text{ Звідси } XM^2 + XN^2 = \frac{4XO^2 + MN^2}{2}.$$

Оскільки відрізок XO — радіус даного кола, то значення правої частини останньої рівності не залежить від вибору точки X.

Випадок, коли точка X збігається з точкою A або точкою B, розгляньте самостійно. ◄

Задача 4. Відомо, що довжина найбільшої сторони трикутника дорівнює $\sqrt{3}$ см. Доведіть, що три круги із центрами у вершинах трикутника та радіусами 1 повністю покривають трикутник.

Розв'язання. Очевидно, що ці круги покривають сторони трикутника.

Нехай усередині трикутника ABC знайшлася точка O, не покрита жодним із кругів. Очевидно, що один із кутів AOB, BOC, COA не менший від 120°.

Нехай, наприклад, це кут AOC. Тоді $\cos\angle AOC \leqslant -\frac{1}{2}$. Із трикутника AOC за теоремою косинусів $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \times$ $\times \cos\angle AOC$. З урахуванням нерівності $\cos\angle AOC \leqslant -\frac{1}{2}$ отримуємо:

$$AC^2 \geqslant OA^2 + OC^2 + OA \cdot OC.$$

Оскільки точка O не покрита кругами із центрами A і C, то $OA > 1$ см і $OC > 1$ см. Тоді $OA^2 + OC^2 + OA \cdot OC > 3$ см. Звідси $AC > \sqrt{3}$ см, що суперечить умові задачі. Отже, точок трикутника, не покритих жодним з указаних кругів, не існує. ◄

Задача 5. Додатні числа a, b, c є такими, що $c^2 = a^2 + b^2 - ab$. Доведіть, що $(a-c)(b-c) \leqslant 0$.

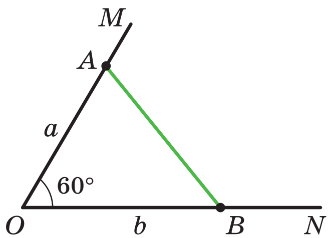


Рис. 3.8

Розв'язання. Побудуємо кут MON, який дорівнює 60°. На його сторонах OM і ON позначимо відповідно точки A і B так, що $OA = a$, $OB = b$ (рис. 3.8). За теоремою косинусів $AB^2 = a^2 + b^2 -$ $- ab$. Отже, $AB = c$.

У трикутнику OAB один із кутів A або B не менший від 60°, а другий не більший за 60°. Отже, у трикутнику OAB сторона c не менша від однієї з двох інших сторін і не більша за другу. Звідси $(a-c)(b-c) \leqslant 0$. ◄

?

1. Сформулюйте теорему косинусів.
2. Гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник зі сторонами a, b і c, де a — довжина його найбільшої сторони, якщо:
   1) $a^2 < b^2 + c^2$; 2) $a^2 > b^2 + c^2$; 3) $a^2 = b^2 + c^2$?
3. Як пов'язані між собою діагоналі та сторони паралелограма?

ВПРАВИ

3.1.° Знайдіть невідому сторону трикутника ABC, якщо:
1) $AB = 5$ см, $BC = 8$ см, $\angle B = 60°$;
2) $AB = 3$ см, $AC = 2\sqrt{2}$ см, $\angle A = 135°$.

3.2.° Знайдіть невідому сторону трикутника DEF, якщо:
1) $DE = 4$ см, $DF = 2\sqrt{3}$ см, $\angle D = 30°$;
2) $DF = 3$ см, $EF = 5$ см, $\angle F = 120°$.

3.3.° Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 20 см і 28 см. Знайдіть найбільший кут трикутника.

3.4.° Сторони трикутника дорівнюють $\sqrt{18}$ см, 5 см і 7 см. Знайдіть середній за величиною кут трикутника.

3.5.° Установіть, гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник, сторони якого дорівнюють:
1) 5 см, 7 см і 9 см;
2) 5 см, 12 см і 13 см;
3) 10 см, 15 см і 18 см.

3.6.° Сторони трикутника дорівнюють 7 см, 8 см і 12 см. Чи є даний трикутник гострокутним?

3.7.° Доведіть, що трикутник зі сторонами 8 см, 15 см і 17 см є прямокутним.

3.8.° Сторони паралелограма дорівнюють $2\sqrt{2}$ см і 5 см, а один із кутів дорівнює 45°. Знайдіть діагоналі паралелограма.

3.9.° У трапеції $ABCD$ відомо, що $BC \parallel AD$, $BC = 3$ см, $AD = 10$ см, $CD = 4$ см, $\angle D = 60°$. Знайдіть діагоналі трапеції.

3.10.° На стороні AB рівностороннього трикутника ABC позначено точку D так, що $AD : DB = 2 : 1$. Знайдіть відрізок CD, якщо $AB = 6$ см.

3.11.° На гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначено точку M так, що $AM : BM = 1 : 3$. Знайдіть відрізок CM, якщо $AC = BC = 4$ см.

3.12.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AC = 20$ см, $BC = 15$ см. На стороні AB позначено точку M так, що $BM = 4$ см. Знайдіть відрізок CM.

3.13.° На продовженні гіпотенузи AB прямокутного рівнобедреного трикутника ABC за точку B позначено точку D так, що $BD = BC$. Знайдіть відрізок CD, якщо катет трикутника ABC дорівнює a.

3.14.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AB = 13$ см, $AC = 12$ см. На продовженні гіпотенузи AB за точку B позначено точку D так, що $BD = 26$ см. Знайдіть відрізок CD.

3.15.° Центр кола, вписаного в прямокутний трикутник, знаходиться на відстанях a і b від кінців гіпотенузи. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

3.16.° Точка O — центр кола, вписаного в трикутник ABC, $BC = a$, $AC = b$, $\angle AOB = 120°$. Знайдіть сторону AB.

3.17.° Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює 60°, відносяться як 5 : 8, а третя сторона дорівнює 21 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

3.18.° Дві сторони трикутника відносяться як $1 : 2\sqrt{3}$ і утворюють кут, величина якого становить 30°. Третя сторона трикутника дорівнює $2\sqrt{7}$ см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

3.19.° Сума двох сторін трикутника, які утворюють кут величиною 120°, дорівнює 8 см, а довжина третьої сторони — 7 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника.

3.20.° Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює 120°, відносяться як 5 : 3. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 30 см.

3.21.° Дві сторони трикутника дорівнюють 16 см і 14 см, а кут, протилежний меншій із відомих сторін, дорівнює 60°. Знайдіть невідому сторону трикутника.

3.22.° Дві сторони трикутника дорівнюють 15 см і 35 см, а кут, протилежний більшій із відомих сторін, дорівнює 120°. Знайдіть периметр трикутника.

3.23.° Одна зі сторін трикутника у 2 рази більша за другу, а кут між цими сторонами становить 60°. Доведіть, що даний трикутник є прямокутним.

3.24.° Доведіть, що коли квадрат сторони трикутника дорівнює неповному квадрату суми двох інших сторін, то протилежний цій стороні кут дорівнює 120°.

3.25.° Доведіть, що коли квадрат сторони трикутника дорівнює неповному квадрату різниці двох інших сторін, то протилежний цій стороні кут дорівнює 60°.

3.26.° Дві сторони паралелограма дорівнюють 7 см і 11 см, а одна з діагоналей — 12 см. Знайдіть другу діагональ паралелограма.

3.27.° Діагоналі паралелограма дорівнюють 13 см і 11 см, а одна зі сторін — 9 см. Знайдіть периметр паралелограма.

3.28.° Діагоналі паралелограма дорівнюють 8 см і 14 см, а одна зі сторін на 2 см більша за другу. Знайдіть сторони паралелограма.

3.29.° Сторони паралелограма дорівнюють 11 см і 23 см, а його діагоналі відносяться як 2 : 3. Знайдіть діагоналі паралелограма.

3.30.° Сторони трикутника дорівнюють 16 см, 18 см і 26 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до його більшої сторони.

3.31.° Дві сторони трикутника дорівнюють 12 см і 14 см, а медіана, проведена до третьої сторони, — 7 см. Знайдіть невідому сторону трикутника.

3.32.• Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 4 см, а синус кута між ними дорівнює $\frac{\sqrt{35}}{6}$. Знайдіть третю сторону трикутника.

3.33.• На стороні BC трикутника ABC позначено точку D так, що $CD = 14$ см. Знайдіть відрізок AD, якщо $AB = 37$ см, $BC = 44$ см і $AC = 15$ см.

3.34.• На стороні AB трикутника ABC позначено точку K, а на продовженні сторони BC за точку C — точку M. Знайдіть відрізок MK, якщо $AB = 15$ см, $BC = 7$ см, $AC = 13$ см, $AK = 8$ см, $MC = 3$ см.

3.35.• У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, $\angle ABC = 120°$. На продовженні відрізка AB за точку B позначено точку D так, що $BD = 2AB$. Доведіть, що трикутник ACD рівнобедрений.

3.36.• Знайдіть діагональ AC чотирикутника $ABCD$, якщо навколо нього можна описати коло й $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 5$ см, $AD = 6$ см.

3.37.• Чи можна описати коло навколо чотирикутника $ABCD$, якщо $AB = 4$ см, $AD = 3$ см, $BD = 6$ см і $\angle C = 30°$?

3.38.• Доведіть, що проти більшого кута паралелограма лежить більша діагональ. Сформулюйте та доведіть обернене твердження.

3.39.• Доведіть, що трикутник зі сторонами $2mn$, $m^2 - n^2$, $m^2 + n^2$, де m і n — натуральні числа, причому $m > n$, є прямокутним.[1]

3.40.• Основа рівнобедреного трикутника дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а медіана, проведена до бічної сторони, — 5 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

[1] Надаючи числам m і n різних натуральних значень, можна отримати безліч трійок натуральних чисел таких, що квадрат одного з них дорівнює сумі квадратів двох інших. Такі трійки чисел називають **піфагоровими**.

3.41.• Доведіть, що в трикутнику ABC виконується рівність $\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$.

3.42.• Доведіть, що коли в трикутнику ABC виконується рівність $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$, то цей трикутник прямокутний.

3.43.• Доведіть, що коли в трикутнику ABC виконується рівність $a^2 + b^2 = 5c^2$, то медіани, проведені з вершин A і B, перпендикулярні.

3.44.•• Доведіть, що сума квадратів медіан трикутника не менша від квадрата його півпериметра.

3.45.•• Дано два кола, які мають спільний центр (такі кола називають концентричними). Доведіть, що сума квадратів відстаней від точки одного з кіл до кінців діаметра другого кола не залежить ні від вибраної точки, ні від вибраного діаметра.

3.46.•• Доведіть, що сума квадратів діагоналей чотирикутника у два рази більша за суму квадратів відрізків, які сполучають середини його протилежних сторін.

3.47.•• В опуклому чотирикутнику відрізки, які сполучають середини протилежних сторін, дорівнюють m і n, кут між ними дорівнює $60°$. Знайдіть діагоналі чотирикутника.

3.48.•• Діагоналі опуклого чотирикутника дорівнюють a і b, кут між ними дорівнює $45°$. Знайдіть відрізки, які сполучають середини протилежних сторін чотирикутника.

3.49.•• Відстань між серединами діагоналей трапеції дорівнює 5 см, а її бічні сторони дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть відстань між серединами основ.

3.50.•• У трапеції $ABCD$ відомо, що $AD \parallel BC$, $AB = 5$ см, $BC = 9$ см, $AD = 16$ см, $\cos A = \frac{1}{7}$. Знайдіть сторону CD трапеції.

3.51.•• У трапеції $ABCD$ відомо, що $AD \parallel BC$, $AB = \sqrt{15}$ см, $BC = 6$ см, $CD = 4$ см, $AD = 11$ см. Знайдіть косинус кута D трапеції.

3.52.•• У трапеції $ABCD$ відомо, що $AD \parallel BC$, $BC = 1$ см, $AD = 6$ см, $AC = 3$ см, $BD = 5$ см. Знайдіть кут AOD, де O — точка перетину діагоналей трапеції.

3.53.•• У трикутнику ABC проведено висоти AA_1 і CC_1. Відомо, що $A_1C_1 : AC = \frac{1}{2}$, $AB = c$, $BC = a$. Знайдіть сторону AC.

3.54.$^{\bullet\bullet}$ Із вершини D ромба $ABCD$ на сторону BC опущено висоту DE. Діагональ AC перетинає відрізок DE в точці F так, що $DF : FE = 5 : 1$. Знайдіть сторону ромба, якщо $AE = 35$ см.

3.55.$^{\bullet\bullet}$ В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, причому $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Доведіть, що діагоналі цього чотирикутника перпендикулярні.

3.56.$^{\bullet\bullet}$ У паралелограмі $ABCD$ діагоналі AC і BD перетинаються в точці O. Відомо, що $AB = a$, $BC = b$ $(a \geqslant b)$, $\angle BOC = \alpha$. Доведіть, що $\cos\alpha \geqslant \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.

3.57.$^{\bullet\bullet}$ На діаметрі кола радіуса R із центром O позначили точку M. Доведіть, що сума квадратів відстаней від точки M до кінців хорди, паралельної цьому діаметру, не залежить від вибору хорди.

3.58.$^{\bullet\bullet}$ Довжина кожної зі сторін опуклого чотирикутника не більша за 7 см. Доведіть, що для будь-якої точки чотирикутника знайдеться вершина, відстань від якої до цієї точки менша від 5 см.

3.59.* (Теорема Стюарта) На стороні BC трикутника ABC позначили точку D. Доведіть, що

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD - AD^2 \cdot BC = BC \cdot DC \cdot BD.$$

3.60.* Знайдіть найменше значення виразу $\sqrt{1 + x^2 - x} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}$.

3.61.* Доведіть, що $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}} \geqslant \sqrt{3}$.

3.62.* Доведіть, що для додатних чисел a, b і c виконується нерівність

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

3.63.* Чи існують такі три точки A, B і C, що для будь-якої точки X довжина хоча б одного з відрізків XA, XB, XC дорівнює ірраціональному числу?

4. Теорема синусів

Із другої ознаки рівності трикутників випливає, що сторона та два прилеглих до неї кути однозначно визначають трикутник. Отже, за вказаними елементами можна знайти дві інші сторони трикутника. Як це зробити, підказує така теорема.

Теорема 4.1 (теорема синусів). ***Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів.***

Лема. ***Хорда кола дорівнює добутку діаметра та синуса будь-якого вписаного кута, який спирається на цю хорду.***

Доведення. На рисунку 4.1 відрізок MN — хорда кола із центром у точці O. Проведемо діаметр MP. Тоді $\angle MNP = 90°$ як вписаний кут, що спирається на діаметр. Нехай величина вписаного кута MPN дорівнює α. Тоді з прямокутного трикутника MPN отримуємо:

$$MN = MP \sin \alpha. \qquad (1)$$

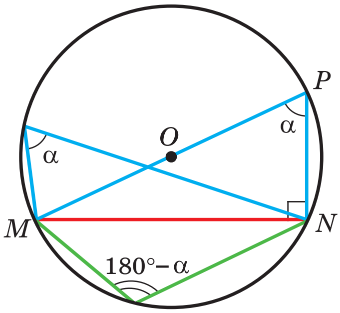


Рис. 4.1

Усі вписані кути, які спираються на хорду MN, дорівнюють α або $180° - \alpha$. Отже, їхні синуси рівні. Тому отримана рівність (1) справедлива для всіх вписаних кутів, які спираються на хорду MN. ◀

Тепер доведемо теорему синусів.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC відомо, що $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Доведемо, що

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Нехай радіус описаного кола трикутника ABC дорівнює R. Тоді з доведеної леми випливає, що $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$. Звідси

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R} \quad ◀$$

Наслідок. ***Радіус кола, описаного навколо трикутника, можна обчислити за формулою***

$$\boxed{R = \frac{a}{2 \sin \alpha},}$$

де** a **— довжина сторони трикутника,** α **— величина протилежного цій стороні кута.

Задача 1. У трикутнику ABC відомо, що $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle A = 30°$. Знайдіть кут B.

Розв'язання. За теоремою синусів $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$.

Тоді $\sin B = \frac{AC \sin A}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Оскільки $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Тоді кут B може бути як гострим, так і тупим. Звідси $\angle B = 45°$ або $\angle B = 180° - 45° = 135°$.

Відповідь: 45° або 135°. ◀

Задача 2. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC, $\angle ABC = 30°$, $\angle C = 105°$ (рис. 4.2). Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника BDC, дорівнює $8\sqrt{6}$ см.

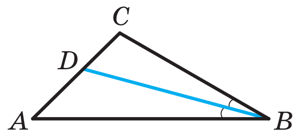


Рис. 4.2

Розв'язання. Нехай R_1 — радіус кола, описаного навколо трикутника BDC, $R_1 = 8\sqrt{6}$ см.

Оскільки відрізок BD — бісектриса трикутника, то $\angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 15°$.

Із трикутника BDC отримуємо:

$$\angle BDC = 180° - (\angle CBD + \angle C) = 180° - (15° + 105°) = 60°.$$

За наслідком з теореми синусів $\frac{BC}{2\sin\angle BDC} = R_1$. Звідси $BC = 2R_1 \sin\angle BDC = 2 \cdot 8\sqrt{6}\sin 60° = 24\sqrt{2}$ (см).

Із трикутника ABC отримуємо:

$$\angle A = 180° - (\angle ABC + \angle C) = 180° - (30° + 105°) = 45°.$$

Нехай R — шуканий радіус кола, описаного навколо трикутника ABC.

Тоді $\frac{BC}{2\sin A} = R$, звідси $R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{24\sqrt{2}}{2\sin 45°} = 24$ (см).

Відповідь: 24 см. ◀

Задача 3. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 21 см і 9 см, а висота — 8 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трапеції.

Розв'язання. Проведемо висоту BM рівнобічної трапеції $ABCD$ (рис. 4.3). Відомо, що

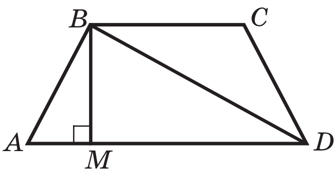


Рис. 4.3

$$AM = \frac{AD - BC}{2}, \quad MD = \frac{BC + AD}{2}.$$

Маємо: $AM = 6$ см, $MD = 15$ см.

Із трикутника ABM отримуємо: $AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см), $\sin A = \frac{BM}{AB} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

Із трикутника MBD отримуємо: $BD = \sqrt{BM^2 + MD^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ (см).

Коло, описане навколо трапеції $ABCD$, є також описаним колом трикутника ABD. Позначивши шуканий радіус R, маємо:

$BD = 2R \cdot \sin A$. Звідси $R = \dfrac{BD}{2\sin A} = \dfrac{17}{2 \cdot \frac{4}{5}} = \dfrac{85}{8}$ (см).

Відповідь: $\dfrac{85}{8}$ см. ◀

Задача 4. На найбільшій стороні AC трикутника ABC позначили точку X, відмінну від вершин A і C. Із точки X опущено перпендикуляри XM і XN на прямі AB і BC відповідно. Знайдіть таке положення точки X, при якому довжина відрізка MN буде найменшою.

Розв'язання. На рисунку 4.4 показано випадок, коли точки M і N лежать на сторонах трикутника, а на рисунку 4.5 — випадок, коли тільки одна точка, наприклад точка M, лежить на стороні трикутника.

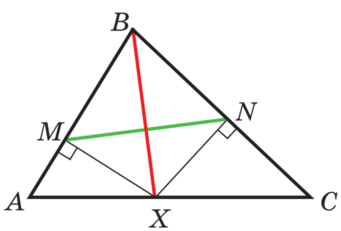


Рис. 4.4

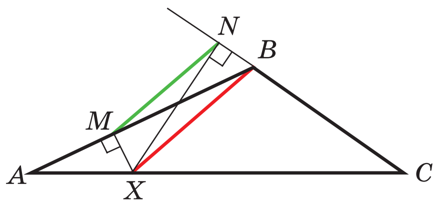


Рис. 4.5

Легко показати, що точки M, B, N, X лежать на одному колі з діаметром BX. Відрізок MN — хорда цього кола, на яку спирається кут MBN (рис. 4.4) або кут, суміжний із кутом MBN (рис. 4.5). Для кожного із цих випадків можна записати: $MN = BX \cdot \sin \angle MBN$. Отже, довжина відрізка MN набуває найменшого значення, якщо набуває найменшого значення довжина відрізка BX. А ця умова виконується тоді, коли точка X є основою висоти трикутника ABC, проведеної з вершини B. ◀

?

1. Як знайти хорду кола, якщо відомо діаметр кола та вписаний кут, який спирається на цю хорду?
2. Сформулюйте теорему синусів.
3. Як знайти радіус кола, описаного навколо трикутника зі стороною a та протилежним цій стороні кутом α?

ВПРАВИ

4.1° Знайдіть сторону BC трикутника ABC, зображеного на рисунку 4.6 (довжину відрізка дано в сантиметрах).

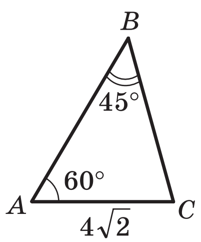


Рис. 4.6

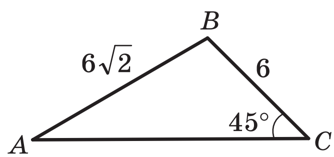


Рис. 4.7

4.2.° Знайдіть кут A трикутника ABC, зображеного на рисунку 4.7 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

4.3.° Знайдіть сторону AB трикутника ABC, якщо $AC = \sqrt{6}$ см, $\angle B = 120°$, $\angle C = 45°$.

4.4.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, $\sin A = 0{,}2$. Знайдіть синус кута C трикутника.

4.5.° У трикутнику ABC відомо, що $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Знайдіть сторони AB і AC.

4.6.° Діагональ паралелограма дорівнює d і утворює з його сторонами кути α і β. Знайдіть сторони паралелограма.

4.7.° Знайдіть кут A трикутника ABC, якщо:
1) $AC = 2$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 135°$;
2) $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle B = 45°$.
Скільки розв'язків у кожному з випадків має задача? Відповідь обґрунтуйте.

4.8.° Чи існує трикутник ABC такий, що $\sin A = 0{,}4$, $AC = 18$ см, $BC = 6$ см? Відповідь обґрунтуйте.

4.9.° На продовженні сторони AB трикутника ABC за точку B позначили точку D. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника ACD, якщо $\angle ABC = 60°$, $\angle ADC = 45°$, а радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює 4 см.

4.10.° Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює 6 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника AOC, де O — точка перетину бісектрис трикутника ABC, якщо $\angle ABC = 60°$.

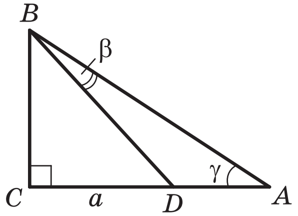


Рис. 4.8

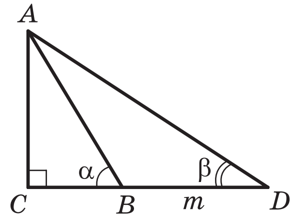


Рис. 4.9

4.11.° Використовуючи дані рисунка 4.8, знайдіть відрізок AD, якщо $CD = a$.

4.12.° Використовуючи дані рисунка 4.9, знайдіть відрізок AC, якщо $BD = m$.

4.13.° На стороні AB трикутника ABC позначили точку M так, що $\angle AMC = \varphi$. Знайдіть відрізок CM, якщо $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle ACB = \gamma$.

4.14.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. На стороні BC позначили точку D так, що $\angle ADB = \varphi$, $AD = m$. Знайдіть сторону BC.

4.15.• Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$, де A, B і C — кути даного трикутника ABC.

4.16.• Доведіть, користуючись теоремою синусів, що бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, довжини яких пропорційні прилеглим сторонам[1].

4.17.• Доведіть, що бісектриса трикутника ділить його сторону на відрізки, довжини яких обернено пропорційні синусам прилеглих до цієї сторони кутів.

[1] Нагадаємо, що це твердження з використанням теореми про пропорційні відрізки було доведено в підручнику: А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закладів. — Х. : Гімназія, 2016. Далі посилатимемося на цей підручник так: «Геометрія, 8 клас».

4.18.$^{\bullet}$ Для сторін і кутів трикутника ABC виконується рівність $\frac{BC}{\cos A} = \frac{AC}{\cos B}$. Доведіть, що $AC = BC$.

4.19.$^{\bullet}$ Дві сторони трикутника дорівнюють 6 см і 12 см, а висота, проведена до третьої сторони, — 4 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даного трикутника.

4.20.$^{\bullet}$ Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника з основою 16 см і бічною стороною 10 см.

4.21.$^{\bullet}$ Сторона трикутника дорівнює 24 см, а радіус описаного кола — $8\sqrt{3}$ см. Чому дорівнює кут трикутника, протилежний даній стороні?

4.22.$^{\bullet}$ У трикутнику ABC відомо, що $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$. Знайдіть бісектрису BD трикутника.

4.23.$^{\bullet}$ Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, протилежний їй кут дорівнює α. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини кута при основі.

4.24.$^{\bullet}$ Відрізок CD — бісектриса трикутника ABC, у якому $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Через точку D проведено пряму, паралельну стороні BC. Ця пряма перетинає сторону AC у точці E, причому $AE = a$. Знайдіть відрізок CE.

4.25.$^{\bullet}$ Медіана AM трикутника ABC дорівнює m і утворює зі сторонами AB і AC кути α і β відповідно. Знайдіть сторони AB і AC.

4.26.$^{\bullet}$ Медіана CD трикутника ABC утворює зі сторонами AC і BC кути α і β відповідно, $BC = a$. Знайдіть медіану CD.

4.27.$^{\bullet}$ У прямокутному трикутнику ABC через вершини A і C та середину M гіпотенузи AB проведено коло радіуса R. Знайдіть радіус описаного кола трикутника CMB, якщо $\angle A = \alpha$.

4.28.$^{\bullet}$ Точка H — ортоцентр непрямокутного трикутника ABC. Доведіть, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників AHB, BHC, AHC і ABC, рівні.

4.29.$^{\bullet}$ Центр вписаного кола рівнобедреного трикутника ділить висоту, проведену до основи, на відрізки завдовжки 5 см і 3 см, рахуючи від вершини. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даного трикутника.

4.30.$^{\bullet\bullet}$ Діагоналі описаного чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Радіуси описаних кіл трикутників AOB, BOC, COD і DOA відповідно дорівнюють R_1, R_2, R_3 і R_4. Доведіть, що $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$.

4.31.•• На стороні AB трикутника ABC позначили точки M і N. Відомо, що радіуси описаних кіл трикутників ANC і BMC рівні. Крім того, радіуси описаних кіл трикутників AMC і BNC також рівні. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

4.32.•• У колі проведено три хорди: $MN = 1$ см, $MP = 6$ см, $MQ = 2$ см. Відомо, що $\angle NMP = \angle PMQ$. Знайдіть радіус кола.

4.33.•• Із точки M, що належить куту, на його сторони AB і AC опустили перпендикуляри, які дорівнюють $\sqrt{7}$ см і $2\sqrt{7}$ см. Знайдіть відрізок MA, якщо $\angle A = 60°$.

4.34.•• Дано дві прямі, які перетинаються та кут між якими дорівнює α. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що відстань між основами перпендикулярів, опущених із точки X на дані прямі, дорівнює a.

4.35.•• Із точки M кола на його діаметри AB і CD опустили перпендикуляри. Доведіть, що відстань між основами перпендикулярів не залежить від вибору точки M.

4.36.•• Навколо трикутника ABC описано коло. З довільної точки M кола опущено перпендикуляри MN і MK на прямі AB і AC відповідно. Для якої точки M довжина відрізка NK буде найбільшою?

4.37.•• Бісектриси трикутника ABC перетинаються в точці O. Пряма AO вдруге перетинає описане коло трикутника BOC у точці M. Знайдіть відрізок OM, якщо $BC = 3$ см, $\angle BAC = 120°$.

4.38.•• Точка J — центр вписаного кола трикутника ABC. Пряма AJ вдруге перетинає описане коло трикутника ABC у точці D. Знайдіть відрізок DJ, якщо $BC = 6$ см, а радіус описаного кола дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

4.39.•• У трикутнику ABC на стороні AB існує така точка D, що $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$. Доведіть, що кут C тупий.

4.40.•• На діагоналі BD квадрата $ABCD$ позначили точку E. Точки O_1 і O_2 — центри описаних кіл трикутників ABE і ADE відповідно. Доведіть, що чотирикутник AO_1EO_2 — квадрат.

4.41.* Діагоналі вписаного чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці K. Відомо, що $AB = a$, $CD = b$, $\angle BKA = \alpha$. Знайдіть радіус кола, описаного навколо даного чотирикутника.

4.42.* У коло вписано чотирикутник $ABCD$ (рис. 4.10). Прямі AB і CD перетинаються в точці M, а прямі BC і AD — у точці N. Відомо, що $BM = DN$. Доведіть, що $CM = CN$.

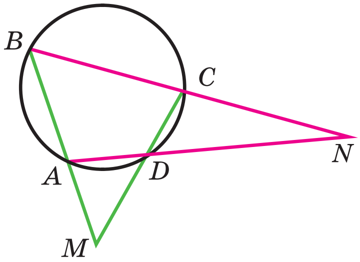


Рис. 4.10

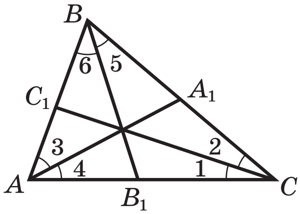


Рис. 4.11

ТРИГОНОМЕТРИЧНА ФОРМА ТЕОРЕМИ ЧЕВИ

У 8 класі ви вивчали теорему Чеви. Нагадаємо її.

Теорема Чеви. ***Для того щоб чевіани AA_1, BB_1 і CC_1 трикутника ABC перетиналися в одній точці*** (рис. 4.11), ***необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність***

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1. \qquad (*)$$

Теорема синусів дає змогу записати критерій конкурентності прямих AA_1, BB_1 і CC_1 в іншій формі.

Позначимо кути, утворені чевіанами AA_1, BB_1 і CC_1 зі сторонами трикутника ABC, так, як показано на рисунку 4.11.

Із трикутника AC_1C отримуємо: $\dfrac{AC_1}{CC_1} = \dfrac{\sin\angle 1}{\sin\angle C_1AC}$.

Із трикутника BC_1C отримуємо: $\dfrac{CC_1}{C_1B} = \dfrac{\sin\angle C_1BC}{\sin\angle 2}$.

Звідси

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{\sin\angle 1}{\sin\angle C_1AC} \cdot \frac{\sin\angle C_1BC}{\sin\angle 2}. \qquad (1)$$

Аналогічно можна показати, що

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{\sin\angle 3}{\sin\angle C_1BC} \cdot \frac{\sin\angle A_1CA}{\sin\angle 4}, \qquad (2)$$

$$\frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\sin\angle 5}{\sin\angle A_1CA} \cdot \frac{\sin\angle C_1AC}{\sin\angle 6}. \qquad (3)$$

Перемноживши рівності (1), (2) і (3), отримаємо:

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{\sin\angle 1 \cdot \sin\angle 3 \cdot \sin\angle 5}{\sin\angle 2 \cdot \sin\angle 4 \cdot \sin\angle 6}.$$

Тоді необхідну і достатню умову конкурентності чевіан AA_1, BB_1 і CC_1 можна виразити такою рівністю:

$$\frac{\sin\angle 1\cdot\sin\angle 3\cdot\sin\angle 5}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 6}=1.$$ ◀

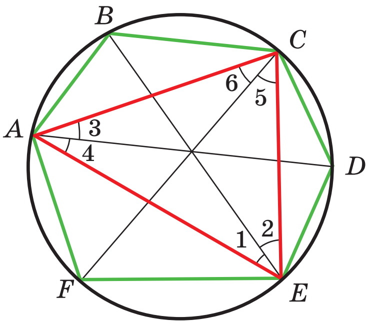


Рис. 4.12

Задача. Шестикутник $ABCDEF$ вписано в коло. Доведіть, що діагоналі AD, BE і CF перетинаються в одній точці тоді й тільки тоді, коли $AB\cdot CD\cdot EF = BC\cdot DE\cdot FA$.

Розв'язання. Розглянемо трикутник ACE. Введемо позначення кутів так, як показано на рисунку 4.12. Нехай радіус кола дорівнює R. Тоді:

$$AB = 2R\sin\angle 1;$$
$$BC = 2R\sin\angle 2;$$
$$CD = 2R\sin\angle 3;$$
$$DE = 2R\sin\angle 4;$$
$$EF = 2R\sin\angle 5;$$
$$FA = 2R\sin\angle 6.$$

Звідси $\dfrac{\sin\angle 1\cdot\sin\angle 3\cdot\sin\angle 5}{\sin\angle 2\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 6}=\dfrac{AB\cdot CD\cdot EF}{BC\cdot DE\cdot FA}$.

Діагоналі AD, BE і CF є конкурентними тоді й тільки тоді, коли ліва частина записаної рівності дорівнює 1. Звідси випливає справедливість твердження, що доводиться. ◀

ВПРАВИ

1. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC позначили відповідно точки C_1, A_1 і B_1 так, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 конкурентні. Доведіть, що прямі AA_2, BB_2 і CC_2, симетричні прямим AA_1, BB_1 і CC_1 відносно бісектрис кутів A, B і C відповідно, також конкурентні.

2. На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC позначили відповідно точки C_1, A_1 і B_1 так, що прямі AA_1, BB_1 і CC_1 конкурентні (рис. 4.13). На сторонах A_1B_1, B_1C_1 і C_1A_1 трикутника $A_1B_1C_1$ позначили відповідно точки C_2, A_2 і B_2 так, що прямі A_1A_2, B_1B_2 і C_1C_2 конкурентні. Доведіть, що прямі AA_2, BB_2 і CC_2 також конкурентні.

Вказівка. Доведіть, що $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\dfrac{AB_1\cdot C_1A_2}{A_2B_1\cdot AC_1}$.

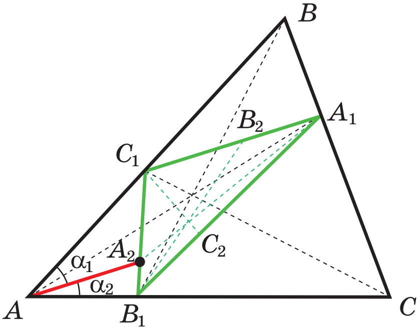


Рис. 4.13

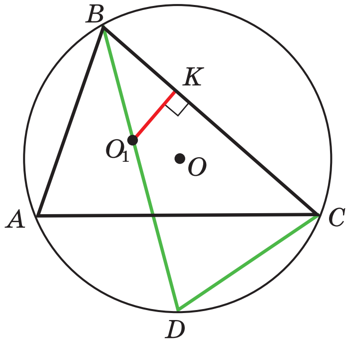


Рис. 4.14

ФОРМУЛА ЕЙЛЕРА ДЛЯ ЗНАХОДЖЕННЯ ВІДСТАНІ МІЖ ЦЕНТРАМИ ВПИСАНОГО Й ОПИСАНОГО КІЛ ТРИКУТНИКА

Теорема. ***Відстань d між центрами вписаного й описаного кіл трикутника обчислюється за формулою***

$$\boxed{d=\sqrt{R^2-2Rr},}$$

де r і R — відповідно радіуси його вписаного й описаного кіл.

Доведення. Нехай точки O_1 і O — центри вписаного й описаного кіл трикутника ABC відповідно (рис. 4.14). Бісектриса кута B перетинає описане коло в точці D. Згідно з ключовою задачею 18.25 підручника «Геометрія, 8 клас»:

$$BO_1 \cdot O_1D = R^2 - O_1O^2 = R^2 - d^2. \qquad (*)$$

Нехай вписане коло дотикається до сторони BC у точці K. Тоді з трикутника O_1BK отримуємо: $BO_1 = \dfrac{O_1K}{\sin\angle DBC} = \dfrac{r}{\sin\angle DBC}$.

За лемою п. 4 маємо: $DC = 2R\sin\angle DBC$. Згідно з ключовою задачею 11.25 підручника «Геометрія, 8 клас» $O_1D = DC = 2R\sin\angle DBC$. Отримані результати підставимо у формулу (*):

$$\frac{r}{\sin\angle DBC}\cdot 2R\sin\angle DBC = R^2-d^2. \text{ Звідси } d^2 = R^2 - 2Rr. \blacktriangleleft$$

Оскільки $d^2 = R^2 - 2Rr$, то $R^2-2Rr \geqslant 0$. Звідси отримуємо, що для будь-якого трикутника виконується нерівність

$$R \geqslant 2r.$$

У цій нерівності рівність досягається тоді й тільки тоді, коли центри вписаного й описаного кіл трикутника збігаються. Така властивість притаманна лише рівносторонньому трикутнику.

5. Розв'язування трикутників

Розв'язати трикутник означає знайти невідомі його сторони та кути за відомими сторонами та кутами[1].

У 8 класі ви навчилися розв'язувати прямокутні трикутники. Теореми косинусів і синусів дають змогу розв'язати будь-який трикутник.

У наступних задачах значення тригонометричних функцій будемо знаходити за допомогою калькулятора й округлювати ці значення до сотих. Величини кутів будемо знаходити за допомогою калькулятора й округлювати ці значення до одиниць. Обчислюючи довжини сторін, результат будемо округлювати до десятих.

Задача 1. Розв'яжіть трикутник (рис. 5.1) за стороною $a = 12$ см і двома кутами $\beta = 36°$, $\gamma = 119°$.

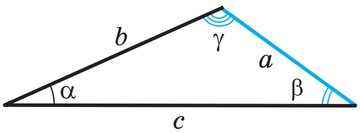


Рис. 5.1

Розв'язання. Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо: $\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 155° = 25°$.

За теоремою синусів $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Звідси $b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Маємо: $b = \dfrac{12\sin 36°}{\sin 25°} \approx \dfrac{12\cdot 0{,}59}{0{,}42} \approx 16{,}9$ (см).

Знову застосовуючи теорему синусів, запишемо: $\dfrac{c}{\sin\gamma} = \dfrac{a}{\sin\alpha}$.

Звідси $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.

Маємо: $c = \dfrac{12\sin 119°}{\sin 25°} = \dfrac{12\sin 61°}{\sin 25°} \approx \dfrac{12\cdot 0{,}87}{0{,}42} \approx 24{,}9$ (см).

Відповідь: $b \approx 16{,}9$ см, $c \approx 24{,}9$ см, $\alpha = 25°$. ◄

Задача 2. Розв'яжіть трикутник за двома сторонами $a = 14$ см, $b = 8$ см і кутом $\gamma = 38°$ між ними.

Розв'язання. За теоремою косинусів $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Звідси $c^2 = 196 + 64 - 2\cdot 14\cdot 8\cos 38° \approx 260 - 224\cdot 0{,}79 = 83{,}04$; $c \approx 9{,}1$ см.

[1] У задачах цього пункту та вправах 5.1–5.9 прийнято позначення: a, b і c — довжини сторін трикутника, α, β і γ — величини кутів, протилежних відповідно сторонам з довжинами a, b і c.

Далі маємо:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha;$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\quad \cos\alpha \approx \frac{8^2 + 9{,}1^2 - 14^2}{2 \cdot 8 \cdot 9{,}1} \approx -0{,}34.$$

Звідси $\alpha \approx 110°$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо:

$$\beta = 180° - (\alpha + \gamma);\ \beta \approx 180° - 148° = 32°.$$

Відповідь: $c \approx 9{,}1$ см, $\alpha \approx 110°$, $\beta \approx 32°$. ◄

Задача 3. Розв'яжіть трикутник за трьома сторонами $a = 7$ см, $b = 2$ см, $c = 8$ см.

Розв'язання. За теоремою косинусів $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Звідси

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\quad \cos\alpha = \frac{4 + 64 - 49}{2 \cdot 2 \cdot 8} \approx 0{,}59.$$ Отримуємо: $\alpha \approx 54°$.

За теоремою синусів $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$.

Звідси $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a};\ \sin\beta \approx \frac{2\sin 54°}{7} \approx \frac{2 \cdot 0{,}81}{7} \approx 0{,}23.$

Оскільки b — довжина найменшої сторони даного трикутника, то кут β є гострим. Тоді знаходимо, що $\beta \approx 13°$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta);\ \gamma \approx 180° - 67° = 113°$.

Відповідь: $\alpha \approx 54°$, $\beta \approx 13°$, $\gamma \approx 113°$. ◄

Задача 4. Розв'яжіть трикутник за двома сторонами та кутом, протилежним одній зі сторін: 1) $a = 17$ см, $b = 6$ см, $\alpha = 156°$; 2) $b = 7$ см, $c = 8$ см, $\beta = 65°$; 3) $a = 6$ см, $b = 5$ см, $\beta = 50°$.

Розв'язання. 1) За теоремою синусів $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$. Звідси

$$\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a};\quad \sin\beta = \frac{6\sin 156°}{17} = \frac{6\sin 24°}{17} \approx \frac{6 \cdot 0{,}41}{17} \approx 0{,}14.$$

Оскільки кут α даного трикутника тупий, то кут β є гострим. Тоді знаходимо, що $\beta \approx 8°$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо: $\gamma = 180° - (\alpha + \beta);\ \gamma \approx 16°$.

За теоремою синусів $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

Звідси $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha};\ c \approx \frac{17\sin 16°}{\sin 156°} \approx \frac{17 \cdot 0{,}28}{0{,}41} \approx 11{,}6$ (см).

Відповідь: $\beta \approx 8°$, $\gamma \approx 16°$, $c \approx 11{,}6$ см.

2) За теоремою синусів $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

Звідси $\sin\gamma = \dfrac{c\sin\beta}{b}$; $\sin\gamma = \dfrac{8\sin 65^\circ}{7} \approx \dfrac{8 \cdot 0{,}91}{7} = 1{,}04 > 1$, що неможливо.

Відповідь: задача не має розв'язку.

3) За теоремою синусів $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$.

Звідси $\sin\alpha = \dfrac{a\sin\beta}{b}$; $\sin\alpha = \dfrac{6\sin 50^\circ}{5} \approx \dfrac{6 \cdot 0{,}77}{5} \approx 0{,}92$.

Можливі два випадки: $\alpha \approx 67^\circ$ або $\alpha \approx 180^\circ - 67^\circ = 113^\circ$.

Розглянемо випадок, коли $\alpha \approx 67^\circ$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$; $\gamma \approx 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ$.

За теоремою синусів $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

Звідси $c = \dfrac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$; $c \approx \dfrac{5\sin 63^\circ}{\sin 50^\circ} \approx \dfrac{5 \cdot 0{,}89}{0{,}77} \approx 5{,}8$ (см).

Розглянемо випадок, коли $\alpha \approx 113^\circ$.

Використовуючи теорему про суму кутів трикутника, отримуємо: $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$; $\gamma \approx 180^\circ - 163^\circ = 17^\circ$.

Оскільки $c = \dfrac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$, то $c \approx \dfrac{5\sin 17^\circ}{\sin 50^\circ} \approx \dfrac{5 \cdot 0{,}29}{0{,}77} \approx 1{,}9$ (см).

Відповідь: $\alpha \approx 67^\circ$, $\gamma \approx 63^\circ$, $c \approx 5{,}8$ см або $\alpha \approx 113^\circ$, $\gamma \approx 17^\circ$, $c \approx 1{,}9$ см. ◄

Що означає розв'язати трикутник?

ВПРАВИ

5.1.° Розв'яжіть трикутник за стороною та двома кутами:

1) $a = 10$ см, $\beta = 20^\circ$, $\gamma = 85^\circ$;

2) $b = 16$ см, $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 110^\circ$.

5.2.° Розв'яжіть трикутник за стороною та двома кутами:

1) $b = 9$ см, $\alpha = 35^\circ$, $\gamma = 70^\circ$;

2) $c = 14$ см, $\beta = 132^\circ$, $\gamma = 24^\circ$.

5.3.° Розв'яжіть трикутник за двома сторонами та кутом між ними:
1) $b = 18$ см, $c = 22$ см, $\alpha = 76°$;
2) $a = 20$ см, $b = 15$ см, $\gamma = 104°$.

5.4.° Розв'яжіть трикутник за двома сторонами та кутом між ними:
1) $a = 8$ см, $c = 6$ см, $\beta = 15°$;
2) $b = 7$ см, $c = 5$ см, $\alpha = 145°$.

5.5.° Розв'яжіть трикутник за трьома сторонами:
1) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 7$ см;
2) $a = 26$ см, $b = 19$ см, $c = 42$ см.

5.6.° Розв'яжіть трикутник за трьома сторонами:
1) $a = 5$ см, $b = 6$ см, $c = 8$ см;
2) $a = 21$ см, $b = 17$ см, $c = 32$ см.

5.7.° Розв'яжіть трикутник, у якому:
1) $a = 10$ см, $b = 3$ см, $\beta = 10°$, кут α гострий;
2) $a = 10$ см, $b = 3$ см, $\beta = 10°$, кут α тупий.

5.8.° Розв'яжіть трикутник за двома сторонами та кутом, який лежить проти однієї з даних сторін:
1) $a = 7$ см, $b = 11$ см, $\beta = 46°$;
2) $b = 15$ см, $c = 17$ см, $\beta = 32°$;
3) $a = 7$ см, $c = 3$ см, $\gamma = 27°$.

5.9.° Розв'яжіть трикутник за двома сторонами та кутом, який лежить проти однієї з даних сторін:
1) $a = 23$ см, $c = 30$ см, $\gamma = 102°$;
2) $a = 18$ см, $b = 25$ см, $\alpha = 36°$.

5.10.° У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 20$ см, $\angle A = 70°$. Знайдіть:
1) сторону AC;
2) медіану CM;
3) бісектрису AD;
4) радіус описаного кола трикутника ABC.

5.11.° Діагональ AC рівнобічної трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) дорівнює 8 см, $\angle CAD = 38°$, $\angle BAD = 72°$. Знайдіть:
1) сторони трапеції;
2) радіус описаного кола трикутника ABC.

5.12.° Основи трапеції дорівнюють 12 см і 16 см, а бічні сторони — 7 см і 9 см. Знайдіть кути трапеції.

ТРИГОНОМЕТРІЯ — НАУКА ПРО ВИМІРЮВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

Ви знаєте, що стародавні мандрівники орієнтувалися за зорями та планетами. Вони могли досить точно визначити місцезнаходження корабля в океані або каравану в пустелі за розташуванням світил на небосхилі. При цьому одним з орієнтирів була висота, на яку піднімалося над горизонтом те або інше небесне світило в даній місцевості в певний момент часу.

Зрозуміло, що безпосередньо виміряти цю висоту неможливо. Тому вчені стали розробляти методи непрямих вимірювань. Тут істотну роль відігравало розв’язування трикутника, дві вершини якого лежали на поверхні Землі, а третя була зорею (рис. 5.2), — відома вам задача 4.12.

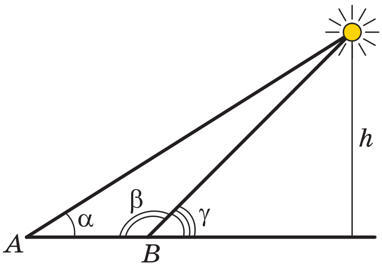


Рис. 5.2

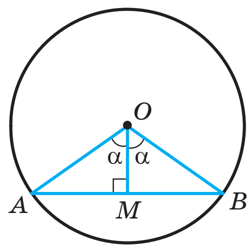


Рис. 5.3

Для розв’язування подібних задач стародавнім астрономам потрібно було навчитися знаходити взаємозв’язки між елементами трикутника. Так виникла **тригонометрія** — наука, яка вивчає залежність між сторонами та кутами трикутника. Термін «тригонометрія» (від грецьких слів «тригонон» — трикутник і «метрео» — вимірювати) означає «вимірювання трикутників».

На рисунку 5.3 зображено центральний кут AOB, який дорівнює 2α. Із прямокутного трикутника OMB маємо: $MB = OB \sin \alpha$. Отже, якщо в одиничному колі виміряти половини довжин хорд, на які спираються центральні кути з величинами $2°$, $4°$, $6°$, ..., $180°$, то таким чином ми обчислимо значення синусів кутів $1°$, $2°$, $3°$, ..., $90°$ відповідно.

Вимірюючи довжини півхорд, давньогрецький астроном Гіппарх (II ст. до н. е.) склав перші тригонометричні таблиці.

Поняття синуса й косинуса з'являються в тригонометричних трактатах індійських учених у IV–V ст. н. е. У X ст. арабські вчені оперували поняттям тангенса, яке виникло з потреб гномоніки — учення про сонячний годинник (рис. 5.4).

Рис. 5.4

У Європі першою роботою, у якій тригонометрія розглядалася як окрема наука, був трактат «П'ять книг про трикутники всіх видів», уперше надрукований у 1533 р. Його автором був німецький учений Реґіомонтан (1436–1476). Цей же вчений відкрив і теорему тангенсів:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}},\qquad \frac{b-c}{b+c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}},\qquad \frac{c-a}{c+a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}},$$

де a, b і c — довжини сторін трикутника, α, β і γ — величини кутів трикутника, протилежних відповідно сторонам з довжинами a, b і c.

Сучасного вигляду тригонометрія набула в роботах великого математика Леонарда Ейлера.

Леонард Ейлер

(1707–1783)

Видатний математик, фізик, механік і астроном, автор понад 860 наукових праць, член Петербурзької, Берлінської, Паризької академій наук, Лондонського королівського товариства, багатьох інших академій та наукових товариств. Ім'я Ейлера зустрічається майже в усіх областях математики: теореми Ейлера, тотожності Ейлера, кути, функції, інтеграли, формули, рівняння, підстановки тощо.

6. Формули для знаходження площі трикутника

Із курсу геометрії 8 класу ви знаєте, що площу S трикутника зі сторонами a, b і c та висотами h_a, h_b і h_c можна обчислити за формулами

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c.$$

Тепер у нас з'явилася можливість отримати ще кілька формул для знаходження площі трикутника.

Теорема 6.1. ***Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін і синуса кута між ними.***

Доведення. Розглянемо трикутник ABC, площа якого дорівнює S, такий, що $BC = a$, $AC = b$ і $\angle C = \gamma$. Доведемо, що

$$\boxed{S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma}$$

Можливі три випадки:
1) кут γ гострий (рис. 6.1);
2) кут γ тупий (рис. 6.2);
3) кут γ прямий.

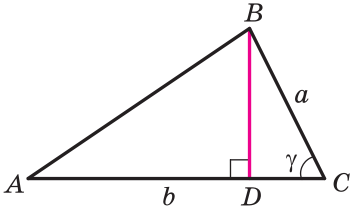


Рис. 6.1

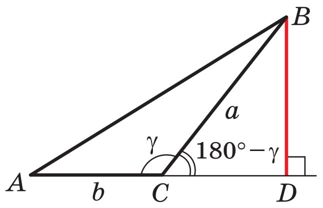


Рис. 6.2

На рисунках 6.1 і 6.2 проведемо висоту BD трикутника ABC. Тоді $S = \frac{1}{2}BD \cdot AC = \frac{1}{2}BD \cdot b$.

Із прямокутного трикутника BDC у першому випадку (див. рис. 6.1) отримуємо: $BD = a\sin\gamma$, а в другому (див. рис. 6.2): $BD = a\sin(180° - \gamma) = a\sin\gamma$. Звідси для двох перших випадків маємо: $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Якщо кут C прямий, то $\sin\gamma = 1$. Для прямокутного трикутника ABC із катетами a і b маємо:

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ab\sin 90^\circ = \frac{1}{2}ab\sin\gamma. \blacktriangleleft$$

Теорема 6.2 (формула Герона[1]). ***Площу S трикутника зі сторонами a, b і c можна обчислити за формулою***

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},}$$

де p — його півпериметр.

Доведення. Розглянемо трикутник ABC, площа якого дорівнює S, такий, що $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Доведемо, що

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Нехай $\angle C = \gamma$. Запишемо формулу площі трикутника:

$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$. Звідси $S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\sin^2\gamma$.

За теоремою косинусів $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Тоді $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

Оскільки $\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma = (1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)$, то:

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot \left(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}a^2b^2 \cdot \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{1}{16}(c^2 - (a-b)^2)((a+b)^2 - c^2) =$$

$$= \frac{c-a+b}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{(a+b+c)-2a}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2b}{2} \cdot \frac{(a+b+c)-2c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} =$$

$$= \frac{2p-2a}{2} \cdot \frac{2p-2b}{2} \cdot \frac{2p-2c}{2} \cdot \frac{2p}{2} = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Звідси $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. ◀

---

[1] Герон Александрійський — давньогрецький учений, який жив у I ст. н. е. Його математичні праці є енциклопедією прикладної математики.

Теорема 6.3. ***Площу S трикутника зі сторонами a, b і c можна обчислити за формулою***

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R},}$$

де R — радіус кола, описаного навколо трикутника.

Доведення. Розглянемо трикутник ABC, площа якого дорівнює S, такий, що $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Доведемо, що $S = \frac{abc}{4R}$, де R — радіус описаного кола трикутника.

Нехай $\angle A = \alpha$. Запишемо формулу площі трикутника:

$$S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha.$$

Із леми п. 4 випливає, що $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$.

Тоді $S = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} = \frac{abc}{4R}$. ◀

Зауважимо, що доведена теорема дає змогу знаходити радіус описаного кола трикутника за формулою

$$\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

Теорема 6.4. ***Площа трикутника дорівнює добутку його півпериметра та радіуса вписаного кола.***

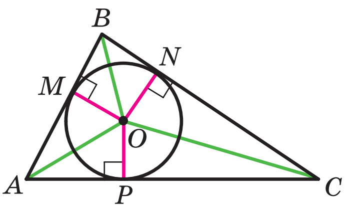


Рис. 6.3

Доведення. На рисунку 6.3 зображено трикутник ABC, у який вписано коло радіуса r. Доведемо, що

$$\boxed{S = pr,}$$

де S — площа даного трикутника, p — його півпериметр.

Нехай точка O — центр вписаного кола, яке дотикається до сторін трикутника ABC у точках M, N і P. Площа трикутника ABC дорівнює сумі площ трикутників AOB, BOC і COA:

$$S = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA}.$$

Проведемо радіуси в точки дотику. Отримуємо: $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp CA$. Звідси:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}OM \cdot AB = \frac{1}{2}r \cdot AB;$$

$$S_{BOC} = \frac{1}{2}ON \cdot BC = \frac{1}{2}r \cdot BC;$$

$$S_{COA} = \frac{1}{2}OP \cdot AC = \frac{1}{2}r \cdot AC.$$

Отже, $S = \frac{1}{2}r \cdot AB + \frac{1}{2}r \cdot BC + \frac{1}{2}r \cdot AC = r \cdot \frac{AB + BC + AC}{2} = pr.$ ◀

Теорему 6.4 узагальнює така теорема.

Теорема 6.5. ***Площа описаного многокутника дорівнює добутку його півпериметра та радіуса вписаного кола.***

Доведіть цю теорему самостійно (рис. 6.4).

Зауважимо, що теорема 6.5 дає змогу знаходити радіус вписаного кола многокутника за формулою

$$\boxed{r = \frac{S}{p}}$$

Теорема 6.6. ***Площу S паралелограма можна обчислити за формулою***

$$\boxed{S = ab \sin \alpha,}$$

де a і b — довжини сусідніх сторін паралелограма, α — кут між ними.

Доведення. Розглянемо паралелограм $ABCD$, у якому $AB = a$, $AD = b$, $\angle BAD = \alpha$ (рис. 6.5). Проведемо діагональ BD. Оскільки $\Delta ABD = \Delta CBD$, то запишемо:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2}ab \sin \alpha = ab \sin \alpha.$$ ◀

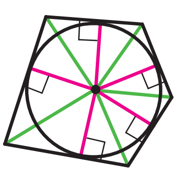


Рис. 6.4

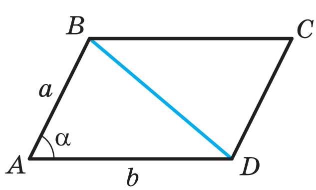


Рис. 6.5

Теорема 6.7. ***Площа опуклого чотирикутника дорівнює половині добутку його діагоналей і синуса кута між ними.***

Доведення. Через вершини A, B, C і D чотирикутника $ABCD$ проведемо прямі, паралельні його діагоналям AC і BD (рис. 6.6). Отримаємо паралелограм $MNPQ$, у якому $\angle M = \varphi$, $MN = AC$, $MQ = BD$. Площа цього паралелограма вдвічі більша за площу чотирикутника $ABCD$ (доведіть це самостійно). Звідси

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}S_{MNPQ} = \frac{1}{2}MN \cdot MQ \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\varphi. ◄$$

Задача 1. Доведіть, що площу S трикутника ABC можна обчислити за формулою

$$\boxed{S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,}$$

де R — радіус описаного кола трикутника ABC.

Розв'язання. Нехай $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$. Маємо: $S = \frac{abc}{4R}$ і $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$.

Звідси $S = \frac{2R\sin A \cdot 2R\sin B \cdot 2R\sin C}{4R} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$ ◄

Задача 2. Доведіть, що $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$.

Розв'язання. Розглянемо рівнобедрений трикутник із кутом 2α при вершині та бічними сторонами, які дорівнюють 1 (рис. 6.7).

Маємо: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2}\sin 2\alpha.$

Також можна записати: $S_{ABC} = \frac{1}{2}BD \cdot AC = BD \cdot AD = \cos\alpha \sin\alpha.$

Тоді $\frac{1}{2}\sin 2\alpha = \cos\alpha \sin\alpha$, тобто $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$. ◄

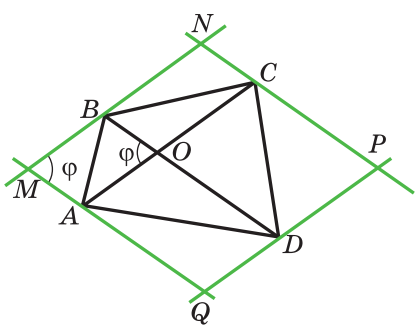


Рис. 6.6

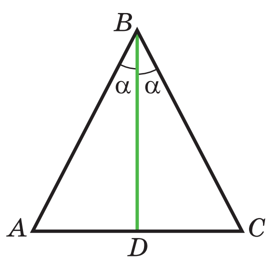


Рис. 6.7

Задача 3. Сторони трикутника дорівнюють 17 см, 65 см і 80 см. Знайдіть найменшу висоту трикутника, радіуси його вписаного й описаного кіл.

Розв'язання. Нехай $a = 17$ см, $b = 65$ см, $c = 80$ см.

Знайдемо півпериметр трикутника: $p = \frac{17+65+80}{2} = 81$ (см).

Площу трикутника обчислимо за формулою Герона:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{81(81-17)(81-65)(81-80)} =$$
$$= \sqrt{81 \cdot 64 \cdot 16} = 9 \cdot 8 \cdot 4 = 288 \text{ (см}^2\text{)}.$$

Найменшою висотою трикутника є висота, проведена до його найбільшої сторони, довжина якої дорівнює c.

Оскільки $S = \frac{1}{2}ch_c$, то $h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 288}{80} = 7{,}2$ (см).

Радіус вписаного кола $r = \frac{S}{p} = \frac{288}{81} = \frac{32}{9}$ (см).

Радіус описаного кола $R = \frac{abc}{4S} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 80}{4 \cdot 288} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 5}{4 \cdot 18} = \frac{5525}{72}$ (см).

Відповідь: 7,2 см, $\frac{32}{9}$ см, $\frac{5525}{72}$ см. ◄

Задача 4. Із точки M, яка належить куту AOB, опущено перпендикуляри MM_1 і MM_2 на сторони OA і OB відповідно (рис. 6.8). Доведіть, що $S_{OM_1MM_2} \leqslant \frac{1}{2}OM^2 \cdot \sin \angle AOB$.

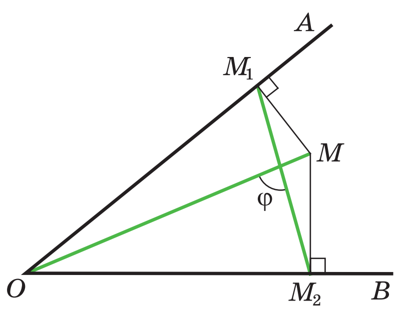


Рис. 6.8

Розв'язання. Очевидно, що точки O, M_1, M, M_2 лежать на одному колі з діаметром OM. Тоді $M_1M_2 = OM \cdot \sin \angle AOB$.

Маємо: $S_{OM_1MM_2} = \frac{1}{2}OM \cdot M_1M_2 \sin \varphi$, де φ — кут між діагоналями чотирикутника OM_1MM_2.

Оскільки $0 < \sin\varphi \leqslant 1$, то

$$S_{OM_1MM_2} \leqslant \frac{1}{2}OM \cdot M_1M_2 = \frac{1}{2}OM^2 \cdot \sin\angle AOB.$$ ◀

Задача 5. На стороні AC трикутника ABC позначено довільну точку M, відмінну від вершин A і C. У кожний із трикутників ABM і MBC вписано коло (рис. 6.9). Доведіть, що сума радіусів цих кіл більша за радіус кола, вписаного в трикутник ABC.

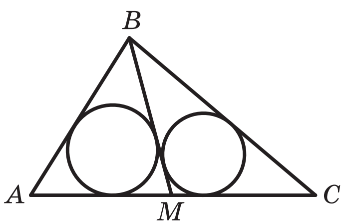


Рис. 6.9

Розв'язання. Позначимо S, S_1, S_2 — площі, p, p_1, p_2 — півпериметри, r, r_1, r_2 — радіуси вписаних кіл трикутників ABC, ABM, MBC відповідно.

Маємо: $S = S_1 + S_2$,

$$rp = r_1p_1 + r_2p_2.$$

Легко отримати (зробіть це самостійно), що $p_1 < p$ і $p_2 < p$. Тоді

$$rp = r_1p_1 + r_2p_2 < r_1p + r_2p.$$

Звідси $r < r_1 + r_2$. ◀

1. Як можна знайти площу трикутника, якщо відомо дві його сторони та кут між ними?
2. Запишіть формулу Герона для обчислення площі трикутника.
3. Як можна знайти площу трикутника зі сторонами a, b і c та радіусом R описаного кола?
4. Як можна знайти площу трикутника, якщо відомо його півпериметр і радіус вписаного кола?
5. Чому дорівнює площа описаного многокутника?
6. Як можна знайти площу паралелограма, якщо відомо його сусідні сторони та кут між ними?
7. Як можна знайти площу опуклого чотирикутника, якщо відомо його діагоналі та кут між ними?

ВПРАВИ

6.1.° Площа трикутника MKN дорівнює 75 см². Знайдіть сторону MK, якщо $KN = 15$ см, $\angle K = 30°$.

6.2.° Знайдіть кут між даними сторонами трикутника ABC, якщо:
1) $AB = 12$ см, $BC = 10$ см, площа трикутника дорівнює $30\sqrt{3}$ см²;
2) $AB = 14$ см, $AC = 8$ см, площа трикутника дорівнює 56 см².

6.3.° Площа трикутника ABC дорівнює 18 см². Відомо, що $AC = 8$ см, $BC = 9$ см. Знайдіть кут C.

6.4.° Знайдіть площу рівнобедреного трикутника з бічною стороною 16 см і кутом 15° при основі.

6.5.° Знайдіть бічну сторону рівнобедреного трикутника, площа якого дорівнює 36 см², а кут при вершині — 30°.

6.6.° Знайдіть найменшу висоту трикутника зі сторонами 13 см, 20 см і 21 см.

6.7.° Знайдіть найбільшу висоту трикутника зі сторонами 11 см, 25 см і 30 см.

6.8.° Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл трикутника зі сторонами:

1) 5 см, 5 см і 6 см; 2) 25 см, 29 см і 36 см.

6.9.° Знайдіть радіуси вписаного й описаного кіл трикутника зі сторонами 6 см, 25 см і 29 см.

6.10.° Доведіть, що $S \leqslant \frac{1}{2}ab$, де S — площа трикутника, a і b — довжини його сусідніх сторін.

6.11.° Чи може площа трикутника зі сторонами 4 см і 6 см дорівнювати: 1) 6 см²; 2) 14 см²; 3) 12 см²?

6.12.° Дві сусідні сторони паралелограма відповідно дорівнюють двом сусіднім сторонам прямокутника. Чому дорівнює гострий кут паралелограма, якщо його площа вдвічі менша від площі прямокутника?

6.13.° Знайдіть відношення площ S_1 і S_2 трикутників, зображених на рисунку 6.10 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

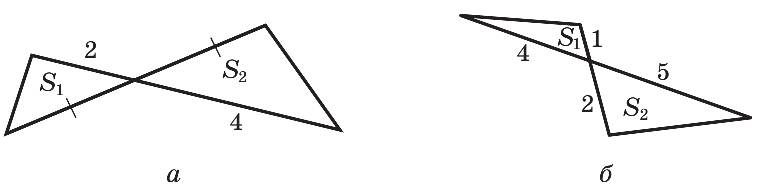


Рис. 6.10

6.14.° Знайдіть площу трикутника, сторона якого дорівнює a, а прилеглі до неї кути дорівнюють β і γ.

6.15.° У трикутнику ABC відомо, що $AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$. Знайдіть площу трикутника.

6.16.° У трикутнику ABC кут A дорівнює α, а висоти BD і CE дорівнюють відповідно h_1 і h_2. Знайдіть площу трикутника ABC.

6.17.° Відрізок BM — висота трикутника ABC, $BM = h$, $\angle A = \alpha$, $\angle ABC = \beta$. Знайдіть площу трикутника ABC.

6.18.° У трикутник зі сторонами 17 см, 25 см і 28 см вписано коло, центр якого сполучено з вершинами трикутника. Знайдіть площі трикутників, які при цьому утворилися.

6.19.• Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC, $AB = 6$ см, $AC = 8$ см, $\angle BAC = 120°$. Знайдіть бісектрису AD.

6.20.• Знайдіть площу трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 50 см, а бічні сторони — 13 см і 37 см.

6.21.• Основи трапеції дорівнюють 4 см і 5 см, а діагоналі — 7 см і 8 см. Знайдіть площу трапеції.

6.22.• Сторони трикутника дорівнюють 39 см, 41 см і 50 см. Знайдіть радіус кола, центр якого належить більшій стороні трикутника та яке дотикається до двох інших сторін.

6.23.• Доведіть, що $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$, де h_1, h_2 і h_3 — довжини висот трикутника, r — радіус вписаного кола.

6.24.• Вершини трикутника сполучено із центром вписаного в нього кола. Проведені відрізки розбивають даний трикутник на трикутники, площі яких дорівнюють 26 см², 28 см² і 30 см². Знайдіть сторони даного трикутника.

6.25.• Медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці M. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 12$ см, $\angle AMB = 150°$.

6.26.• Радіус вписаного кола трикутника дорівнює 4 см. Точка дотику ділить одну зі сторін трикутника на відрізки завдовжки 6 см і 8 см. Знайдіть дві інші сторони трикутника.

6.27.• Доведіть, що площу S трикутника можна обчислити за формулою[1] $S = \sqrt{rr_ar_br_c}$.

6.28.• Доведіть, що площу S трикутника можна обчислити за формулою

$$S = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_a}\right)}}.$$

[1] У задачах 6.27–6.30, 6.32, 6.36–6.39 використовуються позначення, наведені на форзаці.

6.29.• Доведіть, що площу S трикутника можна обчислити за формулою $S = \sqrt{\frac{Rh_a h_b h_c}{2}}$.

6.30.• Доведіть, що коли площа трикутника ABC дорівнює rr_c, то $\angle C = 90°$.

6.31.• Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло радіуса R. Кут між його діагоналями дорівнює φ. Доведіть, що площу S чотирикутника можна обчислити за формулою $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin \varphi$.

6.32.•• Доведіть, що довжину бісектриси трикутника ABC можна обчислити за формулою $l_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}$.

6.33.•• У трикутнику ABC проведено бісектрису AD. Відомо, що $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} = \frac{1}{AD}$. Знайдіть кут BAC.

6.34.•• У трикутнику ABC відомо, що $\angle ABC = 60°$, $AB + BC = 3$ см. Відрізок BD — бісектриса трикутника, $BD = \frac{2}{3}AC$. Знайдіть сторони трикутника.

6.35.•• Знайдіть площу трикутника, якщо відомо, що дві його сторони дорівнюють 35 см і 14 см, а бісектриса трикутника, проведена з їхньої спільної вершини, дорівнює 12 см.

6.36.•• Для трикутника ABC доведіть нерівність $S \leqslant \frac{a^2 + b^2}{4}$.

6.37.•• Для трикутника ABC доведіть нерівність:

1) $S \leqslant \frac{a^2 + ab + b^2}{6}$; 2) $S \leqslant \frac{a^2 - ab + b^2}{2}$.

6.38.•• Доведіть, що для прямокутного трикутника виконується нерівність $R + r \geqslant \sqrt{2S}$, де R і r — радіуси описаного та вписаного кіл відповідно.

6.39.•• Для трикутника ABC доведіть нерівність $h_a + h_b + h_c \geqslant 9r$.

6.40.•• У трикутник ABC вписано коло радіуса r. Через центр цього кола проведено пряму, яка перетинає сторони AB і BC у точках M і N відповідно. Доведіть, що $S_{MBN} \geqslant 2r^2$.

6.41.•• У трикутнику ABC проведено медіану BM. Чи може радіус кола, вписаного в трикутник BCM, бути вдвічі меншим від радіуса кола, вписаного в трикутник ABC?

6.42.•• Довжини сторін трикутника не перевищують 1. Доведіть, що його площа не перевищує $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

6.43.* У трикутнику позначено дві точки. Відстані від однієї з них до сторін трикутника дорівнюють 1 см, 3 см і 15 см, а від другої — 4 см, 5 см і 11 см (сторони розглядаються в тому самому порядку). Знайдіть радіус кола, вписаного в даний трикутник.

6.44.* У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Доведіть, що $S \leqslant \frac{(a+c)(b+d)}{4}$, де S — площа чотирикутника.

6.45.* Периметр чотирикутника дорівнює 4. Доведіть, що його площа не перевищує 1.

6.46.* (Формула Карно[1]) Точка O — центр описаного кола гострокутного трикутника ABC. Точки M_1, M_2 і M_3 — середини сторін BC, AC і AB відповідно. Доведіть, що $OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r$, де R і r — радіуси відповідно описаного та вписаного кіл трикутника ABC.

6.47.* Додатні числа x, y, z задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25, \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 16, \\ z^2 + zx + x^2 = 9. \end{cases}$$

Знайдіть значення виразу $xy + 2yz + 3xz$.

[1] Карно Лазар (1753–1823) — французький математик, фізик, державний і військовий діяч.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 2

Синус, косинус, тангенс і котангенс кута від 0° до 180°

Косинусом і синусом кута α $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ називають відповідно абсцису й ординату точки M одиничного півкола, яка відповідає куту α.

Тангенсом кута α, де $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ і $\alpha \neq 90°$, називають відношення $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Котангенсом кута α, де $0° < \alpha < 180°$, називають відношення $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Теорема косинусів

Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін і косинуса кута між ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Лема про хорду кола

Хорда кола дорівнює добутку діаметра та синуса будь-якого вписаного кута, який спирається на цю хорду.

Теорема синусів

Сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Формули для знаходження площі трикутника

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$

Формула Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = \frac{abc}{4R}$$

$$S = pr$$

Формула для знаходження радіуса кола, вписаного в трикутник

$$r = \frac{S}{p}$$

Формули для знаходження радіуса кола, описаного навколо трикутника

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

Формули для знаходження площі чотирикутника

Площа S паралелограма: $S = ab \sin \alpha$, де a і b — довжини сусідніх сторін паралелограма, α — кут між ними.

Площа опуклого чотирикутника дорівнює половині добутку його діагоналей і синуса кута між ними.

Площа многокутника, описаного навколо кола

Площа многокутника, описаного навколо кола, дорівнює добутку його півпериметра та радіуса вписаного кола.

ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ §3

У цьому параграфі ви дізнаєтесь, які многокутники називають правильними. Вивчите властивості правильних многокутників. Дізнаєтеся, як за допомогою циркуля та лінійки будувати деякі з них.

Навчитеся знаходити радіуси вписаного й описаного кіл правильного многокутника, довжину дуги кола, площу частин круга.

7. Правильні многокутники та їхні властивості

Означення. Многокутник називають правильним, якщо в нього всі сторони рівні та всі кути рівні.

З деякими правильними многокутниками ви вже знайомі: рівносторонній трикутник — це правильний трикутник, квадрат — це правильний чотирикутник. На рисунку 7.1 зображено правильні п'ятикутник і восьмикутник.

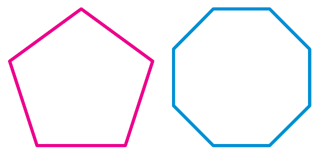


Рис. 7.1

Ознайомимося з деякими властивостями, що притаманні всім правильним n-кутникам (n — натуральне число).

Теорема 7.1. ***Правильний многокутник є опуклим многокутником.***

Доведення. Достатньо показати, що в будь-якому многокутнику є хоча б один кут, менший від 180°. Тоді з того, що в правильному n-кутнику всі кути рівні, випливатиме, що всі вони менші від 180°, тобто многокутник буде опуклим.

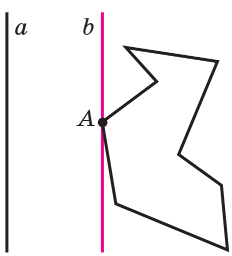


Рис. 7.2

Розглянемо довільний многокутник і пряму a, яка не має з ним спільних точок (рис. 7.2). Із кожної вершини многокутника опустимо перпендикуляр на пряму a.

Порівнявши довжини цих перпендикулярів, ми зможемо вибрати вершину многокутника, яка найменше віддалена від прямої a (якщо таких вершин кілька, то виберемо будь-яку з них). Нехай цю властивість має вершина A (рис. 7.2). Через точку A проведемо пряму b, паралельну прямій a. Тоді кут A многокутника лежить в одній півплощині відносно прямої b. Отже, $\angle A < 180°$. ◀

У правильному трикутнику є точка, рівновіддалена від усіх його вершин і від усіх його сторін. Це точка перетину бісектрис правильного трикутника. Точці перетину діагоналей квадрата теж притаманна аналогічна властивість. Те, що в будь-якому правильному многокутнику є точка, рівновіддалена як від усіх його вершин, так і від усіх його сторін, підтверджує така теорема.

Теорема 7.2. ***Будь-який правильний многокутник є як вписаним у коло, так і описаним навколо кола, причому центри описаного та вписаного кіл збігаються.***

Доведення. На рисунку 7.3 зображено правильний n-кутник $A_1A_2A_3...A_n$. Доведемо, що в нього можна вписати й навколо нього можна описати кола.

Проведемо бісектриси кутів A_1 і A_2. Нехай O — точка їхнього перетину. Сполучимо точки O і A_3. Оскільки в трикутниках OA_1A_2 і OA_2A_3 кути 2 і 3 рівні, $A_1A_2 = A_2A_3$ і OA_2 — спільна сторона, то ці трикутники рівні за першою ознакою рівності трикутників. Крім того, кути 1 і 2 рівні як половини рівних кутів. Звідси трикутник OA_1A_2 — рівнобедрений, отже, рівнобедреним є трикутник OA_2A_3. Тому $OA_1 = OA_2 = OA_3$.

Сполучаючи точку O з вершинами $A_4, A_5, ..., A_{n-1}, A_n$, аналогічно можна показати, що $OA_3 = OA_4 = ... = OA_{n-1} = OA_n$.

Таким чином, для многокутника $A_1A_2A_3...A_n$ існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин. Це точка O — центр описаного кола.

Оскільки рівнобедрені трикутники OA_1A_2, OA_2A_3, OA_3A_4, ..., $OA_{n-1}A_n$, OA_nA_1 рівні, то рівні і їхні висоти, проведені з вершини O. Звідси робимо висновок: точка O рівновіддалена від усіх сторін многокутника. Отже, точка O — центр вписаного кола. ◀

Точку, яка є центром описаного та вписаного кіл правильного многокутника, називають **центром правильного многокутника**.

На рисунку 7.4 зображено фрагмент правильного n-кутника із центром O та стороною AB, довжину якої позначимо a_n. Кут AOB називають **центральним кутом правильного многокутника**. Зрозуміло, що $\angle AOB = \frac{360°}{n}$.

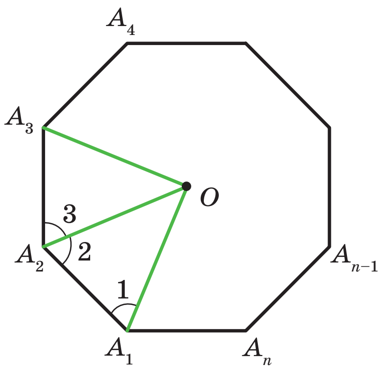


Рис. 7.3

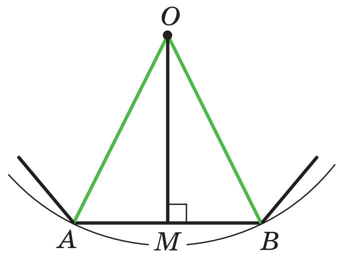


Рис. 7.4

У рівнобедреному трикутнику AOB проведемо висоту OM. Тоді $\angle AOM = \angle BOM = \dfrac{180^\circ}{n}$, $AM = MB = \dfrac{a_n}{2}$. Із трикутника OMB отримуємо, що $OB = \dfrac{MB}{\sin \angle BOM} = \dfrac{a_n}{2 \sin \dfrac{180^\circ}{n}}$ і $OM = \dfrac{MB}{\operatorname{tg} \angle BOM} = \dfrac{a_n}{2 \operatorname{tg} \dfrac{180^\circ}{n}}$.

Відрізки OB і OM — радіуси відповідно описаного та вписаного кіл правильного n-кутника. Якщо їхні довжини позначити R_n і r_n відповідно, то отримані результати можна записати у вигляді формул:

$$\boldsymbol{R_n = \frac{a_n}{2 \sin \dfrac{180^\circ}{n}}} \qquad \boldsymbol{r_n = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \dfrac{180^\circ}{n}}}$$

Підставивши у ці формули замість n числа 3, 4, 6, отримаємо формули для знаходження радіусів описаного та вписаного кіл для правильних трикутника, чотирикутника й шестикутника зі стороною a:

Кількість сторін правильного n-кутника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Радіус описаного кола	$R_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радіус вписаного кола	$r_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \dfrac{a}{2}$	$r_6 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

З отриманих результатів випливає, що сторона правильного шестикутника дорівнює радіусу його описаного кола. Тепер можна записати алгоритм побудови правильного шестикутника: від довільної точки M кола потрібно послідовно відкладати хорди, які дорівнюють радіусу (рис. 7.5). Таким чином отримуємо вершини правильного шестикутника.

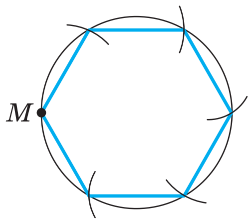


Рис. 7.5

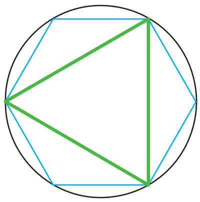


Рис. 7.6

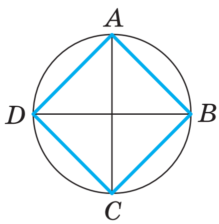


Рис. 7.7

Сполучивши через одну вершини правильного шестикутника, отримаємо правильний трикутник (рис. 7.6).

Для побудови правильного чотирикутника достатньо в колі провести два перпендикулярних діаметри AC і BD (рис. 7.7). Тоді чотирикутник $ABCD$ — квадрат (доведіть це самостійно).

Якщо побудовано правильний n-кутник, то легко побудувати правильний $2n$-кутник. Для цього потрібно знайти середини всіх сторін n-кутника та провести радіуси описаного кола через отримані точки. Тоді кінці радіусів і вершини даного n-кутника будуть вершинами правильного $2n$-кутника. На рисунках 7.8 і 7.9 показано побудову правильних 8-кутника та 12-кутника.

Узагалі, якщо ви вмієте будувати правильний m-кутник, то зможете побудувати будь-який правильний $m \cdot 2^n$-кутник (n — натуральне число).

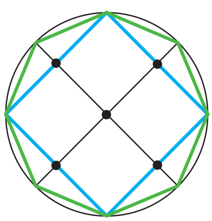


Рис. 7.8

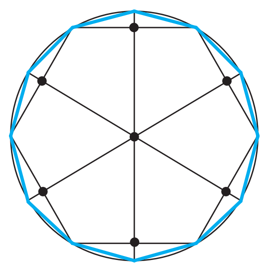


Рис. 7.9

Задачу побудови правильних многокутників за допомогою циркуля та лінійки вивчали ще давньогрецькі геометри. Зокрема, крім зазначених вище многокутників, вони вміли будувати правильні 5-кутник і 15-кутник, що є досить непростою справою.

Стародавні вчені, які вміли будувати будь-який із правильних n-кутників, де $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$, намагалися розв'язати цю задачу і для $n = 7, 9$. Їм це не вдалося. Узагалі, більше двох тисяч років математики не могли зрушитися з місця у вирішенні цієї проблеми. У 1796 р. великий німецький математик Карл Фрідріх Гаусс зміг за допомогою циркуля та лінійки побудувати правильний 17-кутник. У 1801 р. Гаусс довів, що циркулем та лінійкою можна побудувати правильний n-кутник тоді й тільки тоді, коли $n = 2^k$, де $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, або $n = 2^k \cdot p_1 p_2 \cdot \ldots \cdot p_t$, де k — ціле невід'ємне число, $p_1, p_2, \ldots, p_t$ — різні прості числа виду $2^{2^m} + 1$, де m — ціле невід'ємне число, які називають простими числами Ферма[1]. Зараз відомо лише п'ять простих чисел Ферма: 3, 5, 17, 257, 65 537.

Карл Фрідріх Гаусс
(1777–1855)

Гаусс надавав своєму відкриттю настільки великого значення, що заповів зобразити 17-кутник на своєму надгробку. На могильній плиті Гаусса цього рисунка немає, проте пам'ятник Гауссу в Брауншвейзі стоїть на сімнадцятикутному постаменті.

Задача 1. Чи існує правильний многокутник, кут якого дорівнює: 1) 155°; 2) 177°? У разі ствердної відповіді вкажіть вид многокутника.

1) Нехай n — кількість сторін шуканого правильного многокутника. З одного боку, сума його кутів дорівнює $180°(n - 2)$. З другого боку, ця сума дорівнює $155°n$. Отже, $180°(n - 2) = 155°n$; $25°n = 360°$; $n = 14{,}4$. Оскільки n має бути натуральним числом, то такого правильного многокутника не існує.

2) Маємо: $180°(n - 2) = 177°n$; $180°n - 360° = 177°n$; $n = 120$.

Відповідь: 1) не існує; 2) існує, це — стодвадцятикутник. ◄

Задача 2. У коло вписано правильний трикутник зі стороною 18 см. Знайдіть сторону правильного шестикутника, описаного навколо цього кола.

[1] П'єр Ферма (1601–1665) — французький математик, один із фундаторів теорії чисел.

Розв'язання. Радіус кола, описаного навколо правильного трикутника, обчислюють за формулою $R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, де a — довжина сторони трикутника (рис. 7.10). Отже, $R_3 = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$ (см).

За умовою радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, дорівнює радіусу кола, описаного навколо правильного трикутника, тобто $r_6 = R_3 = 6\sqrt{3}$ см. Оскільки $r_6 = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, де b — довжина сторони правильного шестикутника, то $b = \frac{2r_6}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12$ (см).

Відповідь: 12 см. ◀

Задача 3. Побудуйте правильний п'ятикутник.

Розв'язання. Розглянемо правильний п'ятикутник $ABCDE$, сторона якого дорівнює a. Нехай діагоналі BE і AC перетинаються в точці M (рис. 7.11). Легко показати, що $AC \parallel ED$ і $BE \parallel CD$. Отже, чотирикутник $EMCD$ — паралелограм. Звідси $MC = ED = a$.

Трикутники AMB і ABC подібні за першою ознакою подібності трикутників (доведіть це самостійно). Звідси $\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AB}$. Оскільки $AM = AC - a$, то маємо: $\frac{a}{AC} = \frac{AC - a}{a}$. Звідси $AC^2 - a \cdot AC - a^2 = 0$; $AC = \frac{a\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}$.

Як при заданому відрізку завдовжки a побудувати відрізок, довжина якого дорівнює $a\sqrt{5}$, показано на рисунку 7.12.

Тепер легко побудувати відрізок $AC = \frac{a\sqrt{5}}{2} + \frac{a}{2}$.

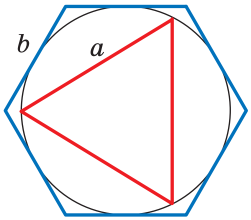


Рис. 7.10

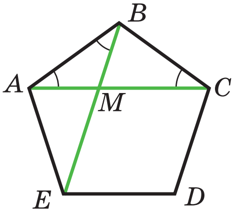


Рис. 7.11

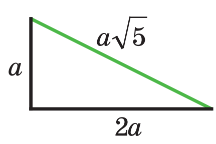


Рис. 7.12

Отже, ми можемо побудувати за трьома сторонами трикутник ABC, у якому сторони AB і BC — це сторони правильного п'ятикутника, відрізок AC — його діагональ. Тепер легко завершити побудову правильного п'ятикутника (зробіть це самостійно). ◀

Число $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, яке дорівнює відношенню діагоналі правильного п'ятикутника до його сторони, позначають грецькою літерою ϕ і називають **золотим числом.**

Задача 4. Чи існує опуклий семикутник, у якому будь-яка сторона перпендикулярна до якої-небудь діагоналі?

Розв'язання. У правильному восьмикутнику для будь-якої сторони знайдеться перпендикулярна до неї діагональ. Доведіть це самостійно.

Проведемо діагональ A_1A_3 правильного восьмикутника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ (рис. 7.13). Очевидно, що семикутник $A_1A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ має потрібну властивість. ◀

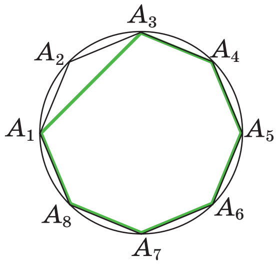


Рис. 7.13

?

1. Який многокутник називають правильним?
2. Які спільні властивості мають всі правильні многокутники?
3. Що називають центром правильного многокутника?
4. Запишіть формули радіусів вписаного та описаного кіл правильного n-кутника, трикутника, чотирикутника, шестикутника.

ВПРАВИ

7.1.° Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого дорівнює: 1) 160°; 2) 171°?

7.2.° Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого дорівнює: 1) 108°; 2) 175°?

7.3.° Чи існує правильний многокутник, кут якого дорівнює: 1) 140°; 2) 130°?

7.4.° Скільки сторін має правильний многокутник, якщо кут, суміжний із кутом многокутника, становить $\frac{1}{9}$ кута многокутника?

7.5.° Визначте кількість сторін правильного многокутника, якщо його кут на 168° більший за суміжний із ним кут.

7.6.° Нехай a — довжина сторони правильного трикутника, R і r — відповідно радіуси його описаного та вписаного кіл. Заповніть таблицю (довжини відрізків дано в сантиметрах):

a	R	r
$6\sqrt{3}$		
	$4\sqrt{3}$	
		2

7.7.° Нехай a — довжина сторони квадрата, R і r — відповідно радіуси його описаного та вписаного кіл. Заповніть таблицю (довжини відрізків дано в сантиметрах):

a	R	r
8		
	4	
		$\sqrt{2}$

7.8.° Радіус кола дорівнює 12 см. Знайдіть сторону вписаного в це коло правильного:

1) шестикутника; 2) дванадцятикутника.

7.9.° Радіус кола дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону описаного навколо цього кола правильного шестикутника.

7.10.° Сторона правильного многокутника дорівнює a, радіус описаного кола дорівнює R. Знайдіть радіус вписаного кола.

7.11.° Радіуси вписаного й описаного кіл правильного многокутника дорівнюють відповідно r і R. Знайдіть сторону многокутника.

7.12.° Сторона правильного многокутника дорівнює a, радіус вписаного кола дорівнює r. Знайдіть радіус описаного кола.

7.13.° Навколо кола описано правильний шестикутник зі стороною $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в це коло.

7.14.° У коло вписано квадрат зі стороною $6\sqrt{2}$ см. Знайдіть сторону правильного трикутника, описаного навколо цього кола.

7.15.° Скільки сторін має правильний многокутник, кут якого на 36° більший за його центральний кут?

7.16.° Кут між радіусами вписаного кола правильного многокутника, проведеними в точки дотику цього кола до сусідніх сторін многокутника, дорівнює 20°. Знайдіть кількість сторін многокутника.

7.17.° Доведіть, що всі діагоналі правильного п'ятикутника рівні.

7.18.° Доведіть, що кожна діагональ правильного п'ятикутника паралельна одній із його сторін.

7.19.° У коло вписано правильний шестикутник і навколо нього описано правильний шестикутник. Знайдіть відношення сторін цих шестикутників.

7.20.° Доведіть, що сторона правильного восьмикутника дорівнює $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, де R — радіус його описаного кола.

7.21.° Доведіть, що сторона правильного дванадцятикутника дорівнює $R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, де R — радіус його описаного кола.

7.22.° Знайдіть площу правильного восьмикутника, якщо радіус описаного навколо нього кола дорівнює R.

7.23.° Знайдіть діагоналі та площу правильного шестикутника, сторона якого дорівнює a.

7.24.• Кути квадрата зі стороною 6 см зрізали так, що отримали правильний восьмикутник. Знайдіть сторону утвореного восьмикутника.

7.25.• Кути правильного трикутника зі стороною 24 см зрізали так, що отримали правильний шестикутник. Знайдіть сторону утвореного шестикутника.

7.26.• Знайдіть діагоналі правильного восьмикутника, сторона якого дорівнює a.

7.27.• У правильному дванадцятикутнику, сторона якого дорівнює a, послідовно сполучили середини шести сторін, узятих через одну. Знайдіть сторону правильного шестикутника, який утворився при цьому.

7.28.• У правильному восьмикутнику, сторона якого дорівнює a, послідовно сполучили середини чотирьох сторін, узятих через одну. Знайдіть сторону квадрата, який утворився при цьому.

7.29.• У коло радіуса R вписано правильний n-кутник і правильний $2n$-кутник. Доведіть, що $a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}$.

7.30.• На сторонах правильного n-кутника у зовнішній бік побудовано квадрати. Відомо, що $2n$-кутник, утворений вершинами цих квадратів, відмінними від вершин n-кутника, є правильним. При яких значеннях n це можливо?

7.31.° Дано правильний п'ятикутник $ABCDE$. Позначили точку M таку, що трикутник DEM — правильний. Знайдіть кут AMC.

7.32.° Усі кути вписаного шестикутника рівні. Чи можна стверджувати, що цей шестикутник є правильним?

7.33.° У правильному шестикутнику обчисліть:

1) кут між діагоналями, які мають спільний кінець;

2) кут між найменшими діагоналями, що перетинаються.

7.34.° Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки, взятої всередині правильного многокутника, до всіх прямих, які містять його сторони, є величиною сталою.

7.35.°° Діагоналі AC і BD правильного п'ятикутника $ABCDE$ перетинаються в точці M. Доведіть, що $AM^2 = AC \cdot MC$.

7.36.°° Дано правильний 30-кутник $A_1A_2 \ldots A_{30}$ із центром O. Знайдіть кут між прямими OA_3 і A_1A_4.

7.37.°° Чи існує правильний n-кутник, у якого одна з діагоналей дорівнює сумі довжин двох інших діагоналей?

7.38.°° Дано правильний десятикутник $A_1A_2 \ldots A_{10}$, вписаний у коло радіуса R. Знайдіть різницю $A_1A_4 - A_1A_2$.

7.39.°° Доведіть, що коли в п'ятикутник, у якого всі сторони рівні, можна вписати коло, то він є правильним.

7.40.°° Доведіть, що коли в п'ятикутник, у якого всі кути рівні, можна вписати коло, то він є правильним.

7.41.°° Доведіть, що площа правильного восьмикутника дорівнює добутку найбільшої та найменшої діагоналей.

7.42.* Форму яких рівних правильних многокутників можуть мати дощечки паркету, щоб ними можна було вистелити підлогу?

7.43.* Дано правильний шестикутник, сторона якого дорівнює 1 см. Користуючись тільки лінійкою, побудуйте відрізок завдовжки $\sqrt{7}$ см.

7.44.* На колі із центром у точці O позначили точки A і B так, що $OA \perp OB$. Точка E — середина відрізка OA. На діаметрі AD позначили точку F так, що $EF = EB$ (рис. 7.14). Доведіть, що відрізок BF дорівнює стороні правильного п'ятикутника, вписаного в дане коло[1].

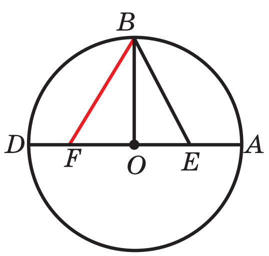


Рис. 7.14

[1] Ця задача показує, як за допомогою циркуля та лінійки побудувати правильний п'ятикутник. Цю побудову описано в праці давньогрецького вченого Птолемея «Альмагест».

7.45.* Усі кути вписаного п'ятикутника рівні. Чи можна стверджувати, що цей многокутник є правильним?

7.46.* Кожну точку кола зафарбовано в один із двох кольорів: червоний або синій. Доведіть, що в це коло можна вписати рівнобедрений трикутник, усі вершини якого одного кольору.

7.47.* У правильному 15-кутнику довільним чином позначили 7 вершин. Доведіть, що серед позначених точок є три, які є вершинами рівнобедреного трикутника.

7.48.* Усі кути п'ятикутника рівні. Доведіть, що сума відстаней від будь-якої точки п'ятикутника до його сторін є величиною сталою.

8. Довжина кола. Площа круга

Як на практиці виміряти довжину лінії, зображеної на рисунку 8.1?

Можна, наприклад, позначити кілька точок на лінії, а потім послідовно сполучити їх відрізками так, як показано на рисунку 8.2. Потім виміряти довжину утвореної ламаної. Отримана величина наближено дорівнює довжині даної лінії. Зрозуміло, що коли зменшувати довжини всіх ланок ламаної та збільшувати їхню кількість, то результат вимірювання довжини даної лінії стає точнішим (рис. 8.3).

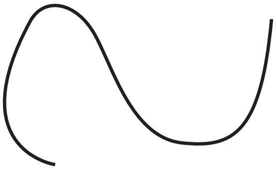


Рис. 8.1

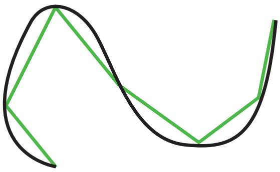


Рис. 8.2

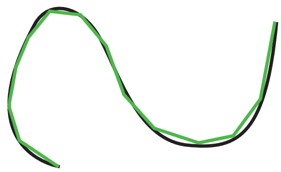


Рис. 8.3

Говорять, що довжину лінії, зображеної на рисунку 8.3, наближено виміряно за допомогою довжини **ламаної, вписаної в дану лінію**.

Для вимірювання довжини кола як вписану ламану зручно використати ламану, що складається зі сторін правильного n-кутника, вписаного в це коло.

На рисунку 8.4 зображено правильні 4-кутник, 8-кутник і 16-кутник, вписані в коло.

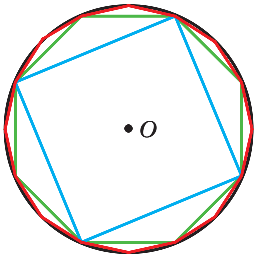


Рис. 8.4

Ми бачимо, що при збільшенні кількості сторін правильного n-кутника його периметр P_n усе менше й менше відрізняється від довжини C описаного кола.

Так, для нашого прикладу можна записати:

$$C - P_4 > C - P_8 > C - P_{16}.$$

При необмеженому збільшенні кількості сторін правильного многокутника його периметр буде як завгодно мало відрізнятися від довжини кола. Це означає, що різницю $C - P_n$ можна зробити меншою від, наприклад, 10^{-6}, 10^{-9} і взагалі меншою від будь-якого додатного числа.

Розглянемо два правильних n-кутники зі сторонами a_n і a'_n, вписаних у кола, радіуси яких дорівнюють R і R' відповідно (рис. 8.5). Тоді їхні периметри P_n і P'_n можна обчислити за формулами

$$P_n = na_n = n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n},$$

$$P'_n = na'_n = n \cdot 2R' \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Звідси

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \qquad (*)$$

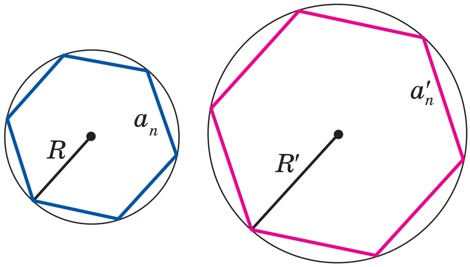


Рис. 8.5

Ця рівність справедлива при будь-якому значенні n (n — натуральне число, $n \geqslant 3$). При необмеженому збільшенні значення n периметри P_n і P'_n відповідно будуть як завгодно мало відрізнятися від довжин C і C' описаних кіл. Тоді при необмеженому збільшенні n відношення $\frac{P_n}{P'_n}$ буде як завгодно мало відрізнятися від відношення $\frac{C}{C'}$. З урахуванням рівності (*) доходимо висновку, що число $\dfrac{2R}{2R'}$ як завгодно мало відрізняється від числа $\dfrac{C}{C'}$. А це можливо лише тоді, коли $\dfrac{C}{C'}=\dfrac{2R}{2R'}$, тобто $\dfrac{C}{2R}=\dfrac{C'}{2R'}$.

Остання рівність означає, що ***для всіх кіл відношення довжини кола до діаметра є одним і тим самим числом***.

Із курсу математики 6 класу ви знаєте, що це число прийнято позначати грецькою буквою π (читають: «пі»).

З рівності $\dfrac{C}{2R}=\pi$ отримуємо формулу для обчислення довжини кола:

$$\boxed{\boldsymbol{C = 2\pi R}}$$

Число π є ірраціональним, отже, його можна подати у вигляді скінченного десяткового дробу лише наближено. Зазвичай при розв'язуванні задач за наближене значення π приймають число 3,14.

Видатний давньогрецький учений Архімед (III ст. до н. е.), виразивши через діаметр описаного кола периметр правильного 96-кутника, установив, що $3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$. Звідси й випливає, що $\pi \approx 3{,}14$.

За допомогою сучасних комп'ютерів і спеціальних програм можна обчислити число π з величезною точністю. Наведемо запис числа π із 47 цифрами після коми:

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937\ldots$.

У 1989 р. число π обчислили з точністю до 1 011 196 691 цифри після коми. Цей факт було занесено до Книги рекордів Гіннеса. Саме число в книзі не наведено, оскільки для цього потрібно було б понад тисячу сторінок. У 2016 р. уже було обчислено більше ніж 22 трильйони знаків числа π.

Знайдемо формулу для обчислення довжини дуги кола з градусною мірою $n°$. Оскільки градусна міра всього кола дорівнює 360°, то довжина дуги в 1° дорівнює $\dfrac{2\pi R}{360}=\dfrac{\pi R}{180}$. Тоді довжину l дуги в $n°$ обчислюють за формулою

$$\boxed{\boldsymbol{l = \frac{\pi R n}{180}}}$$

Досі вам доводилося обчислювати площі многокутників або фігур, які можна розбити на кілька многокутників. Зауважимо, що круг цієї властивості не має.

Розглянемо, як на практиці можна виміряти площу фігури, зображеної на рисунку 8.6. У цю фігуру вписують многокутник (рис. 8.7). Його площа є наближеним значенням площі даної фігури. Якщо зменшувати довжини всіх сторін многокутника, при цьому збільшуючи їхню кількість (рис. 8.8), то результат вимірювання площі даної фігури стає точнішим.

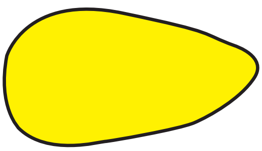


Рис. 8.6

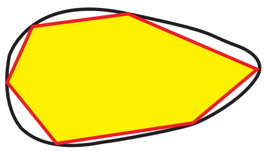


Рис. 8.7

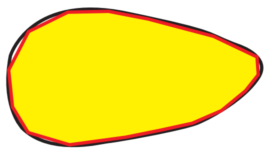


Рис. 8.8

Скористаємося цією ідеєю для знаходження площі круга.

Звернемося знову до рисунка 8.4. Бачимо, що при збільшенні кількості сторін правильного n-кутника його площа S_n усе менше й менше відрізняється від площі S круга. При необмеженому збільшенні кількості сторін його площа наближається до площі круга.

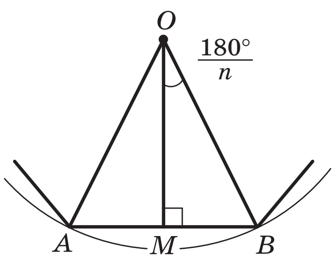


Рис. 8.9

На рисунку 8.9 зображено фрагмент правильного n-кутника із центром у точці O, зі стороною $AB = a_n$ і радіусом описаного кола, який дорівнює R. Опустимо перпендикуляр OM на сторону AB. Маємо:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OM = \frac{1}{2} a_n \cdot R \cos \frac{180°}{n}.$$

Оскільки радіуси, проведені у вершини правильного n-кутника, розбивають його на n рівних трикутників, то площа n-кутника S_n у n разів більша за площу трикутника AOB.

Тоді $S_n = n \cdot S_{AOB} = \frac{1}{2} n \cdot a_n \cdot R \cos \frac{180°}{n}$. Звідси

$$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot R \cos \frac{180°}{n}, \qquad (**)$$

де P_n — периметр даного правильного n-кутника.

При необмеженому збільшенні значення n величина $\frac{180°}{n}$ буде як завгодно мало відрізнятися від 0°, а отже, $\cos \frac{180°}{n}$ наближатиметься до 1. Периметр P_n наближатиметься до довжини C кола, а площа S_n — до площі S круга. Тоді з урахуванням рівності (**) можна записати: $S = \frac{1}{2} C \cdot R$.

Із цієї рівності отримуємо формулу для знаходження площі круга:

$$\boxed{S = \pi R^2}$$

На рисунку 8.10 радіуси OA і OB ділять круг на дві частини, які зафарбовано в різні кольори. Кожну із цих частин разом із радіусами OA і OB називають **круговим сектором** або просто **сектором**.

Зрозуміло, що круг радіуса R можна поділити на 360 рівних секторів, кожен з яких міститиме дугу в 1°. Площа такого сектора дорівнює $\frac{\pi R^2}{360}$. Тоді площу S сектора, який містить дугу кола в $n°$, обчислюють за формулою

$$\boxed{S = \frac{\pi R^2 n}{360}}$$

На рисунку 8.11 хорда AB ділить круг на дві частини, які зафарбовано в різні кольори. Кожну із цих частин разом із хордою AB називають **круговим сегментом** або просто **сегментом**. Хорду AB при цьому називають **основою сегмента**.

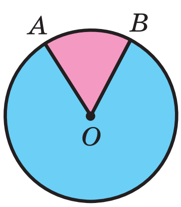


Рис. 8.10

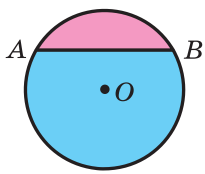


Рис. 8.11

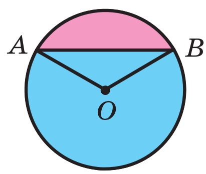


Рис. 8.12

Щоб знайти площу сегмента, зафарбованого в рожевий колір (рис. 8.12), треба від площі сектора, який містить хорду AB, відняти площу трикутника AOB (точка O — центр круга). Щоб знайти площу сегмента, зафарбованого в блакитний колір, треба до площі сектора, який не містить хорду AB, додати площу трикутника AOB.

Якщо хорда AB є діаметром круга, то вона ділить круг на два сегменти, які називають **півкругами**. Площу S півкруга обчислюють за формулою $S = \frac{\pi R^2}{2}$, де R — радіус круга.

З пошуком формули для знаходження площі круга пов'язана одна зі знаменитих задач давнини — **задача про квадратуру круга**: побудувати за допомогою циркуля та лінійки квадрат, площа якого дорівнює площі даного круга.

Починаючи з учених Стародавньої Греції, цю задачу намагалися розв'язати математики багатьох поколінь. Натхнення для своїх пошуків вони багато в чому черпали з результатів, отриманих Гіппократом Хіоським: ще в V ст. до н. е. Гіппократ віднайшов ряд криволінійних фігур, рівновеликих деяким многокутникам.

Розглянемо одну з його побудов.

Опишемо навколо квадрата коло, а на кожній його стороні побудуємо півколо в зовнішній бік (рис. 8.13). Фігури, зафарбовані на рисунку 8.13 жовтим кольором, називають **серпиками Гіппократа**. Легко показати (зробіть це самостійно), що сума площ цих серпиків дорівнює площі даного квадрата.

Спроби розв'язати задачу про квадратуру круга припинилися лише наприкінці XIX ст., коли було доведено неможливість її розв'язання.

Задача 1. Довжина дуги кола, радіус якого 25 см, дорівнює π см. Знайдіть градусну міру дуги.

Розв'язання. Із формули $l = \frac{\pi R n}{180}$ отримуємо: $n = \frac{180 l}{\pi R}$. Отже, шукана градусна міра $n° = \left(\frac{180\pi}{\pi \cdot 25}\right)^{\circ} = 7{,}2°$.

Відповідь: 7,2°. ◄

Задача 2. У коло із центром O, радіус якого дорівнює 8 см, вписано правильний восьмикутник $ABCDEFMK$ (рис. 8.14). Знайдіть площі сектора та сегмента, які містять дугу AB.

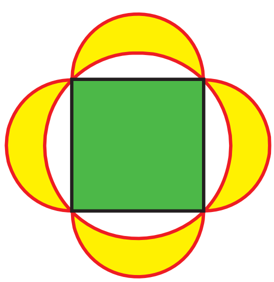


Рис. 8.13

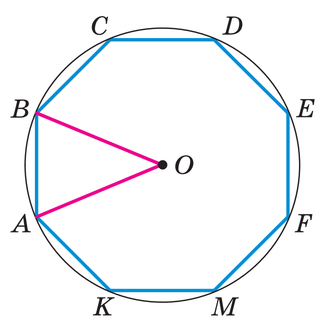


Рис. 8.14

Розв'язання. Кут AOB — центральний кут правильного восьмикутника, тому $\angle AOB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

Тоді шукана площа сектора дорівнює $S_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 45}{360} = 8\pi$ (см²), площа сегмента:

$$S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{AOB} = 8\pi - \frac{1}{2} OA^2 \sin \angle AOB = \left(8\pi - 16\sqrt{2}\right) \text{ (см}^2\text{)}.$$

Відповідь: 8π см², $\left(8\pi - 16\sqrt{2}\right)$ см². ◄

?

1. Яке відношення позначають буквою π?
2. Назвіть наближене значення числа π з точністю до сотих.
3. За якою формулою обчислюють довжину кола?
4. За якою формулою обчислюють довжину дуги кола?
5. За якою формулою обчислюють площу круга?
6. Поясніть, яку геометричну фігуру називають круговим сектором.
7. За якою формулою обчислюють площу кругового сектора?
8. Поясніть, яку геометричну фігуру називають круговим сегментом.
9. Поясніть, як можна знайти площу кругового сегмента.

ВПРАВИ

8.1.° Обчисліть довжину червоної лінії, зображеної на рисунку 8.15.

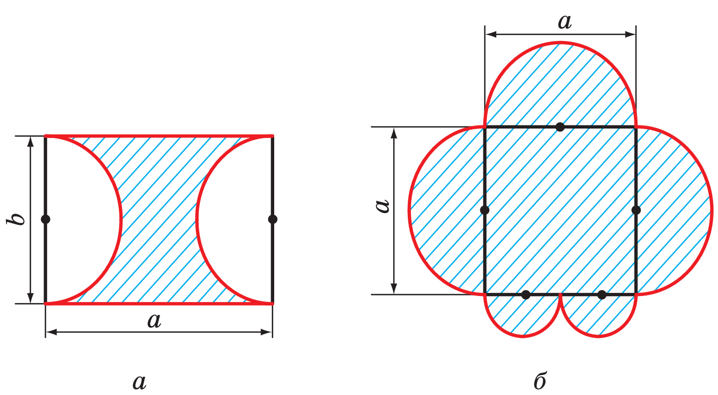
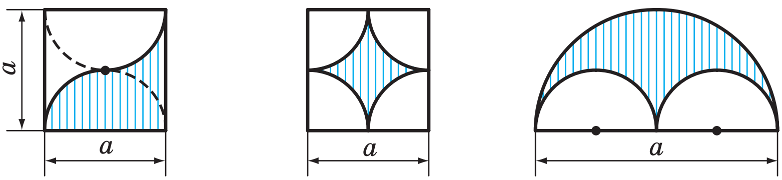


Рис. 8.15

8.2.° Обчисліть площу заштрихованої фігури, зображеної на рисунку 8.16.



а *б* *в*

Рис. 8.16

8.3.° Знайдіть площу круга, описаного навколо рівнобедреного трикутника з бічною стороною b і кутом α при основі.

8.4.° Знайдіть довжину кола, описаного навколо прямокутника зі стороною a і кутом α між даною стороною та діагоналлю прямокутника.

8.5.° Радіус кола дорівнює 8 см. Знайдіть довжину дуги кола, градусна міра якої дорівнює: 1) 4°; 2) 18°; 3) 160°; 4) 320°.

8.6.° Довжина дуги кола дорівнює 12π см, а її градусна міра — 27°. Знайдіть радіус кола.

8.7.° Довжина дуги кола радіуса 24 см дорівнює 3π см. Знайдіть градусну міру дуги.

8.8.° Обчисліть довжину дуги екватора Землі, градусна міра якої дорівнює 1°, якщо радіус екватора наближено дорівнює 6400 км.

8.9.° Радіус круга дорівнює 6 см. Знайдіть площу сектора, якщо градусна міра його дуги дорівнює: 1) 15°; 2) 144°; 3) 280°.

8.10.° Площа сектора становить $\frac{5}{8}$ площі круга. Знайдіть градусну міру його дуги.

8.11.° Площа сектора дорівнює 6π дм^2. Знайдіть градусну міру дуги цього сектора, якщо радіус круга дорівнює 12 дм.

8.12.° Площа сектора дорівнює $\frac{5\pi}{4}$ см^2, а градусна міра дуги цього сектора становить 75°. Знайдіть радіус круга, частиною якого є даний сектор.

8.13.° Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 5 см, а градусна міра дуги сегмента дорівнює: 1) 45°; 2) 150°; 3) 330°.

8.14.° Знайдіть площу кругового сегмента, якщо радіус круга дорівнює 2 см, а градусна міра дуги сегмента дорівнює: 1) 60°; 2) 300°.

8.15.° Радіус кола збільшили на a. Доведіть, що довжина кола збільшилася на величину, яка не залежить від радіуса даного кола.

8.16.° Сторона трикутника дорівнює 6 см, а прилеглі до неї кути дорівнюють 50° і 100°. Знайдіть довжини дуг, на які вершини трикутника ділять описане навколо нього коло.

8.17.° Сторона трикутника дорівнює $5\sqrt{3}$ см, а прилеглі до неї кути дорівнюють 35° і 25°. Знайдіть довжини дуг, на які вершини трикутника ділять описане навколо нього коло.

8.18.° На катеті AC прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) як на діаметрі побудовано коло. Знайдіть довжину дуги цього кола, яка належить трикутнику, якщо $\angle A = 24°$, $AC = 20$ см.

8.19.° Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 70°. На висоті трикутника, яка проведена до основи й дорівнює 27 см, як на діаметрі побудовано коло. Знайдіть довжину дуги кола, яка належить трикутнику.

8.20.° Колеса автомобіля мають діаметр 65 см. Автомобіль їде з такою швидкістю, що колеса роблять 6 обертів щосекунди. Знайдіть швидкість автомобіля в кілометрах за годину. Відповідь округліть до десятих.

8.21.° Доведіть, що площа півкруга, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника як на діаметрі (рис. 8.17), дорівнює сумі площ півкругів, побудованих на його катетах як на діаметрах.

8.22.° У круг вписано квадрат зі стороною a. Знайдіть площу меншого із сегментів, основою яких є сторона квадрата.

8.23.° У круг вписано правильний трикутник зі стороною a. Знайдіть площу меншого із сегментів, основою яких є сторона трикутника.

8.24.° Дві труби, діаметри яких дорівнюють 30 см і 40 см, потрібно замінити однією трубою з такою ж пропускною здатністю[1]. Яким має бути діаметр цієї труби?

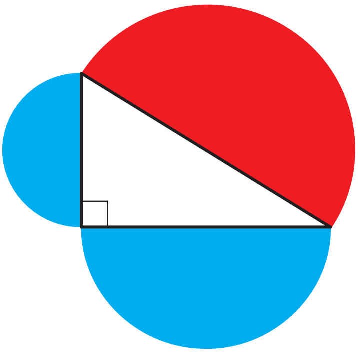


Рис. 8.17

[1] Пропускна здатність водопровідної труби — це маса води, яка проходить через поперечний переріз труби за одиницю часу.

8.25.• Відрізок AB розбили на n відрізків. На кожному з них як на діаметрі побудували півколо. Цю дію повторили, розбивши даний відрізок на m відрізків. Знайдіть відношення сум довжин півкіл, отриманих у першому й другому випадках.

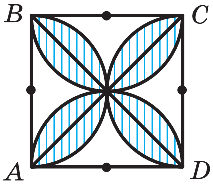


Рис. 8.18

8.26.• У круговий сектор, радіус якого дорівнює R, а центральний кут становить $60°$, вписано круг. Знайдіть площу цього круга.

8.27.• Знайдіть площу розетки (заштрихованої фігури), яка зображена на рисунку 8.18, якщо сторона квадрата $ABCD$ дорівнює a.

8.28.• При побудові чотирьох дуг із центрами у вершинах квадрата $ABCD$ і радіусами, які дорівнюють стороні квадрата, утворилася фігура, обмежена червоною лінією (рис. 8.19). Знайдіть довжину цієї лінії, якщо довжина сторони квадрата дорівнює a.

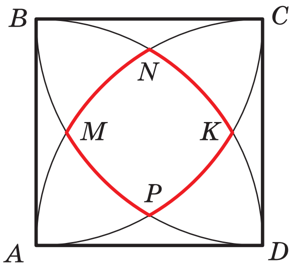


Рис. 8.19

8.29.• Знайдіть довжину червоної лінії (рис. 8.20), де точки O_1, O_2, O_3, ... — центри рівних кіл радіуса R.

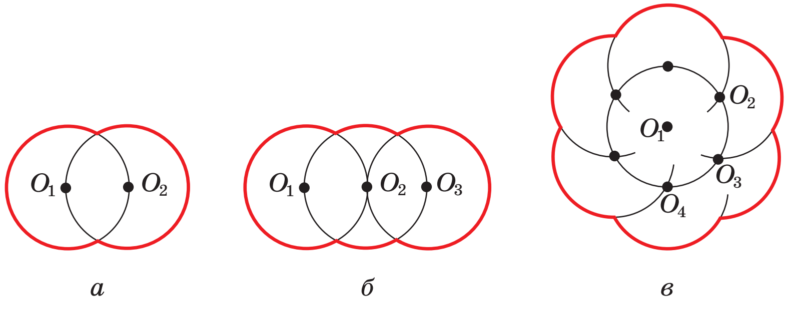


Рис. 8.20

8.30.• Дано два кола, радіуси яких дорівнюють R і r ($R > r$). Центр меншого кола лежить на більшому колі. Довжина дуги меншого кола, розміщеної всередині більшого кола, дорівнює l. Знайдіть довжину дуги більшого кола, розміщеної всередині меншого кола.

8.31.• На гіпотенузі і катетах прямокутного трикутника як на діаметрах побудовано півкруги (рис. 8.21). Доведіть, що площа зафарбованої фігури дорівнює площі трикутника.

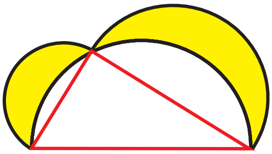


Рис. 8.21

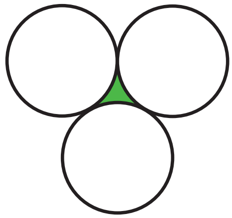


Рис. 8.22

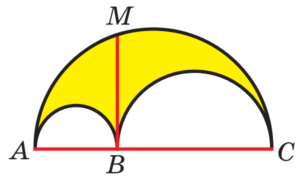


Рис. 8.23

8.32.• Знайдіть площу спільної частини двох кругів з радіусами 1 см і $\sqrt{3}$ см, якщо відстань між їхніми центрами дорівнює 2 см.

8.33.• Три кола, радіус кожного з яких дорівнює R, попарно дотикаються. Обчисліть площу зафарбованої фігури (рис. 8.22).

8.34.• На відрізках AB, BC і AC як на діаметрах побудовано півкруги (рис. 8.23). Відрізки MB і AC перпендикулярні. Доведіть, що площа зафарбованої фігури (її називають áрбелос Архімеда) дорівнює $\frac{1}{4}\pi MB^2$.

8.35.• Хорда AB більшого з двох концентричних кіл дотикається до меншого кола (рис. 8.24). Знайдіть площу зафарбованого кільця, якщо $AB = a$.

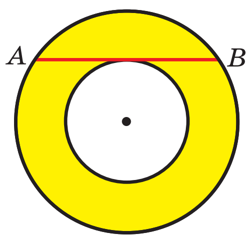


Рис. 8.24

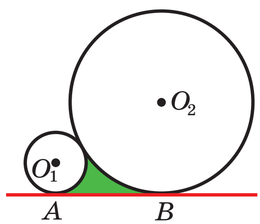


Рис. 8.25

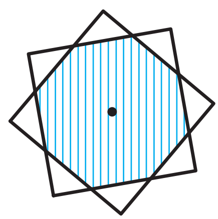


Рис. 8.26

8.36.• Побудуйте круг, площа якого дорівнює сумі площ двох даних кругів.

8.37.•• Два кола, радіуси яких дорівнюють 4 см і 12 см, дотикаються зовнішнім чином. Знайдіть площу фігури, обмеженої цими колами та їхньою спільною дотичною (рис. 8.25).

8.38.•• Два квадрати зі сторонами 1 см мають спільний центр (рис. 8.26). Доведіть, що площа їхньої спільної частини більша за $\frac{3}{4}$.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 3

Правильний многокутник

Многокутник називають правильним, якщо в нього всі сторони рівні та всі кути рівні.

Властивості правильного многокутника

- Правильний многокутник є опуклим многокутником.
- Будь-який правильний многокутник є як вписаним у коло, так і описаним навколо кола, причому центри описаного та вписаного кіл збігаються.

Формули для знаходження радіусів описаного та вписаного кіл правильного многокутника

Кількість сторін правильного n-кутника зі стороною a	n	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Радіус описаного кола	$R_n = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$	$R_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радіус вписаного кола	$r_n = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$	$r_3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \dfrac{a}{2}$	$r_6 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Довжина кола

$C = 2\pi R$

Довжина дуги кола в n°

$$l = \frac{\pi R n}{180}$$

Площа круга

$S = \pi R^2$

Площа сектора, який містить дугу кола в n°

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}$$

ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

§4

Вивчаючи матеріал цього параграфа, ви розширите свої знання про координатну площину.

Ви навчитеся знаходити довжину відрізка та координати точки, яка ділить його в заданому відношенні, знаючи координати його кінців.

Отримаєте уявлення про рівняння фігури, виведете рівняння прямої та кола.

Ознайомитеся з методом координат, який дає змогу розв'язувати геометричні задачі засобами алгебри.

9. Відстань між двома точками із заданими координатами. Поділ відрізка в заданому відношенні

У 6 класі ви ознайомилися з координатною площиною, тобто з площиною, на якій зображено дві перпендикулярні координатні прямі (вісь абсцис і вісь ординат) зі спільним початком відліку (рис. 9.1). Ви вмієте зображати на ній точки за їхніми координатами і, навпаки, знаходити координати точки, відміченої на координатній площині.

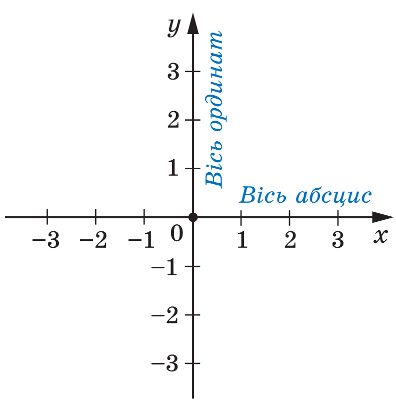


Рис. 9.1

Домовилися координатну площину з віссю x (віссю абсцис) і віссю y (віссю ординат) називати **площиною xy**.

Координати точки на площині xy називають **декартовими координатами** на честь французького математика Рене Декарта (див. оповідання на с. 116).

Рис. 9.2

Ви знаєте, як знаходити відстань між двома точками, заданими своїми координатами на координатній прямій. Для точок $A\ (x_1)$ і $B\ (x_2)$ (рис. 9.2) маємо:

$$AB = |x_2 - x_1|.$$

Навчимося знаходити відстань між точками $A\ (x_1;\ y_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2)$, заданими на площині xy.

Розглянемо випадок, коли відрізок AB не перпендикулярний до жодної з координатних осей (рис. 9.3).

Через точки A і B проведемо прямі, перпендикулярні до координатних осей. Отримаємо прямокутний трикутник ACB, у якому $BC = |x_2 - x_1|$, $AC = |y_2 - y_1|$. Звідси $AB^2 = BC^2 + AC^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$.

Тоді формулу відстані між точками $A\ (x_1;\ y_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2)$ можна записати так:

$$\boxed{\boldsymbol{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}}$$

Доведіть самостійно, що ця формула залишається правильною і для випадку, коли відрізок AB перпендикулярний до однієї з осей координат.

Якщо $x_1 = x_2$ і $y_1 = y_2$, то природно вважати, що $AB = 0$. Цей самий результат дає й отримана формула.

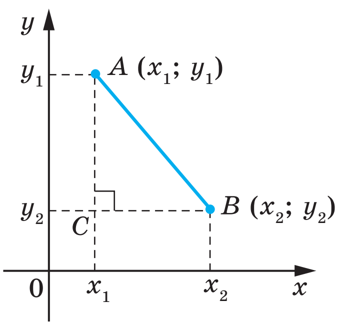


Рис. 9.3

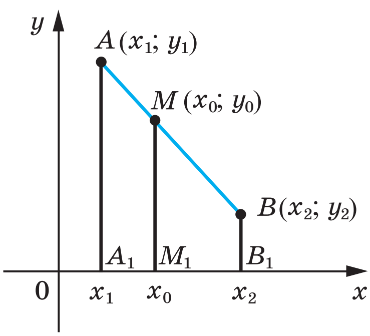


Рис. 9.4

Теорема 9.1. ***Якщо точка M (x_0; y_0) ділить відрізок AB у відношенні $\frac{AM}{MB} = \lambda$, то координати цієї точки можна обчислити за формулами***

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},} \qquad (*)$$

де (x_1; y_1) і (x_2; y_2) — координати відповідно точок A і B.

Доведення. Розглянемо випадок, коли відрізок AB не перпендикулярний до жодної з координатних осей (рис. 9.4). Вважатимемо, що $x_2 > x_1$ (випадок, коли $x_2 < x_1$, можна розглянути аналогічно). Через точки A, M і B проведемо прямі, перпендикулярні до осі абсцис, які перетнуть цю вісь відповідно в точках A_1, M_1 і B_1. За теоремою про пропорційні відрізки $\frac{A_1M_1}{M_1B_1} = \lambda$, тоді $|x_0 - x_1| = \lambda|x_2 - x_0|$. Оскільки $x_2 > x_0 > x_1$, то можемо записати: $x_0 - x_1 = \lambda(x_2 - x_0)$. Звідси $x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$.

Аналогічно можна показати, що $y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$.

Формули для знаходження координат точки M залишаються правильними й у випадку, коли відрізок AB перпендикулярний до однієї з осей координат. Доведіть це самостійно. ◀

Якщо точка M є серединою відрізка AB, то $\lambda = \frac{AM}{MB} = 1$. Для цього випадку формули (*) можна записати так:

$$\boxed{x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

За цими формулами знаходять координати середини відрізка.

Задача 1. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (2; −1), B (1; 3), C (−3; 2) і D (−2; −2) є прямокутником.

Розв'язання. Нехай точка M — середина діагоналі AC. Тоді абсциса точки M дорівнює $\frac{2-3}{2} = -0{,}5$, а ордината — $\frac{-1+2}{2} = 0{,}5$. Отже, M (−0,5; 0,5).

Нехай точка K — середина діагоналі BD. Тоді абсциса точки K дорівнює $\frac{1-2}{2} = -0{,}5$, а ордината — $\frac{3-2}{2} = 0{,}5$. Отже, K (−0,5; 0,5).

Таким чином, точки M і K збігаються, тобто діагоналі чотирикутника $ABCD$ мають спільну середину. Звідси випливає, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Знайдемо діагоналі паралелограма:

$$AC = \sqrt{(-3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34}, \quad BD = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{34}.$$

Отже, діагоналі паралелограма $ABCD$ рівні. Звідси випливає, що цей паралелограм є прямокутником. ◀

Задача 2. Дано прямокутник $ABCD$. Знайдіть усі точки X, для яких виконується рівність $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$.

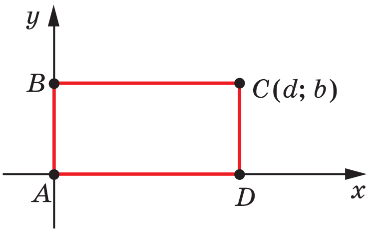


Рис. 9.5

Розв'язання. Введемо на площині систему координат так, щоби початок координат збігався з точкою A, а точки B і D належали осям координат (рис. 9.5).

Нехай координати точки B дорівнюють $(0; b)$, а координати точки D — $(d; 0)$. Тоді точка C має координати $(d; b)$.

Нехай X $(x; y)$ — довільна точка координатної площини. Маємо:

$$XA^2 + XC^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 + (x-d)^2 + (y-b)^2;$$
$$XB^2 + XD^2 = (x-0)^2 + (y-b)^2 + (x-d)^2 + (y-0)^2.$$

Звідси $XA^2 + XC^2 = XB^2 + XD^2$. Тобто ця рівність виконується для будь-якої точки X. Звідси випливає, що шуканою множиною точок є вся координатна площина. ◀

Задача 3. Доведіть нерівність $\sqrt{x^2 + (1-y)^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2} \geqslant \sqrt{2}$.

Розв'язання. На площині xy розглянемо точки A $(0; 1)$ і B $(1; 0)$. Нехай M $(x; y)$ — довільна точка площини. Маємо: $MA = \sqrt{x^2 + (1-y)^2}$, $MB = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$, $AB = \sqrt{2}$. З нерівності трикутника випливає, що $MA + MB \geqslant AB$. ◀

Задача 4. На папері в клітинку зображено опуклий n-кутник так, що всі його вершини розміщено у вузлах сітки й жодний інший вузол сітки не належить цьому n-кутнику. Доведіть, що $n = 3$ або $n = 4$.

Розв'язання. На рисунку 9.6 зображено трикутник і чотирикутник, які мають потрібну властивість. Отже, ми показали, що для $n = 3$ і $n = 4$ такі n-кутники існують.

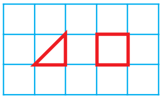


Рис. 9.6

Для будь-якої точки A $(x;\ y)$, де $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}$, має місце один із 4 випадків: 1) x — парне, y — парне; 2) x — непарне, y — парне; 3) x — парне, y — непарне; 4) x — непарне, y — непарне.

Введемо систему координат так, щоб усі вузли сітки мали цілі координати.

Припустимо, що $n \geq 5$. Тоді серед вершин n-кутника знайдуться такі дві, що їхні відповідні координати мають однакову парність. Середина відрізка з кінцями в цих вершинах належить n-кутнику та має цілі координати. Отримали суперечність. ◄

1. Як знайти відстань між двома точками, якщо відомо їхні координати?
2. Як знайти координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні, якщо відомо координати його кінців?

ВПРАВИ

9.1.° Вершинами трикутника є точки A $(-1;\ 3)$, B $(5;\ 9)$, C $(6;\ 2)$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

9.2.° Доведіть, що точка M $(0;\ -1)$ є центром кола, описаного навколо трикутника ABC, якщо A $(6;\ -9)$, B $(-6;\ 7)$, C $(8;\ 5)$.

9.3.° Доведіть, що кути B і C трикутника ABC рівні, якщо A $(5;\ -7)$, B $(-3;\ 8)$, C $(-10;\ -15)$.

9.4.° Доведіть, що трикутник з вершинами в точках A $(2;\ 7)$, B $(-1;\ 4)$ і C $(1;\ 2)$ є прямокутним.

9.5.° Точки A $(-1;\ 2)$ і B $(7;\ 4)$ є вершинами прямокутного трикутника. Чи може третя вершина трикутника мати координати: 1) $(7;\ 2)$; 2) $(2;\ -3)$?

9.6.° Чи лежать на одній прямій точки:
1) A $(-2;\ -7)$, B $(-1;\ -4)$ і C $(5;\ 14)$;
2) D $(-1;\ 3)$, E $(2;\ 13)$ і F $(5;\ 21)$?
У разі ствердної відповіді вкажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

9.7.° Доведіть, що точки M $(-4;\ 5)$, N $(-10;\ 7)$ і K $(8;\ 1)$ лежать на одній прямій, та вкажіть, яка з них лежить між двома іншими.

9.8.° При якому значенні x відстань між точками C $(3;\ 2)$ і D $(x;\ -1)$ дорівнює 5?

9.9.° Точка C — середина відрізка AB. Знайдіть координати точки B, якщо:
1) A (3; −4), C (2; 1); 2) A (−1; 1), C (0,5; −1).

9.10.° Точка K — середина відрізка AD. Заповніть таблицю:

Точка	Координати точки		
A	(−3; 1)	(−8; 2)	
D	(−1; −3)		(−9; 2)
K		(−4; 6)	(1; 2)

9.11.° Відомо, що точка C належить відрізку AB, причому $AC : CB = 2 : 3$. Знайдіть координати точки C, якщо $A\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, B (2; 6).

9.12.° Точка M ділить відрізок AB у відношенні 2 : 1. Знайдіть координати точки M, якщо A (−3; 6), B (3; −9).

9.13.° Знайдіть медіану BM трикутника, вершинами якого є точки A (3; −2), B (2; 3) і C (7; 4).

9.14.° Дано точки A (−2; 4) і B (2; −8). Знайдіть відстань від початку координат до середини відрізка AB.

9.15.• На осі абсцис знайдіть точку, яка рівновіддалена від точок A (−1; −1) і B (2; 4).

9.16.• Знайдіть координати точки, яка належить осі ординат і рівновіддалена від точок D (−2; −3) і E (4; 1).

9.17.• Точка C (3; −0,5) ділить відрізок AB у відношенні 1 : 3, рахуючи від точки A (5; −3). Знайдіть координати точки B.

9.18.• Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, A (−5; 1), B (−4; 4), C (−1; 5). Знайдіть координати вершини D.

9.19.• Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, A (−2; −2), C (4; 1), D (−1; 1). Знайдіть координати вершини B.

9.20.• Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (−2; 8), B (3; −3), C (6; 2) і D (1; 13) є паралелограмом.

9.21.• Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (−3; −2), B (−1; 2), C (1; −2) і D (−1; −6) є ромбом.

9.22.• Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (−2; 6), B (−8; −2), C (0; −8) і D (6; 0) є квадратом.

9.23.• Точки D (1; 4) і E (2; 2) — середини сторін AC і BC трикутника ABC відповідно. Знайдіть координати вершин A і C, якщо B (−3; −1).

9.24.• Знайдіть довжину відрізка, кінці якого належать осям координат, а серединою є точка M (−3; 8).

9.25.• Точки A (x_1; y_1), B (x_2; y_2), C (x_3; y_3), D (x_4; y_4) — вершини чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що цей чотирикутник є паралелограмом тоді й тільки тоді, коли $x_1 + x_3 = x_2 + x_4$ і $y_1 + y_3 = y_2 + y_4$.

9.26.• Знайдіть координати вершини C рівностороннього трикутника ABC, якщо A (2; −3) і B (−2; 3).

9.27.• Знайдіть координати вершини E рівностороннього трикутника DEF, якщо D (−6; 0) і F (2; 0).

9.28.• У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC$, A (5; 9), C (1; −3), модулі координат точки B рівні. Знайдіть координати точки B.

9.29.•• Знайдіть координати всіх точок C осі абсцис таких, що трикутник ABC рівнобедрений і A (1; 1), B (2; 3).

9.30.•• Знайдіть координати всіх точок B осі ординат таких, що трикутник ABC прямокутний і A (1; 3), C (3; 7).

9.31.•• Знайдіть координати точки, яка рівновіддалена від осей координат і від точки A (3; 6).

9.32.•• Знайдіть координати точки, яка рівновіддалена від осей координат і від точки B (−4; 2).

9.33.•• Точки A (x_1; y_1), B (x_2; y_2), C (x_3; y_3) є вершинами трикутника ABC. Доведіть, що точка перетину медіан цього трикутника має координати $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$.

9.34.•• Точки A (1; 2), B (2; 5), C (7; 0) є вершинами трикутника ABC. Знайдіть бісектрису AA_1 цього трикутника.

9.35.•• Бісектриса зовнішнього кута трикутника ABC при вершині B перетинає пряму AC у точці D. Знайдіть відрізок BD, якщо A (1; −5), B (0; −2), C (3; 7).

9.36.•• Поясніть, як, знаючи координати вершин трикутника, знайти координати центра його вписаного кола.

9.37.•• Точки A (1; 1), B (3; 4), C (6; 4), D (7; 1) — вершини трапеції $ABCD$. Знайдіть координати точки перетину діагоналей трапеції.

9.38.•• На папері в клітинку зображено 10-кутник так, що всі його вершини розміщено у вузлах сітки. Доведіть, що в цьому многокутнику існує щонайменше дві діагоналі, кожна з яких містить вузол сітки, відмінний від вершини.

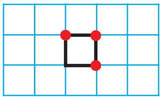


Рис. 9.7

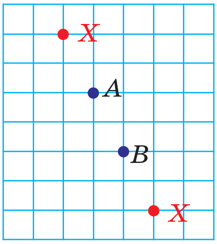


Рис. 9.8

9.39.* На папері в клітинку виділено квадрат сітки, у якому позначено три вершини (рис. 9.7). Дозволяється позначати нові точки за таким правилом: якщо A і B — уже позначені точки, то нову точку X можна позначити так, щоб точка B була серединою відрізка AX або точка A була серединою відрізка BX (рис. 9.8). Чи можна за допомогою цього правила позначити й четверту вершину виділеного квадрата?

10. Рівняння фігури

Із курсу алгебри 7 класу ви знаєте, яку фігуру називають графіком рівняння. У цьому пункті ви ознайомитеся з поняттям рівняння фігури.

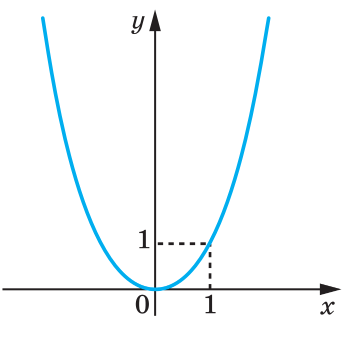


Рис. 10.1

Координати $(x;\ y)$ кожної точки параболи, зображеної на рисунку 10.1, є розв'язком рівняння $y = x^2$. І навпаки, кожний розв'язок рівняння з двома змінними $y = x^2$ є координатами точки, яка лежить на цій параболі. У цьому разі говорять, що рівняння параболи, зображеної на рисунку 10.1, має вигляд $y = x^2$.

Означення. Рівнянням фігури F, заданої на площині xy, називають рівняння з двома змінними x і y, яке має такі властивості:

1) **якщо точка належить фігурі F, то її координати є розв'язком даного рівняння;**
2) **будь-який розв'язок $(x;\ y)$ даного рівняння є координатами точки, яка належить фігурі F.**

Наприклад, рівняння прямої, зображеної на рисунку 10.2, має вигляд $y = 2x - 1$, а рівняння гіперболи, зображеної на рисунку 10.3, має вигляд $y = \frac{1}{x}$. Прийнято говорити, що, наприклад, рівняння $y = 2x - 1$ і $y = \frac{1}{x}$ **задають** пряму та гіперболу відповідно.

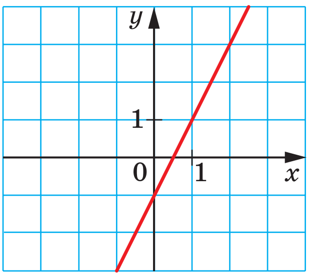


Рис. 10.2

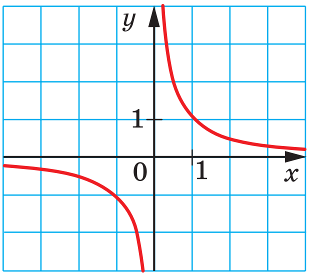


Рис. 10.3

Якщо дане рівняння є рівнянням фігури F, то цю фігуру можна розглядати як геометричне місце точок (ГМТ), координати яких задовольняють дане рівняння.

Користуючись цими міркуваннями, виведемо рівняння кола радіуса R із центром у точці A $(a; b)$.

Нехай M $(x; y)$ — довільна точка даного кола (рис. 10.4). Тоді $AM = R$. Використовуючи формулу відстані між точками, отримаємо: $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = R$. Звідси

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \qquad (*)$$

Ми показали, що координати $(x; y)$ довільної точки M даного кола є розв'язком рівняння (*). Тепер покажемо, що будь-який розв'язок рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ є координатами точки, яка належить даному колу.

Нехай пара чисел $(x_1; y_1)$ — довільний розв'язок рівняння (*). Тоді $(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = R^2$.

Звідси $\sqrt{(x_1-a)^2+(y_1-b)^2} = R$.

Ця рівність показує, що точка N $(x_1; y_1)$ віддалена від центра кола A $(a; b)$ на відстань, що дорівнює радіусу кола, а отже, точка N $(x_1; y_1)$ належить даному колу.

Отже, ми довели таку теорему.

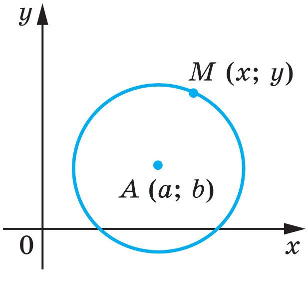


Рис. 10.4

Теорема 10.1. ***Рівняння кола радіуса R із центром у точці A (a; b) має вигляд***

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2}$$

Правильним є і таке твердження: *будь-яке рівняння виду* $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, *де* a, b *і* R — *деякі числа, причому* $R > 0$, *є рівнянням кола радіуса* R *із центром у точці з координатами* $(a; b)$.

Якщо центром кола є початок координат, то $a = b = 0$. Рівняння такого кола має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Означення. Еліпсом називають геометричне місце точок, для яких сума відстаней до двох заданих точок F_1 і F_2 є сталою величиною, більшою за F_1F_2. Точки F_1 і F_2 називають фокусами еліпса.

На рисунку 10.5 зображено еліпс, фокуси F_1 і F_2 якого мають відповідно координати $(-c; 0)$ і $(c; 0)$. Відрізки $OA = a$ і $OB = b$ називають відповідно **великою і малою півосями** еліпса.

Рівняння еліпса, зображеного на рисунку 10.5, має вигляд

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,} \qquad (**)$$

де $a > b$ і $a^2 - b^2 = c^2$.

Якщо $a = b$, то рівняння (**) можна записати так: $x^2 + y^2 = a^2$. Отримали рівняння кола. У цьому разі $c = 0$ і точки F_1 і F_2 збігаються. Тому коло можна розглядати як окремий випадок еліпса, у якого фокуси збігаються.

Означення. Гіперболою називають геометричне місце точок, для яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок F_1 і F_2 є сталою величиною, меншою від F_1F_2. Точки F_1 і F_2 називають фокусами гіперболи.

На рисунку 10.6 зображено гіперболу, фокуси F_1 і F_2 якої мають відповідно координати $(-c; 0)$ і $(c; 0)$. Ця фігура складається з двох **віток**, які належать вертикальним кутам AOB і COD, утвореним

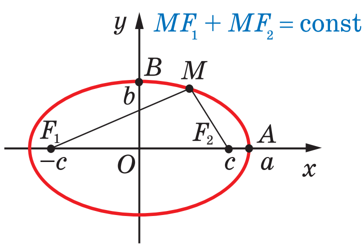


Рис. 10.5

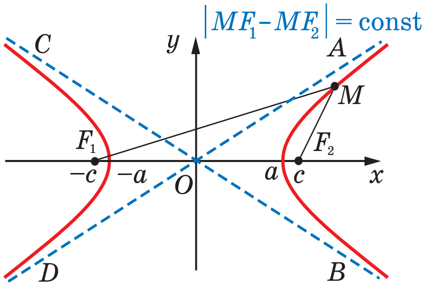


Рис. 10.6

прямими AD і BC. Ці прямі мають таку властивість: чим далі точка M, що належить гіперболі, розміщена від початку координат, тим меншою є відстань від неї до однієї із зазначених прямих, причому ця відстань може стати меншою від будь-якого наперед заданого додатного числа.

Прямі AD і BC називають **асимптотами** гіперболи.

Вітки гіперболи перетинають вісь абсцис у точках, рівновіддалених від початку координат. Нехай ці точки мають координати $(-a; 0)$ і $(a; 0)$.

Рівняння гіперболи, зображеної на рисунку 10.6, має вигляд

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,}$$

де $b^2 = c^2 - a^2$.

Зрозуміло, що, змінивши положення фігури на координатній площині, ми тим самим змінимо її рівняння.

Розглянемо гіперболу з перпендикулярними асимптотами. Розмістимо її так, щоб осі координат збігалися з асимптотами (рис. 10.7). Можна показати, що в цьому разі рівняння гіперболи має вигляд $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$. Це рівняння добре вам відоме з курсу алгебри.

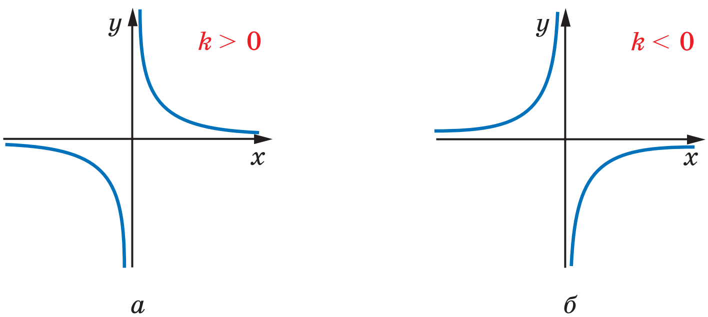


Рис. 10.7

Задача 1. Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB, якщо $A\ (-5; 9)$, $B\ (7; -3)$.

Розв'язання. Оскільки центр кола є серединою діаметра, то можемо знайти координати $(a; b)$ центра C кола:

$$a = \frac{-5+7}{2} = 1, \quad b = \frac{9-3}{2} = 3.$$

Отже, C (1; 3).

Радіус кола R дорівнює відрізку AC. Тоді

$$R^2 = (1 + 5)^2 + (3 - 9)^2 = 72.$$

Отже, шукане рівняння має вигляд

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 72.$$

Відповідь: $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 72$. ◀

Задача 2. Доведіть, що рівняння $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 50 = 0$ задає коло. Знайдіть координати центра та радіус цього кола.

Розв'язання. Подамо дане рівняння у вигляді $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 + 50 - 58 = 0;$$

$$(x + 3)^2 + (y - 7)^2 = 8.$$

Отже, дане рівняння є рівнянням кола із центром у точці (−3; 7) і радіусом $2\sqrt{2}$.

Відповідь: (−3; 7), $2\sqrt{2}$. ◀

Задача 3. Доведіть, що існує коло, яке проходить через початок координат і на якому немає інших точок, обидві координати яких є раціональними числами.

Розв'язання. Покажемо, що, наприклад, коло, задане рівнянням $\left(x-\sqrt{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=4$, є шуканим.

Маємо: $x^2-2x\sqrt{2}+2+y^2-2y\sqrt{2}+2=4$;

$$x^2+y^2=2\sqrt{2}\,(x+y). \qquad (***)$$

Пара (0; 0) є розв'язком цього рівняння.

Якщо $x \in \mathbb{Q}$ і $y \in \mathbb{Q}$, то числа $x^2 + y^2$ і $x + y$ також раціональні. Разом із цим, ураховуючи, що число $\sqrt{2}$ — ірраціональне, отримуємо, що рівність (***) можлива лише при $x = y = 0$. Отже, рівняння (***) має тільки один розв'язок $(x;\ y)$ такий, що $x \in \mathbb{Q}$ і $y \in \mathbb{Q}$. ◀

?

1. Що називають рівнянням фігури, заданої на площині xy?
2. Який вигляд має рівняння кола із центром у точці $(a;\ b)$ і радіусом R?
3. Який вигляд має рівняння кола із центром у початку координат і радіусом R?
4. Що називають еліпсом?
5. Що називають гіперболою?

ВПРАВИ

10.1.° Визначте за рівнянням кола координати його центра та радіус:
1) $(x - 8)^2 + (y - 3)^2 = 25$; 3) $x^2 + y^2 = 7$;
2) $(x + 5)^2 + y^2 = 9$; 4) $x^2 + (y + 1)^2 = 3$.

10.2.° Складіть рівняння кола, якщо відомо координати його центра A і радіус R:
1) $A\ (3;\ 4)$, $R = 4$; 3) $A\ (7;\ -6)$, $R = \sqrt{2}$;
2) $A\ (-2;\ 0)$, $R = 1$; 4) $A\ (0;\ 5)$, $R = \sqrt{7}$.

10.3.° Складіть рівняння кола, якщо відомо координати його центра B і радіус R:
1) $B\ (-1;\ 9)$, $R = 9$; 2) $B\ (-8;\ -8)$, $R = \sqrt{3}$.

10.4.° Визначте координати центра та радіус кола, зображеного на рисунку 10.8, і запишіть рівняння цього кола.

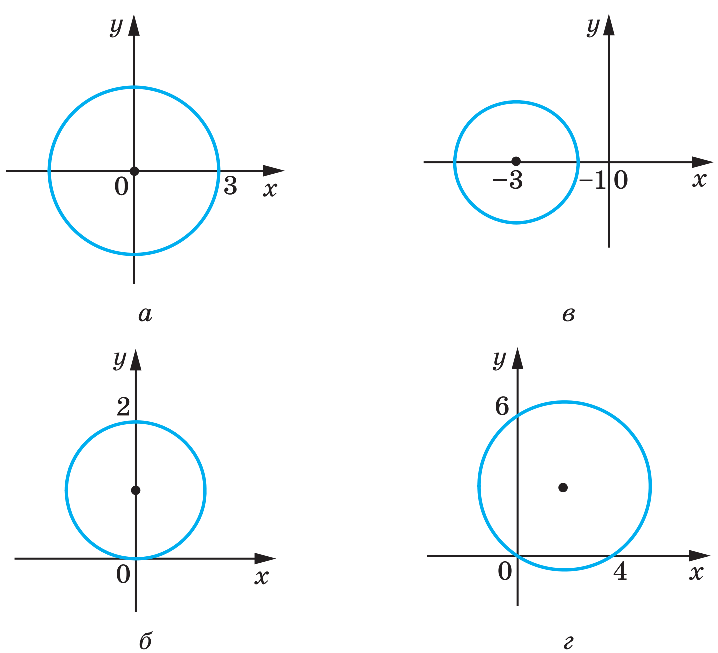
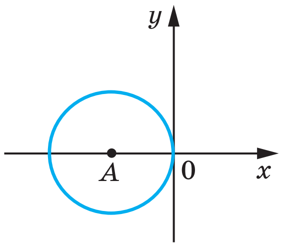
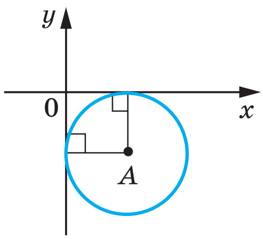


Рис. 10.8

10.5.° Радіус кола із центром у точці A дорівнює 4 (рис. 10.9). Складіть рівняння цього кола.



а



б

Рис. 10.9

10.6.° Складіть рівняння кола із центром у точці M (−3; 1), яке проходить через точку K (−1; 5).

10.7.° Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB, якщо A (2; −7), B (−2; 3).

10.8.° Доведіть, що відрізок AB є діаметром кола $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 17$, якщо A (1; −5), B (9; −3).

10.9.° Доведіть, що відрізок CD є хордою кола $x^2 + (y - 9)^2 = 169$, якщо C (5; −3), D (−12; 4).

10.10.° Складіть рівняння кола, центром якого є точка P (−6; 7) та яке дотикається до осі ординат.

10.11.° Складіть рівняння кола, центр якого знаходиться на прямій $y = -5$ та яке дотикається до осі абсцис у точці S (2; 0).

10.12.° Скільки існує кіл, які проходять через точку (3; 5), радіуси яких дорівнюють $3\sqrt{5}$ і центри яких належать осі ординат? Запишіть рівняння кожного такого кола.

10.13.° Складіть рівняння кола, яке проходить через точки A (−4; 1) і B (8; 5) та центр якого належить осі абсцис.

10.14.° Доведіть, що коло $(x + 6)^2 + (y - 3)^2 = 36$:
1) дотикається до осі ординат;
2) перетинає вісь абсцис;
3) не має спільних точок з прямою $y = 10$.

10.15.° Установіть, чи є дане рівняння рівнянням кола. У разі ствердної відповіді вкажіть координати центра та радіус R цього кола:
1) $x^2 + 2x + y^2 - 10y - 23 = 0$;
2) $x^2 - 12x + y^2 + 4y + 40 = 0$;
3) $x^2 + y^2 + 6y + 8x + 34 = 0$;
4) $x^2 + y^2 - 4x - 14y + 51 = 0$.

10.16.° Доведіть, що дане рівняння є рівнянням кола, і вкажіть координати центра та радіус R цього кола:

1) $x^2 + y^2 + 16y + 60 = 0$; 2) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 15 = 0$.

10.17.° Знайдіть велику й малу півосі та координати фокусів еліпса $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$.

10.18.° Знайдіть координати фокусів гіперболи $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{11} = 1$.

10.19.° Яку фігуру задає рівняння:

1) $2x - 3y = 5$; 2) $x^2 + 2y^2 = 2$; 3) $x^2 - y^2 = 1$?

10.20.° Яку фігуру задає рівняння:

1) $y = 2x^2 - x + 2$; 2) $x^2 + y^2 = 5$; 3) $4x^2 - y^2 = 2$?

10.21.° Знайдіть відстань між центрами кіл $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 9$ і $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 21$.

10.22.° Знайдіть відстань між центрами кіл $x^2 + y^2 - 20x - 4y = -68$ і $x^2 + y^2 + 4x + 6y = -9$.

10.23.• Доведіть, що трикутник із вершинами в точках $A\ (-1; -2)$, $B\ (-1; 2)$, $C\ (5; 2)$ є прямокутним, і складіть рівняння кола, описаного навколо цього трикутника.

10.24.• Складіть рівняння кола, радіус якого дорівнює 5 та яке проходить через точки $C\ (-1; 5)$ і $D\ (6; 4)$.

10.25.• Складіть рівняння кола, радіус якого дорівнює $\sqrt{10}$ та яке проходить через точки $M\ (-2; 1)$ і $K\ (-4; -1)$.

10.26.• Складіть рівняння кола, яке дотикається до координатних осей і прямої $y = -4$.

10.27.• Складіть рівняння кола, яке дотикається до координатних осей і прямої $x = 2$.

10.28.• Складіть рівняння кола, яке проходить через точки:

1) $A\ (-3; 7)$, $B\ (-8, 2)$, $C\ (-6, -2)$;

2) $M\ (-1; 10)$, $N\ (12; -3)$, $K\ (4; 9)$.

10.29.• Дослідіть взаємне розміщення двох кіл:

1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ і $x^2 - 8x + y^2 + 12 = 0$;

2) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ і $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 52 = 0$;

3) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$ і $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 28 = 0$;

4) $x^2 + y^2 = 81$ і $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$;

5) $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$ і $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 7 = 0$.

10.30.•• Дано коло $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$. Знайдіть рівняння кола із центром $O_1\,(4; -3)$, яке дотикається до даного кола.

10.31.•• Дано коло $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 100$. Знайдіть рівняння кола із центром $O_1(3; -1)$, яке дотикається до даного кола.

10.32.•• Знайдіть рівняння геометричного місця центрів кіл радіуса 1, які дотикаються до кола $x^2 + y^2 = 9$.

10.33.•• Складіть рівняння кола, яке проходить через точки A (1; 0) і O (0; 0) та дотикається до кола $x^2 + y^2 = 9$.

10.34.•• На колі $x^2 + y^2 = 25$ позначили точку A (3; 4). Знайдіть координати вершин квадрата $ABCD$, вписаного в це коло.

10.35.•• На колі $x^2 + y^2 = 12$ позначили точку $A\left(0; 2\sqrt{3}\right)$. Знайдіть координати вершин рівностороннього трикутника ABC, вписаного в це коло.

10.36.•• Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $XA^2 + XB^2 = a$, де A (1; −1), B (3; −5), a — деяке число.

10.37.* Параболи $y = x^2 - 11$ і $x = y^2 - 12$ перетинаються в чотирьох точках. Доведіть, що ці точки лежать на одному колі.

11. Загальне рівняння прямої

У попередньому пункті, розглядаючи коло як ГМТ, рівновіддалених від даної точки, ми вивели його рівняння. Для того щоб вивести рівняння прямої, розглянемо її як ГМТ, рівновіддалених від двох даних точок.

Нехай a — задана пряма. Виберемо дві точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ так, щоби пряма a була серединним перпендикуляром відрізка AB (рис. 11.1).

Точка $M(x; y)$ координатної площини належить прямій a тоді й тільки тоді, коли $MA = MB$, тобто

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}. \qquad (*)$$

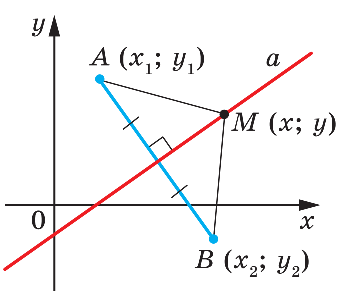


Рис. 11.1

Отже, рівняння (*) є рівнянням даної прямої a.

Проте з курсу алгебри 7 класу ви знаєте, що рівняння прямої має набагато простіший вигляд, а саме: $ax + by = c$, де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно. Покажемо, що рівняння (*) можна звести до такого вигляду.

Піднесемо обидві частини рівняння (*) до квадрата.

Маємо: $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2$.

Розкриємо дужки та зведемо подібні доданки. Отримаємо:

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y = x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2.$$

Позначивши $2(x_2 - x_1) = a$, $2(y_2 - y_1) = b$, $x_2^2 + y_2^2 - x_1^2 - y_1^2 = c$, отримаємо рівняння $ax + by = c$.

Оскільки точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ є різними, то хоча б одна з різниць $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$ не дорівнює нулю. Отже, числа a і b не дорівнюють нулю одночасно.

Таким чином, ми довели таку теорему.

Теорема 11.1. ***Рівняння прямої має вигляд***

$$\boxed{ax + by = c,}$$

де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно.

Є правильним і таке твердження: *будь-яке рівняння виду $ax + by = c$, де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно, є рівнянням прямої.*

Якщо $a = b = c = 0$, то графіком рівняння $ax + by = c$ є вся площина xy. Якщо $a = b = 0$ і $c \neq 0$, то рівняння не має розв'язків.

Із курсу алгебри 7 класу ви знаєте, що рівняння виду $ax + by = c$ називають лінійним рівнянням з двома змінними. Рівняння прямої є окремим видом лінійного рівняння. Схема, зображена на рисунку 11.2, ілюструє сказане.

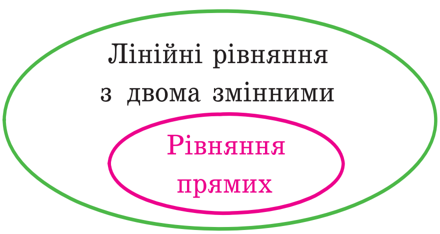


Рис. 11.2

Також на уроках алгебри в 7 класі ми прийняли без доведення той факт, що графіком лінійної функції $y = kx + p$ є пряма. Зараз ми можемо це довести.

Перепишемо рівняння $y = kx + p$ так: $-kx + y = p$. Ми отримали рівняння виду $ax + by = c$ для випадку, коли $a = -k$, $b = 1$, $c = p$. Оскільки в цьому рівнянні $b \neq 0$, то ми отримали рівняння прямої.

А чи будь-яку пряму на площині можна задати рівнянням виду $y = kx + p$? Відповідь на це запитання заперечна.

Річ у тім, що пряма, перпендикулярна до осі абсцис, не може бути графіком функції, а отже, не може бути задана рівнянням $y = kx + p$.

Разом з тим, якщо в рівнянні прямої $ax + by = c$ покласти $b = 0$, то його можна переписати так: $x = \frac{c}{a}$. Ми отримали окремий вид рівняння прямої, усі точки якої мають однакові абсциси. Отже, ця пряма перпендикулярна до осі абсцис. Її називають вертикальною.

Коли $b \neq 0$, то рівняння $ax + by = c$ задає невертикальну пряму, і це рівняння можна переписати так: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Позначивши $-\frac{a}{b} = k$, $\frac{c}{a} = p$, отримаємо рівняння $y = kx + p$.

Отже, будь-яку невертикальну пряму можна задати рівнянням виду $y = kx + p$.

Якщо $b = 0$ і $a \neq 0$, то рівняння прямої $ax + by = c$ задає вертикальну пряму; якщо $b \neq 0$, то це рівняння задає невертикальну пряму.

Тому рівняння $ax + by = c$, де $a^2 + b^2 \neq 0$, називають **загальним рівнянням прямої.**

У наведеній таблиці узагальнимо матеріал, розглянутий у цьому пункті.

Рівняння	Значення a, b і c	Графік
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a і c — будь-які	Невертикальна пряма
	$b = 0$, $a \neq 0$, c — будь-яке	Вертикальна пряма
	$a = b = c = 0$	Уся координатна площина
	$a = b = 0$, $c \neq 0$	Порожня множина

Задача 1. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки: 1) $A(-3; 5)$ і $B(-3; -6)$; 2) $C(6; 1)$ і $D(-18; -7)$.

Розв'язання. 1) Оскільки дані точки мають рівні абсциси, то пряма AB є вертикальною. Її рівняння має вигляд $x = -3$.

2) Оскільки дані точки мають різні абсциси, то пряма CD не є вертикальною. Тоді можна скористатися рівнянням прямої у вигляді $y = kx + p$.

Підставивши координати точок C і D у рівняння $y = kx + p$, отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6k + p = 1, \\ -18k + p = -7. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, знаходимо, що $k = \frac{1}{3}$, $p = -1$.

Відповідь: 1) $x = -3$; 2) $y = \frac{1}{3}x - 1$. ◄

Задача 2. Знайдіть периметр і площу трикутника, обмеженого прямою $5x + 12y = -60$ та осями координат.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину даної прямої з осями координат.

З віссю абсцис: при $y = 0$ отримуємо $5x = -60$; $x = -12$.

З віссю ординат: при $x = 0$ отримуємо $12y = -60$; $y = -5$.

Отже, дана пряма й осі координат обмежують прямокутний трикутник AOB (рис. 11.3) з вершинами A $(-12; 0)$, B $(0; -5)$ і O $(0; 0)$. Знайдемо сторони трикутника: $OA = 12$, $OB = 5$, $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 13$. Тоді шукані периметр і площа відповідно дорівнюють $P = OA + OB + AB = 30$, $S = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 30$.

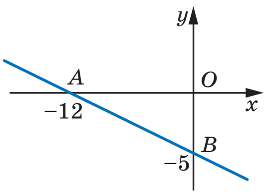


Рис. 11.3

Відповідь: $P = 30$, $S = 30$. ◄

1. Який вигляд має загальне рівняння прямої на площині xy?
2. У якому вигляді зручно записувати рівняння невертикальної прямої?
3. Чи будь-яке лінійне рівняння з двома змінними є рівнянням прямої?
4. Чи будь-яку пряму на площині можна задати рівнянням виду $y = kx + p$?
5. За якої умови рівняння прямої $ax + by = c$ є рівнянням вертикальної прямої? невертикальної прямої?

ВПРАВИ

11.1.° Знайдіть координати точок перетину прямої $4x - 5y = 20$ з осями координат. Чи належить цій прямій точка: 1) A $(10; 4)$; 2) B $(6; 1)$; 3) C $(-1{,}5; 5{,}2)$; 4) D $(-1; 5)$?

11.2.° Знайдіть координати точок перетину прямої $3x + 4y = 12$ з осями координат. Яка з точок M $(-2; 4)$ і K $(8; -3)$ належить цій прямій?

11.3.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку A (6; −3) і перпендикулярна до осі x. Які координати має точка перетину цієї прямої з віссю x?

11.4.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку B (5; −8) і перпендикулярна до осі y. Які координати має точка перетину цієї прямої з віссю y?

11.5.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку C (−4; 9) паралельно:
1) осі абсцис; 2) осі ординат.

11.6.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки:
1) A (1; −3) і B (−2; −9);
2) C (3; 5) і D (3; −10);
3) E (−4; −1) і F (9; −1);
4) M (3; −3) і K (−6; 12).

11.7.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки:
1) A (2; −5) і B (−3; 10);
2) C (6; −1) і D (24; 2).

11.8.° Точки A (−6; −1), B (1; 2) і C (−5; −8) — вершини трикутника ABC. Складіть рівняння прямої, яка містить медіану AK трикутника.

11.9.° Точки A (−3; −4), B (−2; 2), C (1; 3) і D (3; −2) — вершини трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$). Складіть рівняння прямої, яка містить середню лінію трапеції.

11.10.° Абсциси середин бічних сторін трапеції рівні. Чи можна стверджувати, що основи трапеції перпендикулярні до осі абсцис?

11.11.° Знайдіть периметр трикутника, обмеженого осями координат і прямою $4x - 3y = 12$.

11.12.° Знайдіть площу трикутника, обмеженого осями координат і прямою $7y - 2x = 28$.

11.13.° Знайдіть площу трикутника, обмеженого прямими $3x + 2y = 6$ і $y = -\frac{9}{4}x$ та віссю ординат.

11.14.° Доведіть, що коло $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 9$ і пряма $x + y = 7$ перетинаються, та знайдіть координати точок їхнього перетину.

11.15.° Доведіть, що пряма $x + y = 5$ є дотичною до кола $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 8$, і знайдіть координати точки дотику.

11.16.° Доведіть, що коло $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 1$ і пряма $3x + y = 3$ не мають спільних точок.

11.17.• Знайдіть відстань від початку координат до прямої $5x - 2y = 10$.

11.18.• Знайдіть відстань від початку координат до прямої $x + y = -8$.

11.19.° Знайдіть довжину хорди кола $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$, яка лежить на прямій $y = 3x$.

11.20.° Складіть рівняння геометричного місця центрів кіл, які проходять через точки A (1; −7) і B (−3; 5).

11.21.° Складіть рівняння геометричного місця центрів кіл, які проходять через точки C (2; 3) і D (−5; −2).

11.22.° Складіть рівняння кола, яке проходить через точки A (2; 0) і B (4; 0) та центр якого належить прямій $2x + 3y = 18$.

11.23.° Складіть рівняння геометричного місця центрів кіл, радіус яких дорівнює 5 та які відтинають на осі абсцис хорду завдовжки 6.

12. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки

Розглянемо рівняння $y = kx$. Воно задає невертикальну пряму, яка проходить через початок координат.

Покажемо, що прямі $y = kx$ та $y = kx + b$, де $b \neq 0$, паралельні.

Точки O (0; 0) і C (1; k) належать прямій $y = kx$, а точки A (0; b) і B (1; $k + b$) належать прямій $y = kx + b$ (рис. 12.1). Легко переконатися (зробіть це самостійно), що середини діагоналей AC і OB чотирикутника $OABC$ збігаються. Отже, чотирикутник $OABC$ — паралелограм. Звідси $AB \parallel OC$.

Тепер ми можемо зробити такий висновок:

***якщо $k_1 = k_2$ і $b_1 \neq b_2$, то прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ паралельні* (1).**

Нехай пряма $y = kx$ перетинає одиничне півколо в точці M (x_0; y_0) (рис. 12.2). Кут AOM називають **кутом між даною прямою та додатним напрямом осі абсцис**.

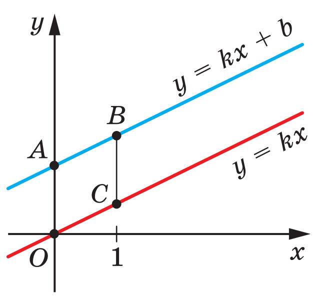


Рис. 12.1

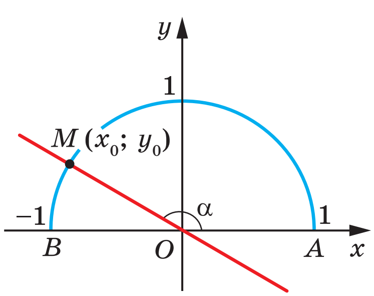


Рис. 12.2

Якщо пряма $y = kx$ збігається з віссю абсцис, то кут між цією прямою та додатним напрямом осі абсцис вважають рівним $0°$.

Якщо пряма $y = kx$ утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α, то вважають, що й пряма $y = kx + b$, яка паралельна прямій $y = kx$, також утворює кут α з додатним напрямом осі абсцис (рис. 12.3).

Розглянемо пряму MO, рівняння якої має вигляд $y = kx$ (рис. 12.2). Якщо $\angle MOA = \alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y_0}{x_0}$. Оскільки точка $M\ (x_0;\ y_0)$ належить прямій $y = kx$, то $\frac{y_0}{x_0} = k$. Звідси $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Таким чином, для прямої $y = kx + b$ отримуємо, що

$$\boxed{k = \operatorname{tg}\alpha,}$$

де α — кут, який утворює ця пряма з додатним напрямом осі абсцис. Тому коефіцієнт k називають **кутовим коефіцієнтом** цієї прямої, а саме рівняння $y = kx + b$ називають **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом.**

Коли невертикальні прямі паралельні, то вони утворюють рівні кути з додатним напрямом осі абсцис. Тоді тангенси цих кутів рівні, отже, рівні і їхні кутові коефіцієнти.

Таким чином,

якщо прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ паралельні, то $k_1 = k_2$ **(2)**.

Висновки **(1)** і **(2)** об'єднаємо в одну теорему.

Теорема 12.1. ***Прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ є паралельними тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $b_1 \neq b_2$.***

У ряді випадків виникає потреба скласти рівняння прямої, знаючи координати однієї її точки та кутовий коефіцієнт прямої.

Нехай пряма $y = kx + b$ проходить через точку $M\ (x_0;\ y_0)$. Тоді $y_0 = kx_0 + b$. Звідси $b = y_0 - kx_0$. Тепер рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом можна записати так: $y = kx + y_0 - kx_0$. Звідси

$$\boxed{y = k\,(x - x_0) + y_0}$$

Отримане рівняння називають **рівнянням прямої із заданим кутовим коефіцієнтом, яка проходить через дану точку** $M\ (x_0;\ y_0)$.

Пряму можна задати будь-якими двома її точками. Тому, знаючи координати двох точок прямої, можна вивести її рівняння. У попередньому пункті ви розв'язували таку задачу для деяких окремих випадків (див. задачі 11.6, 11.7). Розв'яжемо цю задачу в загальному вигляді.

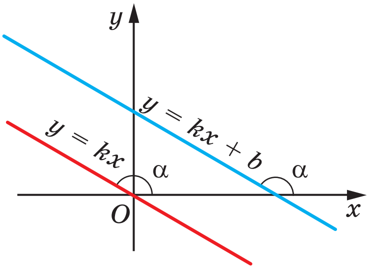


Рис. 12.3

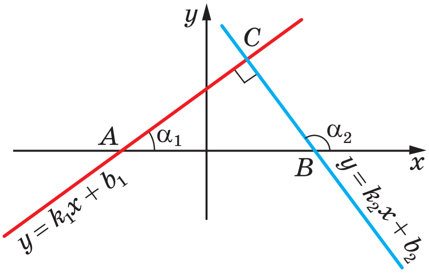


Рис. 12.4

Розглянемо дві точки $A\ (x_1;\ y_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2)$.

Якщо $x_1 = x_2$ і $y_1 \neq y_2$, то пряма AB є вертикальною та її рівняння має вигляд $x = x_1$.

Якщо $y_1 = y_2$ і $x_1 \neq x_2$, то пряма AB є горизонтальною та її рівняння має вигляд $y = y_1$.

Нехай $x_1 \neq x_2$ і $y_1 \neq y_2$. Запишемо рівняння прямої AB так: $y = k\ (x - x_1) + y_1$, де k — кутовий коефіцієнт прямої AB. Оскільки точка $B\ (x_2;\ y_2)$ належить прямій AB, то можна записати: $y_2 = k\ (x_2 - x_1) + y_1$. Звідси $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Підставивши знайдене значення k у рівняння $y = k\ (x - x_1) + y_1$, отримаємо: $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + y_1$. Звідси

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

Отримане рівняння називають **рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки** $A\ (x_1;\ y_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2)$.

Теорема 12.2. ***Прямі*** $y = k_1x + b_1$ ***і*** $y = k_2x + b_2$ ***є перпендикулярними тоді й тільки тоді, коли*** $k_1k_2 = -1$.

Доведення

• Нехай прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перпендикулярні. Доведемо, що $k_1k_2 = -1$.

Нехай $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ і прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перетинаються в точці C, а вісь абсцис ці прямі перетинають відповідно в точках A і B (рис. 12.4).

У трикутнику ABC маємо: $\angle A + \angle B = 90°$. Тоді $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 1$. Звідси $\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg}\ (180° - \alpha_2) = 1$; $\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1$; $k_1k_2 = -1$.

Випадок, коли прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перетинаються в точці, яка належить осі абсцис, розгляньте самостійно.

• Нехай $k_1k_2 = -1$. Доведемо, що прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ перпендикулярні.

Маємо: $\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 < 0$. Тоді один із кутів α_1 або α_2 гострий, а другий тупий. Нехай, наприклад, α_1 — гострий кут, α_2 — тупий (рис. 12.4). Запишемо:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2 = -1;$$
$$\operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} (180° - \alpha_2) = 1;$$
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{\operatorname{tg} (180° - \alpha_2)};$$
$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{ctg} (180° - \alpha_2);$$
$$\operatorname{ctg} (90° - \alpha_1) = \operatorname{ctg} (180° - \alpha_2).$$

Оскільки кути $90° - \alpha_1$ і $180° - \alpha_2$ гострі та їхні котангенси рівні, то рівні й самі кути. Отримуємо:

$$90° - \alpha_1 = 180° - \alpha_2;$$
$$\alpha_1 + (180° - \alpha_2) = 90°.$$

А це означає, що дані прямі перпендикулярні. ◀

Доведемо, що відстань ρ від точки $M\ (x_0;\ y_0)$ до прямої, заданої рівнянням $ax + by + c = 0$, можна обчислити за формулою

$$\boxed{\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Нехай $b \neq 0$. Тоді кутовий коефіцієнт даної прямої дорівнює $-\frac{a}{b}$.

Із точки M опустимо перпендикуляр MP на дану пряму (рис. 12.5). Тоді кутовий коефіцієнт прямої MP дорівнює $\frac{b}{a}$, а її рівняння має вигляд $y = \frac{b}{a}(x - x_0) + y_0$.

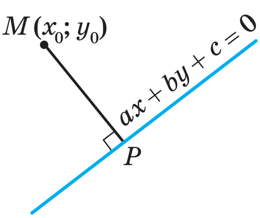


Рис. 12.5

Для того щоб знайти координати точки P, потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} ax + by + c = 0, \\ y = \frac{b}{a}(x - x_0) + y_0. \end{cases}$$

Перепишемо цю систему в такому вигляді:

$$\begin{cases} a(x - x_0) + b(y - y_0) + ax_0 + by_0 + c = 0, \\ y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0). \end{cases}$$

Звідси легко отримати, що

$$\begin{cases} x - x_0 = -\dfrac{a}{a^2 + b^2}(ax_0 + by_0 + c), \\ y - y_0 = -\dfrac{b}{a^2 + b^2}(ax_0 + by_0 + c). \end{cases}$$

Маємо: $MP^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \dfrac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2 + b^2}$. Звідси

$$MP = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Зазначимо, що ця формула залишається справедливою при $b = 0$, тобто у випадку, коли дана пряма є вертикальною.

Задача 1. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A\ (-4; 3)$ і паралельна прямій $y = 0{,}5x - 4$.

Розв'язання. Із теореми 12.1 випливає, що кутовий коефіцієнт шуканої прямої дорівнює 0,5. Ця пряма проходить через точку $A\ (-4; 3)$. Тому, скориставшися рівнянням прямої із заданим кутовим коефіцієнтом, яка проходить через дану точку, запишемо: $y = 0{,}5\ (x + 4) + 3$.

Відповідь: $y = 0{,}5x + 5$. ◄

Задача 2. Точки $A\ (1; 1)$, $B\ (4; 2)$, $C\ (0; 7)$ — вершини трикутника ABC. Знайдіть рівняння прямої, яка містить висоту трикутника, проведену до сторони AB.

Розв'язання. Скориставшися рівнянням прямої, яка проходить через дві задані точки, знайдемо рівняння прямої AB:

$$\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-1}{2-1};$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Звідси отримуємо, що кутовий коефіцієнт шуканої прямої дорівнює -3.

Скориставшися рівнянням прямої із заданим кутовим коефіцієнтом, яка проходить через дану точку C, запишемо:

$$y = -3\ (x - 0) + 7;$$

$$y = -3x + 7.$$

Відповідь: $y = -3x + 7$. ◄

Задача 3. Знайдіть рівняння дотичної до кола $x^2 + y^2 = 5$, якщо відомо, що дотична паралельна прямій $y = 2x + 9$.

Розв'язання. Рівняння дотичної має вигляд $y = 2x + b$.

І спосіб. Для того щоби пряма $y = 2x + b$ була дотичною до кола $x^2 + y^2 = 5$, система рівнянь

$$\begin{cases} y = 2x + b, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

повинна мати єдиний розв'язок.

Маємо: $\begin{cases} y = 2x + b, \\ x^2 + (2x + b)^2 = 5. \end{cases}$

Залишилося з'ясувати, при яких значеннях параметра b рівняння $x^2 + (2x + b)^2 = 5$ має єдиний розв'язок.

Запишемо: $5x^2 + 4bx + b^2 - 5 = 0$. Звідси $D = 16b^2 - 20b^2 + 100$. Отримуємо, що $D = 0$ при $b = 5$ або $b = -5$.

Шукані рівняння дотичних мають вигляд $y = 2x + 5$ і $y = 2x - 5$.

ІІ спосіб. Пряма $y = 2x + b$ є дотичною до кола $x^2 + y^2 = 5$, якщо відстань від центра кола до цієї прямої дорівнює радіусу кола, тобто відстань від точки O (0; 0) до прямої $2x - y + b = 0$ дорівнює $\sqrt{5}$.

Запишемо: $\sqrt{5} = \frac{|2 \cdot 0 - 0 + b|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$. Звідси $b = 5$ або $b = -5$.

Відповідь: $y = 2x + 5$, $y = 2x - 5$. ◄

1. Поясніть, що називають кутом між прямою та додатним напрямом осі абсцис.
2. Чому вважають рівним кут між прямою, яка паралельна осі абсцис або збігається з нею, та додатним напрямом осі абсцис?
3. Що називають кутовим коефіцієнтом прямої?
4. Як пов'язані кутовий коефіцієнт прямої та кут між прямою й додатним напрямом осі абсцис?
5. Сформулюйте необхідну і достатню умову паралельності двох невертикальних прямих на координатній площині.
6. Який вигляд має рівняння прямої з даним кутовим коефіцієнтом, яка проходить через дану точку?
7. Який вигляд має рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки?
8. Сформулюйте необхідну і достатню умову перпендикулярності двох невертикальних прямих на координатній площині.
9. За якою формулою можна обчислити відстань від точки M $(x_0; y_0)$ до прямої, заданої рівнянням $ax + by + c = 0$?

ВПРАВИ

12.1.° Чому дорівнює кутовий коефіцієнт прямої:
1) $y = 2x - 7$; 3) $y = x + 10$; 5) $y = 4$;
2) $y = -3x$; 4) $y = 5 - x$; 6) $3x - 2y = 4$?

12.2.° Які з прямих $y = 6x - 5$, $y = 0{,}6x + 1$, $y = \frac{3}{5}x + 4$, $y = 2 - 6x$ і $y = 600 + 0{,}6x$ паралельні?

12.3.° Які з прямих $y = 3x + 2$, $y = -3x - 4$, $y = 5 - \frac{1}{3}x$, $y = \frac{2}{5}x$, $y = \frac{1}{3}x + 1$, $y = -2{,}5x + 3$ перпендикулярні?

12.4.° Яке число треба підставити замість зірочки, щоби були паралельними прямі:
1) $y = 8x - 14$ і $y = {*}x + 2$; 2) $y = {*}x - 1$ і $y = 3 - 4x$?

12.5.° Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і паралельна прямій:
1) $y = 14x - 11$; 2) $y = -1{,}15x + 2$.

12.6.° Складіть рівняння прямої, що проходить через початок координат і паралельна прямій:
1) $y = 0{,}1x - 3$; 2) $y = \left(2 - \sqrt{3}\right)x + 1$.

12.7.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A\ (-3;\ 7)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює: 1) 4; 2) -3; 3) 0.

12.8.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $B\ (2;\ -5)$ і кутовий коефіцієнт якої дорівнює $-0{,}5$.

12.9.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M\ (-1;\ 9)$ і паралельна прямій: 1) $y = -7x + 3$; 2) $3x - 4y = -8$.

12.10.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $K\left(-\frac{1}{3};10\right)$ і паралельна прямій: 1) $y = 9x - 16$; 2) $6x + 2y = 7$.

12.11.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $M\ (2;\ -1)$ і перпендикулярна до прямої:
1) $y = -0{,}2x - 3$; 2) $3x - 6y = 2$.

12.12.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A\ (-3;\ -1)$ і перпендикулярна до прямої:
1) $y = -x + \frac{1}{2}$; 2) $2x + y = -3$.

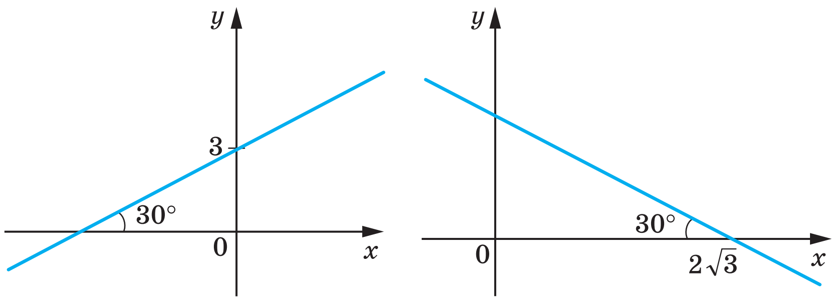
12.13.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку A (2; 6) та утворює з додатним напрямом осі абсцис кут:

1) 60°; 2) 120°.

12.14.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку B (3; −2) та утворює з додатним напрямом осі абсцис кут:

1) 45°; 2) 135°.

12.15.° Складіть рівняння прямої, зображеної на рисунку 12.6.



а *б*

Рис. 12.6

12.16.° Складіть рівняння прямих, зображених на рисунку 12.7.

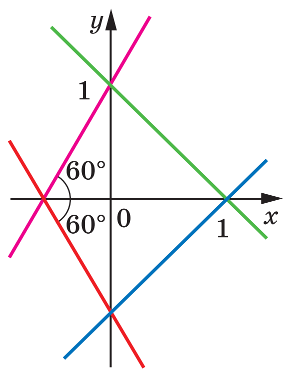


Рис. 12.7

12.17.° Визначте, чи паралельні прямі:

1) $2x - 5y = 9$ і $5y - 2x = 1$;
2) $8x + 12y = 15$ і $4x + 6y = 9$;
3) $7x - 2y = 12$ і $7x - 3y = 12$;
4) $3x + 2y = 3$ і $6x + 4y = 6$.

12.18.° Доведіть, що прямі $7x - 6y = 3$ і $6y - 7x = 6$ паралельні.

12.19.° Знайдіть координати точок перетину прямої AB з осями координат, якщо:

1) A (1; 1), B (2; 3);
2) A (3; −1), B (−2; 2).

12.20.° Знайдіть відстань від точки M (−1; 2) до прямої:

1) $3x - 4y = 2$;
2) $-5x + 12y = 1$.

12.21.° Знайдіть відстань від точки перетину прямих AB і CD до прямої $6x - 8y = -1$, якщо A (1; −1), B (2; 1), C (3; 1), D (−4; 2).

12.22.° Складіть рівняння прямої, яка проходить через центри двох даних кіл:
1) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ і $x^2 + y^2 - 10x - 6y = 2$;
2) $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2$ і $x^2 + y^2 - 6x - 4y = 3$.

12.23.• Складіть рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = 4x + 2$ і перетинає пряму $y = -8x + 9$ у точці, що належить осі ординат.

12.24.• Складіть рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = 3x + 4$ і перетинає пряму $y = -4x + 16$ у точці, що належить осі абсцис.

12.25.• Складіть рівняння прямої, яка перпендикулярна до прямої $y = 2x + 3$ і перетинає пряму $-x + 3y = -6$ у точці, що належить осі абсцис.

12.26.• Складіть рівняння прямої, яка перпендикулярна до прямої $2x + y = 1$ і перетинає пряму $x - 4y = -1$ у точці, що належить осі ординат.

12.27.• Дано точки A $(-1; 5)$ і B $(8; 2)$. Знайдіть рівняння прямої, яка перпендикулярна до прямої AB і перетинає відрізок AB у точці M такій, що $AM : MB = 2 : 1$.

12.28.• Запишіть рівняння прямих, які містять висоти трикутника ABC, якщо A $(1; 3)$, B $(5; -7)$, C $(-1; 9)$.

12.29.• Точки A $(1; 2)$, B $(2; 5)$ і C $(7; 0)$ є вершинами трикутника ABC. Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через вершину B і перпендикулярна до бісектриси трикутника, проведеної з вершини A.

12.30.• Дано трикутник ABC, де A $(1; -2)$, B $(3; 4)$ і C $(-1; 2)$. Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через вершину B і перпендикулярна до медіани трикутника, проведеної з вершини A.

12.31.• Знайдіть площу трикутника ABC, якщо A $(1; -2)$, B $(1; 1)$ і C $(-3; -5)$.

12.32.• Знайдіть рівняння кола із центром у точці M $(-2; 1)$, яке дотикається до прямої $8x - 15y = -2$.

12.33.• Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від двох даних паралельних прямих $5x - 12y = 1$ і $-5x + 12y = -3$.

12.34.• Знайдіть рівняння дотичної до кола $x^2 + (y - 2)^2 = 25$, якщо ця дотична проходить через точку M $(3; -2)$.

12.35.•• Запишіть рівняння кола, яке проходить через точки A $(5; -3)$ і B $(-3; 5)$ і центр якого належить прямій $2x + 3y = 5$.

12.36.•• Знайдіть ГМТ, рівновіддалених від прямих $3x - 4y = -7$ і $4x - 3y = 8$.

12.37.•• Знайдіть відстань між прямими:

1) $3x + 4y = 8$ і $3x + 4y = -12$;

2) $4x + 3y = 5$ і $8x + 6y = 3$.

12.38.•• Запишіть рівняння кіл радіуса 1, які дотикаються до прямих $3x - 4y = 1$ і $4x - 3y = -1$.

12.39.•• Знайдіть рівняння дотичних до кола $x^2 + y^2 - 2y = 9$, які проходять через точку M (7; 2).

12.40.•• Знайдіть рівняння спільних дотичних до кіл $x^2 + y^2 = 6x$ і $x^2 + y^2 = 6y$.

12.41.•• Точка A лежить на прямій $3x - 4y = -34$, а точка B — на колі $x^2 + y^2 - 8x + 2y = 8$. Знайдіть найменшу можливу відстань між точками A і B.

13. Метод координат

Ми часто говоримо: пряма $y = 2x - 1$, парабола $y = x^2$, коло $x^2 + y^2 = 1$, тим самим ототожнюючи фігуру з її рівнянням. Такий підхід дає змогу зводити задачу про пошук властивостей фігури до задачі про дослідження її рівняння. У цьому й полягає сутність методу координат.

Проілюструємо сказане на такому прикладі.

Із наочних міркувань очевидно, що пряма й коло мають не більше двох спільних точок. Проте таке твердження не є аксіомою, тому його потрібно доводити.

Ця задача зводиться до дослідження кількості розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ (x - m)^2 + (y - n)^2 = R^2, \end{cases}$$

де параметри a і b одночасно не дорівнюють нулю та $R > 0$.

Розв'язуючи цю систему методом підстановки, ми отримаємо квадратне рівняння, яке може мати два розв'язки, один розв'язок або взагалі не мати розв'язків. Отже, для даної системи існує три можливих випадки:

1) система має два розв'язки — пряма й коло перетинаються у двох точках;

2) система має один розв'язок — пряма дотикається до кола;

3) система не має розв'язків — пряма й коло не мають спільних точок.

З кожним із цих випадків ви зустрічалися, розв'язуючи задачі 11.14–11.16 відповідно.

На користь методу координат свідчить така задача: чи можна вписати в еліпс правильний шестикутник?

Припустимо, що в еліпс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a \neq b)$ вдалося вписати правильний шестикутник. Опишемо навколо шестикутника коло. Тоді еліпс і коло мають не менше ніж шість спільних точок. Це означає, що коли $x^2 + y^2 = R^2$ — рівняння описаного кола, то система

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ x^2+y^2=R^2 \end{cases}$$

має не менше шести розв'язків.

Нескладно показати, що ця система має не більше чотирьох розв'язків. Тому відповідь на поставлене питання заперечна.

Метод координат є особливо ефективним у тих випадках, коли потрібно знайти фігуру, усім точкам якої притаманна задана властивість, тобто знайти ГМТ.

Позначимо на площині дві точки A і B. Ви знаєте, якою фігурою є геометричне місце точок M таких, що $\frac{MB}{MA}=k$, де $k \neq 1$. Це коло (коло Аполлонія). З досить непростим способом пошуку цього ГМТ ви ознайомились у підручнику «Геометрія, 8 клас». Метод координат дає змогу розв'язати цю задачу набагато простіше.

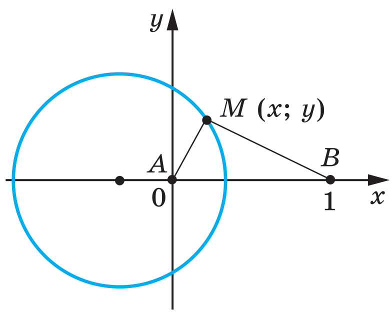


Рис. 13.1

Площину, на якій позначено точки A і B, «перетворимо» на координатну. Зробимо це так: за початок координат виберемо точку A, за одиничний відрізок — відрізок AB, вісь абсцис проведемо так, щоб точка B мала координати (1; 0) (рис. 13.1).

Точка M $(x;\ y)$ координатної площини належить шуканій фігурі F тоді й тільки тоді, коли $kMA = MB$, або $k^2MA^2 = MB^2$. Звідси:

$$k^2(x^2 + y^2) = (x - 1)^2 + y^2;$$

$$(k^2 - 1)\,x^2 + 2x + (k^2 - 1)\,y^2 = 1.$$

Оскільки $k \neq 1$, то можна записати:

$$x^2+\frac{2}{k^2-1}x+y^2=\frac{1}{k^2-1};$$

$$x^2 + \frac{2}{k^2 - 1}x + \frac{1}{(k^2 - 1)^2} + y^2 = \frac{1}{k^2 - 1} + \frac{1}{(k^2 - 1)^2};$$

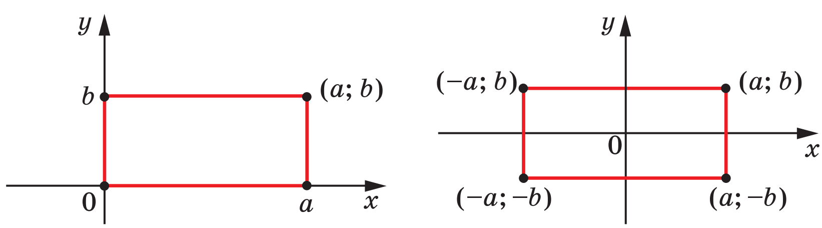
$$\left(x + \frac{1}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{k^2}{(k^2 - 1)^2}. \qquad (*)$$

Таким чином, рівнянням фігури F є рівняння (*), тобто фігура F — це коло із центром у точці $O\left(\frac{1}{1 - k^2}; 0\right)$ і радіусом $\frac{k}{|k^2 - 1|}$.

Зазначимо, що застосування методу координат передбачає виконання певної технічної роботи, пов'язаної з перетвореннями виразів, розв'язуванням рівнянь або систем рівнянь. Вдалий вибір системи координат може значно полегшити викладки.

Перетворюючи площину на координатну, ми деяким точкам приписуємо координати, які в рівняннях, що складаються, відіграють роль параметрів. Природно, потрібно прагнути до такого вибору системи координат, щоби параметрів було якомога менше.

Наприклад, може здаватися, що для задання чотирьох вершин прямокутника необхідно 8 параметрів. Проте якщо ввести систему координат так, як показано на рисунку 13.2, то досить двох параметрів.



а *б*

Рис. 13.2

Задача (формула Лейбніца). Нехай медіани трикутника ABC перетинаються в точці M. Доведіть, що для будь-якої точки X виконується рівність

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 3XM^2. \qquad (*)$$

Розв'язання. Щоб задати координати вершин трикутника, здавалося б, потрібно 6 параметрів. Проте якщо вибрати систему координат так, як показано на рисунку 13.3, то можна обмежитися трьома параметрами.

Оскільки $BM : MO = 2 : 1$, то точка M має координати $\left(\frac{b}{3}; \frac{c}{3}\right)$.

Нехай $X\ (x; y)$ — довільна точка. Тоді

$$XA^2 = (x + a)^2 + y^2;$$
$$XB^2 = (x - b)^2 + (y - c)^2;$$
$$XC^2 = (x - a)^2 + y^2;$$
$$MA^2 = \left(\frac{b}{3} + a\right)^2 + \frac{c^2}{9};$$

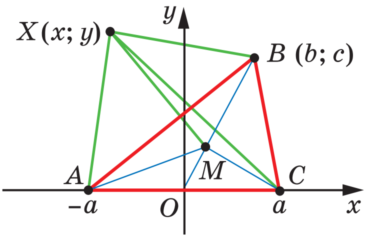


Рис. 13.3

$$MB^2 = \left(\frac{b}{3} - b\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - c\right)^2 = \frac{4b^2}{9} + \frac{4c^2}{9};$$
$$MC^2 = \left(\frac{b}{3} - a\right)^2 + \frac{c^2}{9};$$
$$XM^2 = \left(x - \frac{b}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{c}{3}\right)^2.$$

Тепер легко переконатися (зробіть це самостійно), що формула (*) є правильною. ◄

?

Опишіть, у чому полягає сутність методу координат.

Готфрід Вільгельм Лейбніц
(1646–1716)

Німецький математик, фізик і філософ, перший президент Берлінської академії наук. Увів багато математичних термінів і понять (функція, алгоритм, координата тощо), заклав основи сучасної математичної логіки. Одночасно з І. Ньютоном, але незалежно від нього створив теорії диференційного та інтегрального числень.

ВПРАВИ

13.1.• Знайдіть ГМТ, різниця квадратів відстаней від яких до двох даних точок A і B є величиною сталою.

13.2.• Знайдіть ГМТ, сума квадратів відстаней від яких до двох даних точок A і B є величиною сталою.

13.3.• Знайдіть ГМТ, сума квадратів відстаней від яких до вершин A і B трикутника ABC дорівнює квадрату відстані до третьої його вершини — точки C.

13.4.• Знайдіть ГМТ, сума квадратів відстаней від яких до вершин трикутника ABC є величиною сталою.

13.5.• Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок M таких, що $AM^2 + 2BM^2 = 6AB^2$.

13.6.• Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок M таких, що $2AM^2 - BM^2 = 2AB^2$.

13.7.• Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок C таких, що медіана AD трикутника ABC має сталу довжину d.

13.8.• Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок C таких, що медіана AD трикутника ABC дорівнює його стороні BC.

13.9.• Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок C таких, що висота CD трикутника ABC дорівнює його медіані AM.

13.10.• Дано прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). Знайдіть геометричне місце точок M таких, що $MA^2 + MB^2 = 2MC^2$.

13.11.•• На відрізку AB довільним чином вибирають точку C. В одній півплощині від прямої AB на відрізках AC і CB як на сторонах будують квадрати. Знайдіть геометричне місце середин відрізків, які сполучають центри квадратів.

13.12.•• На відрізку AB довільним чином вибирають точку C. В одній півплощині від прямої AB на відрізках AC і CB як на сторонах будують рівносторонні трикутники AMC і CNB. Доведіть, що середина відрізка MB, середина відрізка NA і точка C є вершинами рівностороннього трикутника.

13.13.•• Радіус кола, описаного навколо трикутника ABC, дорівнює $2\sqrt{3}$. На стороні AB позначили точку D так, що $AD = 2DB$ і $CD = 2\sqrt{2}$. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $\angle ACB = 60°$.

13.14.•• Хорда AB стягує дугу, градусна міра якої дорівнює $120°$. Точка C лежить на цій дузі, а точка D — на хорді AB. Відомо, що $AD = 2$, $BD = 1$, $CD = \sqrt{2}$. Знайдіть площу трикутника ABC.

13.15.•• На діагоналях AC і BD паралелограма $ABCD$ позначили відповідно точки P і Q так, що $AP : PC = 2 : 3$ і $BQ : QD = 1 : 4$. Знайдіть відрізок PQ, якщо $AB = 5$, $AD = 3$, $\angle ADB = 90°$.

13.16.•• Через довільну точку M меншого з двох концентричних кіл, радіуси яких дорівнюють R і r, $R > r$, проведено хорду BC більшого кола та хорду MA меншого кола (рис. 13.4). Відомо, що $BC \perp MA$. Знайдіть суму $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

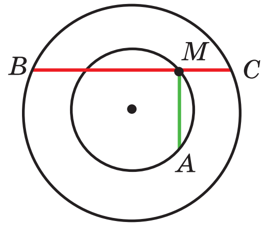


Рис. 13.4

13.17.•• Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $(a - c)^2 + (b - d)^2$, якщо $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 4$.

13.18.•• У ромб $ABCD$ з гострим кутом $45°$ вписано коло. Доведіть, що для будь-якої точки X кола виконується рівність $XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2 = \frac{5}{2}AB^2$.

13.19.•• У ромб $ABCD$ з гострим кутом $60°$ вписано коло. Доведіть, що для будь-якої точки X кола виконується рівність

$$XA^2 + XB^2 + XC^2 + XD^2 = \frac{11}{4}AB^2.$$

13.20.•• У квадрат $ABCD$ вписано коло одиничного радіуса. Доведіть, що для будь-якої точки X кола виконується рівність

$$XA^2 \cdot XC^2 + XB^2 \cdot XD^2 = 10.$$

13.21.•• У правильному шестикутнику $ABCDEF$ сторони AB і CD продовжили до їх перетину в точці K. Доведіть, що для будь-якої точки X кола, описаного навколо шестикутника, виконується рівність $XK^2 = XB^2 + XC^2$.

13.22.•• На діаметрі кола радіуса R із центром O позначили точку M. Доведіть, що сума квадратів відстаней від точки M до кінців хорди, паралельної цьому діаметру, не залежить від вибору хорди.

13.23.•• На діаметрі кола радіуса R позначили дві точки, рівновіддалені від центра. Через одну з них провели хорду, кінці якої сполучили з другою точкою. Доведіть, що сума квадратів сторін утвореного трикутника не залежить від вибору хорди.

13.24.•• У колі із центром O проведено два перпендикулярних діаметри AB і CD. На радіусі OB позначили точку K так, що $OK = \frac{1}{3}OB$, а на радіусі OD — точку M так, що $OM = \frac{1}{2}OD$. Доведіть, що точка перетину прямих CK і AM належить даному колу.

13.25.•• Діагоналі опуклого чотирикутника $ABCD$ перпендикулярні. Через середини сторін AB і AD проведено прямі, перпендикулярні відповідно до сторін DC і BC. Доведіть, що точка перетину проведених прямих належить прямій AC.

ЯК БУДУВАЛИ МІСТ МІЖ ГЕОМЕТРІЄЮ ТА АЛГЕБРОЮ

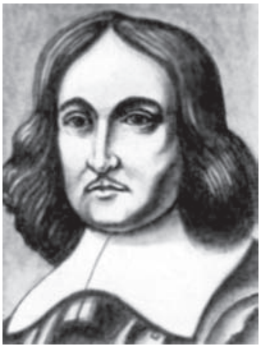
Ідея координат зародилася дуже давно. Адже ще в давнину люди вивчали Землю, спостерігали зорі, а за результатами своїх досліджень складали карти, схеми.

У II ст. до н. е. давньогрецький учений Гіппарх уперше використав ідею координат для визначення місця розташування об'єктів на поверхні Землі.

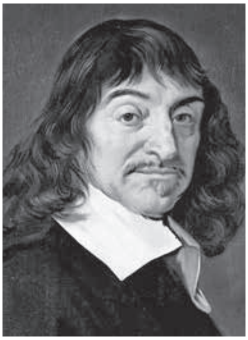
Лише в XIV ст. французький учений Нікола Орем (близько 1323–1382) уперше застосував у математиці ідею Гіппарха: він розбив площину на клітинки (як розбито аркуш вашого зошита) і почав задавати положення точок широтою й довготою.

Однак величезні можливості застосування цієї ідеї були розкриті лише в XVII ст. у роботах видатних французьких математиків П'єра Ферма та Рене Декарта. У своїх працях ці вчені показали, як завдяки системі координат можна переходити від точок до чисел, від ліній до рівнянь, від геометрії до алгебри.

Попри те що П. Ферма опублікував свою роботу на рік раніше за Р. Декарта, систему координат, якою ми сьогодні користуємося, називають **декартовою**. Р. Декарт у своїй роботі «Міркування про



П'єр Ферма
(1601–1665)



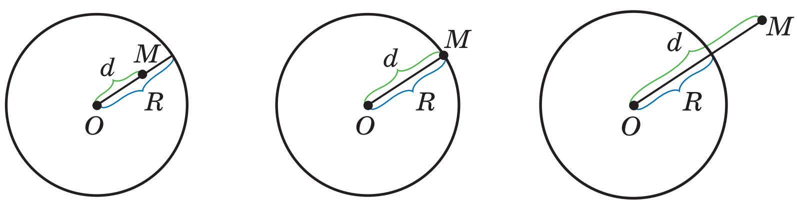
Рене Декарт
(1596–1650)

метод» запропонував нову зручну буквену символіку, якою з незначними змінами ми користуємося й сьогодні. Слідом за Декартом ми позначаємо змінні останніми буквами латинського алфавіту x, y, z, а коефіцієнти — першими: a, b, c, ... Звичні нам позначення степенів x^2, y^3, z^5 і т. д. також увів Р. Декарт.

РАДИКАЛЬНА ВІСЬ ДВОХ КІЛ

Розглянемо коло радіуса R із центром у точці O. Нехай M — довільна точка. Позначимо $MO = d$. Величину, яка дорівнює $d^2 - R^2$, називають **степенем точки M відносно даного кола**.

Якщо точка M лежить усередині кола (рис. 13.5, *а*), то її степінь є від'ємним; якщо точка M належить колу (рис. 13.5, *б*), то її степінь дорівнює нулю; якщо точка M лежить поза колом (рис. 13.5, *в*), то її степінь є додатним.



а *б* *в*

Рис. 13.5

Через точку M, яка лежить поза колом, проведемо дотичну MA (рис. 13.6). Оскільки $OA \perp MA$, то $MA^2 = MO^2 - OA^2 = d^2 - R^2$, тобто величина MA^2 дорівнює степеню точки M відносно даного кола.

Розглянемо два кола із центрами O_1 і O_2 та радіусами R_1 і R_2 відповідно. Знайдемо ГМТ, які мають однаковий степінь відносно даних кіл.

Точка X належить шуканому ГМТ тоді й тільки тоді, коли $XO_1^2 - R_1^2 = XO_2^2 - R_2^2$. Звідси

$$XO_1^2 - XO_2^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

Оскільки різниця $R_1^2 - R_2^2$ для даних кіл є величиною сталою, то з ключової задачі 13.1 випливає, що шуканим ГМТ

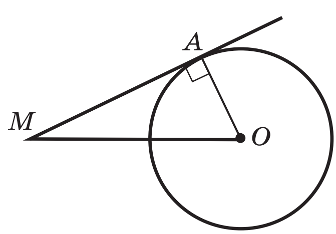


Рис. 13.6

є пряма, перпендикулярна до прямої O_1O_2. Цю пряму називають **радикальною віссю** даних кіл.

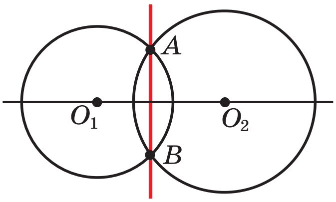


Рис. 13.7

Нехай кола із центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B (рис. 13.7). Точки A і B відносно даних кіл мають степінь, який дорівнює 0. Отже, вони належать радикальній осі цих кіл. Це означає, що пряма AB — радикальна вісь.

Якщо кола дотикаються в точці A (рис. 13.8), то їхня радикальна вісь проходить через точку A і перпендикулярна до прямої O_1O_2 (подумайте, чому).

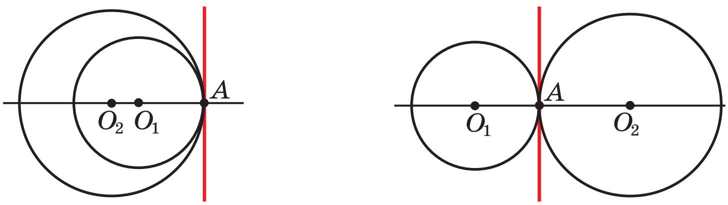


Рис. 13.8

Якщо через точку X, яка належить радикальній осі двох кіл, проведено до цих кіл дотичні XA і XB (A і B — точки дотику), то отримаємо, що $XA = XB$ (рис. 13.9). Ця властивість підказує, як побудувати радикальну вісь двох кіл, зображених на рисунку 13.9.

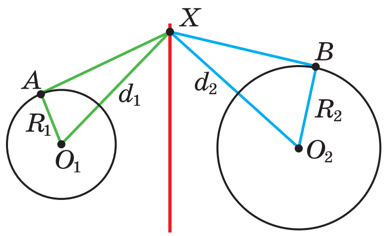


Рис. 13.9

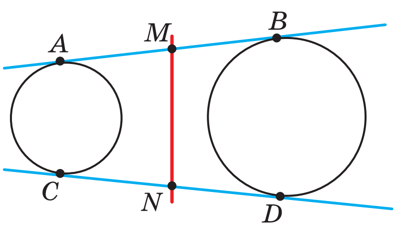


Рис. 13.10

Проведемо дві спільні зовнішні дотичні AB і CD (A, B, C і D — точки дотику). Нехай точки M і N — середини відповідно відрізків AB і CD (рис. 13.10). Тоді ці точки мають однаковий степінь відносно даних кіл. Отже, пряма MN — радикальна вісь.

Зрозуміло, що побудову радикальної осі цих кіл можна здійснити, провівши їхні спільні внутрішні дотичні EF і PQ (E, F, P і Q — точки дотику).

Зі сказаного випливає, що середини відрізків AB, CD, EF і PQ лежать на одній прямій, перпендикулярній до прямої O_1O_2 (рис. 13.11).

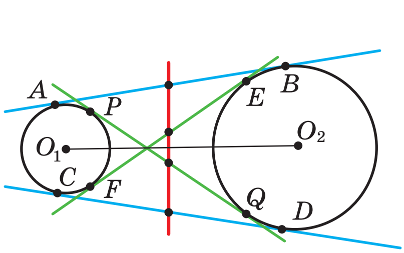


Рис. 13.11

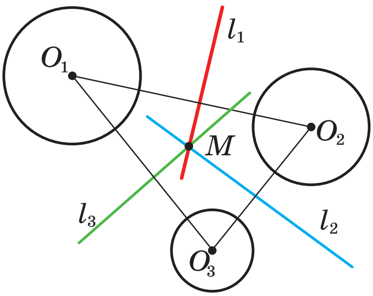


Рис. 13.12

Доведіть самостійно, що кола, центри яких збігаються, не мають радикальної осі.

Теорема. ***Якщо центри трьох кіл не лежать на одній прямій і для кожної пари кіл проведено радикальну вісь, то всі три радикальні осі перетинаються в одній точці.***

Доведення. Позначимо центри кіл O_1, O_2, O_3. Нехай прямі l_1 і l_2 — радикальні осі кіл із центрами O_1, O_2 і O_2, O_3 відповідно. Оскільки точки O_1, O_2 і O_3 не лежать на одній прямій, то $l_1 \cap l_2 \neq \varnothing$. Нехай $l_1 \cap l_2 = M$ (рис. 13.12). Тоді точка M має однаковий степінь відносно кіл із центрами O_1 і O_3, а отже, належить радикальній осі l_3 цих кіл. Таким чином, прямі l_1, l_2 і l_3 перетинаються в одній точці. Її називають **радикальним центром** трьох кіл. ◄

Покажемо, як за допомогою цієї теореми побудувати радикальну вісь кіл, розміщених так, як показано на рисунку 13.13.

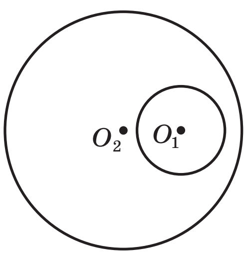


Рис. 13.13

Проведемо третє коло, центр якого не лежить на прямій O_1O_2 та яке перетинає кожне з даних кіл у двох точках. Точки перетину позначено на рисунку 13.14 буквами A, B, C і D. Тоді точка M перетину прямих AB і CD

належить радикальній осі кіл із центрами O_1 і O_2. Залишилося провести через точку M пряму, перпендикулярну до прямої O_1O_2. Вона й буде шуканою радикальною віссю.

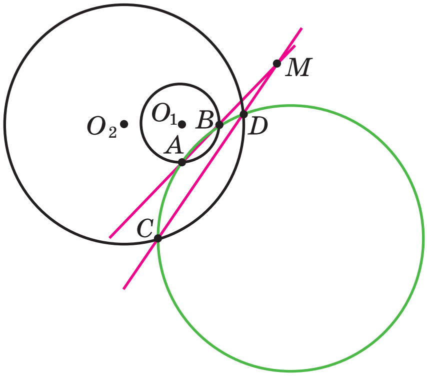


Рис. 13.14

ВПРАВИ

1. Три кола попарно дотикаються зовнішнім чином (рис. 13.15), A, B і C — точки дотику. Спільні дотичні до кіл, проведені через точки A і B, перетинаються в точці M. Доведіть, що $MA = MB = MC$.

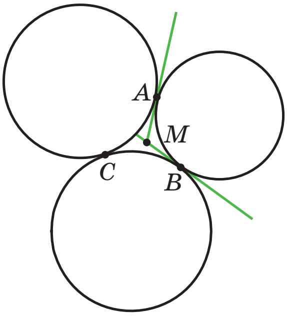


Рис. 13.15

2. Дано коло й дві точки, які лежать поза цим колом. Побудуйте коло, яке дотикається до даного кола та проходить через задані точки.

Вказівка. Радикальною віссю даного та шуканого кіл є їхня спільна дотична. Ця дотична проходить через радикальний центр трьох кіл: даного кола та будь-яких двох кіл, які проходять через дві дані точки.

3. На сторонах BC і AC трикутника ABC позначили відповідно точки A_1 і B_1. На відрізках AA_1 і BB_1 як на діаметрах побудували кола, які перетинаються в точках M і N. Доведіть, що пряма MN містить ортоцентр трикутника ABC.

Вказівка. Доведіть, що ортоцентр трикутника ABC є радикальним центром двох указаних кіл і кола, побудованого на стороні AB як на діаметрі.

4. Точки A, B, C і D у вказаному порядку лежать на одній прямій. Кола з діаметрами AC і BD перетинаються в точках X і Y. Нехай P — точка на прямій XY. Пряма CP перетинає коло з діаметром AC у точках C і M, а пряма BP перетинає коло з діаметром BD у точках B і N. Доведіть, що прямі AM, ND, XY перетинаються в одній точці.

Вказівка. Доведіть, що точки A, M, N і D лежать на одному колі. Радикальний центр цього кола та кіл з діаметрами AC і BD і є точкою перетину прямих AM, ND і XY.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 4

Відстань між двома точками

Відстань між точками A $(x_1;\ y_1)$ і B $(x_2;\ y_2)$ можна знайти за формулою

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні

Якщо точка M $(x_0;\ y_0)$ ділить відрізок AB у відношенні $\frac{AM}{MB} = \lambda$, то координати цієї точки можна обчислити за формулами

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

де $(x_1;\ y_1)$ і $(x_2;\ y_2)$ — координати відповідно точок A і B.

Рівняння фігури

Рівнянням фігури F, заданої на площині xy, називають рівняння з двома змінними x і y, яке має такі властивості:

1) якщо точка належить фігурі F, то її координати є розв'язком даного рівняння;
2) будь-який розв'язок $(x;\ y)$ даного рівняння є координатами точки, яка належить фігурі F.

Рівняння кола

Рівняння кола радіуса R із центром у точці A $(a;\ b)$ має вигляд $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Будь-яке рівняння виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де a, b і R — деякі числа, причому $R > 0$, є рівнянням кола радіуса R із центром у точці з координатами $(a;\ b)$.

Еліпс

Еліпсом називають геометричне місце точок, для яких сума відстаней до двох заданих точок F_1 і F_2 є сталою величиною, більшою за F_1F_2. Точки F_1 і F_2 називають фокусами еліпса.

Гіпербола

Гіперболою називають геометричне місце точок, для яких модуль різниці відстаней до двох заданих точок F_1 і F_2 є сталою величиною, меншою від F_1F_2. Точки F_1 і F_2 називають фокусами гіперболи.

Загальне рівняння прямої

Загальне рівняння прямої має вигляд $ax + by = c$, де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно.
Будь-яке рівняння виду $ax + by = c$, де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно, є рівнянням прямої.

Рівняння	Значення a, b, c	Графік
$ax + by = c$	$b \neq 0$, a і c — будь-які	Невертикальна пряма
	$b = 0$, $a \neq 0$, c — будь-яке	Вертикальна пряма
	$a = b = c = 0$	Уся координатна площина
	$a = b = 0$, $c \neq 0$	Порожня множина

Кутовий коефіцієнт прямої

Коефіцієнт k у рівнянні прямої $y = kx + b$ називають кутовим коефіцієнтом прямої, і він дорівнює тангенсу кута, який утворює ця пряма з додатним напрямом осі абсцис.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

Рівняння прямої із заданим кутовим коефіцієнтом k, яка проходить через дану точку $M\ (x_0; y_0)$, має вигляд $y = k\,(x - x_0) + y_0$.

Необхідна і достатня умова паралельності невертикальних прямих

Прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ є паралельними тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $b_1 \neq b_2$.

Необхідна і достатня умова перпендикулярності невертикальних прямих

Прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ є перпендикулярними тоді й тільки тоді, коли $k_1k_2 = -1$.

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $A\ (x_1;\ y_1)$ і $B\ (x_2;\ y_2)$, має вигляд $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Відстань від точки до прямої

Відстань від точки $M\ (x_0;\ y_0)$ до прямої, заданої рівнянням $ax + by + c = 0$, дорівнює $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

§5 ВЕКТОРИ

Вивчаючи матеріал цього параграфа, ви дізнаєтеся, що вектори використовують не тільки у фізиці, а й у геометрії.

Ви навчитеся додавати й віднімати вектори, множити вектор на число, знаходити кут між двома векторами, застосовувати властивості векторів для розв'язування задач.

14. Поняття вектора

Ви знаєте багато величин, які визначаються своїми числовими значеннями: маса, площа, довжина, об'єм, час, температура тощо. Такі величини називають **скалярними величинами** або **скалярами**.

Із курсу фізики вам відомі величини, для задання яких недостатньо знати тільки їхні числові значення. Наприклад, якщо на пружину діє сила 5 Н, то не зрозуміло, чи буде пружина стискатися або розтягуватися (рис. 14.1). Потрібно ще знати, у якому напрямі діє сила.

Рис. 14.1

Величини, які визначаються не тільки числовим значенням, але й напрямом, називають **векторними величинами** або **векторами**[1].

Сила, переміщення, швидкість, прискорення, вага — приклади векторних величин.

Є вектори й у геометрії.

[1] Термін «вектор» уперше з'явився в 1845 р., його ввів у вжиток ірландський математик і астроном В. Гамільтон.

Розглянемо відрізок AB. Якщо ми домовимося точку A вважати **початком** відрізка, а точку B — його **кінцем**, то такий відрізок буде характеризуватися не тільки довжиною, але й напрямом від точки A до точки B.

Якщо вказано, яка точка є початком відрізка, а яка точка — його кінцем, то такий відрізок називають **напрямленим відрізком** або **вектором**.

Вектор з початком у точці A та кінцем у точці B позначають так: $\overrightarrow{AB}$ (читають: «вектор AB»).

На рисунках вектор зображають відрізком зі стрілкою, яка вказує його кінець. На рисунку 14.2 зображено вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{MN}$.

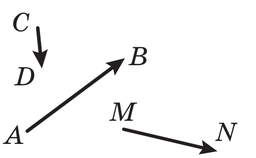


Рис. 14.2

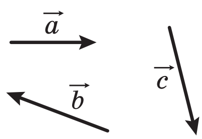


Рис. 14.3

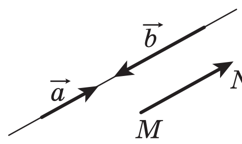


Рис. 14.4

Для позначення векторів також використовують малі букви латинського алфавіту зі стрілкою зверху. На рисунку 14.3 зображено вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Вектор, у якого початок і кінець — одна й та сама точка, називають **нульовим вектором** або **нуль-вектором** і позначають $\vec{0}$. Якщо початок і кінець нульового вектора — це точка A, то його можна позначити й так: $\overrightarrow{AA}$.

Модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ позначають так: $|\overrightarrow{AB}|$, а модуль вектора $\vec{a}$ — так: $|\vec{a}|$.

Модуль нульового вектора вважають рівним нулю: $|\vec{0}| = 0$.

Означення. **Ненульові вектори називають *колінеарними*, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій.**

Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

На рисунку 14.4 зображено колінеарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\overrightarrow{MN}$.

Той факт, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, позначають так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

На рисунку 14.5 ненульові колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ однаково напрямлені. Такі вектори називають **співнапрямленими** й пишуть: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

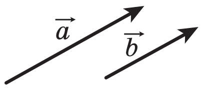


Рис. 14.5

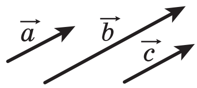


Рис. 14.6

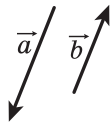


Рис. 14.7

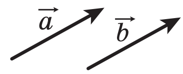


Рис. 14.8

Якщо $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ***і*** $\vec{b} \parallel \vec{c}$, ***то*** $\vec{a} \parallel \vec{c}$.

Аналогічну властивість мають і співнапрямлені вектори, тобто ***якщо*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ ***і*** $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{c}$, ***то*** $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ (рис. 14.6).

На рисунку 14.7 ненульові колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ **протилежно напрямлені**. Цей факт позначають так: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Нульовий вектор не вважають співнапрямленим (протилежно напрямленим) з жодним іншим вектором.

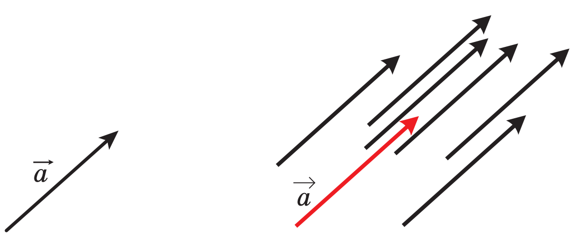
Означення. Два ненульових вектори називають рівними, якщо їхні модулі рівні й вони співнапрямлені. Будь-які два нульових вектори рівні.

На рисунку 14.8 зображено рівні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Це позначають так: $\vec{a} = \vec{b}$.

Рівність ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ означає, що $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ і $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Неважко довести, що коли $\vec{a} = \vec{b}$ і $\vec{b} = \vec{c}$, то $\vec{a} = \vec{c}$. Переконайтеся в цьому самостійно.

Часто, говорячи про вектори, ми не конкретизуємо, яка точка є початком вектора. Так, на рисунку 14.9, *а* зображено вектор $\vec{a}$. На рисунку 14.9, *б* зображено вектори, рівні вектору $\vec{a}$. Кожний із них також прийнято називати вектором $\vec{a}$.



а *б*

Рис. 14.9

На рисунку 14.10, *а* зображено вектор $\vec{a}$ та точку A. Якщо побудовано вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$, то говорять, що вектор $\vec{a}$ **відкладено від точки** A (рис. 14.10, *б*).

Рис. 14.10

Покажемо, як від довільної точки M відкласти вектор, рівний даному вектору $\vec{a}$.

Якщо вектор $\vec{a}$ нульовий, то шуканим вектором буде вектор $\overrightarrow{MM}$.

Тепер розглянемо випадок, коли $\vec{a} \neq \vec{0}$. Нехай точка M лежить на прямій, яка містить вектор $\vec{a}$ (рис. 14.11, *а*). На цій прямій існують дві точки E і F такі, що $ME = MF = |\vec{a}|$. На вказаному рисунку вектор $\overrightarrow{MF}$ буде співнапрямлений вектору $\vec{a}$. Його й потрібно вибрати.

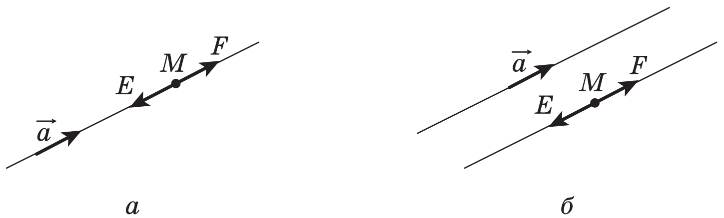


Рис. 14.11

Якщо точка M не належить прямій, яка містить вектор $\vec{a}$, то через точку M проведемо пряму, їй паралельну (рис. 14.11, *б*). Подальша побудова аналогічна вже розглянутій.

Від заданої точки можна відкласти тільки один вектор, рівний даному.

Задача. Дано чотирикутник $ABCD$. Відомо, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ і $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

Розв'язання. З умови $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ випливає, що $AB \parallel DC$ і $AB = DC$. Отже, чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Рівність $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ означає, що діагоналі чотирикутника $ABCD$ рівні. А паралелограм з рівними діагоналями є прямокутником. ◄

1. Наведіть приклади скалярних величин.
2. Які величини називають векторними?
3. Що в геометрії називають векторами?
4. Який відрізок називають напрямленим відрізком або вектором?
5. Як позначають вектор з початком у точці A та кінцем у точці B?
6. Який вектор називають нульовим?
7. Що називають модулем вектора $\overrightarrow{AB}$?
8. Чому дорівнює модуль нульового вектора?
9. Які вектори називають колінеарними?
10. Які вектори називають рівними?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

14.1.° Дано вектор $\vec{a}$ та точку A (рис. 14.12). Відкладіть від точки A вектор, рівний вектору $\vec{a}$.

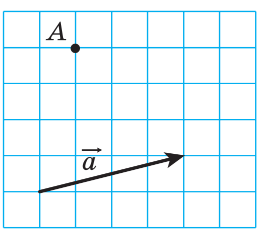


Рис. 14.12

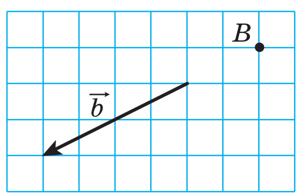


Рис. 14.13

14.2.° Дано вектор $\vec{b}$ і точку B (рис. 14.13). Відкладіть від точки B вектор, рівний вектору $\vec{b}$.

14.3.° Накресліть трикутник ABC і позначте точку M — середину сторони BC. Від точки M відкладіть вектор, рівний вектору $\overrightarrow{AM}$, а від точки B — вектор, рівний вектору $\overrightarrow{AC}$. Доведіть, що кінці побудованих векторів збігаються.

14.4.° Накресліть трикутник ABC. Від точок B і C відкладіть вектори, відповідно рівні векторам $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$. Доведіть, що кінці побудованих векторів збігаються.

14.5.° Катер із точки A перемістився на північ на 40 км у точку B, а потім на захід на 60 км із точки B у точку C. Вибравши масштаб, накресліть вектори, які зображають переміщення з точки A в точку B, із точки B у точку C, із точки A в точку C.

ВПРАВИ

14.6.° Укажіть вектори, початки й кінці яких знаходяться у вершинах квадрата $ABCD$ та які дорівнюють вектору:

1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{DA}$.

14.7.° У ромбі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Укажіть вектори, початки й кінці яких знаходяться в точках A, B, C, D і O та які дорівнюють вектору:

1) $\overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{AO}$.

14.8.° Які з векторів, зображених на рисунку 14.14:

1) рівні;
2) співнапрямлені;
3) протилежно напрямлені;
4) колінеарні?

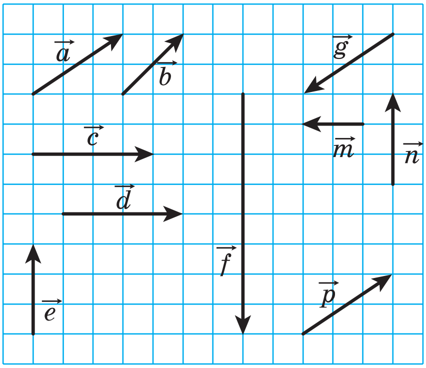


Рис. 14.14

14.9.° Точки M і N — відповідно середини сторін AB і CD паралелограма $ABCD$. Укажіть вектори, початки й кінці яких знаходяться в точках A, B, C, D, M і N:

1) рівні вектору $\overrightarrow{AM}$;

2) колінеарні вектору $\overrightarrow{CD}$;

3) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{NC}$;

4) співнапрямлені з вектором $\overrightarrow{BC}$.

14.10.° Нехай O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Укажіть вектори, початки й кінці яких знаходяться в точках A, B, C, D і O:

1) рівні;
2) співнапрямлені;
3) протилежно напрямлені.

14.11.° Точки M, N і P — відповідно середини сторін AB, BC, CA трикутника ABC. Укажіть вектори, початки й кінці яких знаходяться в точках A, B, C, M, N і P:

1) рівні вектору $\overrightarrow{MN}$;

2) колінеарні вектору $\overrightarrow{AB}$;

3) протилежно напрямлені з вектором $\overrightarrow{MP}$;

4) співнапрямлені з вектором $\overrightarrow{CA}$.

14.12.° Чи є правильним твердження:

1) якщо $\vec{m} = \vec{n}$, то $|\vec{m}| = |\vec{n}|$;

2) якщо $\vec{m} = \vec{n}$, то $\vec{m} \parallel \vec{n}$;

3) якщо $\vec{m} = \vec{n}$, то $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n}$;

4) якщо $\vec{m} \neq \vec{n}$, то $|\vec{m}| \neq |\vec{n}|$?

14.13.° Доведіть, що коли чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

14.14.° Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{DA}$.

14.15.° Визначте вид чотирикутника $ABCD$, якщо вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ колінеарні та $|\overrightarrow{BC}| \neq |\overrightarrow{AD}|$.

14.16.° Знайдіть модулі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 14.15), якщо сторона клітинки дорівнює 0,5 см.

14.17.° У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $AB = 6$ см, $BC = 8$ см, O — точка перетину діагоналей. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BO}$ і $\overrightarrow{OC}$.

14.18.° У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Відомо, що $|\overrightarrow{AB}| = 5$ см, $|\overrightarrow{AO}| = 6{,}5$ см. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{AD}$.

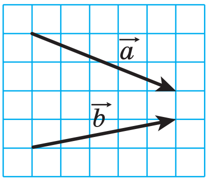


Рис. 14.15

14.19.° Відомо, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Чи можна стверджувати, що точки A, B, C і D є вершинами паралелограма?

14.20.° Відомо, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Які ще рівні вектори задають точки A, B, C і D?

14.21.° Дано чотирикутник $ABCD$. Відомо, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ і $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

14.22.° Дано чотирикутник $ABCD$. Відомо, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні та $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$. Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

14.23.° Що можна сказати про вектор $\overrightarrow{AB}$, якщо $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$?

14.24.• У прямокутному трикутнику ABC точка M — середина гіпотенузи AB і $\angle B = 30°$. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MC}$, якщо $AC = 2$ см.

14.25.• У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) медіана CM дорівнює 6 см. Знайдіть модулі векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $\angle A = 30°$.

14.26.• Відомо, що вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ неколінеарні. Вектор $\vec{a}$ колінеарний кожному з векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Доведіть, що вектор $\vec{a}$ є нульовим.

14.27.• Відомо, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ колінеарні. Доведіть, що точки A, B і C лежать на одній прямій. Чи є правильним обернене твердження: якщо точки A, B і C лежать на одній прямій, то вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ колінеарні?

14.28.• Для чотирьох точок A, B, C, D відомо, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Доведіть, що середини відрізків AD і BC збігаються. Доведіть обернене твердження: якщо середини відрізків AD і BC збігаються, то $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

14.29.• Відомо, що $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{ON}$. Доведіть, що точка O — середина відрізка MN. Доведіть обернене твердження: якщо точка O — середина відрізка MN, то $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{ON}$.

15. Координати вектора

Розглянемо на координатній площині вектор $\vec{a}$. Відкладемо від початку координат рівний йому вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 15.1). **Координатами вектора** $\vec{a}$ називають координати точки A. Запис $\vec{a}(x; y)$ означає, що вектор $\vec{a}$ має координати $(x; y)$.

Числа x і y називають відповідно **першою** та **другою координатами вектора** $\vec{a}$.

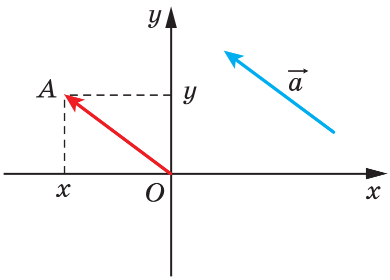


Рис. 15.1

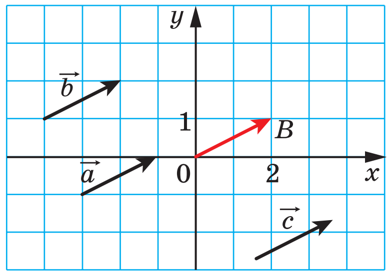


Рис. 15.2

З означення випливає, що ***рівні вектори мають рівні відповідні координати***. Наприклад, кожний із рівних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ (рис. 15.2) має координати (2; 1).

Справедливе й обернене твердження: ***якщо відповідні координати векторів рівні, то рівні й самі вектори***.

Справді, якщо відкласти такі вектори від початку координат, то їхні кінці збігатимуться.

Очевидно, що нульовий вектор має координати (0; 0).

Теорема 15.1. ***Якщо точки A $(x_1;\ y_1)$ і B $(x_2;\ y_2)$ відповідно є початком і кінцем вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$ дорівнюють відповідно першій і другій координатам вектора $\vec{a}$.***

Доведення. Нехай вектор $\vec{a}$, рівний вектору $\overrightarrow{AB}$, має координати $(a_1;\ a_2)$. Доведемо, що $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$.

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$, то твердження теореми є очевидним.

Нехай $\vec{a} \neq \vec{0}$. Відкладемо від початку координат вектор $\overrightarrow{OM}$, рівний вектору $\overrightarrow{AB}$. Тоді координати точки M дорівнюють $(a_1;\ a_2)$.

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$, то, скориставшися результатом задачі 14.28, можемо зробити висновок, що середини відрізків OB і AM збігаються. Координати середин відрізків OB і AM відповідно дорівнюють $\left(\frac{0 + x_2}{2};\ \frac{0 + y_2}{2}\right)$ і $\left(\frac{x_1 + a_1}{2};\ \frac{y_1 + a_2}{2}\right)$. Тоді $\frac{0 + x_2}{2} = \frac{x_1 + a_1}{2}$, $\frac{0 + y_2}{2} = \frac{y_1 + a_2}{2}$. Ці рівності виконуються й тоді, коли точка O збігається з точкою B або точка A збігається з точкою M.

Звідси $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$. ◀

Із формули відстані між двома точками випливає, що коли вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Задача. Дано координати трьох вершин паралелограма $ABCD$: $A\ (3; -2)$, $B\ (-4; 1)$, $C\ (-2; -3)$. Знайдіть координати вершини D.

Розв'язання. Оскільки чотирикутник $ABCD$ — паралелограм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Отже, координати цих векторів рівні.

Нехай координати точки D дорівнюють $(x; y)$. Для знаходження координат векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$ скористаємося теоремою 15.1. Маємо: $\overrightarrow{AB}(-4-3; 1-(-2)) = \overrightarrow{AB}(-7; 3)$; $\overrightarrow{DC}(-2-x; -3-y)$. Звідси:

$$\begin{cases} -7 = -2 - x, \\ 3 = -3 - y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = -6. \end{cases}$$

Відповідь: $D\ (5; -6)$. ◄

1. Поясніть, що називають координатами даного вектора.
2. Що можна сказати про координати рівних векторів?
3. Що можна сказати про вектори, відповідні координати яких рівні?
4. Як знайти координати вектора, якщо відомо координати його початку та кінця?
5. Як знайти модуль вектора, якщо відомо його координати?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

15.1.° За допомогою циркуля та лінійки побудуйте точку, координати якої дорівнюють координатам даного вектора $\vec{a}$ (рис. 15.3).

15.2.° Відкладіть від початку координат вектори $\vec{a}\,(-3; 2)$, $\vec{b}\,(0; -2)$ і $\vec{c}\,(4; 0)$.

15.3.° Відкладіть від точки $M\ (-1; 2)$ вектори $\vec{a}\,(1; -3)$, $\vec{b}\,(-2; 0)$ і $\vec{c}\,(0; -1)$.

ВПРАВИ

15.4.° Знайдіть координати векторів, що зображені на рисунку 15.4.

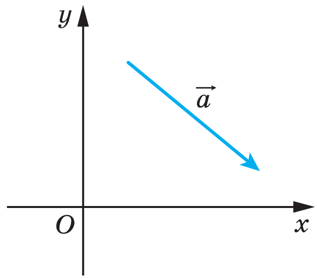


Рис. 15.3

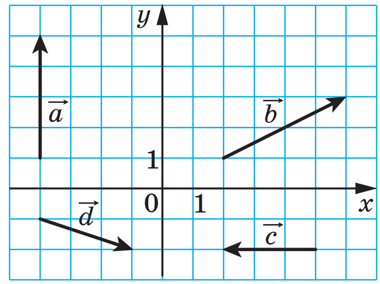


Рис. 15.4

15.5.° Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:
1) A (2; 3), B (−1; 4);
2) A (0; 0), B (−2; −8);
3) A (m; n), B (p, k).

15.6.° Дано точку A (1; 3) і вектор $\vec{a}$ (−2; 1). Знайдіть координати точки B такої, що $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$.

15.7.° Дано точки A (3; −7), B (4; −5) і C (5; 8). Знайдіть координати точки D такої, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

15.8.° Від точки A (4; −3) відкладено вектор $\vec{m}$ (−1; 8). Знайдіть координати кінця вектора.

15.9.° Дано точки A (3; −4), B (−2; 7), C (−4; 16) і D (1; 5). Доведіть, що $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

15.10.° Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках A (1; −5), B (2; 3), C (−3; 1) і D (−4; −7) є паралелограмом.

15.11.° Серед векторів $\vec{a}$ (3; −4), $\vec{b}$ (−4; 2), $\vec{c}\left(3; \sqrt{11}\right)$, $\vec{d}$ (−2; −4), $\vec{e}\left(-1; -2\sqrt{6}\right)$ і $\vec{f}$ (−4; 5) знайдіть такі, що мають рівні модулі.

15.12.° Дано чотири точки: A (1; −4), B (−2; 5), C (1 + a; −4 + b) і D (−2 + a; 5 + b). Доведіть, що $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$.

15.13.° Знайдіть усі значення x, при яких модуль вектора $\vec{a}$ (x; −8) дорівнює 10.

15.14.° При яких значеннях y модуль вектора $\vec{b}$ (12; y) дорівнює 13?

15.15.° Відрізок BM — медіана трикутника ABC із вершинами A (3; −5), B (2; −3) і C (−1; 7). Знайдіть координати та модуль вектора $\overrightarrow{BM}$.

15.16.° Точки A (−1; 3), B (5; 0), C (2; −3) є вершинами трикутника ABC, медіани якого перетинаються в точці M. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ і $\overrightarrow{MC}$.

15.17.° Точка F ділить сторону BC прямокутника $ABCD$ у відношенні 1 : 2, рахуючи від вершини B (рис. 15.5). Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{AF}$ і $\overrightarrow{FD}$.

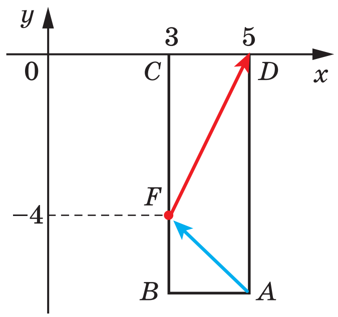


Рис. 15.5

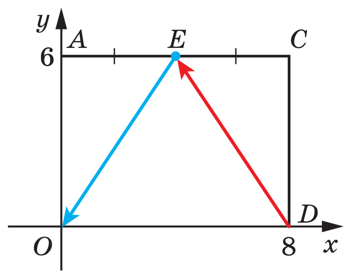


Рис. 15.6

15.18.° Точка E — середина сторони AC прямокутника $OACD$ (рис. 15.6). Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{DE}$ і $\overrightarrow{EO}$.

15.19.° Модуль вектора $\vec{a}$ дорівнює 10. Його перша координата на 2 більша за другу. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$.

15.20.° Модуль вектора $\vec{c}$ дорівнює 2, а його координати рівні. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$.

15.21.• Точки A (2; 5) і B (7; 5) — вершини прямокутника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ дорівнює 13. Знайдіть координати точок C і D.

15.22.• Точки A (1; 2) і D (1; −6) — вершини прямокутника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{AC}$ дорівнює 17. Знайдіть координати вершин B і C.

16. Додавання і віднімання векторів

Якщо тіло перемістилося з точки A в точку B, а потім із точки B у точку C, то сумарне переміщення з точки A в точку C природно подати у вигляді вектора $\overrightarrow{AC}$, вважаючи цей вектор сумою векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$, тобто $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 16.1).

Цей приклад підказує, як ввести поняття суми векторів, тобто як додати два даних вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

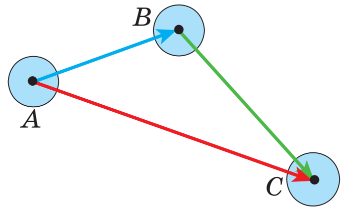


Рис. 16.1

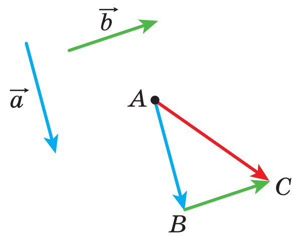


Рис. 16.2

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, *рівний вектору* $\vec{a}$. *Далі від точки B відкладемо вектор* $\overrightarrow{BC}$, *рівний вектору* $\vec{b}$. *Вектор* $\overrightarrow{AC}$ *називають* **сумою векторів** $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ (рис. 16.2) *і записують*: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$.

Описаний алгоритм додавання двох векторів називають **правилом трикутника**.

Ця назва пов'язана з тим, що коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не є колінеарними, то точки A, B і C є вершинами трикутника (рис. 16.2).

За правилом трикутника можна додавати й колінеарні вектори. На рисунку 16.3 вектор $\overrightarrow{AC}$ дорівнює сумі колінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

а *б*

Рис. 16.3

Отже, ***для будь-яких трьох точок A, B і C виконується рівність*** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, яка виражає правило трикутника для додавання векторів.

Теорема 16.1. ***Якщо координати векторів*** $\vec{a}$ ***і*** $\vec{b}$ ***відповідно дорівнюють*** $(a_1;\ a_2)$ ***і*** $(b_1;\ b_2)$, ***то координати вектора*** $\vec{a}+\vec{b}$ ***дорівнюють*** $(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$.

Доведення. Нехай точки $A\ (x_1;\ y_1)$, $B\ (x_2;\ y_2)$ і $C\ (x_3;\ y_3)$ такі, що $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ і $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$. Маємо: $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Доведемо, що координати вектора $\overrightarrow{AC}$ дорівнюють $(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$.

Знайдемо координати векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\overrightarrow{AC}$: $\vec{a}\,(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$, $\vec{b}\,(x_3 - x_2;\ y_3 - y_2)$, $\overrightarrow{AC}\,(x_3 - x_1;\ y_3 - y_1)$. Маємо:

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}\,(x_3 - x_1;\ y_3 - y_1) = \overrightarrow{AC}\,(x_3 - x_2 + x_2 - x_1;\ y_3 - y_2 + y_2 - y_1).$$

З урахуванням того, що $x_2 - x_1 = a_1$, $x_3 - x_2 = b_1$, $y_2 - y_1 = a_2$, $y_3 - y_2 = b_2$, отримуємо: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}\,(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$. ◄

Зауваження. Описуючи правило трикутника для знаходження суми векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, ми відклали вектор $\vec{a}$ від довільної точки. Якщо точку A замінити точкою A_1, то замість вектора $\overrightarrow{AC}$, який дорівнює сумі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, отримаємо деякий вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$. Із теореми 16.1 випливає, що координати векторів $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{A_1C_1}$ дорівнюють $(a_1 + b_1;\ a_2 + b_2)$, отже, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$. Це означає, що сума векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не залежить від того, від якої точки відкладено вектор $\vec{a}$.

Властивості додавання векторів аналогічні властивостям додавання чисел.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виконуються рівності:

1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ — переставна властивість;

3) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ — сполучна властивість.

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати векторів, записаних у правій та лівій частинах рівностей. Зробіть це самостійно.

З переставної та сполучної властивостей додавання векторів випливає, що при додаванні кількох векторів можна міняти місцями доданки та розставляти дужки в будь-який спосіб.

Використовуючи правило трикутника, можна знаходити суму трьох і більше векторів. Наприклад, знайдемо суму векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$, зображених на рисунку 16.4.

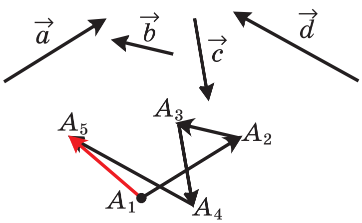


Рис. 16.4

Від довільної точки A_1 відкладемо вектор $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}$; від точки A_2 відкладемо вектор $\overrightarrow{A_2A_3} = \vec{b}$; від точки A_3 відкладемо вектор $\overrightarrow{A_3A_4} = \vec{c}$; від точки A_4 відкладемо вектор $\overrightarrow{A_4A_5} = \vec{d}$. Знайдемо суму $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_4A_5}$.

Маємо:

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}=\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}\right)+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}=$$

$$=\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}=\left(\overrightarrow{A_1A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}\right)+\overrightarrow{A_4A_5}=\overrightarrow{A_1A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}=\overrightarrow{A_1A_5}.$$

Узагалі, для будь-яких точок A_1, A_2, A_3, ..., A_n виконується рівність $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_1A_n}$.

У фізиці часто доводиться додавати вектори, відкладені від однієї точки. Так, якщо до тіла прикладено сили $\vec{F_1}$ і $\vec{F_2}$ (рис. 16.5), то рівнодійна цих сил дорівнює сумі $\vec{F_1}+\vec{F_2}$.

Для знаходження суми двох неколінеарних векторів, відкладених від однієї точки, зручно користуватися **правилом паралелограма для додавання векторів.**

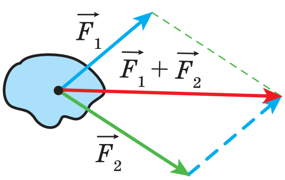


Рис. 16.5

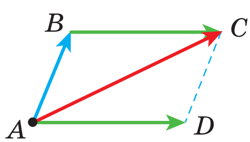


Рис. 16.6

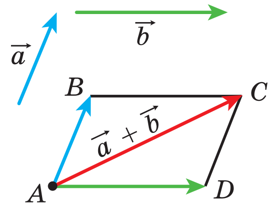


Рис. 16.7

Нехай треба знайти суму неколінеарних векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$ (рис. 16.6). Відкладемо вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний вектору $\overrightarrow{AD}$. Тоді за правилом трикутника $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Оскільки вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AD}$ рівні, то чотирикутник $ABCD$ — паралелограм з діагоналлю AC.

Наведені міркування дозволяють сформулювати правило паралелограма для додавання неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, *рівний вектору* $\vec{a}$, *і вектор* $\overrightarrow{AD}$, *рівний вектору* $\vec{b}$. *Побудуємо паралелограм* $ABCD$ (рис. 16.7). *Тоді шукана сума* $\vec{a}+\vec{b}$ *дорівнює вектору* $\overrightarrow{AC}$.

Означення. Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$.

Пишуть: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Покажемо, як побудувати вектор, рівний різниці заданих векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Від довільної точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 16.8). Тоді вектор $\overrightarrow{BA}$ дорівнює різниці $\vec{a} - \vec{b}$. Справді, $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$. Отже, за означенням різниці двох векторів $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, тобто $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{BA}$.

На рисунку 16.8 вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ неколінеарні. Проте описаний алгоритм можна застосовувати й для знаходження різниці колінеарних векторів. На рисунку 16.9 вектор $\overrightarrow{BA}$ дорівнює різниці колінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

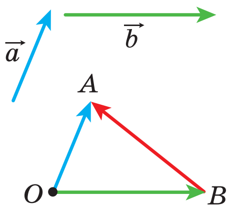


Рис. 16.8

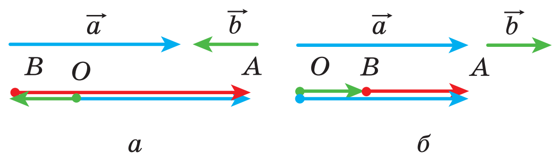


Рис. 16.9

Отже, ***для будь-яких трьох точок O, A і B виконується рівність*** $\boldsymbol{\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}}$, яка виражає **правило знаходження різниці двох векторів**, відкладених від однієї точки.

Теорема 16.2. ***Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно дорівнюють (a_1; a_2) і (b_1; b_2), то координати вектора $\vec{a} - \vec{b}$ дорівнюють ($a_1 - b_1$; $a_2 - b_2$).***

Доведіть цю теорему самостійно.

Із теореми 16.2 випливає, що для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ існує єдиний вектор $\vec{c}$ такий, що $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$.

Означення. Два ненульових вектори називають протилежними, якщо їхні модулі рівні й вектори протилежно напрямлені.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ протилежні, то говорять, що вектор $\vec{a}$ **протилежний** вектору $\vec{b}$, а вектор $\vec{b}$ протилежний вектору $\vec{a}$.

Вектором, протилежним нульовому вектору, вважають нульовий вектор.

Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$, позначають так: $-\vec{a}$.

З означення випливає, що протилежним вектору $\overrightarrow{AB}$ є вектор $\overrightarrow{BA}$. Тоді ***для будь-яких точок A і B виконується рівність*** $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}}$.

Із правила трикутника випливає, що

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}.$$

А із цієї рівності випливає, що коли вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то вектор $-\vec{a}$ має координати $(-a_1; -a_2)$.

Теорема 16.3. ***Для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.***

Для доведення достатньо порівняти відповідні координати векторів, записаних у правій та лівій частинах рівності. Зробіть це самостійно.

Теорема 16.3 дає змогу звести віднімання векторів до додавання: *щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$, можна до вектора $\vec{a}$ додати вектор $-\vec{b}$* (рис. 16.10).

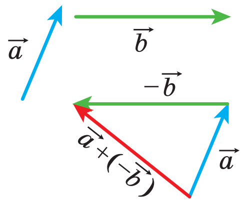


Рис. 16.10

Задача. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 16.11). Виразіть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{CB}$ через вектори $\overrightarrow{CO}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{BO}=\vec{b}$.

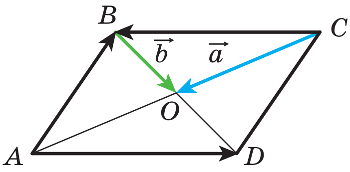


Рис. 16.11

Розв'язання. Оскільки точка O — середина відрізків BD і AC, то $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CO}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}=\vec{b}$.

Маємо:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{BO}=-\vec{a}-\vec{b};$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a};$$

$$\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{b}.$$ ◄

?

1. Опишіть правило трикутника для знаходження суми векторів.
2. Яка рівність виражає правило трикутника для знаходження суми векторів?
3. Чому дорівнюють координати вектора, рівного сумі двох даних векторів?
4. Запишіть рівності, які виражають властивості додавання векторів.
5. Опишіть правило паралелограма для знаходження суми двох векторів.
6. Який вектор називають різницею двох векторів?
7. Яка рівність виражає правило знаходження різниці двох векторів, відкладених від однієї точки?
8. Чому дорівнюють координати вектора, рівного різниці двох даних векторів?

9. Які вектори називають протилежними?
10. Як можна звести віднімання векторів до додавання векторів?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

16.1.° За допомогою правила трикутника побудуйте суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 16.12.

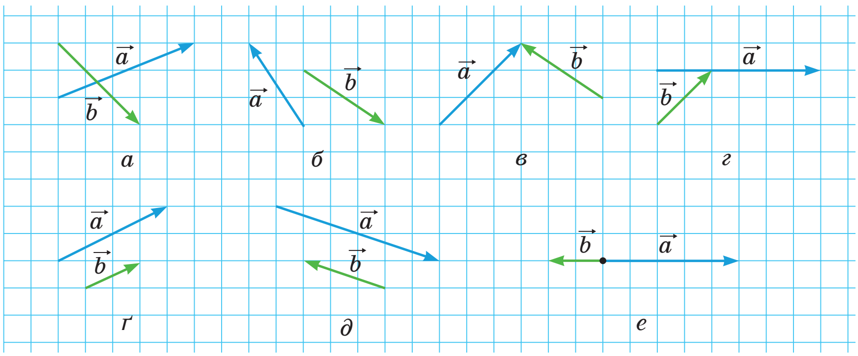


Рис. 16.12

16.2.° За допомогою правила паралелограма побудуйте суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 16.12, *а*–*г*.

16.3.° Для векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, зображених на рисунку 16.12, побудуйте вектор $\vec{a}-\vec{b}$.

16.4.° Накресліть трикутник ABC. Відкладіть від точки A вектор, протилежний вектору:

1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{BC}$.

16.5.° Накресліть паралелограм $ABCD$. Побудуйте вектори $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

16.6.° Накресліть трикутник MNP. Побудуйте вектори $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.

16.7.° Накресліть паралелограм $ABCD$. Побудуйте вектори $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$.

16.8.° Накресліть трикутник ABC. Побудуйте вектори $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$.

16.9.° Позначте чотири точки M, N, P і Q. Побудуйте вектор $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}$.

16.10.° Для векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, зображених на рисунку 16.13, побудуйте вектор: 1) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 3) $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

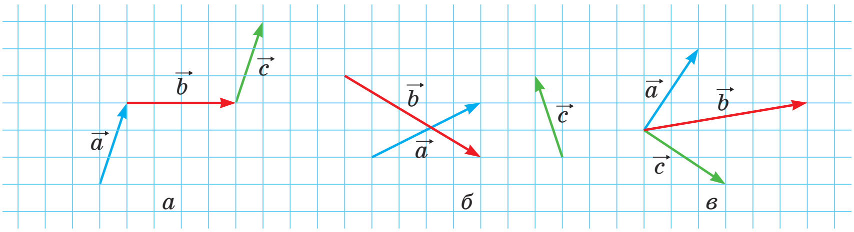


Рис. 16.13

16.11.° Відкладіть від однієї точки три вектори, модулі яких рівні, так, щоб сума двох із них дорівнювала третьому вектору.

16.12.° Відкладіть від однієї точки три вектори, модулі яких рівні, так, щоб їхня сума дорівнювала нуль-вектору.

16.13.° Для точок A, B, C і D, зображених на рисунку 16.14, побудуйте такий вектор $\vec{x}$, щоб $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}+\vec{x}=\vec{0}$.

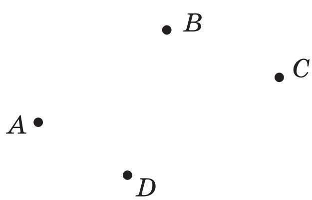


Рис. 16.14

16.14.° Накресліть трикутник ABC. Побудуйте таку точку X, щоб:
1) $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{BX}+\overrightarrow{XC}$; 2) $\overrightarrow{BX}=\overrightarrow{XC}-\overrightarrow{XA}$.

ВПРАВИ

16.15.° Дано трикутник ABC. Виразіть вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектори:
1) $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.

16.16.° Дано паралелограм $ABCD$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$.

16.17.° Дано паралелограм $ABCD$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{BC}$ через вектори $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{DA}=\vec{b}$.

16.18.° Дано паралелограм $ABCD$. Виразіть вектори $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$.

16.19.° Доведіть, що для будь-яких точок A, B, C і D виконується рівність:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$;
2) $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$;
3) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

16.20.° Доведіть, що для будь-яких точок A, B, C і D виконується рівність:

1) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$;
2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$;
3) $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$.

16.21.° Точки M і N — середини відповідно сторін BA і BC трикутника ABC. Виразіть вектори $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{NB}$ через вектори $\overrightarrow{BM} = \vec{m}$ і $\overrightarrow{BN} = \vec{n}$.

16.22.° У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Доведіть, що $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

16.23.° Дано чотирикутник $ABCD$ і деяку точку O. Відомо, що $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

16.24.° Дано чотирикутник $ABCD$ і деяку точку O. Відомо, що $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

16.25.° Дано вектори $\vec{a}\,(4; -5)$ і $\vec{b}\,(-1; 7)$. Знайдіть:

1) координати векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$;
2) $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

16.26.° Дано точки $A\,(1; -3)$, $B\,(4; 5)$, $C\,(-2; -1)$ і $D\,(3; 0)$. Знайдіть:

1) координати векторів $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$;
2) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}|$ і $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}|$.

16.27.° Сума векторів $\vec{a}\,(5; -3)$ та $\vec{b}\,(x; 4)$ дорівнює вектору $\vec{c}\,(2; y)$. Знайдіть x і y.

16.28.° Сума векторів $\vec{a}\,(x; -1)$ та $\vec{b}\,(2; y)$ дорівнює вектору $\vec{c}\,(-3; 4)$. Знайдіть x і y.

16.29.° Дано вектор $\overrightarrow{MN}\,(3; -5)$. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{NM}$.

16.30.° Сторона рівностороннього трикутника ABC дорівнює 3 см. Знайдіть $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$.

16.31.° Катет рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) дорівнює 4 см. Знайдіть $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right|$.

16.32.° Дано точки N (3; −5) і F (4; 1). Знайдіть $\left|\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OF}\right|$ і $\left|\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{ON}\right|$, де O — довільна точка.

16.33.° Доведіть, що для будь-яких n точок A_1, A_2, ..., A_n виконується рівність $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}=\vec{0}$.

16.34.° Виразіть вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{d}$ (рис. 16.15).

16.35.° У паралелограмі $ABCD$ точки M, N і K — середини відповідно сторін AB, BC і CD. Виразіть вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AD}$ через вектори $\overrightarrow{MN}=\vec{m}$ і $\overrightarrow{KN}=\vec{n}$.

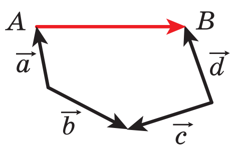


Рис. 16.15

16.36.° У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Виразіть вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AD}$ через вектори $\overrightarrow{DO}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$.

16.37.° Чотирикутник $ABCD$ — паралелограм. Доведіть, що:
1) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$;   2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

16.38.° У трикутнику ABC проведено медіану BM. Доведіть, що:
1) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$;   2) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$.

16.39.° Плавчиха зі швидкістю $\sqrt{3}$ м/с відносно води перепливає річку в напрямі, перпендикулярному до паралельних берегів. Швидкість течії дорівнює 1 м/с. Під яким кутом до напряму, перпендикулярному до берегів, переміщається плавчиха?

16.40.• Доведіть, що для неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|<\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$.

16.41.• Доведіть, що для неколінеарних векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|<\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$.

16.42.• Для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$. Доведіть, що $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$.

16.43.• Для ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується рівність $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$. Доведіть, що $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$.

16.44.• Чи може бути нульовим вектором сума трьох векторів, модулі яких дорівнюють:
1) 5; 2; 3;   3) 8; 9; 18?
2) 4; 6; 3;

16.45.$^{\bullet}$ Доведіть, що для паралелограма $ABCD$ і довільної точки X виконується рівність $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XB}+\overrightarrow{XD}$.

16.46.$^{\bullet}$ Весляр із точки A переправляється через річку завширшки 240 м зі сталою власною швидкістю, спрямовуючи ніс човна перпендикулярно до протилежного берега. Через 4 хв човен причалює до протилежного берега в точці C, розташованій нижче за течією від точки A на 48 м. Знайдіть швидкість течії та швидкість човна відносно берегів річки.

16.47.$^{\bullet}$ Катер із точки A переправляється через річку завширшки 300 м зі сталою власною швидкістю. Через 100 с катер причалює до протилежного берега в точці B. Пряма AB перпендикулярна до паралельних берегів річки. Швидкість течії річки $\sqrt{3}$ м/с. Під яким кутом до берега річки було спрямовано ніс катера?

16.48.$^{\bullet\bullet}$ Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Відомо, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

16.49.$^{\bullet\bullet}$ Вектори $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ і $\overrightarrow{EF}$ попарно неколінеарні, причому $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$. Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють відрізкам MN, PQ і EF.

16.50.$^{\bullet\bullet}$ Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

16.51.$^{\bullet\bullet}$ Дано дві точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BX}\right|=\left|\overrightarrow{BX}\right|$.

16.52.$^{\bullet\bullet}$ Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M. Доведіть, що $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

16.53.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що для будь-яких n точок A_1, A_2, ..., A_n існує єдина точка M така, що $\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_n}=\vec{0}$ (точку M називають центроїдом системи точок A_1, A_2, ..., A_n).

16.54.* На сторонах трикутника ABC у зовнішній бік побудовано паралелограми AA_1B_1B, BB_2C_1C, CC_2A_2A. Прямі A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 попарно непаралельні. Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють відрізкам A_1A_2, B_1B_2 і C_1C_2.

17. Множення вектора на число. Застосування векторів до розв’язування задач

Нехай дано ненульовий вектор $\vec{a}$. На рисунку 17.1 зображено вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}+\vec{a}$, і вектор $\overrightarrow{CD}$, рівний вектору $(-\vec{a})+(-\vec{a})+(-\vec{a})$. Очевидно, що

$$|\overrightarrow{AB}| = 2|\vec{a}| \text{ і } \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{a},$$
$$|\overrightarrow{CD}| = 3|\vec{a}| \text{ і } \overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \vec{a}.$$

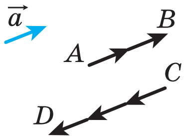


Рис. 17.1

Вектор $\overrightarrow{AB}$ позначають $2\vec{a}$ і вважають, що його отримано в результаті **множення вектора $\vec{a}$ на число** 2. Аналогічно вважають, що вектор $\overrightarrow{CD}$ отримано в результаті множення вектора $\vec{a}$ на число −3, і записують: $\overrightarrow{CD} = -3\vec{a}$.

Цей приклад підказує, як ввести поняття «множення вектора на число».

Означення. Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k, відмінного від нуля, називають такий вектор $\vec{b}$, що:

1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$;

2) якщо $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; якщо $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Пишуть: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $k = 0$, то вважають, що $k\vec{a} = \vec{0}$.

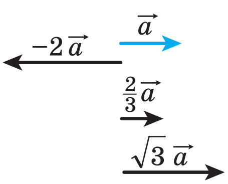


Рис. 17.2

На рисунку 17.2 зображено вектори $\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\frac{2}{3}\vec{a}$, $\sqrt{3}\,\vec{a}$.

З означення випливає, що

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a},$$
$$-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$$

Також з означення випливає, що ***коли $\vec{b} = k\vec{a}$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні***.

А якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то чи можна подати вектор $\vec{b}$ у вигляді добутку $k\vec{a}$? Відповідь дає така теорема.

Теорема 17.1. ***Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні й $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k, що $\vec{b} = k\vec{a}$.***

Доведення. Якщо $\vec{b} = \vec{0}$, то при $k = 0$ отримуємо, що $\vec{b} = k\vec{a}$. Якщо $\vec{b} \neq \vec{0}$, то або $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, або $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

1) Нехай $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Розглянемо вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, де $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Оскільки $k > 0$, то $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{a}$, отже, $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Крім того, $|\vec{c}| = k|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Таким чином, вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ співнапрямлені та їхні модулі рівні. Звідси $\vec{b} = \vec{c} = k\vec{a}$.

2) Нехай $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$. Розглянемо вектор $\vec{c} = k\vec{a}$, де $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Для цього випадку завершіть доведення самостійно. ◀

Теорема 17.2. ***Якщо вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ має координати $(ka_1; ka_2)$.***

Доведення. Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $k = 0$, то твердження теореми очевидне.

Нехай $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $k \neq 0$. Розглянемо вектор $\vec{b}\,(ka_1; ka_2)$. Покажемо, що $\vec{b} = k\vec{a}$.

Маємо: $|\vec{b}| = \sqrt{(ka_1)^2 + (ka_2)^2} = |k|\sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |k|\,|\vec{a}|$.

Відкладемо від початку координат вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, рівні відповідно векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Оскільки пряма OA проходить через початок координат, то її рівняння має вигляд $ax + by = 0$.

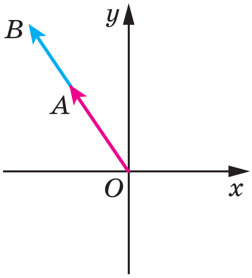


Рис. 17.3

Цій прямій належить точка $A\,(a_1; a_2)$. Тоді $aa_1 + ba_2 = 0$. Звідси $a\,(ka_1) + b\,(ka_2) = 0$.

Отже, точка $B\,(ka_1; ka_2)$ також належить прямій OA, тому вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ колінеарні, тобто $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

При $k > 0$ числа a_1 і ka_1 мають однакові знаки (або обидва дорівнюють нулю). Таку саму властивість мають числа a_2 і ka_2. Отже, при $k > 0$ точки A і B лежать в одній координатній чверті (або на одному координатному промені), тому вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ співнапрямлені (рис. 17.3), тобто $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. При $k < 0$ вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ є протилежно напрямленими, тобто $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Отже, ми отримали, що $\vec{b} = k\vec{a}$. ◀

Наслідок 1. ***Вектори $\vec{a}\,(a_1;\, a_2)$ і $\vec{b}\,(ka_1;\, ka_2)$ колінеарні.***

Наслідок 2. ***Якщо вектори $\vec{a}\,(a_1;\, a_2)$ і $\vec{b}\,(b_1;\, b_2)$ колінеарні, причому $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k, що $b_1 = ka_1$ і $b_2 = ka_2$.***

За допомогою теореми 17.2 можна довести такі властивості множення вектора на число.

Для будь-яких чисел k, m і будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ виконуються рівності:

1) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ — сполучна властивість;

2) $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ — перша розподільна властивість;

3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ — друга розподільна властивість.

Для доведення цих властивостей досить порівняти відповідні координати векторів, записаних у правих і лівих частинах рівностей. Зробіть це самостійно.

Ці властивості дають змогу перетворювати вирази, які містять суму векторів, різницю векторів і добуток вектора на число, аналогічно тому, як ми перетворюємо алгебраїчні вирази. Наприклад, $2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$.

Теорема 17.3. ***Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — неколінеарні вектори. Тоді для будь-якого вектора $\vec{c}$ існує єдина пара чисел $(x;\, y)$ така, що***

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Доведення. Спочатку покажемо, що така пара чисел $(x;\ y)$ існує.

Нехай $\vec{c} \parallel \vec{a}$. Тоді існує таке число k, що $\vec{c} = k\vec{a}$ (теорема 17.1). Звідси $\vec{c} = k\vec{a} + 0\vec{b}$. Отже, $(k;\ 0)$ — шукана пара чисел.

Нехай $\vec{c} \parallel \vec{b}$. Міркуючи аналогічно, отримуємо, що $\vec{c} = 0\vec{a} + m\vec{b}$, де m — деяке число.

Нехай вектор $\vec{c}$ не колінеарний ні вектору $\vec{a}$, ні вектору $\vec{b}$. Відкладемо від довільної точки O вектори $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Через точку C проведемо прямі, паралельні прямим OA і OB. Отримаємо паралелограм OB_1CA_1 (рис. 17.4). Тоді за правилом паралелограма $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1}$.

Вектори $\overrightarrow{OB_1}$ і $\overrightarrow{OB}$ колінеарні, вектори $\overrightarrow{OA_1}$ і $\overrightarrow{OA}$ також колінеарні. Отже, існують такі числа x і y, що $\overrightarrow{OA_1} = x\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = y\overrightarrow{OB}$. Звідси $\overrightarrow{OC} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, тобто

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Покажемо, що пара чисел $(x;\ y)$ — єдина.

Нехай існує ще одна пара чисел $(x_1;\ y_1)$ така, що $\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$. Тоді

$$\vec{0} = \vec{c} - \vec{c} = \left(x\vec{a} + y\vec{b}\right) - \left(x_1\vec{a} + y_1\vec{b}\right) = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b}.$$

Звідси $(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} = \vec{0}$.

Нехай $x \neq x_1$. Тоді $\vec{a} = -\dfrac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b}$, тобто $\vec{a} \parallel \vec{b}$, що суперечить умові теореми. Отже, $x = x_1$. Аналогічно можна довести, що $y = y_1$. ◄

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні та для вектора $\vec{c}$ знайдено пару чисел $(x;\ y)$ таку, що $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, то говорять, що вектор $\vec{c}$ **розкладено за векторами** $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Упорядковану пару $\left(\vec{a};\ \vec{b}\right)$ неколінеарних векторів називають **базисом**. Якщо для вектора $\vec{c}$ виконується рівність $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, то говорять, що вектор $\vec{c}$ **розкладено за базисом** $\left(\vec{a};\ \vec{b}\right)$. Упорядковану пару чисел $(x;\ y)$ називають **координатами вектора** $\vec{c}$ **у базисі** $\left(\vec{a};\ \vec{b}\right)$.

Задача 1. Доведіть, що коли $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OB}$, то точки O, A і B лежать на одній прямій.

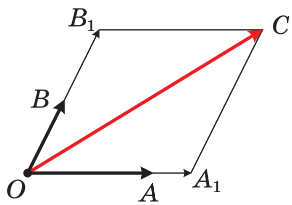


Рис. 17.4

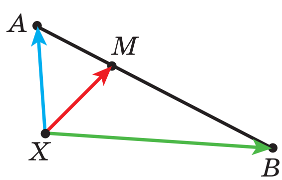


Рис. 17.5

Розв'язання. З умови випливає, що вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$ колінеарні. До того ж ці вектори відкладено від однієї точки O. Отже, точки O, A і B лежать на одній прямій. ◀

Задача 2. Нехай M — така точка відрізка AB, що $\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}$ (рис. 17.5). Доведіть, що для будь-якої точки X виконується рівність

$$\boxed{\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}} \qquad (*)$$

Розв'язання. Маємо: $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \overrightarrow{AM}$.

Оскільки $AM = \frac{m}{m+n}AB$, то $\overrightarrow{AM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Запишемо: $\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$.

Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$, то маємо:

$$\overrightarrow{XM} - \overrightarrow{XA} = \frac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}\right);$$

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB};$$

$$\overrightarrow{XM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{XA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{XB}. \text{ ◀}$$

Якщо $m = n$, то точка M є серединою відрізка AB. Тоді формула (*) набуває вигляду

$$\boxed{\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}\right)} \qquad (**)$$

Властивості векторів широко застосовуються при розв'язуванні задач і доведенні теорем. Продемонструємо це на прикладах.

Задача 3. Доведіть властивість медіан трикутника: *медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну медіану у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини.*

Розв'язання. Нехай медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перетинаються в точці M (рис. 17.6).

Позначимо $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AB_1} = \vec{d}$. Вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ неколінеарні. Вони утворюють базис $\left(\vec{c}; \vec{d}\right)$.

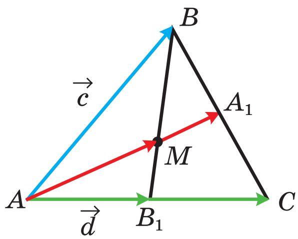


Рис. 17.6

Нехай $\frac{BM}{MB_1} = \alpha$. Записавши це відношення так: $\frac{BM}{MB_1} = \frac{\alpha}{1}$, можна за допомогою формули (*) розкласти вектор $\overrightarrow{AM}$ за базисом $(\vec{c}; \vec{d})$. Маємо:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{\alpha+1}\vec{c} + \frac{\alpha}{\alpha+1}\vec{d}. \qquad (1)$$

Застосовуючи формулу (**), запишемо:

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\cdot 2\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{d}.$$

Оскільки вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{AA_1}$ колінеарні, то існує таке число $k \neq 0$, що $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AA_1}$. Звідси

$$\overrightarrow{AM} = \frac{k}{2}\vec{c} + k\vec{d}. \qquad (2)$$

З рівностей (1) і (2) внаслідок єдиності розкладу вектора за базисом отримуємо: $\begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} = \frac{k}{2}, \\ \frac{\alpha}{\alpha+1} = k. \end{cases}$ Звідси $\alpha = 2$.

Отже, $\frac{BM}{MB_1} = 2$, тобто ми показали, що медіана AA_1 ділить медіану BB_1 у відношенні $2:1$, рахуючи від вершини B. Подальше доведення вам відомо. ◀

Задача 4. Доведіть, що середини основ трапеції та точка перетину продовжень її бічних сторін лежать на одній прямій.

Розв'язання. Нехай точки M і N — середини основ BC і AD трапеції $ABCD$, O — точка перетину прямих AB і CD (рис. 17.7).

Застосовуючи ключову задачу 2, запишемо:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right), \quad \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right).$$

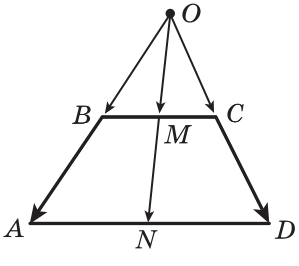


Рис. 17.7

Оскільки вектори $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OA}$ колінеарні, а також вектори $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OD}$ колінеарні, то $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OC} = k_1\overrightarrow{OD}$, де k і k_1 — деякі числа.

Оскільки $\Delta BOC \sim \Delta AOD$, то $\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OD}$. Отже, $k = k_1$.

Маємо: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OD}\right) = k \cdot \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right) = k\overrightarrow{ON}$.

Із ключової задачі 1 випливає, що точки O, M і N лежать на одній прямій. ◀

Також за допомогою векторів можна довести, що прямій ON належить точка перетину діагоналей трапеції. Зробіть це самостійно.

Задача 5. Нехай M — точка перетину медіан трикутника ABC і X — довільна точка (рис. 17.8). Доведіть, що

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right).$$

Розв'язання. Нехай точка K — середина відрізка AC. Маємо: $BM : MK = 2 : 1$. Тоді, використовуючи ключову задачу 2, можна записати:

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{XK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right). \blacktriangleleft$$

Доведемо векторну рівність, яка пов'язує дві чудові точки трикутника.

Задача 6. Доведіть, що коли точка H — ортоцентр трикутника ABC, а точка O — центр його описаного кола, то

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \qquad (***)$$

Розв'язання. Для прямокутного трикутника рівність (***) є очевидною.

Нехай трикутник ABC не є прямокутним. Опустимо з точки O перпендикуляр OK на сторону AC трикутника ABC (рис. 17.9). У курсі геометрії 8 класу було доведено, що $BH = 2OK$.

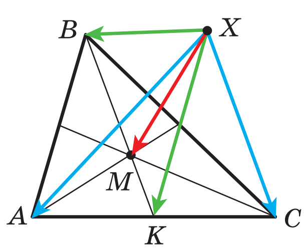


Рис. 17.8

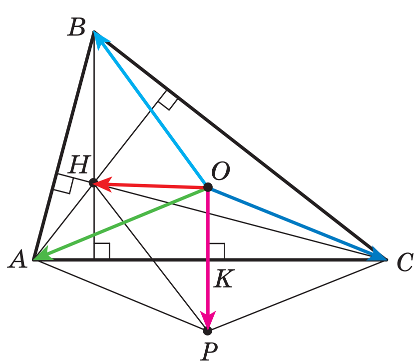


Рис. 17.9

На промені OK позначимо точку P таку, що $OK = KP$. Тоді $BH = OP$. Оскільки $BH \parallel OP$, то чотирикутник $HBOP$ — паралелограм.

За правилом паралелограма $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}$.

Оскільки точка K є серединою відрізка AC, то в чотирикутнику $AOCP$ діагоналі точкою перетину діляться навпіл. Отже, цей чотирикутник — паралелограм. Звідси $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

Маємо: $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. ◀

Звернемося до векторної рівності $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}\right)$, де M — точка перетину медіан трикутника ABC. Оскільки X — довільна точка, то рівність залишається правильною, якщо за точку X вибрати точку O — центр описаного кола трикутника ABC.

Маємо: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Беручи до уваги рівність (***), отримуємо: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH}$.

Ця рівність означає, що точки O, M і H лежать на одній прямій. Як ви знаєте з курсу геометрії 8 класу, цю пряму називають прямою Ейлера.

?

1. Що називають добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k, відмінного від нуля?
2. Чому дорівнює добуток $k\vec{a}$, якщо $k = 0$ або $\vec{a} = \vec{0}$?
3. Що можна сказати про ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{b} = k\vec{a}$, де k – деяке число?
4. Відомо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, причому $\vec{a} \neq \vec{0}$. Як можна виразити вектор $\vec{b}$ через вектор $\vec{a}$?
5. Вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$. Чому дорівнюють координати вектора $k\vec{a}$?
6. Що можна сказати про вектори, координати яких дорівнюють $(a_1; a_2)$ і $(ka_1; ka_2)$?
7. Запишіть сполучну та розподільні властивості множення вектора на число.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

17.1.° Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 17.10). Побудуйте вектор:

1) $2\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\frac{1}{3}\vec{a} + \vec{b}$; 3) $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $-\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$.

17.2.° Побудуйте два неколінеарних вектори $\vec{x}$ і $\vec{y}$. Позначте довільну точку O. Від точки O відкладіть вектор:

1) $3\vec{x}+\vec{y}$;   3) $-\frac{1}{2}\vec{x}+3\vec{y}$;

2) $\vec{x}+2\vec{y}$;   4) $-2\vec{x}-\frac{1}{3}\vec{y}$.

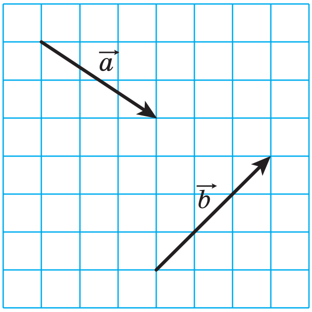


Рис. 17.10

17.3.° Позначте на площині три точки A, B і C такі, що:

1) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$;   3) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;

2) $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$;   4) $\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

17.4.° Накресліть трикутник ABC. Позначте точку M — середину сторони AC.

1) Від точки M відкладіть вектор, рівний вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$.

2) Від точки B відкладіть вектор, рівний вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

17.5.° Накресліть трапецію $ABCD$ $(BC \parallel AD)$. Позначте точку M — середину сторони AB. Від точки M відкладіть вектор, рівний вектору $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

17.6.° Накресліть трикутник ABC. Побудуйте вектор, рівний вектору $\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, так, щоб його початок належав стороні AB, а кінець — стороні BC.

ВПРАВИ

17.7.° Знайдіть модулі векторів $3\vec{m}$ та $-\frac{1}{2}\vec{m}$, якщо $|\vec{m}|=4$.

17.8.° Який із векторів, $3\vec{a}$ чи $-\frac{1}{3}\vec{a}$, співнапрямлений із вектором $\vec{a}$, якщо $\vec{a}\neq\vec{0}$?

17.9.° Визначте, співнапрямленими чи протилежно напрямленими є ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{b} = 2\vec{a}$; 2) $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{b}$; 3) $\vec{b} = \sqrt{2}\,\vec{a}$.

Знайдіть відношення $\frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$.

17.10.° У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Виразіть:

1) вектор $\overrightarrow{AO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$;
2) вектор $\overrightarrow{BD}$ через вектор $\overrightarrow{BO}$;
3) вектор $\overrightarrow{CO}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$.

17.11.° У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Виразіть вектор $\overrightarrow{AO}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

17.12.° У паралелограмі $ABCD$ на діагоналі AC позначили точку M так, що $AM : MC = 1 : 3$. Виразіть вектор $\overrightarrow{MC}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, де $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

17.13.° У паралелограмі $ABCD$ точка M — середина сторони BC, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Виразіть вектори $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{MD}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

17.14.° У трикутнику ABC точки M і N — середини сторін AB і BC відповідно. Виразіть:

1) вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CA}$;
2) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{MN}$.

17.15.° На відрізку AB завдовжки 18 см позначено точку C так, що $BC = 6$ см. Виразіть:

1) вектор $\overrightarrow{AB}$ через вектор $\overrightarrow{AC}$;
2) вектор $\overrightarrow{BC}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$;
3) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{BC}$.

17.16.° Дано вектор $\vec{a}\,(-4; 2)$. Знайдіть координати та модулі векторів $3\vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{a}$ і $\frac{3}{2}\vec{a}$.

17.17.° Дано вектор $\vec{b}\,(-6; 12)$. Знайдіть координати та модулі векторів $2\vec{b}$, $-\frac{1}{6}\vec{b}$ і $\frac{2}{3}\vec{b}$.

17.18.° Дано вектор $\vec{a}\,(3; -2)$. Які з векторів $\vec{b}\,(-3; -2)$, $\vec{c}\,(-6; 4)$, $\vec{d}\left(\frac{3}{2}; -1\right)$, $\vec{e}\left(-1; -\frac{2}{3}\right)$ і $\vec{f}\left(-3\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$ колінеарні вектору $\vec{a}$?

17.19.° Дано вектори $\vec{a}\,(3; -3)$ і $\vec{b}\,(-16; 8)$. Знайдіть координати вектора:

1) $2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$; 3) $\vec{a}-\frac{5}{8}\vec{b}$.

17.20.° Дано вектори $\vec{m}\,(-2; 4)$ і $\vec{n}\,(3; -1)$. Знайдіть координати вектора:

1) $3\vec{m}+2\vec{n}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{m}+2\vec{n}$; 3) $\vec{m}-3\vec{n}$.

17.21.° На сторонах AB і AC трикутника ABC позначено відповідно точки M і N так, що $AM : MB = AN : NC = 1 : 2$. Виразіть вектор $\overrightarrow{MN}$ через вектор $\overrightarrow{CB}$.

17.22.° Точки O, A і B лежать на одній прямій. Доведіть, що існує таке число k, що $\overrightarrow{OA}=k\overrightarrow{OB}$.

17.23.° На сторонах AB і BC паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки M і N так, що $AM : MB = 1 : 2$, $BN : NC = 2 : 1$. Розкладіть вектор $\overrightarrow{NM}$ за базисом $(\vec{a}; \vec{b})$, де $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

17.24.° На сторонах BC і CD паралелограма $ABCD$ позначили відповідно точки E і F так, що $BE : EC = 3 : 1$, $CF : FD = 1 : 3$. Розкладіть вектор $\overrightarrow{EF}$ за базисом $(\vec{a}; \vec{b})$, де $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ і $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

17.25.° Серед векторів $\vec{a}\,(1; -2)$, $\vec{b}\,(-3; -6)$, $\vec{c}\,(-4; 8)$ і $\vec{d}\,(-1; -2)$ укажіть пари колінеарних векторів.

17.26.° Доведіть, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні, якщо $A\,(1; 1)$, $B\,(3; -2)$, $C\,(-1; 3)$, $D\,(5; -6)$.

17.27.° Дано вектори $\vec{m}\,(4; -6)$, $\vec{n}\left(-1; \frac{3}{2}\right)$ і $\vec{k}\left(3; -\frac{9}{2}\right)$. Укажіть пари співнапрямлених і протилежно напрямлених векторів.

17.28.° Знайдіть значення x, при яких вектори $\vec{a}\,(1; x)$ і $\vec{b}\left(\frac{x}{4}; 4\right)$ колінеарні.

17.29.° При яких значеннях y вектори $\vec{a}\,(2; 3)$ і $\vec{b}\,(-1; y)$ колінеарні?

17.30.° Дано вектор $\vec{b}\,(-3; 1)$. Знайдіть координати вектора, колінеарного вектору $\vec{b}$, модуль якого вдвічі більший за модуль вектора $\vec{b}$. Скільки розв'язків має задача?

17.31.° Знайдіть координати вектора $\vec{m}$, протилежно напрямленого вектору $\vec{n}\,(5; -12)$, якщо $|\vec{m}| = 39$.

17.32.° Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, співнапрямленого з вектором $\vec{b}\,(-9; 12)$, якщо $|\vec{a}| = 5$.

17.33.° Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A\,(-1; 2)$, $B\,(3; 5)$, $C\,(14; 6)$ і $D\,(2; -3)$ є трапецією.

17.34.° Доведіть, що точки $A\,(-1; 3)$, $B\,(4; -7)$ і $D\,(-2; 5)$ лежать на одній прямій.

17.35.° Дано вектори $\vec{a}\,(1; -4)$, $\vec{b}\,(0; 3)$ і $\vec{c}\,(2; -17)$. Знайдіть такі числа x і y, що $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

17.36.° На стороні AC трикутника ABC позначили точку M так, що $AM : MC = 2 : 3$. Доведіть, що $\overrightarrow{BM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

17.37.° На стороні BC трикутника ABC позначили точку D так, що $BD : DC = 1 : 2$. Доведіть, що $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

17.38.• У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. На стороні BC позначено точку K так, що $BK : KC = 2 : 3$. Розкладіть вектор $\overrightarrow{OK}$ за базисом $(\vec{a}; \vec{b})$, де $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

17.39.• Діагоналі чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O так, що $AO : OC = 1 : 2$, $BO : OD = 4 : 3$. Розкладіть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$ за базисом $(\vec{a}; \vec{b})$, де $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

17.40.• На сторонах AB і BC трикутника ABC позначили відповідно точки K і F так, що $AK : KB = 1 : 2$ і $BF : FC = 2 : 3$. Розкладіть вектори $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{KC}$ і $\overrightarrow{KF}$ за базисом $(\vec{m}; \vec{n})$, де $\overrightarrow{BK} = \vec{m}$, $\overrightarrow{CF} = \vec{n}$.

17.41.• На сторонах AC і BC трикутника ABC позначили відповідно точки M і N так, що $AM : MC = 1 : 3$ і $BN : NC = 4 : 3$. Розкладіть вектори $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{NM}$ за базисом $(\vec{k}; \vec{p})$, де $\overrightarrow{BN} = \vec{k}$, $\overrightarrow{AM} = \vec{p}$.

17.42.• Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M. Розкладіть вектор $\overrightarrow{BM}$ за базисом: 1) $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC})$; 2) $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CA})$.

17.43.$^{\bullet}$ За допомогою векторів доведіть теорему про середню лінію трикутника.

17.44.$^{\bullet}$ За допомогою векторів доведіть теорему про середню лінію трапеції.

17.45.$^{\bullet}$ Точки M і N — відповідно середини діагоналей AC і BD трапеції $ABCD$ $(BC \parallel AD)$. За допомогою векторів доведіть, що $MN \parallel AD$.

17.46.$^{\bullet\bullet}$ Точки M_1 і M_2 — середини відрізків A_1B_1 і A_2B_2 відповідно. Доведіть, що $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2}\right)$.

17.47.$^{\bullet\bullet}$ Точки M і N — відповідно середини протилежних сторін AB і CD чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що коли

$$MN = \frac{1}{2}(BC + AD), \text{ то } BC \parallel AD.$$

17.48.$^{\bullet\bullet}$ Точки M і N — відповідно середини діагоналей AC і BD чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}\right)$.

17.49.$^{\bullet\bullet}$ У коло вписано трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ з ортоцентрами H і H_1 відповідно. Доведіть, що $\overrightarrow{HH_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$.

17.50.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють медіанам даного трикутника.

17.51.$^{\bullet\bullet}$ На сторонах BC, CA і AB трикутника ABC позначили відповідно точки A_1, B_1 і C_1 так, що $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{AC_1}{C_1B}$. Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють відрізкам AA_1, BB_1 і CC_1.

17.52.$^{\bullet\bullet}$ Точки M і N — середини відповідно сторін AB і CD опуклого чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що існує трикутник, сторони якого дорівнюють $\frac{1}{2}AC$, $\frac{1}{2}BD$ і MN.

17.53.$^{\bullet\bullet}$ Точки M_1 і M_2 — середини відрізків A_1B_1 і A_2B_2 відповідно. Доведіть, що середини відрізків A_1A_2, M_1M_2 і B_1B_2 лежать на одній прямій.

17.54.$^{\bullet\bullet}$ На стороні AD і на діагоналі AC паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки M і N так, що $AM = \frac{1}{5}AD$ і $AN = \frac{1}{6}AC$. Доведіть, що точки M, N і B лежать на одній прямій.

17.55.$^{\bullet\bullet}$ Нехай M_1 і M_2 — точки перетину медіан відповідно трикутників $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$. Доведіть, що $\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}\right)$.

17.56.•• На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC позначили відповідно точки C_1, A_1 і B_1 так, що $\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{CB_1}{B_1A}$. Доведіть, що точки перетину медіан трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ збігаються.

17.57.* Чотирикутник $ABCD$ є вписаним. Точки H_1, H_2, H_3 і H_4 — ортоцентри відповідно трикутників BCD, ACD, ABD і ABC. Доведіть, що середини відрізків AH_1, BH_2, CH_3 і DH_4 збігаються.

17.58.* Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло із центром O. Доведіть, що коли $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, то чотирикутник $ABCD$ — прямокутник.

17.59.* Точка перетину відрізків, які сполучають середини протилежних сторін чотирикутника, збігається з точкою перетину його діагоналей. Доведіть, що цей чотирикутник є паралелограмом.

17.60.* Дано чотирикутник $ABCD$, середини сторін AB і CD та точка перетину діагоналей якого належать одній прямій. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

17.61.* У п'ятикутнику $ABCDE$ точки M, N, P і Q — середини сторін AB, BC, CD і DE відповідно. Точки K і F — середини відрізків MP і NQ відповідно. Доведіть, що $KF \parallel AE$ і $KF = \frac{1}{4}AE$.

17.62.* У чотирикутнику $ABCD$ точки M і N — середини сторін AB і CD відповідно. Точка K — середина відрізка MN. Медіани трикутника BCD перетинаються в точці P. Доведіть, що точки A, K і P лежать на одній прямій.

17.63.* Із точки P, яка належить стороні AC рівностороннього трикутника ABC, на сторони AB і BC опущено перпендикуляри PE і PF відповідно. Доведіть, що точка перетину медіан трикутника ABC, середина відрізка EF і точка P лежать на одній прямій.

17.64.* Дано трикутник ABC і довільну точку O. Точки P, Q і R — відповідно точки перетину медіан трикутників AOB, BOC, COA. Доведіть, що точка O і точки перетину медіан трикутників ABC і PQR лежать на одній прямій.

17.65.* Паралельні прямі, які проходять через вершини A, B і C трикутника ABC, перетинають його описане коло в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Доведіть, що ортоцентри H_1, H_2 і H_3 відповідно трикутників ABC_1, BCA_1 і CAB_1 лежать на одній прямій.

18. Скалярний добуток векторів

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — два ненульових та неспівнапрямлених вектори (рис. 18.1). Від довільної точки O відкладемо вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Величину кута AOB називатимемо **кутом між векторами** $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Наприклад, на рисунку 18.1 $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$, а на рисунку 18.2 $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 180°$.

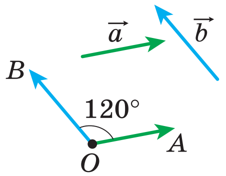


Рис. 18.1

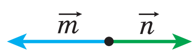


Рис. 18.2

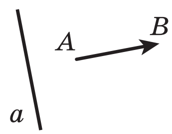


Рис. 18.3

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співнапрямлені, то вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$. Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то також вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.

Отже, для будь-яких векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ має місце нерівність:

$$0° \leqslant \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant 180°.$$

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°. Пишуть: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Ненульовий вектор $\overrightarrow{AB}$ називають перпендикулярним до прямої a, якщо прямі AB і a перпендикулярні (рис. 18.3).

Ви вмієте додавати й віднімати вектори, множити вектор на число. Також із курсу фізики ви знаєте, що коли під впливом постійної сили $\vec{F}$ тіло перемістилося з точки A в точку B (рис. 18.4), то виконана механічна робота дорівнює $|\vec{F}|\,|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$, де $\varphi = \angle(\vec{F}, \overrightarrow{AB})$.

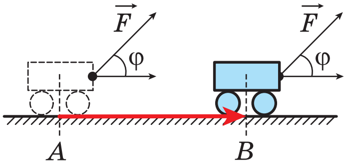


Рис. 18.4

Викладене вище підказує, що доцільно ввести ще одну дію над векторами.

Означення. **Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними.**

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначають так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Маємо:

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})}$$

Якщо хоча б один із векторів $\vec{a}$ або $\vec{b}$ нульовий, то очевидно, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Нехай $\vec{a} = \vec{b}$. Тоді $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|\,|\vec{a}| \cos 0° = |\vec{a}|^2$.

Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ називають **скалярним квадратом** вектора $\vec{a}$ та позначають $\vec{a}^{\,2}$.

Ми отримали, що $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$, тобто ***скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля***. Звідси $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$.

Теорема 18.1. ***Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.***

Доведення. Нехай $\vec{a} \perp \vec{b}$. Доведемо, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Маємо: $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$. Звідси $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos 90° = 0$.

Нехай тепер $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Доведемо, що $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Запишемо: $|\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Оскільки $|\vec{a}| \neq 0$ і $|\vec{b}| \neq 0$, то $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$. Звідси $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, тобто $\vec{a} \perp \vec{b}$. ◄

Теорема 18.2. ***Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2}$$

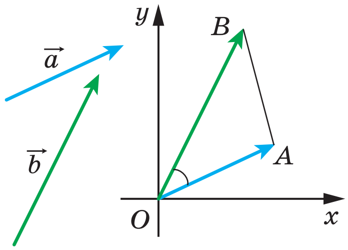


Рис. 18.5

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні.

Відкладемо від початку координат вектори $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, відповідно рівні векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 18.5). Тоді $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \angle AOB$.

Застосуємо теорему косинусів до трикутника AOB:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB.$$

Звідси $OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2)$.

Оскільки $|\vec{a}| = OA$ і $|\vec{b}| = OB$, то $OA \cdot OB \cdot \cos \angle AOB = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Крім того, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$. Звідси $\overrightarrow{AB}(b_1 - a_1;\ b_2 - a_2)$.

Маємо: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2\right)$. Скориставшися формулою знаходження модуля вектора за його координатами, запишемо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(\left(a_1^2 + a_2^2\right) + \left(b_1^2 + b_2^2\right) - \left(b_1 - a_1\right)^2 - \left(b_2 - a_2\right)^2\right).$$

Спрощуючи вираз, який записано в правій частині останньої рівності, отримуємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Розглянемо випадок, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $\vec{b} = \vec{0}$, то очевидно, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$ і $\vec{b} \neq \vec{0}$, то існує таке число k, що $\vec{b} = k\vec{a}$, тобто $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$.

Якщо $k > 0$, то $\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0°$. Маємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \left(k\vec{a}\right) = |\vec{a}|\,|k\vec{a}| \cos 0° = |k|\,|\vec{a}|^2 = k\left(a_1^2 + a_2^2\right) =$$
$$= a_1 \cdot ka_1 + a_2 \cdot ka_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Випадок, коли $k < 0$, розгляньте самостійно. ◀

Наслідок. ***Косинус кута між ненульовими векторами $\vec{a}\,(a_1;\ a_2)$ і $\vec{b}\,(b_1;\ b_2)$ можна обчислити за формулою***

$$\boxed{\cos \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}} \qquad (*)$$

Доведення. З означення скалярного добутку векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ випливає, що $\cos \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$. Скориставшися теоремою 18.2 і формулою знаходження модуля вектора за його координатами, отримуємо формулу (*). ◀

За допомогою теореми 18.2 легко довести такі властивості скалярного добутку векторів.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і будь-якого числа k виконуються рівності:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ — переставна властивість;

2) $\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$ — сполучна властивість;

3) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ — розподільна властивість.

Для доведення цих властивостей достатньо виразити через координати векторів скалярні добутки, записані в правих і лівих частинах рівностей, і порівняти їх. Зробіть це самостійно.

Ці властивості разом із властивостями додавання векторів і множення вектора на число дають змогу перетворювати вирази, які містять скалярний добуток векторів, аналогічно тому, як ми перетворюємо алгебраїчні вирази. Наприклад,

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{a}+\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=$$
$$=\vec{a}^2+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2.$$

Задача 1. Відомо, що $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=1$, $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120°$. Знайдіть $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|$.

Розв'язання. Оскільки скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, то $\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|^2=\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)^2$. Звідси

$$\left|2\vec{a}-3\vec{b}\right|=\sqrt{\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)^2}=\sqrt{4\vec{a}^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{b}^2}=$$
$$=\sqrt{4\left|\vec{a}\right|^2-12\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)+9\left|\vec{b}\right|^2}=\sqrt{36+18+9}=\sqrt{63}=3\sqrt{7}.$$

Відповідь: $3\sqrt{7}$. ◀

Задача 2. У трикутнику ABC відомо, що $AB = 4$ см, $BC=6\sqrt{3}$ см, $\angle ABC = 30°$. Знайдіть медіану BM.

Розв'язання. Застосовуючи ключову задачу 2 п. 17, запишемо: $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$ (рис. 18.6). Звідси $\overrightarrow{BM}^2=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)^2=$

$$=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}^2\right)=\frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{BA}\right|^2+2\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos\angle ABC+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left(16+48\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+108\right)=49.$$

Отже, $BM^2 = 49$; $BM = 7$ см.

Відповідь: 7 см. ◀

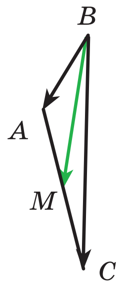


Рис. 18.6

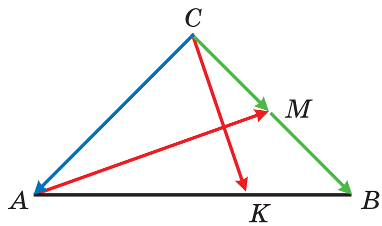


Рис. 18.7

Задача 3. На гіпотенузі AB рівнобедреного прямокутного трикутника ABC позначили точку K так, що $AK : KB = 2 : 1$ (рис. 18.7). Доведіть, що відрізок CK перпендикулярний до медіани AM трикутника ABC.

Розв'язання. Нехай $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Скориставшися ключовою задачею 2 п. 17, можна записати: $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$.

Маємо: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$.

З урахуванням того, що $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ і $\vec{a} \perp \vec{b}$, знайдемо скалярний добуток векторів $\overrightarrow{CK}$ і $\overrightarrow{AM}$.

Маємо: $\overrightarrow{CK} \cdot \overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) =$

$$= \frac{1}{6}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a}^2 + \frac{1}{3}\vec{b}^2 - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{3}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{3}|\vec{a}|^2 = 0.$$

Отже, $\overrightarrow{CK} \perp \overrightarrow{AM}$. ◀

Задача 4. Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок C таких, що медіани AA_1 і BB_1 трикутника ABC перпендикулярні.

Розв'язання. Виберемо систему координат так, щоб $A\ (0;\ 0)$, $B\ (1;\ 0)$. Нехай $C\ (x;\ y)$ — вершина трикутника ABC (рис. 18.8). Очевидно, що $y \neq 0$.

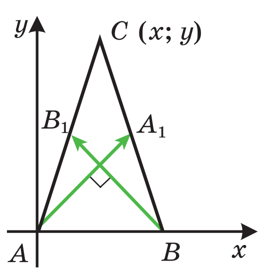


Рис. 18.8

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BB_1}$.

Маємо: $\overrightarrow{AA_1}\left(\frac{x+1}{2};\ \frac{y}{2}\right)$, $\overrightarrow{BB_1}\left(\frac{x-2}{2};\ \frac{y}{2}\right)$.

Точка C належить шуканому ГМТ тоді й тільки тоді, коли $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0$ і $y \neq 0$. Маємо:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x-2}{2} + \frac{y^2}{4} = 0, \\ y \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}, \\ y \neq 0. \end{cases}$$

Отже, шуканим ГМТ є коло радіуса $\frac{3}{2}AB$ із центром у середині відрізка AB, за винятком точок, які належать прямій AB. ◀

Задача 5. Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через задану точку M $(x_0;\ y_0)$ перпендикулярно до даного ненульового вектора $\vec{n}(a;\ b)$.

Розв'язання. Нехай X $(x;\ y)$ — довільна точка (рис. 18.9). Точка X належить шуканій прямій тоді й тільки тоді, коли $\vec{n} \perp \overrightarrow{MX}$, тобто якщо виконується рівність $\vec{n} \cdot \overrightarrow{MX} = 0$. Звідси отримуємо:

$$\boxed{a\ (x - x_0) + b\ (y - y_0) = 0} \qquad (*)$$

Рівняння (*) шукане.

Перепишемо рівняння (*) так: $ax + by = ax_0 + by_0$.

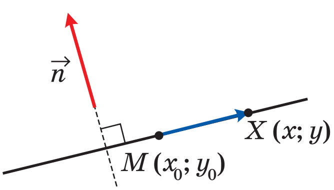


Рис. 18.9

Нехай $ax_0 + by_0 = c$. Оскільки вектор $\vec{n} \neq \vec{0}$, тобто $a^2 + b^2 \neq 0$, то отримуємо загальне рівняння прямої $ax + by = c$.

Розв'язання цієї задачі дає змогу в загальному рівнянні прямої $ax + by = c$ визначити геометричний зміст коефіцієнтів a і b: вектор $\vec{n}(a;\ b)$ перпендикулярний до даної прямої. ◀

1. У яких межах знаходиться кут між будь-якими векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$?
2. Які вектори називають перпендикулярними?
3. Що називають скалярним добутком двох векторів?
4. Що називають скалярним квадратом вектора?
5. Чому дорівнює скалярний квадрат вектора?
6. Сформулюйте умову перпендикулярності двох ненульових векторів.
7. Як знайти скалярний добуток векторів, якщо відомо їхні координати?
8. Як знайти косинус кута між двома ненульовими векторами, якщо відомо їхні координати?
9. Запишіть властивості скалярного добутку векторів.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

18.1.° Побудуйте кут, величина якого дорівнює куту між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 18.10).

18.2.° Побудуйте кут, величина якого дорівнює куту між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$ (рис. 18.11).

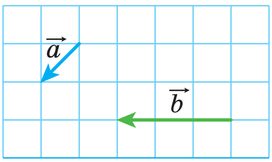


Рис. 18.10

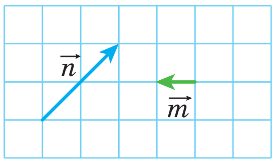


Рис. 18.11

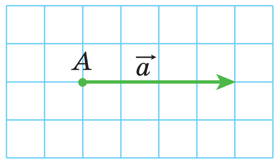


Рис. 18.12

18.3.° На рисунку 18.12 зображено вектор $\vec{a}$ (довжина сторони клітинки дорівнює 0,5 см). Відкладіть від точки A вектор $\vec{b}$ такий, що $\left|\vec{b}\right| = 3$ см і $\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 120°$. Скільки розв'язків має задача?

ВПРАВИ

18.4.° На рисунку 18.13 зображено рівносторонній трикутник ABC, медіани AM і BK якого перетинаються в точці F. Знайдіть кут між векторами: 1) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{AM}$; 4) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AM}$; 5) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BK}$; 6) $\overrightarrow{AM}$ і $\overrightarrow{BK}$; 7) $\overrightarrow{CF}$ і $\overrightarrow{AB}$.

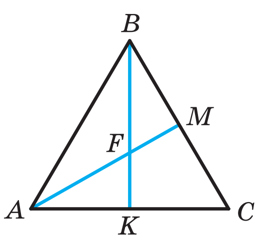


Рис. 18.13

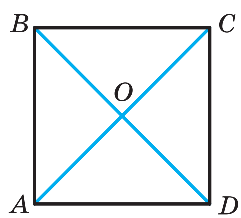


Рис. 18.14

18.5.° На рисунку 18.14 зображено квадрат $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Знайдіть кут між векторами:

1) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DA}$; 2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CA}$; 4) $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{CB}$; 5) $\overrightarrow{BO}$ і $\overrightarrow{CD}$.

18.6.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 5,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60°$;

2) $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 2\sqrt{2},\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135°$;

3) $|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 1,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$;

4) $|\vec{a}| = \frac{1}{2},\ |\vec{b}| = 6,\ \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$.

18.7.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо:

1) $|\vec{m}| = 7\sqrt{2},\ |\vec{n}| = 4,\ \angle(\vec{m}, \vec{n}) = 45°$;

2) $|\vec{m}| = 8,\ |\vec{n}| = \sqrt{3},\ \angle(\vec{m}, \vec{n}) = 150°$.

18.8.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(2; -1),\ \vec{b}(1; -3)$;

2) $\vec{a}(-5; 1),\ \vec{b}(2; 7)$;

3) $\vec{a}(1; -4),\ \vec{b}(8; 2)$.

18.9.° Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо:

1) $\vec{m}(3; -2),\ \vec{n}(1; 0)$;

2) $\vec{m}\left(\frac{3}{2}; -1\right),\ \vec{n}(6; 9)$.

18.10.° На рисунку 18.15 зображено ромб $ABCD$, у якому $AB = 6$, $\angle ABC = 120°$. Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$;

2) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CB}$;

3) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$;

4) $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{DA}$;

5) $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{AC}$;

6) $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{DC}$;

7) $\overrightarrow{BD}$ і $\overrightarrow{AD}$.

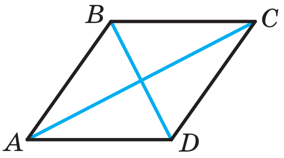


Рис. 18.15

18.11.° У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, $CB = 2$. Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$; 3) $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{BA}$.

18.12.° Знайдіть роботу сили величиною 6 Н з переміщення тіла на відстань 7 м, якщо кут між напрямами сили та переміщення дорівнює 60°.

18.13.° У рівносторонньому трикутнику ABC, сторона якого дорівнює 1, медіани AA_1 і BB_1 перетинаються в точці M. Обчисліть:

1) $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{BB_1}$; 2) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{MA_1}$.

18.14.° Точка O — центр правильного шестикутника $ABCDEF$, сторона якого дорівнює 1. Обчисліть:

1) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{ED}$; 4) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$.

18.15.° Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}\,(1; -2)$ і $\vec{b}\,(2; -3)$.

18.16.° Який знак має скалярний добуток векторів, якщо кут між ними:

1) гострий; 2) тупий?

18.17.° Відомо, що скалярний добуток векторів є:

1) додатним числом; 2) від'ємним числом.

Визначте вид кута між векторами.

18.18.° При яких значеннях x кут між векторами $\vec{a}\,(2; 5)$ і $\vec{b}\,(x; 4)$:

1) гострий; 2) тупий?

18.19.° Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, колінеарного вектору $\vec{a}\,(3; -4)$, якщо $\vec{a}\cdot\vec{b} = -100$.

18.20.° При якому значенні x вектори $\vec{a}\,(3; x)$ і $\vec{b}\,(1; 9)$ перпендикулярні?

18.21.° Відомо, що $x \neq 0$ і $y \neq 0$. Доведіть, що вектори $\vec{a}\,(-x; y)$ і $\vec{b}\,(y; x)$ перпендикулярні.

18.22.° При яких значеннях x вектори $\vec{a}\,(2x; -3)$ і $\vec{b}\,(x; 6)$ перпендикулярні?

18.23.° При якому значенні y скалярний добуток векторів $\vec{a}\,(4; y)$ і $\vec{b}\,(3; -2)$ дорівнює 14?

18.24.° Відомо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні та $|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$. При яких значеннях x вектори $\vec{a} + x\vec{b}$ і $\vec{a} - x\vec{b}$ перпендикулярні?

18.25.° Вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярні. Доведіть, що $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

18.26.° Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 45°$. Знайдіть скалярний добуток $(2\vec{a} - \vec{b})\cdot\vec{b}$.

18.27.° Знайдіть скалярний добуток $(\vec{a} - 2\vec{b})\cdot(\vec{a} + \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$.

18.28.• Відомо, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 150°$. Знайдіть $|2\vec{a} + 5\vec{b}|$.

18.29.• Відомо, що $\left|\vec{m}\right|=1$, $\left|\vec{n}\right|=2$, $\angle\left(\vec{m},\ \vec{n}\right)=60°$. Знайдіть $\left|2\vec{m}-3\vec{n}\right|$.

18.30.• Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(3;\ -2)$, $B\ (4;\ 0)$, $C\ (2;\ 1)$ і $D\ (1;\ -1)$ є прямокутником.

18.31.• Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(-1;\ 4)$, $B\ (-2;\ 5)$, $C\ (-1;\ 6)$ і $D\ (0;\ 5)$ є квадратом.

18.32.• Знайдіть косинуси кутів трикутника з вершинами $A\ (1;\ 6)$, $B\ (-2;\ 3)$ і $C\ (2;\ -1)$.

18.33.• Знайдіть кути трикутника з вершинами $A\ (0;\ 6)$, $B\left(4\sqrt{3};\ 6\right)$ і $C\left(3\sqrt{3};\ 3\right)$.

18.34.• Доведіть, що для будь-яких двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ виконується нерівність $-\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\leqslant\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$.

18.35.• Визначте взаємне розміщення двох ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$;   2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$.

18.36.• Знайдіть кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо $\left(\vec{m}+3\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{m}-\vec{n}\right)=$ $=11$, $\left|\vec{m}\right|=2$, $\left|\vec{n}\right|=3$.

18.37.• Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)=\frac{3}{2}$, $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=1$.

18.38.• У трикутнику ABC відомо, що $AB = 4$, $AC = 10$, $\angle BAC = 60°$. На стороні BC позначили точку M так, що $BM : MC = 3$. Знайдіть відрізок AM.

18.39.•• На параболі $y = x^2$ позначили точки $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$ і $C(x_3;\ y_3)$ так, що $\angle ABC = 90°$. Доведіть, що $(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) = -1$.

18.40.•• Точки M і N є серединами відповідно сторін BC і CD ромба $ABCD$. Доведіть, що коли $AM \perp BN$, то чотирикутник $ABCD$ — квадрат.

18.41.•• У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90°$, $AC = 1$, $BC=\sqrt{2}$. Доведіть, що його медіани AK і CM перпендикулярні.

18.42.•• У трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) медіани CC_1 і BB_1 перпендикулярні. Знайдіть tg $\angle ABC$.

18.43.•• У чотирикутнику $ABCD$ діагоналі AC і BD перпендикулярні та перетинаються в точці O. Відомо, що $OB = OC = 1$, $OA = 2$, $OD = 3$. Знайдіть кут між прямими AB і DC.

18.44.•• У трикутнику ABC проведено медіану BD. Відомо, що $\angle DBC = 90°$, $BD = \frac{\sqrt{3}}{4}AB$. Знайдіть кут ABD.

18.45.•• Точки K і M — середини відповідно сторін BC і CD паралелограма $ABCD$. Знайдіть сторону AD, якщо $AK = 6$, $AM = 3$, $\angle KAM = 60°$.

18.46.•• В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle A = 65°$, $\angle D = 85°$, $AB = \sqrt{3}$, $CD = 3$. Знайдіть довжину відрізка, який сполучає середини сторін AD і BC.

18.47.•• В опуклому чотирикутнику $ABCD$ точки M і N — середини діагоналей AC і BD відповідно. Знайдіть кут між прямими AB і CD, якщо $AB = 2$, $CD = 4$, $MN = \sqrt{3}$.

18.48.•• На гіпотенузі AB рівнобедреного прямокутного трикутника ABC знайдіть таку точку K, щоб відрізок CK і медіана AM були перпендикулярними.

18.49.•• На стороні AB рівностороннього трикутника ABC позначили точку C_1 так, що $AC_1 : C_1B = 1 : 2$, а на стороні AC позначили точку B_1 так, що $CC_1 \perp BB_1$. Знайдіть відношення $AB_1 : B_1C$.

18.50.•• На сторонах AB і BC трикутника ABC у зовнішній бік побудовано квадрати $ABMN$ і $BCKF$. Доведіть, що медіана BD трикутника ABC перпендикулярна до прямої MF.

18.51.* Доведіть нерівність $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$, де A, B і C — кути трикутника ABC.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 5

Вектор

Якщо вказано, яка точка є початком відрізка, а яка точка — його кінцем, то такий відрізок називають напрямленим відрізком або вектором.

Колінеарні вектори

Ненульові вектори називають колінеарними, якщо вони лежать на паралельних прямих або на одній прямій. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

Рівні вектори

Ненульові вектори називають рівними, якщо їхні модулі рівні й вони співнапрямлені. Будь-які два нульових вектори рівні. Рівні вектори мають рівні відповідні координати. Якщо відповідні координати векторів рівні, то рівні й самі вектори.

Координати вектора

Якщо точки $A\,(x_1;\ y_1)$ і $B\,(x_2;\ y_2)$ відповідно є початком і кінцем вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$ дорівнюють відповідно першій і другій координатам вектора $\vec{a}$.

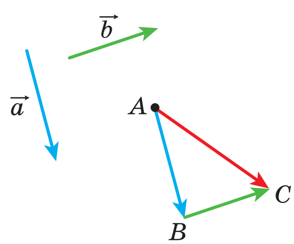
Модуль вектора

Якщо вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1;\ a_2)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Правила додавання двох векторів

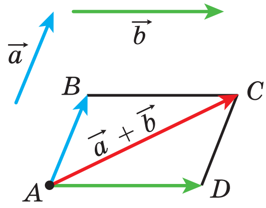
Правило трикутника

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$, а від точки B — вектор $\overrightarrow{BC}$, рівний вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ — сума векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.
Для будь-яких трьох точок A, B і C виконується рівність $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Правило паралелограма

Відкладемо від довільної точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, рівний вектору $\vec{a}$, і вектор $\overrightarrow{AD}$, рівний вектору $\vec{b}$. Побудуємо паралелограм $ABCD$. Тоді вектор $\overrightarrow{AC}$ — сума векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Координати суми векторів

Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно дорівнюють $(a_1; a_2)$ і $(b_1; b_2)$, то координати вектора $\vec{a}+\vec{b}$ дорівнюють $(a_1+b_1; a_2+b_2)$.

Властивості додавання векторів

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ виконуються рівності:

1) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

2) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — переставна властивість;

3) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ — сполучна властивість.

Різниця векторів

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дорівнює вектору $\vec{a}$.
Для будь-яких трьох точок O, A і B виконується рівність $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$.

Координати різниці векторів

Якщо координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно дорівнюють $(a_1; a_2)$ і $(b_1; b_2)$, то координати вектора $\vec{a}-\vec{b}$ дорівнюють $(a_1-b_1; a_2-b_2)$.

Протилежні вектори

Два ненульових вектори називають протилежними, якщо їхні модулі рівні й вектори протилежно напрямлені.
Для будь-яких точок A і B виконується рівність $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

Множення вектора на число

Добутком ненульового вектора $\vec{a}$ і числа k, відмінного від нуля, називають такий вектор $\vec{b}$, що:

1) $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$;

2) якщо $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; якщо $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $k = 0$, то вважають, що $k\vec{a} = \vec{0}$.

Якщо вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ має координати $(ka_1; ka_2)$.

Властивості колінеарних векторів

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, причому $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k, що $\vec{b} = k\vec{a}$.

Якщо вектори $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ колінеарні, причому $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k, що $b_1 = ka_1$ і $b_2 = ka_2$.

Властивості множення вектора на число

Для будь-яких чисел k, m і будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ виконуються рівності:

1) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ — сполучна властивість;

2) $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ — перша розподільна властивість;

3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ — друга розподільна властивість.

Розкладання вектора за базисом

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — неколінеарні вектори. Тоді для будь-якого вектора $\vec{c}$ існує єдина пара чисел $(x; y)$ така, що $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Базисом називають упорядковану пару $(\vec{a}; \vec{b})$ неколінеарних векторів.

Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ можна обчислити за формулою $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Властивості скалярного добутку

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і будь-якого числа k виконуються рівності:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ — переставна властивість;
2) $\left(k\vec{a}\right) \cdot \vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ — сполучна властивість;
3) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ — розподільна властивість.

Умова перпендикулярності двох векторів

Скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.

Косинус кута між двома векторами

Косинус кута між ненульовими векторами $\vec{a}$ $(a_1; a_2)$ і $\vec{b}$ $(b_1; b_2)$ можна обчислити за формулою

$$\cos \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФІГУР §6*

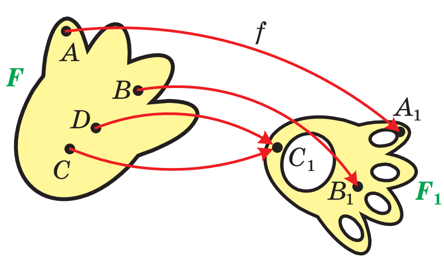
У цьому параграфі ви дізнаєтеся, що таке перетворення фігури. Ознайомитеся з такими видами перетворень, як паралельне перенесення, центральна симетрія, осьова симетрія, поворот, подібність.

Ви навчитеся застосовувати властивості перетворень під час розв'язування задач і доведення теорем.

19. Перетворення (відображення) фігур

Із курсу алгебри ви знаєте, що функцію f, у якої $D(f) = X$, $E(f) = Y$, також називають відображенням множини X на множину Y.

Як правило, в алгебрі елементами множин X і Y є числа. У геометрії природно розглядати такі множини X і Y, елементами яких є точки. У цьому разі множина X — це деяка фігура F, множина Y — фігура F_1, а відображення f — це **відображення фігури F на фігуру F_1** (рис. 19.1). Пишуть: $f(F) = F_1$. Фігуру F_1 називають **образом** фігури F, фігуру F — **прообразом** фігури F_1 при відображенні f.



f — відображення (функція),
$f(F) = F_1$, $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$,
$f(C) = C_1$, $f(D) = C_1$

Рис. 19.1

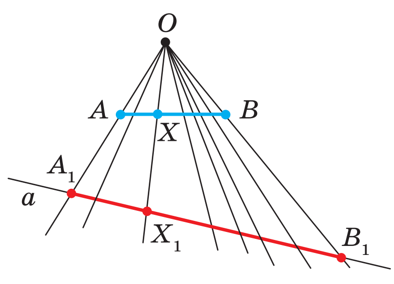


Рис. 19.2

Розглянемо приклади.

Приклад 1. На рисунку 19.2 зображено відрізок AB, пряму a та точку O, яка не належить ні прямій a, ні прямій AB. Розглянемо функцію f, областю визначення якої є множина точок відрізка AB

і яка задається за таким правилом: кожній точці X відрізка AB поставимо у відповідність точку X_1 прямої a так, щоб точки O, X і X_1 лежали на одній прямій. Зокрема, $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$.

Зрозуміло, що множина всіх точок X_1 таких, що $X_1 = f(X)$, утворює відрізок A_1B_1.

Таким чином, ми задали відображення f відрізка AB на відрізок A_1B_1. Також прийнято говорити, що задано **перетворення** f відрізка AB, результатом якого є відрізок A_1B_1. Тут відрізок A_1B_1 — це образ відрізка AB при перетворенні f, зокрема, точка A_1 — **образ** точки A, точка B_1 — образ точки B.

Слова «відображення» та «перетворення» є синонімами. У геометрії ми частіше користуватимемося терміном «**перетворення фігури F**».

Приклад 2. На рисунку 19.3 зображено коло з діаметром AB. Задамо перетворення g кола: кожній точці X кола поставимо у відповідність точку X_1 — основу перпендикуляра, опущеного з точки X на діаметр AB. Зокрема, $g(A) = A$, $g(B) = B$. При цьому кожній точці кола поставлено у відповідність єдину точку діаметра AB, і кожна точка діаметра AB є образом щонайменше однієї точки кола.

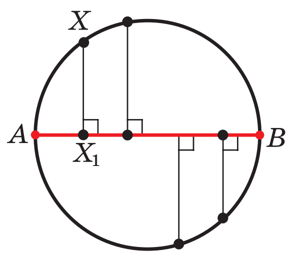


Рис. 19.3

Таким чином, ми задали перетворення g кола, при якому образом кола є його діаметр AB.

Приклад 3. Позначимо на площині точку O. Розглянемо функцію h, областю визначення якої є всі точки площини, а областю значень — множина, яка складається з однієї точки O, тобто кожній точці X площини поставимо у відповідність точку O. Маємо: $h(X) = O$.

Тут функція h — це перетворення площини, при якому образом площини є фігура, яка складається з однієї точки O.

У прикладі 1 кожна точка відрізка A_1B_1 є відповідною деякій *єдиній* точці відрізка AB. У таких випадках говорять, що перетворення f відрізка AB є **оборотним**. *Оборотним перетворенням фігури називають таке перетворення, при якому різним точкам фігури відповідають різні образи.*

У прикладі 2 перетворення кола не є оборотним (подумайте чому).

Для кожного оборотного перетворення існує **обернене** до нього перетворення. Пояснимо сказане. Знову звернемося до рисунка 19.2. Оскільки перетворення f відрізка AB є оборотним, то ми можемо розглянути функцію f_1, областю визначення якої є множина точок відрізка A_1B_1 і яку задано таким правилом: кожній точці X_1 відрізка A_1B_1 поставимо у відповідність єдину точку X відрізка AB таку, що точки O, X і X_1 лежать на одній прямій. Перетворення f_1 є оберненим до перетворення f.

Узагалі, для заданого оборотного перетворення f можна вказати перетворення f_1, яке має такі властивості:

1) якщо фігура F_1 — образ фігури F при перетворенні f, то фігура F — образ фігури F_1 при перетворенні f_1;

2) якщо X — довільна точка фігури F і $f(X) = X_1$, то $f_1(X_1) = X$.

Таке перетворення f_1 називають оберненим до перетворення f. Також можна сказати, що перетворення f є оберненим до перетворення f_1. Перетворення f і f_1 називають **взаємно оберненими**.

Розглянемо перетворення f, при якому образом фігури F є сама ця фігура F, тобто $f(F) = F$. У цьому разі говорять, що задано **перетворення фігури F на себе**.

Приклад 4. Розглянемо точку M, яка лежить усередині кола (рис. 19.4). Кожній точці X кола поставимо у відповідність точку X_1 — другу точку перетину прямої MX із колом. Отримаємо перетворення даного кола на себе.

Розглянемо перетворення f, при якому кожній точці X фігури F поставлено у відповідність саму точку X, тобто $f(X) = X$. Таке перетворення f фігури F називають **тотожним**. Очевидно, що тотожне перетворення є окремим випадком перетворення фігури на себе.

Тотожне перетворення є оборотним (подумайте чому).

Нехай у результаті перетворення f образом фігури F є фігура F_1, а в результаті перетворення g образом фігури F_1 є фігура F_2, тобто $f(F) = F_1$, $g(F_1) = F_2$ (рис. 19.5).

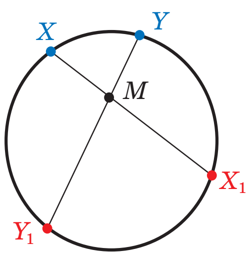
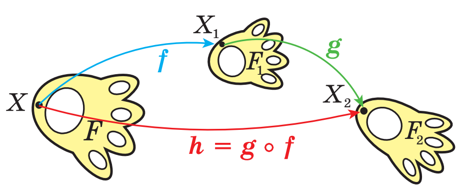


Рис. 19.4



$f(X) = X_1$, $g(X_1) = X_2$

Рис. 19.5

Перетворення f і g, виконані послідовно, задають перетворення h, при якому образом фігури F є фігура F_2. Таке перетворення h називають **композицією** перетворень f і g. Якщо виконується спочатку перетворення f, а потім перетворення g, то пишуть: $h = g \circ f$. Тоді $g \circ f\ (F) = g\ (f\ (F)) = g\ (F_1) = F_2$, тобто $g \circ f\ (F) = F_2$.

Розглянемо два взаємно обернених перетворення f і g. Нехай X — довільна точка фігури F і $f\ (X) = X_1$. Тоді $g\ (X_1) = X$. Отже, $g \circ f\ (X) = X$. Це означає, що композиція двох взаємно обернених перетворень є тотожним перетворенням.

1. Опишіть, що таке перетворення фігури.
2. У якому разі фігуру F_1 називають образом фігури F, а фігуру F – прообразом фігури F_1?
3. Яке перетворення фігури називають оборотним? тотожним?
4. Опишіть перетворення, які називають взаємно оберненими.
5. Опишіть перетворення фігури, яке називають композицією перетворень.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

19.1.° Позначимо на площині точку O. Задамо перетворення площини за таким правилом (рис. 19.6): кожній точці X площини поставимо у відповідність таку точку X_1, що точка O є серединою відрізка XX_1 (точці O поставимо у відповідність саму точку O). Побудуйте образи точок A і B при заданому перетворенні. Чи є це перетворення оборотним?

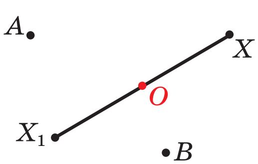


Рис. 19.6

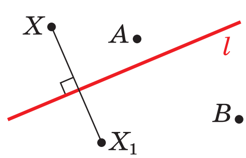


Рис. 19.7

19.2.° Проведемо на площині пряму l. Задамо перетворення площини за таким правилом (рис. 19.7): кожній точці X площини поставимо у відповідність таку точку X_1, що пряма l є серединним перпендикуляром відрізка XX_1 (кожній точці прямої l поставимо у відповідність цю саму точку). Побудуйте образи точок A і B при заданому перетворенні. Чи є це перетворення оборотним?

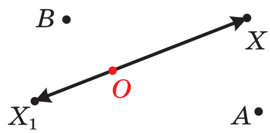


Рис. 19.8

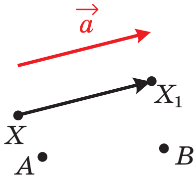


Рис. 19.9

19.3.° Позначимо на площині точку O. Задамо перетворення площини за таким правилом (рис. 19.8): кожній точці X площини поставимо у відповідність таку точку X_1, що $\overrightarrow{OX_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OX}$ (точці O поставимо у відповідність саму точку O). Побудуйте образи точок A і B при заданому перетворенні площини. Чи є це перетворення оборотним?

19.4.° Дано вектор $\vec{a}$. Задамо перетворення площини за таким правилом (рис. 19.9): кожній точці X площини поставимо у відповідність таку точку X_1, що $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. Побудуйте образи точок A і B при заданому перетворенні площини. Чи є це перетворення оборотним?

19.5.° На рисунку 19.10 зображено кут AOB і пряму p, не паралельну його сторонам. Кожній точці X сторони OA поставимо у відповідність таку точку X_1 сторони OB, що $XX_1 \parallel p$ (точці O поставлено у відповідність саму точку O). Побудуйте образ точки M і прообраз точки K при даному перетворенні променя OA. Яка фігура є образом променя OA?

19.6.° На рисунку 19.11 зображено відрізок AB і пряму a. Кожній точці X відрізка AB поставимо у відповідність основу перпендикуляра, опущеного з точки X на пряму a. Побудуйте образ точки E та прообраз точки F при даному перетворенні відрізка AB. Чи існують точки прямої a, які не мають прообразу? Побудуйте образ відрізка AB.

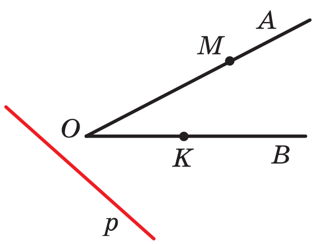


Рис. 19.10

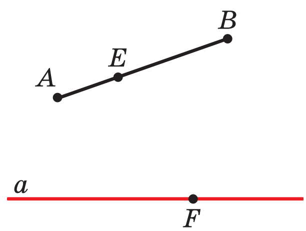


Рис. 19.11

19.7.° Нехай f і g — перетворення, задані в задачах 19.1 і 19.2 відповідно. Побудуйте образи точок A і B (рис. 19.12) при перетворенні: 1) $f \circ g$; 2) $g \circ f$.

19.8.° Нехай f і g — перетворення, задані в задачах 19.3 і 19.4 відповідно. Побудуйте образи точок A і B (рис. 19.13) при перетворенні: 1) $f \circ g$; 2) $g \circ f$.

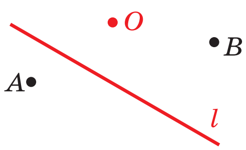


Рис. 19.12

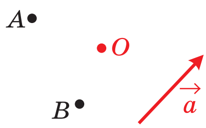


Рис. 19.13

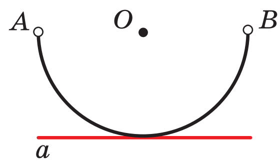


Рис. 19.14

19.9.° Пряма a дотикається до півкола AB із центром O (рис. 19.14). Задайте яке-небудь перетворення півкола AB, при якому пряма a є образом півкола AB з «виколотими» точками A і B. З'ясуйте, чи є задане перетворення оборотним.

19.10.° Задайте яке-небудь перетворення відрізка AB, при якому відрізок CD є образом відрізка AB (рис. 19.15). З'ясуйте, чи є задане перетворення оборотним.

19.11.• Відрізок AB перпендикулярний до прямої MN (рис. 19.16). Задайте яке-небудь перетворення відрізка AB із «виколотою» точкою A, при якому його образом є промінь BN.

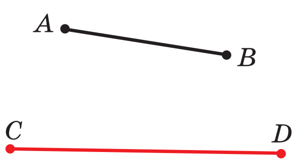


Рис. 19.15

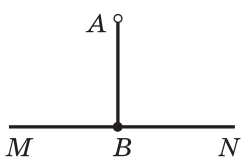


Рис. 19.16

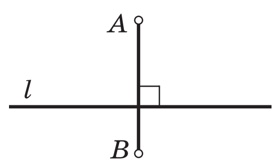


Рис. 19.17

19.12.• Відрізок AB перпендикулярний до прямої l (рис. 19.17). Задайте яке-небудь перетворення відрізка AB із «виколотими» кінцями A і B, при якому його образом є пряма l.

ВПРАВИ

19.13.° Задайте яке-небудь перетворення квадрата $ABCD$, при якому образом квадрата є сторона AB.

19.14.° Задайте яке-небудь перетворення квадрата $ABCD$, при якому образом квадрата є діагональ AC.

19.15.° Розглянемо коло радіуса r із центром O. Кожній точці X кола поставимо у відповідність точку X_1, яка належить радіусу OX, таку, що $OX_1 = \frac{1}{2}r$. Яка фігура є образом заданого кола?

19.16.° Дано кут AOB (рис. 19.18). Кожній точці X сторони OA поставимо у відповідність точку X_1, яка належить стороні OB і лежить на колі радіуса OX із центром O (точці O поставимо у відповідність саму точку O). Яка фігура є образом сторони OA?

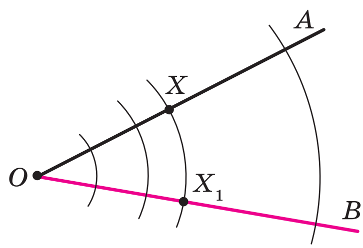


Рис. 19.18

19.17.° Дано кут MON. Кожній точці X сторони OM поставимо у відповідність таку точку X_1 сторони ON, що пряма XX_1 перпендикулярна до бісектриси кута MON (точці O поставимо у відповідність саму точку O). Чи є описане перетворення променя OM оборотним?

19.18.° Відомо, що при перетворенні фігури F її образом є сама фігура F. Чи можна стверджувати, що це перетворення є тотожним?

19.19.• Розглянемо фігуру, що складається з усіх точок, які належать сторонам прямокутника. Опишіть яке-небудь перетворення цієї фігури, при якому її образом є коло.

19.20.• Розглянемо фігуру, що складається з усіх точок, які належать сторонам прямокутника. Опишіть яке-небудь перетворення цієї фігури, при якому її образом є фігура, що складається з усіх точок сторін ромба.

19.21.° Задайте яке-небудь перетворення площини, при якому її образом є:
1) пряма; 3) відрізок;
2) промінь; 4) дві точки.

19.22.° Позначимо на площині точку O. Задамо перетворення площини за таким правилом: кожній точці X площини поставимо у відповідність таку точку X_1, що $\overrightarrow{OX_1} = 2\overrightarrow{OX}$ (точці O відповідає сама точка O). Доведіть, що це перетворення є оборотним, і задайте перетворення, обернене до даного.

19.23.° Проведемо на площині пряму l (рис. 19.19). Задамо перетворення площини за таким правилом: кожній точці X площини поставимо у відповідність таку точку X_1, що $XX_1 \perp l$, $X_1M = \frac{1}{2}XM$, де $M = XX_1 \cap l$, і точки X і X_1 лежать у різних півплощинах відносно прямої l (кожній точці прямої l поставимо у відповідність цю саму точку). Доведіть, що це перетворення є оборотним, і задайте перетворення, обернене до даного.

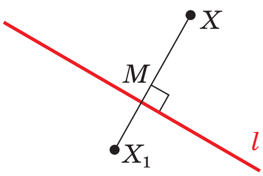


Рис. 19.19

19.24.° Задайте перетворення відрізка, відмінне від тотожного, при якому образом відрізка є цей самий відрізок.

19.25.° Розглядається фігура, яка складається з трьох точок A, B і C. Укажіть образи точки A при всіх можливих перетвореннях даної фігури на себе.

19.26.°° Чи будь-яке перетворення фігури F на себе є оборотним?

20. Рух. Паралельне перенесення

Які властивості перетворення фігури гарантують збереження її розміру та форми? Виявляється, що достатньо лише однієї властивості: перетворення повинне зберігати відстань між точками, тобто якщо A і B — довільні точки фігури F, а точки A_1 і B_1 — їхні образи, то має виконуватися рівність $AB = A_1B_1$.

Означення. Перетворення фігури F, яке зберігає відстань між точками, називають рухом (переміщенням) фігури F.

Найпростішим прикладом руху є тотожне перетворення.
Розглянемо властивості руху.

Теорема 20.1. ***При русі фігури F образами будь-яких її трьох точок, які лежать на одній прямій, є три точки, які лежать на одній прямій, а образами трьох точок, які не лежать на одній прямій, є три точки, які не лежать на одній прямій.***

Доведення. Нехай точки A, B і C фігури F лежать на даній прямій, причому точка B належить відрізку AC (рис. 20.1). Тоді

$$AC = AB + BC. \qquad (1)$$

Розглянемо рух f фігури F.

Нехай $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$, $f(C) = C_1$. З означення руху випливає, що $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. З урахуванням рівності (1) можна записати: $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$. Отже, точка B_1 належить відрізку A_1C_1, тобто точки A_1, B_1 і C_1 лежать на одній прямій.

Використовуючи нерівність трикутника, доведіть другу частину теореми самостійно. ◀

Наслідок. ***При русі відрізка, променя, прямої, кута образами є відповідно відрізок, промінь, пряма, кут.***

Доведемо першу із зазначених властивостей (решту властивостей ви можете довести самостійно або на заняттях математичного гуртка).

Нехай X — довільна точка відрізка AB. Розглянемо деякий рух f відрізка AB. Нехай $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$, $f(X) = X_1$. Під час доведення теореми 20.1 було показано, що точка X_1 належить відрізку A_1B_1. Це означає, що образи всіх точок відрізка AB належать відрізку A_1B_1.

Покажемо, що для кожної точки Y_1 відрізка A_1B_1 знайдеться точка Y відрізка AB така, що $f(Y) = Y_1$. Виберемо на відрізку AB таку точку Y, що $AY = A_1Y_1$. Нехай $f(Y) = Y_2$. Тоді точка Y_2 належить відрізку A_1B_1 і $AY = A_1Y_2$. Отримуємо, що $A_1Y_1 = A_1Y_2$. Отже, точки Y_1 і Y_2 збігаються, тобто $f(Y) = Y_1$. ◀

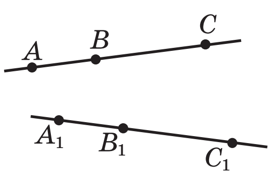


Рис. 20.1

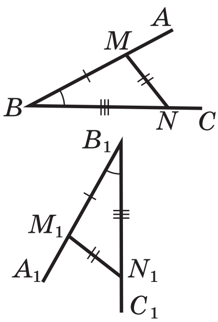


Рис. 20.2

Теорема 20.2. ***Якщо f — рух, при якому образом кута ABC є кут $A_1B_1C_1$, то $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.***

Доведення. Позначимо на променях BA і BC точки M і N відповідно. Нехай $f(M) = M_1$, $f(N) = N_1$ (рис. 20.2). Точки M_1 і N_1 належать променям B_1A_1 і B_1C_1 відповідно. Оскільки $BM = B_1M_1$, $BN = B_1N_1$, $MN = M_1N_1$, то трикутники BMN і $B_1M_1N_1$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle B = \angle B_1$. ◄

Теорема 20.3. ***Якщо f — рух, при якому образом трикутника ABC є трикутник $A_1B_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Теорема 20.4. ***Рух є оборотним перетворенням. Перетворення, обернене до руху, також є рухом.***

Доведення. Припустимо, що рух f фігури F не є оборотним перетворенням. Тоді знайдуться дві різні точки A і B фігури F такі, що $f(A) = f(B) = C$. Звідси випливає, що відстань між образами точок A і B дорівнює нулю. Отримали суперечність, оскільки $AB \neq 0$.

Другу частину теореми доведіть самостійно. ◄

Теорема 20.5. ***Якщо f і g — рухи, то композиція цих перетворень також є рухом.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Ми давно використовуємо поняття «рівність фігур», хоча не давали йому строгого означення.

Властивості руху вказують на те, що рух пов'язаний з рівністю фігур. Тому доречно домовитися про таке означення.

Означення. Дві фігури називають рівними, якщо існує рух, при якому одна з даних фігур є образом другої.

Запис $F = F_1$ означає, що фігури F і F_1 рівні.

Раніше рівними фігурами ми називали такі фігури, які збігалися при накладанні. Термін «накладання» інтуїтивно зрозумілий, і в нашому уявленні він пов'язаний із накладанням реальних тіл. Але геометричні фігури не можна накласти в буквальному розумінні цього слова. Тепер накладання фігури F на фігуру F_1 можна розглядати як рух фігури F, при якому її образом є фігура F_1.

Термін «рух» також асоціюється з певною фізичною дією: зміною положення тіла без деформації. Саме із цим пов'язана поява цього терміна в математиці. Проте в геометрії предметом дослідження є не процес, який відбувається в часі, а лише властивості фігури та її образу.

Нехай задано деяку фігуру F і вектор $\vec{a}$. Кожній точці X фігури F поставили у відповідність точку X_1 таку, що $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. Унаслідок такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 20.3). Таке перетворення фігури F називають **паралельним перенесенням на вектор** $\vec{a}$ та позначають $T_{\vec{a}}$. Пишуть: $T_{\vec{a}}(F) = F_1$.

Те, що зображені на рисунку 20.3 фігури F і F_1 рівні, зрозуміло з наочного сприйняття. Строге обґрунтування цього твердження дає така теорема.

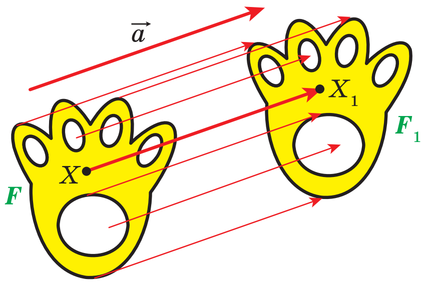


Рис. 20.3

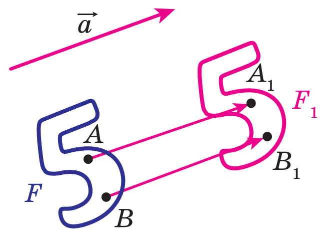


Рис. 20.4

Теорема 20.6 (властивість паралельного перенесення). ***Паралельне перенесення є рухом.***

Доведення. Нехай $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ — довільні точки фігури F (рис. 20.4), точки A_1 і B_1 — їхні відповідні образи при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(m; n)$, тобто $T_{\vec{a}}(A) = A_1$, $T_{\vec{a}}(B) = B_1$. Тоді вектори $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BB_1}$ мають координати $(m; n)$. Отже, координатами точок A_1 і B_1 є відповідно пари чисел $(x_1 + m; y_1 + n)$ і $(x_2 + m; y_2 + n)$.

Маємо:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(x_2 + m - x_1 - m)^2 + (y_2 + n - y_1 - n)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Отже, ми показали, що $AB = A_1B_1$, тобто паралельне перенесення зберігає відстань між точками. ◀

Наслідок. ***Якщо фігура F_1 — образ фігури F при паралельному перенесенні, то $F_1 = F$.***

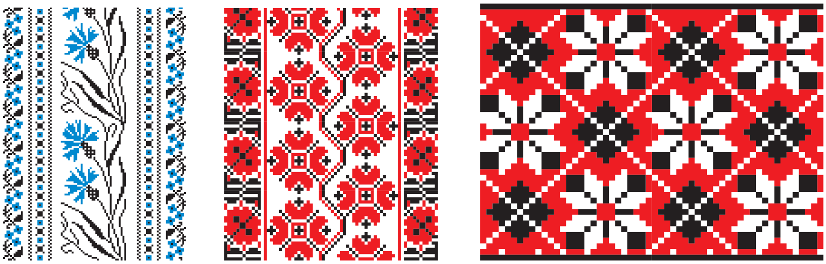


Рис. 20.5

Цю властивість використовують при створенні малюнків на тканинах, шпалерах, покриттях для підлоги тощо (рис. 20.5).

Якщо фігура F_1 є образом фігури F при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$, то фігура F є образом фігури F_1 при паралельному перенесенні на вектор $-\vec{a}$ (рис. 20.6). Паралельні перенесення на вектори $\vec{a}$ і $-\vec{a}$ є взаємно оберненими перетвореннями.

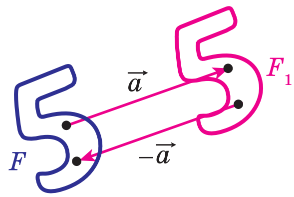


Рис. 20.6

Задача 1. Кожній точці $X(x; y)$ фігури F поставлено у відповідність точку $X_1(x + m; y + n)$, де m і n — задані числа. Доведіть, що таке перетворення фігури F є паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}(m; n)$.

Розв'язання. Розглянемо вектор $\vec{a}(m; n)$. Зауважимо, що координати вектора $\overrightarrow{XX_1}$ дорівнюють $(m; n)$, тобто $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. Отже, описане перетворення фігури F — паралельне перенесення на вектор $\vec{a}$. ◀

Задача 2. Точка $A_1(-2; 3)$ є образом точки $A(-1; 2)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$ і координати образу точки $B(-7; -3)$.

Розв'язання. З умови випливає, що $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$. Звідси $\vec{a}(-1; 1)$.

Нехай $B_1(x; y)$ — образ точки $B(-7; -3)$. Тоді $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$, тобто $x + 7 = -1$ і $y + 3 = 1$. Звідси $x = -8$, $y = -2$.

Відповідь: $\vec{a}(-1; 1)$, $B_1(-8; -2)$. ◀

Задача 3. Дано кут ABC і пряму p, не паралельну жодній зі сторін цього кута (рис. 20.7). Побудуйте пряму p_1, паралельну прямій p, так, щоб сторони кута відтинали на ній відрізок заданої довжини a.

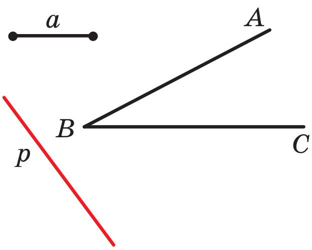


Рис. 20.7

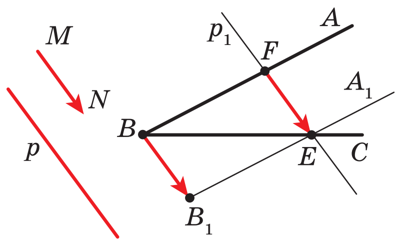


Рис. 20.8

Розв'язання. Розглянемо вектор $\overrightarrow{MN}$ такий, що $MN \parallel p$ і $|\overrightarrow{MN}| = a$ (рис. 20.8). Побудуємо промінь B_1A_1, який є образом променя BA при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{MN}$. Позначимо точку перетину променів BC і B_1A_1 буквою E. Нехай точка F — прообраз точки E при паралельному перенесенні, що розглядається. Тоді $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{MN}$, тобто $|\overrightarrow{FE}| = a$ і $FE \parallel p$.

Наведені міркування підказують такий алгоритм побудови:

1) знайти образ променя BA при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{MN}$;
2) позначити точку перетину променя BC із побудованим образом;
3) через знайдену точку провести пряму p_1, паралельну прямій p. Пряма p_1 буде шуканою. ◀

?

1. Яке перетворення фігури називають рухом?
2. Сформулюйте властивості руху.
3. Які дві фігури називають рівними?
4. Опишіть перетворення фігури F, яке називають паралельним перенесенням на вектор $\vec{a}$.
5. Сформулюйте властивість паралельного перенесення.
6. Якими рухами є паралельні перенесення на вектори $\vec{a}$ і $-\vec{a}$?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

20.1.° Побудуйте образи відрізка AB і променя OM при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ (рис. 20.9).

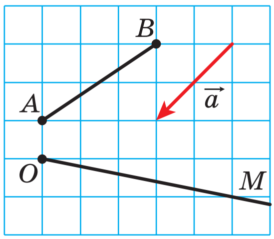


Рис. 20.9

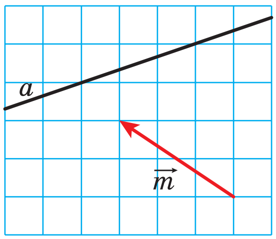


Рис. 20.10

20.2.° На рисунку 20.10 пряма a є образом деякої прямої при паралельному перенесенні на вектор $\vec{m}$. Побудуйте прообраз прямої a.

20.3.° Коло із центром O_1 є образом кола із центром O при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$ (рис. 20.11). Відкладіть вектор $\vec{a}$ від точки M.

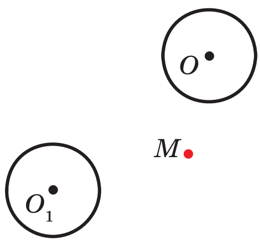


Рис. 20.11

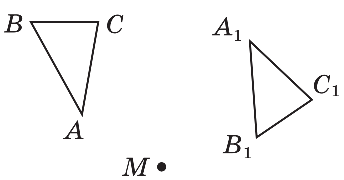


Рис. 20.12

20.4.• На рисунку 20.12 трикутник $A_1B_1C_1$ є образом трикутника ABC при деякому русі f. Побудуйте образ точки M при цьому русі.[1]

[1] Ця задача є ілюстрацією до такої теореми: ***будь-який рух площини задається рухом трьох точок, які не лежать на одній прямій.***

ВПРАВИ

20.5.° Розглянемо коло радіуса r із центром O. Кожній точці X кола поставимо у відповідність точку X_1, яка належить радіусу OX, таку, що $OX_1 = \frac{1}{2}r$. Чи є рухом описане перетворення?

20.6.° Дано кут AOB (рис. 20.13). Кожній точці X сторони OA поставимо у відповідність точку X_1, яка належить стороні OB і лежить на колі радіуса OX із центром O (точці O поставимо у відповідність саму точку O). Доведіть, що описане перетворення є рухом.

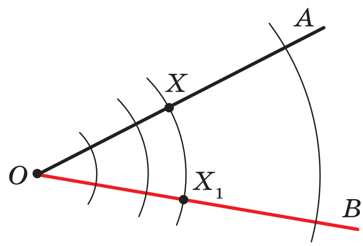


Рис. 20.13

20.7.° Дано кут MON. Кожній точці X сторони OM поставимо у відповідність таку точку X_1 сторони ON, що пряма XX_1 перпендикулярна до бісектриси кута MON (точці O поставимо у відповідність саму точку O). Доведіть, що описане перетворення є рухом.

20.8.° Дано пряму a і відрізок AB, який не має з нею спільних точок. Кожній точці X відрізка AB ставиться у відповідність основа перпендикуляра, опущеного з точки X на пряму a. При якому взаємному розміщенні прямої a і відрізка AB описане перетворення є рухом?

20.9.° Точки A_1 і B_1 не належать прямій AB та є образами відповідно точок A і B при паралельному перенесенні прямої AB. Доведіть, що чотирикутник AA_1B_1B — паралелограм.

20.10.° Точки A_1 і B_1 є образами відповідно точок A і B при паралельному перенесенні відрізка AB. Знайдіть відрізок A_1B_1, якщо $AB = 5$ см.

20.11.° Вектор $\overrightarrow{m}$ паралельний прямій a. Яка фігура є образом прямої a при її паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{m}$?

20.12.° Дано паралелограм $ABCD$. Який вектор задає паралельне перенесення, при якому сторона AD є образом сторони BC?

20.13.° Чи існує паралельне перенесення рівностороннього трикутника ABC, при якому сторона AB є образом сторони BC?

20.14.° Знайдіть точки, які є образами точок $A\ (-2;\ 3)$ і $B\ (1;\ -4)$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}\ (-1;\ -3)$.

20.15.° Чи існує паралельне перенесення, при якому образом точки $A\ (1;\ 3)$ є точка $A_1\ (4;\ 0)$, а образом точки $B\ (-2;\ 1)$ — точка $B_1\ (1;\ 4)$?

20.16.° При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}\ (2;\ -1)$ образом точки A є точка $A_1\ (-3;\ 4)$. Знайдіть координати точки A.

20.17.° Точка $M_1\ (x;\ 2)$ є образом точки $M\ (3;\ y)$ при паралельному перенесенні, при якому точка $A\ (2;\ 3)$ є образом початку координат. Знайдіть x і y.

20.18.• Скільки існує паралельних перенесень прямої a, при яких її образом є пряма a?

20.19.• Дано точки $A\ (3;\ -2)$ і $B\ (5;\ -4)$. При паралельному перенесенні відрізка AB образом його середини є точка $M_1\ (-4;\ 3)$. Знайдіть образи точок A і B при такому паралельному перенесенні.

20.20.• Точки $A\ (1;\ 3)$, $B\ (2;\ 6)$ і $C\ (-3;\ 1)$ є вершинами паралелограма $ABCD$. При паралельному перенесенні паралелограма $ABCD$ образом точки перетину його діагоналей є точка $O_1\ (-2;\ -4)$. Знайдіть образи точок A, B, C і D при такому паралельному перенесенні.

20.21.• Знайдіть рівняння кола, яке є образом кола $x^2 + y^2 = 1$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}\ (-3;\ 4)$.

20.22.• Знайдіть рівняння параболи, яка є образом параболи $y = x^2$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}\ (2;\ -3)$.

20.23.• Усередині прямокутника $ABCD$ позначили точку M. Доведіть, що існує опуклий чотирикутник, діагоналі якого перпендикулярні та дорівнюють AB і BC, а сторони дорівнюють MA, MB, MC і MD.

20.24.•• Побудуйте трапецію за основами та діагоналями.

20.25.•• Побудуйте трапецію за чотирма сторонами.

20.26.•• Побудуйте відрізок, рівний і паралельний даному відрізку AB, так, щоб один його кінець належав даній прямій, а другий — даному колу.

20.27.•• Побудуйте хорду даного кола, яка дорівнює та паралельна даному відрізку AB.

20.28.•• Два кола радіуса R дотикаються в точці M. На одному з них позначили точку A, на другому — точку B так, що $\angle AMB = 90°$. Доведіть, що $AB = 2R$.

20.29.* Побудуйте чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно непаралельні, за чотирма кутами та двома протилежними сторонами.

20.30.* У якому місці потрібно побудувати міст MN через річку, яка розділяє два населених пункти A і B (рис. 20.14), щоби шлях $AMNB$ був найкоротшим (береги річки вважаємо паралельними прямими, міст перпендикулярний до берегів річки)?

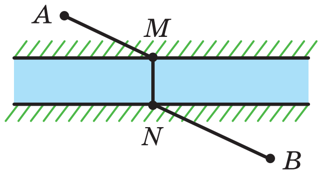


Рис. 20.14

20.31.* Усередині прямокутника $ABCD$ позначили точку M так, що $\angle BMC + \angle AMD = 180°$. Знайдіть суму кутів BCM і MAD.

20.32.* Усередині паралелограма $ABCD$ позначили точку M так, що $\angle MAD = \angle MCD$. Доведіть, що $\angle MBC = \angle MDC$.

21. Осьова симетрія

Означення. **Точки A і A_1 називають симетричними відносно прямої l, якщо пряма l є серединним перпендикуляром відрізка AA_1 (рис. 21.1). Якщо точка A належить прямій l, то її вважають симетричною самій собі відносно прямої l.**

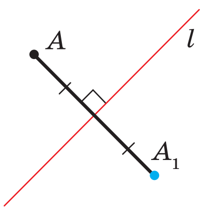


Рис. 21.1

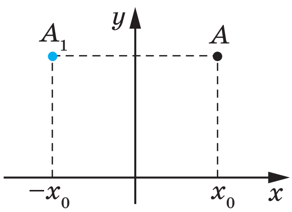


Рис. 21.2

Наприклад, точки A і A_1, у яких ординати рівні, а абсциси — протилежні числа, симетричні відносно осі ординат (рис. 21.2).

Розглянемо фігуру F і пряму l. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність симетричну їй відносно прямої l точку X_1.

Унаслідок такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 21.3). Таке перетворення фігури F називають **осьовою симетрією відносно прямої l**. Перетворення, яке є осьовою симетрією відносно прямої l, позначають S_l. Пишуть: $S_l(F) = F_1$. Пряму l називають **віссю симетрії**. Говорять, що фігури F і F_1 **симетричні відносно прямої l**.

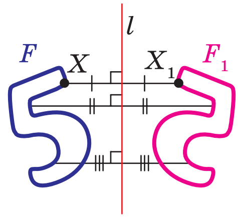


Рис. 21.3

Теорема 21.1 (властивість осьової симетрії). ***Осьова симетрія є рухом.***

Доведення. Виберемо систему координат так, щоб вісь симетрії збігалася з віссю ординат.

Нехай $A(x_1;\ y_1)$ і $B(x_2;\ y_2)$ — довільні точки фігури F. Тоді точки $A_1\ (-x_1;\ y_1)$ і $B_1\ (-x_2;\ y_2)$ — їхні відповідні образи при осьовій симетрії відносно осі ординат. Маємо:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB.$$

Ми отримали, що $AB = A_1B_1$, тобто осьова симетрія зберігає відстань між точками. Отже, осьова симетрія є рухом. ◀

Наслідок 1. ***Якщо $S_l(F) = F_1$, то $F = F_1$.***

Наслідок 2. ***Осьова симетрія є оборотним перетворенням. Якщо $S_l(F) = F_1$, то $S_l(F_1) = F$, тобто $S_l \circ S_l\ (F) = F$.***

Доведення. Перша частина теореми випливає з оборотності руху.

Нехай X — довільна точка фігури F і $S_l(X) = X_1$. Тоді $S_l(X_1) = X$. Звідси $S_l \circ S_l\ (X) = X$, тобто $S_l \circ S_l\ (F) = F$. ◀

Означення. **Фігуру називають симетричною відносно прямої l, якщо $S_l(F) = F$.**

Пряму l називають **віссю симетрії фігури**. Також говорять, що **фігура має вісь симетрії.**

Наведемо приклади фігур, які мають вісь симетрії.

На рисунку 21.4 зображено рівнобедрений трикутник. Пряма, яка містить його висоту, проведену до основи, є віссю симетрії трикутника.

Будь-який кут має вісь симетрії — це пряма, яка містить його бісектрису (рис. 21.5).

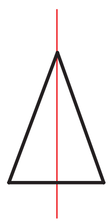


Рис. 21.4

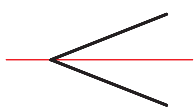


Рис. 21.5

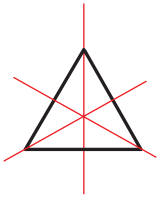


Рис. 21.6

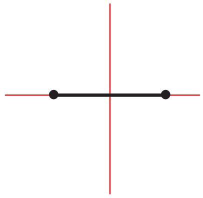


Рис. 21.7

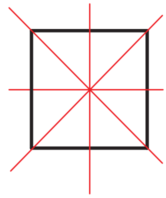


Рис. 21.8

Рівносторонній трикутник має три осі симетрії (рис. 21.6).

Дві осі симетрії має відрізок: це його серединний перпендикуляр і пряма, яка містить цей відрізок (рис. 21.7).

Квадрат має чотири осі симетрії (рис. 21.8).

Прямокутник і ромб, відмінні від квадрата, мають рівно по дві осі симетрії (рис. 21.9, 21.10). Ці осі перпендикулярні. Узагалі, справедлива така теорема.

Теорема 21.2. ***Якщо фігура має рівно дві осі симетрії, то ці осі перпендикулярні.***

Цю теорему ви зможете довести на заняттях математичного гуртка.

Існують фігури, які мають безліч осей симетрії, наприклад коло. Будь-яка пряма, що проходить через центр кола, є його віссю симетрії (рис. 21.11).

Безліч осей симетрії має і пряма: сама пряма та будь-яка пряма, перпендикулярна до неї, є її осями симетрії.

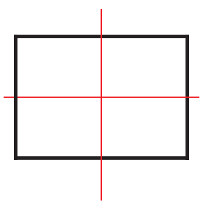


Рис. 21.9

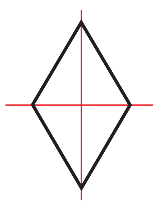


Рис. 21.10

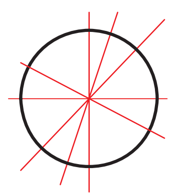


Рис. 21.11

Ми бачимо, що осі симетрії рівностороннього трикутника, прямокутника, ромба, квадрата перетинаються в одній точці. Узагалі, справедлива така теорема.

Теорема 21.3. ***Якщо многокутник має дві або більше осей симетрії, то всі вони перетинаються в одній точці.***

Цю теорему ви зможете довести на заняттях математичного гуртка.

Нехай $l_1 \parallel l_2$ і $S_{l_1}(F) = F_1$, $S_{l_2}(F_1) = F_2$ (рис. 21.12). Наочно очевидно, що фігура F_2 — це образ фігури F при деякому паралельному перенесенні.

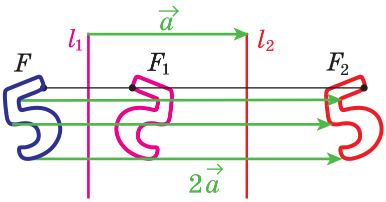


Рис. 21.12

Строге обґрунтування цього факту дає така теорема.

Теорема 21.4. ***Композиція двох осьових симетрій з паралельними осями є паралельним перенесенням.***

Складемо план доведення, який ви зможете реалізувати самостійно.

Нехай прямі l_1 і l_2 паралельні й $T_{\vec{a}}(l_1) = l_2$, де $\vec{a} \perp l_1$. Покажіть, що $S_{l_2} \circ S_{l_1} = T_{2\vec{a}}$.

Для цього введіть систему координат так, як показано на рисунку 21.13. Нехай X — довільна точка фігури F, $S_{l_1}(X) = X_1$, $S_{l_2}(X_1) = X_2$. Доведіть, що $\overrightarrow{XX_2} = 2\vec{a}$.

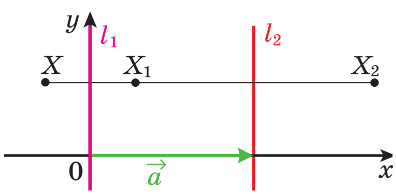


Рис. 21.13

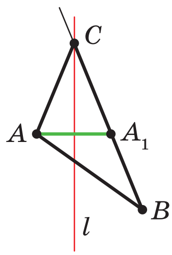


Рис. 21.14

Задача 1. Накреслили нерівнобедрений трикутник ABC. Провели пряму l, яка містить бісектрису кута C. Потім рисунок витерли, залишивши лише точки A і B та пряму l. Відновіть трикутник ABC.

Розв'язання. Оскільки пряма l є віссю симетрії кута ACB, то точка A_1, де $A_1 = S_l(A)$, належить променю CB. Тоді перетином прямих l і BA_1 є вершина C шуканого трикутника ABC (рис. 21.14).

Ці міркування підказують, як побудувати шуканий трикутник: будуємо точку A_1, симетричну точці A відносно прямої l. Знаходимо вершину C як точку перетину прямих l і BA_1. ◀

Задача 2. Точки A і B лежать в одній півплощині відносно прямої a. Знайдіть на прямій a таку точку X, щоб сума $AX + XB$ була найменшою.

Розв'язання. Нехай $S_a(A) = A_1$. Покажемо, що шуканою точкою X є точка перетину прямих A_1B і a.

Нехай Y — довільна точка прямої a, відмінна від точки X (рис. 21.15), відрізки A_1X і A_1Y — образи відрізків AX і AY при симетрії відносно прямої a відповідно. Тоді $AX = A_1X$, $AY = A_1Y$.

Маємо $AX + BX = A_1X + BX = A_1B < A_1Y + YB = AY + YB$. ◀

Задача 3. Точка O належить гострому куту ABC (рис. 21.16). На сторонах BA і BC кута знайдіть такі точки E і F, щоби периметр трикутника OEF був найменшим.

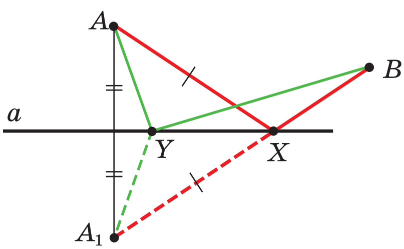


Рис. 21.15

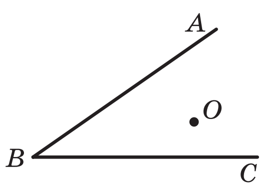


Рис. 21.16

Розв'язання. Нехай $S_{BA}(O) = O_1$, $S_{BC}(O) = O_2$ (рис. 21.17) і пряма O_1O_2 перетинає сторони BA і BC у точках E і F відповідно. Доведемо, що точки E і F — шукані.

Зауважимо, що відрізки EO_1 і EO симетричні відносно прямої BA. Отже, $EO_1 = EO$. Аналогічно $FO = FO_2$. Тоді периметр трикутника OEF дорівнює довжині відрізка O_1O_2.

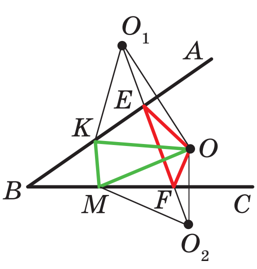


Рис. 21.17

Покажемо, що побудований трикутник має найменший периметр з можливих. Розглянемо трикутник KOM, де K і M — довільні точки відповідно променів BA і BC, причому точка K не збігається з точкою E або точка M не збігається з точкою F. Зрозуміло, що $KO = KO_1$ і $MO = MO_2$. Тоді периметр трикутника KOM дорівнює сумі $O_1K + KM + MO_2$. Проте $O_1K + KM + MO_2 \geqslant O_1O_2$. ◀

Задача 4. На сторонах AB, BC і CA гострокутного трикутника ABC знайдіть такі точки M, N і P відповідно, щоби периметр трикутника MNP був найменшим.

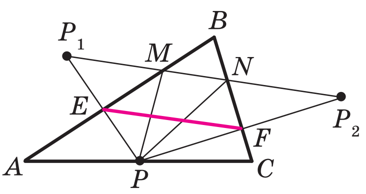


Рис. 21.18

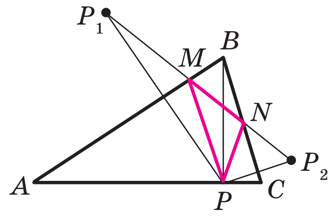


Рис. 21.19

Розв'язання. Нехай P — довільна точка сторони AC трикутника ABC, $S_{AB}(P) = P_1$, $S_{BC}(P) = P_2$ (рис. 21.18). Пряма P_1P_2 перетинає сторони AB і BC відповідно в точках M і N. Із розв'язування задачі 3 випливає, що з периметрів усіх трикутників, для яких точка P фіксована, а точки M і N належать сторонам AB і BC відповідно, периметр трикутника MNP є найменшим. Цей периметр дорівнює довжині відрізка P_1P_2.

Зауважимо, що відрізок EF — середня лінія трикутника PP_1P_2. Тоді $EF = \frac{1}{2}P_1P_2$.

Оскільки $\angle BEP + \angle BFP = 180°$, то точки P, E, B і F лежать на одному колі з діаметром BP. Звідси $EF = BP \sin B$. Отже, довжина відрізка EF буде найменшою при найменшій довжині відрізка BP, тобто тоді, коли BP — висота трикутника ABC.

На рисунку 21.19 відрізок BP — висота трикутника ABC. Алгоритм побудови трикутника MNP зрозумілий з рисунка.

Із побудови випливає, що периметр будь-якого іншого трикутника, вершини якого лежать на сторонах трикутника ABC, більший за периметр трикутника MNP. Отже, шуканий трикутник є єдиним — це побудований трикутник MNP.

Можна показати (зробіть це самостійно), що точки M і N є основами висот, проведених відповідно з вершин C і A трикутника ABC.

Отже, вершини шуканого трикутника — це основи висот даного трикутника ABC. Такий трикутник називають **ортоцентричним**. ◀

1. Які точки називають симетричними відносно прямої l? Як називають пряму l?
2. Які фігури називають симетричними відносно прямої l?
3. Сформулюйте властивість осьової симетрії.
4. Яку властивість мають фігури, симетричні відносно прямої?
5. Про яку фігуру говорять, що вона має вісь симетрії?
6. Наведіть приклади фігур, які мають вісь симетрії.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

21.1.° Побудуйте образи фігур, зображених на рисунку 21.20, при симетрії відносно прямої l.

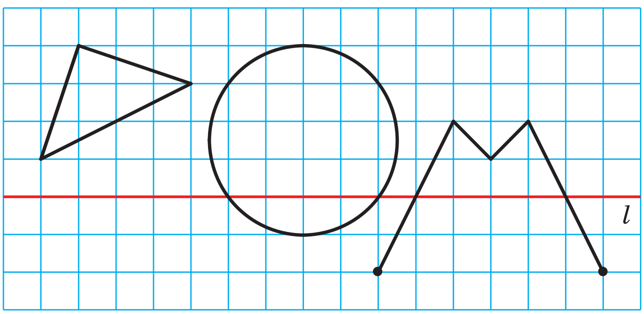


Рис. 21.20

21.2.° Накресліть трикутник. Побудуйте трикутник, симетричний йому відносно прямої, яка містить одну з його середніх ліній.

21.3.° Точки A і B симетричні відносно прямої l (рис. 21.21). Побудуйте пряму l.

21.4.° Проведіть прямі a і a_1, які перетинаються. Побудуйте пряму, відносно якої пряма a_1 буде симетричною прямій a. Скільки розв'язків має задача?

21.5.° Проведіть паралельні прямі a і a_1. Побудуйте пряму, відносно якої пряма a_1 буде симетричною прямій a.

21.6.° Побудуйте ромб $ABCD$ за його вершинами B і C та прямою l, яка містить його діагональ BD (рис. 21.22).

21.7.° Побудуйте рівнобедрений трикутник ABC за вершиною A, точкою K, яка належить бічній стороні BC, і прямою, яка містить висоту, проведену до основи AB (рис. 21.23).

Рис. 21.21

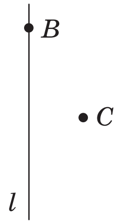


Рис. 21.22

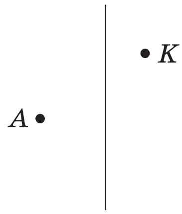


Рис. 21.23

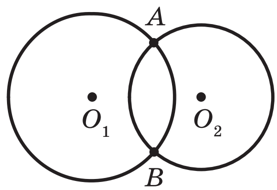


Рис. 21.24

21.8.$^{\bullet}$ Кола із центрами O_1 і O_2 мають дві спільні точки (рис. 21.24). За допомогою тільки циркуля побудуйте кола, симетричні даним відносно прямої AB.

ВПРАВИ

21.9.$^{\circ}$ Пряма l проходить через середину відрізка AB. Чи обов'язково точки A і B є симетричними відносно прямої l?

21.10.$^{\circ}$ Доведіть, що пряма, яка містить медіану рівнобедреного трикутника, проведену до основи, є його віссю симетрії.

21.11.$^{\circ}$ На рисунку 21.25 зображено рівнобедрений трикутник ABC і пряму l, яка містить його висоту, проведену до основи AC. Відрізки AM і CN — медіани трикутника. Укажіть образи точок A і B, медіани CN і сторони AC при симетрії відносно прямої l.

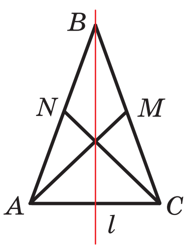


Рис. 21.25

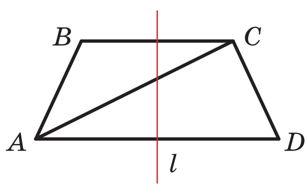


Рис. 21.26

21.12.$^{\circ}$ Доведіть, що пряма, яка проходить через середини основ рівнобічної трапеції, є її віссю симетрії.

21.13.$^{\circ}$ На рисунку 21.26 зображено рівнобічну трапецію $ABCD$ і пряму l, яка проходить через середини її основ. Укажіть образи точок B і D, діагоналі AC і основи BC при симетрії відносно прямої l.

21.14.° Доведіть, що прямі, які містять діагоналі ромба, є його осями симетрії.

21.15.° Доведіть, що прямі, які проходять через середини протилежних сторін прямокутника, є його осями симетрії.

21.16.° Доведіть, що пряма, яка містить бісектрису кута, є його віссю симетрії.

21.17.° Кола із центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B. Доведіть, що точки A і B симетричні відносно прямої O_1O_2.

21.18.° Знайдіть координати точок, симетричних точкам A (−2; 1) і B (0; −4) відносно осей координат.

21.19.° Точки A (x; 3) і B (−2; y) симетричні відносно: 1) осі абсцис; 2) осі ординат. Знайдіть x і y.

21.20.• Образом прямої a при симетрії відносно прямої l є сама пряма a. Яке взаємне розміщення прямих a і l?

21.21.• Доведіть, що трикутник, який має вісь симетрії, є рівнобедреним.

21.22.• Доведіть, що трикутник, який має дві осі симетрії, є рівностороннім. Чи може трикутник мати рівно дві осі симетрії?

21.23.• Доведіть, що коли паралелограм має рівно дві осі симетрії, то він є або прямокутником, або ромбом.

21.24.• Доведіть, що коли чотирикутник має чотири осі симетрії, то він є квадратом.

21.25.• Точка M належить прямому куту ABC (рис. 21.27). Точки M_1 і M_2 — образи точки M при симетрії відносно прямих BA і BC відповідно. Доведіть, що точки M_1, B і M_2 лежать на одній прямій.

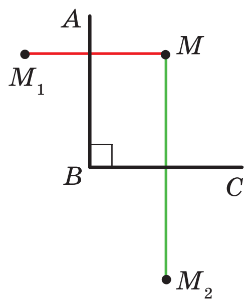


Рис. 21.27

21.26.• Знайдіть координати точок, симетричних точкам $A(-2; 0)$ і $B(3; -1)$ відносно прямої, яка містить бісектриси: 1) першого та третього координатних кутів; 2) другого та четвертого координатних кутів.

21.27.• Точки $A(x; -1)$ і $B(y; 2)$ симетричні відносно прямої, яка містить бісектриси першого та третього координатних кутів. Знайдіть x і y.

21.28.• Центр кола, вписаного в чотирикутник, лежить на його діагоналі. Доведіть, що цей чотирикутник має вісь симетрії.

21.29.$^{\bullet}$ Доведіть, що опуклий чотирикутник, який має вісь симетрії, є або вписаним у коло, або описаним навколо кола.

21.30.$^{\bullet}$ Доведіть, що точки, симетричні ортоцентру трикутника відносно прямих, які містять його сторони, лежать на описаному колі цього трикутника.

21.31.$^{\bullet\bullet}$ У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) медіана AM, проведена до меншого катета, утворює з більшим катетом кут $15°$. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $AM = m$.

21.32.$^{\bullet\bullet}$ Точки A і B лежать у різних півплощинах відносно прямої a. На прямій a знайдіть таку точку X, щоби пряма a містила бісектрису кута AXB.

21.33.$^{\bullet\bullet}$ Точки A і B лежать в одній півплощині відносно прямої a. Знайдіть на прямій a таку точку X, щоби промені XA і XB утворювали із цією прямою рівні кути.

21.34.$^{\bullet\bullet}$ Точки A і B лежать у різних півплощинах відносно прямої a. Знайдіть на прямій a таку точку X, щоб величина $|AX - XB|$ була найбільшою.

21.35.$^{\bullet\bullet}$ Доведіть, що з усіх трикутників з даною стороною та даною висотою, проведеною до цієї сторони, рівнобедрений має найменший периметр.

21.36.$^{\bullet\bullet}$ Точки M і N належать куту ABC. Знайдіть на сторонах цього кута такі точки E і F, щоби периметр чотирикутника $EMNF$ був найменшим.

21.37.$^{\bullet\bullet}$ Через вершину A трикутника ABC і точку D, яка лежить на стороні BC, проведено пряму. Відомо, що $\angle ADB \neq 90°$. Знайдіть на цій прямій таку точку X, з якої відрізки BD і DC було б видно під однаковими кутами.

21.38.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте трикутник ABC, якщо дано пряму AB і серединні перпендикуляри сторін BC і CA.

21.39.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте трикутник ABC, якщо дано вершину A та прямі, на яких лежать бісектриси кутів B і C.

21.40.$^{\bullet\bullet}$ Побудуйте паралелограм $ABCD$ за вершиною D і серединними перпендикулярами сторін AB і BC.

21.41.$^{\bullet\bullet}$ На бісектрисі зовнішнього кута C трикутника ABC позначено точку M, відмінну від точки C. Доведіть, що $MA + MB > CA + CB$.

21.42.$^{\bullet\bullet}$ Точки A, B і C є вершинами нерівнобедреного трикутника. Скільки існує таких точок D, що чотирикутник з вершинами A, B, C і D має хоча б одну вісь симетрії?

21.43.* Побудуйте трикутник ABC за двома сторонами AB і AC ($AB < AC$) та різницею кутів B і C.

21.44.* Побудуйте трапецію за бічними сторонами, основою та різницею кутів при цій основі.

21.45.* Точки C і D лежать в одній півплощині відносно прямої AB (рис. 21.28). На прямій AB знайдіть таку точку X, що

$$\angle AXC = \frac{1}{2}\angle DXB.$$

21.46.* Точки C і D лежать в одній півплощині відносно прямої AB. На прямій AB знайдіть таку точку X, що $|\angle AXC - \angle BXD| = 90°$.

21.47.* Доведіть, що площа опуклого чотирикутника $ABCD$ не більша за

$$\frac{1}{2}(AB \cdot CD + BC \cdot AD).$$

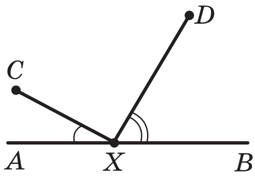


Рис. 21.28

21.48.* Побудуйте чотирикутник $ABCD$ за чотирма його сторонами, якщо відомо, що його діагональ AC є бісектрисою кута BAC.

21.49.* У коло вписано гострокутний трикутник. Побудуйте шестикутник, вписаний у це коло, площа якого вдвічі більша за площу даного трикутника.

21.50.* В опуклому чотирикутнику $ABCD$ кут BAD дорівнює 60°. Відомо, що точки, симетричні точці A відносно прямих CB і CD, лежать на прямій BD. Знайдіть кут BCD.

21.51.* У прямокутній трапеції $ABCD$ ($\angle A = \angle B = 90°$) бісектриса кута ADC перетинає сторону AB у точці M. Знайдіть кут CMD, якщо $CD = AD + BC$.

21.52.* Точка M — середина сторони BC опуклого чотирикутника $ABCD$. Відомо, що $\angle AMD = 120°$. Доведіть, що

$$AB + \frac{1}{2}BC + CD \geqslant AD.$$

21.53.* Сторони опуклого п'ятикутника $ABCDE$ рівні. Відомо, що $\angle ACE = \frac{1}{2}\angle BCD$. Знайдіть кут ACE.

21.54.* Дано трикутник ABC. Знайдіть точку, симетричний образ якої відносно будь-якої сторони трикутника лежить на колі, описаному навколо цього трикутника.

ПЕРША ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА ЮНИХ МАТЕМАТИКІВ

Сподіваємося, що задача 21.54 вам сподобалася і ви відчули радість успіху, розв'язавши її. Ця задача варта уваги ще й тому, що в 1961 р. її було запропоновано учасникам першої Всеукраїнської олімпіади юних математиків.

Узагалі, математичні олімпіади в Україні мають давню традицію. Перша міська олімпіада юних математиків відбулася в 1935 р. у Києві. Відтоді минуло понад 80 років, і за цей час математичні олімпіади стали для багатьох талановитих школярів першим кроком на шляху до наукової творчості. Сьогодні такі імена, як О. В. Погорєлов, С. Г. Крейн, М. О. Красносельський, В. Г. Дрінфельд, відомі всьому науковому світові. Усі вони в різні роки були переможцями математичних олімпіад в Україні.

Хочемо із задоволенням зазначити, що й зараз математичні олімпіади в Україні дуже популярні. Десятки тисяч школярів нашої країни на різних етапах беруть участь у цьому математичному змаганні. До організації та проведення олімпіад залучають найкращих учених, методистів, учителів. Саме завдяки їхньому ентузіазму та професіоналізму команда України гідно представляє нашу країну на міжнародних математичних олімпіадах.

Радимо й вам, любі діти, брати участь у математичних олімпіадах. Нижче ми наводимо деякі задачі першої Всеукраїнської олімпіади юних математиків. Випробуйте свої сили.

1. Коло, вписане в трикутник ABC, дотикається до його сторін у точках K, L, M. Нехай точки O_1, O_2, O_3 є центрами кіл, зовнівписаних у цей самий трикутник. Довести, що трикутники KLM і $O_1O_2O_3$ подібні.

Олексій Васильович Погорєлов
(1919–2002)

Селім Григорович Крейн
(1917–1999)

Марк Олександрович Красносельський
(1920–1997)

Володимир Гершонович Дрінфельд
(1954 р. н.)

2. Усередині прямокутника, площа якого 4 м², розміщено 7 прямокутників, причому площа кожного з них дорівнює 1 м². Довести, що принаймні два прямокутники мають спільну частину, площа якої не менша ніж $\frac{1}{7}$ м².

3. Нехай сторони чотирикутника відповідно дорівнюють a, b, c, d, а його площа дорівнює S. Довести, що $S \leqslant \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$.

22. Центральна симетрія

Означення. **Точки A і A_1 називають симетричними відносно точки O, якщо точка O є серединою відрізка AA_1** (рис. 22.1). **Точку O вважають симетричною самій собі.**

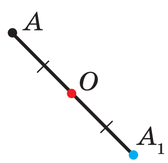


Рис. 22.1

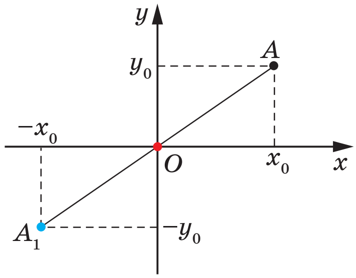


Рис. 22.2

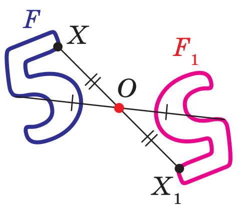


Рис. 22.3

Наприклад, точки A і A_1, у яких як абсциси, так і ординати — протилежні числа, симетричні відносно початку координат (рис. 22.2).

Розглянемо фігуру F і точку O. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність симетричну їй відносно точки O точку X_1. Унаслідок такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 22.3). Таке перетворення фігури F називають **центральною симетрією відносно точки** O та позначають S_O. Пишуть: $S_O(F) = F_1$. Точку O називають **центром симетрії**. Також говорять, що фігури F і F_1 **симетричні відносно точки** O.

Теорема 22.1 (властивість центральної симетрії). ***Центральна симетрія є рухом.***

Доведення. Виберемо систему координат так, щоб центр симетрії збігався з початком координат. Нехай $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ — довільні точки фігури F. Точки $A_1(-x_1; -y_1)$ і $B_1(-x_2; -y_2)$ — відповідно їхні образи при центральній симетрії відносно початку координат. Маємо:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

$$A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 - (-x_1))^2 + (-y_2 - (-y_1))^2} = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = AB.$$

Ми отримали, що $AB = A_1B_1$, тобто центральна симетрія зберігає відстань між точками. Отже, центральна симетрія є рухом. ◀

Наслідок 1. ***Якщо*** $S_O(F) = F_1$, ***то*** $F = F_1$.

Наслідок 2. ***Центральна симетрія є оборотним перетворенням. Якщо*** $S_O(F) = F_1$, ***то*** $S_O(F_1) = F$, ***тобто*** $S_O \circ S_O(F) = F$.

Означення. Фігуру називають симетричною відносно точки O, **якщо** $S_O(F) = F$.

Точку O називають **центром симетрії фігури.** Також говорять, що **фігура має центр симетрії.**

Наведемо приклади фігур, які мають центр симетрії.

Рис. 22.4

Центром симетрії відрізка є його середина (рис. 22.4).

Точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії (рис. 22.5).

Існують фігури, які мають безліч центрів симетрії. Наприклад, кожна точка прямої є її центром симетрії.

Також безліч центрів симетрії має фігура, яка складається з двох паралельних прямих. Будь-яка точка прямої, рівновіддаленої від двох даних, є центром симетрії розглядуваної фігури (рис. 22.6).

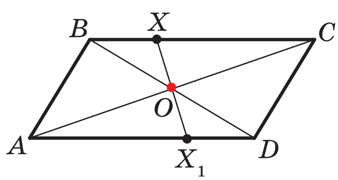


Рис. 22.5

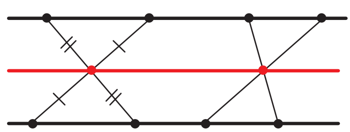


Рис. 22.6

Задача 1. Доведіть, що образом даної прямої l при симетрії відносно точки O, яка не належить прямій l, є пряма, паралельна даній.

Розв'язання. Оскільки центральна симетрія — це рух, то образом прямої l буде пряма. Для побудови прямої достатньо знайти дві будь-які її точки.

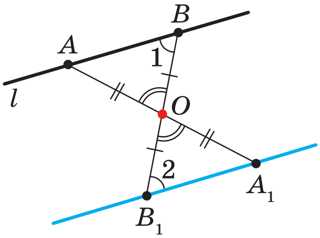


Рис. 22.7

Виберемо на прямій l довільні точки A і B (рис. 22.7). Нехай точки A_1 і B_1 — їхні образи при центральній симетрії відносно точки O, тобто $S_O(A) = A_1$, $S_O(B) = B_1$. Тоді пряма A_1B_1 — образ прямої l.

Оскільки $AO = OA_1$, $BO = OB_1$, кути AOB і A_1OB_1 рівні як вертикальні, то трикутники AOB і A_1OB_1 рівні за першою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 22.7). Отже, $l \parallel A_1B_1$. ◄

Ми навели приклади фігур, які мають рівно один центр симетрії або безліч центрів симетрії. Виникає природне запитання: чи може фігура мати рівно два, рівно три й узагалі, будь-яку скінченну, відмінну від 1, кількість центрів симетрії? Відповідь на це запитання негативна. Ви можете довести цей факт на заняттях математичного гуртка.

Задача 2. Точка M належить куту ABC (рис. 22.8). На сторонах BA і BC кута побудуйте такі точки E і F, щоб точка M була серединою відрізка EF.

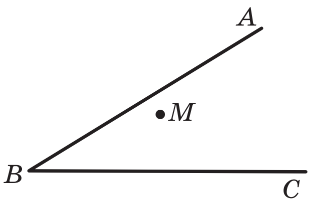


Рис. 22.8

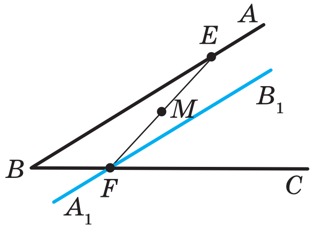


Рис. 22.9

Розв'язання. Нехай пряма A_1B_1 — образ прямої AB при центральній симетрії відносно точки M (рис. 22.9). Позначимо буквою F точку перетину прямих A_1B_1 і BC.

Знайдемо прообраз точки F. Очевидно, що він лежить на прямій AB. Тому достатньо знайти точку перетину прямих FM і AB. Позначимо цю точку буквою E. Тоді E і F — шукані точки. ◄

Задача 3. Доведіть, що:

1) композиція двох центральних симетрій є паралельним перенесенням;
2) композиція центральної симетрії та паралельного перенесення є центральною симетрією;

3) композиція парної кількості центральних симетрій є паралельним перенесенням;
4) композиція непарної кількості центральних симетрій є центральною симетрією.

Розв'язання. 1) Розглянемо дві центральні симетрії із центрами $O_1(a_1;\ b_1)$ і $O_2(a_2;\ b_2)$. Нехай $A\ (x;\ y)$ — довільна точка площини і $S_{O_1}(A) = A_1$, $S_{O_2}(A_1) = A_2$. Знайдемо координати точок A_1 і A_2. Маємо: $A_1(2a_1 - x;\ 2b_1 - y)$ і $A_2(2a_2 - 2a_1 + x;\ 2b_2 - 2b_1 + y)$. Звідси отримуємо, що вектор $\overrightarrow{AA_2}$ при заданих точках O_1 і O_2 має сталі координати $(2a_2 - 2a_1;\ 2b_2 - 2b_1)$. Отже, точка A_2 є образом точки A при паралельному перенесенні на вектор з координатами $(2a_2 - 2a_1;\ 2b_2 - 2b_1)$.

2) Розглянемо композицію $T_{\vec{a}} \circ S_O$. Виберемо систему координат так, щоб центр симетрії, точка O, мав координати $(0;\ 0)$. Нехай при цьому вектор $\vec{a}$ має координати $(a;\ b)$. Розглянемо довільну точку $A\ (x;\ y)$ координатної площини.

Маємо: $S_O(A) = A_1(-x;\ -y)$; $T_{\vec{a}}(A_1) = A_2(-x + a;\ -y + b)$. Отже, точка A_2 є образом точки A при центральній симетрії із центром $O_1\left(\frac{a}{2};\ \frac{b}{2}\right)$. Аналогічно можна показати, що композиція $S_O \circ T_{\vec{a}}$ є центральною симетрією із центром $O_2\left(-\frac{a}{2};\ -\frac{b}{2}\right)$.

Використовуючи пункти 1 і 2 задачі, доведіть пункти 3 і 4 самостійно. ◄

Задача 4. Побудуйте п'ятикутник $ABCDE$, якщо дано точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, які є серединами його сторін AB, BC, CD, DE, EA відповідно.

Розв'язання. Маємо: $S_{M_1}(A) = B$, $S_{M_2}(B) = C$, $S_{M_3}(C) = D$, $S_{M_4}(D) = E$, $S_{M_5}(E) = A$. Отже, $S_{M_5} \circ S_{M_4} \circ S_{M_3} \circ S_{M_2} \circ S_{M_1}(A) = A$. Але композиція непарної кількості центральних симетрій є центральною симетрією. А при центральній симетрії лише одна точка збігається зі своїм образом — це центр симетрії. Отже,

$$S_{M_5} \circ S_{M_4} \circ S_{M_3} \circ S_{M_2} \circ S_{M_1} = S_A.$$

Тепер вершину A шуканого п'ятикутника можна побудувати таким чином. Нехай X — довільна точка. Побудуємо точки X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 такі, що $X_1 = S_{M_1}(X)$, $X_2 = S_{M_2}(X_1)$, $X_3 = S_{M_3}(X_2)$, $X_4 = S_{M_4}(X_3)$, $X_5 = S_{M_5}(X_4)$. Точка A є серединою відрізка XX_5. Подальша побудова є очевидною. ◄

Вивчаючи навколишній світ, ми часто бачимо приклади прояву симетрії в природі (рис. 22.10).

Об'єкти, які мають вісь або центр симетрії, легко сприймаються та приємні для очей. Недарма в Стародавній Греції слово «симетрія» слугувало синонімом слів «гармонія», «краса».

Рис. 22.10

Ідея симетрії широко використовується в образотворчому мистецтві, архітектурі й техніці (рис. 22.11).

Рис. 22.11

1. Які точки називають симетричними відносно точки O? Як називають точку O?
2. Які фігури називають симетричними відносно точки O?
3. Сформулюйте властивість центральної симетрії.
4. Яку властивість мають фігури, симетричні відносно точки?
5. Про яку фігуру говорять, що вона має центр симетрії?
6. Наведіть приклади фігур, які мають центр симетрії.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

22.1.° Накресліть трикутник ABC і позначте точку O, яка не належить йому. Побудуйте трикутник, симетричний даному відносно точки O.

22.2.° Накресліть трикутник ABC. Побудуйте трикутник, симетричний даному відносно середини сторони AB.

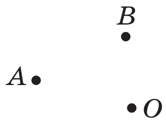


Рис. 22.12

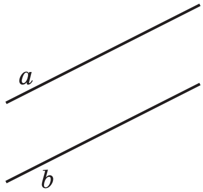


Рис. 22.13

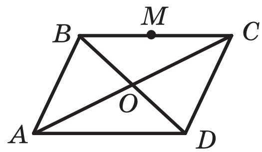


Рис. 22.14

22.3.° Накресліть коло й позначте на ньому точку. Побудуйте коло, симетричне даному відносно позначеної точки.

22.4.° Побудуйте паралелограм $ABCD$ за його вершинами A і B та точкою O перетину його діагоналей (рис. 22.12).

22.5.° Дано дві паралельні прямі a і b (рис. 22.13). Знайдіть точку, відносно якої пряма a буде симетричною прямій b. Скільки розв'язків має задача?

ВПРАВИ

22.6.° Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 22.14). Точка M — середина сторони BC. Укажіть образи точок A, D і M, сторони CD, діагоналі BD при симетрії відносно точки O.

22.7.° Доведіть, що точка перетину діагоналей паралелограма є його центром симетрії.

22.8.° Доведіть, що коло має центр симетрії.

22.9.° Точки A_1 і B_1 є образами відповідно точок A і B при симетрії відносно точки, яка не належить прямій AB. Доведіть, що чотирикутник ABA_1B_1 — паралелограм.

22.10.° Знайдіть координати точок, симетричних точкам A $(3; -1)$ і B $(0; -2)$ відносно:

1) початку координат; 2) точки M $(2; -3)$.

22.11.° Доведіть, що образом прямої, яка проходить через центр симетрії, є ця сама пряма.

22.12.° Точки A $(x; -2)$ і B $(1; y)$ симетричні відносно: 1) початку координат; 2) точки M $(-1; 3)$. Знайдіть x і y.

22.13.• Доведіть, що трикутник не має центра симетрії.

22.14.• Доведіть, що промінь не має центра симетрії.

22.15.• Доведіть, що фігура, що складається з двох рівних паралельних відрізків, має центр симетрії.

22.16.° Доведіть, що коли чотирикутник має центр симетрії, то він є паралелограмом.

22.17.° Вершини одного паралелограма лежать на сторонах другого: по одній вершині на кожній стороні. Доведіть, що точки перетину діагоналей цих паралелограмів збігаються.

22.18.° Кола із центрами O_1 і O_2 симетричні відносно точки O (рис. 22.15). Пряма, яка проходить через центр симетрії, перетинає перше коло в точках A_1 і B_1, а друге — у точках A_2 і B_2. Доведіть, що $A_1B_1 = A_2B_2$.

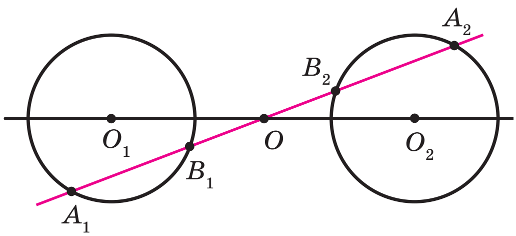


Рис. 22.15

22.19.° Дано коло, пряму та точку. Побудуйте відрізок із серединою в даній точці, один із кінців якого належить даному колу, а другий — даній прямій.

22.20.° Дано два кола та точку. Побудуйте відрізок із серединою в даній точці, кінці якого належать даним колам.

22.21.° Дано пряму a та два кола по різні боки від неї. На прямій взято відрізок CD. Побудуйте трикутник ABC так, щоб точки A і B лежали на даних колах, а відрізок CD був його медіаною.

22.22.° На протилежних сторонах BC і AD паралелограма $ABCD$ як на сторонах побудовано поза ним рівносторонні трикутники BMC і AND. Доведіть, що точки M, O і N, де O — точка перетину діагоналей даного паралелограма, лежать на одній прямій.

22.23.° На протилежних сторонах паралелограма як на сторонах побудовано поза ним квадрати. Доведіть, що пряма, яка сполучає центри квадратів, проходить через точку перетину діагоналей паралелограма.

22.24.° Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. Доведіть, що описані кола трикутників BOC і AOD дотикаються.

22.25.°° Доведіть, що коли фігура має дві перпендикулярні осі симетрії, то точка їхнього перетину є центром симетрії фігури.

22.26.•• Точки A і C належать гострому куту, але не лежать на його сторонах. Побудуйте паралелограм $ABCD$ так, щоб точки B і D лежали на сторонах кута.

22.27.•• Побудуйте квадрат із центром у даній точці O та даними точками M і N на двох протилежних сторонах або на їхніх продовженнях.

22.28.•• Побудуйте ромб, точкою перетину діагоналей якого є дана точка, а три вершини належать трьом даним попарно непаралельним прямим.

22.29.•• Дано точку та три кола. Побудуйте ромб, точкою перетину діагоналей якого є дана точка, а три вершини лежать на трьох даних колах.

22.30.•• Дано паралелограм $ABCD$ і точку M. Через точки A, B, C і D проведено прямі, паралельні прямим MC, MD, MA і MB відповідно. Доведіть, що проведені прямі перетинаються в одній точці.

22.31.•• Два кола перетинаються в точці M. Проведіть через точку M пряму, яка вдруге перетинає дані кола в точках A і B так, що $AM = MB$.

22.32.•• Точка C — середина відрізка AB. На промені CQ позначили точки P і M такі, що $PM = MQ$ (рис. 22.16). Доведіть, що $AP + BQ > 2CM$.

22.33.* Доведіть, що прямі, проведені через середини сторін вписаного чотирикутника перпендикулярно до протилежних сторін, перетинаються в одній точці.

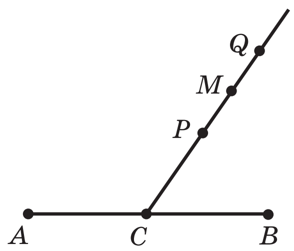


Рис. 22.16

22.34.* Коло перетинає сторони BC, CA, AB трикутника ABC у точках A_1 і A_2, B_1 і B_2, C_1 і C_2 відповідно. Доведіть, що коли прямі, які перпендикулярні до сторін трикутника та проходять через точки A_1, B_1 і C_1, перетинаються в одній точці, то й прямі, які перпендикулярні до сторін трикутника та проведені через точки A_2, B_2 і C_2, також перетинаються в одній точці.

22.35.* Довжина висоти AB прямокутної трапеції $ABCD$ дорівнює сумі довжин основ AD і BC. У якому відношенні бісектриса кута ABC ділить сторону CD?

22.36.* Дано два концентричних кола. Проведіть пряму, на якій ці кола відтинають три рівних відрізки.

23. Поворот

На рисунку 23.1 зображено точки O, X, X_1 і X_2 такі, що $OX_1 = OX_2 = OX$, $\angle X_1OX = \angle X_2OX = \alpha$. Говорять, що точка X_1 є образом точки X при **повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут** α. Також говорять, що точка X_2 — це образ точки X при **повороті навколо центра O за годинниковою стрілкою на кут** α.

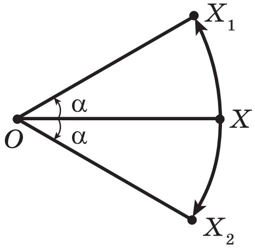


Рис. 23.1

Точку O називають **центром повороту**, кут α — **кутом повороту**.

Розглянемо фігуру F, точку O та кут α. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X_1, яка є образом точки X при повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут α (якщо точка O належить фігурі F, то їй зіставляється вона сама). Унаслідок такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 23.2). Таке перетворення фігури F називають **поворотом навколо центра O проти годинникової стрілки на кут** α та позначають R_O^α. Пишуть: $R_O^\alpha(F) = F_1$. Точку O називають **центром повороту**.

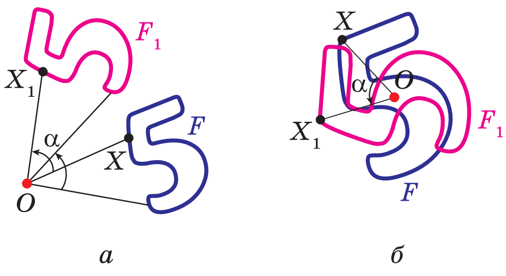


Рис. 23.2

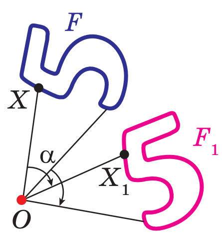


Рис. 23.3

Аналогічно означають перетворення повороту фігури F за годинниковою стрілкою на кут α (рис. 23.3).

Поворот за годинниковою стрілкою позначають так: $R_O^{-\alpha}$. Пишуть: $R_O^{-\alpha}(F) = F_1$. Очевидно, що повороти R_O^α і $R_O^{-\alpha}$ є взаємно оберненими перетвореннями.

Зауважимо, що центральна симетрія є поворотом навколо центра симетрії на кут $180°$ у будь-якому з напрямів.

Теорема 23.1 (властивість повороту). ***Поворот є рухом.***

Доведіть цю теорему самостійно.

Наслідок. ***Якщо фігура F_1 — образ фігури F при повороті, то $F = F_1$.***

Нехай прямі l_1 і l_2 перетинаються в точці O і $S_{l_1}(F) = F_1$, $S_{l_2}(F_1) = F_2$ (рис. 23.4). Наочно очевидно, що фігура F_2 — це образ фігури F при деякому повороті навколо точки O.

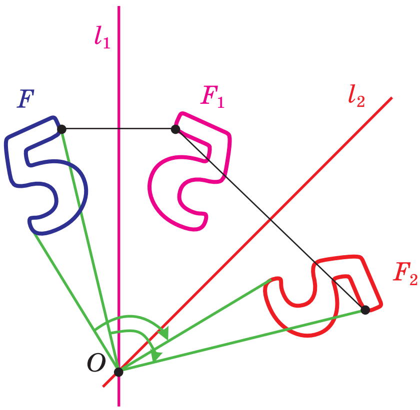


Рис. 23.4

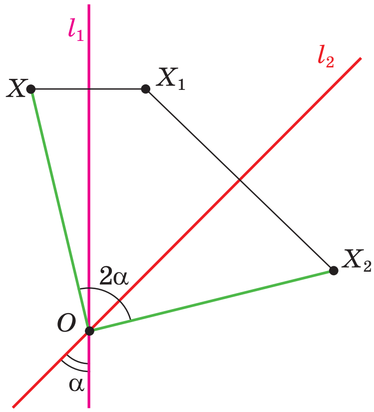


Рис. 23.5

Строге обґрунтування цього факту дає така теорема.

Теорема 23.2. ***Композицією двох осьових симетрій з непаралельними осями є поворот навколо точки перетину осей.***

Складемо план доведення, який ви зможете реалізувати самостійно.

Нехай $l_1 \cap l_2 = O$ та кут між прямими l_1 і l_2 дорівнює α (рис. 23.5). Доведіть, що $S_{l_2} \circ S_{l_1} = R_O^{-2\alpha}$.

Для цього розгляньте довільну точку X фігури F. Нехай $S_{l_1}(X) = X_1$, $S_{l_2}(X_1) = X_2$. Доведіть, що $XO = X_2O$ і $\angle XOX_2 = 2\alpha$.

Теореми 21.4 і 23.2 показують, що паралельне перенесення, поворот, а отже, і центральну симетрію можна подати у вигляді композиції осьових симетрій. Таким чином, осьова симетрія відіграє роль базового руху для всіх відомих вам видів рухів фігур. Більш того, справедливою є така теорема.

Теорема 23.3. ***Будь-який рух фігури є композицією не більше ніж трьох осьових симетрій.***

З доведенням цієї теореми ви можете ознайомитися на заняттях математичного гуртка.

Задача 1. Дано пряму a та точку O поза нею. Побудуйте образ прямої a при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 45°.

Розв'язання. Оскільки поворот — це рух, то образом прямої a буде пряма. Для побудови прямої достатньо знайти дві будь-які її точки. Виберемо на прямій a довільні точки A і B (рис. 23.6). Побудуємо точки A_1 і B_1 — їхні образи при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 45°. Тоді пряма A_1B_1 — образ прямої a. ◀

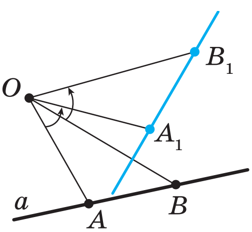


Рис. 23.6

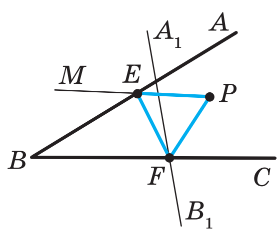


Рис. 23.7

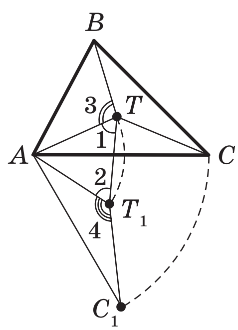


Рис. 23.8

Задача 2. Точка P належить куту ABC, але не належить його сторонам. Побудуйте рівносторонній трикутник, одна вершина якого є точкою P, а дві інші належать сторонам BA і BC кута ABC.

Розв'язання. Нехай пряма A_1B_1 — образ прямої AB при повороті навколо центра P проти годинникової стрілки на кут 60° (рис. 23.7). Позначимо буквою F точку перетину прямих A_1B_1 і BC.

Нехай точка E — прообраз точки F при розглядуваному повороті. Точка E належить стороні BA кута ABC.

Ці міркування підказують, як побудувати шуканий трикутник.

Будуємо пряму A_1B_1 як образ прямої AB при повороті навколо центра P проти годинникової стрілки на кут 60°. Нехай F — точка перетину прямих A_1B_1 і BC.

Будуємо кут MPF, що дорівнює $60°$. Нехай прямі MP і AB перетинаються в точці E. Ця точка і є прообразом точки F.

Маємо: $PF = PE$ і $\angle FPE = 60°$. Отже, трикутник EPF рівносторонній. ◀

Задача 3. У трикутнику ABC, кожний із кутів якого менший від $120°$, знайдіть таку точку T, щоб сума $TA + TB + TC$ була найменшою.

Розв'язання. Нехай T — довільна точка даного трикутника ABC (рис. 23.8). Розглянемо поворот із центром A на кут $60°$ за годинниковою стрілкою. Нехай точки T_1 і C_1 — образи точок T і C відповідно. Оскільки поворот є рухом, то $T_1C_1 = TC$. Очевидно, що трикутник ATT_1 є рівностороннім. Тоді $AT = TT_1$.

Маємо: $TA + TB + TC = TT_1 + TB + T_1C_1$.

Зрозуміло, що сума $TT_1 + TB + T_1C_1$ буде найменшою, якщо точки B, T, T_1 і C_1 лежать на одній прямій. Оскільки $\angle 1 = \angle 2 = 60°$, то ця умова виконуватиметься тоді, коли $\angle 3 = \angle 4 = 120°$.

Оскільки кут AT_1C_1 — образ кута ATC при вказаному повороті, то має виконуватися рівність $\angle ATC = 120°$.

Отже, точки B, T, T_1 і C_1 належатимуть одній прямій тоді й тільки тоді, коли $\angle ATB = \angle ATC = 120°$. Звідси $\angle BTC = 120°$.

Таким чином, сума $TA + TB + TC$ буде найменшою, якщо $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC = 120°$.

Знайти точку T можна, наприклад, побудувавши ГМТ, з яких відрізки AB і AC видно під кутами $120°$ (рис. 23.9).

Зрозуміло, що коли один із кутів трикутника ABC не менший від $120°$, то точка перетину побудованих дуг не буде розміщена всередині трикутника. Можна показати, що в трикутнику з кутом, не меншим від $120°$, точка T, сума відстаней від якої до вершин трикутника є найменшою, збігається з вершиною тупого кута. ◀

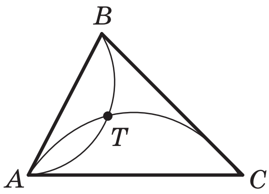


Рис. 23.9

1. Опишіть перетворення повороту навколо точки.
2. Сформулюйте властивість повороту.
3. Яку властивість мають фігури, якщо одна з них є образом другої при повороті?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

23.1.° Побудуйте образ відрізка AB при повороті навколо центра O проти годинникової стрілки на кут 45° (рис. 23.10).

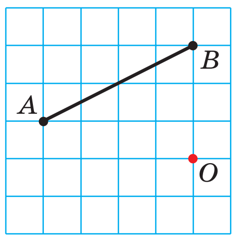


Рис. 23.10

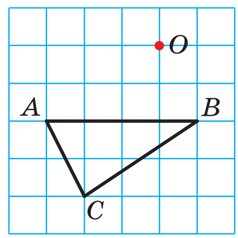


Рис. 23.11

23.2.° Побудуйте образ трикутника ABC при повороті навколо центра O за годинниковою стрілкою на кут 90° (рис. 23.11).

23.3.° На рисунку 23.12 зображено два рівних відрізки AB і BC, причому $\angle ABC = 60°$. Знайдіть точку O таку, щоб відрізок AB був образом відрізка BC при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 120°.

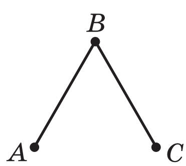


Рис. 23.12

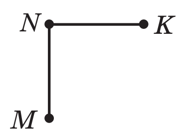


Рис. 23.13

23.4.° На рисунку 23.13 зображено два рівних перпендикулярних відрізки MN і NK. Знайдіть точку O таку, щоб відрізок NK був образом відрізка MN при повороті навколо точки O за годинниковою стрілкою на кут 90°.

23.5.• Побудуйте фігуру, яка не має осей симетрії та образом якої є ця сама фігура при повороті навколо деякої точки:
1) на кут 90°; 2) на кут 120°.

ВПРАВИ

23.6.° На рисунку 23.14 зображено фігури, які складено з рівних півкругів. Які із цих фігур при повороті навколо точки O на кут α, де $0° < \alpha \leqslant 180°$, збігаються зі своїми образами?

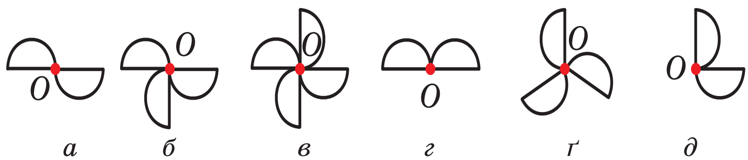


Рис. 23.14

23.7.° Медіани рівностороннього трикутника ABC перетинаються в точці O (рис. 23.15). Укажіть образи точок C, C_1 і O, сторони BC, медіани BB_1, відрізка OC_1, трикутника $A_1B_1C_1$ при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 120°.

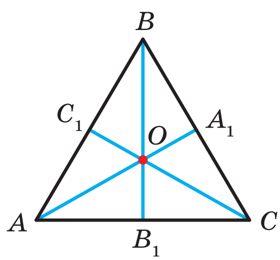


Рис. 23.15

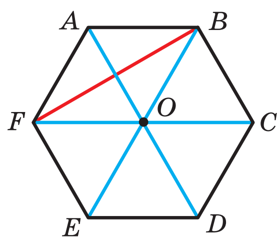


Рис. 23.16

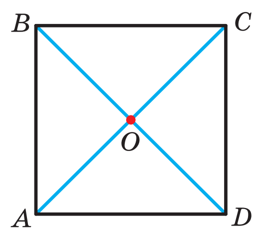


Рис. 23.17

23.8.° Точка O — центр правильного шестикутника $ABCDEF$ (рис. 23.16). Укажіть образи сторони AF, діагоналі BF, діагоналі AD, шестикутника $ABCDEF$ при повороті навколо точки O за годинниковою стрілкою на кут:

1) 60°; 2) 120°.

23.9.° Діагоналі квадрата $ABCD$ перетинаються в точці O (рис. 23.17). Укажіть образи точок A, O і C, сторони AD, діагоналі BD при повороті навколо точки O за годинниковою стрілкою на кут 90°.

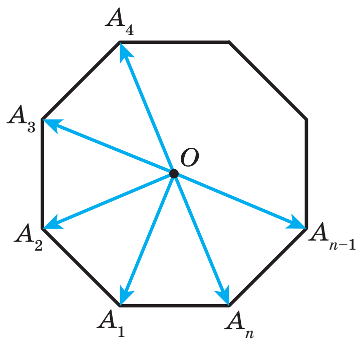


Рис. 23.18

23.10.• Точка O — центр правильного n-кутника $A_1A_2...A_n$ (рис. 23.18). Доведіть, що $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$.

23.11.• Вершина A рівностороннього трикутника ABC є центром повороту на кут 120°. Знайдіть відрізок BC_1, де точка C_1 — образ точки C при заданому повороті, якщо $AB = 1$ см.

23.12.• Вершина A квадрата $ABCD$ є центром повороту проти годинникової стрілки на кут 90°. Знайдіть відрізок CC_1, де точка C_1 — образ точки C при заданому повороті, якщо $AB = 1$ см.

23.13.•• Точка M належить куту ABC і не належить його сторонам. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник, вершина прямого кута якого є точкою M, а дві інші належать сторонам BA і BC відповідно.

23.14.•• У даний квадрат впишіть рівносторонній трикутник так, щоб одна з його вершин збігалася з вершиною квадрата, а дві інші належали сторонам квадрата.

23.15.•• Дано два кола та точку M поза цими колами. Побудуйте прямокутний рівнобедрений трикутник з вершиною в точці M так, щоб дві інші вершини лежали на даних колах.

23.16.•• На сторонах AB і AC трикутника ABC у зовнішній бік побудовано квадрати $ABNM$ і $ACQP$. Доведіть, що $MC = BP$ і $MC \perp BP$.

23.17.•• На сторонах BC і AC трикутника ABC у зовнішній бік побудовано рівносторонні трикутники BCK і CAM. Знайдіть кут між прямими BM і AK та доведіть, що $BM = AK$.

23.18.•• На сторонах AB і AD квадрата $ABCD$ позначили точки K і M відповідно так, що $AK + AM = AB$. Знайдіть кут KOM, де точка O — центр квадрата.

23.19.•• На сторонах AB і AC рівностороннього трикутника ABC позначили точки K і M відповідно так, що $AK + AM = AB$. Знайдіть кут KOM, де точка O — центр трикутника.

23.20.•• У рівнобічній трапеції $ABCD$ на бічних сторонах AB і CD позначили точки K і M відповідно так, що $AK = CM$. Менша основа BC трапеції дорівнює бічній стороні, а гострий кут трапеції дорівнює $60°$. Знайдіть кут KOM, де точка O — середина відрізка AD.

23.21.•• У ромбі $ABCD$ кут A дорівнює $120°$. На сторонах AB і AD позначили точки K і M відповідно так, що $BK = AM$. Знайдіть кут KCM.

23.22.•• Усередині квадрата $ABCD$ позначили точку K і на відрізку AK як на стороні побудували квадрат $AKEM$, сторона KE якого перетинає сторону AD квадрата $ABCD$. Доведіть, що $BK = DM$.

23.23.•• На прямій l позначили послідовно точки A, B і C, а на відрізках AB і AC у різних півплощинах відносно прямої l побудували рівносторонні трикутники ABD і ACN. Доведіть, що середини K і L відповідно відрізків DC і BN та точка A є вершинами рівностороннього трикутника.

23.24.•• На прямій l позначили послідовно точки A, C і E. На відрізках AC і CE в одній півплощині відносно прямої l побудували рівносторонні трикутники ABC і CDE. Точки K і M — середини відрізків AD і BE відповідно. Доведіть, що трикутник CKM рівносторонній.

23.25.* Дано опуклий чотирикутник $ABCD$ і точку O всередині нього. Відомо, що $\angle AOB = \angle COD = 90°$, $OA = OB$, $OC = OD$. Точки K, L і M — середини відрізків AB, BC і CD відповідно. Доведіть, що трикутник KLM рівнобедрений і прямокутний.

23.26.* Побудуйте рівносторонній трикутник так, щоб його вершини належали трьом даним паралельним прямим.

23.27.* Побудуйте квадрат так, щоб три його вершини належали трьом даним паралельним прямим.

23.28.* На стороні CD квадрата $ABCD$ позначили точку E. Бісектриса кута BAE перетинає сторону BC у точці F. Доведіть, що $AE = BF + ED$.

23.29.* У рівносторонньому трикутнику ABC вибрали точку P так, що $\angle APB = 150°$. Доведіть, що існує прямокутний трикутник, сторони якого дорівнюють відрізкам PA, PB і PC.

23.30.* Усередині рівностороннього трикутника ABC позначили точку P таку, що $AP^2 + BP^2 = CP^2$. Доведіть, що $\angle APB = 150°$.

23.31.* У рівносторонньому трикутнику ABC позначили точку M таку, що $\angle AMB = 120°$, $MA = 1$ см, $MB = 2$ см. Знайдіть відрізок MC.

23.32.* Поза рівностороннім трикутником ABC позначили точку M так, що $\angle AMB = 120°$, $MA = 1$ см, $MB = 2$ см. Знайдіть відрізок MC.

23.33.* На стороні BC рівностороннього трикутника ABC позначили точку D. Поза трикутником ABC позначили точку E таку, що трикутник DEC рівносторонній (рис. 23.19). Доведіть, що точка C і середини M і K відрізків BE і AD відповідно є вершинами рівностороннього трикутника.

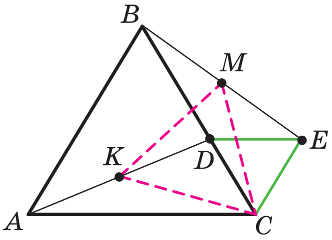


Рис. 23.19

23.34.* Точка P розміщена всередині квадрата $ABCD$, причому $AP : BP : CP = 1 : 2 : 3$. Знайдіть кут APB.

23.35.* В опуклому чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $AB = AD$, $BC + DC = AC = 1$ см, $\angle BAD = 60°$. Знайдіть площу чотирикутника $ABCD$.

23.36.* На сторонах AB і BC трикутника ABC у зовнішній бік побудовано квадрати $ABDE$ і $CBLK$. Точки M_1 і M_2 — середини відрізків DL і AC відповідно. Доведіть, що центри квадратів і точки M_1 і M_2 є вершинами квадрата.

24. Гомотетія. Подібність фігур

Розглянемо фіксовану точку O та довільну точку X. Побудуємо таку точку X_1, що $\overrightarrow{OX_1} = 2\overrightarrow{OX}$ (рис. 24.1). Говорять, що точка X_1 є образом точки X при **гомотетії із центром** O та **коефіцієнтом** 2.

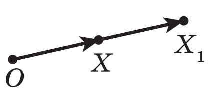


Рис. 24.1

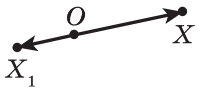


Рис. 24.2

На рисунку 24.2 зображено точки O, X і X_1 такі, що $\overrightarrow{OX_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OX}$. Говорять, що точка X_1 — це образ точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом $-\frac{1}{2}$.

Узагалі, якщо точки O, X і X_1 є такими, що $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, де $k \neq 0$, то говорять, що точка X_1 — це образ точки X при **гомотетії із центром O та коефіцієнтом k**.

Точку O називають **центром гомотетії**, число k — **коефіцієнтом гомотетії**, $k \neq 0$.

Розглянемо фігуру F і точку O. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність точку X_1, яка є образом точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k (якщо точка O належить фігурі F, то їй зіставляється вона сама). У результаті такого перетворення фігури F отримаємо фігуру F_1 (рис. 24.3). Таке перетворення фігури F називають **гомотетією із центром O та коефіцієнтом k** і позначають H_O^k. Пишуть: $H_O^k(F) = F_1$. Також говорять, що фігура F_1 **гомотетична** фігурі F із центром O та коефіцієнтом k.

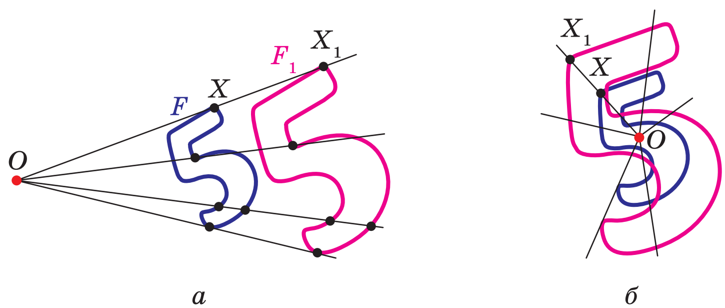


Рис. 24.3

Наприклад, на рисунку 24.4 трикутник $A_1B_1C_1$ гомотетичний трикутнику ABC із центром O та коефіцієнтом, який дорівнює -3. Пишуть: $H_O^{-3}(\Delta ABC) = \Delta A_1B_1C_1$.

Також можна сказати, що трикутник ABC гомотетичний трикутнику $A_1B_1C_1$ із тим самим центром, але коефіцієнтом гомотетії, який дорівнює $-\frac{1}{3}$. Пишуть: $H_O^{-\frac{1}{3}}(\Delta A_1B_1C_1) = \Delta ABC$.

Очевидно, що гомотетії H_O^k і $H_O^{\frac{1}{k}}$ є взаємно оберненими перетвореннями.

Зазначимо, що при $k = -1$ гомотетія із центром O є центральною симетрією із центром O (рис. 24.5). Якщо $k = 1$, то гомотетія є тотожним перетворенням.

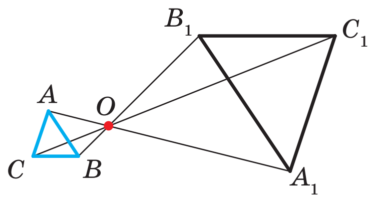


Рис. 24.4

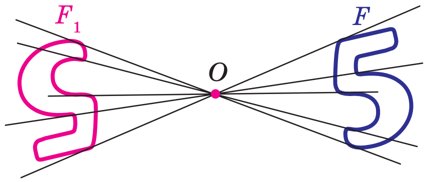


Рис. 24.5

Очевидно, що при $k \neq 1$ і $k \neq -1$ гомотетія не є рухом.

Теорема 24.1. ***При гомотетії фігури F із коефіцієнтом k усі відстані між її точками змінюються в $|k|$ разів, тобто якщо A і B — довільні точки фігури F, а точки A_1 і B_1 — їхні відповідні образи при гомотетії з коефіцієнтом k, то $A_1B_1 = |k| AB$.***

Доведення. Нехай точка O — центр гомотетії. Тоді $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB}$. Маємо: $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{OB_1} - \overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right) = k\overrightarrow{AB}$, тобто $A_1B_1 = |k| AB$. ◄

Наслідок. ***Якщо трикутник $A_1B_1C_1$ гомотетичний трикутнику ABC із коефіцієнтом гомотетії k, то $\triangle A_1B_1C_1 \overset{k}{\sim} \triangle ABC$.***

Для доведення цього твердження достатньо скористатися теоремою 24.1 і третьою ознакою подібності трикутників.

Гомотетія має низку інших властивостей.

Теорема 24.2. ***При гомотетії фігури F образами будь-яких її трьох точок, які лежать на одній прямій, є три точки, які лежать на одній прямій, а образами трьох точок, які не лежать на одній прямій, є три точки, які не лежать на одній прямій.***

Скориставшися теоремою 24.1 та ідеєю доведення теореми 20.1, доведіть цю теорему самостійно.

Наслідок. ***При гомотетії відрізка, променя, прямої образами є відповідно відрізок, промінь, пряма. При гомотетії кута образом є кут, рівний даному. При гомотетії трикутника образом є трикутник, подібний даному.***

Доведіть цей наслідок самостійно.

Зазначені властивості гомотетії вказують на те, що це перетворення може змінити розміри фігури, але не змінює її форму, тобто при гомотетії образ і прообраз є подібними фігурами.

Зауважимо, що в курсі геометрії 8 класу, коли йшлося про подібність фігур, ми давали означення лише подібним трикутникам. Зараз означимо поняття подібності для довільних фігур.

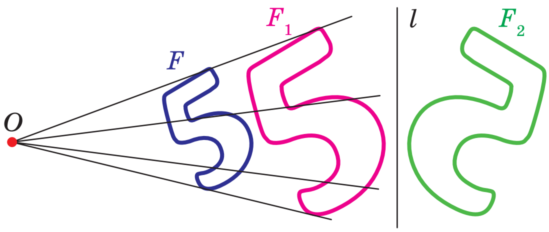


Рис. 24.6

На рисунку 24.6 фігура F_1 гомотетична фігурі F, а фігура F_2 симетрична фігурі F_1 відносно прямої l.

Фігуру F_2 отримано з фігури F у результаті композиції двох перетворень: гомотетії та осьової симетрії.

Оскільки $F_1 = F_2$, то фігури F і F_2 мають однакові форми, але різні розміри, тобто вони є подібними. Говорять, що фігуру F_2 отримано з фігури F у результаті **перетворення подібності**.

На рисунку 24.7 фігура F_1 гомотетична фігурі F, а фігура F_2 — образ фігури F_1 при деякому русі. Тут також можна стверджувати, що фігури F і F_2 подібні.

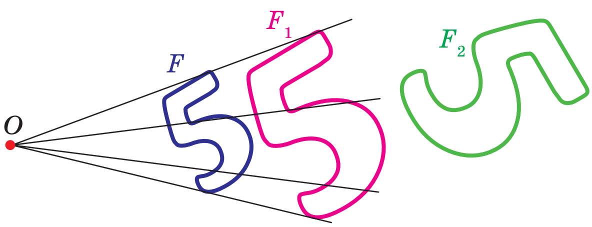


Рис. 24.7

Зі сказаного випливає, що доцільно прийняти таке означення.

Означення. Дві фігури називають подібними, якщо одну з них можна отримати з другої в результаті композиції двох перетворень: гомотетії та руху.

Це означення ілюструє схема, зображена на рисунку 24.8.

Рис. 24.8

Запис $F \backsim F_1$ означає, що фігури F і F_1 подібні. Також говорять, що фігура F_1 — образ фігури F при **перетворенні подібності.**

Із наведеного означення випливає, що *при перетворенні подібності фігури F відстані між її точками змінюються в одну й ту саму кількість разів*.

Оскільки тотожне перетворення є рухом, то зі схеми, зображеної на рисунку 24.8, випливає, що гомотетія — окремий випадок перетворення подібності.

Нехай A і B — довільні точки фігури F, а точки A_1 і B_1 — їхні образи при перетворенні подібності. Точки A_1 і B_1 належать фігурі F_1, яка подібна фігурі F. Число $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ називають **коефіцієнтом подібності**. Говорять, що фігура F_1 подібна фігурі F із коефіцієнтом подібності k, а фігура F подібна фігурі F_1 із коефіцієнтом подібності $\frac{1}{k}$.

Зауважимо, що перетворення подібності з коефіцієнтом $k = 1$ є рухом. Звідси випливає, що рух — окремий випадок перетворення подібності.

З перетворенням подібності ми часто маємо справу в повсякденному житті (рис. 24.9). Наприклад, унаслідок зміни масштабу карти отримуємо карту, подібну даній. Фотографія — це перетворення негатива в подібне зображення на фотопапері. Переносячи до свого зошита рисунок, зроблений учителем на дошці, ви також виконуєте перетворення подібності.

Рис. 24.9

Теорема 24.3. ***Відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.***

Намітимо план доведення. Спочатку доведемо цю теорему для трикутників.

Нехай трикутник $A_1B_1C_1$ — образ трикутника ABC при перетворенні подібності з коефіцієнтом k (рис. 24.10). Сторона A_1C_1 — образ сторони AC. Тоді $A_1C_1 = k \cdot AC$. Проведемо висоту BD. Нехай точка D_1 — образ точки D. Оскільки при перетворенні подібності зберігаються кути, то відрізок B_1D_1 — висота трикутника $A_1B_1C_1$. Тоді $B_1D_1 = k \cdot BD$. Маємо:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}A_1C_1 \cdot B_1D_1}{\frac{1}{2}AC \cdot BD} = \frac{k \cdot AC \cdot k \cdot BD}{AC \cdot BD} = k^2.$$

Якщо дані многокутники опуклі, то розіб'ємо їх на трикутники. Для цього виберемо в многокутниках вершини M і M_1 — відповідні точки при перетворенні подібності. У кожному з многокутників проведемо всі діагоналі, які виходять з вершин M і M_1 (рис. 24.11). Далі застосуйте доведений факт для утворених пар подібних трикутників.

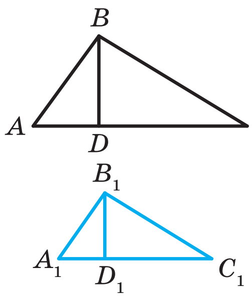


Рис. 24.10

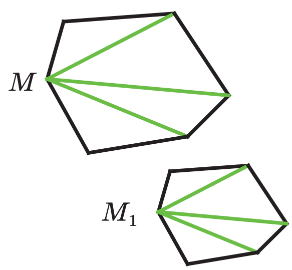


Рис. 24.11

Твердження теореми залишається справедливим і для неопуклих многокутників. Тут треба скористатися таким фактом: кожний многокутник можна розбити на трикутники.

Задача 1. Доведіть, що образом прямої l при гомотетії із центром O, який не належить прямій l, є пряма, паралельна даній.

Розв'язання. Із властивостей гомотетії випливає, що образом прямої l буде пряма. Для побудови прямої достатньо знайти дві будь-які її точки. Виберемо на прямій l довільні точки A і B (рис. 24.12). Нехай точки A_1 і B_1 — їхні образи при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k (рисунок 24.12 відповідає випадку, коли $k > 1$). Тоді пряма A_1B_1 — образ прямої AB.

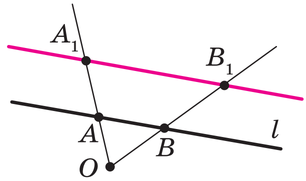


Рис. 24.12

При доведенні теореми 24.1 ми показали, що $\overrightarrow{A_1B_1} = k\overrightarrow{AB}$. Отже, $AB \parallel A_1B_1$. ◀

Задача 2. У гострокутний трикутник ABC впишіть квадрат так, щоб дві його вершини лежали відповідно на сторонах AB і BC, а дві інші — на стороні AC.

Розв'язання. Із довільної точки M сторони AB опустимо перпендикуляр MQ на сторону AC (рис. 24.13). Побудуємо квадрат $MQPN$ так, щоб точка P лежала на промені QC. Нехай промінь AN перетинає сторону BC у точці N_1.

Розглянемо гомотетію із центром A та коефіцієнтом $k = \frac{AN_1}{AN}$. Тоді точка N_1 — образ точки N при цій гомотетії. Образом відрізка MN є відрізок M_1N_1, де точка M_1 належить променю AB, причому $M_1N_1 \parallel MN$. Аналогічно відрізок N_1P_1 такий, що точка P_1 належить променю AC і $N_1P_1 \parallel NP$, є образом відрізка NP. Отже, відрізки M_1N_1 і N_1P_1 — сусідні сторони шуканого квадрата. Для завершення побудови залишилося опустити перпендикуляр M_1Q_1 на сторону AC. ◀

Задача 3. Відрізок CD — висота прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$). Знайдіть радіус r вписаного кола трикутника ABC, якщо радіуси кіл, вписаних у трикутники ACD і BCD, відповідно дорівнюють r_1 і r_2.

Розв'язання. Оскільки кут A — спільний для прямокутних трикутників ACD і ABC, то ці трикутники подібні (рис. 24.14). Нехай коефіцієнт подібності дорівнює k_1. Очевидно, що $k_1 = \frac{r_1}{r}$. Аналогічно $\Delta BCD \backsim \Delta ABC$ із коефіцієнтом подібності $k_2 = \frac{r_2}{r}$.

Позначимо площі трикутників ACD, BCD і ABC відповідно S_1, S_2 і S. Маємо:

$$\frac{S_1}{S} = k_1^2 = \frac{r_1^2}{r^2}; \quad \frac{S_2}{S} = k_2^2 = \frac{r_2^2}{r^2}.$$

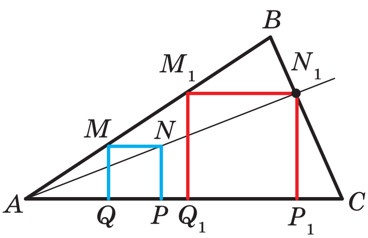


Рис. 24.13

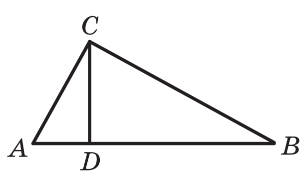


Рис. 24.14

Звідси $\dfrac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \dfrac{S_1 + S_2}{S} = 1.$

Отримуємо, що $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, тобто $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

Відповідь: $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$. ◀

Задача 4. Відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 — висоти гострокутного трикутника ABC. Доведіть, що радіус описаного кола трикутника ABC удвічі більший за радіус описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$.

Розв'язання. Нехай прямі AA_1, BB_1 і CC_1 перетинають описане коло трикутника ABC відповідно в точках M, N і P (рис. 24.15). Позначимо буквою H ортоцентр трикутника ABC. Із ключової задачі 20.30 випливає, що $HA_1 = A_1M$, $HB_1 = B_1N$, $HC_1 = C_1P$.

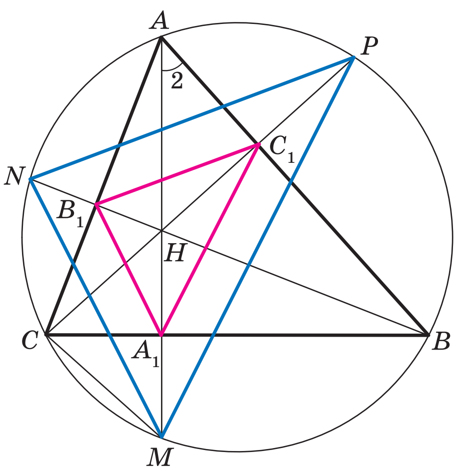


Рис. 24.15

Тепер зрозуміло, що трикутник MNP гомотетичний трикутнику $A_1B_1C_1$ із центром H і коефіцієнтом 2. Тоді радіус описаного кола трикутника MNP удвічі більший за радіус описаного кола трикутника $A_1B_1C_1$. Залишилося зауважити, що трикутники MNP і ABC вписані в одне й те саме коло. ◀

1. У якому разі говорять, що точка X_1 є образом точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k?
2. Опишіть перетворення фігури F, яке називають гомотетією із центром O та коефіцієнтом k.

3. Як змінюється відстань між точками при гомотетії з коефіцієнтом k?
4. Сформулюйте властивості гомотетії.
5. Які фігури називають подібними?
6. Чому дорівнює відношення площ подібних многокутників?

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

24.1.° Побудуйте образ відрізка AB (рис. 24.16) при гомотетії із центром O та коефіцієнтом:

1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.

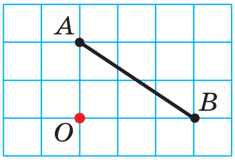


Рис. 24.16

24.2.° Накресліть відрізок AB. Побудуйте образ цього відрізка при гомотетії з коефіцієнтом k і центром:
1) у точці A, $k = 3$;
2) у точці B, $k = -2$;
3) у середині відрізка AB, $k = 2$.

24.3.° Накресліть коло, радіус якого дорівнює 2 см, і позначте на ньому точку A. Побудуйте образ цього кола при гомотетії з коефіцієнтом k і центром:

1) у центрі кола, $k = -\frac{1}{2}$, $k = 2$; 2) у точці A, $k = 2$, $k = -\frac{1}{2}$.

24.4.° Накресліть трикутник ABC. Побудуйте образ цього трикутника при гомотетії з коефіцієнтом k і центром:

1) у точці B, $k = 3$;
2) у точці C, $k = -\frac{1}{2}$;
3) у точці A, $k = \frac{1}{2}$;
4) у середині сторони AB, $k = \frac{1}{2}$;
5) у середині сторони AC, $k = -\frac{1}{3}$.

24.5.° Накресліть трикутник ABC. Знайдіть точку перетину його медіан. Побудуйте образ цього трикутника при гомотетії із центром у точці перетину його медіан і коефіцієнтом:

1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -\frac{1}{2}$.

24.6.° Накресліть паралелограм $ABCD$. Точку перетину його діагоналей позначте буквою O. Побудуйте образ цього паралелограма при гомотетії із центром O та коефіцієнтом:

1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.

24.7.° Накресліть квадрат $ABCD$. Побудуйте образ цього квадрата при гомотетії з коефіцієнтом k і центром:

1) у точці A, $k = \frac{1}{3}$;
2) у точці B, $k = -2$;
3) у точці C, $k = 2$.

24.8.° Орієнтуючись за клітинками, накресліть п'ятикутник $ABCDE$ (рис. 24.17). Побудуйте п'ятикутник $A_1B_1C_1D_1E_1$, подібний даному, з коефіцієнтом подібності $\frac{1}{2}$.

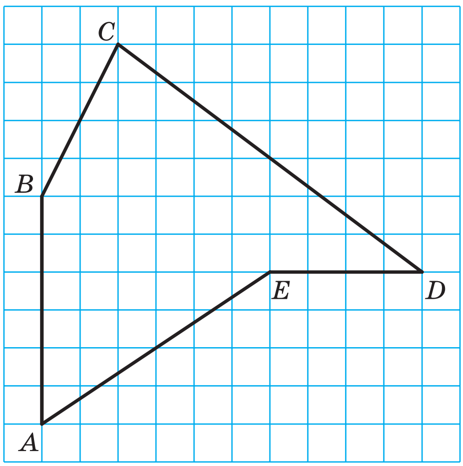


Рис. 24.17

24.9.• На рисунку 24.18 точка A_1 — образ точки A при гомотетії із центром O. Побудуйте образ точки B при цій гомотетії.

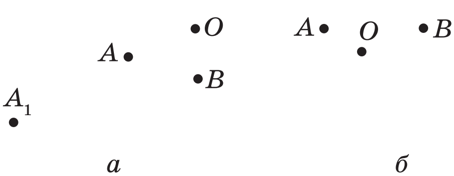


Рис. 24.18

Рис. 24.19

24.10.• На рисунку 24.19 точка A_1 — образ точки A при гомотетії з коефіцієнтом:
1) $k = 3$;
2) $k = -2$.
Побудуйте центр гомотетії.

24.11.• На рисунку 24.20 зображено прямокутник $ABCD$ і точки A_1 і D_1, які є образами відповідно точок A і D при перетворенні подібності. Побудуйте образ прямокутника $ABCD$ при цьому перетворенні. Скільки розв'язків має задача?

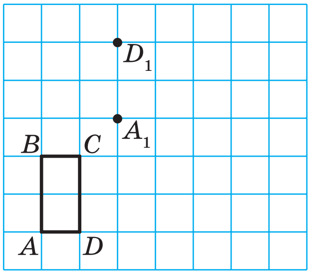


Рис. 24.20

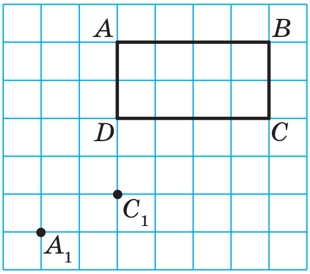


Рис. 24.21

24.12.• На рисунку 24.21 зображено прямокутник $ABCD$ і точки A_1 і C_1, які є образами відповідно точок A і C при перетворенні подібності. Побудуйте образ прямокутника $ABCD$ при цьому перетворенні. Скільки розв'язків має задача?

24.13.• Побудуйте образ трикутника ABC при перетворенні подібності, яке є композицією двох перетворень: гомотетії із центром O і коефіцієнтом $k = 2$ та осьової симетрії відносно прямої l (рис. 24.22). Укажіть коефіцієнт подібності.

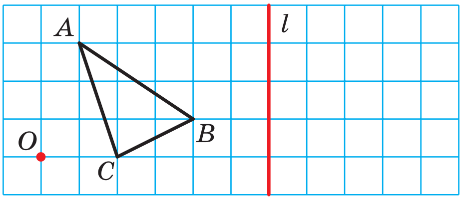


Рис. 24.22

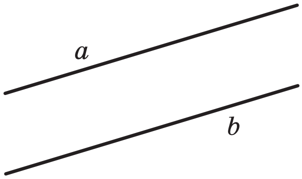


Рис. 24.23

24.14.• Накресліть коло, радіус якого дорівнює 2 см. Позначте точку O на відстані 4 см від його центра. Побудуйте образ цього кола при перетворенні подібності, яке є композицією двох перетворень: гомотетії із центром O та коефіцієнтом $k = \frac{1}{2}$ і повороту із центром O за годинниковою стрілкою на кут 45°. Укажіть коефіцієнт подібності.

24.15.$^{\bullet}$ На рисунку 24.23 зображено дві паралельні прямі a і b. Побудуйте центр гомотетії, при якому пряма b є образом прямої a з коефіцієнтом: 1) $k = 2$; 2) $k = \frac{1}{2}$; 3) $k = -\frac{1}{2}$. Скільки розв'язків має задача?

24.16.$^{\bullet}$ Накресліть трапецію $ABCD$, основа BC якої у два рази менша від основи AD. Побудуйте центр гомотетії, при якій відрізок AD є образом відрізка BC із коефіцієнтом: 1) $k = 2$; 2) $k = -2$.

ВПРАВИ

24.17.° У паралелограмі $ABCD$ точка D_1 — середина сторони AD. При гомотетії із центром A точка D_1 є образом точки D. Знайдіть коефіцієнт гомотетії. Укажіть, які точки є образами точок B і C при цій гомотетії.

24.18.° Які з фігур, зображених на рисунку 24.24, збігаються зі своїми образами при гомотетії із центром O та коефіцієнтом $k > 0$ і $k \neq 1$?

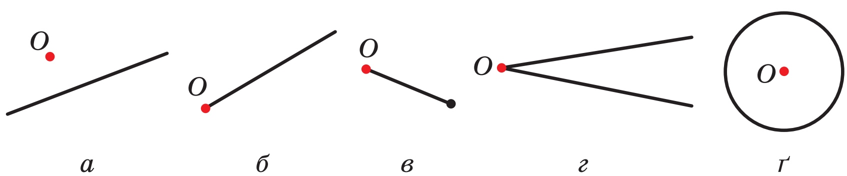


Рис. 24.24

24.19.° Які з фігур, зображених на рисунку 24.25, збігаються зі своїми образами при гомотетії із центром O та коефіцієнтом $k < 0$?

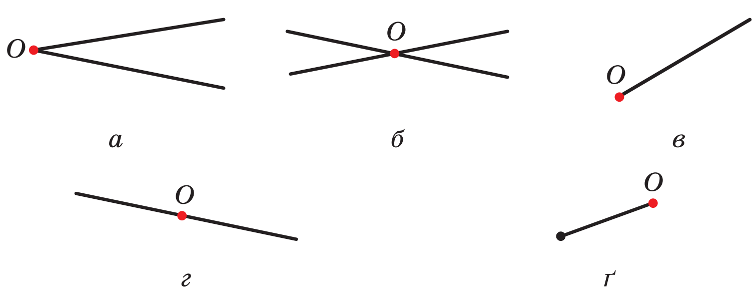


Рис. 24.25

24.20.° Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M (рис. 24.26). Знайдіть коефіцієнт гомотетії із центром:

1) у точці B, при якій точка B_1 є образом точки M;
2) у точці M, при якій точка A_1 є образом точки A;
3) у точці C, при якій точка M є образом точки C_1.

24.21.° Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M (рис. 24.26). Укажіть коефіцієнт і центр гомотетії, при якій трикутник $A_1B_1C_1$ є образом трикутника ABC.

24.22.° У трикутнику ABC медіани AA_1, BB_1 і CC_1 перетинаються в точці M. Точки K, F і N — середини відрізків AM, BM і CM відповідно. Укажіть коефіцієнт і центр гомотетії, при якій трикутник ABC є образом трикутника KFN.

24.23.° Знайдіть образи точок A $(-2;\ 1)$, B $(3;\ 0)$ і D $(0;\ -6)$ при гомотетії із центром O $(0;\ 0)$ та коефіцієнтом:

1) $k = 2$; 2) $k = 3$; 3) $k = -\frac{1}{2}$; 4) $k = -\frac{1}{3}$.

24.24.° Точка A_1 $(-1;\ 2)$ — образ точки $A(-3;\ 6)$ при гомотетії із центром у початку координат. Знайдіть коефіцієнт гомотетії.

24.25.° Площі двох подібних трикутників дорівнюють 28 см² і 63 см². Одна зі сторін першого трикутника дорівнює 8 см. Знайдіть сторону другого трикутника, яка відповідає даній стороні першого.

24.26.° Відповідні сторони двох подібних трикутників дорівнюють 30 см і 24 см. Площа трикутника зі стороною 30 см дорівнює 45 см². Знайдіть площу другого трикутника.

24.27.° Площа трикутника дорівнює S. Чому дорівнює площа трикутника, який відтинає від даного його середня лінія?

24.28.° Площа трикутника дорівнює S. Знайдіть площу трикутника, вершини якого — середини середніх ліній даного трикутника.

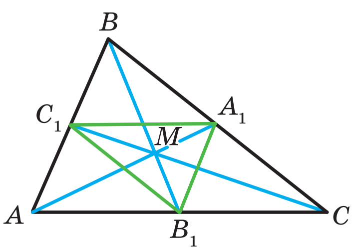


Рис. 24.26

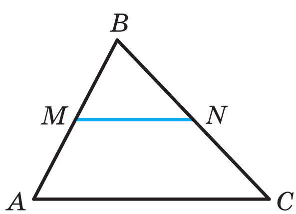


Рис. 24.27

24.29.° Відрізок MN — середня лінія трикутника ABC (рис. 24.27). Укажіть коефіцієнт і центр гомотетії, при якій:
1) відрізок AC є образом відрізка MN;
2) відрізок MN є образом відрізка AC.

24.30.° Паралельні прямі перетинають сторони кута A в точках M, N, P і Q (рис. 24.28). Відомо, що $AM : MP = 3 : 1$. Укажіть коефіцієнт і центр гомотетії, при якій:
1) відрізок PQ є образом відрізка MN;
2) відрізок MN є образом відрізка PQ.

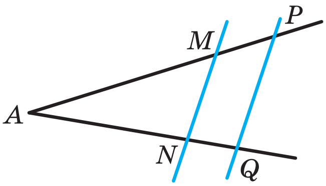


Рис. 24.28

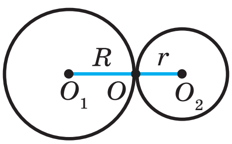


Рис. 24.29

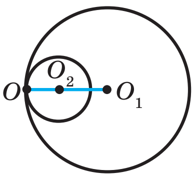


Рис. 24.30

24.31.• Паралельні відрізки BC і AD такі, що $AD = 3BC$. Скільки існує точок, що є центрами гомотетії, при якій образом відрізка BC є відрізок AD? Для кожної такої точки визначте коефіцієнт гомотетії.

24.32.• Кола із центрами O_1 і O_2 та радіусами R і r відповідно мають зовнішній дотик у точці O (рис. 24.29). Доведіть, що коло із центром O_1 є образом кола із центром O_2 при гомотетії із центром O та коефіцієнтом $-\frac{R}{r}$.

24.33.• Кола із центрами O_1 і O_2 та радіусами R і r відповідно мають внутрішній дотик у точці O (рис. 24.30). Доведіть, що коло із центром O_1 є образом кола із центром O_2 при гомотетії із центром O та коефіцієнтом $\frac{R}{r}$.

24.34.• Коло із центром O дотикається до прямої a. Доведіть, що образ цього кола при гомотетії із центром A, де A — довільна точка прямої a (рис. 24.31), дотикається до цієї прямої.

24.35.• Два кола дотикаються в точці K. Пряма, яка проходить через точку K, перетинає ці кола в точках A і B. Доведіть, що дотичні до кіл, проведені через точки A і B, паралельні.

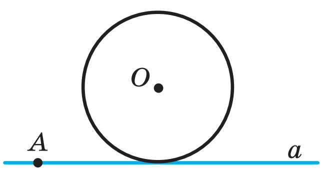


Рис. 24.31

24.36.° Точка A (2; −3) — образ точки B (8; 6) при гомотетії із центром M (4; 0). Знайдіть коефіцієнт гомотетії.

24.37.° Точка A (−7; 10) — образ точки B (−1; −2) при гомотетії з коефіцієнтом −2. Знайдіть центр гомотетії.

24.38.° Точка A_1 (x; 4) — образ точки A (−6; y) при гомотетії із центром у початку координат та коефіцієнтом: 1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$. Знайдіть x і y.

24.39.° Точка A_1 (4; y) — образ точки A (x; −4) при гомотетії із центром B (1; −1) та коефіцієнтом $k = -3$. Знайдіть x і y.

24.40.° Пряма, паралельна стороні AC трикутника ABC, перетинає його сторону AB у точці M, а сторону BC — у точці K. Знайдіть площу трикутника ABC, якщо $BM = 4$ см, $AC = 8$ см, $AM = MK$, а площа трикутника MBK дорівнює 5 см^2.

24.41.° Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці E. Знайдіть площу трапеції, якщо $BC : AD = 3 : 5$, а площа трикутника AED дорівнює 175 см^2.

24.42.° Відрізки BM і CK — висоти гострокутного трикутника ABC, $\angle A = 45°$. Знайдіть відношення площ трикутників AMK і ABC.

24.43.° Знайдіть образ прямої $y = 2x + 1$ при гомотетії із центром у початку координат та коефіцієнтом:

1) $k = 2$; 2) $k = -\frac{1}{2}$.

24.44.° Знайдіть образ кола $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$ при гомотетії із центром у початку координат та коефіцієнтом:

1) $k = \frac{1}{2}$; 2) $k = -2$.

24.45.° Діагоналі трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) перетинаються в точці O. Доведіть, що описані кола трикутників AOD і BOC дотикаються.

24.46.° Доведіть, що коли нерівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ є такими, що $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, $CA \parallel C_1A_1$, то існують такі точка O і число $k \neq 0$, $|k| \neq 1$, що $H_O^k(\Delta ABC) = \Delta A_1B_1C_1$.

24.47.° Два кола мають внутрішній дотик. Через точку дотику проведено дві прямі, які перетинають кола в точках A_1, A_2, B_1, B_2 (рис. 24.32). Доведіть, що $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

24.48.° Два кола мають зовнішній дотик. Через точку дотику проведено дві прямі, які перетинають кола в точках A_1, A_2, B_1, B_2 (рис. 24.33). Доведіть, що $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

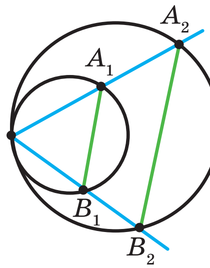


Рис. 24.32

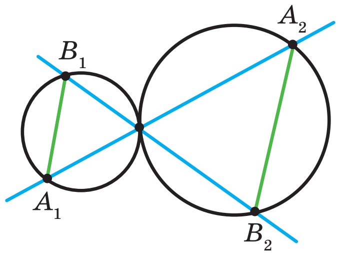


Рис. 24.33

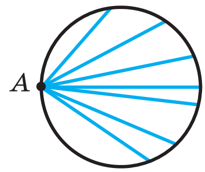


Рис. 24.34

24.49.• Точка A належить колу (рис. 24.34). Знайдіть геометричне місце точок, які є серединами хорд даного кола, одним із кінців яких є точка A.

24.50.• Два кола мають внутрішній дотик, причому менше коло проходить через центр більшого. Доведіть, що менше коло ділить навпіл будь-яку хорду більшого кола, яка проходить через точку дотику.

24.51.• Дано трикутник ABC і довільну точку M. Доведіть, що точки, симетричні точці M відносно середин сторін трикутника ABC, є вершинами трикутника, рівного даному.

24.52.• На продовженнях медіан AK, BL і CM трикутника ABC взято точки P, Q, R такі, що $KP = \frac{1}{2}AK$, $LQ = \frac{1}{2}BL$, $MR = \frac{1}{2}CM$. Знайдіть S_{PQR}, якщо $S_{ABC} = 1$ см^2.

24.53.• Доведіть, що точки, симетричні довільній точці відносно середин сторін квадрата, є вершинами деякого квадрата.

24.54.• Усередині опуклого чотирикутника $ABCD$ позначили точку P. Точки M_1, M_2, M_3, M_4 — точки перетину медіан трикутників APB, BPC, CPD і DPA відповідно. Доведіть, що чотирикутник $M_1M_2M_3M_4$ — паралелограм.

24.55.•• Два кола мають внутрішній дотик у точці O. У довільній точці M внутрішнього кола проведено до нього дотичну, яка перетинає друге коло в точках A і B. Доведіть, що $\angle AOM = \angle MOB$.

24.56.•• Побудуйте трикутник за двома його кутами та радіусом описаного кола.

24.57.•• Побудуйте трикутник за двома його кутами та радіусом вписаного кола.

24.58.•• Побудуйте трикутник за його периметром і двома кутами.

24.59.•• Відрізок AC — найбільша сторона трикутника ABC. Впишіть у трикутник ABC прямокутник, сторони якого відносяться як $2 : 1$, так, щоб дві вершини більшої сторони прямокутника лежали на стороні AC трикутника, а дві інші вершини — на сторонах AB і BC.

24.60.•• Впишіть у даний трикутник інший трикутник, сторони якого були би паралельні трьом даним прямим.

24.61.•• Точку, яка знаходиться всередині опуклого чотирикутника з площею S, сполучили з його вершинами. Знайдіть площу чотирикутника, вершини якого є точками перетину медіан чотирьох утворених трикутників.

24.62.•• Відрізок AB — хорда даного кола, точка C — довільна точка цього кола. Знайдіть геометричне місце точок, які є точками перетину медіан трикутників ABC.

24.63.•• Дано дві точки A і B та пряму l. Знайдіть геометричне місце точок, які є точками перетину медіан трикутників ABC, де C — довільна точка прямої l.

24.64.•• Точка M належить куту ABC, але не належить його сторонам. Побудуйте коло, яке дотикається до сторін кута і проходить через точку M.

24.65.•• Усередині кута AOB дано точку M. Знайдіть на промені OA точку, однаково віддалену від точки M і променя OB.

24.66.•• На стороні AC гострокутного трикутника ABC позначили точку M. Перпендикуляри, опущені із середин відрізків AM і MC відповідно на сторони BC і AB, перетинаються в точці O. При якому положенні точки M на стороні AC довжина відрізка MO буде найменшою?

24.67.•• На сторонах AB і AC гострокутного трикутника ABC позначили відповідно точки K і L так, що $KL \parallel BC$. Прямі, проведені через точки K і L перпендикулярно до сторін AB і AC відповідно, перетинаються в точці M. Доведіть, що центр описаного кола трикутника ABC належить прямій AM.

24.68.•• Точка M лежить усередині кола. Проведіть через точку M хорду AB так, щоб $AM : MB = 2 : 1$.

24.69.* На катетах AC і CB та гіпотенузі AB прямокутного трикутника ABC позначили відповідно точки M, N і K так, що $MN \parallel AB$ і трикутник MNK рівносторонній. Потім увесь рисунок витерли, залишивши лише точки A, K і B. Як за цими точками відновити трикутник ABC?

24.70.* Бісектриси кутів A, B і C трикутника ABC перетинають описане коло цього трикутника в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Вписане коло дотикається до сторін AB, BC і CA відповідно в точках C_2, A_2 і B_2. Доведіть, що прямі A_1A_2, B_1B_2 і C_1C_2 перетинаються в одній точці.

24.71.* Бісектриси кутів A, B і C трикутника ABC перетинають описане коло цього трикутника в точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Дотичні до кола в точках A_1, B_1 і C_1 перетинаються в точках A_2, B_2 і C_2 (рис. 24.35). Доведіть, що прямі AA_2, BB_2 і CC_2 перетинаються в одній точці.

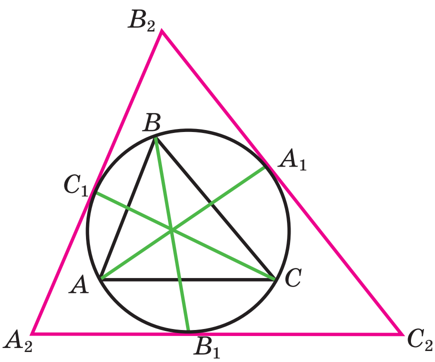


Рис. 24.35

24.72.* Коло, вписане в трикутник ABC, дотикається до сторін AB, BC і CA в точках C_1, A_1 і B_1 відповідно. Прямі, які містять висоти трикутника $A_1B_1C_1$, проведені до сторін A_1B_1, B_1C_1 і C_1A_1, перетинають дане коло в точках C_2, A_2 і B_2 відповідно. Доведіть, що прямі AA_2, BB_2 і CC_2 перетинаються в одній точці.

24.73.* Розглянемо множину рівнобедрених трикутників з рівними радіусами вписаних кіл, основи яких лежать на даній прямій, а одна з вершин — у даній точці A цієї прямої. Доведіть, що всі прямі, які містять бічні сторони цих трикутників, що не проходять через вершину A, дотикаються до одного й того самого кола.

ІНВЕРСІЯ

Як правило, ми розглядали такі перетворення фігур, які зберігали прямолінійність, тобто мали властивості, про які йдеться в теоремах 20.1 і 24.2.

У цьому оповіданні ми розглянемо перетворення фігур, яке називають інверсією (від латин. *inversio* — перегортання, обернення). Це перетворення не зберігає прямолінійність.

Нехай дано коло радіуса R із центром O. Розглянемо фігуру F, якою є вся площина за винятком точки O. Кожній точці X фігури F поставимо у відповідність таку точку X_1 променя OX, що

$$OX_1 \cdot OX = R^2.$$

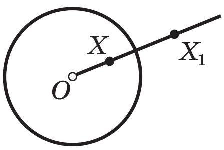


Рис. 24.36

Таке перетворення фігури F називають **інверсією відносно кола** із центром O. Точку O називають **центром інверсії** (це єдина точка, у якій перетворення «інверсія» не визначено). Дане коло називають **колом інверсії**, число R — **радіусом інверсії** (рис. 24.36).

Інверсію із центром O та радіусом R позначають так: I_O^R.

Безпосередньо з означення випливають такі три властивості інверсії.

Властивість 1. *Образами точок, які лежать усередині кола інверсії (не включаючи центр кола), є точки, які лежать поза колом, і навпаки, образами точок, які лежать поза колом інверсії, є точки, які лежать усередині кола.*

Властивість 2. *Якщо X — довільна точка кола інверсії, то $I_O^R(X) = X$, тобто всі точки кола інверсії є* ***нерухомими точками*** *цього перетворення.*

Ці дві властивості дають змогу розглядати інверсію як перетворення, яке ніби «вивертає» круг «назовні» та навпаки. Причому коли точку X вибирати все ближче й ближче до центра інверсії, то її образ розміщуватиметься все далі й далі від центра інверсії (рис. 24.37).

Властивість 3. *Інверсія є оборотним перетворенням. Перетворенням, оберненим до інверсії I_O^R, є ця сама інверсія I_O^R.*

Інверсію також називають **симетрією відносно кола**. Це пов'язано з тим, що наведені властивості 1–3 схожі на властивості осьової симетрії.

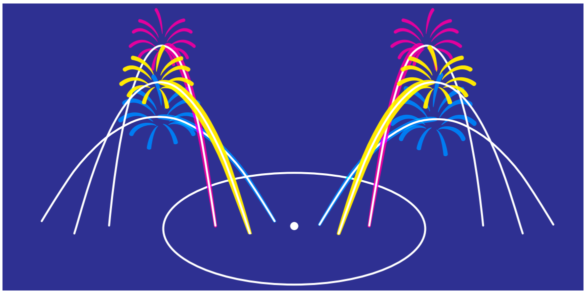


Рис. 24.37

Розглянемо ще кілька властивостей інверсії.

Властивість 4. *Образом прямої, яка проходить через центр інверсії, є ця сама пряма*[1].

Властивість 5. *Образом прямої, яка не проходить через центр інверсії, є коло, яке проходить через центр інверсії*[2].

Доведення. Нехай пряма a не проходить через центр інверсії (рис. 24.38). Опустимо із центра інверсії перпендикуляр OM на пряму a.

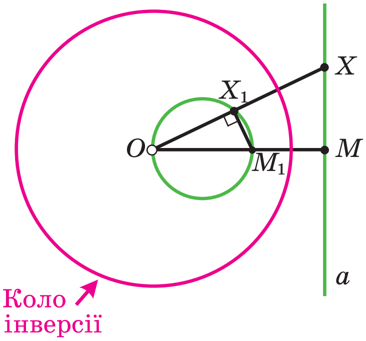


Рис. 24.38

Нехай $I_O^R(M) = M_1$, тобто $OM_1 \cdot OM = R^2$. На відрізку OM_1 як на діаметрі побудуємо коло. Покажемо, що образ будь-якої точки прямої a лежить на цьому колі.

Нехай X — довільна точка прямої a, відмінна від точки M. Якщо $X_1 = I_O^R(X)$, то $OX_1 \cdot OX = R^2$. Маємо: $OM_1 \cdot OM = OX_1 \cdot OX$.

---

[1] Тут під прямою ми розуміємо пряму з виколотою точкою (центром інверсії).

[2] Тут під колом ми розуміємо коло з виколотою точкою (центром інверсії).

Тоді $\dfrac{OM}{OX} = \dfrac{OX_1}{OM_1}$. Отже, трикутники OX_1M_1 і OMX подібні за другою ознакою подібності трикутників. Звідси $\angle OX_1M_1 = \angle OMX = 90°$. Це означає, що точка X_1 лежить на колі з діаметром OM_1.

Нескладно показати (зробіть це самостійно), що кожна точка цього кола (крім точки O) є образом деякої точки прямої a. ◀

Властивість 6. *Образом кола, яке проходить через центр інверсії, є пряма, яка не проходить через центр інверсії.*

Доведіть цю властивість самостійно.

Властивість 7. *Образом кола, яке не проходить через центр інверсії, є коло, яке не проходить через центр інверсії.*

Доведення. Проведемо через точку O — центр інверсії — пряму AB, яка містить діаметр AB даного кола (рис. 24.39). Нехай $I_O^R(A) = A_1$, $I_O^R(B) = B_1$. Виберемо на даному колі довільну точку X, відмінну від точок A і B. Тоді $\angle AXB = 90°$.

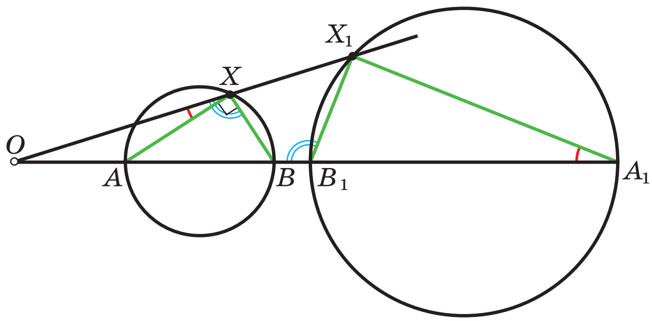


Рис. 24.39

Нехай $I_O^R(X) = X_1$. Маємо: $OA_1 \cdot OA = OB_1 \cdot OB = OX_1 \cdot OX = R^2$. Звідси випливає, що $\Delta OXA \sim \Delta OA_1X_1$, $\Delta OXB \sim \Delta OB_1X_1$.

Тоді $\angle OXA = \angle OA_1X_1$, $\angle OXB = \angle OB_1X_1$. Маємо: $\angle A_1X_1B_1 = \angle OB_1X_1 - \angle OA_1X_1 = \angle OXB - \angle OXA = 90°$. Отже, точка X_1 належить колу з діаметром A_1B_1. Отримали, що образ будь-якої точки даного кола належить колу з діаметром A_1B_1.

Нескладно показати (зробіть це самостійно), що кожна точка кола з діаметром A_1B_1 є образом деякої точки даного кола.

Зазначимо, що ми розглянули випадок, коли центр інверсії лежить поза даним колом. Другий випадок розгляньте самостійно. ◀

Властивість 8. *Якщо* $I_O^R(A) = A_1$, $I_O^R(B) = B_1$, *то* $A_1B_1 = \dfrac{AB \cdot R^2}{OA \cdot OB}$.

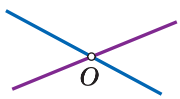
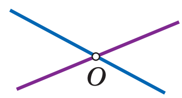
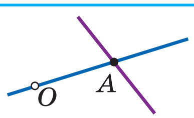
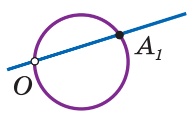
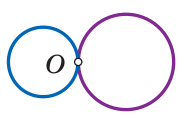
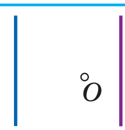
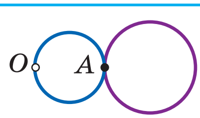
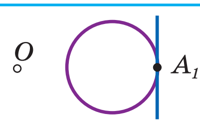
Доведіть цю властивість самостійно.

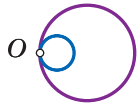
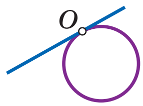
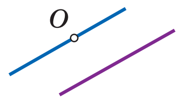
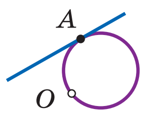
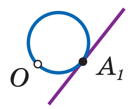
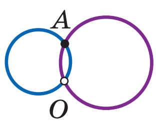
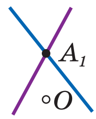
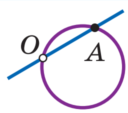
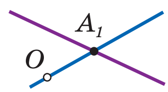
Вивчаючи матеріал цього параграфа, ви переконалися, що застосування руху та гомотетії є ефективним засобом для розв’язування багатьох задач. Інверсія розширює коло задач, які можна розв’язати за допомогою перетворень фігури.

Наприклад, інверсія дає змогу за допомогою лише циркуля знайти середину даного відрізка. Також за допомогою інверсії можна розв’язати одну зі складних задач стародавніх часів — задачу Аполлонія: побудувати за допомогою циркуля та лінійки коло, яке дотикається до трьох даних кіл. Розв’язати ці задачі ви можете на заняттях математичного гуртка.

Ви знаєте, що застосування методу координат починається з вибору системи координат. Аналогічно, перший крок у розв’язуванні задач за допомогою інверсії — це вигідний вибір центра інверсії. Наприклад, якщо два кола дотикаються, то, вибравши за центр інверсії точку дотику, ми отримаємо, що образом даних кіл є дві паралельні прямі.

У таблиці наведено приклади фігур та їхніх образів при інверсії із центром у точці O (образ показано схематично, точка A_1 — образ точки A).

Фігура	Образ фігури
	
	
	
	

Фігура	Образ фігури
	
	
	
	
	

Покажемо, як за допомогою інверсії довести відому вам **теорему Птолемея**[1]: *у вписаному чотирикутнику добуток діагоналей дорівнює сумі добутків протилежних сторін*.

На рисунку 24.40 зображено чотирикутник $ABCD$, навколо якого описано коло.

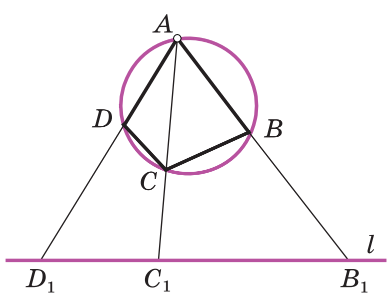


Рис. 24.40

[1] З іншим способом доведення цієї теореми ви ознайомились у 8 класі.

Приймемо точку A за центр інверсії, а радіус інверсії R виберемо довільно. Тоді образом описаного кола є деяка пряма l.

Нехай $I_O^R(D) = D_1$, $I_O^R(B) = B_1$, $I_O^R(C) = C_1$.

Оскільки точки B, C і D лежать на описаному колі, то їхні образи, точки B_1, C_1 і D_1, лежать на образі цього кола — прямій l.

За властивістю 8 можна записати: $D_1B_1 = \frac{DB \cdot R^2}{AD \cdot AB}$, $D_1C_1 = \frac{DC \cdot R^2}{AD \cdot AC}$, $C_1B_1 = \frac{CB \cdot R^2}{AC \cdot AB}$, де R — радіус інверсії.

Маємо: $D_1B_1 = D_1C_1 + C_1B_1$. Тоді $\frac{DB \cdot R^2}{AD \cdot AB} = \frac{DC \cdot R^2}{AD \cdot AC} + \frac{CB \cdot R^2}{AC \cdot AB}$. Звідси $DB \cdot AC = DC \cdot AB + CB \cdot AD$. ◀

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 6

Рух (переміщення)

Перетворення фігури F, яке зберігає відстань між точками, називають рухом (переміщенням) фігури F.

Властивості руху

При русі фігури F образами будь-яких її трьох точок, які лежать на одній прямій, є три точки, які лежать на одній прямій, а образами трьох точок, які не лежать на одній прямій, є три точки, які не лежать на одній прямій.

При русі відрізка, променя, прямої, кута образами є відповідно відрізок, промінь, пряма, кут.

Якщо f — рух, при якому образом кута ABC є кут $A_1B_1C_1$, то $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Якщо f — рух, при якому образом трикутника ABC є трикутник $A_1B_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Якщо f і g — рухи, то композиція цих перетворень також є рухом.

Оборотне перетворення фігури

Оборотним перетворенням фігури називають таке перетворення, при якому різним точкам фігури відповідають різні образи.

Рух є оборотним перетворенням. Перетворення, обернене до руху, також є рухом.

Рівні фігури

Дві фігури називають рівними, якщо існує рух, при якому одна з даних фігур є образом другої.

Паралельне перенесення

Якщо точки X і X_1 є такими, що $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$, то говорять, що точка X_1 — це образ точки X при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}$.

Властивості паралельного перенесення

Паралельне перенесення є рухом.

Якщо фігура F_1 — образ фігури F при паралельному перенесенні, то $F_1 = F$.

Осьова симетрія

Точки A і A_1 називають симетричними відносно прямої l, якщо пряма l є серединним перпендикуляром відрізка AA_1. Якщо точка A належить прямій l, то її вважають симетричною самій собі відносно прямої l.

Властивості осьової симетрії

Осьова симетрія є рухом.
Якщо фігури F і F_1 симетричні відносно прямої, то $F = F_1$.
Композиція двох осьових симетрій з паралельними осями є паралельним перенесенням.
Будь-який рух фігури є композицією не більше ніж трьох осьових симетрій.

Фігура, яка має вісь симетрії

Фігуру називають симетричною відносно прямої l, якщо $S_l(F) = F$. Пряму l називають віссю симетрії фігури.
Якщо фігура має рівно дві осі симетрії, то ці осі перпендикулярні.
Якщо многокутник має дві або більше осей симетрії, то всі вони перетинаються в одній точці.

Центральна симетрія

Точки A і A_1 називають симетричними відносно точки O, якщо точка O є серединою відрізка AA_1. Точку O вважають симетричною самій собі.

Властивості центральної симетрії

Центральна симетрія є рухом.
Якщо фігури F і F_1 симетричні відносно точки, то $F = F_1$.

Фігура, яка має центр симетрії

Фігуру називають симетричною відносно точки O, якщо $S_O(F) = F$. Точку O називають центром симетрії фігури.

Властивості повороту

Поворот є рухом.
Якщо фігура F_1 — образ фігури F при повороті, то $F_1 = F$.
Композицією двох осьових симетрій з непаралельними осями є поворот навколо точки перетину осей.

Гомотетія

Якщо точки O, X і X_1 є такими, що $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, де $k \neq 0$, то говорять, що точка X_1 — це образ точки X при гомотетії із центром O та коефіцієнтом k.

Властивості гомотетії

При гомотетії фігури F із коефіцієнтом k усі відстані між її точками змінюються в $|k|$ разів, тобто якщо A і B — довільні точки фігури F, а точки A_1 і B_1 — їхні відповідні образи при гомотетії з коефіцієнтом k, то $A_1B_1 = |k|\,AB$.

При гомотетії фігури F образами будь-яких її трьох точок, які лежать на одній прямій, є три точки, які лежать на одній прямій, а образами трьох точок, які не лежать на одній прямій, є три точки, які не лежать на одній прямій.

При гомотетії відрізка, променя, прямої образами є відповідно відрізок, промінь, пряма. При гомотетії кута образом є кут, рівний даному. При гомотетії трикутника образом є трикутник, подібний даному.

Подібність

Дві фігури називають подібними, якщо одну з них можна отримати з другої в результаті композиції двох перетворень: гомотетії та руху.

Площі подібних многокутників

Відношення площ подібних многокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ §7

Під час вивчення цього параграфа ви дізнаєтеся, як можна однозначно задати площину, яким може бути взаємне розміщення в просторі двох прямих, прямої та площини, двох площин.

Ви отримаєте початкові відомості про піраміду, паралелепіпед, призму, сферу, кулю, циліндр, конус, їхні елементи та найпростіші властивості.

Ви вивчите формули для обчислення об’ємів і площ поверхонь прямої призми, циліндра, конуса, кулі, об’єму піраміди.

25. Прямі й площини в просторі

Ви завершили вивчення курсу планіметрії — розділу геометрії, який вивчає властивості фігур, розміщених в одній площині. Проте більшість оточуючих нас об’єктів не є плоскими. Розділ геометрії, який вивчає властивості фігур у **просторі**, називають **стереометрією** («стереос» у перекладі з грецької — «просторовий»).

Курс стереометрії ви вивчатимете в 10–11 класах. Зараз ви ознайомитеся з початковими відомостями цього розділу геометрії.

У стереометрії поряд з точками та прямими розглядають **площини**. Наочне уявлення про площину дають поверхня водойми в безвітряну погоду, поверхня дзеркала, поверхня полірованого стола, подумки продовжені в усіх напрямах. Із цією фігурою ви ознайомилися в 5 класі.

Зрозуміло, що всю площину, як і пряму, зобразити неможливо. На рисунках зображають тільки частину площини, найчастіше у вигляді паралелограма (рис. 25.1). Як правило, площини позначають буквами грецького алфавіту: α, β, γ... .

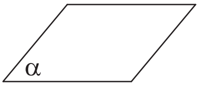
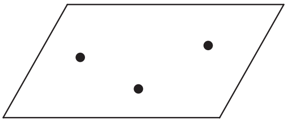
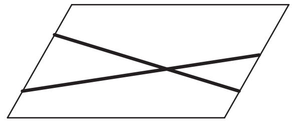
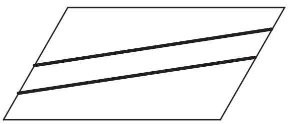
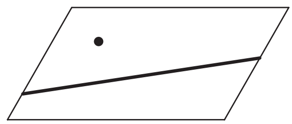


Рис. 25.1

Ви знаєте, що пряма однозначно задається будь-якими двома своїми точками. Наведені твердження вказують, як однозначно задати площину:

Через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну 	Через дві прямі, які перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну 
Через дві паралельні прямі можна провести площину, і до того ж тільки одну 	Через пряму і точку, яка їй не належить, можна провести площину, і до того ж тільки одну 

Те, що через три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну, дозволяє позначати площину будь-якими трьома її точками, які не лежать на одній прямій. Так, на рисунку 25.2 зображено площину ABC.

На рисунку 25.3 зображено пряму a, яка **перетинає** площину α в точці A.

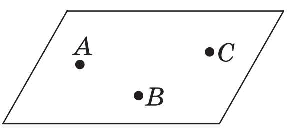


Рис. 25.2

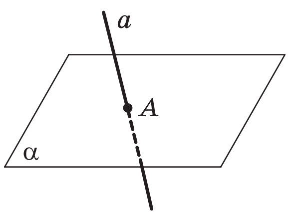


Рис. 25.3

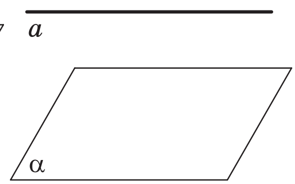


Рис. 25.4

Якщо пряма a і площина α не мають спільних точок, то їх називають **паралельними** (рис. 25.4). Пишуть: $a \parallel \alpha$.

Пряма a може належати площині α (рис. 25.5), причому справедливим є таке твердження: *якщо дві точки прямої належать площині, то вся пряма належить цій площині*.

На рисунку 25.6 зображено пряму a, яка перетинає площину α в точці A так, що вона перпендикулярна до будь-якої прямої, яка належить площині та проходить через точку A. Говорять, що пряма a **перпендикулярна** до площини α, і записують: $a \perp \alpha$.

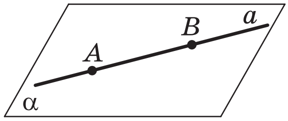


Рис. 25.5

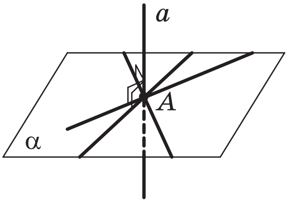


Рис. 25.6

Рис. 25.7

Уявлення про пряму, перпендикулярну до площини, дає вертикально встановлена щогла (рис. 25.7).

Нехай пряма a, яка перпендикулярна до площини α, перетинає її в точці A. Виберемо на прямій a точку B (рис. 25.8). Відрізок BA називають **перпендикуляром**, опущеним із точки B на площину α.

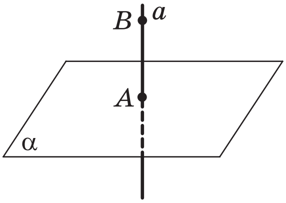


Рис. 25.8

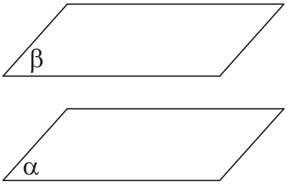


Рис. 25.9

Якщо площини α і β не мають спільних точок, то їх називають **паралельними** (рис. 25.9). Пишуть: $\alpha \parallel \beta$.

На рисунку 25.10 площини α і β перетинаються. Перетином цих площин є пряма a.

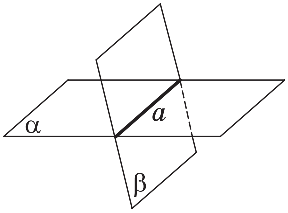


Рис. 25.10

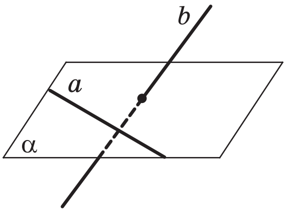


Рис. 25.11

Із курсу планіметрії ви знаєте, що дві прямі на площині перетинаються або паралельні. У просторі можливий і третій випадок розміщення двох прямих. На рисунку 25.11 зображено прямі a і b, які не перетинаються та не лежать в одній площині. Такі прямі називають **мимобіжними**.

1. Як називають розділ геометрії, який вивчає властивості фігур у просторі?
2. Які є способи позначення площин?
3. Як можна однозначно задати площину?
4. Які можливі випадки взаємного розміщення прямої та площини?
5. У якому випадку пряму та площину називають паралельними?
6. Поясніть, який відрізок називають перпендикуляром, опущеним із точки на площину.
7. Які площини називають паралельними?
8. Яка геометрична фігура є перетином двох площин?
9. Які можливі випадки взаємного розміщення в просторі двох прямих?
10. Які дві прямі називають мимобіжними?

ВПРАВИ

25.1.° Скільки площин можна провести через дві точки:
1) одну; 2) дві; 3) безліч; 4) жодної?

25.2.° Скільки площин можна провести через три точки:
1) одну; 3) одну або безліч;
2) безліч; 4) одну або жодної?

25.3.° Скільки площин можна провести через дві прямі:
1) одну; 3) одну або жодної;
2) безліч; 4) одну або безліч?

25.4.° Скільки площин можна провести через одну пряму:
1) одну; 3) жодної;
2) безліч; 4) безліч або жодної?

25.5.° Через три точки проведено дві площини. Як розміщені ці точки?

25.6.° Точка A не належить площині α. Скільки існує прямих, які проходять через точку A та паралельні площині α:
1) одна; 2) дві; 3) безліч; 4) жодної?

25.7.° Чи є правильним твердження:
1) якщо пряма a перпендикулярна до прямої b, яка лежить у площині α, то $a \perp \alpha$;
2) якщо пряма a не перпендикулярна до площини α, то вона не перпендикулярна до жодної прямої цієї площини?

25.8.° Із точки A опущено перпендикуляр AB на площину α, точка C належить площині α. Знайдіть:
1) відрізок AB, якщо $AC = 13$ см, $BC = 5$ см;
2) відрізок AC, якщо $AB = 4\sqrt{3}$ см, $\angle ACB = 60°$.

25.9.° Із точки M опущено перпендикуляр MK на площину β, точка P належить площині β. Знайдіть:
1) відрізок MP, якщо $MK = 8$ см, $KP = 6$ см;
2) відрізок MK, якщо $MP = 10$ см, $\angle MPK = 45°$.

25.10.° Чи можуть дві площини мати тільки одну спільну точку?

25.11.° Чи можуть три площини мати тільки одну спільну точку? Відповідь проілюструйте, навівши приклад з навколишнього середовища.

25.12.° Пряма a та площина α паралельні. Скільки площин, які паралельні площині α, можна провести через пряму a:
1) одну; 2) дві; 3) безліч; 4) жодної?

25.13.° Пряма перетинає одну з двох паралельних площин. Яке взаємне розміщення даної прямої та другої з площин?

25.14.° Відомо, що пряма a паралельна кожній із площин α і β. Яким може бути взаємне розміщення площин α і β?

25.15.° Точка A лежить поза площиною α, точки B, C і D належать площині α (рис. 25.12). Укажіть лінію перетину:
1) площин ABC і ACD;
2) площин α і ABC.

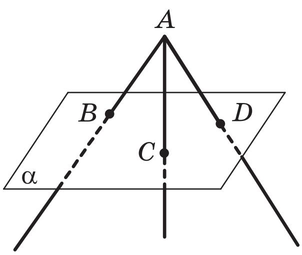


Рис. 25.12

25.16.° Точка A лежить поза площиною α, точки B, C і D належать площині α (рис. 25.12). Укажіть лінію перетину:
1) площин ACD і ABD; 2) площин α і ACD.

25.17.° На рисунку 25.13 укажіть зображення:
1) прямих, які перетинаються; 3) мимобіжних прямих.
2) паралельних прямих;

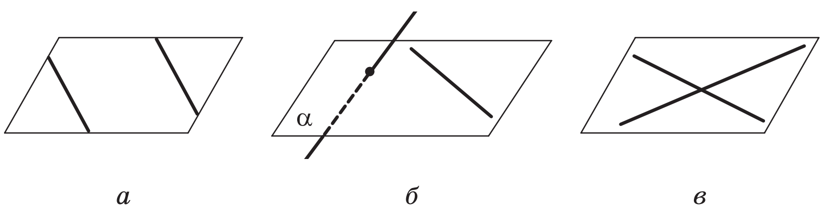


Рис. 25.13

25.18.° Пряма a перетинає сторону AC трикутника ABC. Яке взаємне розміщення прямих a і AB, якщо пряма a не лежить у площині ABC?

25.19.° Пряма m паралельна стороні DE трикутника DEF. Яке взаємне розміщення прямих m і EF, якщо пряма m не лежить у площині DEF?

25.20.° Чи є правильним твердження:

1) якщо пряма a паралельна прямій b, яка лежить у площині α, то пряма a паралельна площині α;
2) якщо пряма a не паралельна прямій b, яка лежить у площині α, то пряма a не паралельна площині α;
3) якщо пряма a перетинає площину β, а пряма b належить площині β, то пряма a перетинає пряму b;
4) якщо дві прямі не мають спільних точок, то вони паралельні;
5) якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу пряму;
6) якщо пряма паралельна площині, то вона паралельна будь-якій прямій цієї площини;
7) якщо дві площини паралельні одній і тій самій прямій, то ці площини паралельні;
8) якщо прямі a і b не перетинаються, то вони не лежать в одній площині?

25.21.• Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Яке взаємне розміщення прямих AB і CD?

25.22.• Точка K лежить поза площиною трикутника DEF. Яке взаємне розміщення прямих DK і EF?

25.23.• Із точки A опущено перпендикуляр AB на площину α, точки C і D належать площині α, $AD = 10\sqrt{3}$ см, $\angle ADB = 60°$, $\angle ACB = 45°$. Знайдіть відрізок AC.

25.24.• Із точки B опущено перпендикуляр BM на площину β, точки A і C належать площині β, $BC = 17$ см, $MC = 8$ см, $\angle BAM = 30°$. Знайдіть відрізок AM.

25.25.• Із точки A опущено перпендикуляр AD на площину α, точки B і C належать площині α, $AB = 25$ см, $AC = 17$ см, $BD : DC = 5 : 2$. Знайдіть довжину перпендикуляра AD.

25.26.• Із точки B опущено перпендикуляр BO на площину γ, точки A і C належать площині γ, $AB = 12$ см, $BC = 30$ см, $AO : OC = 10 : 17$. Знайдіть відрізок AO.

25.27.•• Із точки A опущено перпендикуляр AD на площину α, точки B і C належать площині α. Знайдіть відстань між точками B і C, якщо $AD = 6$ см, $\angle ABD = 45°$, $\angle ACD = 60°$, $\angle BDC = 150°$.

25.28.•• Із точки M опущено перпендикуляр MB на площину β, точки A і C належать площині β, $MC = 4\sqrt{3}$ см, $\angle MCB = 30°$, $\angle MAB = 45°$, $\angle ABC = 135°$. Знайдіть відстань між точками A і C.

26. Пряма призма. Піраміда

У стереометрії, крім точок, прямих і площин, розглядають **геометричні тіла**. Прикладами тіл є **многогранники** (рис. 26.1). **Поверхня** многогранника складається з многокутників. Їх називають **гранями многогранника**. Сторони многокутників називають **ребрами многогранника**, а вершини — **вершинами многогранника**.

Рис. 26.1

У 5 класі ви ознайомилися з одним із видів многогранника — **прямокутним паралелепіпедом** і його окремим видом — **кубом**. На рисунку 26.2 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

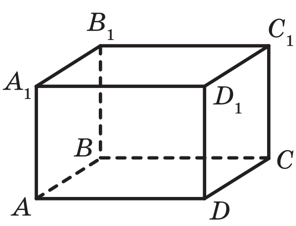


Рис. 26.2

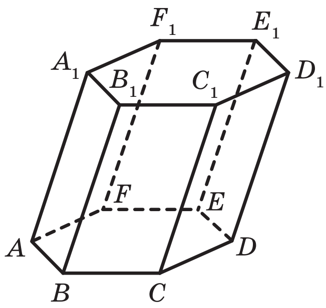


Рис. 26.3

Прямокутний паралелепіпед є окремим видом многогранника, який називають **призмою**.

Многогранник, зображений на рисунку 26.3, є **шестикутною призмою**. Дві його грані $ABCDEF$ і $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — рівні шестикутники, які лежать у паралельних площинах. Їх називають **основами призми**. Усі інші шість граней — це паралелограми. Їх називають **бічними гранями призми**.

Ребра призми, які належать основам, називають **ребрами основ призми**, а всі інші ребра — **бічними ребрами призми**. Усі бічні ребра призми паралельні й рівні.

Названі елементи призми вказано на рисунку 26.4.

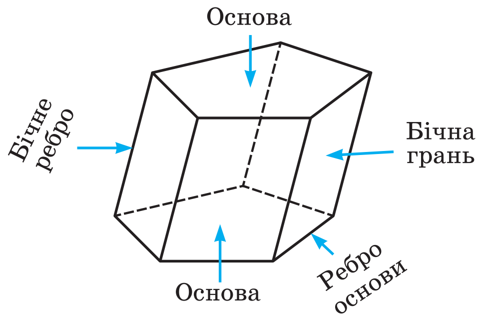


Рис. 26.4

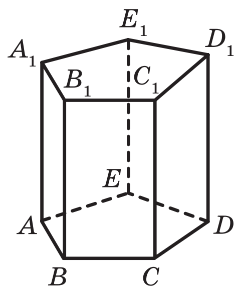


Рис. 26.5

Аналогічно можна говорити про n-кутну призму.

Якщо бічні ребра призми перпендикулярні до площини основи, то призму називають **прямою**. На рисунку 26.5 зображено пряму п'ятикутну призму. Бічні грані прямої призми є прямокутниками.

Прямокутний паралелепіпед — це окремий вид прямої призми.

Площа бічної поверхні призми — це сума площ усіх її бічних граней.

Теорема 26.1. ***Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та довжини бічного ребра.***

Доведення. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — довжини сторін основи прямої призми, h — довжина бічного ребра, $P_{осн}$ — периметр основи, $S_б$ — площа бічної поверхні. Оскільки бічні грані прямої призми — прямокутники, то:

$$S_б = a_1h + a_2h + \ldots + a_nh = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\,h = P_{осн} \cdot h. \blacktriangleleft$$

Площа поверхні призми — це сума площ усіх її граней.

Позначивши площу основи $S_{осн}$, можна записати очевидну формулу для знаходження площі $S_п$ поверхні призми:

$$S_п = S_б + 2S_{осн}.$$

Кожне геометричне тіло має певний об'єм. З такою величиною, як об'єм, ви часто стикаєтесь у повсякденному житті: об'єм пакета соку, об'єм скляної банки, показники споживання води або палива на лічильниках тощо.

Досвід підказує, що однакові посудини мають однакові об'єми; об'єм посудини, яка складається з кількох частин, дорівнює сумі об'ємів цих частин.

Ці приклади ілюструють такі властивості об'єму фігури:

1) *рівні фігури мають рівні об'єми;*

2) *об'єм фігури дорівнює сумі об'ємів фігур, з яких вона складається.*

Як і у випадках з іншими величинами (довжина, площа), потрібно ввести одиницю виміру об'єму.

За одиницю виміру об'єму приймають куб, ребро якого дорівнює одиничному відрізку. Такий куб називають **одиничним**.

Об'єм V прямої призми обчислюють за формулою

$$\boxed{V = S_{\text{осн}} \cdot h,}$$

де $S_{\text{осн}}$ — площа основи призми, h — довжина бічного ребра.

Цю формулу буде доведено в курсі стереометрії.

На рисунку 26.6 зображено многогранник, одна грань якого — многокутник, а решта — трикутники, які мають спільну вершину. Такий многогранник називають **пірамідою**. Спільну вершину трикутників називають **вершиною піраміди**. Грань, яка не містить вершину піраміди, називають **основою піраміди**, решту граней — **бічними гранями піраміди**.

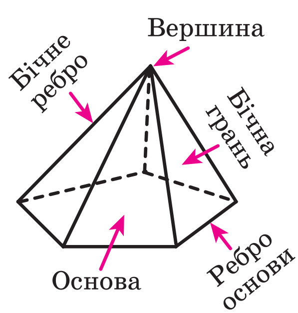


Рис. 26.6

Ребра, які належать основі, називають **ребрами основи піраміди**, решту ребер — **бічними ребрами піраміди**.

На рисунку 26.7 зображено трикутну піраміду $SABC$ і чотирикутну піраміду $SABCD$.

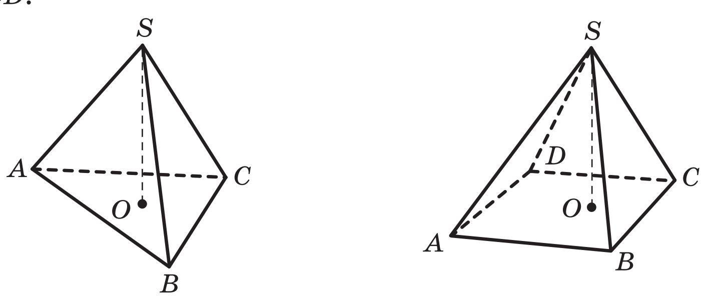


Рис. 26.7

Площа поверхні піраміди — це сума площ усіх її граней.

Перпендикуляр, опущений із вершини піраміди на площину основи, називають **висотою** піраміди. На рисунку 26.7 відрізок SO — висота піраміди.

Об'єм V піраміди обчислюють за формулою

$$\boxed{V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h,}$$

де $S_{\text{осн}}$ — площа основи піраміди, h — довжина висоти піраміди.

Цю формулу буде доведено в курсі стереометрії.

Зв'язок між окремими видами многогранників ілюструє схема, зображена на рисунку 26.8.

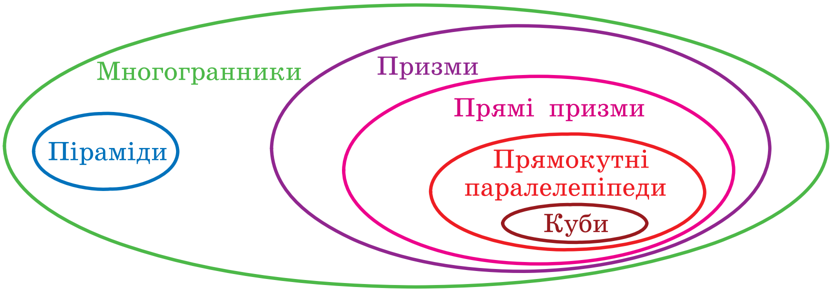


Рис. 26.8

1. З яких фігур складається поверхня многогранника?
2. Назвіть елементи многогранника.
3. Якою геометричною фігурою є бічна грань призми?
4. Яким є взаємне розміщення бічних ребер призми?
5. Якою геометричною фігурою є бічна грань прямої призми?
6. Що таке площа бічної поверхні призми?
7. Що таке площа поверхні призми?
8. Сформулюйте властивості об'єму фігури.
9. За якою формулою обчислюють об'єм прямої призми?
10. Поясніть, який многогранник називають пірамідою.
11. Назвіть елементи піраміди.
12. Що таке площа поверхні піраміди?
13. Що називають висотою піраміди?
14. За якою формулою обчислюють об'єм піраміди?

ВПРАВИ

26.1.° На рисунку 26.9 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть:

1) основи паралелепіпеда;
2) бічні грані паралелепіпеда;
3) бічні ребра паралелепіпеда;
4) ребра, які паралельні ребру AB;
5) ребра, які паралельні ребру BB_1;
6) ребра, які мимобіжні з ребром BC.

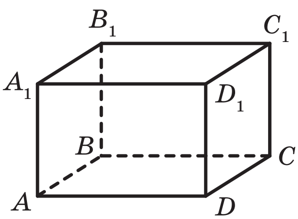


Рис. 26.9

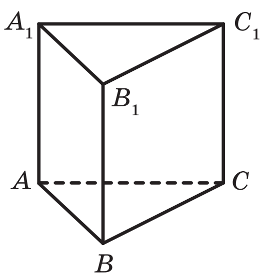


Рис. 26.10

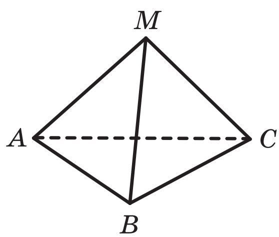


Рис. 26.11

26.2.° На рисунку 26.10 зображено пряму призму $ABCA_1B_1C_1$. Укажіть:

1) основи призми;
2) бічні грані призми;
3) бічні ребра призми;
4) ребра основи призми;
5) усі пари паралельних ребер призми.

26.3.° На рисунку 26.11 зображено піраміду $MABC$. Укажіть:

1) основу піраміди;
2) вершину піраміди;
3) бічні грані піраміди;
4) бічні ребра піраміди;
5) ребра основи піраміди.

26.4.° На рисунку 26.12 зображено піраміду $SABCD$. Укажіть:

1) основу піраміди;
2) вершину піраміди;
3) бічні грані піраміди;
4) бічні ребра піраміди;
5) ребра основи піраміди.

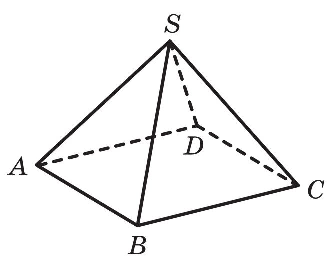


Рис. 26.12

26.5.° Знайдіть площу бічної поверхні, площу поверхні та об'єм прямої трикутної призми, основою якої є правильний трикутник зі стороною 6 см, а бічне ребро дорівнює 4 см.

26.6.° Знайдіть площу бічної поверхні, площу поверхні та об'єм прямої чотирикутної призми, основою якої є квадрат зі стороною 7 см, а бічне ребро дорівнює 6 см.

26.7.° Знайдіть площу бічної поверхні, площу поверхні та об'єм прямої призми, зображеної на рисунку 26.13 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

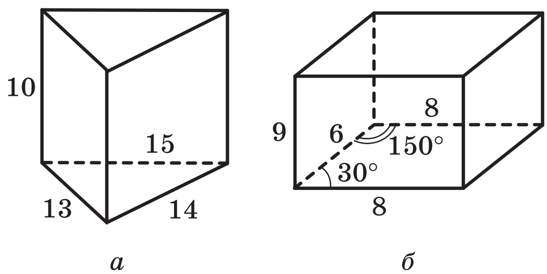


Рис. 26.13

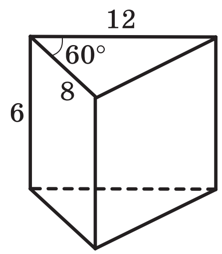


Рис. 26.14

26.8.° Знайдіть площу бічної поверхні, площу поверхні та об'єм прямої призми, зображеної на рисунку 26.14 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

26.9.° Обчисліть об'єм піраміди $MABC$ (рис. 26.15), основа якої — трикутник ABC, $BC = 4{,}8$ см, відрізок AK — висота трикутника ABC, $AK = 3{,}5$ см, відрізок MO — висота піраміди, $MO = 4{,}5$ см.

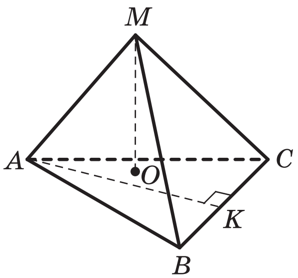


Рис. 26.15

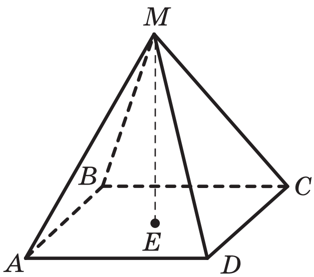


Рис. 26.16

26.10.° Обчисліть об'єм піраміди $MABCD$ (рис. 26.16), основа якої — квадрат $ABCD$ зі стороною 6 см, відрізок ME — висота піраміди, $ME = 7{,}2$ см.

26.11.° Обчисліть об'єм піраміди $AMNKP$ (рис. 26.17), основа якої — прямокутник $MNKP$, $MN = 1{,}2$ см, $NK = 2{,}6$ см, відрізок AD — висота піраміди, $AD = 2{,}5$ см.

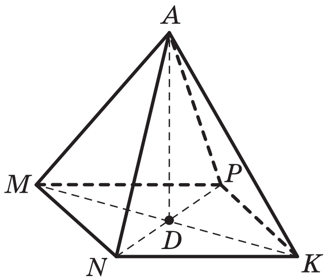


Рис. 26.17

26.12.• Основа прямої призми — прямокутний трикутник, один із катетів якого дорівнює 15 см, а гіпотенуза — 25 см. Знайдіть площу поверхні та об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 9 см.

26.13.• Основою прямої призми є рівнобічна трапеція з основами 4 см і 16 см та діагоналлю $2\sqrt{41}$ см. Знайдіть площу бічної поверхні, площу поверхні та об'єм призми, якщо її бічне ребро дорівнює 17 см.

26.14.• Класна кімната має форму прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 8,5 м, 6 м і 3,6 м. Чи можна у цій кімнаті розмістити на урок 30 учнів, якщо відповідно до санітарних норм на одного учня має припадати 6 м^3 повітря?

26.15.• Поперечний переріз чавунної труби має форму квадрата. Зовнішня ширина труби дорівнює 30 см, а товщина стінок — 5 см. Знайдіть масу погонного метра труби, якщо густина чавуну становить $7{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3.

26.16.• Поперечний переріз канави має форму рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 1 м і 0,8 м, а висота — 0,6 м. Скільки потрібно робітників, щоб за 4 год викопати таку канаву завдовжки 15 м, якщо за годину один робітник викопує 0,75 м^3 ґрунту?

26.17.• Відливок міді завдовжки 50 см має форму прямої призми, основою якої є рівнобічна трапеція, паралельні сторони якої дорівнюють 6 см і 14 см, а бічна сторона — 8,5 см. Установіть, чи є всередині відливка порожнини чи він є суцільним, якщо маса відливка дорівнює 32 кг, а густина міді — $9{,}0 \cdot 10^3$ кг/м^3.

26.18.• Основою піраміди є прямокутний трикутник із катетами 6 см і 8 см, висота піраміди дорівнює 12 см. Знайдіть об'єм піраміди.

26.19.• Основою піраміди є ромб, сторона якого дорівнює 10 см, а одна з діагоналей — 16 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 11 см.

26.20.• Основою піраміди є трикутник зі сторонами 17 см, 17 см і 16 см. Знайдіть об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 20 см.

26.21.•• Знайдіть об'єм прямої призми $ABCA_1B_1C_1$, якщо $A_1B = d$, $\angle ABA_1 = \beta$, $AB = AC$, $\angle BAC = \alpha$.

26.22.•• Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є ромб, $AB = a$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle ACA_1 = \beta$. Знайдіть площу бічної поверхні та об'єм призми.

27. Циліндр. Конус. Куля

У повсякденному житті ми часто натрапляємо на предмети, які мають форму **циліндра**: консервна банка (рис. 27.1), хокейна шайба (рис. 27.2), колони будівлі (рис. 27.3), бочка (рис. 27.4)

Рис. 27.1

Рис. 27.2

Рис. 27.3

Рис. 27.4

Циліндр можна уявити як тіло, утворене в результаті обертання прямокутника $ABCD$ навколо однієї з його сторін, наприклад сторони AB (рис. 27.5). Пряму AB називають **віссю циліндра**.

Сторони BC і AD, обертаючись, утворюють рівні круги, які називають **основами циліндра**. При обертанні сторони CD утворюється **бічна поверхня циліндра**.

Нехай при обертанні прямокутника відрізок CD зайняв положення C_1D_1 (рис. 27.5). Говорять, що відрізок C_1D_1 — образ відрізка CD.

Усі відрізки, положення яких може зайняти відрізок CD при обертанні прямокутника, називають **твірними циліндра**. Наприклад, на рисунку 27.5 відрізки CD і C_1D_1 — твірні циліндра. Усі твірні циліндра рівні й паралельні. Крім того, кожна твірна перпендикулярна до площин основ циліндра.

Якщо бічну поверхню циліндра розрізати по одній з його твірних, а потім розгорнути її на площині, то отримаємо прямокутник. Одна з його сторін дорівнює твірній, а довжина другої сторони дорівнює довжині кола, яке обмежує основу циліндра (рис. 27.6). Отриманий прямокутник називають **розгорткою бічної поверхні циліндра**.

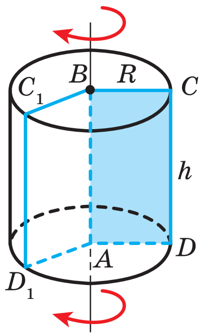


Рис. 27.5

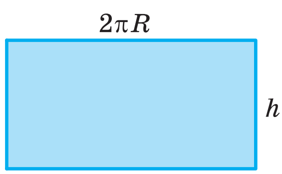


Рис. 27.6

Площа бічної поверхні циліндра $S_б$ дорівнює площі її розгортки. Маємо:

$$\boxed{S_б = 2\pi Rh,}$$

де R — радіус основи циліндра, h — довжина його твірної.

Площа $S_п$ поверхні циліндра дорівнює сумі площі бічної поверхні та площ його основ:

$$\boxed{S_п = S_б + 2S_{осн},}$$

де $S_{осн}$ — площа основи циліндра.

Об'єм V циліндра обчислюють за формулою

$$\boxed{V = \pi R^2 h,}$$

де R — радіус основи циліндра, h — довжина його твірної.

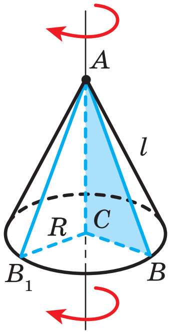


Рис. 27.7

Конус можна уявити як тіло, утворене в результаті обертання прямокутного трикутника ABC навколо одного з його катетів, наприклад катета AC (рис. 27.7).

Катет BC, обертаючись, утворює круг, який називають **основою конуса**. При обертанні гіпотенузи AB утворюється **бічна поверхня конуса**.

Нехай при обертанні трикутника гіпотенуза AB зайняла положення AB_1 (рис. 27.7). Говорять, що AB_1 — образ відрізка AB.

Усі відрізки, положення яких може зайняти відрізок AB при обертанні прямокутного трикутника, називають **твірними конуса**. Наприклад, на рисунку 27.7 відрізки AB і AB_1 — твірні конуса. Усі твірні конуса рівні.

Пряму AC називають **віссю конуса**, відрізок AC — **висотою конуса**, точку A — **вершиною конуса**. Висота конуса перпендикулярна до площини його основи.

Якщо бічну поверхню конуса розрізати по одній із його твірних, а потім розгорнути її на площині, то отримаємо сектор. Радіус цього сектора дорівнює довжині l твірної конуса, а довжина дуги, яка обмежує сектор, — довжині кола, яке обмежує основу конуса (рис. 27.8).

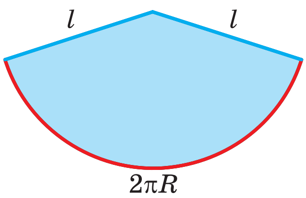


Рис. 27.8

Отриманий сектор називають **розгорткою бічної поверхні конуса**.

Площа бічної поверхні конуса $S_б$ дорівнює площі її розгортки, яку обчислюють за формулою

$$\boxed{S_б = \pi R l,}$$

де R — радіус основи конуса, l — довжина його твірної.

Площа $S_п$ поверхні конуса дорівнює сумі площі бічної поверхні та площі його основи:

$$\boxed{S_п = S_б + S_{осн},}$$

де $S_{осн}$ — площа основи конуса.

Об’єм V конуса обчислюють за формулою

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,}$$

де R — радіус основи конуса, h — довжина його висоти.

Усі точки простору, віддалені від даної точки на задану відстань R ($R > 0$), утворюють фігуру, яку називають **сферою** (рис. 27.9). Дану точку називають **центром сфери**, а число R — **радіусом сфери**. Будь-який відрізок, який сполучає центр сфери з її точкою, також називають радіусом сфери. На рисунку 27.9 точка O — центр сфери, R — радіус.

Тіло, яке є частиною простору, обмеженою сферою, разом зі сферою, називають **кулею**. Сферу, яка обмежує кулю, називають **поверхнею кулі**. Центр і радіус сфери називають також центром і радіусом кулі.

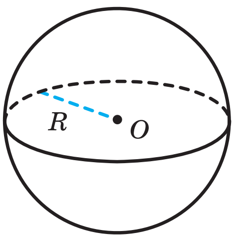


Рис. 27.9

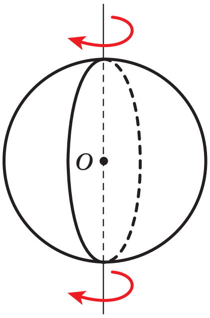


Рис. 27.10

Кулю можна уявити як тіло, отримане в результаті обертання круга навколо одного з діаметрів (рис. 27.10).

Площу S поверхні кулі, тобто площу сфери, обчислюють за формулою

$$\boxed{S = 4\pi R^2,}$$

де R — радіус кулі.

Об’єм V кулі обчислюють за формулою

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3,}$$

де R — радіус кулі.

1. Яка геометрична фігура є розгорткою бічної поверхні циліндра?
2. За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні циліндра?
3. Чому дорівнює площа поверхні циліндра?
4. За якою формулою обчислюють об’єм циліндра?

5. Яка геометрична фігура є розгорткою бічної поверхні конуса?
6. За якою формулою обчислюють площу бічної поверхні конуса?
7. Чому дорівнює площа поверхні конуса?
8. За якою формулою обчислюють об’єм конуса?
9. Яку фігуру називають сферою?
10. Яку фігуру обмежує сфера?
11. За якою формулою обчислюють площу поверхні кулі?
12. За якою формулою обчислюють об’єм кулі?

ВПРАВИ

27.1.° На рисунку 27.11 зображено циліндр. Укажіть:
1) вісь циліндра;
2) твірну циліндра;
3) радіус нижньої основи циліндра;
4) радіус верхньої основи циліндра.

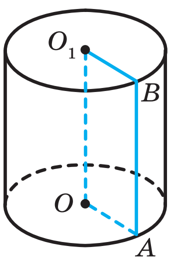


Рис. 27.11

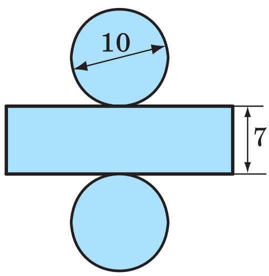


Рис. 27.12

27.2.° Радіус основи циліндра дорівнює 6 см, а його твірна — 8 см. Знайдіть площу бічної поверхні, площу поверхні та об’єм циліндра.

27.3.° Знайдіть площу бічної поверхні, площу поверхні та об’єм циліндра, розгортку якого зображено на рисунку 27.12 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

27.4.° На рисунку 27.13 зображено конус. Укажіть:
1) вершину конуса;
2) центр його основи;
3) твірну конуса;
4) радіус основи конуса;
5) висоту конуса.

27.5.° Радіус основи конуса дорівнює 4 см, а його твірна — 7 см. Знайдіть площу бічної поверхні та площу поверхні конуса.

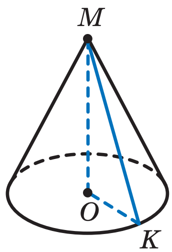


Рис. 27.13

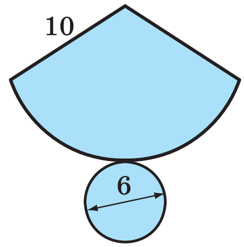


Рис. 27.14

27.6.° Знайдіть площу поверхні конуса, розгортку якого зображено на рисунку 27.14 (довжини відрізків дано в сантиметрах).

27.7.° Знайдіть об'єм конуса, висота якого дорівнює 12 см, а радіус основи — 3 см.

27.8.° Знайдіть площу поверхні та об'єм кулі, радіус якої дорівнює 3 см.

27.9.° Прямокутник, сторони якого дорівнюють 12 см і 5 см, обертається навколо більшої сторони. Знайдіть площу поверхні та об'єм циліндра, що утворився при цьому.

27.10.° Твірна циліндра дорівнює 6 см, а об'єм — 150π см^3. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

27.11.• Маса 10 м мідного дроту кругового перерізу дорівнює 106,8 г. Знайдіть діаметр дроту, якщо густина міді становить $8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

27.12.• Визначте тиск цегляної колони циліндричної форми заввишки 3 м на фундамент, якщо діаметр колони дорівнює 1,2 м, а маса 1 м^3 цегли дорівнює 1,8 т.

27.13.• Діаметр основи конуса дорівнює 16 см, а його твірна — 17 см. Знайдіть площу поверхні та об'єм конуса.

27.14.• Прямокутний трикутник із катетами 12 см і 16 см обертається навколо меншого катета. Знайдіть площу бічної поверхні та об'єм конуса, що утворився при цьому.

27.15• Зерно зсипали у купу конічної форми заввишки 1,2 м. Яка маса цієї купи, якщо радіус її основи дорівнює 2 м, а маса 1 м^3 зерна становить 750 кг?

27.16.• Рідину з повної посудини конічної форми, висота якої дорівнює 24 см, а радіус основи — 6 см, перелили в посудину циліндричної форми, радіус основи якої дорівнює 8 см, а висота — 10 см. Визначте висоту рівня води в посудині циліндричної форми.

27.17.• Стіжок сіна має форму циліндра з конічним верхом (рис. 27.15). Радіус його основи дорівнює 1,5 м, висота — 3 м, причому циліндрична частина стіжка має висоту 2,4 м. Знайдіть масу стіжка, якщо маса 1 м³ сіна становить 30 кг.

Рис. 27.15

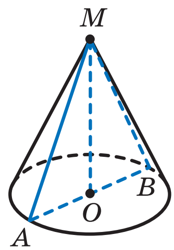


Рис. 27.16

27.18.• Як зміняться площа поверхні та об'єм кулі, якщо її радіус збільшити у 2 рази?

27.19.• Радіус однієї кулі дорівнює 3 см, а другої — 4 см. Знайдіть відношення площ поверхонь і відношення об'ємів даних куль.

27.20.• Діаметр зовнішньої сфери залізної порожнистої кулі дорівнює 12 см, а діаметр внутрішньої сфери — 10 см. Знайдіть масу кулі, якщо густина заліза дорівнює $7{,}9 \cdot 10^3$ кг/м³.

27.21.•• Відрізок AB — діаметр основи конуса (рис. 27.16), $\angle AMB = 90°$, відрізок MO — висота конуса, $MO = h$. Знайдіть площу бічної поверхні та об'єм конуса.

27.22.•• Відрізок AB — діаметр основи конуса (рис. 27.16), $\angle AMB = 60°$, точка O — центр основи конуса, $OA = R$. Знайдіть площу бічної поверхні та об'єм конуса.

27.23.•• Сторони прямокутника дорівнюють a і b, $a > b$. Він обертається спочатку навколо сторони a, потім — навколо сторони b. Порівняйте площі бічних поверхонь і об'єми циліндрів, які при цьому утворилися.

ГОЛОВНЕ В ПАРАГРАФІ 7

Площа бічної поверхні призми

Площа бічної поверхні призми — це сума площ усіх її бічних граней.
Площа бічної поверхні прямої призми дорівнює добутку периметра її основи та довжини бічного ребра.

Площа поверхні призми

Площа поверхні призми — це сума площ усіх її граней.

$$S_{п} = S_{б} + 2S_{осн}.$$

Об'єм прямої призми

$$V = S_{осн} \cdot h,$$

де $S_{осн}$ — площа основи призми, h — довжина бічного ребра.

Об'єм піраміди

$$V = \frac{1}{3}S_{осн} \cdot h,$$

де $S_{осн}$ — площа основи піраміди, h — довжина висоти піраміди.

Площа бічної поверхні циліндра

$$S_{б} = 2\pi Rh,$$

де R — радіус основи циліндра, h — довжина його твірної.

Площа поверхні циліндра

Площа $S_{п}$ поверхні циліндра дорівнює сумі площі бічної поверхні та площ його основ:

$$S_{п} = S_{б} + 2S_{осн}.$$

Об'єм циліндра

$$V = \pi R^2 h,$$

де R — радіус основи циліндра, h — довжина його твірної.

Площа бічної поверхні конуса

$$S_{б} = \pi Rl,$$

де R — радіус основи конуса, l — довжина його твірної.

Площа поверхні конуса

Площа $S_п$ поверхні конуса дорівнює сумі площі бічної поверхні та площі його основи:

$$S_п = S_б + S_{осн}.$$

Об'єм конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

де R — радіус основи конуса, h — довжина його висоти.

Площа сфери

$$S = 4\pi R^2,$$

де R — радіус сфери.

Об'єм кулі

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

де R — радіус кулі.

Дружимо з комп'ютером

Ви продовжите вдосконалювати навички користування комп'ютером, що їх набули в 7 і 8 класах, опановувати нові інструменти та нові програмні засоби. Нагадаємо, що, крім завдань, наведених у цьому розділі, ви можете використовувати різноманітні програми, створені для вивчення шкільного курсу геометрії. Ви можете звертатися до глобальної мережі Інтернет для пошуку таких програм та іншої додаткової інформації до курсу геометрії.

У підручнику наведено стислі історичні відомості про знаменитих учених, праці яких пов'язані з темами, що вивчаються. За допомогою глобальної мережі Інтернет ви можете отримати більше інформації про їхні біографії та наукові відкриття.

Якщо ви плануєте вибрати професію, що потребує постійно використовувати знання з математики, то можна почати опановувати математичні пакети (наприклад, *Mathcad*, *MATLAB* і т. п.), які містять потужний інструментарій для математичних обчислень, геометричних побудов тощо. Для майбутнього інженера необхідними є знання інженерної графіки та вміння будувати складні креслення (набути цих знань можна, наприклад, користуючись пакетом *AutoCad*). Ви можете опановувати ці програмні засоби, виконуючи завдання до курсу геометрії.

У цьому розділі наведено завдання, які ви можете виконувати за допомогою комп'ютера в міру вивчення відповідних тем. Переважно це завдання на побудову геометричних фігур, які ви виконуватимете за допомогою графічного редактора, та обчислення, які ви можете виконувати за допомогою калькулятора або математичних пакетів.

Крім цих завдань, ви можете виконувати завдання з рубрики «Практичні завдання» та ілюструвати розв'язування задач не лише в зошиті, а й за допомогою графічного редактора.

Значна частина курсу геометрії 9 класу присвячена декартовим координатам на площині, рівнянням деяких фігур. Залежно від можливостей мови програмування, яку ви вивчаєте на уроках інформатики або самостійно, рекомендуємо написати програми для зображення на екрані комп'ютера точок із заданими координатами; прямих і кіл із заданими рівняннями тощо. Ці завдання можна виконувати на уроках інформатики або під час позакласної роботи із самостійного вивчення програмування. Нижче наведено найпростіші завдання; узявши їх за ідеї, ви можете самостійно придумувати нові завдання та створювати програми для їх виконання.

Синус, косинус, тангенс і котангенс кута від 0° до 180°

1. Навчіться обчислювати тригонометричні функції кута, а також знаходити величину кута за значеннями його тригонометричних функцій за допомогою калькулятора.

Теорема косинусів

2. Проілюструйте наслідок з теореми косинусів за допомогою графічного редактора таким чином.

Виберіть набір додатних чисел a, b і c, які задовольняють умову $a^2 < b^2 + c^2$, де a — найбільше число з вибраних. Побудуйте набір відрізків із заданими довжинами a, b і c. Складіть із цих відрізків трикутник. Чи виявився він гострокутним? Виконайте такі самі дії для умов $a^2 > b^2 + c^2$ і $a^2 = b^2 + c^2$. Числа a, b і c мають задовольняти умову $a < b + c$.

Теорема синусів

3. Зобразіть довільний трикутник, виміряйте за допомогою засобів графічного редактора його сторони та кути. Перевірте, чи виконується теорема синусів. Обчислення проводьте також за допомогою комп’ютера.

Розв’язування трикутників. Формули для знаходження площі трикутника

4. Завдання пп. 5, 6, які потребують знаходження значень тригонометричних функцій і проведення значного обсягу обчислень, виконуйте за допомогою комп’ютера.

Правильні многокутники та їхні властивості

5. Придумайте, як будувати правильні многокутники. Розгляньте два способи: 1) використайте теорему 7.2 і формулу для обчислення величини центрального кута вписаного многокутника; 2) використайте інформацію про величину кута правильного многокутника та довжину його сторони.
6. Побудуйте кілька правильних многокутників із заданою кількістю сторін.

Довжина кола. Площа круга

7. Обчисліть кілька разів довжину кола та площу круга, використовуючи наближення числа π з різною точністю.
8. Чи є в калькуляторі або математичному пакеті, яким ви користуєтеся, засоби для використання стандартного значення числа π? З якою точністю подають число π ці засоби?

Відстань між двома точками із заданими координатами. Поділ відрізка в заданому відношенні

9. Більшість графічних редакторів подають поле для креслення у вигляді координатної площини. Дослідіть, яким чином задаються координати точок на цій площині. Продумайте, як ви можете використовувати цей інструментарій для виконання побудов.

Рівняння фігури

10. Якщо ви вивчаєте математичні пакети, то можете їхніми засобами побудувати кілька довільних фігур із заданими рівняннями.
11. Вивчаючи програмування на уроках інформатики, ви можете створити свої засоби для зображення на екрані комп'ютера фігур за заданим рівнянням.
12. Знайдіть у глобальній мережі Інтернет інформацію про пристрої для автоматизації креслярських робіт (так звані плотери, англ. *plotter*). Чим схожі та чим відрізняються принципи побудови зображень на екрані комп'ютера й на папері плотера? Ознайомтеся з поняттям «черепашача графіка».

Загальне рівняння прямої

13. Напишіть програму, яка за заданими значеннями величин a, b і c робить висновок, яка фігура є графіком рівняння $ax + by = c$, виводить повідомлення про це та зображає цей графік на екрані комп'ютера.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки

14. Які засоби графічного редактора можна використати, щоби побудувати пряму із заданим кутовим коефіцієнтом?
15. Напишіть програму, яка за заданими значеннями величин k і b будує зображення прямої $y = kx + b$ на екрані комп'ютера.

Поняття вектора

16. Зобразіть за допомогою графічного редактора кілька векторів, які ілюструють зміст п. 14 підручника. Який інструмент ви використаєте для побудови колінеарних векторів? співнапрямлених векторів? протилежно напрямлених векторів? Визначте модулі побудованих векторів. Як це зробити найпростіше?

Координати вектора

17. Зобразіть на екрані комп’ютера декартову систему координат, виберіть зручний одиничний відрізок. Задайте координати вектора та координати деякої точки. Відкладіть від цієї точки вектор із заданими координатами.

Додавання і віднімання векторів

18. Нарисуйте кілька довільних векторів. За допомогою якого інструмента графічного редактора найпростіше знаходити суму й різницю цих векторів?

Множення вектора на число. Застосування векторів до розв’язування задач

19. Нарисуйте довільний вектор і задайте кілька довільних чисел (натуральних, цілих, дробових). Побудуйте вектори, які є добутками нарисованого вектора та цих чисел.

Скалярний добуток векторів

20. Побудуйте на координатній площині два довільних вектори. Знайдіть величину кута між ними за допомогою наслідку з теореми 18.2. Перевірте отриманий результат, визначивши кут між цими векторами за допомогою засобів графічного редактора.

Перетворення фігур

21. Визначте, які засоби графічного редактора дають змогу виконувати переміщення фігури. Які види переміщення можна реалізувати за їхньою допомогою?
22. Знайдіть засоби графічного редактора, за допомогою яких можна побудувати: 1) фігуру, симетричну даній фігурі відносно даної прямої; 2) фігуру, симетричну даній фігурі відносно даної точки; 3) фігуру, яка є результатом повороту даної фігури навколо заданої точки; 4) фігуру, гомотетичну даній фігурі.
23. Знайдіть засоби графічного редактора, за допомогою яких можна побудувати фігуру, подібну даній довільній фігурі. Які засоби треба використати, щоб ці фігури були подібними із заданим коефіцієнтом?
24. Декартові координати — не єдиний спосіб задання фігур на площині за допомогою координат. Знайдіть у мережі Інтернет інформацію про полярні координати. Який зв’язок між декар-

товими координатами точки та її полярними координатами? Як використати полярні координати для побудови математичної моделі перетворення інверсії?

Пряма призма. Піраміда

25. Побудуйте в графічному редакторі зображення прямої та похилої призми, зображення різних пірамід. Зверніть увагу на вибір типу лінії для зображення невидимих ліній.

Циліндр. Конус. Куля

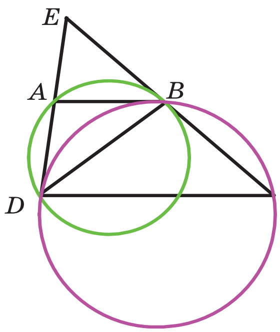
26. Побудуйте в графічному редакторі кілька зображень циліндра, змінюючи кут між твірною циліндра та напрямом зору глядача: напрям зору паралельний твірній, перпендикулярний до твірної, становить із твірною гострий кут. Виконайте це саме завдання для конуса та для кулі.

Відповіді та вказівки до вправ

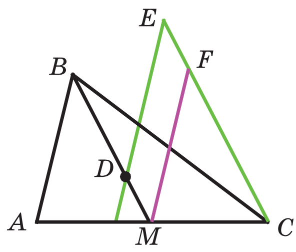
§ 1. ПОВТОРЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ З КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 8 КЛАСУ

1. Задачі на повторення навчального матеріалу з курсу геометрії 8 класу

1.6. 3 : 5. **1.21.** 126 см. **1.23.** 60°. **1.24.** 45°. **1.25.** 60° і 120°. **1.26.** $2a$. **1.40.** *Вказівка*. Доведіть, що $\Delta ABG = \Delta DBC$. **1.42.** *Вказівка*. Скористайтеся тим, що середини діагоналей і середини двох протилежних сторін чотирикутника є вершинами паралелограма, сторони якого дорівнюють половинам двох інших сторін чотирикутника. **1.43.** *Вказівка*. Нехай точка M — середина відрізка AB. Тоді $OM = \frac{1}{2}AB$, а $CM < \frac{1}{2}(CB + CA)$. **1.44.** *Вказівка*. Побудуйте паралелограми $ACBD$ і $BAKC$. **1.47.** *Вказівка*. Чотирикутники $AKLD$ і $KBCL$ вписані. Нехай F — точка перетину прямих CK і AD. Тоді $\angle CKD = \angle KFD + \angle KDF$. **1.48.** *Вказівка*. Скориставшися тим, що чотирикутник $AKHL$ вписаний, доведіть, що $\angle BKL + \angle BCL = 180°$. **1.49.** *Вказівка*. Нехай точка O — центр описаного кола трикутника BJC. Доведіть, що чотирикутник $ABOC$ вписаний. **1.51.** 60° або 120°. **1.52.** *Вказівка*. Із подібності трикутників ABD і ACB випливає, що $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$, звідки з урахуванням $AB = DC$ можна записати: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AC}$. **1.53.** *Вказівка*. Доведіть, що $EF \parallel AC$. **1.54.** $3\sqrt{5}$ см. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що промінь CL — бісектриса кута HCM. **1.55.** *Вказівка*. $AC > AB - BC = 5$ см. Нехай $AD = 3x$ см, тоді $CD = 2x$ см, де $x > 1$. Можна записати: $BD^2 = 150 - 6x^2 < 144$. **1.56.** *Вказівка*. $\Delta CBO \backsim \Delta CAB$, звідси $CO \cdot CA = CB^2$. Крім того, $\Delta CBO \backsim \Delta DBC$, і можна записати: $BO \cdot BD = CB^2$. **1.58.** *Вказівка*. І спосіб. Нехай E — точка перетину прямих DA і CB (див. рисунок). Тоді $\frac{EA}{ED} = \frac{EB}{EC}$, крім того, $EB^2 = EA \cdot ED$. Із двох отриманих рівностей випливає, що $ED^2 = EB \cdot EC$. ІІ спосіб. Розглянемо трикутники ABD і CDB. Маємо: $\angle ABD = \angle CDB$, $\angle BAD = \angle CBD$. Звідси $\angle BDA = \angle BCD$.



До задачі 1.58



До задачі 1.64

1.59. *Вказівка*. Доведіть, що чотирикутник $MBNK$ вписаний, а потім скористайтеся властивістю, оберненою до властивості кута між дотичною і хордою. **1.60.** $2R\left(\sqrt{5}-2\right)$. *Вказівка*. Скористайтеся теоремою Птолемея. **1.61.** $\frac{bd}{b+c}$, $\frac{cd}{b+c}$. *Вказівка*. Трикутники AFC і AFB рівновеликі. **1.63.** *Вказівка*. Нехай F — точка перетину прямої BE з основою AD. Тоді площа кожного із зазначених трикутників дорівнює половині площі паралелограма $BCDF$. **1.64.** *Вказівка*. Проведіть пряму MF паралельно прямій DE (див. рисунок). Доведіть, що $\Delta ABM = \Delta MFC$. **1.65.** *Вказівка*. Доведіть, що чотирикутники $BCDM$ і $ABCM$ — паралелограми. **1.66.** *Вказівка*. Побудуйте коло, яке проходить через точки C і D та дотикається до хорди AB. **1.67.** *Вказівка*. Нехай прямі MQ і PN перетинають пряму AC у точках F і F_1 відповідно. Застосувавши теорему Менелая до трикутника ACD і прямої MQ, а також до трикутника ACB і прямої PN, доведіть, що точки F і F_1 збігаються.

§ 2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

2. Синус, косинус, тангенс і котангенс кута від 0° до 180°

2.12. 2) $\frac{\sqrt{13}}{4}$ або $-\frac{\sqrt{13}}{4}$; 3) 0,6; 4) $-\frac{4}{3}$; 5) $\frac{12}{5}$. **2.13.** 1) $-\frac{12}{13}$ або $\frac{12}{13}$; 2) $\frac{\sqrt{35}}{6}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $-\frac{8}{15}$. **2.16.** 1) $2-\sqrt{3}$; 2) $-1,5$; 3) $-\sqrt{3}-2$; 4) $\frac{5}{4}$. **2.17.** 1) 1; 2) $\frac{2}{3}$. **2.24.** $-\frac{1}{2}$. **2.25.** 120°. **2.26.** У гострокутному:

$-\frac{1}{\sqrt{3}}$, у тупокутному: $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **2.27.** 45°. **2.28.** 120°. **2.29.** 60° або 120°. **2.30.** 15°, або 75°, або 105°, або 165°. **2.31.** 1. **2.32.** 1.

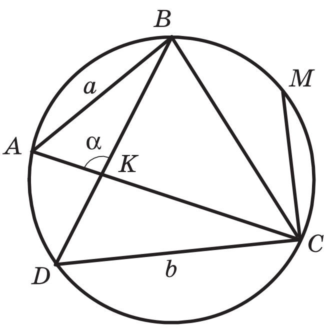
3. Теорема косинусів

3.3. 120°. **3.4.** 45°. **3.10.** $2\sqrt{7}$ см. **3.11.** $\sqrt{10}$ см. **3.12.** 13 см. **3.13.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. **3.14.** $3\sqrt{89}$ см. **3.15.** $\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$. **3.16.** $\sqrt{a^2+b^2-ab}$. **3.17.** 15 см, 24 см. **3.18.** 2 см, $4\sqrt{3}$ см. **3.19.** 3 см, 5 см. **3.20.** 10 см, 6 см, 14 см. **3.21.** 6 см або 10 см. **3.22.** 75 см. **3.26.** 14 см. **3.27.** 34 см. **3.28.** 7 см, 9 см. **3.29.** 20 см, 30 см. **3.30.** 11 см. **3.31.** 22 см. **3.32.** $\sqrt{21}$ см або $\sqrt{29}$ см. **3.33.** 13 см. **3.34.** $\sqrt{79}$ см. **3.36.** $\sqrt{\frac{247}{7}}$ см. **3.37.** Ні. **3.40.** 6 см. **3.43.** *Вказівка*. Скориставшися ключовою задачею 1 п. 3, доведіть, що $\frac{4}{9}m_a^2+\frac{4}{9}m_b^2=$ $=c^2$. **3.45.** *Вказівка*. Нехай відрізок AB — діаметр одного кола, X — точка другого кола. Якщо точка X не належить прямій AB, то розгляньте паралелограм, сторони якого — відрізки XA і XB. **3.46.** *Вказівка*. Середини сторін чотирикутника є вершинами паралелограма. **3.47.** $\sqrt{m^2+n^2+mn}$, $\sqrt{m^2+n^2-mn}$. **3.48.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+ab\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-ab\sqrt{2}}$. **3.49.** 5 см. *Вказівка*. Доведіть, що в даній трапеції середини діагоналей і основ є вершинами прямокутника. **3.50.** 8 см. *Вказівка*. Проведіть через вершину B пряму, паралельну стороні CD, і розгляньте трикутник, який при цьому утворився. **3.51.** $\frac{13}{20}$. **3.52.** 120°. *Вказівка*. Через вершину C проведіть пряму, паралельну діагоналі BD. **3.53.** $\sqrt{a^2+c^2+ac}$ або $\sqrt{a^2+c^2-ac}$. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $\Delta C_1BA_1 \backsim \Delta ABC$ із коефіцієнтом подібності, що дорівнює $|\cos B|$. **3.54.** 25 см. *Вказівка*. Використовуючи властивість бісектриси трикутника, покажіть, що $DC : CE =$ $= 5 : 1$. Застосуйте теорему косинусів до трикутника ABE. **3.55.** *Вказівка*. Доведіть, що косинус кута між діагоналями чотирикутника дорівнює 0. **3.56.** *Вказівка*. Нехай діагоналі паралелограма дорівнюють d_1 і d_2. Маємо: $b^2=\frac{d_1^2}{4}+\frac{d_2^2}{4}-\frac{d_1d_2}{2}\cos\alpha$, $a^2=\frac{d_1^2}{4}+\frac{d_2^2}{4}+\frac{d_1d_2}{2}\cos\alpha$.

Звідси $\cos\alpha = \dfrac{a^2 - b^2}{d_1 d_2}$. Скористайтеся тим, що $d_1 d_2 \leqslant \dfrac{d_1^2 + d_2^2}{2}$. **3.57.** *Вказівка*. На даному діаметрі виберіть точку M_1 таку, що $OM_1 = OM$. Нехай хорда CD паралельна діаметру. Тоді $CM^2 + DM^2 = DM^2 + DM_1^2$. **3.58.** *Вказівка*. Нехай X — довільна точка даного чотирикутника $ABCD$. Тоді один із кутів AXB, BXC, CXD, DXA не є гострим. Нехай, наприклад, $\angle AXB \geqslant 90°$. Припустивши, що $XA \geqslant 5$ і $XB \geqslant 5$, покажіть, що $AB > 7$. **3.60.** $\sqrt{2}$. *Вказівка*. Очевидно, що при $x \leqslant 0$ найменше значення не може бути досягнуто. При $x > 0$ розгляньте трикутник AOB, у якого $\angle O = 90°$, $OA = OB = 1$. Побудуйте промінь OC так, що $\angle AOC = 60°$, $\angle BOC = 30°$. Нехай M — довільна точка променя OC, відмінна від точки O. Позначимо $OM = x$. Скористайтеся тим, що $MA + MB \geqslant AB$. **3.62.** *Вказівка*. Розгляньте відрізки OA, OB і OC такі, що $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $\angle AOB = 60°$, $\angle BOC = 60°$. **3.63.** Існують. *Вказівка*. Виберіть точки A, B і C на одній прямій так, щоб $AB = \sqrt{2} - 1$, $AC = CB$.

4. Теорема синусів

4.9. $2\sqrt{6}$ см. **4.10.** 6 см. **4.11.** $\dfrac{a \sin\beta}{\cos(\beta + \gamma)\sin\gamma}$. **4.12.** $\dfrac{m \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$. **4.13.** $\dfrac{c \sin\alpha \sin(\alpha + \gamma)}{\sin\gamma \sin\varphi}$. **4.14.** $\dfrac{m \sin\alpha \sin\varphi}{\sin\beta \sin(\alpha + \beta)}$. **4.18.** *Вказівка*. Доведіть, що $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B$. **4.19.** 9 см. **4.20.** $\dfrac{25}{3}$ см. **4.21.** 60° або 120°. **4.22.** $\dfrac{b \sin\alpha \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)\cos\dfrac{\alpha - \gamma}{2}}$. **4.23.** $\dfrac{a \cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\left(45° + \dfrac{3\alpha}{4}\right)}$. **4.24.** $\dfrac{a \sin\alpha}{\sin\beta}$. *Вказівка*. Доведіть, що $CE = DE$. **4.25.** $\dfrac{2m \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$, $\dfrac{2m \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$. *Вказівка*. На продовженні медіани AM за точку M позначте точку K таку, що $AM = MK$, і застосуйте теорему синусів до трикутника ACK або трикутника ABK. **4.26.** $\dfrac{a \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin\alpha}$. **4.27.** $R \operatorname{tg} \alpha$. **4.28.** *Вказівка*. Виразіть кути AHB, BHC і AHC через кути трикутника ABC. **4.29.** $\dfrac{25}{4}$ см. *Вказівка*. Скориставшися властивістю бісектриси трикутника, знайдіть косинус кута при основі рівнобедреного трикутника. **4.32.** $2\sqrt{\frac{34}{15}}$ см. *Вказівка*. Застосувавши теорему косинусів до трикутників MNP і MQP, знайдіть косинус кута PMQ. **4.33.** $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ см. *Вказівка*. Якщо точки M_1 і M_2 — основи перпендикулярів, то навколо чотирикутника MM_1AM_2 можна описати коло. **4.34.** Коло радіуса $\frac{a}{\sin\alpha}$ із центром у точці перетину даних прямих. **4.36.** Для такої точки, що відрізок AM — діаметр кола. *Вказівка*. Точки A, N, M і K лежать на одному колі. **4.37.** 6 см. *Вказівка*. Покажіть, що $\angle BOC = 150°$. Доведіть, що відрізок OM є діаметром описаного кола трикутника BOC. **4.38.** 6 см або $2\sqrt{3}$ см. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $DC = DJ = DB$. **4.39.** *Вказівка*. Доведіть, що $\sin\angle ACD = \sin\angle ACB$. **4.40.** *Вказівка*. $AE = 2O_1A\sin 45°$, $AE = 2O_2A\sin 45°$. Звідси $AO_1 = AO_2$. **4.41.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$. *Вказівка*. Позначте на колі таку точку M, що $\cup DM = \cup DC + \cup AB$ (див. рисунок). Тоді $CM = a$, $\angle DCM = 180° - \alpha$. **4.42.** *Вказівка*. $\frac{BM}{\sin\angle BCM} = \frac{CM}{\sin\angle CBM} = \frac{DN}{\sin\angle DCN} = \frac{CN}{\sin\angle CDN}$. Далі скористайтеся тим, що $\sin\angle CBM = \sin\angle ABC = \sin\angle ADC = \sin\angle CDN$.



До задачі 4.41

5. Розв’язування трикутників

5.12. 107°, 73°, 132°, 48°. *Вказівка*. Проведіть через один із кінців меншої основи пряму, паралельну бічній стороні трапеції, і розгляньте трикутник, який при цьому утворився.

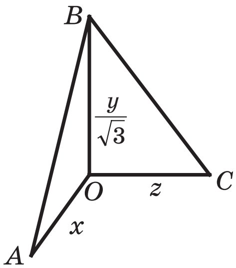
6. Формули для знаходження площі трикутника

6.2. 1) 60° або 120°; 2) 90°. **6.3.** 30° або 150°. **6.6.** 12 см. **6.7.** 24 см. **6.8.** 1) $\frac{3}{2}$ см, $\frac{25}{8}$ см; 2) 8 см, $\frac{145}{8}$ см. **6.9.** 2 см, $\frac{145}{8}$ см.

6.14. $\dfrac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin(\beta+\gamma)}$. **6.15.** $\dfrac{b^2 \sin\alpha \sin(\alpha+\beta)}{2\sin\beta}$. **6.16.** $\dfrac{h_1 h_2}{2\sin\alpha}$.

6.17. $\dfrac{h^2 \sin\beta}{2\sin\alpha \sin(\alpha+\beta)}$. **6.18.** 51 см², 75 см², 84 см². **6.19.** $\dfrac{24}{7}$ см. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD}$. **6.20.** 360 см². *Вказівка*. Проведіть через один із кінців меншої основи трапеції пряму, паралельну бічній стороні трапеції, та знайдіть висоту трикутника, який ця пряма відтинає від трапеції. **6.21.** $12\sqrt{5}$ см². *Вказівка*. Нехай $ABCD$ — дана трапеція, $BC \parallel AD$. Проведіть через вершину C пряму, яка паралельна прямій BD і перетинає пряму AD у точці E. Доведіть, що трикутник ACE і дана трапеція рівновеликі. **6.22.** 19,5 см. **6.24.** 13 см, 14 см, 15 см. **6.25.** 36 см². **6.26.** 13 см, 15 см. *Вказівка*. Нехай точки дотику вписаного кола ділять одну з невідомих сторін на відрізки 6 см і x см, а другу — на відрізки 8 см і x см. Виразіть площу трикутника двома способами: за допомогою формули Герона та через радіус вписаного кола. **6.27.** *Вказівка*. Скористайтеся формулою для знаходження радіуса зовнівписаного кола та формулою Герона. **6.28.** *Вказівка*. Виразіть висоти трикутника через його площу та відповідні сторони. **6.32.** *Вказівка*. Нехай відрізок AK — бісектриса трикутника ABC. Маємо: $S_{ABC} = S_{BAK} + S_{KAC}$. Далі скористайтеся теоремою 6.1 і ключовою задачею 2 п. 6. **6.33.** 120°. *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 6.32. **6.34.** 1 см, 2 см, $\sqrt{3}$ см. *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 6.32 і теоремою косинусів. **6.35.** 235,2 см². *Вказівка*. Скориставшися ключовою задачею 6.32, знайдіть косинус кута між бісектрисою та стороною трикутника. **6.36.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 6.10. **6.37.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 6.10. **6.38.** *Вказівка*. Доведіть, що $R + r = \dfrac{a+b}{2}$, де a і b — довжини катетів. **6.39.** *Вказівка*. Маємо: $ah_a = 2S = r(a + b + c)$. Звідси $h_a = r\left(1 + \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}\right)$. **6.40.** *Вказівка*. Маємо: $S_{MBN} = S_{MBO} + S_{OBN}$, де точка O — центр вписаного кола. Проведемо радіуси в точки дотику й отримаємо $S_{MBN} = \dfrac{1}{2}(BM + BN) \cdot r \geqslant r\sqrt{BM \cdot BN} \geqslant r\sqrt{2S_{MBN}}$. **6.41.** Ні. *Вказівка*. Нехай r і r_1 — радіуси кіл, вписаних у трикутники ABC і BCM відповідно, і $r = 2r_1$. Покажіть, що з рівності $S_{BCM} = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$ випливає рівність периметрів

трикутників ABC і BCM. **6.42.** *Вказівка*. Найменший кут трикутника не перевищує 60°. **6.43.** 7 см. *Вказівка*. Нехай довжини сторін трикутника дорівнюють a, b і c. Тоді $a + 3b + 15c = 2S$, $4a + 5b + 11c = 2S$. Звідси $7(a + b + c) = 2S = (a + b + c)r$. **6.44.** *Вказівка*. $\frac{(a+c)(b+d)}{4} = \frac{ab}{4} + \frac{ad}{4} + \frac{cb}{4} + \frac{cd}{4} \geqslant \frac{1}{2}(S_{ABC} + S_{BAD} + S_{BCD} + S_{CDA})$.
6.45. *Вказівка*. Скориставшися результатом задачі 6.44, можна записати: $S \leqslant \frac{(a+c)(b+d)}{4} \leqslant \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{(a+c)+(b+d)}{2}\right)^2 = 1$. **6.46.** *Вказівка*. Навколо кожного із чотирикутників OM_1CM_2, OM_1BM_3, OM_2AM_3 можна описати коло. До цих чотирикутників застосуйте теорему Птолемея.



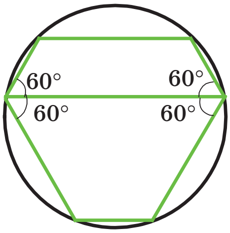
До задачі 6.47

6.47. $24\sqrt{3}$. *Вказівка*. Побудуйте відрізки OA, OB і OC так, що $\angle BOC = 90°$, $\angle COA = 120°$, $\angle BOA = 150°$ (див. рисунок). Нехай $OA = x$, $OC = z$, $OB = \frac{y}{\sqrt{3}}$. Покажіть, що $xy + 2yz + 3zx = 4\sqrt{3}\,S_{ABC}$.

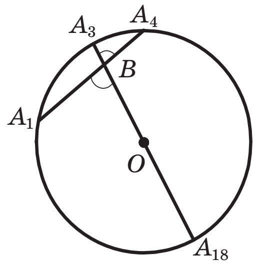
§ 3. ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ

7. Правильні многокутники та їхні властивості

7.10. $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$. **7.11.** $2\sqrt{R^2 - r^2}$. **7.12.** $\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$. **7.15.** 5 сторін. **7.16.** 18 сторін. **7.19.** $\sqrt{3} : 2$. **7.22.** $2R^2\sqrt{2}$. **7.23.** $a\sqrt{3}$, $2a$, $\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$. **7.24.** $6\left(\sqrt{2} - 1\right)$ см. **7.25.** 8 см. **7.26.** $a\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $a\left(\sqrt{2}+1\right)$, $a\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. **7.27.** $\frac{a\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}$. **7.28.** $\frac{a\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}$. **7.30.** 6. *Вказівка*. Знайдіть кути правильного $2n$-кутника. **7.31.** 168° або 48°. *Вказівка*. Розгляньте два випадки: точка M належить п'ятикутнику і точка M лежить поза ним. **7.32.** Ні (див. рисунок). **7.33.** 1) 30° або 60°; 2) 60°. **7.35.** *Вказівка*. Доведіть, що $AM = BC$, і скористайтеся тим, що $\Delta ABC \backsim \Delta CMB$. **7.36.** 84°. *Вказівка*. Пряма OA_3 містить діагональ A_3A_{18} (див. рисунок). Маємо: $\angle A_1BA_{18} = \frac{1}{2}(\cup A_1A_{18} + \cup A_3A_4)$.

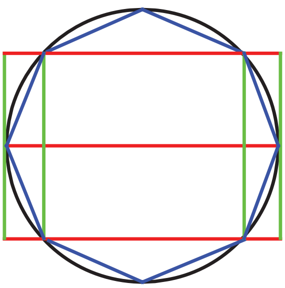


До задачі 7.32

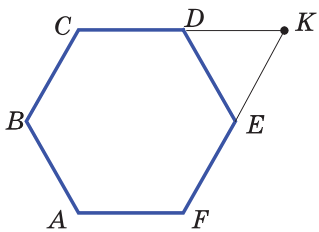


До задачі 7.36

7.37. Існує. *Вказівка*. Розгляньте правильний 12-кутник $A_1A_2...A_{12}$ та його діагоналі A_1A_3, A_3A_5, A_1A_7. **7.38.** R. *Вказівка*. Нехай прямі A_1A_4 і OA_3, де O — центр описаного кола, перетинаються в точці B. Доведіть, що трикутники OBA_4, BA_4A_3 і OA_1B рівнобедрені. **7.39.** *Вказівка*. Доведіть, що точки дотику вписаного кола зі сторонами п'ятикутника ділять кожну сторону навпіл. **7.41.** *Вказівка*. Див. рисунок.

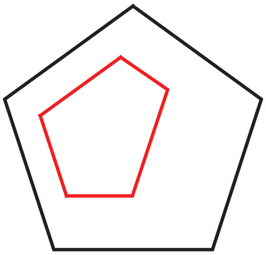


До задачі 7.41



До задачі 7.43

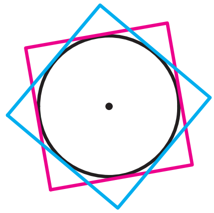
7.42. Трикутників, або квадратів, або шестикутників. *Вказівка*. Навколо однієї точки можна укласти стільки дощечок, у скільки разів кут при вершині дощечки, який дорівнює $\frac{180°(n-2)}{n}$, менший від 360°, тобто $360° : \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{2n}{n-2}$ дощечок. Значення виразу $\frac{2n}{n-2}$ має бути натуральним числом. Оскільки $\frac{2n}{n-2} = \frac{2n-4+4}{n-2} = 2 + \frac{4}{n-2}$, то значення виразу $\frac{4}{n-2}$ має бути натуральним числом. **7.43.** *Вказівка*. Нехай $ABCDEF$ — правильний шестикутник (див. рисунок), K — точка перетину прямих CD і EF. Тоді AK — шуканий відрізок. **7.45.** Так. *Вказівка*. Нехай точка O — центр описаного кола даного п'ятикутника $A_1A_2A_3A_4A_5$. Тоді $\angle A_1OA_3 = \angle A_2OA_4$. Звідси $\angle A_1OA_2 = \angle A_3OA_4$. Отже, $A_1A_2 = A_3A_4$. Аналогічно можна показати, що $A_3A_4 = A_5A_1$. **7.46.** *Вказівка*. Розгляньте правильний п'ятикутник, вписаний в дане коло. **7.47.** *Вказівка*. Нехай $A_1A_2...A_{15}$ — даний правильний 15-кутник. Тоді п'ятикутники $A_1A_4A_7A_{10}A_{13}$, $A_2A_5A_8A_{11}A_{14}$, $A_3A_6A_9A_{12}A_{15}$ — правильні. В одному із цих п'ятикутників позначили щонайменше три вершини. **7.48.** *Вказівка*. Оскільки кути даного п'ятикутника рівні, то його можна розмістити всередині правильного п'ятикутника, сторони якого паралельні сторонам даного п'ятикутника (див. рисунок). Далі скористайтеся результатом задачі 7.34.



До задачі 7.48

8. Довжина кола. Площа круга

8.7. 22,5°. **8.12.** $\sqrt{6}$ см. **8.13.** 1) $\frac{25\left(\pi-2\sqrt{2}\right)}{8}$ см²; 2) $\frac{25(5\pi-3)}{12}$ см²; 3) $\frac{25(11\pi+3)}{12}$ см². **8.14.** 1) $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{3}$ см²; 2) $\frac{10\pi+3\sqrt{3}}{3}$ см². **8.16.** 2π см, $\frac{10\pi}{3}$ см, $\frac{20\pi}{3}$ см. **8.17.** $\frac{25\pi}{18}$ см, $\frac{35\pi}{18}$ см, $\frac{20\pi}{3}$ см. **8.18.** $\frac{8\pi}{3}$ см. **8.19.** 6π см. **8.22.** $\frac{a^2(\pi-2)}{8}$. **8.23.** $\frac{a^2\left(4\pi-3\sqrt{3}\right)}{36}$. **8.24.** 50 см. **8.25.** 1 : 1. *Вказівка*. Доведіть, що в обох випадках сума довжин півкіл дорівнює $\frac{1}{2}\pi AB$. **8.26.** $\frac{\pi R^2}{9}$. **8.27.** $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$. **8.28.** $\frac{2\pi a}{3}$. *Вказівка*. Розгляньте трикутник AND і доведіть, що він рівносторонній. **8.30.** $2\pi R\left(1-\frac{l}{\pi r}\right)$. **8.32.** $\left(\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}\right)$ см². **8.33.** $R^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$. **8.35.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **8.37.** $\left(64\sqrt{3}-\frac{88\pi}{3}\right)$ см². *Вказівка*. Проведіть $O_1M \perp O_2B$. Доведіть, що $\angle O_2O_1M = 30°$. **8.38.** *Вказівка*. Спільна частина квадратів містить круг, радіус якого дорівнює $\frac{1}{2}$ см (див. рисунок).



До задачі 8.38

§ 4. ДЕКАРТОВІ КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

9. Відстань між двома точками із заданими координатами. Поділ відрізка в заданому відношенні

9.6. 1) Так, точка B лежить між точками A і C; 2) ні. **9.8.** $x = 7$ або $x = -1$. **9.11.** (1; 2). **9.12.** (1; −4) або (−1; 1). **9.15.** (3; 0). **9.16.** (0; 0,5). **9.17.** (−3; 7). **9.18.** (−2; 2). **9.19.** (3; −2). **9.23.** A (−5; 3), C (7; 5). **9.24.** $2\sqrt{73}$. **9.26.** $\left(3\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$ або $\left(-3\sqrt{3}; -2\sqrt{3}\right)$. **9.27.** $(-2; 4\sqrt{3})$ або $\left(-2; -4\sqrt{3}\right)$. **9.28.** (3; 3) або (−6; 6). *Вказівка*. Розгляньте два випадки: B $(a; a)$ або B $(a; -a)$. **9.29.** (5,5; 0), (3; 0), (−1; 0). *Вказівка*. Розгляньте три випадки: $AC = BC$, $AC = AB$ і $BC = AB$. **9.30.** (0; 6), (0; 4), (0; 3,5), (0; 8,5). *Вказівка*. Розгляньте три випадки: $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $AB^2 + BC^2 = AC^2$, $AC^2 + AB^2 = BC^2$. **9.31.** (3; 3) або (15; 15). **9.32.** (−2; 2) або (−10; 10). **9.34.** $\frac{4\sqrt{5}}{3}$. **9.35.** 9. **9.37.** $\left(\frac{13}{3}; 3\right)$. **9.38.** *Вказівка*. Позначимо даний 10-кутник так: $A_1A_2...A_{10}$. Розгляньте два п'ятикутники $A_1A_3A_5A_7A_9$ і $A_2A_4A_6A_8A_{10}$. Далі скористайтеся ідеєю розв'язування задачі 4 п. 9. **9.39.** Ні. *Вказівка*. Розташуємо систему координат так, щоби початок координат збігався з непозначеною вершиною квадрата, а осі координат збігалися з лініями сітки. Тоді парність координат точки X збігається з парністю координат або точки A, або точки B. Зазначимо, що обидві координати непозначеної вершини квадрата є парними.

10. Рівняння фігури

10.12. Два кола: $x^2 + (y - 11)^2 = 45$ і $x^2 + (y + 1)^2 = 45$. **10.13.** $(x - 3)^2 + y^2 = 50$. **10.15.** 1) Так, точка (−1; 5) — центр кола, $R = 7$; 2) ні; 3) ні; 4) так, точка (2; 7) — центр кола, $R = \sqrt{2}$. **10.16.** 1) Точка (0; −8) — центр кола, $R = 2$; 2) точка (4; −2) — центр кола, $R = \sqrt{5}$. **10.21.** 5. **10.22.** 13. **10.23.** $(x - 2)^2 + y^2 = 13$. **10.24.** $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ або $(x - 3)^2 + (y - 8)^2 = 25$. **10.25.** $(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 10$ або $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$. **10.26.** $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ або $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$. *Вказівка*. Діаметр шуканого кола дорівнює відстані між віссю абсцис і прямою $y = -4$, а центр кола належить бісектрисі третього або четвертого координатного кута. **10.27.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ або $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$. **10.28.** 1) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$; 2) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 169$. **10.30.** $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 9$ або $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 49$. *Вказівка*. Кола можуть мати як зовнішній, так і внутрішній дотик. **10.31.** $(x-3)^2+(y+1)^2=25$ або $(x-3)^2+(y+1)^2=225$. **10.32.** $(x^2+y^2-16)(x^2+y^2-4)=0$. **10.33.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\sqrt{2}\right)^2=\frac{9}{4}$ або $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\sqrt{2}\right)^2=\frac{9}{4}$. **10.34.** (3; 4), (−4; 3), (−3; −4), (4; −3). **10.35.** $\left(0;\ 2\sqrt{3}\right)$, $\left(3;\ -\sqrt{3}\right)$, $\left(-3;\ -\sqrt{3}\right)$. **10.36.** Якщо $a<10$, то порожня множина; якщо $a=10$, то точка $M(2;\ -3)$; якщо $a>10$, то коло $(x-2)^2+(y+3)^2=\frac{a}{2}-5$. **10.37.** *Вказівка.* Додайте почленно ліві й праві частини рівнянь парабол.

11. Загальне рівняння прямої

11.6. 1) $y=2x-5$; 2) $x=3$; 3) $y=-1$; 4) $5x+3y=6$. **11.7.** 1) $y=-3x+1$; 2) $x-6y=12$. **11.8.** $y=-0{,}5x-4$. **11.9.** $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}$. **11.11.** 12. **11.12.** 28. **11.13.** 6. **11.14.** (2; 5), (5; 2). **11.15.** (5; 0). **11.17.** $\frac{10\sqrt{29}}{29}$. *Вказівка.* Шукана відстань дорівнює висоті трикутника, обмеженого осями координат і даною прямою. **11.18.** $4\sqrt{2}$. **11.19.** $3\sqrt{10}$. **11.20.** $x-3y=2$. **11.21.** $7x+5y=-8$. **11.22.** $(x-3)^2+(y-4)^2=17$. **11.23.** $(y-4)(y+4)=0$.

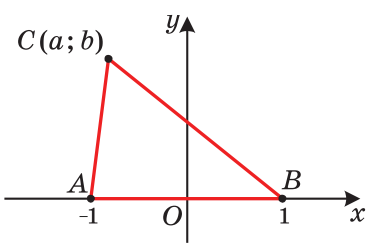
12. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки

12.6. 1) $y=0{,}1x$; 2) $y=\left(2-\sqrt{3}\right)x$. **12.7.** 1) $y=4x+19$; 2) $y=-3x-2$; 3) $y=7$. **12.8.** $y=-0{,}5x-4$. **12.9.** 1) $y=-7x+2$; 2) $3x-4y=-39$. **12.10.** 1) $y=9x+13$; 2) $3x+y=9$. **12.11.** 1) $y=5x-11$; 2) $y=-2x+3$. **12.12.** 1) $y=x+2$; 2) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. **12.13.** 1) $y=x\sqrt{3}+6-2\sqrt{3}$; 2) $y=-x\sqrt{3}+6+2\sqrt{3}$. **12.14.** 1) $y=x-5$; 2) $y=-x+1$. **12.15.** *а*) $y=\frac{x\sqrt{3}}{3}+3$; *б*) $y=-\frac{x\sqrt{3}}{3}+2$. **12.16.** $y=x-1$; $y=1-x$; $y=x\sqrt{3}+1$; $y=-x\sqrt{3}-1$. **12.17.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) ні. **12.19.** 1) (0; −1), $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$; 2) (0; 0,8), $\left(\frac{4}{3};\ 0\right)$. **12.20.** 1) 2,6; 2) $\frac{28}{13}$.

12.21. $\frac{13}{30}$. **12.22.** 1) $4x - 3y = 11$; 2) $3x - 4y = 1$. **12.23.** $y = 4x + 9$. **12.24.** $y = 3x - 12$. **12.25.** $x + 2y = 6$. **12.26.** $2x - 4y = -1$. **12.27.** $y = 3x - 12$. **12.28.** $8y - 3x = 21$, $3y - x = -26$, $5y - 2x = 47$. **12.29.** $y = -2x + 9$. **12.30.** $y = 4$. **12.31.** 6. *Вказівка*. Знайдіть відстань від точки C до прямої AB. **12.32.** $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \frac{841}{289}$. **12.33.** Пряма $5x - 12y = 2$. **12.34.** $3x - 4y = 17$. **12.35.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 32$. **12.36.** Об'єднання прямих: $x + y = 15$ і $7x - 7y = 1$. *Вказівка*. Скористайтеся формулою відстані від точки до прямої. **12.37.** 1) 4; 2) 0,7. **12.38.** $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 1$; $(x + 6)^2 + (y + 6)^2 = 1$; $\left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{12}{7}\right)^2 = 1$; $\left(x + \frac{12}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{7}\right)^2 = 1$. **12.39.** $x + 3y = 13$ і $9x - 13y = 37$. **12.40.** $x + y = 3\sqrt{2} + 3$; $x + y = -3\sqrt{2} + 3$. **12.41.** 5. *Вказівка*. Точка A має бути основою перпендикуляра, опущеного із центра кола на пряму, а точка B має належати цьому перпендикуляру.

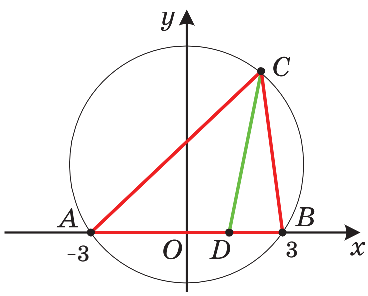
13. Метод координат

13.1. Пряма, перпендикулярна до прямої AB. **13.2.** Порожня множина, або середина відрізка AB, або коло із центром у середині відрізка AB. **13.3.** Порожня множина, або точка, або коло. *Вказівка*. Виберіть систему координат так, як показано на рисунку. Покажіть, що коли $a^2 + b^2 < 1$, то отримаємо порожню множину; якщо $a^2 + b^2 = 1$, то точку $D(-a; -b)$; якщо $a^2 + b^2 > 1$, то коло із центром у точці $D(-a; -b)$. **13.4.** Порожня множина, або точка перетину медіан трикутника ABC, або коло із центром у точці перетину медіан трикутника ABC. *Вказівка*. Скористайтеся формулою Лейбніца. **13.5.** Коло радіуса $\frac{4}{3}AB$, центр якого ділить відрізок AB у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини A. **13.6.** Коло із центром у точці B_1 такій, що точка A є серединою відрізка BB_1. Радіус кола дорівнює $2AB$. **13.7.** Коло без точок перетину з прямою AB. Центр кола знаходиться в точці B_1 такій, що точка A є серединою відрізка BB_1, радіус кола дорів-



До задачі 13.3

нює $2d$. **13.8.** Коло із центром у точці K такій, що K ділить відрізок AB у відношенні 3 : 2, рахуючи від точки A, без точок, які належать прямій AB. Радіус кола дорівнює $\frac{4}{3}AB$. **13.9.** Дві прямі, що перетинаються в точці B_1 такій, що точка A — середина відрізка BB_1, без самої точки B_1. Ці прямі утворюють кут 30° з прямою AB. **13.10.** Пряма, яка проходить через середину гіпотенузи і перпендикулярна до медіани, проведеної з вершини C. **13.11.** Відрізок без його кінців. **13.13.** $3\sqrt{2}$. *Вказівка*. Виберіть систему координат так, як показано на рисунку (точка O — середина відрізка AB). Вершина C належить двом колам: описаному колу трикутника ABC і колу із центром у точці D і радіусом $2\sqrt{2}$. Знайдіть рівняння цих кіл. **13.14.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **13.15.** $\frac{\sqrt{73}}{5}$. *Вказівка*. Скористайтеся теоремою 9.1. **13.16.** $2(R^2 + r^2)$. **13.17.** 9 і 1. *Вказівка*. Розгляньте два концентричних кола із центром у початку координат і радіусами 1 і 2.



До задачі 13.13

§ 5. ВЕКТОРИ

14. Поняття вектора

14.12. 3) Ні. *Вказівка*. Можливий випадок, коли $\vec{m} = \vec{n} = \vec{0}$. **14.22.** Прямокутник або рівнобічна трапеція.

15. Координати вектора

15.17. $\overrightarrow{AF}(-2; 2)$, $\overrightarrow{FD}(2; 4)$. **15.18.** $\overrightarrow{DE}(-4; 6)$, $\overrightarrow{EO}(-4; -6)$. **15.19.** $\vec{a}(-6; -8)$ або $\vec{a}(8; 6)$. **15.20.** $\vec{c}\left(\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ або $\vec{c}\left(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$.

15.21. C (7; 17), D (2; 17) або C (7; −7), D (2; −7). **15.22.** B (16; 2), C (16; −6) або B (−14; 2), C (−14; −6).

16. Додавання і віднімання векторів

16.44. 1) Так; 2) так; 3) ні. **16.45.** *Вказівка*. Достатньо показати, що $\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{XD} - \overrightarrow{XC}$. **16.46.** 0,2 м/с, $\sqrt{1{,}04}$ м/с. **16.47.** 60°. **16.48.** *Вказівка*. Покажіть, що кожний із векторів $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ дорівнює нуль-вектору. **16.50.** Коло радіуса AB із центром у точці A. **16.51.** Серединний перпендикуляр відрізка AB. **16.52.** *Вказівка*. Нехай відрізок AA_1 — медіана трикутника ABC. На продовженні відрізка AA_1 за точку A_1 відкладіть відрізок A_1D, рівний MA_1. **16.53.** *Вказівка*. Нехай при деякому виборі системи координат точки мають координати A_1 (x_1; y_1), A_2 (x_2; y_2), ..., A_n (x_n; y_n). Розгляньте точку $M\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}; \dfrac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}\right)$. **16.54.** *Вказівка*. Маємо: $\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2C_1} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_2A_2} = \vec{0}$, $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_2C_1} + \overrightarrow{C_2A_2} = \vec{0}$, звідси $\overrightarrow{A_2A_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2} = \vec{0}$.

17. Множення вектора на число. Застосування векторів до розв'язування задач

17.28. −4; 4. **17.29.** −1,5. **17.31.** $\vec{m}$ (−15; 36). **17.32.** $\vec{a}$ (−3; 4). **17.35.** $x = 2$, $y = -3$. **17.38.** $\overrightarrow{OK} = 0{,}5\vec{a} - 0{,}1\vec{b}$. **17.42.** 1) $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$. **17.46.** *Вказівка*. З одного боку, $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2M_2}$. З другого боку, $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1A_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2M_2}$. Додайте ці рівності. **17.47.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 17.46. **17.49.** *Вказівка*. Скористайтеся ключовою задачею 6 п. 17. **17.50.** *Вказівка*. Нехай відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 — медіани трикутника ABC. Доведіть, що $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$. **17.52.** *Вказівка*. Маємо: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$. **17.53.** *Вказівка*. Скористайтеся задачею 17.46 і ключовою задачею 1 п. 17. **17.54.** *Вказівка*. Виразіть вектори $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{BN}$ через вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$. **17.56.** *Вказівка*. Скористайтеся задачею 17.55. **17.57.** *Вказівка*. Нехай точки M_1, M_2, M_3 і M_4 — середини відповідно відрізків AH_1, BH_2, CH_3 і DH_4. Доведіть, що $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_3} = \overrightarrow{OM_4} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$, де точка O — центр описаного кола. **17.58.** *Вказівка*. Нехай точка H — ортоцентр трикутника ABC. Тоді з ключової задачі 6 п. 16 випливає, що $\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. Із цієї рівності випливає, що точка H належить описаному колу трикутника ABC. **17.59.** *Вказівка*. Розгляньте чотирикутник $ABCD$, діагоналі якого перетинаються в точці O. Нехай точки M і N — середини сторін BC і AD відповідно. Доведіть, що вектори $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$ протилежні. Розкладіть вектори $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{ON}$ за базисом $\left(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}\right)$. **17.60.** *Вказівка*. Нехай O — точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$. Доведіть, що $\overrightarrow{OA} = k\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB} = k\overrightarrow{OD}$. **17.61.** *Вказівка*. Скориставшися ключовою задачею 17.46, можна записати: $\overrightarrow{KF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{MQ}\right)$, $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE}\right)$. Зауважимо, що $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$. **17.62.** *Вказівка*. Скориставшися ключовою задачею 5 п. 17, запишемо: $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$. Також $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\right)$. Далі виразіть вектор $\overrightarrow{AK}$ через вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$. **17.63.** *Вказівка*. Нехай точка N — середина відрізка EF, а медіани AA_1 і CC_1 трикутника ABC перетинаються в точці M. Нехай $AP : PC = m : n$. Оскільки $PE \parallel CC_1$ і $PF \parallel AA_1$, то $AE : EB = m : (m + 2n)$, $CF : FB = n : (n + 2m)$. Скориставшися ключовою задачею 5 п. 17, запишемо: $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}\right)$. Далі, $\overrightarrow{PN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF}\right)$. Скористайтеся ключовою задачею 2 п. 17 і виразіть вектор $\overrightarrow{PE}$ через вектори $\overrightarrow{PA}$ і $\overrightarrow{PB}$, а вектор $\overrightarrow{PF}$ через вектори $\overrightarrow{PB}$ і $\overrightarrow{PC}$. **17.64.** *Вказівка*. Для точки O і трикутників ABC і PQR скористайтеся ключовою задачею 5 п. 17. **17.65.** *Вказівка*. Скориставшися ключовою задачею 6 п. 17, запишемо: $\overrightarrow{OH_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC_1}$, $\overrightarrow{OH_2} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OH_3} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB_1}$. Покажіть, що вектори $\overrightarrow{H_2H_1}$ і $\overrightarrow{H_2H_3}$ колінеарні.

18. Скалярний добуток векторів

18.14. 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0. **18.19.** $\vec{b}\,(-12; 16)$. **18.22.** -3 і 3. **18.23.** -1. **18.24.** -1 і 1. **18.26.** 4. **18.27.** $-0{,}5$. **18.28.** $\sqrt{7}$. **18.29.** $2\sqrt{7}$.

18.32. $\frac{3}{5}$, 0, $\frac{4}{5}$. **18.33.** 30°, 60°, 90°. **18.36.** 0°. **18.37.** 120°. **18.38.** $\frac{\sqrt{259}}{2}$. *Вказівка*. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. **18.39.** *Вказівка*. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. **18.40.** *Вказівка*. Доведіть, що $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. **18.41.** *Вказівка*. Розкладіть вектори $\overrightarrow{CM}$ і $\overrightarrow{AK}$ за базисом $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$. **18.42.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **18.43.** 45°. *Вказівка*. Виразіть вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$ через вектори $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ і $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$. **18.44.** 30°. **18.45.** 4. *Вказівка*. Розкладіть вектор $\overrightarrow{AD}$ за базисом $(\overrightarrow{AK};\overrightarrow{AM})$. **18.46.** $\frac{\sqrt{21}}{2}$. *Вказівка*. Нехай точки M і N — середини сторін AD і BC відповідно. Тоді за допомогою ключової задачі 17.46 можна записати: $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD})$. **18.47.** 60°. **18.48.** $AK : KB = 2 : 1$. *Вказівка*. Нехай $AK : KB = m : n$. Розкладіть вектори $\overrightarrow{CK}$ і $\overrightarrow{AM}$ за базисом $(\overrightarrow{CA};\overrightarrow{CB})$. **18.49.** 1 : 4. **18.50.** *Вказівка*. $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{MF}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BF}$. Залишилося показати, що $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{MF}=0$. **18.51.** *Вказівка*. Розгляньте вектори $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ і $\vec{l}_3$, співнапрямлені з векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CA}$, такі, що $|\vec{l}_1|=|\vec{l}_2|=|\vec{l}_3|=1$. Скористайтеся очевидною нерівністю $(\vec{l}_1+\vec{l}_2+\vec{l}_3)^2\geqslant 0$.

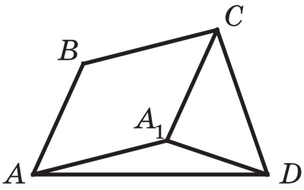
§ 6. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФІГУР

19. Перетворення (відображення) фігур

19.25. $f(A)=A$, $f(A)=B$, $f(A)=C$. **19.26.** Ні.

20. Рух. Паралельне перенесення

20.8. При $AB \parallel a$. **20.18.** Безліч. **20.21.** $(x+3)^2+(y-4)^2=1$. **20.22.** $y=x^2-4x+1$. **20.24.** *Вказівка*. Нехай $ABCD$ — шукана трапеція ($BC \parallel AD$). Побудуйте образ діагоналі BD при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{BC}$. **20.26.** *Вказівка*. Побудуйте образ даної прямої при паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{AB}$ (або $\overrightarrow{BA}$). Розгляньте точки перетину образу з даним колом. Зауважимо, що коли побудований образ і дане коло не мають спільних точок, то задача не має розв'язку. **20.28.** *Вказівка.* Нехай $T_{\overline{OO_1}}(M) = M_1$, де O і O_1 — центри кіл. Тоді $BM_1 \parallel AM$. Звідси $T_{\overline{OO_1}}(A) = B$. **20.29.** *Вказівка.* Нехай $ABCD$ — шуканий чотирикутник з даними сторонами AB і CD (див. рисунок). Нехай $T_{\overline{BC}}(A) = A_1$. Трикутник A_1CD можна побудувати за двома сторонами CD і $CA_1 = BA$ і кутом A_1CD, який дорівнює $\angle BCD - (180° - \angle ABC)$. Трикутник AA_1D можна побудувати за стороною A_1D і двома прилеглими кутами AA_1D і ADA_1. **20.30.** *Вказівка.* Нехай $T_{\overline{MN}}(A) = A_1$. Сполучіть точки A_1 і B. **20.31.** 90°. *Вказівка.* Нехай $T_{\overline{AB}}(M) = M_1$. Скористайтеся тим, що навколо чотирикутника MBM_1C можна описати коло. **20.32.** *Вказівка.* Нехай $T_{\overline{BC}}(M) = M_1$. Доведіть, що навколо чотирикутника MCM_1D можна описати коло.

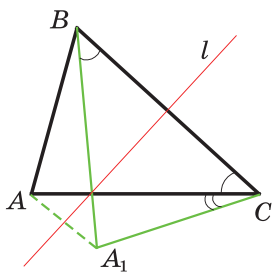


До задачі 20.29

21. Осьова симетрія

21.20. $a \perp l$ або прямі a і l збігаються. **21.23.** *Вказівка.* Якщо чотирикутник має вісь симетрії, то образом будь-якої його вершини є вершина цього самого чотирикутника. Оберіть деяку вершину паралелограма та розгляньте дві можливості: її образом є або сусідня вершина, або протилежна. **21.25.** *Вказівка.* Кути M_1BA і MBA є симетричними відносно прямої AB. Отже, $\angle M_1BA = \angle MBA$. Аналогічно $\angle M_2BC = \angle MBC$. Залишилося показати, що $\angle M_1BM_2 = 180°$. **21.26.** 1) $A_1(0; -2)$, $B_1(-1; 3)$; 2) $A_2(0; 2)$, $B_2(1; -3)$. **21.27.** $x = 2$, $y = -1$. **21.31.** $\frac{m^2}{4}$. *Вказівка.* Нехай $M_1 = S_{AC}(M)$. Доведіть, що трикутники M_1AM і ABC рівновеликі. **21.32.** *Вказівка.* Нехай точка A_1 — образ точки A при симетрії відносно прямої a. Тоді точка перетину прямих a і A_1B буде шуканою. Зауважимо, що коли точки A і B симетричні відносно прямої a, то задача має безліч розв'язків. Якщо точки A і B рівновіддалені, але не симетричні відносно прямої a, то задача не має розв'язку. **21.34.** *Вказівка.* Нехай $A_1 = S_a(A)$. Тоді точка перетину прямих A_1B і a є шуканою. **21.35.** *Вказівка.* Скористайтеся задачею 2 п. 21. **21.36.** *Вказівка.* Скористайтеся задачею 3 п. 21. **21.37.** *Вказівка.* Нехай $C_1 = S_{AD}(C)$. Проведіть пряму BC_1. **21.38.** *Вказівка.* Нехай прямі l і m —

серединні перпендикуляри. Покажіть, що $C = S_l(AB) \cap S_m(AB)$. **21.39.** *Вказівка.* Образи точки A при симетрії відносно прямих, які містять бісектриси, лежать на прямій BC. **21.40.** *Вказівка.* Нехай прямі l і m — серединні перпендикуляри сторін AB і BC відповідно. Нехай $D_1 = S_l(D)$, $D_2 = S_m(D)$. Точки D_1 і D_2 лежать відповідно на прямих DC і DA. Зауважимо, що коли гострий кут паралелограма дорівнює 60°, то задача має безліч розв'язків. **21.41.** *Вказівка.* Нехай точка A_1 симетрична точці A відносно цієї бісектриси. $AM + MB = A_1M + MB > A_1B = A_1C + CB = AC + CB$. **21.42.** 6, якщо трикутник ABC не є прямокутним; 3, якщо трикутник ABC прямокутний. **21.43.** *Вказівка.* Нехай трикутник A_1BC — образ трикутника ABC при симетрії відносно серединного перпендикуляра відрізка BC (див. рисунок). Трикутник ACA_1 можна побудувати за відомими сторонами AC і A_1C ($A_1C = AB$) і кутом ACA_1, який дорівнює різниці кутів B і C.



До задачі 21.43

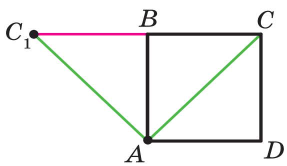
21.45. *Вказівка.* Нехай точка C_1 симетрична точці C відносно прямої AB. Побудуйте коло із центром у точці C_1, яке дотикається до прямої AB. Проведіть через точку D дотичну до побудованого кола. Ця дотична перетинає пряму AB у шуканій точці. **21.46.** *Вказівка.* Нехай $C_1 = S_l(C)$. На відрізку C_1D як на діаметрі побудуйте коло. **21.47.** *Вказівка.* Нехай пряма l — серединний перпендикуляр діагоналі AC, $B_1 = S_l(B)$. Скористайтеся тим, що чотирикутники $ABCD$ і AB_1CD рівновеликі. **21.48.** *Вказівка.* Нехай $B_1 = S_{AC}(B)$. Точка B_1 лежить на прямій AD. У трикутнику B_1CD відомо всі три сторони. **21.49.** *Вказівка.* Скористайтеся ключовою задачею 21.30. **21.50.** 60°. *Вказівка.* Доведіть, що точка C — центр зовнівписаного кола трикутника ABD. **21.51.** 90°. *Вказівка.* Нехай $C_1 = S_{AB}(C)$, $D_1 = S_{AB}(D)$. Доведіть, що в чотирикутник D_1C_1CD можна вписати коло. **21.52.** *Вказівка.* Нехай $B_1 = S_{AM}(B)$, $C_1 = S_{DM}(C)$. Доведіть, що трикутник B_1MC_1 рівносторонній. **21.53.** 30°. *Вказівка*. Доведіть, що $S_{CE}(D) = S_{CA}(B) = O$, де точка O — центр описаного кола трикутника ACE. **21.54.** Точка перетину висот трикутника ABC.

22. Центральна симетрія

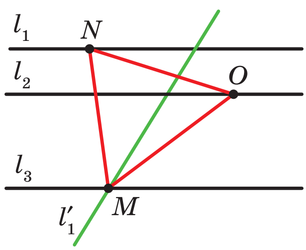
22.13. *Вказівка*. Припустимо, що трикутник ABC має центр симетрії. Тоді, наприклад, образом вершини A є вершина B. Отже, центр симетрії — це середина сторони AB. Проте в цьому випадку образ вершини C не належатиме трикутнику ABC. **22.16.** *Вказівка*. При центральній симетрії образом сторони даного чотирикутника є сторона цього самого чотирикутника. Далі скористайтеся ключовою задачею 1 п. 22. **22.17.** *Вказівка*. Розгляньте центральну симетрію із центром у точці перетину діагоналей одного з паралелограмів. **22.18.** *Вказівка*. При симетрії відносно точки O образи точок A_1 і B_1 належать колу із центром O_2. Оскільки образом прямої, яка проходить через центр симетрії, є ця сама пряма, то образи точок A_1 і B_1 також належать прямій A_1B_1. Отже, відрізок A_2B_2 — образ відрізка A_1B_1. **22.19.** *Вказівка*. Розгляньте симетрію даної прямої відносно даної точки. **22.21.** *Вказівка*. Відобразіть одне з кіл симетрично відносно точки D. Точка перетину другого кола з отриманим — вершина трикутника. **22.22.** *Вказівка*. Покажіть, що $S_O(\Delta BMC) = \Delta DNA$. **22.24.** *Вказівка*. Доведіть, що коли спільна точка двох кіл є центром симетрії, при якій одне з кіл є образом другого, то ці кола дотикаються. **22.25.** *Вказівка*. Скористайтеся результатом задачі 21.25. **22.26.** *Вказівка*. Знайдіть середину відрізка AC, а далі скористайтеся задачею 2 п. 22. **22.28.** *Вказівка*. Нехай O — дана точка, l_1, l_2 і l_3 — дані прямі. Побудуйте відрізок AC, серединою якого є точка O, а кінці належать прямим l_1 і l_2. Цей відрізок є однією з діагоналей ромба. Знайдіть точку перетину прямої l_3 із серединним перпендикуляром відрізка AC. **22.30.** *Вказівка*. Покажіть, що при симетрії із центром у точці перетину діагоналей паралелограма образами прямих MC, MD, MA і MB будуть проведені прямі. **22.31.** *Вказівка*. Побудуйте образ одного з кіл при центральній симетрії відносно точки M. **22.32.** *Вказівка*. Нехай $P_1 = S_C(P)$. Тоді $AP + BQ = P_1B + BQ$. **22.33.** *Вказівка*. Нехай точки K, M, N і L — відповідно середини сторін AB, BC, CD і DA вписаного чотирикутника $ABCD$. Покажіть, що при симетрії відносно точки перетину прямих KN і ML образами проведених прямих є серединні перпендикуляри сторін чотирикутника. **22.35.** 1 : 1. *Вказівка*. Об'єднанням даної трапеції та її образа при симетрії відносно середини сторони CD є квадрат. **22.36.** *Вказівка*. Виберіть на колі меншого радіуса довільну точку. Узявши її за центр симетрії, побудуйте образ цього кола.

23. Поворот

23.10. *Вказівка*. Нехай $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{a}$. Розглянемо поворот із центром O на кут $\frac{360°}{n}$, наприклад, против годинникової стрілки. Очевидно, що при такому перетворенні образом даного n-кутника буде цей самий n-кутник. Отже, шукана сума не зміниться. А це можливо лише тоді, коли $\vec{a} = \vec{0}$.

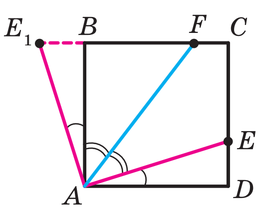


До задачі 23.12

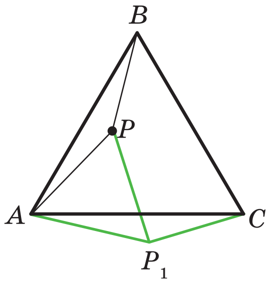


До задачі 23.26

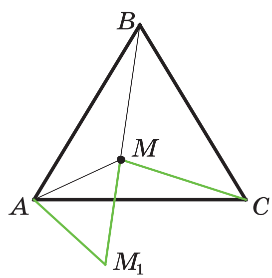
23.11. 2 см або 1 см. **23.12.** 2 см. *Вказівка*. При розглядуваному повороті точка B є образом точки D, точка C_1 — образом точки C, точка A — образом точки A (див. рисунок). Отже, трикутник ABC_1 — образ трикутника ADC. Звідси $\angle ABC_1 = \angle ADC = 90°$. Отже, точки C_1, B і C лежать на одній прямій. **23.13.** *Вказівка*. Скористайтеся ідеєю розв'язування задачі 2 п. 23. **23.16.** *Вказівка*. Розгляньте поворот $R_A^{90°}$. **23.17.** 60°. *Вказівка*. Розгляньте поворот $R_C^{60°}$. **23.18.** 90°. *Вказівка*. Розгляньте поворот $R_O^{90°}$. **23.19.** 120°. *Вказівка*. Розгляньте поворот $R_O^{120°}$. **23.20.** 120°. *Вказівка*. Доведіть, що $AD = 2BC$. Розгляньте поворот із центром O на кут 120°. **23.21.** 60°. **23.22.** *Вказівка*. Розгляньте поворот $R_A^{90°}$. **23.23.** *Вказівка*. Розгляньте поворот $R_A^{60°}$. **23.25.** *Вказівка*. Покажіть, що при повороті $R_O^{90°}$ одна з діагоналей чотирикутника $ABCD$ є образом другої діагоналі. **23.26.** *Вказівка*. Нехай l_1, l_2, l_3 — дані паралельні прямі, O — довільна точка прямої l_2 (див. рисунок). Пряма l_1' — образ прямої l_1 при повороті навколо точки O проти годинникової стрілки на кут 60° — перетинає пряму l_3 у точці M. Знайдемо прообраз точки M при заданому повороті. Очевидно, що він належить прямій l_1. Тому достатньо відкласти від променя OM кут, що дорівнює 60°. **23.28.** *Вказівка*. Розглянемо поворот із центром A проти годинникової стрілки на кут 90°. При цьому повороті образом відрізка AD буде відрізок AB (див. рисунок). Нехай точка E_1 — образ точки E. Тоді трикутник ABE_1 — образ трикутника ADE. Звідси $\Delta ABE_1 = \Delta ADE$. Тоді $DE = BE_1$, $AE = AE_1$, $\angle E_1AB = \angle EAD$. Маємо: $\angle E_1AF = \angle E_1AB + \angle BAF = \angle EAD + \angle FAE = \angle FAD$. Але $\angle FAD = \angle E_1FA$. Отже, трикутник AE_1F рівнобедрений і $AE_1 = E_1F$.



До задачі 23.28



До задачі 23.29

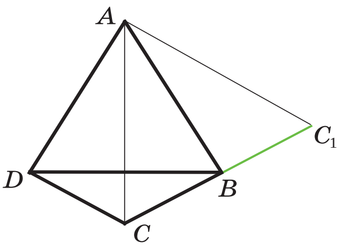


До задачі 23.31

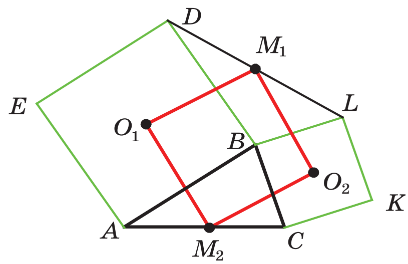
23.29. *Вказівка*. Розглянемо поворот із центром у точці A за годинниковою стрілкою на кут 60° (див. рисунок). При цьому повороті образом трикутника ABP буде трикутник ACP_1 (точка P_1 — образ точки P). Звідси $\angle AP_1C = \angle APB = 150°$. Трикутник APP_1 рівносторонній. Тоді $\angle AP_1P = 60°$. Отже, $\angle PP_1C = 90°$. Залишилося зауважити, що $P_1C = PB$ і $PP_1 = AP$. **23.31.** $\sqrt{3}$ см. *Вказівка*. Розгляньте поворот $R_A^{60°}$ (див. рисунок). **23.32.** 3 см. **23.33.** *Вказівка*. Розглянемо поворот із центром у точці C проти годинникової стрілки на кут 60°. При такому повороті образами точок E і B будуть відповідно точки D і A. Отже, відрізок AD і його середина K будуть відповідно образами відрізка BE і його середини M. **23.34.** 135°. *Вказівка*. Нехай $AP = x$, $BP = 2x$, $CP = 3x$. Розгляньте поворот $R_B^{90°}$.

23.35. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ см². *Вказівка*. Маємо: $R_A^{60°}(C) = C_1$ (див. рисунок). Доведіть, що точки C, B і C_1 лежать на одній прямій. Скористайтеся тим, що трикутник ACC_1 і чотирикутник $ABCD$ рівновеликі. **23.36.** *Вказівка*. Нехай точки O_1 і O_2 — центри квадратів $ABDE$

і $CBLK$ відповідно (див. рисунок). Чотирикутник $O_1M_1O_2M_2$ — паралелограм. Покажіть, що відрізок AL є образом відрізка DC при повороті $R_B^{90^\circ}$.



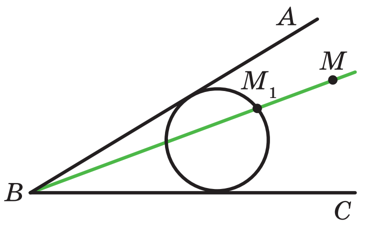
До задачі 23.35



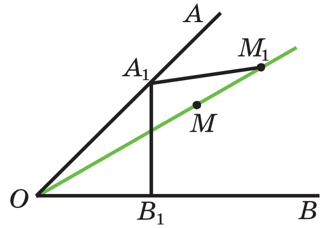
До задачі 23.36

24. Гомотетія. Подібність фігур

24.20. 1) 1,5; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{3}$. **24.24.** $\frac{1}{3}$. **24.25.** 12 см. **24.26.** 28,8 см^2. **24.28.** $\frac{S}{16}$. **24.29.** 1) $k = 2$, точка B або $k = -2$, точка перетину діагоналей трапеції $AMNC$. **24.34.** *Вказівка*. Нехай дане коло дотикається до прямої a в точці M. Точка M_1 — образ точки M при гомотетії із центром A. Оскільки образом прямої a є ця сама пряма, то точка M_1 належить прямій a. Покажіть, що образ даного кола та пряма a мають тільки одну спільну точку M_1. **24.36.** $-\frac{1}{2}$. *Вказівка*. За означенням гомотетії $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Знайдіть координати векторів $\overrightarrow{MA}$ і $\overrightarrow{MB}$. **24.37.** $(-3; 2)$. **24.38.** 1) $x = -3$, $y = 8$; 2) $x = 12$, $y = -2$. **24.39.** $x = 0$, $y = 8$. **24.40.** 20 см^2. **24.41.** 112 см^2. **24.42.** 1 : 2. *Вказівка*. $\frac{S_{AMK}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AK \cdot AM \sin A}{\frac{1}{2}AC \cdot AB \sin A} = \cos^2 A$. **24.43.** 1) $y = 2x + 2$; 2) $y = 2x - \frac{1}{2}$. *Вказівка*. Скористайтеся тим, що кутовий коефіцієнт шуканої прямої дорівнює 2. **24.44.** 1) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$; 2) $(x - 4)^2 + (y + 8)^2 = 16$. **24.45.** *Вказівка*. Доведіть, що коли спільна точка двох кіл є центром гомотетії, при якій образом одного кола є друге, то ці кола дотикаються. **24.47.** *Вказівка*. Пряма A_2B_2 є образом прямої A_1B_1 при гомотетії із центром у точці дотику та коефіцієнтом, який дорівнює відношенню більшого радіуса до меншого. **24.49.** Коло, яке є образом даного кола при гомотетії із центром A та коефіцієнтом $\frac{1}{2}$, за винятком точки A. **24.51.** *Вказівка*. Трикутник з вершинами в отриманих точках є образом трикутника з вершинами в серединах сторін даного трикутника при гомотетії із центром M і коефіцієнтом 2. **24.52.** $\frac{25}{16}$ см^2. **24.55.** *Вказівка*. Нехай A_1 і B_1 — точки перетину відповідно прямих OA і OB з меншим колом. Із задачі 24.47 випливає, що $A_1B_1 \parallel AB$. Маємо: $\angle B_1MB = \angle A_1B_1M = \angle MOB = \angle MA_1B_1 = \angle A_1MA = \angle AOM$. **24.56.** *Вказівка*. Побудуйте довільний трикутник, два кути якого дорівнюють двом даним кутам. Опишіть навколо нього коло. Шуканий трикутник є образом побудованого трикутника при гомотетії із центром у довільній точці та коефіцієнтом, що дорівнює відношенню даного радіуса до радіуса побудованого кола. **24.58.** *Вказівка*. Побудуйте трикутник $A_1B_1C_1$, подібний даному, і застосуйте гомотетію із центром у будь-якій із вершин і коефіцієнтом $\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}}$. **24.59.** *Вказівка*. Див. розв'язання задачі 2 п. 24. **24.60.** *Вказівка*. Побудуйте трикутник так, щоб його сторони були паралельні даним прямим, а дві вершини належали сторонам даного трикутника. Потім застосуйте гомотетію із центром у вершині даного трикутника. **24.61.** $\frac{2}{9}S$. **24.62.** *Вказівка*. Розгляньте гомотетію із центром у середині відрізка AB і коефіцієнтом $\frac{1}{3}$. **24.63.** Пряма, що є образом прямої l при гомотетії із центром у середині відрізка AB і коефіцієнтом $\frac{1}{3}$, за винятком точки перетину прямих AB і l (якщо така точка існує). **24.64.** *Вказівка*. Побудуйте довільне коло, яке дотикається до сторін кута (див. рисунок). Нехай M_1 — одна з точок перетину прямої BM з побудованим колом. Розгляньте гомотетію із центром у точці B і коефіцієнтом $\frac{BM}{BM_1}$. Задача має два розв'язки. **24.65.** *Вказівка*. На промені OA виберемо довільну точку A_1. Проведемо $A_1B_1 \perp OB$ і $A_1M_1 = A_1B_1$ так, щоб точка M_1 належала променю OM (див. рисунок).



До задачі 24.64



До задачі 24.65

Застосуйте гомотетію із центром у точці O та коефіцієнтом $\frac{OM}{OM_1}$.

24.66. Основа висоти трикутника, проведеної з вершини B. *Вказівка*. Нехай точки M_1 і M_2 — середини відрізків AM і MC відповідно. Маємо: $H_M^2(M_1) = A$, $H_M^2(M_2) = C$. Тоді при вказаній гомотетії образами проведених перпендикулярів є висоти трикутника ABC, проведені з вершин A і C. **24.67.** *Вказівка*. Нехай точки C_1 і B_1 — середини відрізків AB і AC відповідно. Тоді при гомотетії із центром A та коефіцієнтом $k = \frac{B_1C_1}{KL}$ образами проведених прямих будуть серединні перпендикуляри сторін AB і AC. **24.68.** *Вказівка*. Побудуйте образ даного кола при гомотетії із центром M і коефіцієнтом -2. **24.69.** *Вказівка*. На гіпотенузі AB у зовнішній бік побудуйте рівносторонній трикутник. Він є образом трикутника MNK при гомотетії із центром у точці C. **24.70.** *Вказівка*. Покажіть, що $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$ і $C_1A_1 \parallel C_2A_2$. Далі скористайтеся результатом ключової задачі 24.46. **24.72.** *Вказівка*. Доведіть, що $AB \parallel A_2B_2$, $BC \parallel B_2C_2$, $AC \parallel A_2C_2$. **24.73.** *Вказівка*. Розглянемо трикутник ABC, який належить розглядуваній множині трикутників. Шуканим колом буде образ вписаного кола трикутника ABC при гомотетії із центром C і коефіцієнтом 2.

§ 7. ПОЧАТКОВІ ВІДОМОСТІ ЗІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

25. Прямі й площини в просторі

25.5. Точки лежать на одній прямій. **25.14.** Площини можуть перетинатися або бути паралельними. **25.18.** Перетинаються або мимобіжні. **25.23.** $15\sqrt{2}$ см. **25.24.** $15\sqrt{3}$ см. **25.25.** 15 см. **25.26.** 20 см. **25.27.** $2\sqrt{21}$ см. **25.28.** $2\sqrt{12+3\sqrt{6}}$ см.

26. Пряма призма. Піраміда

26.13. 680 см^2, 840 см^2, 1360 см^3. **26.21.** $\frac{1}{2}d^3 \sin\alpha \sin\beta \cos^2\beta$. **26.22.** $8a^2 \cos\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\beta$; $2a^3 \sin\alpha \cos\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\beta$.

27. Циліндр. Конус. Куля

27.11. ≈1,24 мм. **27.12.** ≈60 000 Н. **27.13.** 200π см^2, 320π см^3. **27.14.** 320π см^2, 1024π см^3. **27.15.** ≈3770 кг. **27.16.** 4,5 см. **27.17.** ≈550 кг. **27.20.** ≈3 кг. **27.21.** $\pi h^2\sqrt{2}$; $\frac{1}{3}\pi h^3$. **27.22.** $2\pi R^2$; $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$.

Предметний покажчик

ЗМІСТ

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики

підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Відповідальний за випуск *Д. В. Москаленко*
Літературний редактор *Т. Є. Цента*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Технічний редактор *О. В. Гулькевич*
Коректор *Т. Є. Цента*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 19,00. Обл.-вид. арк. 16,85.
Тираж 17 527 прим. Замовлення №

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел.: (057) 719-17-26, (057) 719-46-80, факс: (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua
www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 644 від 25.10.2001

Надруковано з діапозитивів, виготовлених ТОВ ТО «Гімназія»,
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків 61052
Тел. (057) 758-15-80
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ХК № 91 від 25.12.2003

ВЕКТОРИ ТА ДІЇ НАД НИМИ

Модуль вектора

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, де $(a_1; a_2)$ — координати вектора $\vec{a}$

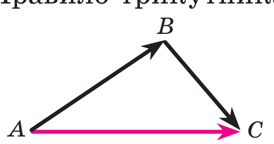
Рівність векторів

Якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ і $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, то $\vec{a} = \vec{b}$

$\vec{a} = \vec{b}$, якщо $a_1 = b_1$ і $a_2 = b_2$, де $(a_1; a_2)$ і $(b_1; b_2)$ — координати векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно

Додавання векторів

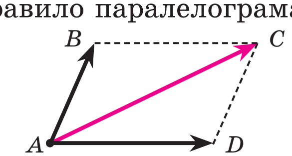
Правило трикутника:



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

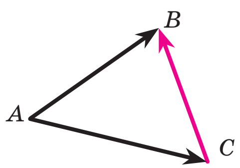
$\vec{a}\,(a_1; a_2) + \vec{b}\,(b_1; b_2) = \vec{c}\,(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$

Правило паралелограма:



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Віднімання векторів



$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$

$\vec{a}\,(a_1; a_2) - \vec{b}\,(b_1; b_2) = \vec{c}\,(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$

Множення вектора на число

Якщо $\vec{b} = k\vec{a}$, то $|\vec{b}| = |k||\vec{a}|$,
$\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, якщо $k > 0$,
$\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, якщо $k < 0$

$k\vec{a}\,(a_1; a_2) = \vec{b}\,(ka_1; ka_2)$

Скалярний добуток векторів

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cos \angle BAC$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

Друковані літери		Назви літер
A	a	а
B	b	бе
C	c	це
D	d	де
E	e	е
F	f	еф
G	g	ге
H	h	аш
I	i	і
J	j	йот
K	k	ка
L	l	ель
M	m	ем
N	n	ен
O	o	о
P	p	пе
Q	q	ку
R	r	ер
S	s	ес
T	t	те
U	u	у
V	v	ве
W	w	дубль-ве
X	x	ікс
Y	y	ігрек
Z	z	зет

ГРЕЦЬКИЙ АЛФАВІТ

Друковані літери		Назви літер
Α	α	альфа
Β	β	бета
Γ	γ	гамма
Δ	δ	дельта
Ε	ε	епсилон
Ζ	ζ	дзета
Η	η	ета
Θ	θ, ϑ	тета
Ι	ι	йота
Κ	κ	каппа
Λ	λ	ламбда
Μ	μ	мю
Ν	ν	ню
Ξ	ξ	ксі
Ο	ο	омікрон
Π	π	пі
Ρ	ρ	ро
Σ	σ	сигма
Τ	τ	тау
Υ	υ	іпсилон
Φ	φ	фі
Χ	χ	хі
Ψ	ψ	псі
Ω	ω	омега

9 789664 742969