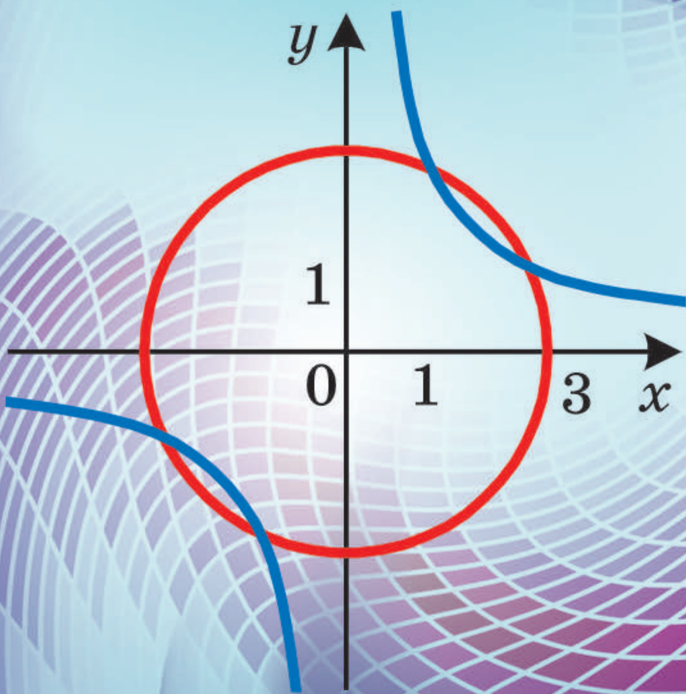
A.G. Merzleak
V.B. Polonski
M.S. Iakir

9

ALGEBRĂ



«Iubesc Ucraina și matematica» - sunt cuvintele incrustate pe piatra de granit a monumentului omului de știință Mihail Kravciuk (1892-1942)
Sperăm că această exprimare patriotică a marelui matematician ucrainean să vă fie călăuză pe calea spre profesionalism.

Proprietățile inegalităților

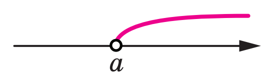
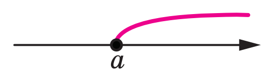
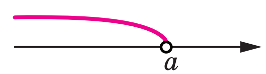
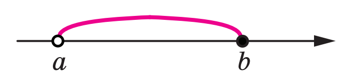
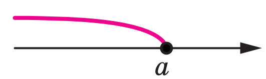
Dacă $a > b$ și $b > c$, atunci $a > c$. Dacă $a >$ b și c — orice numă atunci $a + c > b + c$. Dacă $a > b$ și c — număr pozitiv, atunci $ac > bc$. Dacă $a > b$ și c — număr negativ, atunci $ac < bc$

Dacă $ab > 0$ și $a > b$, atunci $\frac{1}{a}\quad\frac{1}{b}$.

Dacă $a > b$ și $c > d$, atunci $a + c > b + d$. Dacă $a > b$, $c > d$ și a, b, c, d — numere pozitive, atunci ac $> bd$.

Dacă $a > b$ și a, b — numere pozitive, atunci $a^n > b^n$, unde n — numere pozitive.

Intervale numerice

 $(a;\ +\infty)$	 $(a;\ b)$
 $[a;\ +\infty)$	 $[a;\ b)$
 $(-\infty;\ a)$	 $(a;\ b]$
 $(-\infty;\ a]$	 $[a;\ b]$

A.G.Merzleak,
V.B.Polonski,
V.S.Iakir

ALGEBRA

Manual pentru clasa a 9-a a instituțiilor generale de învățămînt cu predarea în limba moldovenească

Recomandat de Ministerul Învățămîntul și Științei al Ucrainei

Львів
Видавництво "Світ"
2017

УДК 373.167.1:512
М52

Перекладено за виданням:
Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк., В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2017.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 20.03.2017 № 417)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

*Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа “Рекомендовано Міністерством освіти і науки України”***:**

Я. П. Сисак, провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук;

Н. В. Кравченко, методист РМЦ відділу освіти Красноградської районної державної адміністрації Харківської області, старший учитель;

Ю. О. Андрух, учитель математики Чернівецького багатопрофільного ліцею № 4, учитель-методист.

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. з навч. молд. мовою / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. В. Г. Фратавчан. – Львів : Світ, 2017. – 272 с. : іл.
ISBN 978-966-914-069-2

УДК 373.167.1:512

ISBN 978-966-914-069-2 (молд.)
ISBN 978-966-474-293-8 (укр.)

De la autori

DRAGI COPII!

În acest an de învățământ veți continua studierea algebrei. Sperăm, că ați îndrăgit deja această știință importantă și fermecătoare, deci, cu interes veți dobândi cunoștințe noi. Sperăm, că veți fi ajutați de manualul, pe care-l țineți în mână.

Vă propunem să faceți cunoștință cu structura manualului.

Manualul e alcătuit din trei paragrafe, fiecare din ele e format din puncte. Punctele conțin materiale teoretice. Noțiunile importante sunt evidențiate cu text **pronunțat** și *cursiv*.

De regulă, depunerea meterialului teoretic este finalizată cu exemple de rezolvare a exercițiilor. Aceste descrieri pot fi considerate ca unul din variantele de reprezentare al rezolvării.

La fiecare punct au fost selectate sarcini pentru lucru de sinestătător. Recomandăm să lucrați autonom doar după însușirea materialului teoretic. Printre sarcini sunt probe, atât simlpe și medii, cât și probleme complicate, în deosebi, cele indexate cu steluță (*). Cunoștințele obținute pot fi estimate, rezolvând exercițiile în formă de teste din rubrica "Verifică-ți cunoștințele".

Zece puncte din manual se finalizează cu rubrica "Insușim acțiuni nestandarte". În rubrică sunt acumulate probleme, rezolvarea cărora cer nu atât cunoștințe speciale din algebră, cât gândire rațională, inteligență și ingeniositate. Aceste probleme sunt folositoare ca vitaminele. Ele vă ajută să faceți decizii spontane și nestandarte nu doar în matematică, dar și în viață.

Dacă după îndeplinirea temelor de acasă mai dispuneți de timp, recomandăm să vizionați rubrica "Când temele sunt făcute" și "Pentru cei, ce doresc să cunoască mai mult". Materialul, prezentat în aceste rubrici, este complicat. Dar va fi cu atât mai interesant să vă estimați puterea!

Fiți curajoși! Vă dorim succes!

STIMAȚI COLEGI ȘI COLEGE!

Sperăm, că acest manual va deveni un ajutor sigur în munca voastră ostilă și nobilă și vom fi sincer satisfăcuți, dacă manualul vă este pe plac.

În manual a fost acumulat un volum mare și divers de materiale didactice. Sigur, că în decursul unui an de studiu nu pot fi rezolvate toate problemele, dar nici nu există această necesitate. Totuși, e mult mai ușor de lucrat, când dispunem de o rezervă de probleme și exerciții. Acest fapt face posibilă diferențiarea pe nivele și aplicarea principiului de studiu individual.

Materialul din rubrica “Când temele sunt făcute” poate fi utilizat la organizarea activității cercului de matematică și a orelor facultative.

Vă dorin inspirație creativă și răbdare!

Note convenționale

n° sarcini, ce corespund nivelelor de însușire începătoare și medii;

$n^{\bullet}$ sarcini, ce corespund nivelului satisfăcător de însușire;

$n^{\bullet\bullet}$ sarcini, ce corespund nivelului înalt de însușire;

n^{*} sarcini pentru activitatea cercului de matematică și ore facultative;

◀ sfârșitul demonstrației teoremei sau sfârșitul exercițiului;

 sarcină, ce permite folosirea calculatorului;

 rubrica “Când temele sunt făcute”

Cu culoare verde este evidențiat numărul exercițiilor, recomandate pentru temele de acasă, cu culoare albastră – numărul exercițiilor, ce iau în considerație particularitățile individuale ale elevilor și, la decizia învățătorului, pot fi rezolvate oral .

§ 1 INEGALITĂȚI

- În acest paragraf veți afla în care caz numărul a este considerat mai mare (mai mic) decât numărul b; veți însuși proprietățile inegalităților numerice; veți afla ce este numit soluție de inegalitate cu o variabilă, soluție a unui sistem de inegalități cu o variabilă.
- O să învățați să estimați valorile expresiilor, să demonstrați inegalități, să rezolvați inegalități lineare și sisteme de inegalități lineare cu o variabilă.

1. Inegalități numerice

În viață deseori ne apare necesitatea de a compara valori. De exemplul, aria salei de sport este mai mare decât aria incăperii clasei, teritoriul Ucrainei (603,5 mii de km^2) este mai mare decât teritoriul Franței (551,5 mii de km^2), înălțimea muntelui Roman-Coș (1545 m) este mai mică decât înălțimea muntelui Hoverla (2061 m), distanța de la Kiev până la Harkiv constituie 0,011 din lungimea ecuatorului.

Rezultatele comparațiilor de acest gen pot fi prezentate prin inegalități numerice, folosind caracterele >, <.

Dacă numărul a este mai mare decât numărui b, atunci se scrie: a > b; dacă numărul a este mai mic decât numărul b, se scrie: a < b.

Evident, că $12 > 7, -17 < 3, \frac{15}{23} > \frac{11}{23}, \sqrt{2} > 1$. Justețea acestor inegalități reiese din regulile de comparare ale numerelor reale, studiate deja în clasele precedente.

Dar numerele pot fi comparate nu numai cu ajutorul regulelor, pe care deja le cunoașteți. Altă metodă, mai universală, este bazată pe următoarele afirmații evidente: dacă diferența a două numere este pozitivă, atunci scăzutul este mai mare decât scăzătorul, dar dacă diferența este negativă, atunci scăzutul este mai mic decât scăzătorul.

Aceste relatări sugerează următoarea definiție.

Definiție. Numărul a este considerat mai mare decât numărul b, dacă diferența $a - b$ este număr pozitiv. Numărul a este considerat mai mic decât numărul b, dacă diferența $a - b$ este număr negativ.

Această definiție permite substituția problemei de comparație a două numere cu problema comparației diferenței acestor numere cu zero. De exemplu, pentru a compara valorile expresiilor $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ și $2-\sqrt{3}$, vom compara diferența lor:

$$\frac{2}{2+\sqrt{3}}-\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{2-\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-(4-3)}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

Deoarece $\frac{1}{2+\sqrt{3}}>0$, atunci și $\frac{2}{2+\sqrt{3}}>2-\sqrt{3}$.

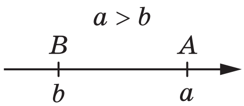


Fig. 1.1

Menținem, că diferența numerelor a și b poate fi sau pozitivă, sau negativă, sau egală cu zero, de aceea *pentru două numere arbitrare a și b poate fi corectă una și doar una din relațiile: $a > b$, $a < b$, $a = b$.*

Dacă $a > b$, atunci punctul, care reprezintă numărul a pe axa de coordonate, va fi situat mai în dreapta de punctul, care reprezintă punctul b (fig. 1.1).

Deseori în viața obișnuită folosim expresiile “nu mai mult”, “nu mai puțin”. De exemplul, conform normelor sanitare, numărul de elevi în clasă nu poate fi mai mare de 30. Semnul de circulație de pe figura 1.2 semnalizează, că viteza automobilului poate fi nu mai mică decât 30 km/oră.

Fig. 1.2

În matematică pentru expresia “nu mai mult” este folosit semnul $\leqslant$ (citit: “mai mic sau egal”), iar pentru expresia “nu mai puțin” – semnul $\geqslant$ (citit: “mai mare sau egal”).

Dacă $a < b$ sau $a = b$, corectă este inegalitatea $a \leqslant b$.

Dacă $a > b$ sau $a = b$, corectă este inegalitatea $a \geqslant b$.

De exemplu, inegalitățile $7 \leqslant 7$, $7 \leqslant 15$, $-3 \geqslant -5$ sunt corecte. Menținem, că, spre exemplu, inegalitatea $7 \leqslant 5$ este incorectă.

Semnele $<$ și$>$ sînt numite semne de inegalitate **strictă**, iar semnele $\leqslant$ și $\geqslant$ sunt numite semne de inegalitate **nestrictă**.

EXEMPLUL 1 Demonstrați, că pentru orice valori ale variabilei a este corectă inegalitatea

$$(a + 1)(a + 2) > a\,(a + 3).$$

Rezolvare. Pentru rezolvare este suficient de arătat, că pentru orice valoare a lui a, diferența dintre partea stângă și partea dreaptă a inegalității va fi pozitivă. Obținem:

$$(a + 1)(a + 2) - a\,(a + 3) = a^2 + 2a + a + 2 - a^2 - 3a = 2. \blacktriangleleft$$

In așa cazuri se spune, că a fost **demonstrată inegalitatea**

$$(a + 1)(a + 2) > a\,(a + 3).$$

EXEMPLU 2 Demonstrați inegalitatea $(a-3)^2 < 2a^2 - 6a + 10$, în care a – orice număr real.

Rezolvare. Calculăm diferența dintre partea stângă și partea dreaptă a acestei inegalități:

$$(a-3)^2 - (2a^2 - 6a + 10) = a^2 - 6a + 9 - 2a^2 + 6a - 10 =$$
$$= -a^2 - 1 = -a^2 + (-1).$$

Pentru orice valori ale lui a obținem: $-a^2 \leqslant 0$. Suma unui număr nepozitiv și al unui număr negativ este un număr negativ. Deci, $-a^2 + (-1) < 0$.

Obținem, că $(a-3)^2 < 2a^2 - 6a + 10$ pentru orice valoare a. ◀

EXEMPLUL 3 Demonstrați inegalitatea $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, dacă $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Rezolvare. Calculăm diferența dintre partea stângă și partea dreaptă a acestei inegalități. Obținem:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

Expresia $\dfrac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$ obține valori nenegative pentru orice valori nenegative ale variabilelor a și b. Deci, inegalitatea, ce necesită demonstrarea, este corectă. ◀

Menținem, că expresia $\sqrt{ab}$ este numită **medie geometrică** a numerelor a și b.

Astfel, am demonstrat, că *media aritmetică a două numere nenegative nu poate fi mai mică decât media geometrică a acestor numere.*

EXEMPLUL 4 Demonstrați, că $a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$ pentru orice valori a și b.

Rezolvare. Calculăm:

$$a^2 - ab + b^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot\frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2 = \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2.$$

Deoarece $\left(a - \dfrac{1}{2}b\right)^2 \geqslant 0$ și $\dfrac{3}{4}b^2 \geqslant 0$ pentru orice valori ale lui a și b, atunci și $\left(a - \dfrac{1}{2}b\right)^2 + \dfrac{3}{4}b^2 \geqslant 0$ pentru orice valori ale lui a și b.

Ca urmare, $a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$ pentru orice valori a și b. ◀

1. În care caz numărul a este considerat mai mare decât numărul b?
2. În care caz numărul a este considerat mai mic decât numărul b?
3. Cum e situat pe axa de coordonate punctul, ce reprezintă numărul a, referitor la punctul, ce reprezinte numărul b, dacă $a > b$?
4. Ce semn se aplică pentru expresia "nu mai mare" și cum este citit acest semn?
5. Ce semn se aplică pentru expresia "nu mai mic" și cum este citit acest semn?
6. În care caz este corectă inegalitatea $a \leqslant b$?
7. În care caz este corectă inegalitatea $a \geqslant b$?
8. Lămuriți, care semne sunt numite semne de inegalitate strictă, și care semne – de inegalitate nestrictă?

EXERCIȚII

1.1.° Comparați numerele a și b, dacă:
1) $a - b = 0,4$; 2) $a - b = -3$; 3) $a - b = 0$.

1.2.° Fie $m < n$. E posibil ca diferența $m - n$ egală cu numărul:
1) 4,6; 2) –5,2; 3) 0?

1.3.° Care din numere, x sau y, este mai mare, dacă:
1) $x - y = -8$; 2) $y - x = 10$?

1.4.° Cum este situat pe axa de coordonate punctul $A(a)$, referitor la punctul $B(b)$, dacă
1) $a - b = 2$; 3) $a - b = 0$;
2) $a - b = -6$; 4) $b - a = \sqrt{2}$?

1.5.° Pot fi concomitent corecte inegalitățile:
1) $a > b$ și $a < b$; 2) $a \geqslant b$ și $a \leqslant b$?

1.6.° Comparați valorile expresiilor $(a - 2)^2$ și $a\ (a - 4)$ pentru valorile lui a, egale cu: 1) 6; 2) –3; 3) 2. Se poate oare afirma pe baza acestor comparații, că pentru orice valoare a lui a, valoarea primei expresii este mai mare decât valoarea respectivă a celei de-a doua expresii? Demonstrați, că pentru orice valoare a lui a, valoarea primei expresii este mai mare decât valoarea respectivă a celei de-a doua expresii.

1.7.° Comparați valorile expresiilor $4\ (b + 1)$ și $b - 2$ pentru valorile lui b, egale cu: 1) –1; 2) 0; 3) 3. Se poate oare afirma, că pentru orice valoare a lui b, valoarea expresii $4\ (b + 1)$ este mai mare decât valoarea respectivă a expresiei $b - 2$?

1.8.° Demonstrați, că pentru orice valoare a variabilei inegalitatea este corectă:

1) $(a+3)(a+1)>a(a+4)$;
2) $3(b-4)+2b<5b-10$;
3) $(c-4)(c+4)>c^2-20$;
4) $x(x+6)-x^2<2(3x+1)$;
5) $(y+5)(y-2)\geqslant 3y-10$;
6) $8m^2-6m+1\leqslant(3m-1)^2$;
7) $a(a-2)\geqslant -1$;
8) $(b+7)^2>14b+40$.

1.9.° Demonstrați, că pentru orice valoare a variabilei inegalitatea este corectă:

1) $(p-3)(p+4)<p(p+1)$;
2) $(x+1)^2>x(x+2)$;
3) $(a-5)(a+2)>(a+5)(a-8)$;
4) $y(y+8)<(y+4)^2$;
5) $(2a-5)^2\leqslant 6a^2-20a+25$;
6) $a^2+4\geqslant 4a$.

1.10.• Este oare corectă afirmația:

1) dacă $a>b$, atunci $\frac{a}{b}>1$;
2) dacă $a>1$, atunci $\frac{2}{a}<2$;
3) dacă $a<1$, atunci $\frac{2}{a}>2$;
4) dacă $\frac{a}{b}>1$, atunci $a>b$;
5) dacă $a^2>1$, atunci $a>1$?

1.11.• Demonstrați inegalitatea:

1) $2a^2-8a+16>0$;
2) $4b^2+4b+3>0$;
3) $a^2+ab+b^2\geqslant 0$;
4) $(3a+2)(2a-4)-(2a-5)^2>3(4a-12)$;
5) $a(a-3)>5(a-4)$;
6) $(a-b)(a+5b)\leqslant(2a+b)(a+4b)+ab$.

1.12.• Demonstrați inegalitatea:

1) $28a-32\leqslant 7a^2-4$;
2) $9x^2-6xy+4y^2\geqslant 0$;
3) $3(b-1)<b(b+1)$;
4) $(4p-1)(p+1)-(p-3)(p+3)>3(p^2+p)$.

1.13.• Demonstrați, că:

1) $a^3 - 6a^2 + a - 6 \geqslant 0$, dacă $a \geqslant 6$;

2) $ab + 1 > a + b$, dacă $a > 1$ și $b > 1$;

3) $\frac{a+3}{3} + \frac{3a-2}{4} < a$, dacă $a < -6$.

1.14.• Demonstrați, că:

1) $ab(b-a) \leqslant a^3 - b^3$, dacă $a \geqslant b$;

2) $\frac{a-1}{2} - \frac{a-2}{3} > \frac{1}{2}$, dacă $a > 2$.

1.15.• Comparați suma pătratelor a orice două numere și produsul lor dublu.

1.16.• Sunt date trei numere naturale consecutive. Comparați:

1) pătratul numărului intermediar și produsul celorlalte două numere;

2) pătratul dublu al numărului intermediar și suma pătratelor ale celorlalte două numere.

1.17.• Comparați suma pătratelor a două numere pozitive și pătratul sumei acestor numere.

1.18.• Cum se va schimba – se va mări sau se va micșora – o fracție corectă $\frac{a}{b}$, în care $a > 0$, $b > 0$, dacă numărătorul și numitorul va fi mărit cu același număr?

1.19.• Cum se va schimba – se va mări sau se va micșora – o fracție incorectă $\frac{a}{b}$, în care $a > 0$, $b > 0$, dacă numărătorul și numitorul va fi mărit cu acelaș număr?

1.20.• Demonstrați, că suma a orice două numere pozitive, reciproc inverse, nu poate fi mai mică ca 2.

1.21.• Demonstrați, că suma a orice două numere negative, reciproc inverse, nu poate fi mai mare ca –2.

1.22.• Va fi oare corectă inegalitatea pentru orice valori ale numerelor a și b:

1) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 1} > 1$; 2) $\frac{a^2 - b^2}{b^2 + 1} > -1$?

1.23.• Demonstrați, că, pentru orice valoare a variabilei, inegalitatea este corectă:

1) $\frac{a^2}{a^4 + 1} \leqslant \frac{1}{2}$; 2) $\frac{(5a+1)^2}{5} \geqslant 4a$.

1.24.• Demonstrați, că dacă $a < b$, atunci $a < \frac{a+b}{2} < b$.

1.25.•• Demonstrați, că dacă $a < b < c$, atunci $a < \frac{a+b+c}{3} < c$.

1.26.•• Este oare corectă inegalitatea $\frac{a^2+4}{2} \geqslant \sqrt{a^2+3}$ pentru orice valoare a lui a?

1.27.•• Demonstrați, că pentru orice valoare a variabilei inegalitatea $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geqslant 2$. este corectă.

1.28.•• Demonstrați inegalitatea:

1) $a^2+b^2+6a-4b+13 \geqslant 0$;
2) $x^2-2x+y^2+10y+28>0$;
3) $2m^2-6mn+9n^2-6m+9 \geqslant 0$;
4) $a^2+b^2+c^2+12 \geqslant 4(a+b+c)$;
5) $a^2b^2+a^2+b^2+1 \geqslant 4ab$.

1.29.•• Demonstrați inegalitatea:

1) $a^2+b^2-16a+14b+114>0$;
2) $x^2+y^2+10 \geqslant 6x-2y$;
3) $c^2+5d^2+4cd-4d+4 \geqslant 0$.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

1.30. Fie $a>0$, $b>0$, $c<0$, $d<0$. Comparați cu zero valoarea expresiei:

1) bc;
2) cd;
3) $\frac{a}{b}$;
4) $\frac{ab}{c}$;
5) $\frac{ac}{d}$;
6) $\frac{a}{bc}$;
7) $abcd$;
8) $\frac{b}{acd}$.

1.31. Ce se poate spune despre semnele numerelor a și b, dacă:

1) $ab>0$;
2) $ab<0$;
3) $\frac{a}{b}>0$;
4) $\frac{a}{b}<0$;
5) $a^2b>0$;
6) $a^2b<0$?

1.32. Explicați, de ce pentru orice valori ale variabilei (sau ale variabilelor) inegalitatea este corectă:

1) $a^2 \geqslant 0$;
2) $a^2 + 1 > 0$;
3) $(a+1)^2 \geqslant 0$;
4) $a^2 - 4a + 4 \geqslant 0$;
5) $a^2 + b^2 \geqslant 0$;
6) $a^2 + b^2 + 2 > 0$;
7) $(a-2)^2 + (b+1)^2 \geqslant 0$;
8) $\sqrt{a^2+3} > 0$.

1.33. Comparați cu zero valoarea expresiei, dacă a – număr arbitrar:

1) $4 + a^2$;
2) $(4 - a)^2$;
3) $-4 - a^2$;
4) $-4 - (a - 4)^2$;
5) $(-4)^8 + (a - 8)^4$;
6) $(4 - a)^2 + (4a - 1000)^2$.

1.34. Simplificați expresia:

1) $2a\,(5a - 7) - 5a\,(3 - 2a)$;
2) $(2b - 3)(4b + 9)$;
3) $(2c - 6)(8c + 5) - (5c + 2)(5c - 2)$;
4) $16m^2 - (3 - 4m)(3 + 4m)$;
5) $(2x - 1)^2 + (2x + 1)^2$;
6) $(x - 4)(x + 4) - (x - 8)^2$.

ÎNSUȘIM ACȚIUNI NESTANDARTE

1.35. Toate numerele naturale de la 1 până la 1000 au fost selectate în două grupe: numerele pare și numerele impare. În care grup suma cifrelor, aplicate la scrierea numerelor, va fi mai mare și cu ce valoare?

2. Proprietățile de bază ale inegalităților numerice

In acest punct vor fi studiate proprietățile inegalităților numerice, frecvent aplicate la rezolvarea exercițiilor. Aceste proprietăți sunt numite **proprietăți de bază ale inegalităților numerice**.

Teorema 2.1. ***Dacă $a > b > b > c$, atunci $a > c$.***

Demonstrație: Deoarece, conform condiției, $a > b$ și $b > c$, atunci $a - b$ și $b - c$ vor fi numere pozitive. Suma acestor diferențe $(a - b) + (b - c)$de asemenea este pozitivă. Obținem $(a - b) + (b - c) = a - c$. Adică, diferența $a - c$ este pozitivă. De aici rezultă, că $a > c$. ◀

Analogic poate fi demonstrată proprietatea: ***dacă $a < b$ și $b < c$, atunci $a < c$.***

Teorema 2.1 poate fi reprezentată geometric (fig. 2.1): dacă pe axa de coordonate punctul $A(a)$ e situat în dreapta de punctul $B(b)$, iar punctul $B(b)$ – în dreapta de punctul $C(c)$, atunci punctul $A(a)$ este situat în dreapta de punctul $C(c)$.

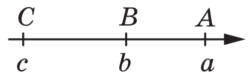


Fig. 2.1

Teorema 2.2. ***Dacă*** $\boldsymbol{a > b}$ ***și*** $\boldsymbol{c}$ ***– număr arbitrar, atunci*** $\boldsymbol{a + b > b + c}$.

Demonstrație: calculăm diferența $(a + c) - (b + c)$. Obținem: $(a + c) - (b + c) = a - b$. Deoarece $a > b$, diferența $a - b$ este pozitivă. De aici rezultă, că $a + c > b + c$. ◀

Astfel poate fi demonstrată proprietatea: ***dacă*** $\boldsymbol{a < b}$ ***și*** $\boldsymbol{c}$ ***– număr arbitrar, atunci*** $\boldsymbol{a + c < b + c}$.

Deaorece diferența poate fi înlocuită cu suma ($a - c = a + (-c)$), teorema 2.2 poate fi formultă în modul următor:

dacă la ambele părți ale unei inegalități corecte este adunat acelaș numar sau de la ambele părți ale unei egalități corecte este scăzut acelaș număr, se obține o inegalitate corectă.

Consecință. ***Dacă orice termen este transferat dintr-o parte a inegalității corecte în altă parte, schimbând semnul termenului în semn invers, se obține o inegalitate corectă.***

Demonstrație. Fie $a > b + c$ inegalitate corectă. Scădem de la ambele părți numărul c. Obținem: $a - c > b + c - c$, adică $a - c > b$. ◀

Teorema 2.3. ***Dacă*** $\boldsymbol{a > b}$ ***și*** $\boldsymbol{c}$ ***– număr pozitiv, atunci*** $\boldsymbol{ac > bc}$. ***Dacă*** $\boldsymbol{a > b}$ ***și*** $\boldsymbol{c}$ ***– număr negativ, atunci*** $\boldsymbol{ac < bc}$.

Demonstrație. Calculăm diferența $ac - bc$. Obținem:

$$ac - bc = c\,(a - b).$$

Conform condiției, $a > b$, reiese, că diferența $a - b$ este număr pozitiv.

Dacă $c > 0$, atunci și produsul $c\,(a - b)$ este număr pozitiv, reiese că diferența $ac - bc$ este pozitivă, adică $ac > bc$.

Dacă $c < 0$, atunci și produsul $c\,(a - b)$ este număr negativ, reiese că diferența $ac - bc$ este negativă, adică $ac < bc$. ◀

Analogic poate fi demonstrată proprietatea: ***dacă*** $\boldsymbol{a < b}$ ***și*** $\boldsymbol{c}$ ***– număr pozitiv, atunci*** $\boldsymbol{ac < bc}$. ***Dacă*** $\boldsymbol{a < b}$ ***și*** $\boldsymbol{c}$ ***– număr negativ, atunci*** $\boldsymbol{ac > bc}$.

Deoarece câtul poate fi înlocuit cu produsul $\left(\frac{a}{c} = a \cdot \frac{1}{c}\right)$, teorema 2.3 poate fi formulată în modul următor:

dacă ambele părți ale unei inegalități corecte vor fi înmulțite cu acelaș număr pozitiv sau împărțite la același număr pozitiv, se va obține o inegalitate corectă;

dacă ambele părți ale unei inegalități corecte vor fi înmulțite cu acelaș număr negativ sau împărțite la același număr negativ, iar semnul inegalității va fi schimbat în semn opus, se va obține o inegalitate corectă.

Consecință. ***Dacă $ab>0$ și $a>b$, atunci*** $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

Demonstrație. Împărțim ambele părți ale inegalității $a>b$ la numărul pozitiv ab. Obținem inegalitatea corectă $\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}$, după simplificări $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$. Sau $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. ◀

Menținem, că dacă în formularea consecinței este exclusă condiția $ab>0$, adică cerința, ca ambele numere a și b să fie cu semne identice, atunci din inegalitatea $a>b$ este posibil să nu rezulte inegalitatea $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. Într-devăr, inegalitatea $5>-3$ este corectă, dar inegalitatea $\frac{1}{5}<-\frac{1}{3}$ este incorectă.

În teoremele din acest punct au fost prezentate proprietăți pentru inegalități stricte. De proprietăți analogice dispun și inegalitățile nestricte. De exemplu, dacă $a \geqslant b$ și c – număr arbitrar, atunci $a+c \geqslant b+c$.

?

1. Care din numere – a sau c – este mai mare, dacă $a > b$ și $b > c$?
2. Formulați teorema despre adunarea la ambele părți ale unei inegalități a aceluiaș număr.
3. Formulați consecința din teorema despre adunarea la ambele părți ale unei inegalități a aceluiași număr.
4. Formulați teorema despre înmulțirea ambelor părți ale unei inegalități cu același număr.
5. Formulați consecința din teorema despre înmulțirea ambelor părți ale unei inegalități cu același număr.

EXERCIȚII

2.1.° Fie $a>6$. Este oare corectă inegalitatea:
1) $a>4$; 2) $a \geqslant 5,9$; 3) $a>7$?

2.2.° Fie $a < b$ și $b < c$. Care din afirmații este corectă:
1) $a>c$; 2) $a = c$; 3) $c>a$?

2.3.° Prezentați inegalitatea, ce se obține, dacă:

1) la ambele părți ale inegalității $-3 < 4$ se adună numărul 5; numărul -2;
2) din ambele părți ale inegalității $-10 < -6$ se scade numărul 3; numărul -4;
3) ambele părți ale inegalității $7 > -2$ sunt înmulțite cu numărul 5; numărul -1;
4) ambele părți ale inegalității $12 < 18$ sunt împărțite la numărul 6; numărul -2.

2.4.° Fie $a > b$. Prezentați inegalitatea, ce se obține, dacă:

1) la ambele părți ale inegalității se adaugă numărul 8;
2) de la ambele părți ale inegalității se scade numărul -6;
3) ambele părți ale inegalității sunt înmulțite cu numărul 12; 12;
4) ambele părți ale inegalității sunt înmulțite cu numărul $-\frac{1}{3}$;
5) ambele părți ale inegalității sunt împărțite la numărul $\frac{2}{7}$;
6) ambele părți ale inegalității sunt împărțite la numărul -4.

2.5.• Fie $b > a$, $c < a$ și $d > b$. Comparați numerele:

1) a și d; 2) b și c.

2.6.• Aranjați în ordine crescătoare numerele a, b, c și 0, dacă $a > b$, $0 < b$ și $0 > c$.

2.7.• Fie $a > 4$. Comparați cu zero valoarea expresiei:

1) $a - 3$;
2) $2 - a$;
3) $(a - 3)(a - 2)$;
4) $\frac{(a-4)(a-2)}{3-a}$;
5) $(1 - a)^2 (4 - a)$.

2.8.• Fie $-2 < b < 1$. Comparați cu zero valoarea expresiei:

1) $b + 2$;
2) $1 - b$;
3) $b - 2$;
4) $(b - 1)(b - 3)$;
5) $(b + 2)(b - 4)^2$;
6) $(b - 3)(b + 3)(b - 2)^2$.

2.9.• Fie $a > b$. Comparați:

1) $a + 9$ și $b + 9$;
2) $b - 6$ și $a - 6$;
3) $1{,}8a$ și $1{,}8b$;
4) $-a$ și $-b$;
5) $-40b$ și $-40a$;
6) $\frac{a}{20}$ și $\frac{b}{20}$;
7) $2a - 3$ și $2b - 3$;
8) $5 - 8a$ și $5 - 8b$.

2.10.• Fie $1 \leqslant m < 2$. Care din inegalități sunt corecte:

1) $-1 \leqslant -m < -2$;
2) $-2 < -m \leqslant -1$;
3) $-1 \geqslant -m > -2$;
4) $-2 > -m \geqslant -1$?

2.11.• Fie $-3a > -3b$. Comparați:
1) a și b;
2) $\frac{2}{7}a$ și $\frac{2}{7}b$;
3) $b - 4$ și $a - 4$;
4) $-\frac{5}{9}b$ și $-\frac{5}{9}a$;
5) $3a + 2$ și $3b + 2$;
6) $-5a + 10$ și $-5b + 10$.

2.12.• Fie $a > b$. Aranjați în ordine descrescătoare numerele $a + 7$, $b - 3$, $a + 4$, $b - 2$, b.

2.13.• Fie $a < b$. Comparați:
1) $a - 5$ și b;
2) a și $b + 6$;
3) $a + 3$ și $b - 2$.

2.14.• Comparați numerele a și b, dacă:
1) $a > c$ și $c > b + 3$;
2) $a > c$ și $c - 1 > b + d^2$,

iar c și d – numere arbitrare.

2.15.• Comparați numerele a și 0, dacă:
1) $7a < 8a$;
2) $\frac{a}{2} < \frac{a}{3}$;
3) $-6a > -8a$;
4) $-0{,}02a > -0{,}2a$.

2.16.• Fie $a > -2$. Demonstrați, că:
1) $7a + 10 > -4$;
2) $-6a - 3 < 10$.

2.17.• Fie $b \leqslant 10$. Demonstrați, că:
1) $5b - 9 \leqslant 41$;
2) $1 - 2b > -21$.

2.18.• Este oare corectă afirmația:
1) dacă $a > b$, atunci $a > -b$;
2) dacă $a > b$, atunci $2a > b$;
3) dacă $a > b$, atunci $2a + 1 > 2b$;
4) dacă $a > b + 2$ și $b - 3 > 4$, atunci $a > 9$;
5) dacă $a > b$, atunci $ab > b^2$;
6) deoarece $5 > 3$, atunci și $5a^2 > 3a^2$;
7) deoarece $5 > 3$, atunci și $5(a^2 + 1) > 3(a^2 + 1)$?

2.19.•• Prezentați inegalitatea, ce se va obține, dacă:
1) ambele părți ale inegalității corecte $a > 2$ vor fi înmulțite cu a;
2) ambele părți ale inegalității corecte $b < -1$ vor fi înmulțite cu b;
3) ambele părți ale inegalității corecte $m < -3$ vor fi înmulțite cu $-m$;
4) ambele părți ale inegalității corecte $c > -4$ vor fi înmulțite cu c.

2.20.•• Prezentați inegalitatea, ce se va obține, dacă:
1) ambele părți ale inegalității corecte $a < -a^2$ vor fi împărțite la a;
2) ambele părți ale inegalității corecte $a > 2a^2$ vor fi împărțite la a;
3) ambele părți ale inegalității corecte $a^3 > a^2$ vor fi împărțite la $-a$.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE.

2.21. Fie $a^2 + b^2 = 18$ și $(a + b)^2 = 20$. Cu ce va fi egală valoarea expresiei ab?

2.22. Dumitru are de două ori mai multe timbre decât Nadea. Nadea are de două ori mai multe timbre decât Mihai. Care din numere poate fi egal cu numărul de timbre, pe care le are Dumitru??
1) 18; 2) 22; 3) 24; 4) 30.

2.23. Simplificați expresia:
1) $\dfrac{a^2+b^2}{2a^2+2ab}+\dfrac{b}{a+b}$;
3) $\dfrac{c+1}{3c}:\dfrac{c^2-1}{6c^2}$;
2) $\dfrac{a^2+9}{a^2-9}-\dfrac{a}{a+3}$;
4) $\dfrac{m^2+2mn+n^2}{m^2-n^2}:(m+n)$.

2.24. O barcă cu motor în acelaș interval de timp poate parcurge 48 km în direcția cursului apei sau 36 km contra cursului apei. Care este viteza proprie a bărcii, dacă viteza apiei este egală cu 2 km/oră?

3. Adunarea și înmulțirea inegalităților numerice. Estimația valorii expresiei

Analizăm axemple.

1) Dacă de pe primul lan au fost strânse nu mai puțin de 40 t de secară, iar de pe al doilea lan – nu mai puțin de 45 t, este evident, că de pe ambele lanuri în total au fost strânse nu mai puțin de 85 t de secară.

2) Dacă lungimea dreptunghiului nu depășește 70 cm, iar lățimea – nu depășește 40 cm, e clar, că aria dreptunghiului nu depășește 2800 cm^2 .

Concluziile făcute din aceste exemple sunt intuitiv evidente. Justețea lor este confirmată de următoarele teoreme.

Teorema 3.1. (despre adunarea pe părți a inegalităților). ***Dacă $a>b$ și $c>d$, atunci $a + c > b + d$.***

Demonstrație. Calculăm diferența $(a + c) – (b + d)$. Obținem:
$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d).$$
Deoarece $a>b$ și $c>d$, atunci diferențele $a - b$ și $c - d$ sunt numere pozitive. Deci, și diferența analizată va fi pozitivă, adică $a + c>b + d$. ◄

În mod analogic poate fi demonstrată și proprietatea: ***dacă a < b și c < d, atunci a + c < b + d.***

Inegalitățile $a > b$ și $c > d$ (sau $a < b$ și $c < d$) sunt numite **inegalități de acelaș semn**, iar inegalitățile $a > b$ și $c < d$ (sau $a < b$ și $c > d$) – **inegalități de semn opus**.

Se spune, că inegalitatea $a + c > b + d$ este obținută din inegalitățile $a > b$ și $c > d$ prin metoda adunării pe părți.

Sensul teoremei 3.1 este acela, că ***în urma adunării pe părți a inegalităților de acelaș semn se obține o inegalitate corectă de acelaș semn.***

Menținem, că teorema 3.1 este corectă și în cazul adunării pe părți a trei și mai multe inegalități. De exemplu, dacă $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$ și $a_3 > b_3$, atunci $a_1 + a_2 + a_3 > b_1 + b_2 + b_3$.

Teorema 3.1. (despre înmulțirea pe părți a inegalităților). ***Dacă a > b, c > d și a, b, c, d – numere pozitive, atunci ac > bd.***

Demonstrație. Calculăm diferența $ac - bd$. Obținem:

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c\,(a - b) + b\,(c - d).$$

Conform condiției $a - b > 0$, $c - d > 0$, $c > 0$, $b > 0$. Deci, diferența analizată este un număr pozitiv. Reiese, că $ac > bd$. ◀

În mod analogic poate fi demonstrată și proprietatea: ***dacă a < b, c < d și a, b, c, d – numere pozitive, atunci ac < bd.***

Se spune, că inegalitatea $ac > bd$ este obținută din inegalitățile $a > b$ și $c > d$ prin metoda înmulțirii pe părți.

Sensul teoremei 3.1 este acela, că ***în urma înmulțirii pe părți a inegalităților de acelaș semn, în care părțile stângi și părțile drepte sânt numere pozitive, se obține o inegalitate corectă de acelaș semn.***

Atragem atenția: dacă din formularea teoremei 3.2 este exclusă condiția, că a, b, c, d sunt numere pozitive, din inegalițățile $a > b$ și $c > d$ este posibil să nu se obțină inegalitatea corectă $ac > bd$. Într-adevăr, fie date două inegalități corecte $-2 > -3$ și $4 > 1$. Înmulțind inegalitățile pe părți, obținem o inegalitate incorectă $-8 > -3$.

Menținem, că teorema 3.2 este justă și în cazul înmulțirii pe părți a trei sau mai multe inegalități. De exemplu, dacă a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 – sunt numere pozitive, și $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$, $a_3 > b_3$, atunci $a_1 a_2 a_3 > b_1 b_2 b_3$.

Consecință. ***Dacă a > b și a, b – numere pozitive, atunci $a^n > b^n$, unde n – număr natural.***

Demonstrație. Notăm n inegalități corecte $a > b$:

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ a > b \\ \ldots \\ a > b \end{array}\right\} n \textbf{ inegalități}$$

Deoarece a și b – sânt numere pozitive, putem înmulți pe părți toate inegalitățile. Obținem: $a^n > b^n$. ◀

Menținem, că aceste proprietăți vor fi corecte și în cazul inegalităților nestricte:

dacă $a \geqslant b$ ***și*** $c \geqslant d$, ***atunci*** $a + c \geqslant b + d$;

dacă $a \geqslant b$, $c \geqslant d$ ***și*** a, b, c, d ***– numere pozitive, atunci*** $ac \geqslant bd$;

dacă $a \geqslant b$ ***și*** a, b ***– numere pozitive, atunci*** $a^n \geqslant b^n$, n ***– număr natural.***

Probabil cunoașteți, că valorile mărimilor, obținute în urma măsurărilor, nu sunt exacte. Echipamentele de luat măsuri dau posibilitatea doar de a stabili, între care numere poate fi valoare exactă măsurată. Aceste numere sunt numite **limite ale valorii mărimii**.

De exemplu, în urma măsurărilor lățimii x și a lungimii y s-a stabilit, că $2{,}5 \text{ cm} < x < 2{,}7 \text{ cm}$ și $4{,}1 \text{ cm} < y < 4{,}3 \text{ cm}$. Obținem:

$$\times \begin{array}{c} 2{,}5 \text{ cm} < x < 2{,}7 \text{ cm} \\ 4{,}1 \text{ cm} < y < 4{,}3 \text{ cm} \\ \hline 10{,}25 \text{ cm}^2 < xy < 11{,}61 \text{ cm}^2. \end{array}$$

În general, dacă sunt cunoscute valorile limitelor mărimilor, folosind proprietățile inegalităților, pot fi calculate limitele valorii expresiei, ce conține aceste mărimi, adică poate fi **estimată** valoarea expresiei.

EXEMPLUL 1 Fie $6 < a < 8$ și $10 < b < 12$. Estimați valoare expresiei:

1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) ab; 4) $\frac{a}{b}$; 5) $3a - \frac{1}{2}b$.

Rezolvare. 1) Aplicăm teorema despre adunarea pe părți și obținem:

$$+ \begin{array}{c} 6 < a < 8 \\ 10 < b < 12 \\ \hline 16 < a + b < 20. \end{array}$$

2) Înmulțim fiecare parte a inegalității $10<b<12$ cu -1, și obținem: $-10>-b>-12$, adică $-12<-b<-10$. Luând în vedere, că $a-b=a+(-b)$, obținem:

$$+\begin{array}{c} 6<a<8 \\ -12<-b<-10 \\ \hline -6<a-b<-2. \end{array}$$

3) Deoarece $a>6$ și $b>10$, atunci a și b vor avea valori pozitive. Aplicând teorema despre înmulțirea pe părți a inegalităților, obținem:

$$\times\begin{array}{c} 6<a<8 \\ 10<b<12 \\ \hline 60<ab<96. \end{array}$$

4) Deoarece $10<b<12$, atunci $\frac{1}{10}>\frac{1}{b}>\frac{1}{12}$, adică $\frac{1}{12}<\frac{1}{b}<\frac{1}{10}$. Având în vedere, că $\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}$, obținem:

$$\times\begin{array}{c} 6<a<8 \\ \frac{1}{12}<\frac{1}{b}<\frac{1}{10} \\ \hline \frac{1}{2}<\frac{a}{b}<\frac{4}{5}. \end{array}$$

5) Înmulțim fiecare parte a inegalității $6<a<8$ cu 3, iar fiecare parte a inegalității $10<b<12$ cu $-\frac{1}{2}$.

Obținem două inegalități corecte:

$$18<3a<24 \text{ și } -5>-\frac{1}{2}b>-6.$$

Adunăm inegalitățile obținute:

$$+\begin{array}{c} 18<3a<24 \\ -6<-\frac{1}{2}b<-5 \\ \hline 12<3a-\frac{1}{2}b<19. \end{array}$$

Răspuns 1) $16<a+b<20$; 2) $-6<a-b<-2$; 3) $60<ab<96$; 4) $\frac{1}{2}<\frac{a}{b}<\frac{4}{5}$; 5) $12<3a-\frac{1}{2}b<19$. ◀

EXEMPLUL 2 Demonstrați, că $\sqrt{24}+\sqrt{47}<12$.

Rezolvare. Deoarece $\sqrt{24}<5$ și $\sqrt{47}<7$, putem constata, că

$$\sqrt{24}+\sqrt{47}<5+7=12.$$ ◄

1. Formulați teorema despre adunarea pe părți a inegalităților.
2. Explicați, care inegalități sunt numite inegalități de acelaș semn și care – inegalități de semn opus.
3. Formulați teorema despre înmulțirea pe părți a inegalităților.
4. Formulați consecința din teorema despre înmulțirea pe părți a inegalităților.

EXERCIȚII

3.1.° Arătați inegalitatea, ce se obține, dacă:

1) vor fi adunate pe părți inegalitățile $10>-6$ și $8>5$;

2) vor fi înmulțite pe părți inegalitățile $2<7$ și $3<4$;

3) vor fi înmulțite pe părți inegalitățile $1{,}2>0{,}9$ și $5>\frac{1}{3}$.

3.2.° Arătați inegalitatea, ce se obține, dacă:

1) vor fi adunate pe părți inegalitățile $-9<-4$ și $-6<4$;

2) vor fi înmulțite pe părți inegalitățile $\frac{1}{6}<\frac{1}{3}$ și $24<27$.

3.3.° Fie $-3<a<4$. Estimați valoarea expresiei:

1) $2a$; 3) $a+2$; 5) $3a+1$; 7) $-4a$;

2) $\frac{a}{3}$; 4) $a-1$; 6) $-a$; 8) $-5a+3$.

3.4.° Fie $2<b<6$. Estimați valoarea expresiei:

1) $\frac{1}{2}b$; 2) $b-6$; 3) $2b+5$; 4) $4-b$.

3.5.° Fie $2{,}6<\sqrt{7}<2{,}7$. Estimați valoarea expresiei:

1) $3\sqrt{7}$; 2) $-2\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{7}+1{,}3$; 4) $0{,}1\sqrt{7}+0{,}3$.

3.6.° Fie $5<a<6$ și $4<b<7$. Aflați valoarea expresiei:

1) $a+b$; 2) ab; 3) $a-b$.

3.7.° Se știe, că $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ și $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$. Estimați valoarea expresiei:
1) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; 3) $\sqrt{15}$.

3.8.° Fie $2 < x < 4$. Aflați valoarea expresiei $\frac{1}{x}$.

3.9.° Estimați media aritmetică a valorilor a și b, dacă $2,5 < a < 2,6$ și $3,1 < b < 3,2$.

3.10.° Estimați perimetrul triungiului isoscel cu baza a cm și latura laterală b cm, dacă $10 < a < 14$ și $12 < b < 18$.

3.11.° Estimați perimetrul paralelogramului cu laturile a cm și b cm, dacă $15 \leqslant a \leqslant 19$ și $6 \leqslant b \leqslant 11$.

3.12.• Este oare corectă afirmația:
1) dacă $a > 2$ și $b > 7$, atunci $a + b > 9$;
2) dacă $a > 2$ și $b > 7$, atunci $a + b > 8$;
3) dacă $a > 2$ și $b > 7$, atunci $a + b > 9,2$;
4) dacă $a > 2$ și $b > 7$, atunci $a - b > -5$;
5) dacă $a > 2$ și $b > 7$, atunci $b - a > 5$;
6) dacă $a > 2$ și $b > 7$, atunci $ab > 13$;
7) dacă $a > 2$ și $b > 7$, atunci $3a + 2b > 20$;
8) dacă $a > 2$ și $b < -7$, atunci $a - b > 9$;
9) dacă $a < 2$ și $b < 7$, atunci $ab < 14$;
10) dacă $a > 2$, atunci $a^2 > 4$;
11) dacă $a < 2$, atunci $a^2 < 4$;
12) dacă $a > 2$, atunci $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$;
13) dacă $a < 2$, atunci $\frac{1}{a} > \frac{1}{2}$;
14) dacă $-3 < a < 3$, atunci $-\frac{1}{3} < \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$?

3.13.• Fie $a > 2,4$ și $b > 1,6$. Comparați:
1) $a + \frac{3}{4}b$ și 3,6;
2) $(a + b)^2$ și 16;
3) $(a - 0,4)(b + 1,4)$ și 6.

3.14.• Fie $a > 3$ și $b > -2$. Demonstrați, că $5a + 4b > 7$.

3.15.• Fie $a > 5$ și $b < 2$. Demonstrați, că $6a - 7b > 16$.

3.16.• Fie $5 < a < 8$ și $3 < b < 6$. Afați valoarea expresiei:
1) $4a + 3b$; 2) $3a - 6b$; 3) $\frac{a}{b}$; 4) $\frac{2b}{3a}$.

3.17.$^{\bullet}$ Fie $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ și $\frac{1}{7} < y < \frac{1}{4}$. Estimați valoarea expresiei:

1) $6x + 14y$; 2) $28y - 12x$; 3) $\frac{y}{x}$.

3.18.$^{\bullet}$ Comparați valorile expresiilor:

1) 2^{24} și 9^8; 2) $0{,}3^{20}$ și $0{,}1^{10}$; 3) $0{,}0015^{10}$ și $0{,}2^{40}$.

3.19.$^{\bullet}$ Demonctrați, că perimetrul patrulaterului este mai mare decât suma diagonalelor lui.

3.20.$^{\bullet}$ Demonstrați, că fiecare diagonală a unui patrulater convex este mai mică decât jumătate de perimetru.

3.21.$^{\bullet}$ Demonstrați, că suma a două laturi opuse ale unui patrulater convex este mai mică decât suma diagonalelor patrulaterului.

3.22.$^{\bullet}$ Demonstrați afirmația:

1) dacă $a < b < 0$, atunci $a^2 > b^2$;

2) dacă $a > 0$, $b > 0$ și $a^2 > b^2$, atunci $a > b$.

3.23.$^{\bullet}$ Demonstrați, că, dacă $a < b < 0$, atunci $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

3.24.$^{\bullet}$ Fie $b > 0$ și $a > b$. Va fi oare corectă inegalitatea pentru toate valorile posibile ale variabilelor a și b:

1) $a^2 + a > b^2 + b$; 3) $2 - a^2 < 2 - b^2$;

2) $a^2 - a > b^2 - b$; 4) $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$?

3.25.$^{\bullet\bullet}$ Demonstrați, că:

1) $\sqrt{27} + \sqrt{65} > 13$; 3) $\sqrt{65} - \sqrt{35} > 2$;

2) $\sqrt{14} + \sqrt{15} < 8$; 4) $\sqrt{99} - \sqrt{82} < 1$.

3.26.$^{\bullet\bullet}$ Demonstrați, că:

1) $\sqrt{55} + \sqrt{35} > \sqrt{120}$; 2) $\sqrt{119} - \sqrt{67} < 3$.

3.27.$^{\bullet\bullet}$ Comparați:

1) $\sqrt{10} + \sqrt{6}$ și $\sqrt{11} + \sqrt{5}$; 3) $\sqrt{15} - \sqrt{5}$ și $\sqrt{2}$;

2) $2 + \sqrt{11}$ și $\sqrt{5} + \sqrt{10}$; 4) $\sqrt{21} + \sqrt{20}$ și 9.

3.28.$^{\bullet\bullet}$ Comparați:

1) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$ și $\sqrt{7} + \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{26} - \sqrt{2}$ și $\sqrt{14}$.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

3.29. Simplificați expresia:

1) $\frac{x-3}{x+3} \cdot \left(x + \frac{x^2}{3-x}\right)$; 2) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{ab}{a^2-b^2}$.

3.30. Simplificați expresia:

1) $6\sqrt{3}+\sqrt{27}-3\sqrt{75}$;
2) $\left(\sqrt{50}-3\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$;
3) $\left(2-\sqrt{3}\right)^2$.

3.31. Pentru ce valori ale variabilei expresia are sens

1) $\dfrac{x^2}{x+4}$; 2) $\dfrac{x-4}{x^2-4}$; 3) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$; 4) $\dfrac{4}{x-4}+\dfrac{1}{x}$?

3.32. În livadă cresc meri și vișini. Vișinii constitue 20 % din numărul total de pomi. Câte procente constitue numărul de meri față de numărul de vișini?

NE PREGĂTIM DE STUDIEREA UNEI TEME NOI

3.33. Sunt oare echivalente ecuațiile:

1) $4x+6=2x-3$ și $4x+3=2x-6$;
2) $8x-4=0$ și $2x-1=0$;
3) $x^2+2x-3=0$ și $x^2+x=3-x$;
4) $\dfrac{x^2-1}{x+1}=0$ și $x^2-1=0$;
5) $\dfrac{x^2-1}{x+1}=0$ și $x-1=0$;
6) $x^2+1=0$ și $0x=5$?

ÎNSUȘIM ACȚIUNI NESTANDARTE

3.34. Demonstrați, că pentru numerele impare a, b, c, d, e și f nu poate fi corectă egalitatea $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{f}=1$.

Despre unele metode de rezolvare a inegalităților

În p. 1 au fost demonstrate câteva inegalități. Am aplicat următoarele acțiuni: am calculat diferența dintre partea stângă și partea dreaptă a inegalității și am comparat-o cu zero.

Dar există și alte metode de rezolvare ale inegalităților. Vom însuși câteva din ele.

Gândirea "de la contrar"

Denumirea metodei determină și sensul ei.

EXEMPLUL 1 Pentru orice numere a_1, a_2, b_1, b_2 demonstrați inegalitatea

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right). \qquad (*)$$

Rezolvare. Presupunem, că inegalitatea, pe care o demonstrăm, nu este corectă. Atunci există așa numere a_1, a_2, b_1, b_2, pentru care este corectă inegalitatea

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 > \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right).$$

De aici

$$a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 > a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2;$$
$$2a_1b_1a_2b_2 > a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2;$$
$$a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2 < 0;$$
$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 < 0.$$

Ultima inegalitate este incorectă. Din contradicția obținută reiese, că inegalitatea (*) este corectă. ◀

Inegalitatea (*) este un caz particular al unei inegalități generale

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right). \qquad (**)$$

Inegalitatea (**) are denumirea de *inegalitate a lui Cauchy-Buniakovsky*. Demonstrația acestei inegalități o puteți studia la cercul de matematică.

Metoda aplicării inegalităților evidente

EXEMPLUL 2 Pentru orice numere a, b și c demonstrați inegalitatea

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac.$$

Augustin Louis Cauchy
(1789–1857)

Matematecian francez remarcabil, autor a peste 800 lucrări științifice.

Rezolvare. Evident, că pentru orice valori a variabilelor a, b și c este corectă următoarea inegalitate:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0.$$

De aici obținem: $a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2 \geqslant 0;$

$$2a^2+2b^2+2c^2 \geqslant 2ab+2bc+2ac;$$

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac. \blacktriangleleft$$

Metoda aplicării inegalității demonstrate recent

În p. 1 am demonstrat, că pentru orice numere $a \geqslant 0$ și $b \geqslant 0$ este corectă inegalitatea

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Această inegalitate este numită *inegalitatea lui Cauchy pentru două numere.*

Vom vedea, cum poate fi aplicată inegalitatea lui Cauchy la rezolvarea altor inegalități.

EXEMPLUL 3 Demonstrați, că pentru numerele pozitive a și b este corectă inegalitatea

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geqslant 4.$$

Rezolvare. Aplicăm inegalitatea lui Cauchy pentru numerele pozitive a și $\frac{1}{b}$. Obținem:

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot \frac{1}{b}}.$$

De aici $a+\frac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$

Analogic se poate demonstra, că $b+\frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}}.$

Victor Iacovici Buniakovsky
(1804–1889)

Matematician remarcabil din secolul XIX. Născut la Vinnița. Timp îndelungat a fost vice-președinte al academiei de științe din Petersburg

Aplicând teorema despre înmulțirea pe părți a inegalităților, obținem:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geqslant 4\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

De aici $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geqslant 4.$ ◀

Metoda interpretării geometrice

EXEMPLUL 4 Demonstrați inegalitatea:

$$\sqrt{99 \cdot 101}+\sqrt{98 \cdot 102}+\ldots+\sqrt{2 \cdot 198}+\sqrt{1 \cdot 199}<\frac{100^2 \pi}{4}.$$

Rezolvare. Construim un sfert de cerc cu raza 1 și centrul O. Înscriem în sfertul de cerc o figură cu trepte, formată din 99 dreptungiuri, așa cum e arătat pe figura 3.1. Obținem:

$$OA_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{98}A_{99} = \frac{1}{100}.$$

Aria primului dreptunghi

$$S_1 = OA_1 \cdot AA_1 = OA_1 \cdot \sqrt{1-OA_1^2} = \frac{1}{100}\sqrt{1-\frac{1}{100^2}} = \frac{\sqrt{99 \cdot 101}}{100^2}.$$

Pentru al doilea dreptunghi vom avea:

$$S_2 = \frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{2}{100}\right)^2} = \frac{\sqrt{98 \cdot 102}}{100^2} \text{ și etc.}$$

$$S_{99} = \frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{99}{100}\right)^2} = \frac{\sqrt{1 \cdot 199}}{100^2}.$$

Aria figurii cu trepte este mai mică decât aria sfertului de cerc, adică

$$\frac{\sqrt{99 \cdot 101}}{100^2}+\frac{\sqrt{98 \cdot 102}}{100^2}+\ldots+\frac{\sqrt{1 \cdot 199}}{100^2}<\frac{\pi}{4}.$$

De aici rezultă inegalitatea ce o demonstrăm. ◀

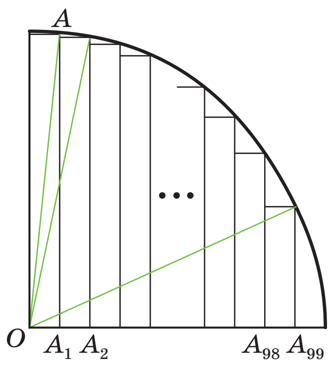


Fig. 3.1

EXERCIȚII

1. Demonstrați inegalitatea:

1) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geqslant 4,$ dacă $a>0$ și $b>0$;

2) $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$, dacă $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ și $c \geqslant 0$;

3) $(a^3+b)(a+b^3) \geqslant 4a^2b^2$, dacă $a \geqslant 0$ și $b \geqslant 0$;

4) $(ab+1)(a+b) \geqslant 4ab$, dacă $a \geqslant 0$ și $b \geqslant 0$;

5) $(a+2)(b+5)(c+10) \geqslant 80\sqrt{abc}$, dacă $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ și $c \geqslant 0$;

6) $a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant 4$, dacă $a > 0$ și $b > 0$;

7) $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geqslant 2^n$, dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – numere pozitive, produsul cărora este egal cu 1.

4. Inegalități cu o variabilă

Vom rezolva o problemă. Una din laturile paralelogramului este egală cu 7 cm. Cu ce trebuie să fie egală latura vecină, ca perimetrul paralelogramului să fie mai mare ca 44 cm?

Fie că latura căutată să fie egală cu x cm. Atunci perimetrul paralelogramului va fi egal cu $(14 + 2x)$ cm. Inegalitatea $14 + 2x > 44$ este modelul matematic al problemei despre perimetrul paralelogramului.

Dacă în această inegalitate variabila x va fi înlocuită, de exemplu, cu numărul 16, vom obține o inegalitate corectă $14 + 32 > 44$. În acest caz se spune, că numărul 16 este **soluție a inegalității** $14 + 2x > 44$.

Definiție. Soluție a inegalității cu o variabilă se numește valoarea variabilei, ce transformă inegalitatea în inegalitate numerică corectă.

În așa fel, fiecare din numerele 15,1; 20; $10\sqrt{3}$ este soluție a inegalității $14 + 2x > 44$, iar numărul 10 nu este soluția ei.

Observație. Definiția soluției inegalității este analogică cu definiția rădăcinii ecuației. Dar nu se practică termenul “rădăcina inegalității”.

Definiție. A rezolva inegalitatea înseamnă de a calcula toate soluțiile sau de a demonstra, că nu există soluții.

Toate soluțiile inegalității formează **mulțimea de soluții a inegalității.** Dacă inegalitatea nu are soluții, se spune, că mulțimea de soluții este o **mulțime vidă**. Amintim, că mulțimea vidă se notează cu simbolul $\varnothing$.

În așa fel, se poate spune, că ***rezolvarea inegalității înseamnă calcularea mulțimii de soluții.***

De Exemplul, în problema "rezolvați inegalitatea $x^2 > 0$" răspunsul va fi următorul: "toate numerele reale, în afară de 0".

Evitent, că inegalitatea $|x| < 0$ nu are soluții, adică mulțimea de soluții este o mulțime vidă.

Definiție. Inegalitățile sânt numite echivalente, dacă mulțimile lor de soluții coincid.

Ilustrăm câteva exemple.

Inegalitățile $x^2 \leqslant 0$ și $|x| \leqslant 0$ sânt echivalente. Întradevăr, fiecare din inegalități are câte o singură soluți $x = 0$.

Inegalitățile $x^2 > -1$ și $|x| > -2$ sânt echivalente, deoarece mulțime de soluții pentru fiecare din ele este mulțimea numerelor reale.

Deoarece nici una din inegalitățil $\sqrt{x} < -1$ și $0x < -3$ nu are soluții, aceste inegalități deasemeni sânt echivalente.

?

1. Ce se numește soluția inegalității?
2. Ce înseamnă să rezolvi inegalitatea?
3. Ce formează toate soluțiile unei inegalități?
4. În ce caz mulțime de soluții a unei inegalități este mulțimea vidă?
5. Care inegalități sînt numite inegalități echivalente.

EXERCIȚII

4.1.° Care din numerele –4; –0,5; 0; $\frac{1}{3}$; 2 sânt soluții ale inegalității:

1) $x > \frac{1}{6}$; 3) $3x > x - 1$; 5) $\sqrt{x-1} > 1$;

2) $x \leqslant 5$; 4) $x^2 - 9 \leqslant 0$; 6) $\frac{1}{x} > 1$?

4.2.° Care din numerele propuse sânt soluții ale inegalității $(x - 2)^2 (x - 5) > 0$:

1) 3; 2) 2; 3) 6; 4) –1?

4.3.° Este oare soluție a inegalității $6x + 1 \leqslant 2 + 7x$ numărul:

1) –0,1; 2) –2; 3) 0; 4) –1; 5) 2?

4.4.° Numiți două soluții arbitrare ale inegalității $x + 5 > 2x + 3$.

4.5.° Este oare numărul 1,99 soluție a inegalității $x < 2$? Exisă oare soluții ale acestei inegalități, care să fie mai mari decât 1,99? În caz afirmativ, dați Exemplul de astfel de soluții.

4.6.° Este oare numărul 4,001 soluție a inegalității $x > 4$? Exisă oare soluții ale acestei inegalități, care să fie mai mici decât 4,001? În caz afirmativ, dați Exemplul de astfel de soluții.

4.7.° Mulțimea de soluții a căreia din inegalități este mulțimea vidă:

1) $(x-3)^2 > 0$; 3) $(x-3)^2 < 0$;
2) $(x-3)^2 \geqslant 0$; 4) $(x-3)^2 \leqslant 0$?

4.8.° Care din inegalitățile propuse nu are soluții:

1) $0x > -2$; 2) $0x < 2$; 3) $0x < -2$; 4) $0x > 2$?

4.9.° Pentru care din inegalitățile propuse mulțime de soluții este mullțimea numerelor reale:

1) $0x > 1$; 2) $0x > 0$; 3) $0x > -1$; 4) $x + 1 > 0$?

4.10.° Pentru care din inegalitățile propuse soluție sete orice număr real:

1) $x^2 > 0$; 2) $x > -x$; 3) $-x^2 \leqslant 0$; 4) $\sqrt{x} \geqslant 0$?

4.11.• Dintre inegalitățile prezentate arătați inegalitatea, soluția căreia este orice număr real, și inegalitatea, ce n-are nici o soluție:

1) $\dfrac{x^2+1}{x^2} \geqslant 0$; 3) $\dfrac{x^2-1}{x^2-1} \geqslant 1$;

2) $\dfrac{x^2+1}{x^2+1} < 1$; 4) $\dfrac{x^2}{x^2+1} \geqslant 0$.

4.12.• Rezolvați inegalitatea:

1) $\dfrac{2}{x^2} + 2 > 0$; 7) $\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2 \geqslant 0$;

2) $(x+2)^2 > 0$; 8) $x + \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{x^2} + 2$;

3) $(x+2)^2 \leqslant 0$; 9) $|x| \geqslant -x^2$;

4) $\dfrac{x+2}{x+2} > 0$; 10) $|x| > -x^2$;

5) $\dfrac{x+2}{x+2} > \dfrac{2}{3}$; 11) $|x| > x$;

6) $\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2 > 0$; 12) $|x| \geqslant -x$.

4.13.• Aflați mulțimea de soluții a inegalității:

1) $|x| > 0$;
2) $|x| \leqslant 0$;
3) $|x| < 0$;
4) $|x| \leqslant -1$;
5) $|x| > -3$;
6) $\left|\frac{1}{x}\right| > -3$.

4.14.• Sânt oare echivalente inegalitățile:

1) $\frac{1}{x} < 1$ și $x > 1$;
2) $x^2 \geqslant x$ și $x \geqslant 1$;
3) $(x+5)^2 < 0$ și $|x-4| < 0$;
4) $\sqrt{x} \leqslant 0$ și $x^4 \leqslant 0$?

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

4.15. Rezolvați ecuația:

1) $9 - 7(x+3) = 5 - 6x$;
2) $\frac{x+3}{2} - \frac{x-4}{7} = 1$;
3) $(x+7)^2 - (x-2)^2 = 15$;
4) $5x - 2 = 3(3x-1) - 4x - 4$;
5) $6x + (x-2)(x+2) = (x+3)^2 - 13$;
6) $(x+6)(x-1) - (x+3)(x-4) = 5x$.

4.16. Un ciclist a parcurs distanța de la sat până la lac și în direcție inversă în timp de 1 oră. De la sat până la lac ciclistul s-a deplasat cu viteza de 15 km/oră, iar calea de retur a făcut-o cu viteza de 10 km/oră. Calculați distanța de la sat până la lac.

5. Rezolvarea inegalităților lineare cu o variabilă. Intervale numerice

Proprietățile egalităților numerice ne ajută să rezolvăm ecuații. În mod analogic, proprietățile inegalităților numerice ne permit să rezolvăm inegalități.

Rezolvând ecuația, am înlocuit-o cu o altă ecuație echivalentă, mai simplă. Cu o metodă similară se rezolvă și inegalitățile.

La înlocuirea ecuației cu o ecuație echivalentă sunt folosite teoremele despre transferarea termenilor de pe o parte a ecuației în cealaltă parte și despre înmulțirea ambelor părți ale ecuației cu același număr diferit de zero.

Reguli analogice sunt aplicate și în timpul rezolvării inegalităților.

Dacă un oarecare termen este transferat dintr-o parte a inegalității în cealaltă parte, schimbând semnul termenului în semn opus, se va obține o inegalitate, echivalentă cu inegalitatea dată.

Dacă ambele părți ale inegalității vor fi înmulțite cu (împărțite la) acelaș număr pozitiv, se va obține o inegalitate, echivalentă cu inegalitatea dată.

Dacă ambele părți ale inegalității vor fi înmulțite cu(împărțite la) acelaș număr negativ, iar semnul inegalității va fi scimbat în semn opus, se va obține o inegalitate, echivalentă cu inegalitatea dată.

Aceste reguli ne permit să rezolvăm inegalitatea, obținută în problema despre perimetrul paralelogramului (priviți p. 4),

Se dă: $14 + 2x > 44$.

Transferăm termenul 14 în partea dreaptă a inegalității:

$$2x > 44 - 14.$$

De aici $2x > 30$.

Împărțind ambele părți ale inegalității la 2, obținem rezultatul:

$$x > 15.$$

Menținem, că inegalitatea obținută este echivalentă cu inegalitatea inițială. Mulțimea de soluții este constituită din toate numerele mai mari ca 15. Această mulțime este numită interval numeric și se notează astfel: $(15; +\infty)$ (se citește: “intervalul de la 15 până la plus infinit”).

În această problemă răspunsul poate fi dat în ambele forme: $(15; +\infty)$ sau $x > 15$.

Punctele de pe axa de coordonate, care reprezintă soluțiile inegalității $x > 15$, sunt situate în dreapta de punctul, care reprezintă numărul 15, și formează o rază cu originea ”perforată” (fig 5.1).

a *b*

Fig. 5.1

Menținem, că pentru reprezentarea pe axa de coordonate a intervalului numeric pot fi folosite două metode: prin marcaj (fig. 5.1, a) sau prin arcuri (fig. 5.1, b). Vom folosi a doua metodă..

EXEMPLUL 1 Rezolvați inegalitatea $3+\frac{x}{2}\leqslant 7+x$.

Rezolvare. Transferăm termenul x din partea dreaptă a inegalității în partea stângă, iar termenul 3 – din partea stângă în partea dreaptă și reducem membrii asemenea:

$$-x+\frac{x}{2}\leqslant 7-3;$$

$$-\frac{x}{2}\leqslant 4.$$

Înmulțind ambele părți ale ultimei inegalități cu –2, obținem:

$$x\geqslant -8.$$

Mulțime de soluții ale acestei inegalități este intervalul numeric, notat ca [–8; +∞) (citit: "intervalul de la –8 până la plus infinit, inclusiv –8").

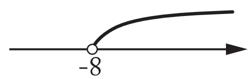


Fig. 5.2

Punctele axei numerice, care reprezintă soluțiile inegalității $x\geqslant -8$, formează o rază (fig. 5.2).

Răspunsul poate fi scris prin una din metode: $[-8; +\infty)$ sau $x\geqslant -8$. ◄

EXEMPLUL 2 Rezolvați inegalitatea $2(2-3x)>3(x+6)-5$.

Rezolvare. Vom scrie un rând de inegalități, echivalente cu inegalitatea inițială:

$$4-6x>3x+18-5;$$
$$4-6x>3x+13;$$
$$-3x-6x>-4+13;$$
$$-9x>9;$$
$$x<-1.$$

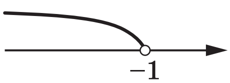


Fig. 5.3

Mulțime de soluții ale ultimei inegalități este intervalul numeric, notat ca (–∞; –1) (citit: "intervalul de la minus infinit până la –1"). Punctele axei numerice, care reprezintă soluțiile inegalității $x<-1$, sunt situate în stânga de punctul, ce reprezintă numărul –1 (fig. 5.3) și formează o rază cu originea "perforată".

Răspunsul poate fi scris prin una din metode: $(-\infty; -1)$ sau $x<-1$. ◄

EXEMPLUL 3 Rezolvați inegalitatea $\frac{x-1}{2}+\frac{x}{3}\leqslant\frac{1}{6}$.

Rezolvare. Vom scrie un rând de inegalități, echivalente cu inegalitatea inițială:

$$6\cdot\frac{x-1}{2}+6\cdot\frac{x}{3}\leqslant 6\cdot\frac{1}{6};$$
$$3x-3+2x\leqslant 1;$$
$$5x\leqslant 4;$$
$$x\leqslant\frac{4}{5}.$$

Mulțime de soluții ale ultimei inegalități este intervalul numeric, notat ca $\left(-\infty;\ \frac{4}{5}\right]$ (citit: "intervalul de la minus infinit până la $\frac{4}{5}$, inclusiv $\frac{4}{5}$").

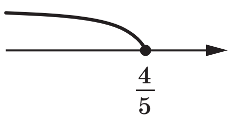


Fig. 5.4

Punctele axei numerice, care reprezintă soluțiile inegalității $x\leqslant\frac{4}{5}$, formează o rază (fig. 5.4).

Răspunsul poate fi scris prin una din metode: $\left(-\infty;\ \frac{4}{5}\right]$ sau $x\leqslant\frac{4}{5}$. ◄

EXEMPLUL 4 Rezolvați inegalitatea $3(2x-1)+7\geqslant 2(3x+1)$.

Rezolvare. Obținem: $6x-3+7\geqslant 6x+2;$

$$6x-6x\geqslant 2-4;$$
$$0x\geqslant -2.$$

Ultima inegalitate pentru orice valori ale variabilei x se transform într-o inegalitate numerică corectă $0\geqslant -2$. Deci, mulțimea de soluții ale inegalității inițiale coincide cu mulțimea numerelor reale.

Răspuns: x – orice număr. ◄

Acest răspuns poate fi scris în alt mod: $(-\infty;\ +\infty)$ (citit: "intervalul de la minus infinit până la plus infinit"). Acest interval numeric se numește axă numerică.

EXEMPLUL 5 Rezolvați inegalitatea $4(x-2)-1<2(2x-9)$.

Rezolvare. Obținem:

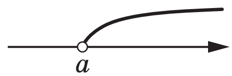
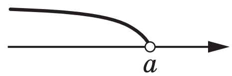
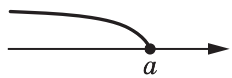
$$4x-8-1<4x-18;$$
$$4x-4x<9-18;$$
$$0x<-9.$$

Inegalitatea obținută, pentru orice valori ale variabilei ,x se transform într-o inegalitate numerică incorectă $0 < -9$.

În acest exepcițiu răspunsul poate fi dat în una din metode: nu există soluții sau $\varnothing$. ◀

Fiecare din inegalitățile, studiate în exemplele 1–5, au fost transformate într-o inegalitate echivalentă, ce se referă la una din patru forme: $ax > b$, $ax < b$, $ax \geqslant b$, $ax \leqslant b$, în care x – variabila, a și b – numere. Astfel de inegalități sunt numite **inegalități lineare cu o variabilă.**

Vom arăta tabela de notare și reprezentare grafică a intervalelor numerice:

Inegalitatea	Intervalul	Imaginea
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$	
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$	

?

1. Formulați regulile, cu ajutorul cărora pot fi obținute inegalități echivalente.
2. Ce fel de inegalități sunt numite inegalități lineare cu o variabilă?
3. În ce mod sunt scrise, citite și ilustrate intervalele, care sunt mulțimi de soluții ale inegalităților $x > a$? $x < a$? $x \geqslant a$? $x \leqslant a$?
4. Soluție a inegalității poate fi orice număr. Cum va fi notat, citit și numit intervalul, care este mulțime de soluții pentru inegalitate?

EXERCIȚII

5.1.° Reprezentați pe axa de coordonate intervalul:

1) $[-5; +\infty)$; 2) $(-5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -5)$; 4) $(-\infty; -5]$.

5.2.° Reprezentați pe axa de coordonate și notați intervalul, determinat de inegalitate:
1) $x<8$; 2) $x \leqslant -4$; 3) $x \geqslant -1$; 4) $x>0$.

5.3.° Reprezentați pe axa de coordonate și notați intervalul, determinat de inegalitate:
1) $x \leqslant 0$; 2) $x \geqslant \frac{1}{3}$; 3) $x>-1,4$; 4) $x<16$.

5.4.° Determinați cel mai mic număr întreg, care aparține intervalului:
1) $(6; +\infty)$; 2) $[6; +\infty)$; 3) $(-3,4; +\infty)$; 4) $[-0,9; +\infty)$.

5.5.° Determinați cel mai mare număr întreg, care aparține intervalului:
1) $(-\infty; -4)$; 2) $(-\infty; -6,2]$; 3) $(-\infty; 1]$; 4) $(-\infty; -1,8)$.

5.6.° Cărora din intervalele prezentate îi aparține numărul -7:
1) $(-\infty; -7)$; 2) $[-7; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $(-\infty; -6)$?

5.7.° Căruia din intervalele prezentate nu-i aparține numărul 9:
1) $(8,99; +\infty)$; 2) $(-\infty; 10)$; 3) $(-\infty; 8,99]$; 4) $[9; +\infty)$?

5.8.° Rezolvați inegalitatea:
1) $6x>18$; 6) $-10x<0$; 11) $4-x<5$;
2) $-2x \geqslant 10$; 7) $2\frac{1}{4}x \leqslant -1\frac{4}{5}$; 12) $5-8x \geqslant 6$;
3) $\frac{1}{3}x < 9$; 8) $-7x > \frac{14}{15}$; 13) $12+4x \geqslant 6x$;
4) $0,1x \geqslant 0$; 9) $7x-2>19$; 14) $36-2x<4x$;
5) $\frac{3}{4}x > 24$; 10) $5x+16 \leqslant 6$; 15) $\frac{x+2}{5} < 2$.

5.9.° Rezolvați inegalitatea:
1) $5x<30$; 5) $-3x < \frac{6}{7}$; 9) $13-6x \geqslant -23$;
2) $-4x \leqslant -16$; 6) $-2\frac{1}{3}x > 1\frac{5}{9}$; 10) $5-9x>16$;
3) $\frac{2}{3}x \leqslant 6$; 7) $4x+5>-7$; 11) $3x+2 \leqslant -7x$;
4) $-12x \geqslant 0$; 8) $9-x \geqslant 2x$; 12) $\frac{x-3}{4} > -1$.

5.10.° Rezolvați inegalitatea:
1) $0x>10$; 3) $0x>-8$; 5) $0x \geqslant 1$; 7) $0x \leqslant 0$;
2) $0x<15$; 4) $0x<-3$; 6) $0x \leqslant 2$; 8) $0x>0$.

5.11.° Calculați cea mai mică soluție întreagă a inegalității:
1) $5x \geqslant 40$; 2) $5x > 40$; 3) $-2x < -3$; 4) $-7x < 15$.

5.12.° Calculați cea mai mare soluție întregă a inegalității:
1) $8x \leqslant -16$; 2) $8x < -16$; 3) $3x < 10$; 4) $-6x > -25$.

5.13.° Pentru care valori ale variabilei a expresia $6a + 1$ va primi valori negative?

5.14.° Pentru care valori ale variabilei b expresia $7 - 2b$ va primi valori pozitive?

5.15.° Pentru care valori ale variabilei m valorile expresiei $2 - 4m$ nu vor fi mai mici decât -22?

5.16.° Pentru care valori ale variabilei n valorile expresiei $12n - 5$ nu vor fi mai mari decât -53?

5.17.° Pentru care valori a variabilei x va avea sens expresia:
1) $\sqrt{4x+20}$; 2) $\sqrt{5-14x}$; 3) $\dfrac{10}{\sqrt{4x+10}}$?

5.18.° Aflați domeniul de definiție al funcției:
1) $f(x) = \sqrt{13-2x}$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{-x-1}}$.

5.19.° Rezolvați inegalitatea:
1) $8x + 2 < 9x - 3$;
2) $6 - 6x > 10 - 4x$;
3) $6y + 8 \leqslant 10y - 8$;
4) $3 - 11y \geqslant -3y + 6$;
5) $-8p - 2 < 3 - 10p$;
6) $3m - 1 \leqslant 1{,}5m + 5$.

5.20.° Rezolvați inegalitatea:
1) $4 + 11x > 7 + 12x$;
2) $35x - 28 \leqslant 32x + 2$;
3) $3x - 10 < 6x + 2$;
4) $6x - 3 \geqslant 2x - 25$.

5.21.° Pentru care valori ale variabilei c valorile binomului $9c - 2$ nu vor fi mai mari decât valorile respective a binomului $4c + 4$?

5.22.° Pentru care valori ale variabilei k valorile binomului $11k - 3$ nu vor fi mai mici decât valorile respective ale binomului $15k - 13$?

5.23.° Rezolvați inegalitatea:
1) $\dfrac{4x}{3} + \dfrac{x}{2} < 11$;
2) $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{3x}{4} \geqslant \dfrac{1}{6}$;
3) $\dfrac{5x}{7} - x > -4$;
4) $\dfrac{x}{8} - \dfrac{1}{4} \leqslant x$.

5.24.° Rezolvați inegalitatea:
1) $\dfrac{y}{6} - \dfrac{5y}{4} < 1$; 2) $\dfrac{x}{10} - \dfrac{x}{5} > -2$.

5.25.• Rezolvați inegalitatea:

1) $3-5(2x+4)\geqslant 7-2x$;
2) $6x-3(x-1)\leqslant 2+5x$;
3) $x-2(x-1)\geqslant 10+3(x+4)$;
4) $2(2x-3{,}5)-3(2-3x)<6(1-x)$;
5) $(x+1)(x-2)\leqslant(x-3)(x+3)$;
6) $(4x-3)^2+(3x+2)^2\geqslant(5x+1)^2$;
7) $\frac{2x-1}{4}\geqslant\frac{3x-5}{5}$;
8) $\frac{3x+7}{4}-\frac{5x-2}{2}<x$;
9) $(x-5)(x+1)\leqslant 3+(x-2)^2$;
10) $\frac{x+1}{2}-\frac{x-3}{3}>2+\frac{x}{6}$;
11) $(6x-1)^2-4x(9x-3)\leqslant 1$;
12) $\frac{x-3}{9}-\frac{x+4}{4}>\frac{x-8}{6}$.

5.26.• Aflați mulțimea de soluții a inegalității:

1) $3(4x+9)+5>7(8-x)$;
2) $(2-y)(3+y)\leqslant(4+y)(6-y)$;
3) $(y+3)(y-5)-(y-1)^2>-16$;
4) $\frac{3x-7}{5}-1\geqslant\frac{2x-6}{3}$;
5) $\frac{2x}{3}-\frac{x-1}{6}-\frac{x+2}{2}<0$;
6) $\frac{y-1}{2}-\frac{2y+1}{8}-y<2$.

5.27.• Calculați cea mai mare soluție întreagă a inegalității:

1) $7(x+2)-3(x-8)<10$;
2) $(x-4)(x+4)-5x>(x-1)^2-17$.

5.28.• Calculați cea mai mică soluție întreagă a inegalității:

1) $\frac{4x+13}{10}-\frac{5+2x}{4}>\frac{6-7x}{20}-2$;
2) $(x-1)(x+1)-(x-4)(x+2)\geqslant 0$.

5.29.• Câte soluții întregi negative are inegalitatea?

$$x-\frac{x+7}{4}-\frac{11x+30}{12}<\frac{x-5}{3}?$$

5.30.$^{\bullet}$ Câte soluții naturale are inegalitatea

$$\frac{2-3x}{4} \geqslant \frac{1}{5} - \frac{5x+6}{8}?$$

5.31.$^{\bullet}$ Pentru care valori ale variabilei x este corectă egalitatea:

1) $|x-5| = x-5$; 2) $|2x+14| = -2x-14$?

5.32.$^{\bullet}$ Pentru care valori ale variabilei y este corectă egalitatea:

1) $\frac{|y+7|}{y+7} = 1$; 2) $\frac{|6-y|}{y-6} = 1$?

5.33.$^{\bullet}$ Pentru care valori ale variabilei a ecuația:

1) $x^2 + 3x - a = 0$ nu are soluții;
2) $2x^2 - 8x + 5a = 0$ are măcar o soluție?

5.34.$^{\bullet}$ Pentru care valori a variabilei b ecuația:

1) $3x^2 - 6x + b = 0$ are două soluții diferite:
2) $x^2 - x - 2b = 0$ nu are soluții?

5.35.$^{\bullet}$ O barcă a parcurs o oarecare distanță, plutind în direcția cursului apei, iar apoi s-a întors, parcurgând toată distanța în nu mai mult de cinci ore. Viteza proprie a bărcii este egală cu 5 km/oră, iar viteza – 1 km/oră. Ce distanța maximă a putut parcurge barca, plutind în direcția cursului apei?

5.36.$^{\bullet}$ Au fost luate patru numere întregi consecutive și calculată diferența dintre produsele numerelor extreme și a numerelor intermediare. Există oare așa patru numere întregi consecutive, pentru care această diferență să fie mai mare ca zero?

5.37.$^{\bullet}$ Într-o cutie sunt bile albastre și bile galbene. Numărul de bile albastre se raportă la numărul de bile galbene ca 3:4. Ce număr maxim de bile albastre poate fi în cutie, dacă numărul total de bile este nu mai mare ca 44?

5.38.$^{\bullet}$ În livadă cresc meri, vișini și pruni, numărul cărora se raportă ca 5:4:2. Care poate fi numărul minim de vișini, dacă în livadă sunt nu mai puțin de 120 pomi?

5.39.$^{\bullet}$ Laturile triunghiului sunt egale cu 8 cm, 14 cm și a cm, unde a – număr natural. Ce valoare maximă poate avea dimensiunea a?

5.40.$^{\bullet}$ Suma a trei numere naturale consecutive este nu mai mică ca 85. Aflați cele mai mici trei numere, care satisfac această condiție?

5.41.$^{\bullet}$ Suma a trei numere naturale consecutive, divizibile la 5, este nu mai mare ca 100. Aflați cele mai mari trei numere, care satisfac această condiție?

5.42.• Pentru care valori ale variabilei x este determinată funcția:

1) $f(x)=\sqrt{x+4}+\frac{1}{x-2}$;
3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x+9}}-\frac{8}{|x|-2}$;
2) $f(x)=\sqrt{24-8x}+\frac{6}{x^2-16}$;
4) $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{4}{x^2-1}$?

5.43.• Pentru care valori ale variabilei are sens expresia:

1) $\sqrt{9-x}+\frac{10}{x+3}$;
2) $\frac{6}{\sqrt{3x-21}}+\frac{9}{x^2-64}$?

5.44.•• Rezolvați ecuația:

1) $|x-3|+x=15$;
3) $|3x-12|-2x=1$;
2) $|x+1|-4x=14$;
4) $|x+2|-x=1$.

5.45.•• Rezolvați ecuația:

1) $|x+5|+2x=7$;
2) $|3-2x|-x=9$.

5.46.•• Construiți graficul funcției:

1) $y=|x-2|$;
3) $y=|x-1|+x$.
2) $y=|x+3|-1$;

5.47.•• Consttruiți graficul funcției:

1) $y=|x+4|$;
3) $y=|2x-6|-x$.
2) $y=|x-5|+2$;

5.48.•• Pentru care valori ale parametrului a ecuația:

1) $4x+a=2$ are soluție pozitivă;
2) $(a+6)x=3$ are soluție negativă;
3) $(a-1)x=a^2-1$ are o soluție unică pozitivă?

5.49.•• Pentru care valori ale parametrului m ecuația:

1) $2+4x=m-6$ are soluție mai mare sau egală cu zero;
2) $mx=m^2-7m$ are o soluție unică negativă?

5.50.* Aflați toate valorile parametrului a, pentru care va avea două soluții diferite ecuația:

1) $ax^2+2x-1=0$;
2) $(a+1)x^2-(2a-3)x+a=0$;
3) $(a-3)x^2-2(a-5)x+a-2=0$.

5.51.* Aflați toate valorile parametrului a, pentru care nu are soluții ecuația $(a-2)x^2+(2a+1)x+a=0$.

5.52.* Există oare o așa valoare ale parametrului a, pentu care nu va avea soluții inegalitatea (în caz afirmativ, numiți această valoare):

1) $ax>3x+4$;
2) $(a^2-a-2)x\leqslant a-2$?

5.53.* Există oare o așa valoare a parametrului a, pentu care orice număr este soluție a inegalității (în caz afirmativ, numiți această valoare):
1) $ax > -1 - 7x$; 2) $(a^2 - 16)x \leqslant a + 4$?

5.54.* Pentru fiecare valoare a rezolvați inegalitatea:
1) $ax > 0$; 3) $ax \geqslant a$; 5) $(a - 2)x > a^2 - 4$;
2) $ax < 1$; 4) $2(x - a) < ax - 4$; 6) $(a + 3)x \leqslant a^2 - 9$.

5.55.* Pentru fiecare valoare a rezolvați inegalitatea:
1) $a^2x \leqslant 0$; 2) $a + x < 2 - ax$; 3) $(a + 4)x > 1$.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

5.56. Rezolvați ecuația:
1) $6x - 5x^2 = 0$; 4) $3x^2 + 8x - 3 = 0$;
2) $25x^2 = 81$; 5) $x^2 + x - 12 = 0$;
3) $4x^2 - 7x - 2 = 0$; 6) $2x^2 + 6x + 7 = 0$.

5.57. Fie m și n numere întregi consecutive. Care din afirmațiile propuse este corectă:
1) produsul mn este mai mare ca m;
2) produsul mn este mai mare ca n;
3) produsul mn este număr par;
4) produsul mn este număr impar.

5.58. Comparați valorile expresiilor:
1) $3\sqrt{98}$ și $4\sqrt{72}$; 3) $\frac{1}{6}\sqrt{108}$ și $6\sqrt{\frac{1}{12}}$.
2) $\frac{1}{2}\sqrt{68}$ și $\frac{4}{3}\sqrt{45}$;

5.59. Pentru ca un bazin să fie umplut cu apă prima țeavă, e necesar de 1,5 ori mai mult timp, decât pentru ca bazinul să fie umplut prin a doua țeavă. Dacă vor fi descrise ambele țevi, bazinul se va umplea în 6 ore. În câte ore poate fi umplut bazinul prin fiecare țeavă aparte?

ÎNSUȘIM ACȚIUNI NESTANDARTE

5.60. Un număr cu trei cifre n are proprietatea, că numerele $n - 6$, $n - 7$ și $n - 8$ se impart respectiv 7, 8 și 9. Aflați numărul n.

6. Sisteme de inegalități lineare cu o variabilă

Analizăm expresia $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$. Aflăm mulțimea valorilor admisibile pentru variabila x, adică toate valorile variabilei x, pentru care expresia are sens. Această mulțime se numește **domeniu de definiție al expresiei**.

Deoarece expresia de sub radical poate primi doar valori nenegative, concomitent e necesară îndeplinirea a două inegalități: $2x-1 \geqslant 0$ și $5-x \geqslant 0$. Adică, valorile căutate a variabilei x – sunt soluțiile comune ale acestor două inegalități.

Dacă trebuiesc aflate toate soluțiile comune pentru două sau mai multe inegalități, se spune că este **rezolvat un sistem de inegalități.**

Ca și la sistemul de ecuații, la notarea sistemul de inegalități se aplică paranteza specifică. În așa fel, pentru determinarea domeniului de definiție al expresiei $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$ e necesar de rezolvat sistemul de inegalități

$$\begin{cases} 2x-1 \geqslant 0, \\ 5-x \geqslant 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Definiție. Soluție a unui sistem de inegalități cu o variabilă este numită valoarea variabilei, care transformă fiecare inegalitate în inegalitate numerică corectă.

De exemplu, numerele 2, 3, 4, 5 sunt soluții ale sisiemului (*), dar numărul 7 nu este soluția sistemului.

Definiție. A rezolva un sistem de inegalități înseamnă de a afla toate soluțiile sistemului sau de a demonstra, că sistemul nu are soluții.

Toate soluțiile unui sistem de inegalități formează **mulțimea de soluții a sistemului de inegalități**. Dacă sistemul nu are soluții, se spune că mulțimea de soluții este o mulțime vidă.

În așa fel, se poate spune, că **a rezolva un sistem de inegalități înseamnă de a determina mulțimea de soluții a sistemului.**

De exemplu, în exercițiul "Rezolvați sistemul de inegalități" $\begin{cases} 0x \geqslant -1, \\ |x| \geqslant 0 \end{cases}$ răspunsul va fi: "mulțimea numerelor reale".

Evident, mulțimea de soluții a sistemului de inegalități $\begin{cases} x \leqslant 5, \\ x \geqslant 5 \end{cases}$ este alcătuită dintr-un singur număr 5.

Sistemul de inegalități $\begin{cases} x > 5, \\ x < 5 \end{cases}$ nu are soluții, adică mulțimea de soluții este mulțimea vidă.

Rezolvăm sistemul (*). Transformând fiecare inegalitate a sistemului în egalitate echivalentă, obținem: $\begin{cases} 2x \geqslant 1, \\ -x \geqslant -5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x \leqslant 5. \end{cases}$

Mulțimea de soluții a ultimului sistem este alcătuită din numerele, ce sânt nu mai mici ca $\frac{1}{2}$ și nu mai mari ca 5, adică din toate numerele, ce satisfac inegalitatea $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5.$ Această mulțime este un interval numeric, ce se notează: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (citit: "intervalui de la $\frac{1}{2}$ pănî la 5, inclusiv $\frac{1}{2}$ și 5").

Răspunsul la problema despre determinarea domeniului de definiție al expresiei $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x}$ poate fi dat în două forme: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ sau $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5.$

Punctele, ce reprezintă soluțiile sistemului (*), sunt situate între punctele $A\left(\frac{1}{2}\right)$ și B (5), inclusiv punctele A și B (fig. 6.1). Ele formează un segment.

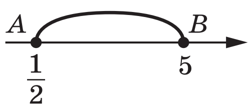


Fig. 6.1

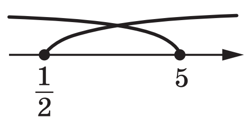


Fig. 6.2

Menținem, că toate punctele comune ale intervalelor $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ și $(-\infty; 5]$ formează intervalul $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (fig. 6.2). Se spune, că intervalul $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ este **secțiunea** intervalelor $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ și $(-\infty; 5]$. Se notează $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \cap (-\infty; 5] = \left[\frac{1}{2}; 5\right].$

Intervalele $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ și $(-\infty; 5]$ sunt mulțimile de soluții ale inegalităților $x \geqslant \frac{1}{2}$ și $x \leqslant 5$. respectiv. Se poate spune, *că mulțimea de soluții ale sistemului* $\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x \leqslant 5 \end{cases}$ *este secțiunea mulțimilor de soluții ale fiecărei inegalități, din care este alcătuit sistemul.*

În final, **pentru a rezolva un sistem de inegalități e necesar de calculat secțiunea mulțimilor de soluții ale inegalităților, ce formează sistemul.**

EXEMPLUL 1 Rezolvați sistemul de inegalități $\begin{cases} 3x - 1 > -7, \\ 3 - 4x > -9. \end{cases}$

Rezolvare. Obținem: $\begin{cases} 3x > -6, \\ -4x > -12; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -2, \\ x < 3. \end{cases}$

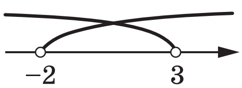


Fig. 6.3

Pe axa de coordonate aflăm secțiunea mulțimilor de soluții, adică secțiunea intervalelor $(-\infty; 3)$ și $(-2; +\infty)$ (fig. 6.3). Secțiunea căutată este formată de numerele, ce satisfac inegalitatea $-2 < x < 3$. Această mulțime este un interval numeric, ce se notează $(-2; 3)$ (citit: “intervalul de la –2 până la 3”).

Răspunsul poate fi dat în una din formele: $(-2; 3)$ sau $-2 < x < 3$. ◀

EXEMPLUL 2 Rezolvați sistemul de inegalități $\begin{cases} 4x - 3 < 1, \\ 3 - x \leqslant 5. \end{cases}$

Rezolvare. Obținem: $\begin{cases} 4x < 4, \\ -x \leqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$

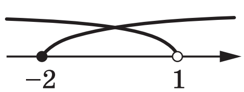


Fig. 6.4

Pe axa de coordonate aflăm secțiunea mulțimilor de soluții, adică secțiunea intervalelor $(-\infty; 1)$ și $[-2; +\infty)$, ce sunt mulțimile de soluții ale inegalităților sistemei (fig. 6.4). Secțiunea căutată este formată de numerele, ce satisfac inegalitatea $-2 \leqslant x < 1$. Această mulțime este un interval numeric, ce se notează $[-2; 1)$ (citit: “intervalul de la –2 până la 1, inclusiv –2”).

Răspunsul poate fi dat în una din formele: $[-2; 1)$ sau $-2 \leqslant x < 1$. ◀

EXEMPLUL 3 Rezolvați sistemul de inegalități $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x > -2. \end{cases}$

Mulțime de soluții a acestui sistem este secțiunea intervalelor $(-\infty;\ 1]$ și $(-2;\ +\infty)$ (fig. 6.5). Această secțiune este un interval numeric, ce se notează $(-2;\ 1]$ (citit: “intervalul de la –2 până la 1, inclusiv 1”).

Răspunsul: $(-2;\ 1]$. ◀

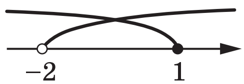


Fig. 6.5

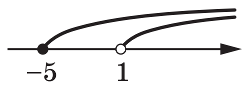


Fig. 6.6

EXEMPLUL 4 Aflați domeniul de definiție al funcției

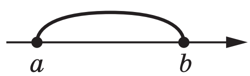
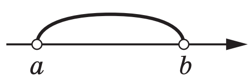
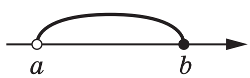
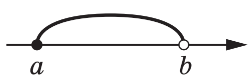
$$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5}.$$

Rezolvare. Domeniul de definiție căutat – este mulțimea de soluții a sistemului de inegalități $\begin{cases} x-1>0, \\ x+5 \geqslant 0. \end{cases}$ Obținem: $\begin{cases} x>1, \\ x \geqslant -5. \end{cases}$

Ilustrăm pe axa de coordonate secțiunea intervalelor $(1;\ +\infty)$ și $[-5;\ +\infty)$ (fig. 6.6). Această secțiune este intervalul $(1;\ +\infty)$.

Răspunsul: $(1;\ +\infty)$. ◀

Vom prezenta tabela de notații și imagini a intervalelor numerice, studiate în acest punct:

Inegalitatea	Intervalul	Imaginea
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a;\ b]$	
$a<x<b$	$(a;\ b)$	
$a < x \leqslant b$	$(a;\ b]$	
$a \leqslant x < b$	$[a;\ b)$	

1. Ce se numește domeniu de definiție al expresiei?
2. In ce cazuri se spune, că e necesară rezolvarea unui sistem de inegalități?
3. Cu ce fel de simbol se notează sistemul de inegalități?
4. Ce se numește soluție a sistemului de inegalități cu o variabilă?
5. Ce înseamnă de rezolvat un sistem de inegalități?
6. Cum se notează, se citește și se reprezintă pe imagine intervalul, care este mulțime de solutii pentru inegalități de tipul $a \leqslant x \leqslant b$? $a < x < b$? $a < x \leqslant b$? $a \leqslant x < b$?

EXERCIȚII

6.1.° Care din numerele –6; –5; 0; 2; 4 sunt soluții ale sistemului de inegalități:

$$\begin{cases} x - 2 < 0, \\ -2x \leqslant 10? \end{cases}$$

6.2.° Soluția cărui sistem de inegalități este numărul –3:

1) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \geqslant 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < -4, \\ x < 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > -4, \\ x < 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 1 > -1, \\ x - 2 < 0? \end{cases}$

6.3.° Reprezentați pe axa de coordonate intervalul:

1) (–3; 4); 2) [–3; 4]; 3) [–3; 4); 4) (–3; 4].

6.4.° Reprezentați pe axa de coordonate și notați intervalul, determinat de inegalutatea:

1) $0 < x < 5$;
2) $\frac{1}{6} < x \leqslant 2\frac{1}{7}$;
3) $0,2 \leqslant x < 102$;
4) $-2,4 \leqslant x \leqslant -1$.

6.5.° Scrieți toate numerele întregi, care aparțin intervalului:

1) [3; 7]; 2) (2,9; 6]; 3) [–5,2; 1); 4) (–2; 2).

6.6.° Arătați cel mai mic și cel mai mare număr întreg, ce aparțin intervalului:

1) [–12; –6];
2) (5; 11];
3) (–10,8; 1,6];
4) [–7,8; –2,9].

6.7.° Reprezentați pe axa de coordonate și notați secțiunea intervalelor:

1) [–1; 7] și [4; 9];
2) [3; 6] și (3; 8);
3) (–∞; 3,4) și (2,5; +∞);
4) (–∞; 2,6) și (2,8; +∞);
5) [9; +∞) și [11,5; +∞);
6) (–∞; –4,2] și (–∞; –1,3).

6.8.° Arătați pe figura 6.7 imaginea mulțimii de soluții a sistemului $\begin{cases} x > -1, \\ x \leqslant 6. \end{cases}$

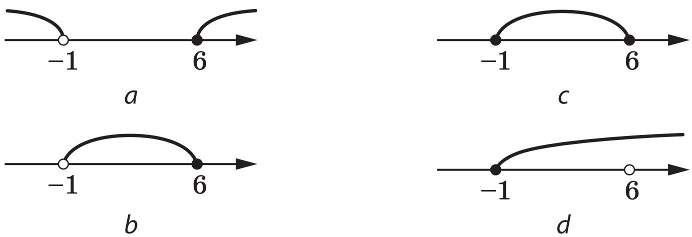


Fig. 6.7

6.9.° Arătați pe figura 6.8 imaginea mulțimii de soluții ale inegalității duble $-4 \leqslant x \leqslant 2$.

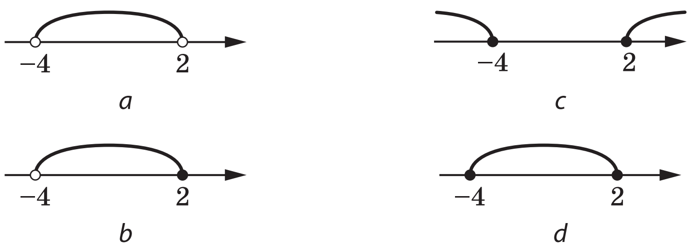


Fig. 6.8

6.10.° Care din intervalele propuse este mulțime de soluții ale sistemuluui de inegalități $\begin{cases} x > -1, \\ x > 2: \end{cases}$

1) $(-\infty; -1)$; 2) $(-1; 2)$; 3) $(2; +\infty)$; 4) $(-1; +\infty)$?

6.11.° Fie $a < b < c < d$. Care din intervalele prezentate este secțiunea intervalelor $(a; c)$ și $(b; d)$:

1) $(a; d)$; 2) $(b; c)$; 3) $(c; d)$; 4) $(a; b)$?

6.12.° Fie $m < n < k < p$. Care din intervalele prezentate este secțiunea intervalelor $(m; p)$ și $(n; k)$:

1) $(m; n)$; 2) $(k; p)$; 3) $(n; k)$; 4) $(m; p)$?

6.13.° Reprezentați pe axa de coordonate și notați mulțimea de soluții ale sisitemului de inegalități:

1) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x \leqslant -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 2, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x > 2, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x < -1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x > 2, \\ x \leqslant -1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 2. \end{cases}$

6.14.° Rezolvați sistemul de inegalități:

1) $\begin{cases} x - 4 < 0, \\ 2x \geqslant -6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2 > 3, \\ -3x < -12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 6 > 2, \\ \dfrac{x}{4} < 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x + 3 \geqslant 0, \\ 7 - 4x < 7; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 10x - 1 \geqslant 3, \\ 7 - 3x \geqslant 2x - 3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x - 2 < 1 + 3x, \\ 5x - 7 \leqslant x + 9; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x - 6 \leqslant x - 1, \\ 11x + 13 < x + 3; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x + 14 \geqslant 18 - x, \\ 1{,}5x + 1 < 3x - 2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4x + 19 \leqslant 5x - 1, \\ 10x < 3x + 21. \end{cases}$

6.15.° Rezolvați sistemul de inegalități:

1) $\begin{cases} -4x \leqslant -12, \\ x + 2 > 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8 - x \geqslant 5, \\ x - 7 \leqslant 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 3 < 5x, \\ 7x - 10 < 5x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2 - 3x < 4x - 12, \\ 7 + 3x \geqslant 2x + 10; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 3 \geqslant 8, \\ \dfrac{x + 1}{3} < 6; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x - 2 \geqslant 2x + 1, \\ 2x + 3 \leqslant 33 - 3x. \end{cases}$

6.16.° Aflați mulțimea de soluții ale inegalității:

1) $-3 < x - 4 < 7$; 3) $0{,}8 \leqslant 6 - 2x < 1{,}4$;

2) $-2{,}4 \leqslant 3x + 0{,}6 \leqslant 3$; 4) $4 < \dfrac{x}{5} - 2 \leqslant 5$.

6.17.° Rezolvați inegalitatea:

1) $2 < x + 10 \leqslant 14$; 3) $-1{,}8 \leqslant 1 - 7x \leqslant 36$;

2) $10 < 4x - 2 < 18$; 4) $1 \leqslant \dfrac{x + 1}{4} < 1{,}5$.

6.18.° Câte soluții întregi are sistemul de inegalități $\begin{cases} -2x \geqslant -15, \\ 3x > -10? \end{cases}$

6.19.° Calculați suma soluțiilor întregi ale sistemului de inegalități

$$\begin{cases} x + 8 \geqslant 4, \\ 5x + 1 \leqslant 9. \end{cases}$$

6.20.° Câte soluții întregi are inegalitatea $-3 \leqslant 7x - 5 < 16$?

6.21.° Aflați cea mai mică soluție întreagă a sistemului de inegalități

$$\begin{cases} x + 8 \geqslant 17, \\ \dfrac{x}{2} > 4{,}5. \end{cases}$$

6.22.° Aflați cea mai mare soluție întreagă a sistemului de inegalități

$$\begin{cases} 2x + 1 < -4, \\ 3x - 6 \leqslant -12. \end{cases}$$

6.23.• Rezolvați sistemul de inegalități:

1) $\begin{cases} 8(2 - x) - 2x > 3, \\ -3(6x - 1) - x < 2x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{4} - \dfrac{2x+3}{3} > 1, \\ 6(2x - 1) < 5(x - 4) - 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(x - 3) \leqslant 3x + 4(x + 1), \\ (x - 3)(x + 3) \leqslant (x - 4)^2 - 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x + 11) \geqslant 3(6 - x), \\ (x - 3)(x + 6) \geqslant (x + 5)(x - 4); \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x - \dfrac{x+1}{2} \leqslant \dfrac{x+1}{3}, \\ (x + 5)(x - 3) + 41 \geqslant (x - 6)^2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x + 4 \leqslant 2x - 8, \\ (x + 2)(x - 1) \geqslant (x + 3)(x - 2); \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{7} < \dfrac{x+1}{4}, \\ (x - 6)(x + 2) + 4x < (x - 7)(x + 7); \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{6x+1}{6} - \dfrac{5x-1}{5} > -1, \\ 2(x + 8) - 3(x + 2) < 5 - x. \end{cases}$

6.24. Aflați mulțimea de soluții ale sistemului de inegalități:

1) $\begin{cases} \frac{2x-3}{5} - \frac{4x-9}{6} > 1, \\ 5(x-1) + 7(x+2) > 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < \frac{x+12}{6}, \\ 0,3x - 19 \leqslant 1,7x - 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-6)^2 < (x-2)^2 - 8, \\ 3(2x-1) - 8 < 34 - 3(5x-9); \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{3x-2}{3} - \frac{4x+1}{4} \leqslant 1, \\ (x-1)(x-2) > (x+4)(x-7). \end{cases}$

6.25. Aflați soluțiile întregi ale sistemului de inegalități:

1) $\begin{cases} 2x - 1 < 1,7 - x, \\ 3x - 2 \geqslant x - 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{x}{4} < 1, \\ 2x - \frac{x}{2} \geqslant 10. \end{cases}$

6.26. Câte soluții întregi are sistemul de inegalități:

1) $\begin{cases} 4x + 3 \geqslant 6x - 7, \\ 3(x+8) \geqslant 4(8-x); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - \frac{x+1}{3} - \frac{x-2}{6} < 2, \\ \frac{2x-5}{3} \geqslant -3? \end{cases}$

6.27. Determinați domeniul de definiție al expresiei:

1) $\sqrt{6x-9} + \sqrt{2x-5}$;

2) $\sqrt{3x+5} - \frac{1}{\sqrt{15-5x}}$;

3) $\sqrt{2x-4} + \sqrt{1-x}$;

4) $\sqrt{12-3x} - \frac{5}{x-4}$.

6.28. Pentru care valori ale variabilei expresia are sens:

1) $\sqrt{8-x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

2) $\sqrt{7x-35} + \frac{1}{x^2-5x}$?

6.29. Rezolvați inegalitatea:

1) $-3 < \frac{2x-5}{2} < 4$;

2) $-4 \leqslant 1 - \frac{x-2}{3} \leqslant -3$.

6.30. Rezolvați inegalitatea:

1) $-2 \leqslant \frac{6x+1}{4} < 4$;

2) $1,2 < \frac{7-3x}{5} \leqslant 1,4$.

6.31.• Rezolvați sistemul de inagalități:

1) $\begin{cases} x < 4, \\ x > 2, \\ x < 3{,}6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 6 < 8, \\ 4 - 4x < 10, \\ 8x - 9 > 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0{,}4 - 8x \geqslant 3{,}6, \\ 1{,}5x - 2 < 4, \\ 4{,}1x + 10 < 1{,}6x + 5. \end{cases}$

6.32.• Rezolvați sistemul de inegalități:

1) $\begin{cases} -x < 2, \\ 2x > 7, \\ x < -4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 1 < 2x + 2, \\ 2x + 1 > 8 - 5x, \\ 5x - 25 \leqslant 0. \end{cases}$

6.33.• Prima latură a triunghiului este egală cu 4 cm, iar suma celorlalte două – 8 cm. Aflați laturile necunoscute ale triunghiului, dacă lungimea fiecă0reia este de un număr întreg de centimetri.

6.34.•• Rezolvați inegalitatea:

1) $(x - 3)(x + 4) \leqslant 0$;

2) $(x+1)(2x-7) > 0$;

3) $\dfrac{x - 8}{x - 1} > 0$;

4) $\dfrac{3x + 6}{x - 9} < 0$;

5) $\dfrac{2x - 1}{x + 2} \leqslant 0$;

6) $\dfrac{5x + 4}{x - 6} \geqslant 0$.

6.35.•• Rezolvați inegalitatea:

1) $(14 - 7x)(x + 3) > 0$;

2) $\dfrac{x - 8}{3x - 12} > 0$;

3) $\dfrac{5x - 6}{x + 9} \geqslant 0$;

4) $\dfrac{4x + 1}{x - 10} \leqslant 0$.

6.36.•• Rezolvați inegalitatea:

1) $|x - 2| \leqslant 3{,}6$;

2) $|2x + 3| < 5$;

3) $|x + 3| > 9$;

4) $|7 - 3x| \geqslant 1$;

5) $|x + 3| + 2x \geqslant 6$;

6) $|x - 4| - 6x < 15$.

637.•• Rezolvați inegalitatea:

1) $|x - 6| \geqslant 2{,}4$;

2) $|5x + 8| \leqslant 2$;

3) $|x + 5| - 3x > 4$;

4) $|x - 1| + x \leqslant 3$.

6.38.* Pentru ce valori a lui a sistemul de inegalități are măcar o soluție:

1) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

6.39.* Pentru ce valori a lui a sistemul de inegalități nu are soluții:

1) $\begin{cases} x > 4, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

6.40.* Pentru ce valori ale lui a mulțimea de valori ale sistemului de inegalități $\begin{cases} x > -1, \\ x \geqslant a \end{cases}$ este intervalul:

1) $(-1; +\infty)$; 2) $[1; +\infty)$?

6.41.* Pentru fiecare valoare a lui a rezolvați sistemul de inegalități

$$\begin{cases} x < 2, \\ x \leqslant a. \end{cases}$$

6.42.* Pentru fiecare valoare a lui a rezolvați sistemul de inegalități

$$\begin{cases} x < -3, \\ x > a. \end{cases}$$

6.43.* Pentru ce valori ale lui a mulțimea de soluții ale sistemului de inegalități $\begin{cases} x \geqslant 7, \\ x < a \end{cases}$ conține exact patru soluții întregi?

6.44.* Pentru ce valori ale lui b mulțimea de soluții ale sistemului de inegalități $\begin{cases} x < 5, \\ x \geqslant b \end{cases}$ conține exact trei soluții întregi?

6.45.* Pentru ce valori ale lui a cea mai mică soluție întreagă a sistemului de inegalități $\begin{cases} x \geqslant 6, \\ x > a \end{cases}$ este numărul 9?

6.46.* Pentru ce valori ale lui b cea mai mare soluție întreagă a sistemului de inegalități $\begin{cases} x \leqslant b, \\ x < -2 \end{cases}$ este numărul -6?

6.47.* Pentru ce valori ale lui a rădăcinile ecuației $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$ sunt mai mici decât numărul 5?

6.48.* Pentru ce valori a lui a rădăcinile ecuației

$$x^2 - (4a - 2)\,x + 3a^2 - 4a + 1 = 0$$

aparțin intervalului $[-2; 8]$?

6.49.* Pentru ce valori ale lui a una din rădăcinile ecuației

$$3x^2 - (2a + 5)x + 2 + a - a^2 = 0$$

este mai mică decât –2, iar a doua – mai mare ca 3?

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

6.50. Rezolvați ecuația:

1) $\dfrac{x^2}{x^2-16} = \dfrac{3x+4}{x^2-16}$; 2) $\dfrac{5}{x-3} - \dfrac{8}{x} = 3$.

6.51. Simplificați expresia::

1) $0{,}5\sqrt{24} - 4\sqrt{40} - \sqrt{150} + \sqrt{54} + \sqrt{1000}$;

2) $\sqrt{8b} + 0{,}3\sqrt{50b} - 3\sqrt{2b}$;

3) $1{,}5\sqrt{72} - \sqrt{216} - 0{,}6\sqrt{450} + 0{,}5\sqrt{96}$.

6.52. Exprimați din egalitate variabila x prin alte variabile:

1) $2x - \dfrac{m}{n} = 2$; 2) $\dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{n}$.

6.53. Se știe, că a – număr par, b – număr impar, $a > b$. Valoarea căruia din expresii poate fi număr întreg:

1) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$; 2) $\dfrac{a}{b} - \dfrac{b}{a}$; 3) $\dfrac{a}{b}$; 4) $\dfrac{b}{a}$?

6.54. Câte kilograme de sare se conțin în 40 kg de soluție de 9 procente?

6.55. Minereul conține 8 % de cositor. Câte kilograme de minereu sunt necesare pentru obținerea a 72 kg de cositor?

6.56. Care este conținutul în procente al sării în soluție, dacă 350 g de soluție conțin 21 g de sare?

ÎNSĂRCINAREA №1 “VERIFICAȚI-VĂ CUNOȘTINȚELE” ÎN FORMĂ DE TESTE

1. Comparați numerele a și b, dacă $a - b = -3{,}6$.
A) $a > b$;
B) $a < b$;
C) $a = b$;
D) comparația e imposibilă

2. Fie, $m > n$. Care din afirmațiile date este incorectă?
A) $m - 2 > n - 2$;
B) $2m > 2n$;
C) $m + 2 > n + 2$;
D) $-2m > -2n$.

3. Aflați perimetrul P al unui triunghi echilateral cu latura a cm, dacă $0{,}8 < a < 1{,}2$.
A) 1,6 cm $< P <$ 2,4 cm;
B) 2,4 cm $< P <$ 3,6 cm;
C) 3,2 cm $< P <$ 4,8 cm;
D) 1,2 cm $< P <$ 1,8 cm.

4. Se știe, că $2 < x < 3$ și $1 < y < 4$. Estimați valoarea expresiei xy.
A) $4 < xy < 8$;
B) $3 < xy < 7$;
C) $2 < xy < 12$;
D) $6 < xy < 14$.

5. Se știe, că $-18 < y < 12$. Estimați valoarea expresiei $\frac{1}{6}y + 2$.
A) $-3 < \frac{1}{6}y + 2 < 4$;
B) $-1 < \frac{1}{6}y + 2 < 4$;
C) $-1 < \frac{1}{6}y + 2 < 2$;
D) $-3 < \frac{1}{6}y + 2 < 2$.

6. Fie $a > 0$, $b < 0$. Care din inegalitățile date poate fi corectă?
A) $a^2 < b^2$; C) $a - b < 0$;
B) $\frac{a}{b} > 1$; D) $a^2b^3 > 0$.

7. Mulțime de soluții a căreia din inegalitățile date este mulțimea numerelor reale?

A) $2x > -2$; C) $0x > -2$;
B) $2x > 0$; D) $0x > 0$.

8. Mulțime de soluții a căreia din inegalitățile date este intervalul $(3; +\infty)$?

A) $x \geqslant 3$; C) $x > 3$;
B) $x \leqslant 3$; D) $x < 3$.

9. Aflați soluțiile inegalității $\frac{x}{4} \leqslant \frac{1}{5}$.

A) $x \geqslant \frac{4}{5}$; C) $x \leqslant \frac{4}{5}$;
B) $x \geqslant \frac{1}{20}$; D) $x \leqslant \frac{1}{20}$.

10. Rezolvați inegalitatea $-3x + 8 \geqslant 5$.

A) $x \leqslant 1$; C) $x \leqslant -1$;
B) $x \geqslant 1$; D) $x \geqslant -1$.

11. Aflați cea mai mică soluție întreagă a inegalității $\frac{3x-5}{2} > \frac{8-x}{3}$.

A) 2; C) 4;
B) 3; D) nu are soluții.

12. Cu ce este egal produsul numerelor naturale, ce aparțin domeniului de definiție al expresiei $\sqrt{14-3x}$?

A) 4; C) 18;
B) 10; D) 24.

13. Care din sistemele date de inegalități nu are soluții?

A) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \leqslant -2; \end{cases}$ C) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \leqslant -3; \end{cases}$

B) $\begin{cases} x > -3, \\ x > -2; \end{cases}$ D) $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x \leqslant -3. \end{cases}$

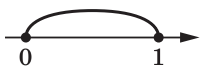
14. Aflați mulțimea de soluții a sistemului de inegalități

$$\begin{cases} x - 1 > 2x - 3, \\ 4x + 5 > x + 17. \end{cases}$$

A) $\varnothing$; C) $(-\infty; 4)$;
B) $(2; +\infty)$; D) $(2; 4)$.

15. Care din intervalele numerice prezentate corespunde mulțimii de soluții ale sistemului de inegalități $\begin{cases} 8-7x>3x-2, \\ -2(3x-2{,}6)\leqslant -2(-2{,}6)? \end{cases}$

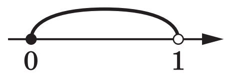
A)



C)

B)

D)



16. Câte soluții întregi are sistemul de inegalități

$$\begin{cases} x-\dfrac{x-2}{3}\geqslant\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{x-1}{2}, \\ 1-0{,}5x>x-4? \end{cases}$$

A) 3; C) 5;
B) 4; D) 6.

17. Rezolvați inegalitatea $-3<\dfrac{1-2x}{5}-2<1.$

A) (–3; 7); C) (–7; –3);
B) (–7; 3); D) (3; 7).

18. Pentru ce valori a lui a ecuația $2x^2+6x+a=0$ nu are rădăcini?

A) $a<4{,}5$; C) $a>-4{,}5$;
B) $a>4{,}5$; D) $a<-4{,}5$.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 1

Compararea numerelor

Numărul a este considerat mai mare decât numărul b, dacă diferența $a - b$ este număr pozitiv.

Numărul a este considerat mai mic decât numărul b, dacă diferența $a - b$ este număr negativ.

Proprietățile de bază ale inegalităților numerice

Dacă $a > b$ și $b > c$, atunci $a > c$.

Dacă $a > b$ și c – orice număr, atunci $a + c > b + c$.

Dacă $a > b$ și c – număr pozitiv, atunci $ac > bc$.

Dacă $a > b$ și c – număr negativ, atunci $ac < bc$.

Dacă $a > b$ și $ab > 0$, atunci $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Adunarea și înmulțirea inegalităților numerice

Dacă $a > b$ și $c > d$, atunci $a + c > b + d$.

Dacă $a > b$, $c > d$ și a, b, c, d – numere pozitive, atunci $ac > bd$.

Soluția inegalității cu o variabilă

Soluția inegalității cu o variabilă se numește valoarea variabilei, ce transformă inegalitatea în inegalitate numerică corectă.

Inegalități echivalente

Inegalitățile se numesc echivalente, dacă ele au milțimi de soluții identice.

Reguli de rezolvare ale inegalităților cu o variabilă

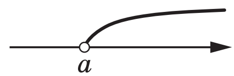
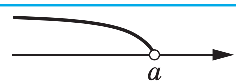
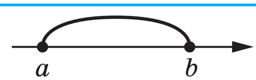
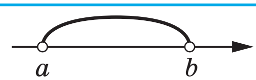
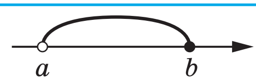
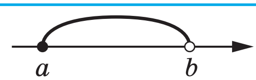
- Dacă un oarecare termen este transferat dintr-o parte a inegalității în cealaltă parte, schimbând semnul termenului în semn opus, se va obține o inegalitate echivalentă cu inegalitatea inițială.
- Dacă ambele părți ale inegalității vor fi înmulțite cu (împărțite la) acelaș număr pozitiv, se va obține o inegalitate echivalentă cu inegalitatea inițială.
- Dacă ambele părți ale inegalității vor fi înmulțite cu (împărțite la) același număr negativ, schimbând semnul inegalității în semn opus, se va obține o inegalitate echivalentă cu inegalitatea inițială.

Rezolvarea sistemelor de inegalități cu o variabilă

Soluția a unui sistem de inegalități cu o variabilă se numește valoarea variabilei, care transformă fiecare inegalitate a sistemului într-o inegalitate numerică corectă.

A rezolva un sistem de inegalități înseamnă a afla toate soluțiile sistemului sau a demonstra, că sistemul nu are soluții, adică a afla mulțimea de soluții a sistemului.

Intervale numerice

Inegalitatea	Intervalul	Imaginea
$x>a$	$(a; +\infty)$	
$x<a$	$(-\infty; a)$	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$	
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$	
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	
$a<x<b$	$(a; b)$	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$	

§ 2 FUNCȚIA PĂTRATĂ

- În acest paragraf veți repeta și veți acumula cunoștințe noi despre funcție și proprietățile ei.
- Veți învăța a construi graficele funcțiilor $y = f(x)$, folosind graficul funcției $y = kf(x)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$.
- O să aflați, care fin funcții este numită funcție pătrată, cum arată graficul acestei funcții, veți studia proprietățile funcției pătrate.
- Veți învăța să aplicați proprietățile funcției pătrate.
- Veți acumula cunoștințe noi despre sistemele cu două variabile, metodele de rezolvare ale acestor sisteme, veți dobândi experiență de rezolvare a sistemelor de ecuații.

7. Repetarea și aprofundarea cunoștințelor despre funcție

În viața zi de zi avem posibilitatea să observăm procese, în care scimbarea unei mărimi (a variabilei independente) provoacă schimbarea altei mărimi (a variabilei dependnte). Studierea acestor procese necesită crearea de modele matematice a proceselor. Una din cele mai importante modele este **funcția.**

Cu această noțiune ați făcut cunoștință în clasa 7. Amintim și detalizăm cunoștințele de bază.

Fie X – mulțimea de valori a variabilei independente, Y – mulțimea de valori a variabilei dependente. **Funcția – este regula, conform căreia, pentru fiecare valoare a variabilei independente din mulțimea X poate fi aflată valoarea unică a variabilei dependente din mulțimea Y.**.

De obicei variabila independentă este notată cu litera x, variabila dependentă – cu litera y, funcția (regula) – cu litera f. Se spune că variabila y este **funcțional dependentă** de variabila x. Acest fapt este notat: $y = f(x)$.

Variabila dependentă este numită și **argument al funcției**.

Mulțimea totală a valorilor, ce le poate primi argumentul, este numită **domeniu de definiție al funcției** și este notată $D(f)$ sau $D(y)$.

În așa fel, domeniu de definiție al funcției $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ este intervalul $(0; +\infty)$, adică $D(y) = (0; +\infty)$.

De dependența funcțională fiecărei valori a argumentului x îi corespunde o oarecare valoare a variabilei y. Valoarea variabilei y este numită și **valoare a funcției** și este notată $f(x)$. Mulțimea tuturor valorilor, primite de variabila dependentă, este numită **domeniu de valori a funcției** și este notată $E(f)$ sau $E(y)$. În așa fel, mulțime de valori a funcției $y = \sqrt{x}$ este intervalul $[0; +\infty)$, sau $E(y) = [0; +\infty)$.

Funcția este considerată ca definită, dacă sânt determinate domeniul de definiție și regula, conform căreia pentru fiecare valoare a variabilei independente poate fi aflată valoarea variabilei dependente.

- Funcția poate fi reprezentată prin una din metodele
- prin descriere;
- prin formulă;
- prin tabelă;
- în mod grafic.

Cea mai răspîndită este metoda de definire prin formulă. Această metodă de definire a funcției este numită **metodă analitică**. Dacă la descrierea funcției nu este numit domeniul de definiție, se consideră, că domeniul de definiție al funcției coincide cu domeniul de definiție al expresiei, conținute în formulă. De exemplu, dacă funcția este determinată prin formula $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, domeniul de definiție al funcției coincide cu domeniul de definiție al exprexiei $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, adică intervalul $(1; +\infty)$.

În tabelă sunt reprezentate funcțiile, studiate în clasele a 7-a și a 8-a.

Funcția	Domeniul de definiție	Domeniul de valori	Graficul
$y = kx + b$	$(-\infty; +\infty)$	Dacă $k \neq 0$, atunci $(-\infty; +\infty)$; dacă $k = 0$, atunci domeniul de valori contine un singur număr b	O dreaptă
$y = \dfrac{k}{x}$, $k \neq 0$	Mulțimea, formată din intervalele $(-\infty; 0)$ și $(0; +\infty)$	Mulțimea, formată din intervalele $(-\infty; 0)$ și $(0; +\infty)$	Hiperbola
$y = x^2$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Parabola
$y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	O ramură a parabolei

1. Ce se numește funcție?
2. Cum este notat faptul, că variabila y este funcțional dependentă de variabila x?
3. Ce se numește argument al funcției?
4. Ce se numește domeniu de definiție al funcției?
5. Ce se numește valoare a funcției?
6. Ce se numește domeniu de valori al funcției?
7. Ce trebuie determinat, ca funcția să fie definită?
8. Prin ce metode poate fi reprezentată funcția?
9. Ce este considerat domeniu de definiție al funcției, dacă funcția este reprezentată prin formulă, iar domeniul de definiție nu e determinat?

EXERCIȚII

7.1.° Funcția este reprezentată prin formula $f(x) = -2x^2 + 5x$.

1) Calculați: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(-5)$.
2) Aflați valoarea argumentului, pentru care valoarea funcției este egală cu: 0; 2; –3.
3) Este oare corectă egalitatea: $f(-1) = 7$; $f(4) = -12$?

7.2.° Funcția este reprezentată prin formula $f(x) = 3x - 2$.

1) calculați: $f(3)$; $f(0)$; $f(-0{,}2)$; $f(1{,}6)$.
2) Aflați valoarea lui x, pentru care: $f(x) = 10$; $f(x) = -6$; $f(x) = 0$.

7.3.° Fiecărui număr natural, mai mare ca 10 și mai mic ca 20, puneți în corespundere restul divizării acestui număr la 5.

1) Prin ce metodă este reprezentată această funcție?
2) Care este domeniul de definiție al acestei funcții?
3) Reprezentați această funcție prin tabelă.

7.4.° Funcția este reprezentată prin formula $y = 0{,}4x - 2$. Completați tabela cu valorile corespunzătoare x și y:

x	**2**		**–2,5**	
y		**–2**		**0,8**

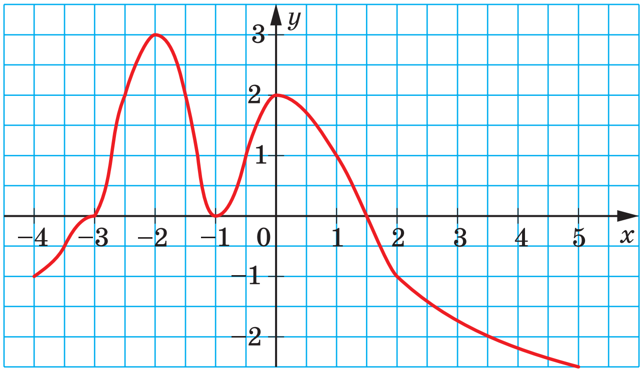


Fig. 7.1

7.5.° Fie dată funcția $y = -\frac{16}{x}$. În pliniți tabela valorilor corespunzătoare x și y:

x	2		–0,4	
y		0,8		–32

7.6.° Pe figura 7.1 este reprezentat graficul funcției $y = f(x)$, determinate pe intervalul [–4; 5]. Folosind graficul, aflați:
1) $f(-3,5)$; $f(-2,5)$; $f(-1)$; $f(2)$;
2) valorile lui x, pentru care $f(x) = -2,5$; $f(x) = -2$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;
3) domeniul de definiție al funcției.

7.7.° Pe figura 7.2 este reprezentat graficul funcției $y = f(x)$, determinate pe intervalul [–4; 4]. Folosind graficul , aflați:
1) $f(-4)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f(2,5)$;
2) valorile lui x, pentru care $f(x) = -1$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;
3) domeniul de valori al funcției..

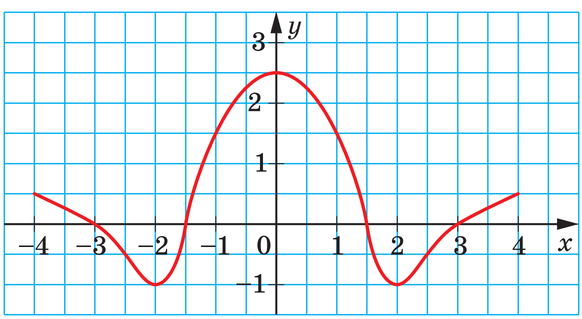


Fig. 7.2

7.8.° Aflați domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x) = 7x - 15$;
2) $f(x) = \frac{8}{x+5}$;
3) $f(x) = \frac{x-10}{6}$;
4) $f(x) = \sqrt{x-9}$;
5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$;
6) $f(x) = \frac{10}{x^2-4}$;
7) $f(x) = \frac{6x+11}{x^2-2x}$;
8) $f(x) = \sqrt{x+6} + \sqrt{4-x}$.

7.9.° Aflați domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$;
2) $f(x) = \frac{9}{x^2+16}$;
3) $f(x) = \frac{5x+1}{x^2-6x+8}$;
4) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-3}$;
5) $f(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{5-x}$;
6) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

7.10.° Construiți graficul funcției:

1) $f(x) = -2x + 3$;
2) $f(x) = -\frac{1}{4}x$;
3) $f(x) = 3$;
4) $f(x) = -\frac{6}{x}$.

7.11.° Construiți graficul funcției:

1) $f(x) = 4 - \frac{1}{3}x$;
2) $f(x) = \frac{8}{x}$.

7.12.° Aflați punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordonate, fără a produce construcția graficului:

1) $f(x) = \frac{1}{6}x - 7$;
2) $f(x) = \frac{20+4x}{3x-5}$;
3) $g(x) = 9 - x^2$;
4) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 3$.

7.13.° Aflați punctele de intersecție ale graficului funcției cu axele de coordinate, fără a produce construcția graficului:

1) $h(x) = 9 - 10x$;
2) $p(x) = 4x^2 + x - 3$;
3) $s(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$.

7.14.• Fie dată funcția $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & \text{dacă } x \leqslant -1, \\ x^2-5, & \text{dacă } -1 < x < 4, \\ 11, & \text{dacă } x \geqslant 4. \end{cases}$

Aflați: 1) $f(-3)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(6{,}4)$.

7.15.• Construiți graficul funcției $f(x)=\begin{cases}6, \text{ dacă } x\leqslant -3,\\ x^2, \text{ dacă } -3<x<1,\\ x, \text{ dacă } x\geqslant 1.\end{cases}$

7.16.• Construiți graficul funcției $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{4}{x}, \text{ dacă } x<-2,\\ -x, \text{ dacă } -2\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, \text{ dacă } x>0.\end{cases}$

7.17.• Aflați domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{x+2}{x-5}$;
3) $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}$;
2) $f(x)=\dfrac{x}{|x|-7}$;
4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{4x-3}{x^2-7x+6}$.

7.18.• Aflați domeniul de definiție al funcției:

1) $f(x)=\sqrt{x+4}+\dfrac{2}{x+1}$;
2) $f(x)=\sqrt{8-x}+\dfrac{4}{x^2-8x}$.

7.19.• Aflați domeniul de valori al funcției:

1) $f(x)=\sqrt{x}-1$;
3) $f(x)=-7$;
5) $f(x)=\sqrt{-x^2}$;
2) $f(x)=5-x^2$;
4) $f(x)=|x|+2$;
6) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$.

7.20.• Aflați domeniul de valori al funcției:

1) $f(x)=x^2+3$;
2) $f(x)=6-\sqrt{x}$;
3) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$.

7.21.• Reprezentați prin formulă o oarecare funcție, domeniu de definiție al căreia este:

1) mulțimea numerelor reale, în afară de 1 și 2;
2) mulțimea numerelor reale, nu mai mici ca 5;
3) multimea tuturor numerelor, nu mai mari ca 10, în afară –1;
4) mulțimea, alcătuită din unicul număr –4.

7.22.•• Aflați domeniul de definiție și construiți graficul funcției:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$;
2) $f(x)=\dfrac{12x-72}{x^2-6x}$;
3) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-9}$.

7.23.•• Aflați domeniul de definiție și construiți graficul funcției:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}$;
2) $f(x)=\dfrac{x^3}{x}$.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

7.24. Descompuneți în factori expresia polinomului pătrat:

1) $x^2 - x - 12$;
2) $-x^2 + 2x + 35$;
3) $6x^2 + 11x - 2$;
4) $\frac{2}{3}x^2 + 3x - 6$.

7.25. Calculați valoarea expresiei:

1) $(10^3)^2 \cdot 10^{-8}$;
2) $\frac{25^{-3} \cdot 5^3}{5^{-5}}$;
3) $\frac{81^{-2} \cdot 3^5}{9^{-2}}$;
4) $\frac{0{,}125^3 \cdot 32^2}{0{,}5^{-2}}$.

7.26. Prețurile pentru două dulapuri au fost identice. Prețul primului dulap la început a fost mărit cu 20 %, iar apoi a fost micșorat cu 10 %. Prețul celui de-al doilea dulap, întâi a fost micșorat cu 10 %, iar apoi mărit cu 20 %. Prețul cărui dulap a devenit mai mare?

7.27. Distanța dintre orașele A și B este egală cu 120 km. Peste 2 ore după ce a pornit din orașul A camionul s-a reținut la trecerea de cale ferată timp de 6 min. Pentru a ajunge la orașul B în timpul programat, camionul a sporit viteza cu 12 km/oră. Cu ce viteză s-a deplasat camionul după reținere?

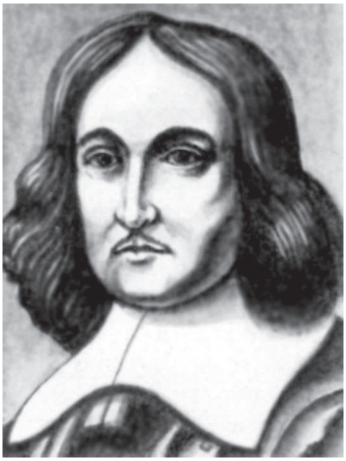
ÎNSUȘIM ACȚIUNI NESTANDARTE

7.28. Numărul natural n are exact 100 de divizori naturali diferiți (inclusiv 1 și n). Aflați produsul acestor divizori.

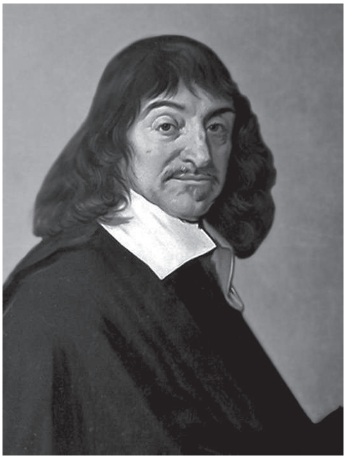
Din retrospectiva noțiunii de funcție

Definiția funcției, folosite în etapa modernă de studiu matematic, a apărut relativ nu demult – în prima jumătate a secolului XIX. Procesul de formare a durat peste 200 ani sub influența unor dezbateri aprige a matematicienilor remarcabili din câteva generații.

Studierea dependenței funcționale dintre mărimi a fost inițializată de savanții antici. Aceste studii și-au găsit oglindirea în descoperirea formulelor pentru calcularea ariilor și a volumelor unor figuri. Ca exemple de reprezentare tabulară a funcțiilor pot servi tabelele astronomice ale babilonienilor, ale grecilor antici, ale arabilor.



Pierre de Fermat
(1601–1665)

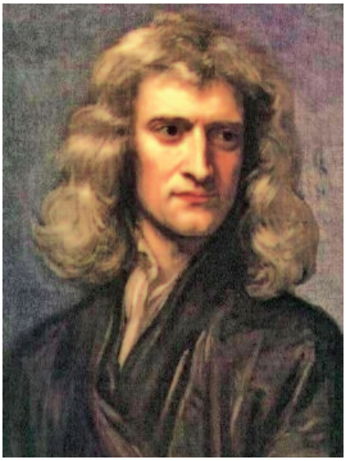


René Descartes
(1596–1650)

Dar numai în prima jumătate a secolului XVII, prin descoperirea metodei coordonatelor, iluștrii matematicieni francezi **Pierre de Fermat** și **René Descartes** au pus bazele apariției noțiunii de funcție. În lucrările lor sunt studiate schimbărea ordanatei punctului în dependență de schimbarea abscisei.

O atribuție esențială în formarea noțiunii de funcție au avut lucrările marelui savant englez Isaac Newton. Funcția este interpretată de el ca o mărime, ce-și schimbă valoarea în dependență de timp.

Termenul de "funcție" (din latină *function* – infăptuire, îndeplinire) a fost propus de matematecianul german **Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz**. El și elevul său, matematecianul elvețian **Jakob Iohann Bernoulli**, au tractat funcția ca o formulă, ce stabilește relația dintre două variabile, deci ei au echivalat funcția cu una din metodele ei de reprezentare.



Isaac Newton
(1643–1727)

Progresarea noțiunii de funcție a fost favorizată de stabilirea adevărului în disputa îndelungată dintre iluștrii matematecieni **Leonhard Euler** și **Jean Le Rond d'Alembert,** una dintre temele căreia a fost

Gottfried von Leibniz
(1646–1716)

Iohann Bernoulli
(1667–1748)

consacrată sensului noțiunii de funcție. Ca urmare, a fost creată o opinie complexă despre noțiunea de funcție ca dependența unei valori variabile de altă valoare variabilă, în care nu era determinată strict forma de reprezentare a funcției.

Leonhard Euler
(1707–1783)

Jean Le Rond d’Alembert
(1717–1783)

În anii 30 a secolului XIX ideile lui Euler au fost desfășurate în lucrările remarcabililor învățați: matematecianul rus Nicolai Lobacevski și matematecianul german **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet**. Anume în această perioadă a apărut definiția: mărimea variabilă *y* este numită funcție a mărimii variabile *x*, dacă fiecărei valori a mărimii *x* îi corespunde o valoare unică a mărimii *y*.

Nikolai Ivanovici Lobacevski
(1792–1856)

Peter Dirichlet
(1805–1859)

Această definiție a funcției poate fi și azi întâlnită în manualele școlare. Dar punctul de vedere mai modern – este tractarea funcției ca regulă, conform căreia pentru orice valoare a variabilei independente poate fi aflată valoarea unică a variabilei dependente.

Între secolele XIX și XX, când a apărut teoria mulțimilor și a devenit clar, că elemente ale domeniului de definiție pot fi nu numai numere, atunci afost difinită funcția *care fiecărui element al mulțimii X îi pune în corespundere un element unic a mulțimii Y*.

8. Proprietățile funcției

Deseori despre proprietățile obiectului se pot face concluzii, analizânt imaginea lui: fotografia, imaginea Roentgen, desenul etc.

Ca “imagine” a funcției poate servi graficul ei. Vom arăta, cum graficul funcției permite să determinăm unele proprietăți.

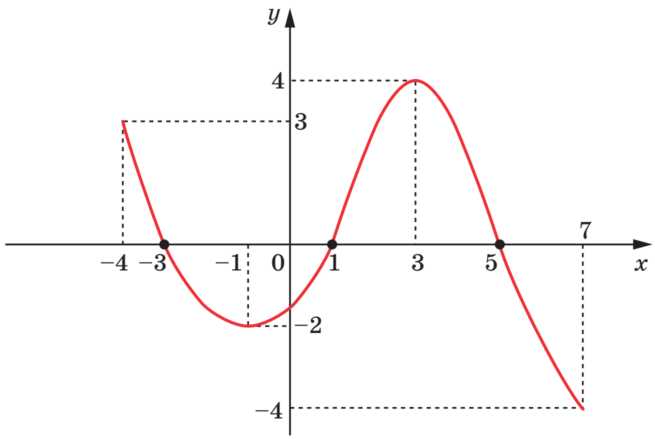


Fig. 8.1

Pe figura 8.1 este reprezentat graficul unei oarecare funcții $y = f(x)$.

Domeniul ei de definiție este intervalul [–4; 7], iar domeniul de valori – intervalul [–4; 4].

Pentru $x = –3$, $x = 1$, $x = 5$ valoarea funcției este egală cu zero.

Definiție. Valoarea argumentului, pentru care valoarea funcției este egală cu zero, se numește zerou al funcției.

În așa fel, numerele –3, 1, 5 sunt zerouri ale funcției date.

Menținem, că pe intervalale [–4; –3) și (1; 5) graficul e situat mai sus de axa absciselor, iar pe intervalele (–3; 1) și (5; 7] – mai jos de axa absciselor. Deci pe intervalele [–4; –3) și (1; 5) funcția va avea valori pozitive, iar pe intervalele (–3; 1) și (5; 7] – valori negative.

Fiecare din intervalele indicate se numește interval de semn constant al funcției *f*.

Definiție. Intervalul, pe care valorile funcției sunt de acelaș semn, se numește interval de semn constant al funcției.

Menținem, că, de exemplu, intervalul (0; 5) nu e interval de semn constant al funcției date.

Observație. La determinarea intervalelor de semn constant se determină intervalele de dimensiune maximă. De exemplu, inervalul (–2; –1) este interval de semn constant al funcției *f* (fig. 8.1), dar răspunsul corect este intervalul (–3; 1), care include intervalul (–2; –1).

Deplasându-ne pe axa absciselor de la –4 pîna la –1, putem observa, că graficul funcției "coboară în jos", adică valorile funcției se micșorează. Se spune, că pe intervalul [–4; –1] **funcția descrește**. Cu mărirea lui x de la –1 pînă la 3 graficul funcției "urcă în sus", adică valorile funcției se măresc. Se spune, că pe intervalul [–1; 3] **funcția crește.**

Definiție. Funcția f se numește crescătoare pe un oarecare interval, dacă pentru orice două valori ale argumentului din acest interval x_1 și x_2 de așa fel, că $x_2 > x_1$, se va îndeplini inegalitatea $f(x_2) > f(x_1)$.

Definiție. Funcția f se numește descrescătoare pe un oarecare interval, dacă pentru orice două valori ale argumentului din acest interval x_1 și x_2 de așa fel, că $x_2 > x_1$, se va îndeplini inegalitatea $f(x_2) < f(x_1)$.

Pot fi întâlnite și astfel de definiții.

Definiție. Funcția f se numește crescătoare pe un oarecare interval, dacă pentru orice două valori ale argumentului din acest interval valorii mai mari a argumentului îi corespunde valoarea mai mare a funcției.

Definiție. Funcția f se numește descrescătoare pe un oarecare interval, dacă pentru orice două valori ale argumentului din acest interval valorii mai mari a argumentului îi corespunde valoarea mai mică a funcției.

Dacă funcția crește pe tot domeniul de definiție, așa funcție se numește funcție **crescătoare**. Dacă funcția descrește pe tot domeniul de definiție, așa funcție se numește funcție **descrescătoare**.

De exemplu, pe figura 8.2 este reprezentat graficul funcției $y = \sqrt{x}$. Această funcție este crescătoare. Pe figura 8.3 este reprezentat graficul funcției descreccătoare $y = -x$. Pe figura 8.1 este reprezentat graficul unei funcții, ce nu e nici crescătoare, nici descrescătoare.

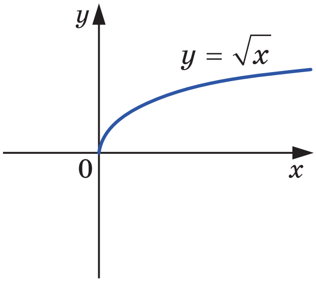


Fig. 8.2

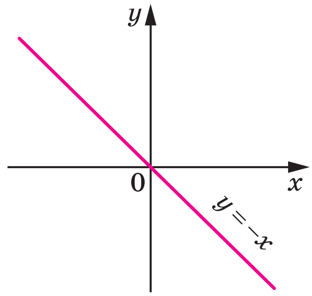


Fig. 8.3

EXEMPLUL 1 Demonstrați, că funcția $y = x^2$ descrește pe intervalu $(-\infty; 0]$.

Rezolvare. Fie x_1 și x_2 – orice valori ale argumentului din intervalul $(-\infty; 0]$, și $x_2 > x_1$. Vom arăta, că $x_2^2 < x_1^2$, adică, că valorii mai mari a argumentului îi corespunde valoarea mai mică a funcției.

Obținem: $x_2 > x_1$; de aici $-x_2 < -x_1$. Ambele părți ale ultimei inegalități sunt numere pozitive. Conform proprietății inegalităților numerice, putem scrie $(-x_2)^2 < (-x_1)^2$, adică $x_2^2 < x_1^2$. ◀

Menținem, că în șa cazuri se spune: intervalul $(-\infty; 0]$ este **intervalul de descreștere** al funcției $y = x^2$. In mod analogic poate fi demonstrat, că intevalul $[0; +\infty)$ este intervalul de descreștere al funcției $y = x^2$.

În exercițiile de aflare a intervalelor de creștere și descreștere ale funcției sunt arătate intervalele cu dimensiune maximă.

EXEMPLUL 2 Demonstrați, că funcția $f(x) = \frac{1}{x}$ descrește pe fiecare din intervalele $(-\infty; 0)$ și $(0; +\infty)$.

Rezolvare. Fie x_1 și x_2 – orice valori ale argumentului din intervalul $(0; +\infty)$, și $x_2 > x_1$. Conform proprietății inegalităților numerice $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$. Deci, funcția dată este descrescătoare pe intervalul $(0; +\infty)$.

Analogic se demonstrează că funcția $f(x)$ este descrescătoare pe intervalul $(-\infty; 0)$. ◀

Dar nu se poate spune, că funcția $f(x) = \frac{1}{x}$ descrește pe întreg domeniul de definiție, adică ca este descrescătoare. Întra-devăr, dacă, de exemplu $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, din inegalitatea $x_2 > x_1$ reiese, $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$.

EXEMPLUL 3 Demonstrați, că funcția lineară $f(x) = kx + b$ este crescătoare pentru $k > 0$ și descrescătoare pentru $k < 0$.

Rezolvare. Fie x_1 și x_2 – orice valori ale argumentului și anume $x_2 > x_1$. Obținem:

$$f(x_2) - f(x_1) = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1).$$

Deoarece $x_2 > x_1$, atunci $x_2 - x_1 > 0$.

Dacă $k > 0$, atunci și $k(x_2 - x_1) > 0$, adică $f(x_2) > f(x_1)$. Deci, pentru

$k>0$, funcția dată este crescătoare.

Dacă $k<0$, atunci $k(x_2-x_1)<0$, adică $f(x_2)<f(x_1)$. Deci, pentru $k<0$ funcția dată este descrescătoare. ◀

1. Care valoare a argumentului este numită zerou al funcției?
2. Explicați, ce se numește interval de semn constant al funcției.
3. Care funcție este numită crescătoare pe un oarecare interval?
4. Care funcție este numită descrescătoare pe un oarecare interval?
5. Care funcție este numită crescătoare?
6. Care funcție este numită descrescătoare?

EXERCIȚII

8.1.° Pe figura 8.4 este reprezentat graficul funcției $y=f(x)$, definite pe mulțimea numerelor reale. Folosind graficul, aflați:
1) zerourile funcției;
2) pentru care valori ale argumentului valorile funcței sânt pozitive
3) intervalele de creștere și intervalele de descreștere ale funcției.

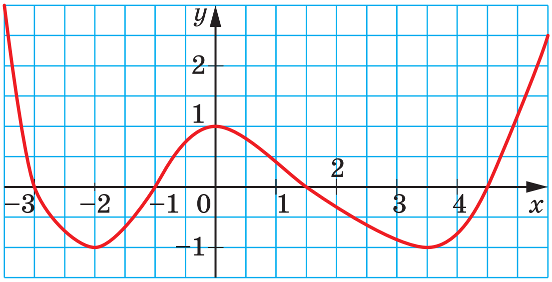


Fig. 8.4

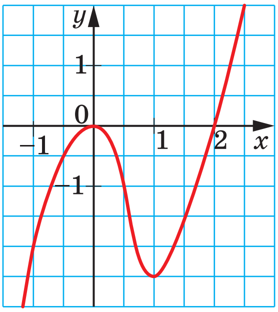


Fig. 8.5

8.2.° Pe figura 8.5 este reprezentat graficul funcției $y=f(x)$, definite pe mulțimea numerelor reale. Folosind graficul, aflați:
1) zerourile funcției;
2) pentru care valori ale argumentului valorile funcției sunt negative;
3) intervalele de creștere și intervalele de descreștere ale funcției.

8.3.° Pe figura 8.6 este reprezentat graficul funcției, definite pe intervalul $[-1; 4]$. Folosind graficul, aflați:

1) zerourile funcției;
2) pentru care valori ale argumentului valorile funcției sunt negative;
3) intervalele de creștere și intervalele de descreștere ale funcției.

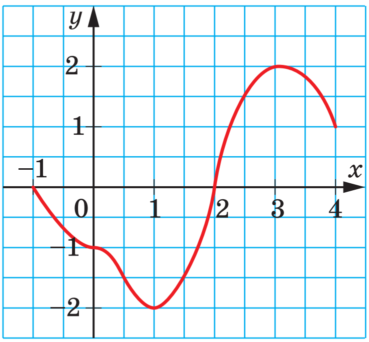


Fig. 8.6

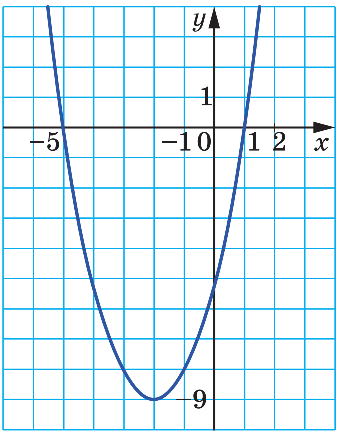


Fig. 8.7

8.4.° Pe figura 8.7 este reprezentat graficul funcției $y = f(x)$, definite pe mulțimea numerelor reale. Care din afirmațiile date sunt corecte:

1) funcția descrește pe intervalul $(-\infty; -9]$;
2) $f(x) < 0$ pentru $-5 \leqslant x \leqslant 1$;
3) funcția crește pe intervalul $[-2; +\infty)$;
4) $f(x) = 0$ pentru $x = -5$ și pentru $x = 1$;
5) funcția pe domeniul de definiție primește cea mai mică valoare pentru $x = -2$?

8.5.° Pe figura 8.8 este reprezentat graficul funcției $y = f(x)$, definite pe mulțimea numerelor reale. Folosind graficul, aflați:

1) zerourile funcției;
2) valorile lui x, pentru care $y < 0$;
3) intervalele de descreștere ale funcției;
4) domeniul de valori al funcției.

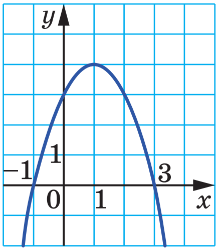


Fig. 8.8

8.6.° Funcția este crecătoare sau descrescătoare:

1) $y = 9x - 4$; 3) $y = 12 - 3x$; 5) $y = \frac{1}{6}x$;

2) $y = -4x + 10$; 4) $y = -x$; 6) $y = 1 - 0{,}3x$?

8.7.° Calculați zerourile funcției:

1) $f(x) = 0{,}2x + 3$; 4) $h(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 3}$;

2) $g(x) = 35 - 2x - x^2$; 5) $f(x) = x^3 - 4x$;

3) $\varphi(x) = \sqrt{x + 3}$; 6) $f(x) = x^2 + 1$.

8.8.° Calculați zerourile funcției:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x + 12$; 4) $f(x) = -5$;

2) $f(x) = 6x^2 + 5x + 1$; 5) $f(x) = \frac{3 - 0{,}2x}{x + 1}$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; 6) $f(x) = x^2 - x$.

8.9.° Aflați intervalele de semn constant ale funcției:

1) $y = 5x - 15$; 3) $y = x^2 - 2x + 1$;

2) $y = -7x - 28$; 4) $y = \frac{9}{3 - x}$.

8.10.° Aflați intervalele de semn constant ale funcție:

1) $y = -4x + 8$; 2) $y = -x^2 - 1$; 3) $y = \sqrt{x} + 2$.

8.11.• Construiți graficul unei oarecare funcții, definite pe mulțimea numerelor reale, zerourile căreia sunt numerele:

1) -2 și 5; 2) -4, -1, 0 și 4.

8.12.• Construiți graficul unei oarecare funcții, definite pe intervalul $[-5; 5]$, zerourile căreia sânt numerele -3, 0 și 3.

8.13.• Construiți graficul unei oarecare funcții, definite pe intervalul $[-4; 3]$, astfel, încât:

1) funcția crește pe intervalul $[-4; -1]$ și descrește pe intervalul $[-1; 3]$;

2) funcția descrește pe intervalele $[-4; -2]$ și $[0; 3]$ și crește pe intervalul $[-2; 0]$.

8.14.• Construiți graficul unei oarecare funcții, definite pe mulțimea numerelor reale, care crește pe intervalele $(-\infty; 1]$ și $[4; +\infty)$ și descrește pe intervalul $[1; 4]$.

8.15.• Construiți graficul funcției $f(x)=\begin{cases}2x+8, \text{ dacă } x\leqslant -2,\\ x^2, \text{ dacă } -2<x<2,\\ -2x+8, \text{ dacă } x\geqslant 2.\end{cases}$

Folosind graficul construit, aflați zerourile funcției, intervalele de semn constant, intervalele de creștere și intervalele de descreștere.

8.16.• Construiți graficul funcției $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, \text{ dacă } x<-1,\\ \dfrac{x}{4}, \text{ dacă } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{4}{x}, \text{ dacă } x>1.\end{cases}$

Folosind graficul construit, aflați zerourile funcției, intervalele de semn constant, intervalele de creștere și intervalele de descreștere.

8.17.• Pentru ce valori ale lui a funcția $y = x^2 + (2a - 1)\,x + a^2 + a$ are două zerouri?

8.18.• Pentru ce valori ale lui a funcția $y = x^2 + 6x + a$ nu are zerouri?

8.19.• Pentru ce valoare maximă întreagă n lui n funcția $y = (8 - 3n)\,x - 7$ este crescătoare?

8.20.• Pentru ce valori a lui m funcția $y = mx - m - 3 + 2x$ este descrescătoare?

8.21.• Funcția $y = f(x)$ este descrescătoare. Va fi crescătoare sau descrescătoare funcția (argumentați răspunsul):

1) $y = 3f(x)$; 2) $y=\dfrac{1}{3}f(x)$; 3) $y = -f(x)$?

8.22.• Funcția $y = f(x)$ este crescătoare pe un oarecare interval. Crescătoare sau descrescătoare pe acest interval va fi funcția (argumentați răspunsul).

1) $y=\dfrac{1}{2}f(x)$; 2) $y = -2f(x)$?

8.23.•• Demonstrați, că funcția:

1) $y=\dfrac{6}{3-x}$ crește pe intervalul $(3; +\infty)$;

2) $y = x^2 - 4x + 3$ descrește pe intervalul $(-\infty; 2]$.

8.24.•• Demonstrați, că funcția:

1) $y = \dfrac{7}{x+5}$ descrește pe intervalul $(-5; +\infty)$;

2) $y = 6x - x^2$ crește pe intervalul $(-\infty; 3]$.

8.25.•• Demonstrați, că funcția $y = \dfrac{k}{x}$ descrește pe fiecare din intervalele $(-\infty; 0)$ și $(0; +\infty)$ dacă $k > 0$ și crește pe aceste intervale, dacă $k < 0$.

8.26.* Pentru care valori ale lui a funcția $f(x) = (a - 1)x^2 + 2ax + 6$ – are un singur zerou?

8.27.* Construiți graficul funcției $f(x) = x^2$, definit pe intervalul $[a; 2]$, dacă $a < 2$. Pentru fiecare valoare a lui a aflați cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

8.28. Simplificați fracția:

1) $\dfrac{x^2 + x - 6}{7x + 21}$;

2) $\dfrac{2y - 16}{8 + 7y - y^2}$;

3) $\dfrac{m^2 - 16m + 63}{m^2 - 81}$;

4) $\dfrac{3a^2 + a - 2}{4 - 9a^2}$.

8.29. Înfăptuiți înmulțirea:

1) $(\sqrt{11} + \sqrt{6})(\sqrt{11} - \sqrt{6})$;

2) $(\sqrt{32} - 5)(\sqrt{32} + 5)$;

3) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$;

4) $(\sqrt{10} + 8)^2$.

8.30. Două excavatoare de diferite modele au săpat o cotlovină în 8 ore. Primul escavator, lucrând singur, poate săpa o așa cotlovină de 4 ori mai repede decât al doilea excavator. În câte ore poate săpa o astfel de cotlovină fiecare escavator, lucrând singur?

8.31. La o soluție cu masa de 200 g, ce conținea 12 % de sare, s-au adăugat 20 g de sare. Ce conținut de sare în procente este în soluția nouă?

9. Cum se construiește graficul funcției $y = kf(x)$, dacă e cunoscut graficul funcției $y = f(x)$

În clasa 8-a ați făcut cunoștință cu funcția $y = x^2$ și ați aflat, că graficul ei este o figură, numită parabolă (fig. 9.1).

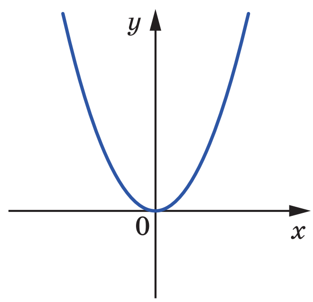


Fig. 9.1

Vom arăta, cum cu ajutorul graficului funcției $y = x^2$ poate fi construit graficul funcției $y = ax^2$, dacă $a \neq 0$.

Construim, de exemplu graficul funcției $y = 2x^2$.

Alcătuim tabela de valori ale funcțiilor $y = x^2$ și $y = 2x^2$ pentru aceleași valori ale argumentului:

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = 2x^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18

Această tabelă arată, că fiecărui punct $(x_0; y_0)$ al graficului $y = x^2$ corespunde un punct unic $(x_0; 2y_0)$ pe graficul funcției $y = 2x^2$. Și că fiecăre punct $(x_1; y_1)$ al graficului $y = 2x^2$ corespunde unicului punct $\left(x_1; \frac{y_1}{2}\right)$ al graficului funcției $y = x^2$. De aceea toate punctele graficului funcției $y = 2x^2$ pot fi obținute, înlocuind fiecare punct al graficului funcției $y = x^2$ cu un punct, ce are aceeași abscisă și o ordonată, înmulțită cu 2 2 (fig. 9.2).

Cu ajutorul graficului funcției $y = x^2$, vom construi graficul funcției $y = \frac{1}{2}x^2$.

Evident, că toate punctele graficului funcției $y = \frac{1}{2}x^2$ pot fi obținute, înlocuind fiecare punct al graficului funcției $y = x^2$ cu un punct, ce are aceeași abscisă și o coordonată, înmulțită cu $\frac{1}{2}$ (fig. 9.3).

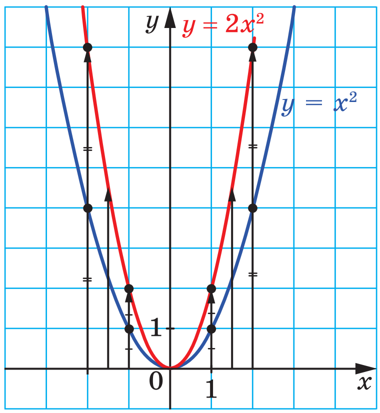


Fig. 9.2

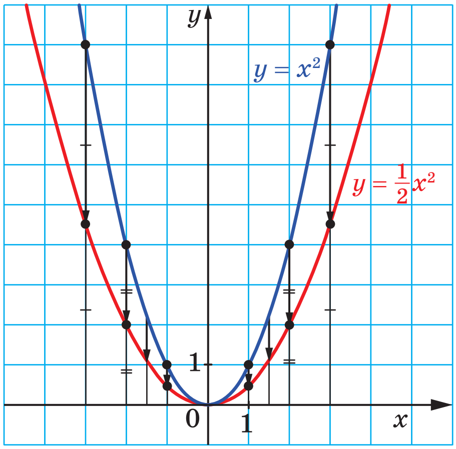


Fig. 9.3

Exemplele studiate ne sugerează, că pe baza graficului funcției $y = f(x)$, poate fi construit graficul funcției $y = kf(x)$, dacă $k > 0$.

Graficul funcției $y = kf(x)$, dacă $k > 0$, poate fi obținut, înlocuind fiecare punct al graficului funcției $y = f(x)$ cu un punct, ce are aceeași abscisă și o coordonată, înmulțită cu $k > 0$.

Pe figurile 9.4 și 9.5 este arătat, cum "funcționează" această regulă pentru construirea graficului funcțiilor $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ și $y = \frac{3}{x}$.

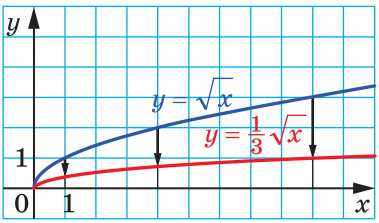


Fig. 9.4

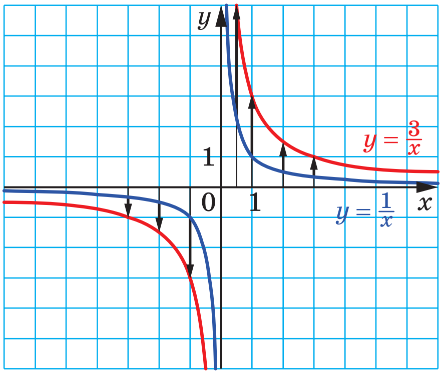


Fig. 9.5

Se spune, că graficul funcției $y = kf(x)$ este obținut din graficul funcției $y = f(x)$ în urma **extinderii de k ori de la axa absciselor**, dacă $k > 1$, sau în rezultatul **comprimării de $\frac{1}{k}$ ori spre axa absciselor**, dacă $0 < k < 1$.

În așa fel, graficul funcției $y = \frac{3}{x}$ peste obținut în rezultatul extinderii graficului $y = \frac{1}{x}$ de 3 ori de la axa absciselor, iar graficul $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ este obținut în urma comprimării graficului funcției $y = \sqrt{x}$ de 3 ori spre axa absciselor.

Vom studia funcțiile $y = x^2$ și $y = -x^2$. Iar fiecare punct $(x_1; y_1)$ al graficului $y = -x^2$ corespunde unicului punct $(x_1; -y_1)$ al graficului funcției $y = x^2$. De aceea toate punctele graficului funcției $y = -x^2$ pot fi obținute, înlocuind fiecare punct al graficului funcției $y = x^2$ cu un punct, ce are aceeași abscisă și o coordonată, înmulțită cu –1 (fig. 9.6).

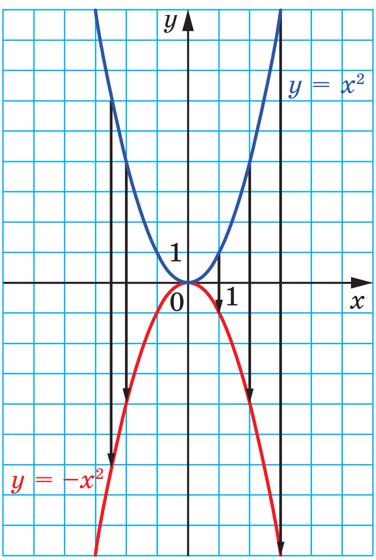


Fig. 9.6

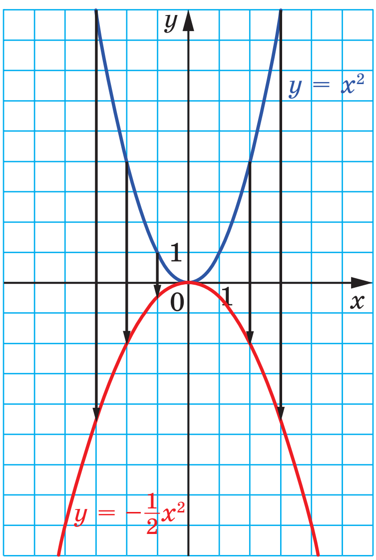


Fig. 9.7

Acum devine clar, că regula de construire a graficului funcției $y = kf(x)$, unde $k < 0$, este aceeași, ca și pentru cazul, când $k > 0$.

De exemplu, pe figura 9.7 este arătat, cum pe baza graficului funcției $y = x^2$ este construit graficul funcției $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Figura 9.8 ilustrează, cum pe baza graficului funcției $y = \sqrt{x}$ sunt construite graficele funcțiilor $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ și $y = -2\sqrt{x}$.

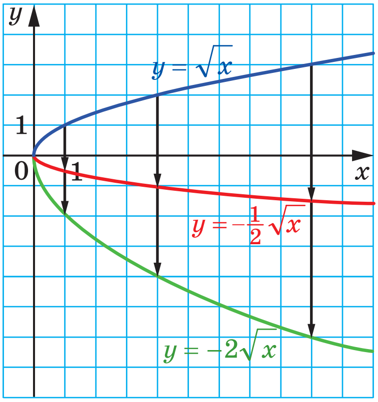


Fig. 9.8

Menținem, că pentru $k \neq 0$ funcțiile $y = f(x)$ și $y = kf(x)$ vor avea zerouri identice. Deci, graficele acestor funcții vor intersecta axa absciselor în unele și aceleași puncte. Acest fapt este ilustrat pe figura 9.9.

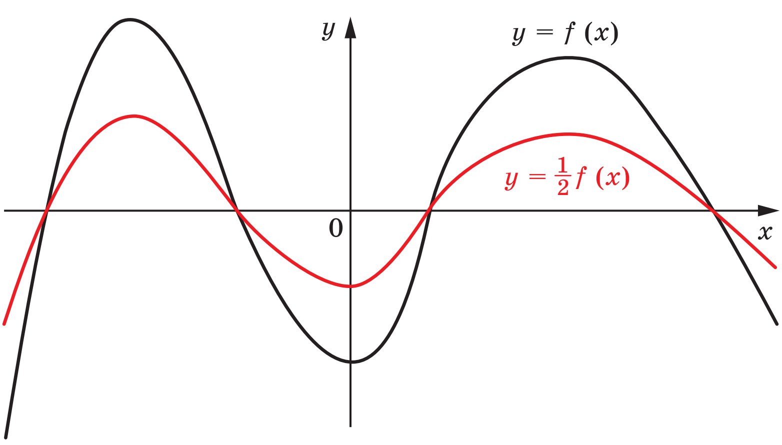
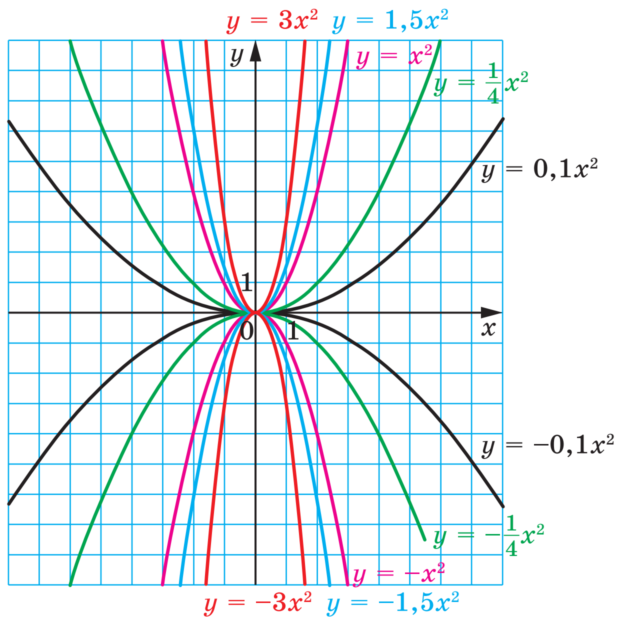


Fig. 9.9



Pe figura 9.10 sunt reprezentate graficele funcțiilor $y = ax^2$ pentru unele valori ale lui a. Fiecare din aceste grafice, la fel ca și graficul funcției $y = x^2$, este numit **parabolă**. Punctul (0; 0) este vârful fiecărei din aceste parabole.

Dacă $a > 0$, *ramurile parabolei sunt îndreptate în sus, dacă* $a < 0$, *ramurile parabolei sânt îndreptate în jos.*

În multe cazuri, în loc de expresia “E dată funcția $y = ax^2$”.

În tabelă sunt prezentate proprietățile funcției $y = ax^2$, $a \neq 0$.

Proprietatea	$a > 0$	$a < 0$
Domeniul de definiție	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Domeniul de valori	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Zerourile funcției	$x = 0$	$x = 0$
Intervalele de semn constant	$y > 0$ pe fiecare din intervalele $(-\infty; 0)$ și $(0; +\infty)$	$y < 0$ pe fiecare din intervalele $(-\infty; 0)$ și $(0; +\infty)$
Intervalul de creștere	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Intervalul de descreștere	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$

1. Cum poate fi construit graficul funcției $y = kf(x)$, pentru $k \neq 0$, folosind graficul funcției $y = f(x)$?
2. Ce fel de figură este graficul funcției $y = ax^2$, unde $a \neq 0$?
3. Care punct este vârful parabolei $y = ax^2$?
4. În ce direcție sunt îndreptate ramurile parabolei $y = ax^2$ pentru $a > 0$? Pentru $a < 0$?
5. Care este domeniul de definiție al funcției $y = ax^2$, dacă $a \neq 0$?
6. Care este domeniul de valori al funcției $y = ax^2$ pentru $a > 0$?Pentru $a < 0$?
7. Pe ce interval crește și pe ce interval descrește funcția $y = ax^2$ dacă $a > 0$? și dacă $a < 0$?

EXERCIȚII

9.1.° Aparține oare graficului funcției $y = -25x^2$ punctul:

1) $A\,(2; -100)$;
2) $B\,(-2; 100)$;
3) $C\left(-\frac{1}{5}; -1\right)$;
4) $D\,(-1; 25)$?

9.2.° În care cadrane ai sistemului de coordonate este situat graficul funcției $y = ax^2$ dacă $a > 0$? și dacă $a < 0$?

9.3.° Fără a construi graficul funcției, aflați coordonatele punctelor de intersecție ale parabolei $y = 3x^2$ cu dreapta:

1) $y = 300$;
2) $y = 42x$;
3) $y = -150x$;
4) $y = 6 - 3x$.

9.4.° Fără a construi graficul funcției, aflați coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor:

1) $y = \frac{1}{3}x^2$ și $y = 3$;
2) $y = \frac{1}{2}x^2$ și $y = x + 4$.

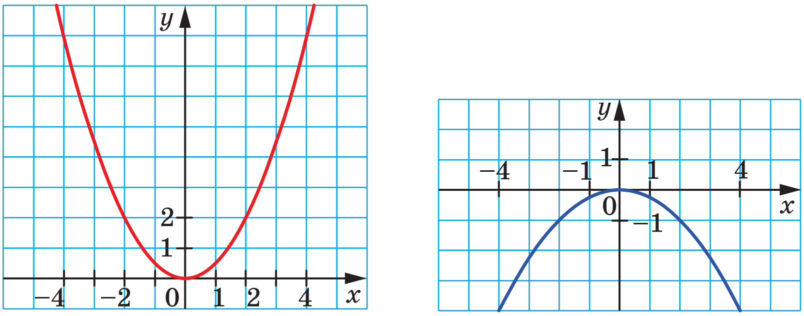
9.5.° Pentru ce valori ale lui a punctul $A\,(a; 16)$ aparține graficului funcției $y = 4x^2$?

9.6.° Pentru ce valori ale lui b punctul $B\,(-2; b)$ aparține graficului funcției $y = -0{,}2x^2$?

9.7.° Se știe, că punctul $M\,(3; -6)$ aparține graficului funcției $y = ax^2$. Aflați valoarea lui a.

9.8.° Se știe, că punctul $K\,(-5; 10)$ aparține graficului funcției $y = ax^2$. Aflați valoarea lui a.

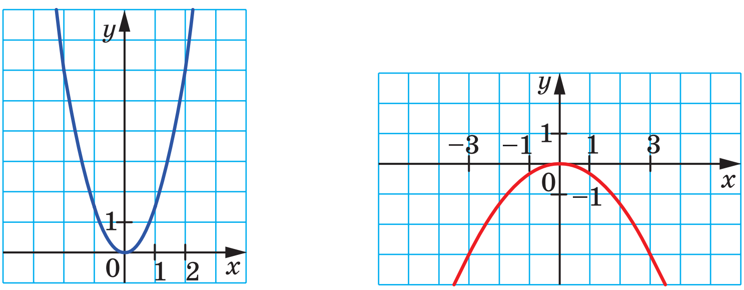
9.9.• Pe figura 9.11 este reprezentat graficul funcției $y = ax^2$. Aflați valoarea lui a.



a *b*

Fig. 9.11

9.10.• Pe figura 9.12 este reprezentat graficul funcției $y = ax^2$. Aflați valoarea lui a.



a *b*

Fig. 9.12

9.11.• Pe figura 9.13 este reprezentat graficul funcției $y = f(x)$. Construiți graficul funcției:

1) $y = \frac{1}{2} f(x)$; 2) $y = -f(x)$; 3) $y = -2f(x)$.

9.12.• Pe figura 9.14 este reprezentat graficul funcției $y = g(x)$. Construiți graficul funcției

1) $y = \frac{1}{3} g(x)$; 2) $y = -\frac{1}{2} g(x)$.

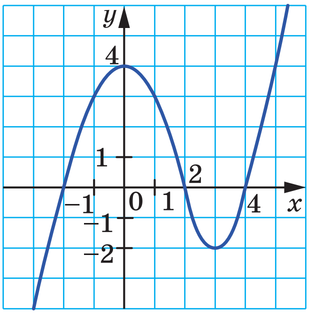


Fig. 9.13

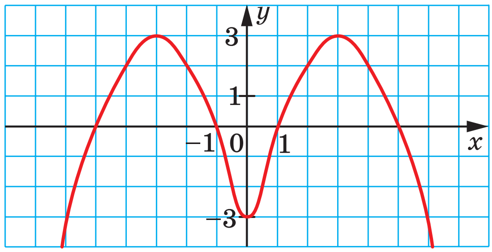


Fig. 9.14

9.13.• Construiți graficul funcției $y = x^2$. Folosind acest grafic, construiți graficul funcției:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = -\frac{1}{4}x^2$.

9.14.• Construiți graficul funcției $y = \sqrt{x}$. Folosind acest grafic, construiți graficul funcției:

1) $y = 4\sqrt{x}$; 2) $y = -\sqrt{x}$.

9.15.• Demonstrați, că funcția $y = ax^2$ pentru $a > 0$ descrește pe intervalul $(-\infty; 0]$ și crește pe intervalul $[0; +\infty)$.

9.16.• Demonstrați, că funcția $y = ax^2$ pentru $a < 0$ crește pe intervalul $(-\infty; 0]$ și descrește pe intervalul $[0; +\infty)$.

9.17.• Construiți graficul funcției:

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ dacă } x \leqslant -2, \\ -2x, \text{ dacă } -2 < x < 2, \\ -x^2, \text{ dacă } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Folosind graficul construit, aflați intervalele de creștere și intervalele de descreștere ale funcției.

9.18.• Construiți graficul funcției:

$$y = \begin{cases} -2, \text{ dacă } x < -1, \\ -2x^2, \text{ dacă } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 2x^2, \text{ dacă } x > 0. \end{cases}$$

Folosind graficul construit, aflați intervalele de creștere și intervalele de descreștere ale funcției.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

9.19. Demonstrați identitatea:

$$\left(\frac{m-n}{m^2+mn}-\frac{m}{mn+n^2}\right):\left(\frac{n^2}{m^3-mn^2}+\frac{1}{m+n}\right)=\frac{n-m}{n}.$$

9.20. Simplificați expresia:

1) $\sqrt{(a-b)^2}$, dacă $b \geqslant a$;

2) $\sqrt{c^2+6c+9}$, dacă $c \geqslant -3$;

3) $\dfrac{\sqrt{(m-5)^4}}{m^2-10m+25}$;

4) $\dfrac{x^2-2x+1}{\sqrt{(x-1)^6}}$, dacă $x < 1$.

9.21. Pentru transportarea a 45 t de încărcătură a fost destinat un camion cu iun oarecare tonaj. Din cauza defectării, camionul a fost înlocuit cu alt camion, capacitatea căruia este cu 2 t mai mică decât a primului camion. Din această cauză au fost necesar de fiăcut cu 6 rute mai mult, decât au fost inițial programate. Care este capacitatea de transport a camionului, ce a transportat încărcătura.

9.22. Care este cea mai mică valoare, posibilă pentru expresie și la ce valoare a variabilei se obține acest număr:

1) $(x - 6)^2 + 3$;

2) $(x + 4)^2 - 5$;

3) $x^2 + 2x - 6$;

4) $x^2 - 10x + 18$?

ÎNSUȘIM ACȚIUNI NESTANDARTE

9.23. Pentru a vopsi o față a cubului sunt necesere 10 sec. În ce timp minim pot vopsi 6 persoane 101 cuburi? (două persoane nu pot vopsi concomitent același cub).

10. Cum se construiesc graficele funcțiilor $y = f(x) + b$ și $y = f(x + a)$, dacă e cunoscut graficul funcției $y = f(x)$

Vom arăta, cum pe baza graficului funcției $y = x^2$, poate fi construit graficul funcției $y = x^2 + 2$.

Alcătuim tabela valorilor a acestor funcții pentru aceleași valori ale argumentului.

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = x^2 + 2$	11	8,25	6	4,25	3	2,25	2	2,25	3	4,25	6	8,25	11

Această tabelă arată, că fiecărui punct $(x_0;\ y_0)$ al graficului $y = x^2$ îi corespunde un punct unic $(x_0;\ y_0 + 2)$ pe graficul funcției $y = x^2 + 2$. Și că fiecăre punct $(x_1;\ y_1)$ al graficului $y = x^2 + 2$ corespunde unicului punct $(x_1;\ y_1 - 2)$ al graficului funcției $y = x^2$. De aceea toate punctele graficului funcției $y = x^2 + 2$ pot fi obținute, înlocuind fiecare punct al graficului funcției $y = x^2$ cu un punct, ce are aceeași abscisă și o coordonată, mărită cu 2 (fig. 10.1).

Se spune, că graficul funcției $y = x^2 + 2$ se obține în urma **translației graficului** $y = x^2$ cu două unități în sus de-a lungul axei ordonatelor.

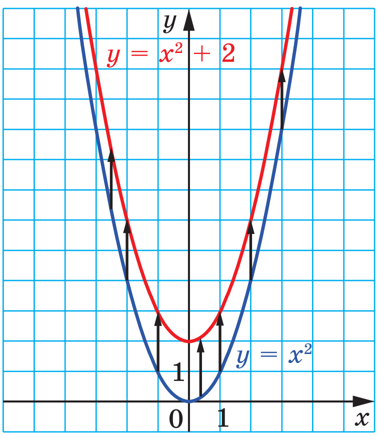


Fig. 10.1

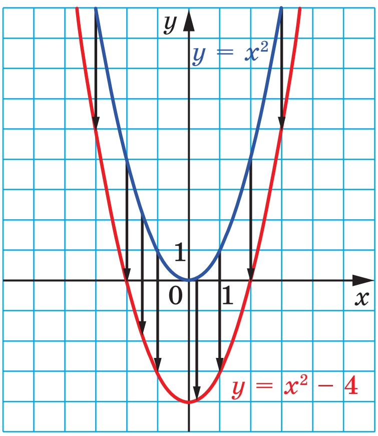


Fig. 10.2

Analogic, graficul funcției $y = x^2 - 4$ poate fi obținut prin translația graficului funcției $y = x^2$ u 4 unități în jos de-a lungul axei coordonatelor (fig. 10.2).

Aceste exemple ne sugerează, cum pe baza graficului funcției $y = f(x)$, poate fi construit graficul funcției $y = f(x) + b$.

Graficul funcției $y = f(x) + b$ poate fi obținut prin translația graficului funcției $y = f(x)$ de-a lungul axei ordonatelor cu b unități în sus, dacă $b > 0$, și cu $-b$ unități în jos, dacă $b < 0$.

[1] În viitor la lecțiile de geometrie veți studia mai profund translația.

Pe figurile 10.3 și 10.4 este arătat, cum “funcționează” această regulă la construirea graficelor funcțiilor $y = \sqrt{x} + 3$ și $y = \frac{1}{x} - 1$.

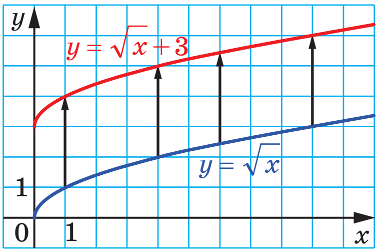


Fig. 10.3

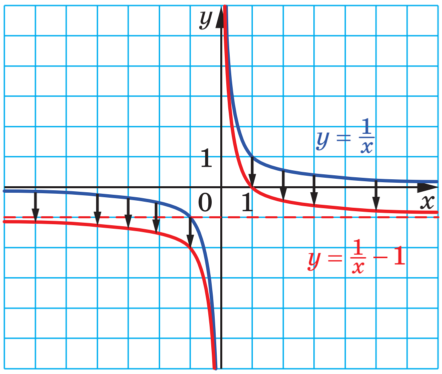


Fig. 10.4

Evident, că în urma translației se va obține o figură, identică cu figura, ce este grafic al funcției inițiale. De exemplu, fiecare din graficele funcțiilor $y = x^2 + 2$ și $y = x^2 - 4$ sunt identice cu parabola $y = x^2$. De aceea graficele funcțiilor $y = x^2 + 2$ și $y = x^2 - 4$ de asemenea sunt parabole.

Vom arăta, cum pe baza graficului funcției $y = x^2$ poate fi construit graficul funcției $y = (x + 2)^2$.

Fie că punctul $(x_0; y_0)$ aparține graficului funcției $y = x^2$, adică $x_0^2 = y_0$. Vom demonstra, că punctul $(x_0 - 2; y_0)$ aparține graficului funcției $y = (x + 2)^2$. Calculăm valoarea acestei funcții în punctul cu abscisa $x_0 - 2$. Obținem: $((x_0 - 2) + 2)^2 = x_0^2 = y_0$. În așa fel, fiecărui punct $(x_0; y_0)$ al graficului $y = x^2$ îi corespunde un punct unic $(x_0 - 2; y_0)$ pe graficul funcției $y = (x + 2)^2$. Analogic se poate arăta, că fiecare punct $(x_1; y_1)$ al graficului $y = (x + 2)^2$ corespunde unicului punct $(x_1 + 2; y_1)$ al graficului funcției $y = x^2$.

De aceea toate punctele graficului funcției $y = (x + 2)^2$ pot fi obținute, înlocuind fiecare punct al graficului funcției $y = x^2$ cu un punct, ce are aceeași ordonată și o abscisă, micșorată cu 2 (fig. 10.5).

Se spune, că graficul funcției $y = (x + 2)^2$ se obține în urma translației graficului $y = x^2$ de-a lungul axei absciselor cu 2 unități spre stânga.

Vom arăta, cum pe baza graficului funcției $y = x^2$ poate fi construit graficul funcției $y = (x - 2)^2$. E ușor de stabilit (încercați s-o faceți de sinestătător), că fiecărui punct $(x_0; y_0)$ al graficului $y = x^2$ îi corespunde un punct unic $(x_0 + 2; y_0)$ pe graficul funcției $y = (x - 2)^2$ și că fiecare punct $(x_1; y_1)$

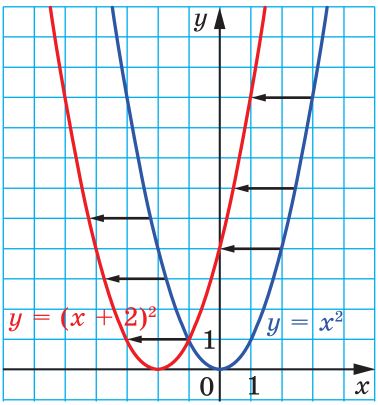


Fig. 10.5

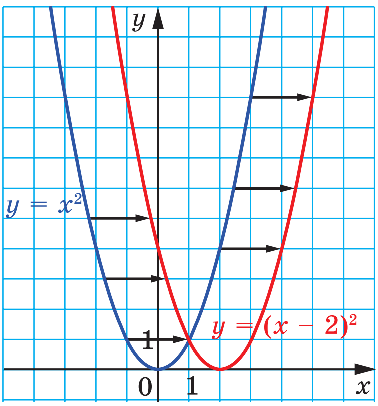


Fig. 10.6

al graficului funcției $y = (x - 2)^2$ corespunde unicului punct $(x_1 - 2;\ y_1)$ al graficului funcției $y = x^2$. Deacea graficul funcției $y = (x - 2)^2$ poate fi obținut prin translația graficului funcției $y = x^2$ de-a lungul axei absciselor cu 2 unități spre dreapta (fig. 10.6).

Aceste exemple ne sugerează, cum pe baza graficului funcției $y = f(x)$, poate fi construit graficul funcției $y = f(x + a)$.

Graficul funcției $y = f(x + a)$ poate fi obținut prin translația graficului funcției $y = f(x)$ de-a lungul axei absciselor cu a unități spre stânga, dacă $a > 0$, și cu $-a$ unități spre dreapta, dacă $a < 0$.

În imaginile 10.7 și 10.8 este arătat, cum "funcționează" această regulă la construirea graficelor funcțiilor $y = \sqrt{x + 3}$ și $y = \dfrac{1}{x - 1}$.

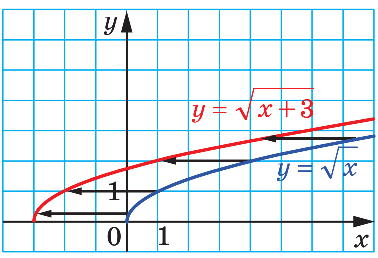


Fig. 10.7

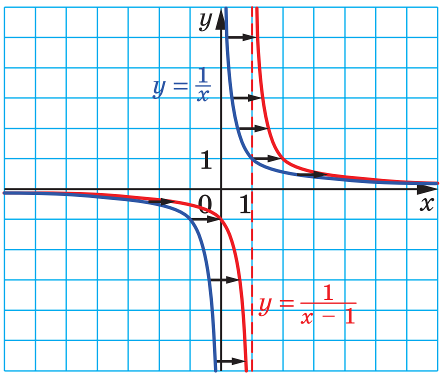


Fig. 10.8

Menținem, că graficele funcțiilor $y = (x + 2)^2$ și $y = (x - 2)^2$ sunt parabole, identice cu parabola $y = x^2$.

EXEMPLUL 1 Conctruiți graficul funcției $y = (x - 1)^2 + 3$.

Rezolvare. 1) Construim graficul funcției $y = x^2$.

2) Efectuăm translația graficului funcției $y = x^2$ de-a lungul axei absciselor cu o unitate spre dreapta. Obținem graficul funcției $y = (x - 1)^2$ (priviți fig. 10.9).

3) Efectuăm translația graficului funcției $y = (x - 1)^2$ de-a lungul axei ordonatelor cu 3 unități în sus. Obținem graficul funcției $y = (x - 1)^2 + 3$ (fig. 10.9).

Algoritmul descris poate fi reprezentat prin schița:

$$y = x^2 \xrightarrow[\text{cu 1 unitate}]{\text{spre dreapta}} y = (x - 1)^2 \xrightarrow[\text{cu 3 unități}]{\text{în sus}} y = (x - 1)^2 + 3$$ ◀

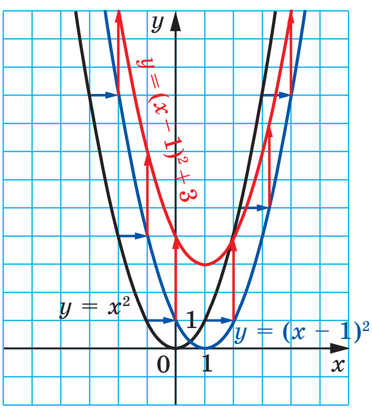


Fig. 10.9

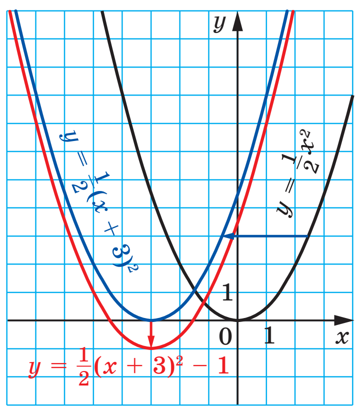


Fig. 10.10

EXEMPLUL 2 Conctruiți graficul funcției $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$.

Rezolvare. 1) Construim graficul funcției $y = \frac{1}{2}x^2$ (fig. 10.10).

2) Efectuăm translația graficului funcției $y = \frac{1}{2}x^2$ de-a lungul axei absciselor cu 3 unități spre stânga. Obținem graficul funcției $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$ (priviți fig. 10.10).

3) Efectuăm translația graficului funcției $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$ de-a lungul axei ordonatelor cu 1 unitate în jos. Obținem graficul dorit (priviți fig. 10.10).

Algoritmul construirii este reprezentat prin schița:

$$y=\frac{1}{2}x^2 \xrightarrow[\text{cu 3 unități}]{\text{spre stînga}} y=\frac{1}{2}(x+3)^2 \xrightarrow[\text{cu 1 unitate}]{\text{în jos}} y=\frac{1}{2}(x+3)^2-1$$

Din aceste transformări rezultă, că graficul funcției $y = = \frac{1}{2}(x+3)^2-1$ este o parabolă, identică cu parabola $y=\frac{1}{2}x^2$ și vârful căreia este punctul $(-3; -1)$. ◀

Din acest exemplu devine clar algoritmul construirii al graficului funcției $y = kf(x + a) + b$, în caz particular și al funcției $y = k(x + a)^2 + b$.

Graficul funcției $y = k(x + a)^2 + b$, $k \neq 0$, este parabola identică cu parabola $y = kx^2$ și vârful căreia esteîn punctul $(-a; b)$.

EXEMPLUL 3 Construiți graficul funcției $y = -2x^2 - 20x - 47$.

Rezolvare. Obținem: $y = -2x^2 - 20x - 47 = -2x^2 - 20x - 50 + 3 = -2(x + 5)^2 + 3$.

Am reprezentat formula, ce determină funcția dată, în forma $y = kf(x + a) + b$, unde $f(x) = x^2$, $k = -2$, $a = 5$, $b = 3$.

Algoritmul construirii este reprezentat prin schița:

$$y=-2x^2 \xrightarrow[\text{cu 5 unități}]{\text{spre stânga}} y=-2(x+5)^2 \xrightarrow[\text{cu 3 unități}]{\textbf{în sus}} y=-2(x+5)^2+3$$

Graficul construit este o parabolă, identică cu parabola $y = -2x^2$ și vârful căreia este punctul $(-5; 3)$ (fig. 10.11). ◀

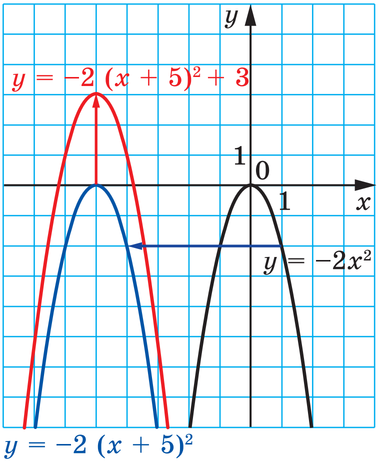


Fig. 10.11

1. Cum poate fi obținut graficul funcției $y = f(x) + b$, folosind graficul funcției $y = f(x)$?
2. Ce figură este graficul funcției $y = x^2 + b$?
3. Care sunt coordonatele vârfului parabolei $y = x^2 + b$?
4. Cum poate fi obținut graficul funcției $y = f(x + a)$, folosind graficul funcției $y = f(x)$?
5. Ce figură este graficul funcției $y = (x + a)^2$?
6. Care sunt coordlonatele vârfului parabolei $y = (x + a)^2$?
7. Ce figură este graficul funcției $y = k(x + a)^2 + b$, unde $k \neq 0$?
8. Care sunt coordonatele vârfului parabolei $y = k(x + a)^2 + b$?

EXERCIȚII

10.1.° Graficul cărei funcții se va obține, dacă asupra graficul funcției $y = x^2$ va fi înfăptuită translația:

1) cu 6 unități în sus de-a lungul axei ordonatelor;
2) cu 9 unități spre dreapta de-alungul axei absciselor;
3) cu 12 unități în jos de-a lungul axei ordonatelor;
4) cu 7 unități spre stânga de-a lungul axei absciselor;
5) cu 2 unități spre dreapta de-a lungul axei absciselor și cu 3 unități în jos de-a lungul axei ordonatelor;
6) cu 1 unitate spre stânga de-a lungul axei absciselor și cu 1 unitate în sus de-a lungul axei ordonatelor?

10.2.° Graficul căreia din funcțiile date se va obține, dacă asupra graficul funcției $y = x^2$ va fi înfăptuită translația cu 4 unități spre dreapta de-a lungul axei absciselor:

1) $y = x^2 + 4$; 2) $y = x^2 - 4$; 3) $y = (x + 4)^2$; 4) $y = (x - 4)^2$?

10.3.° Graficul căreia din funcțiile date se va obține, dacă asupra graficul funcției $y = x^2$ a fi înfăptuită translația cu 5 unități în sus de-a lungul axei ordonatelor:

1) $y = x^2 + 5$; 2) $y = x^2 - 5$; 3) $y = (x + 5)^2$; 4) $y = (x - 5)^2$?

10.4.° Care sunt coordonatele vârfului parabolei:

1) $y = x^2 + 8$;
2) $y = x^2 - 8$;
3) $y = (x + 8)^2$;
4) $y = (x - 8)^2$;
5) $y = (x - 4)^2 + 3$;
6) $y = (x + 4)^2 + 3$;
7) $y = (x - 4)^2 - 3$;
8) $y = (x + 4)^2 - 3$?

10.5.° În care cadran al sistemului de coordonate e situat vârful parabolei

1) $y = (x + 10)^2 - 16$;
2) $y = (x - 11)^2 + 15$;
3) $y = (x + 15)^2 + 4$;
4) $y = (x - 11)^2 - 9$?

10.6.° În ce mod trebuie înfăptuită translația graficului funcției $y = \frac{5}{x}$, ca să se obțină graficul funcției $y = \frac{5}{x-8}$:

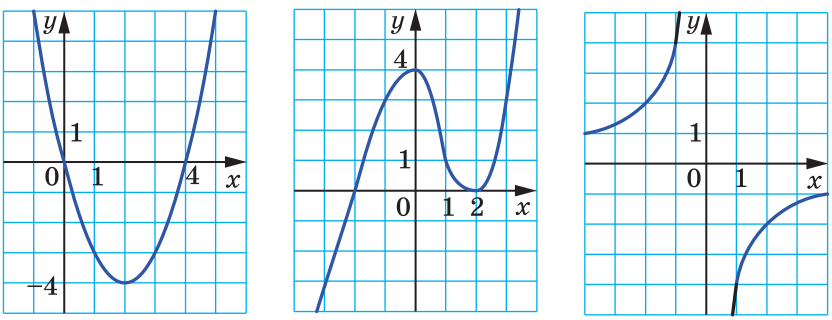
1) cu 8 unități în sus de-a lungul axei ordonatelor;
2) cu 8 unități în jos de-a lungul axei ordonatelor;
3) cu 8 unități spre dreapta de-alungul axei absciselor;
4) cu 8 unități spre stânga de-alungul axei absciselor?

10.7.° În ce mod trebue înfăptuită translația graficului funcției $y = \sqrt{x}$, ca să se obțină graficul funcției $y = \sqrt{x+3}$:

1) cu 3 unități în sus de-a lungul axei ordonatelor;
2) cu 3 unități în jos de-a lungul axei ordonatelor;
3) cu 3 unități spre dreapta de-a lungul axei absciselor;
4) cu 3 unități spre stânga de-a lungul axei absciselor?

10.8.• Pe fig. 10.12 este reprezentat graficul funcției $y = f(x)$. Construiți graficul funcției:

1) $y = f(x) - 2$;
2) $y = f(x) + 4$;
3) $y = f(x - 3)$;
4) $y = f(x + 1)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = 3 - f(x)$.



a b c

Fig. 10.12

10.9.• Pe fig. 10.13 este reprezentat graficul funcției $y = f(x)$. Construiți graficul funcției:

1) $y = f(x) + 5$;
2) $y = f(x) - 3$;
3) $y = f(x + 1)$;
4) $y = f(x - 2)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = -f(x) - 1$.

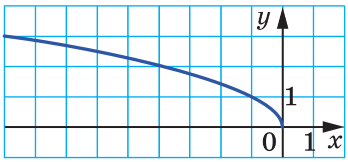


Fig. 10.13

10.10.• Construiți graficul funcției $y = x^2$. Folosind acest grafic, construiți graficul funcției:

1) $y = x^2 - 3$; 3) $y = (x - 5)^2$; 5) $y = (x - 1)^2 + 2$;
2) $y = x^2 + 4$; 4) $y = (x + 2)^2$; 6) $y = (x + 3)^2 - 2$.

10.11.• Construiți graficul funcției $y = -x^2$. Folosind acest grafic, construiți graficul funcției:

1) $y = -x^2 + 1$; 3) $y = -(x - 2)^2$; 5) $y = -(x + 1)^2 - 1$;
2) $y = -x^2 - 2$; 4) $y = -(x + 4)^2$; 6) $y = -(x - 3)^2 + 4$.

10.12.• Construiți graficul funcției $y = -\frac{6}{x}$. Folosind acest grafic, construiți graficul funcției:

1) $y = -\frac{6}{x} + 5$; 2) $y = -\frac{6}{x-2}$; 3) $y = -\frac{6}{x+4} - 2$.

10.13.• Construiți graficul funcției $y = \frac{2}{x}$. Folosind acest grafic, construiți graficul funcției:

1) $y = \frac{2}{x} - 1$; 2) $y = \frac{2}{x+1}$; 3) $y = \frac{2}{x-3} + 6$.

10.14.• Construiți graficul funcției $y = \sqrt{x}$. Folosind acest grafic, construiți graficul funcției:

1) $y = \sqrt{x} - 4$; 2) $y = \sqrt{x-4}$; 3) $y = \sqrt{x-1} + 3$.

10.15.• Construiți graficul funcției $y = (x + 5)^2 - 9$. Folosind acest grafic, aflați:

1) zerourile funcției;
2) pentru ce valori ale argumentului valorile funcției sunt pozitive;
3) intervalul de creștere și intervalul de descreștere al funcției;
4) domeniul de valori al funcției.

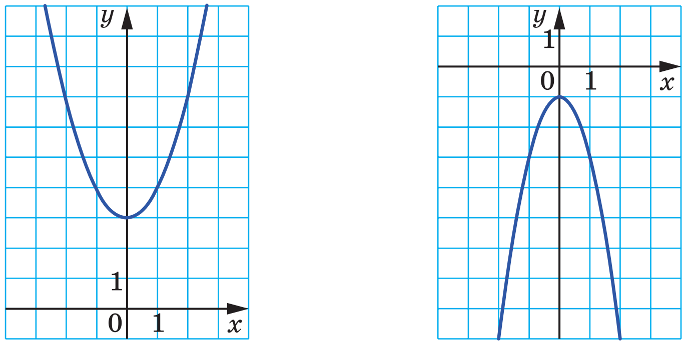
10.16.• Construiți graficul funcției $y = (x - 4)^2 + 4$. Folosind acest grafic, aflați:

1) zerourile funcției;
2) pentru ce valori ale argumentului valorile funcției sunt negative;
3) intervalul de creștere și intervalul de descreștere al funcției;
4) domeniul de valori al funcției.

10.17.• Reprezentați prin formula de forma $y = ax^2 + n$ funcția, graficul căreia este ilustrat pe figura 10.14.

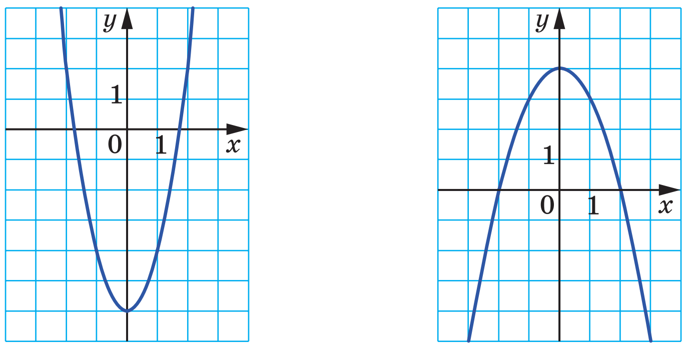
10.18.• Reprezentați prin formula de forma $y = ax^2 + n$ funcția, graficul căreia este ilustrat pe figura 10.15.

10.19.• Reprezentați prin formula de forma $y = a(x + m)^2$ funcția, graficul căreia este ilustrat pe figura 10.16.



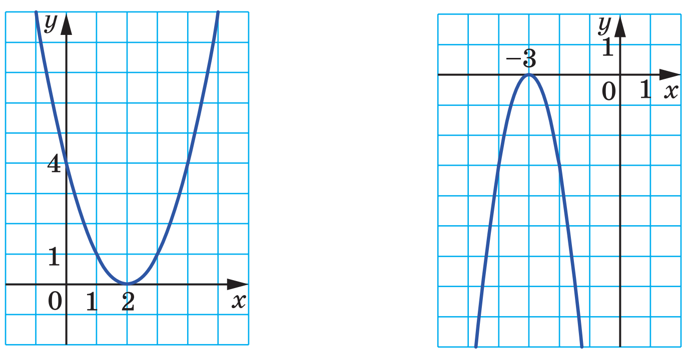
a *b*

Fig. 10.14



a *b*

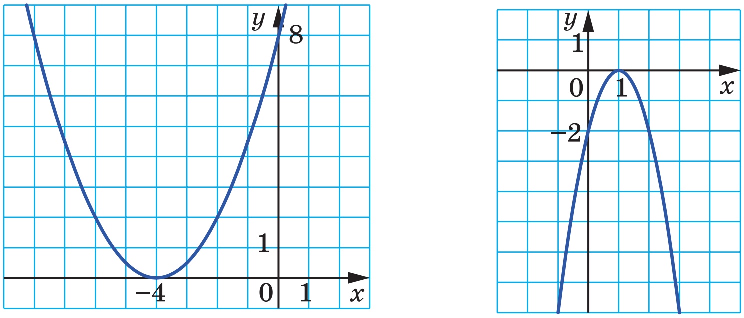
Fig. 10.15



a *b*

Fig. 10.16

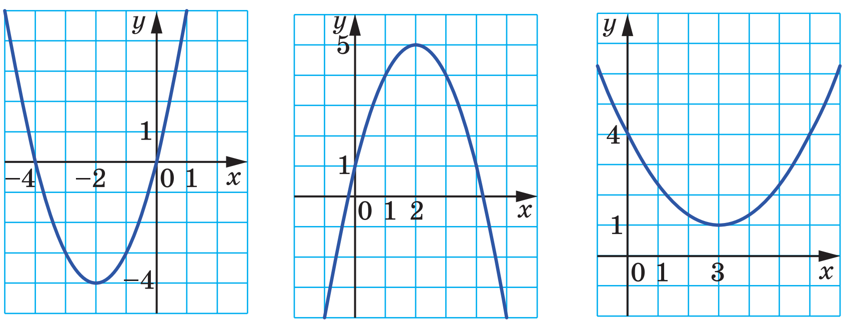
10.20.$^{\bullet}$ Reprezentați prin formula $y = a\,(x + m)^2$ funcția, graficul căreia este ilustrat în figura 10.17.



a *b*

Fig. 10.17

10.21.$^{\bullet}$ Reprezentați prin formula de forma $y = a\,(x + m)^2 + n$ funcția, graficul căreia este ilustrat în figura 10.18.



a *b* *c*

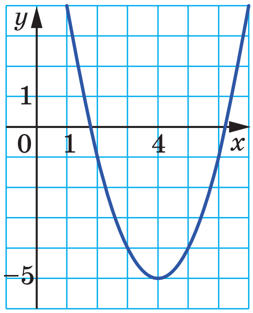
Fig. 10.18

10.22.$^{\bullet}$ Reprezentați prin formula $y = a\,(x + m)^2 + n$ funcția, graficul căreia este ilustrat în figura 10.19.

10.23.$^{\bullet}$ Rezolvați ecuația prin metoda grafică:

1) $(x-1)^2 = \dfrac{2}{x}$; 2) $1 - x^2 = \sqrt{x} - 1$.

10.24.$^{\bullet}$ Rezolvați ecuația $\dfrac{3}{x} = \sqrt{x} + 2$ prin metoda grafică.



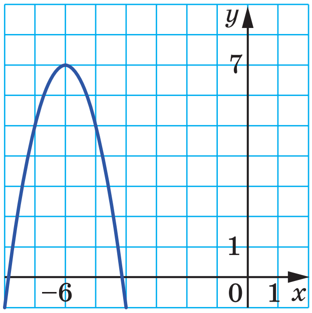


Fig. 10.19

10.25.• Dreptele m și n, reprezentateîn figura 10.20, sunt paralele. Dreapta n este graficul funcției $y = f(x)$. Care din afirmații este corectă:

1) dreapta m este graficul funcției $y = f(x) + b$;
2) dreapta m este graficul funcției $y = f(x - a)$?

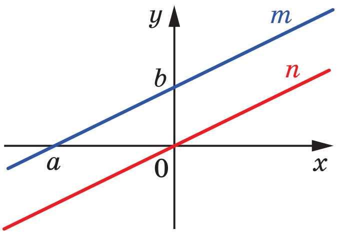


Fig. 10.20

10.26.•• Reprezentați prin formula 0 $y = a(x - m)^2 + n$ și construiți graficul funcției date, folosind graficul funcției $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 4x + 6$;
2) $y = -x^2 + 6x - 6$;
3) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
4) $y = 0{,}2x^2 - 2x - 4$.

10.27.•• Reprezentați prin formula de forma $y = a(x - m)^2 + n$ și construiți graficul funcției date, folosind graficul funcției $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 2x - 8$;
2) $y = -2x^2 + 8x - 3$.

10.28.•• Reprezentați prin formula $y = \dfrac{k}{x+a} + b$ și construiți graficul funcției date, folosind graficul funcției $y = \dfrac{k}{x}$:

1) $y = \dfrac{3x+8}{x}$; 2) $y = \dfrac{2x+14}{x+3}$; 3) $y = \dfrac{-2x}{x-1}$.

10.29.•• Reprezentați prin formula $y = \dfrac{k}{x+a} + b$ și construiți graficul funcției date, folosind graficul funcției $y = \dfrac{k}{x}$:

1) $y = \dfrac{4x+14}{x+1}$; 2) $y = \dfrac{7-x}{x-2}$.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

10.30. Simplificați expresia:

1) $\dfrac{5a-3}{8a} + \dfrac{a+9}{4a}$;

2) $\dfrac{5a-6b}{ab} + \dfrac{5b-5c}{bc}$;

3) $\dfrac{8a+5b}{5ab^2} - \dfrac{2a-7b}{2a^2b}$;

4) $\dfrac{m^2+4n^2}{8m^4n^4} - \dfrac{3m+4n}{6m^5n^2}$.

10.31. Reduceți fracția:

1) $\dfrac{9+\sqrt{m}}{m-81}$;

2) $\dfrac{\sqrt{27}+\sqrt{45}}{\sqrt{18}+\sqrt{30}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{5m}+\sqrt{7n}}{5m+2\sqrt{35mn}+7n}$;

4) $\dfrac{25m+10n\sqrt{3m}+3n^2}{5\sqrt{m}+n\sqrt{3}}$.

10.32. Numărătorul unei fracții normale este cu 1 mai mic decât numitorul fracției. Dacă numărătorul și numitorul fracției vor fi micșorate cu 1, valoarea fracției se va micșora cu $\dfrac{1}{12}$. Aflați această fracție.

10.33. Demonstrați, că pentru valorile pozitive a și b este corectă inegalitatea $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$.

11. Funcția pătrată, graficul și proprietățile ei

Definiție. Funcția, ce poate fi reprezentată prin formula $y = ax^2 + bx + c$, în care x – variabila independentă, a, b, c – oarecare numere, dintre care $a \neq 0$, se numește funcție pătrată.

Funcția pătrată nu vă este necunoscută. În clasa 8-a ați studiat un caz particular, și anume $y = x^2$. Dependența funcțională a ariei S a cercului de raza r determină funcția pătrată $S(r) = \pi r^2$, care este funcție de tipul $y = ax^2$. Cu această funcție ați făcăt cunoștință în punctul 9.

La lecțiile de fizică ați învățat formula $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, care determină dependența înălțimii h, la care este situat corpul, aruncat vertical în sus cu viteza inițială v_0, de timpul deplasării t. Această formulă determină funcția pătrată $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Vom arăta cum poate fi obținut graficul funcției pătrate $y = ax^2 + bx + c$ din graficul funcției $y = ax^2$.

Ați construit deja graficul funcției de tipul $y = ax^2 + bx + c$, calculând pătratul binomului (priviți exemplul 3 p. 10). Aplicăm această metodă pentru cazul general.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x\cdot\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Atunci formula $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Introducem notațiile $y = ax^2 + bx + c$ poate fi adusă la forma

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

În așa fel schema de construire a graficului dorit este:

$$y = ax^2 \xrightarrow{\text{în dreapta sau în stânga cu } |x_0| \text{ unități}} y = a(x - x_0)^2 \xrightarrow{\text{în sus sau în jos cu } |y_0| \text{ unități}} y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

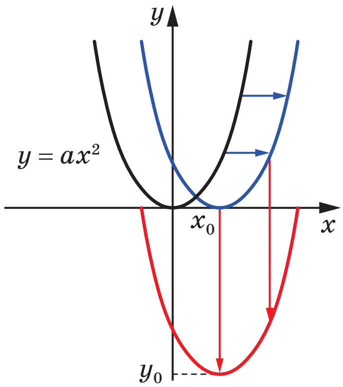


Fig. 11.1

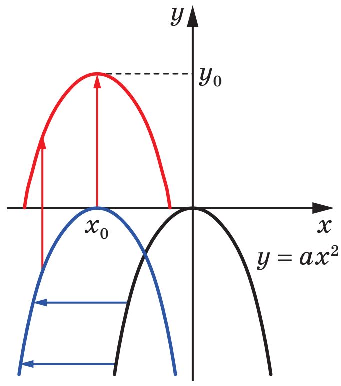


Fig. 11.2

În figura 11.1 este reprezentat procesul de construire al graficului funcției în cazul, când $a>0$, $x_0>0$, $y_0 < 0$. În figura 11.2 în figura $a<0$, $x_0<0$, $y_0>0$.

Ca urmare, poate fi făcută concluzia: graficul funcției pătrate $y = ax^2 + bx + c$ este o parabolă, identică cu parabola $y = ax^2$, vârful căreia este situat în punctul $(x_0; y_0)$, unde $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Ramurile parabolei $y = ax^2 + bx + c$ sunt îndreptate în aceiași direcțiile ca și ramurile parabolei $y = ax^2$: dacă $a>0$, ramurile parabolei vor fi îndreptate în sus, dacă $a < 0$, ramurile parabolei vor fi îndreptate în jos.

Imaginea generală despre graficul funcției pătrate este formată de coordonatele vârfului parabolei și direcția ramurilor. Această imagine, va fi cu atât mai completă, cu cât mai multe puncte, ce aparțin graficului vom cunoaște. De acea graficul funcției pătrate poate fi construit, fără aplicarea translațiilor, după următoarea schemă:

1) *calcularea abscisei vârfului parabolei după formula* $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

2) *calcularea ordonatei vârfului parabolei după formula*[1]

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a},$$

în care D – discriminantul polinomului pătrat $ax^2 + bx + c$, și marcarea pe planul de coordonate al vârfului parabolei;

---

1 Memorizarea formulei $y_0 = -\frac{D}{4a}$ nu este obligatorie. Este suficientă calcularea valorii funcției y = ax2 + bx + c în punctul cu abscisa $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

3) *determinarea direcției ramurilor parabolei;*

4) *calcularea coordonatelor la încă câteva puncte, ce aparțin graficului căutat, în special punctele de intersecție a graficului cu axa absciselor (dacă funcția dată are zerouri), coordonatele punctului de intersecție al parabolei cu axa ordonatelor; marcarea acestor puncte pe planul de coordonate;*

5) *desenarea unei linii neîntrerupte lente, ce trece prin punctele marcate.*

EXEMPLUL Construiți graficul funcției $f(x) = x^2 + 4x - 5$. Folosind graficul funcției, aflați domeniul de valori, intervalele de creștere și descreștere, intervalele de semn constant, cea mai mică și cea mai mare valoare a funcției.

Rezolvare. Funcția dată este o funcție pătrată. Graficul funcției este o parabolă, ramurile căreia sunt îndreptate în sus.

Calculăm abscisa și ordonata vărfului parabolei. Obținem: $x_0 = -\frac{4}{2} = -2$, **ordonata vârfului** $y_0 = f(x_0) = f(-2) = -9$.

În așa fel, punctul $(-2; -9)$ – este vârful parabolei.

Aflăm coordonatele punctelor de intersecție alo parabolei cu cu axa absciselor. Cu acest scop rezolvăm ecuația:

$$x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Obținem $x_1 = -5$, $x_2 = 1$.

Reiese, că parabola intersectează axa absciselor în punctele $(-5; 0)$ și $(1; 0)$.

Aflăm punctul de intersecție al parebolei cu axa ordonatelor. Obținem: $f(0) = -5$. Parabola intersectează axa coordonatelor în punctul $(0; -5)$.

Marcăm patru puncte găsite ale parabolei pe planul de coordonate (fig. 11.3).

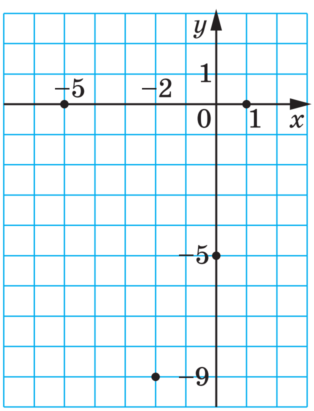


Fig. 11.3

Observăm, că este rațională calcularea valorilor funcției pentru abscisele –1, –3, –4 și marcarea punctelor respective pe planul de coordonate.

Obținem: $f(-3) = f(-1) = -8$; $f(-4) = f(0) = -5$.

Unim punctele marcate cu o linie lentă neîntreruptă.

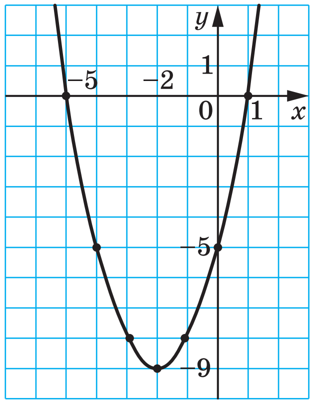


Fig. 11.4

Graficul dorit este reprezentat în figura 11.4.

Mulțimea de valori ale funcției este mulțimea $E(f) = [-9; +\infty)$.

Funcția crește pe intervalul $[-2; +\infty)$ și descrește pe intervalul $(-\infty; -2]$.

Obținem: $f(x) > 0$ pe fiecare din intervalele $(-\infty; -5)$ și $(1; +\infty)$; $f(x) < 0$ intervalul $(-5; 1)$.

Cea mai mică valoarea a funcției este egală cu -9, valoare cea mai mare este inexistibilă. ◀

?

1. Care funcție este numită funcție pătrată?
2. Ce fel de figură este graficul funcției pătrate?
3. După ce formulă poate fi calculată abscisa vărfului parabolei $y = ax^2 + bx + c$?
4. În ce direcție sunt îndreptate ramurile parabolei $y = ax^2 + bx + c$ în dependență de valoarea lui a?
5. Descrieți schema de construire a graficului funcției pătrate.

EXERCIȚII

11.1.° Care din funcțiile date este funcție pătrată:

1) $y = 4x^2 + 3x + 6$;

2) $y = 4x + 3$;

3) $y = \dfrac{1}{2x^2 - 3x + 2}$;

4) $y = 6x^2 - 5x$?

11.2.° Calculați valorile funcției $f(x) = 5x^2 - 7x + 2$, pentru valorile argumentului x egale cu 1; –2; 4.

11.3.° Este dată funcția $f(x) = x^2 - 2x - 15$. Aflați valoarea argumentului x, pentru care:
1) $f(x) = 0$; 2) $f(x) = -7$; 3) $f(x) = 33$.

11.4.° Graficul funcției $y = -6x^2 + x + c$ intersectează axa ordonatelor în punctul $M(0; -8)$. Calculați valoarea lui c.

11.5.° Aflați direcția ramurilor și coordinatele vârfului parabolei:
1) $y = x^2 - 12x + 3$;
2) $y = -x^2 + 4x - 6$;
3) $y = 0{,}3x^2 + 2{,}4x - 5$;
4) $y = -5x^2 + 10x + 2$.

11.6.° Construiți graficul funcției:
1) $y = x^2 - 4x - 5$;
2) $y = -x^2 + 2x + 3$;
3) $y = 6x - x^2$;
4) $y = 2x^2 - 8x + 8$;
5) $y = x^2 - 2x + 4$;
6) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$;
7) $y = x^2 - 6x + 5$;
8) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

11.7.° Construiți graficul funcției:
1) $y = x^2 + 2x - 8$;
2) $y = x^2 - 2x$;
3) $y = -x^2 + 4x - 5$;
4) $y = 2x^2 - 2x - 4$.

11.8.• Construiți graficul funcției $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Folosind graficul funcției, aflați:
1) $f(6)$; $f(1)$;
2) valoarea x, pentru care $f(x) = 8$; $f(x) = -1$; $f(x) = -2$;
3) cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției;
4) domeniul de valori al funcțiilor;
5) intervalul de creștere și intervalul de descreștere al funcției;
6) pentru care valori ale argumentului valoarea funcției va fi pozitivă, iar pentru care – negativă.

11.9.• Construiți graficul funcției $f(x) = -x^2 - 6x - 5$. Folosind graficul funcției, aflați:
1) domeniul de valori al funcțiilor;
2) intervalul de creștere al funcției;
3) mulțimea de soluții ale inegalității $f(x) > 0$.

11.10.• Construiți graficul funcției $f(x) = x - 0{,}5x^2$. Folosind graficul funcției, aflați:
1) domeniul de valori al funcțiilor;
2) intervalul de creștere al funcției;
3) pentru ce valori ale lui x va fi corectă inegalitatea $f(x) \leqslant 0$.

11.11.• Construiți graficul funcției $f(x) = 3x^2 - 6x$. Folosind graficul funcției, aflați:
1) domeniul de valori al funcțiilor;
2) intervalul de descreștere al funcției;
3) pentru ce valori ale lui x va fi corectă inegalitatea $f(x) \geqslant 0$.

11.12.• Rezolvați $x^2 - 3x - 1 = -\dfrac{3}{x}$ prin metoda grafică.

11.13.• Rezolvați $-\dfrac{1}{4}x^2 + x + 2 = \sqrt{x}$ prin metoda grafică.

11.14.• Construiți în același sistem de coordonate graficele funcțiilor $y = f(x)$ și $y = g(x)$ și determinați numărul de rădăcini ale egalității $f(x) = g(x)$:
1) $f(x) = -x^2 + 6x - 7$, $g(x) = -\sqrt{x}$;
2) $f(x) = 4x - 2x^2$, $g(x) = -\dfrac{4}{x}$.

11.15.• Construind în acelaș sistem de coordonate graficele funcțiilor $y = x^2 + 4x + 1$ și $y = \dfrac{6}{x}$, determinați numărul de rădăcini ale egalității $x^2 + 4x + 1 = \dfrac{6}{x}$.

11.16.• Aflați coordonatele punctului parabolei $y = -x^2 + 9x + 9$, în care:
1) abscisa și ordinata sânt egale;
2) suma abscisei și a ordonatei este egală cu 25.

11.17.• Aflați coordonatele punctului parabolei $y = 2x^2 - 3x + 6$,în care ordonata este cu 12 mai mare decât abscisa.

11.18.• Aflați domeniul de valori și intervalele de creștere și descreștere al funcției:
1) $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$;
2) $f(x) = -\dfrac{1}{5}x^2 + 2x - 6$;
3) $f(x) = 4 - 12x - 0{,}3x^2$;
4) $f(x) = 7x^2 + 21x$.

11.19.• Aflați domeniul de valori și intervalele de creștere și descreștere al funcției:
1) $f(x) = 2x^2 - 12x + 8$;
2) $f(x) = 9 + 8x - 0{,}2x^2$.

11.20.• Construiți graficul funcției, arătați domeniul de valori și intervalele de creștere și descreștere:

$$y = \begin{cases} 3 - x, & \text{dacă } x \leqslant -2, \\ x^2 - 2x - 3, & \text{dacă } -2 < x < 2, \\ -3, & \text{dacă } x \geqslant 2. \end{cases}$$

11.21.• Construiți graficul funcției, arătați domeniul de valori și intervalele de creștere și descreștere:

$$y=\begin{cases}x, & \text{dacă } x\leqslant 0,\\ 4x-x^2, & \text{dacă } 0<x<5,\\ x-10, & \text{dacă } x\geqslant 5.\end{cases}$$

11.22.• Reprezentați prin formulă o oarecare funcție pătrată, care:
1) descrește pe intervalul $(-\infty; 1]$ și crește pe intervalul $[1; +\infty)$;
2) crește pe intervalul $(-\infty; -2]$ și descrește pe intervalul $[-2; +\infty)$.

11.23.• Calculați cea mai mică valoarea a funcției $y = 3x^2 - 18x + 2$ pe intervalul:
1) $[-1; 4]$; 2) $[-4; 1]$; 3) $[4; 5]$.

11.24.• Calculați cea mai mare valoarea a funcției $y = -x^2 - 8x + 10$ pe intervalul:
1) $[-5; -3]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $[-11; -10]$.

11.25.• Pentru care valori ale lui p și q graficul funcției $y = x^2 + px + q$ trece prin punctele $M(-1; 4)$ și $K(2; 10)$?

11.26.• Pentru care valori ale lui a și b zerourile funcției $y = ax^2 + bx + 7$ sunt numerele -2 și 3?

11.27.• Pentru care valori ale lui a și b parabola $y = ax^2 + bx - 4$ trece prin punctele $C(-3; 8)$ și $D(1; 4)$?

11.28.• Fie D – discriminantul polinomului pătrat $ax^2 + + bx + c$. Reprezentați schița graficului funcției pătrate $y = ax^2 + bx + c$, dacă:

1) $a>0,\ D>0,\ c>0,\ -\frac{b}{2a}>0$;

2) $a>0,\ D=0,\ -\frac{b}{2a}<0$;

3) $a<0,\ D<0,\ -\frac{b}{2a}>0$;

4) $a<0,\ c=0,\ -\frac{b}{2a}<0$.

11.29.• Fie D – discriminantul polinomului pătrat $ax^2 + + bx + c$. Reprezentați schița graficului funcției pătrate $y = ax^2 + bx + c$, dacă:

1) $a>0,\ D<0,\ -\frac{b}{2a}<0$;

2) $a<0,\ D>0,\ c<0,\ -\frac{b}{2a}>0$;

3) $a<0,\ D=0,\ -\frac{b}{2a}<0$.

11.30.• Pentru care valoare a lui b intervalul $(-\infty; 2]$ este intervalul de creștere al funcției $y = -4x^2 - bx + 5$?

11.31.• Pentru care valoare a lui b intervalul $(-\infty; -3]$ este intervalul de descreștere al funcției $y = 3x^2 + bx - 8$?

11.32.• Pentru care valoare a lui a funcția $y = ax^2 + (a-2)x + \frac{1}{4}$ este pătrată și graficul ei are cu axa absciselor un singur punct comun?

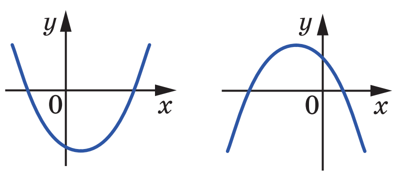
11.33.•• Pentru care valoare a lui a funcția $y = 0{,}5x^2 - 3x + a$ are valori nenegative pentru toate valorile reale ale lui x?

11.34.•• Pentru care valoare a lui a funcția $y = -4x^2 - 16x + a$ are valori negative pentru toate valorile reale ale lui x?

11.35.•• Pentru care valoare a lui c cea mai mare valoare a funcției $y = -5x^2 + 10x + c$ este egală cu -3?

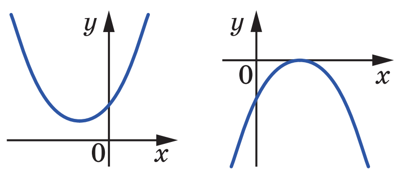
11.36.•• Pentru care valoare a lui c cea mai mică valoare a funcției $y = 0{,}6x^2 - 6x + c$ este egală cu -1?

11.37.•• În figura 11.5 este reprezentat graficul funcției pătrate $y = ax^2 + bx + c$. Determinați semnele coeficienților a, b și c.



a b

Fig. 11.5



a b

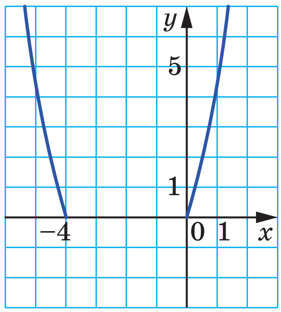
Fig. 11.6

11.38.•• În figura 11.6 este reprezentat graficul funcției pătrate $y = ax^2 + bx + c$. Determinați semnele coeficienților a, b și c.

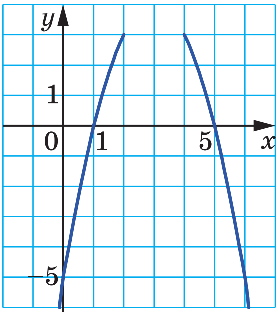
11.39.•• Pentru care valori ale lui p și q vărful parabolei $y = x^2 + px + q$ este punctul A (2; 5)?

11.40.•• Parabola $y = ax^2 + bx + c$ își are vârful în punctul C (4; –10) și trece prin punctul D (1; –1). Aflați valorile coeficienților a, b și c.

11.41.•• Aflați oronata vârfului parabolei, fragmentul căreia este reprezentat pe figura 11.7.



a



b

Fig. 11.7

11.42.•• Aflați ordonata vârfului parabolei, fragmentul căreia este reprezentat în figura 11.8.

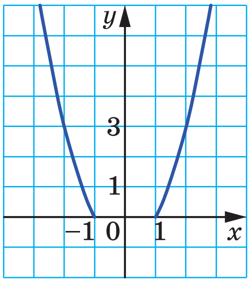


Fig. 11.8

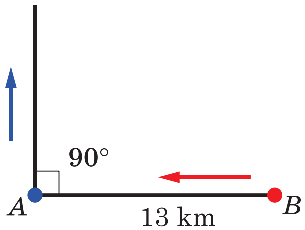


Fig. 11.9

11.43.•• Suma a două numere este egală cu 10. Aflați:

1) cea mai mare valoare posibilă a produsului acestor numere;

2) cea mai mică valoare posibilă a sumei pătratelor acestor numere.

11.44.•• Din punctul B spre punctul A, distanța dintre care este egală cu 13 km, a pornit un turist cu viteza de 6 km/oră. Concomitent, din punctul A în direcție perpendiculară (fig. 11.9) a pornit alt turist cu viteza de 4 km/oră. Peste cât timp de la începutul deplasării distanța dintre turiști va fi minimală?

11.45.•• Un lot cu formă dreptunghiulară trebuie îngrădit cu un gard cu lungimea de 160 m. Ce arie maximală poate avea acest lot?

11.46.•• Construiți graficul funcției:

1) $y = \dfrac{8x + 2x^2 - x^3}{x}$;

2) $y = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} - 3$;

3) $y = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$;

4) $y = \dfrac{x^4 + 4x^2 - 5}{x^2 - 1}$.

11.47.•• Construiți graficul funcției:

1) $y = \dfrac{(x + 3)^3}{x + 3}$;

2) $y = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x}$;

3) $y = \dfrac{x^4 - 1}{1 - x^2}$.

11.48.•• Construiți graficul funcției:

1) $y = x\,|\,x\,|$;

2) $y = \dfrac{x}{|\,x\,|}(x^2 - x - 6)$;

3) $y = x^2 - 4\,|\,x\,| + 3$;

4) $y = x^2 + 3x \cdot \dfrac{|\,x - 3\,|}{x - 3} - 4$.

11.49.•• Construiți graficul funcției:

1) $y = \dfrac{x^3}{|\,x\,|} + 4x$;

2) $y = 6\,|\,x\,| - x^2$.

11.50.•• Construiți graficul funcției $y = x^2 + 2x - 3$. Folosind graficul construit, determinați, pentru ce valori ale lui a ecuația $x^2 + 2x - 3 = a$:

1) are două rădăcini;
2) are o singură rădăcină;
3) nu are rădăcini.

11.51.•• Construiți graficul funcției $y = -x^2 - 4x + 5$. Folosind graficul construit, determinați, câte rădăcini are ecuația $-x^2 - 4x + 5 = a$ în dependență de valoarea lui a.

11.52.* Fie x_1 și x_2 – zerourile funcției $y = -3x^2 - (3a - 2)\,x + 2a + 3$. Pentru ce valori ale lui a este corectă inegalitatea $x_1 < -2 < x_2$?

11.53.* Se știe, că x_1 și x_2 – zerourile funcției $y = 2x^2 - (3a - 1)\,x + a - 4$, $x_1 < x_2$. Pentru ce valori ale lui a numărul 1 aparține intervalului $[x_1; x_2]$?

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

11.54. Rezolvați ecuația:
1) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;
2) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$;
3) $x^4 + 9x^2 + 8 = 0$;
4) $x^4 - 16x^2 = 0$.

11.55. Aflați suma și produsul rădăcinilor ecuațiilor:
1) $x^2 - 5x - 10 = 0$;
2) $2x^2 + 6x - 7 = 0$;
3) $-\frac{1}{3}x^2 + 8x - 1 = 0$.

11.56. Înfăptuiți operațiile:
1) $\frac{b+3}{b-3} + \frac{b-2}{b+2}$;
2) $\frac{p+4}{p-1} - \frac{p-20}{p+5}$;
3) $\frac{x}{2x+3} - \frac{x+1}{2x-3}$.

11.57. Simplificați expresia:
1) $\left(2\sqrt{a} + 3\sqrt{b}\right)\left(4a - 6\sqrt{ab} + 9b\right) - 9\sqrt{9b^3}$;
2) $\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{28} + 4\sqrt{63}\right) \cdot \sqrt{7} - \sqrt{126}$;
3) $\left(2 - \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)\left(2 + \sqrt{3} - \sqrt{6}\right)$.

11.58. O barcă cu motor a pornit pe râu de la un debarcader spre altul și s-a întors înapoi peste 2,5 ore făcând o oprire de 25 min. Calculați viteza apei, dacă viteza proprie a bărcii este egală cu 20 km/oră, iar distanța dintre debarcadere – 20 km.

11.59. Prin una din două țevi butoiul poate fi umplut cu 10 min mai repede, decât prin cealaltă țeavă. Dacă ambele țevi vor fi deschise, în 8 min vor fi umplute $\frac{2}{3}$ de butoi. În cât timp poate fi umplut acest butoi prin fiecare din țevi?

ÎNSUȘIM ACȚIUNI NESTANDARTE

11.60. Pe tablă este scris numărul 1001. Doi jucători participă la următoarea joacă. Într-o acțiune jucătorul șterge numărul de pe tablă, înlocuindu-l cu diferența dintre acest număr și oricare din divizorii săi. Jucătorii acționează pe rând. Joaca este pierdută de jucătorul, în urma acțiunii căruia pe tablă va fi scris numărul 0. Care din jucători își poate asigura învingerea?

Despre unele transformări ale graficelor funcțiilor

Cum poate fi construit graficul funcției $y = f(-x)$, dacă este cunoscut graficul funcției $y = f(x)$

Menținem, că dacă punctul $(x_0; y_0)$ aparține graficului funcției $y = f(x)$, punctul $(-x_0; y_0)$ va aparține graficului funcției $y = f(-x)$. Într-adevăr, $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$.

De aceea toate punctele graficului funcției $y = f(-x)$ pot fi obținute, înlocuind fiecare punct al graficului funcției $y = f(x)$ cu un punct, ce are aceeași valoare a ordonatei și valoarea opusă a abscisei.[1]

În figura 11.10 este arătat, cum poate fi construit graficul funcției $y = \sqrt{x}$ folosind graficul funcției $y = \sqrt{-x}$.

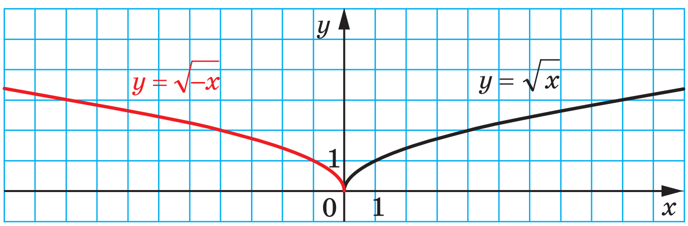
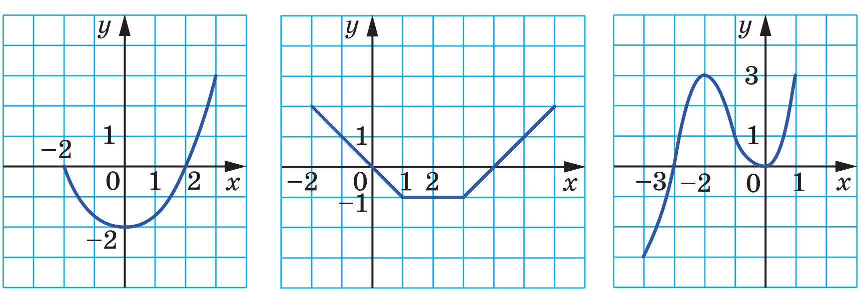


Fig. 11.10

EXERCIȚII

1. Folosind graficul funcției $y = f(x)$, reprezentat în figura 11.11, construiți graficul funcției $y = f(-x)$.



а *б* *в*

Fig. 11.11

[1] La lecțiile de geometrie ați aflat deja, că transformarea descrisă a graficului funcției $y = f(x)$ se numește simetrie axială.

2. Construiți graficul funcției $y = \sqrt{x-2}$. Folosind graficul obținut, construiți graficul funcției $y = \sqrt{-x-2}$.

Cum poate fi construit graficul funcției $y = f(|x|)$, dacă este cunoscut graficul funcției $y = f(x)$

Aplicând definiția modulului, notăm:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } x \geqslant 0, \\ f(-x), & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

Facem concluzia: graficul funcției $y = f(|x|)$ pentru $x \geqslant 0$ coincide cu graficul funcției $y = f(x)$, iar pentru $x < 0$ – cu graficul funcției $y = f(-x)$.

Construirea graficului funcției $y = f(|x|)$ poate decurge conform schemei:

1) construim partea de grafic al funcției $y = f(x)$, toate punctele căruia au abscise nenegative;
2) construim partea de grafic al funcției $y = f(-x)$, toate punctele căruia au abscise negative.

Reuniunea acestor două părți va constitui graficul funcției $y = f(|x|)$.

Pe figura 11.12 este reprezentat, cum poate fi construit graficul funcției $y = (x-2)^2$, folosind graficul funcției $y = (|x|-2)^2$.

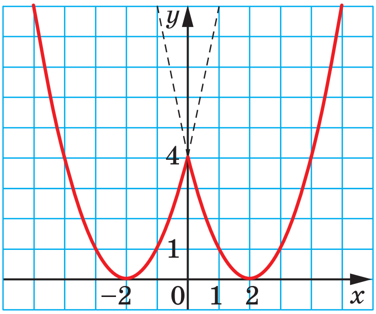


Fig. 11.12

EXERCIȚII

1. Folosind graficul funcției $y = f(x)$, reprezentat pe figura 11.11, construiți graficul funcției $y = f(|x|)$.

2. Folosind graficul funcției $y = x + 2$, construiți graficul funcției $y = |x| + 2$.

3. Construiți graficul funcției:

1) $y = |x| - 3$;
2) $y = x^2 - 4|x|$;
3) $y = x^2 + 2|x| - 3$;
4) $y = 2|x| - x^2$;
5) $y = \dfrac{4}{|x|}$;
6) $y = \dfrac{4}{|x|} - 2$;
7) $y = \dfrac{4}{|x| - 2}$;
8) $y = \sqrt{|x|}$.

Cum poate fi construit graficul funcției $y = |f(x)|$, dacă este cunoscut graficul funcției $y = f(x)$

Pentru funcția $y = |f(x)|$ poate fi făcută notația:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{dacă } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{dacă } f(x) < 0. \end{cases}$$

Reiese, că graficul funcției $y = |f(x)|$ pentru toate valorile lui x, în care $f(x) \geqslant 0$, coincide cu graficul funcției $y = f(x)$, iar pentru toate valorile lui x, în care $f(x) < 0$, – cu graficul funcției $y = -f(x)$.

În așa fel, construirea graficului funcției $y = |f(x)|$ poate decurge conform schemei:

1) toate punctele graficului funcției $y = f(x)$ cu ordonate nenegative rămân intacte;

2) punctele cu ordonate negative sunt înlocuite cu puncte, ce au aceeași abscisă, dar ordonate opuse.

În figura 11.13 este reprezentată construirea graficului funcției $y = x^2 - x - 2$ fiind folosit graficul funcției $y = |x^2 - x - 2|$.

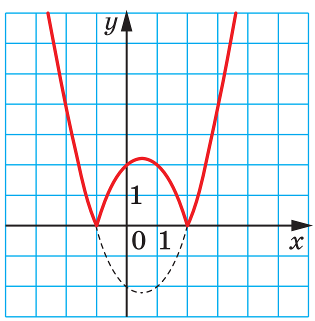


Fig. 11.13

EXEMPLUL 1 Construiți graficul funcției $y = \left| \sqrt{|x| + 1} - 2 \right|$.

Rezolvare. Construirea graficului dorit poate fi înfăptuită după schema:

$$\boxed{y = \sqrt{x+1} \to y = \sqrt{|x|+1} \to y = \sqrt{|x|+1} - 2 \to y = \left|\sqrt{|x|+1} - 2\right|}$$

(fig. 11.14). ◀

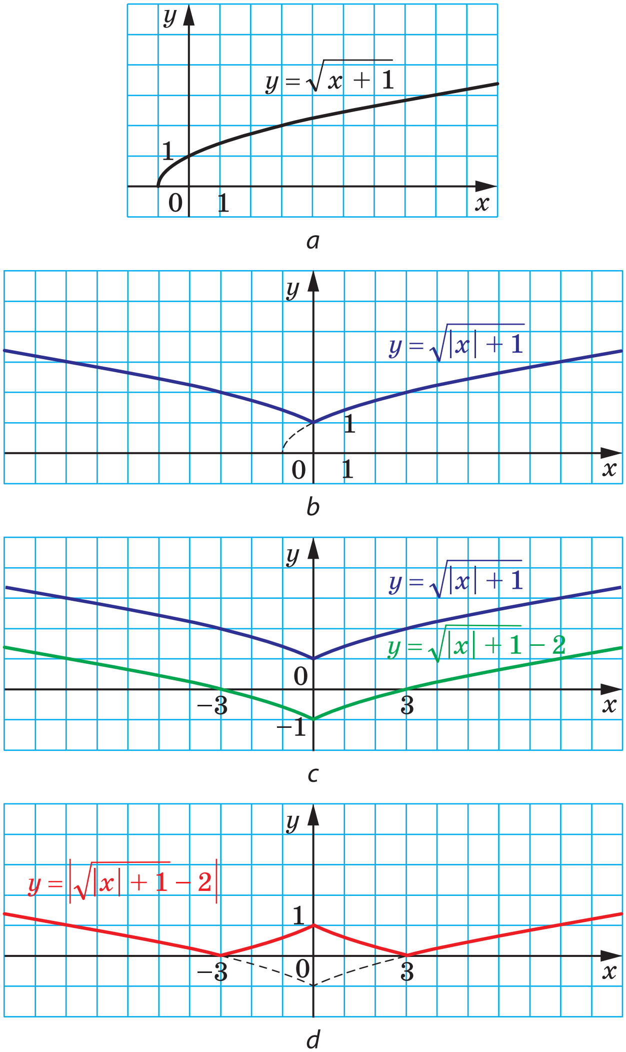


Fig. 11.14

EXEMPLUL 2 Construiţi graficul funcţiei $y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$.

Rezolvare. Construirea graficului dorit poate fi înfăptuită după schema:

$$\boxed{y = \sqrt{|x|} \to y = \sqrt{|x+1|} \to y = \sqrt{|x+1|} - 1 \to y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|}$$

(fig. 11.15). ◀

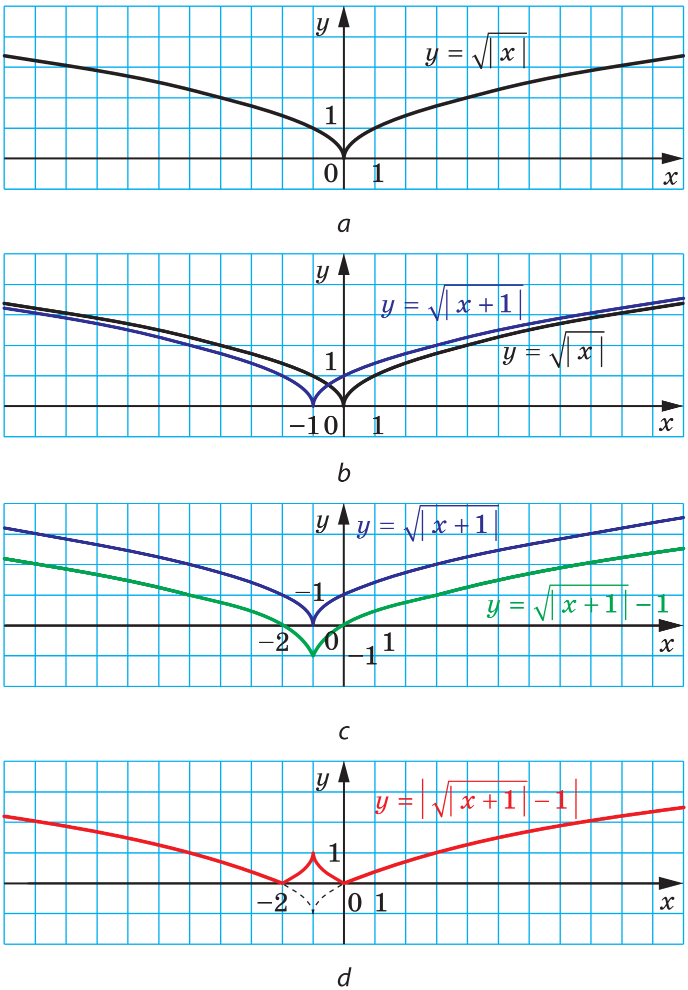


Fig. 11.15

EXERCIȚII

1. Folosind graficul funcției $y = f(x)$, reprezentat în figura 11.11, construiți graficul funcției:

1) $y = |f(x)|$;
2) $y = |f(|x|)|$.

2. Folosind graficul funcției $y = x + 2$, construiți graficul funcției $y = |x + 2|$.

3. Construiți graficul funcției:

1) $y = |x - 3|$;
2) $y = |x^2 - 4x|$;
3) $y = |x^2 + 2x - 3|$;
4) $y = |2x - x^2|$;
5) $y = \left|\frac{4}{x} - 2\right|$;
6) $y = \left|\frac{4}{x - 2}\right|$.

4. Construiți graficul funcției:

1) $y = ||x| - 3|$;
2) $y = |x^2 - 4|x||$;
3) $y = |x^2 + 2|x| - 3|$;
4) $y = |2|x| - x^2|$;
5) $y = \left|\frac{4}{|x|} - 2\right|$;
6) $y = \left|\frac{4}{|x| - 2}\right|$.

5. Construiți graficul funcției:

1) $y = \sqrt{4 - |x|}$;
2) $y = 3 - \sqrt{4 - |x|}$;
3) $y = \left|3 - \sqrt{4 - |x|}\right|$;
4) $y = \sqrt{|4 - x|}$;
5) $y = 3 - \sqrt{|4 - x|}$;
6) $y = \left|3 - \sqrt{|4 - x|}\right|$.

ÎNSĂRCINAREA № 2 "VERIFICAȚI-VĂ CUNOȘTINȚELE" ÎN FORMĂ DE TESTE

1. Cu ce este egală valoarea funcției $f(x) = 2x^2 - 1$ în punctul $x_0 = -3$?

A) –19; C) 11;
B) –13; D) 17.

2. Dintre funcțiile date arătați funcția pătrată:

A) $y = 2x - 5$; C) $y = 2x^2 - 5$;
B) $y = 2\sqrt{x} - 5$; D) $y = \frac{2}{x^2} - 5$.

3. Domeniul de definiție al cărei funcții este intervalul $(-\infty; 6)$?

A) $y = \sqrt{6 + x}$; C) $y = \frac{1}{\sqrt{6 + x}}$;
B) $y = \frac{1}{\sqrt{6 - x}}$; D) $y = \sqrt{6 - x}$.

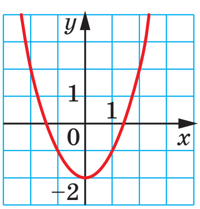
4. Cum trebue înfăptuită translația graficului funcției $y = \frac{7}{x}$, ca să se obținăgraficul funcției $y = \frac{7}{x - 5}$?

A) Cu 5 unități în sus de-a lungul axei ordonatelor;
B) cu 5 unități spre stânga de-a lungul axei absciselor;
C) cu 5 unități spre dreapte de-a lungul axei absciselor;
D) cu 5 unități în jos de-a lungul axei ordonatelor.

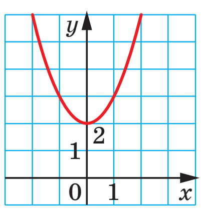
5. Asupra graficului funcției $y = \sqrt{x}$ a fost efectuată translația cu 2 unități spre stânga și cu 7 unități în jos. Graficul cărei funcții a fost obținut?

A) $y = \sqrt{x + 2} - 7$; C) $y = \sqrt{x - 2} + 7$;
B) $y = \sqrt{x - 2} - 7$; D) $y = \sqrt{x + 2} + 7$.

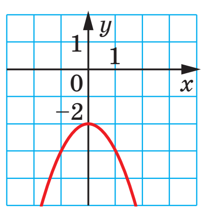
6. În care din figuri este reprezentat graficul funcției $y = -x^2 + 2$?



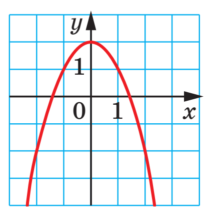
A)



B)

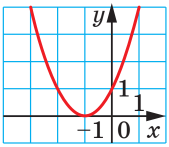


C)



D)

7. Graficul cărei funcții este reprezentat pe figură?

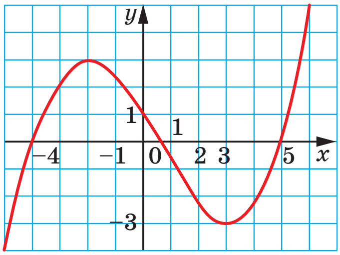


A) $y = x^2 - 1$;
B) $y = x^2 + 1$;
C) $y = (x - 1)^2$;
D) $y = (x + 1)^2$.

8. Arătați coordonatele vârfului parabolei $y = 3\,(x - 4)^2 - 5$.

A) (4; 5); C) (4; –5);
B) (–4; 5); D) (–4; –5).

9. În figură este reprezentat graficul funcției $y = f\,(x)$, definite pe mulțimea numerelor reale. Folosind figura, arătați intervalul de descreștere al funcției.



A) [–4; 1]; C) [–2; 3];
B) [–3; 3]; D) [–3; 1].

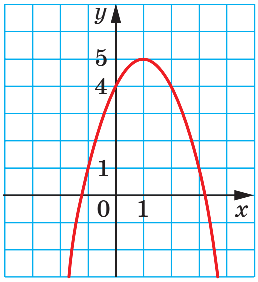
10. Aflați abscisa vârfului parabolei $y = 2x^2 - 12x + 3$.

A) 6; C) 3;
B) –6; D) –3.

11. Vârful cărei parabole aparține axei absciselor?

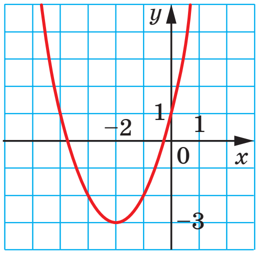
A) $y = x^2 - 6$; C) $y = (x - 6)^2$;
B) $y = x^2 - 6x$; D) $y = (x - 6)^2 + 2$.

12. Pe figură este reprezentat graficul funcției $y = -x^2 + 2x + 4$. Folosind figura, determinați domeniul de valori al funcției.



A) $(-\infty; +\infty)$;
B) $(-\infty; 1]$;
C) $[1; +\infty)$;
D) $(-\infty; 5]$.

13. Pe figură este reprezentat graficul funcției $y = x^2 + 4x + 1$. Folosind figura, determinați intervalul de creștere al funcției.



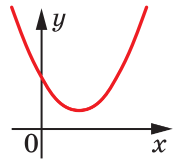
A) $(-\infty; -2]$;
B) $[-2; +\infty)$;
C) $[-3; +\infty)$;
D) determinarea intervalului este imposibilă.

14. Determinați zerourile funcției $y = 2x^2 + x - 6$.

A) –1,5; –2; C) –1,5; 2;
B) 1,5; 2; D) 1,5; –2.

15. Pentru care valori b și c vârful parabolei $y = x^2 + bx + c$ este situat în punctul M (3; 8)?

A) $b = 6$, $c = -19$;
B) $b = -6$, $c = 17$;
C) $b = -3$, $c = 8$;
D) determinarea valorilor este imposibilă.



16. Pe figură este reprezentat graficul funcției pătrate $y = ax^2 + bx + c$. Arătați afirmația corectă, dacă D – discriminantul polinomului pătrat $ax^2 + bx + c$.

A) $b > 0$, $D > 0$; C) $b < 0$, $D < 0$;
B) $b > 0$, $D < 0$; D) $b > 0$, $D = 0$.

17. Pentru care valoare a lui a cea mai mică valoarea a funcției $y = 3x^2 - 6x + a$ este egală cu 4?

A) –5; B) 4; C) 7; D) 8.

18. Se știe, că $m - n = 8$. Aflați mulțimea de valori ale expresiei mn.

A) $[-16; +\infty)$;
B) $[8; +\infty)$;
C) $(-\infty; +\infty)$;
D) determinarea mulțimii este imposibilă.

12. Rezolvarea inegalităților pătrate

Pe figura 12.1 este reprezentat graficul unei oarecare funcții $y = f(x)$, domeniu de definiție al căreia este mulțimea numerelor reale.

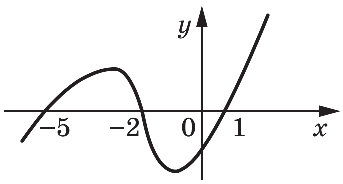


Fig. 12.1

Cu ajutorul graficului sunt ușor determinate intervalele de semn constant ale funcției f, și anume: $y > 0$ pe fiecare din intervalele $(-5; -2)$ și $(1; +\infty)$; $y < 0$ pe fiecare din intervalele $(-\infty; -5)$ și $(-2; 1)$.

Aflând intervalele de semn constant ale funcției f, în acest fel am rezolvat inegalitățile $f(x) > 0$ și $f(x) < 0$.

Intervalele $(-5; -2)$ și $(1; +\infty)$ împreună formează mulțimea de soluții ale inegalității $f(x) > 0$. În așa cazuri se spune, că mulțimea de soluții a inegalității $f(x) > 0$ este **reuniunea** intervalelor menținute. Reuniunea intervalelor este notată cu un semn special $\cup$.

În așa fel, mulțimea de soluții a inegalității $f(x) > 0$ poate fi notată în următorul fel:

$$(-5; -2) \cup (1; +\infty).$$

Mulțimea de soluții a inegalității $f(x) < 0$ poate fi notată în următorul fel:

$$(-\infty; -5) \cup (-2; 1).$$

Această metodă de rezolvare a inegalităților $f(x) > 0$ și $f(x) < 0$ prin intermediul graficului funcției $y = f(x)$ este numită metodă **grafică**.

Vom arăta, cum poate fi aplicată această metodă la rezolvarea inegalităților pătrate.

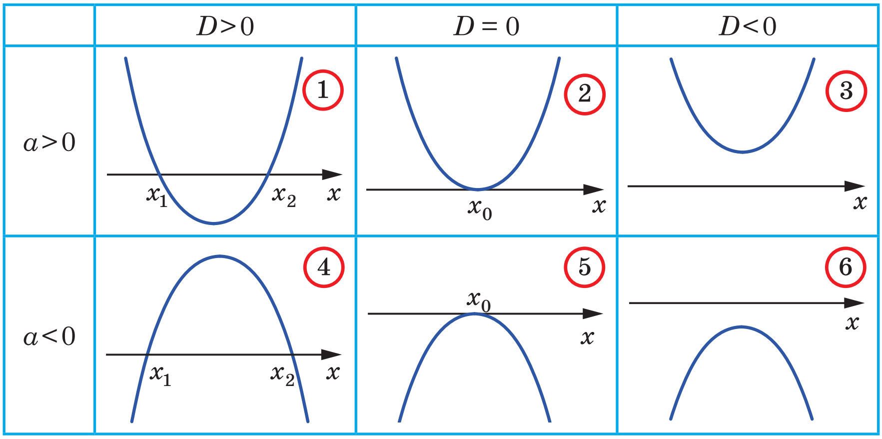
Definiție. **Inegalitățile de forma $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, în care x – variabila, a, b și c – oarecare numere, din care $a \neq 0$, se numesc inegalități pătrate.**

Clarificăm, cum poate fi determinată poziția graficului funcției pătrate $y = ax^2 + bx + c$ în referință cu axa absciselor.

Existența și numărul de zerouri ale funcției pătrate $y = ax^2 + bx + c$ pot fi determinate cu ajutorul discriminantului D al polinomului pătrat $ax^2 + bx + c$: dacă $D > 0$, funcția are două zerouri; dacă $D = 0$, funcția are un singur zerou; dacă $D < 0$, funcția nu are zerouri.

Semnul primului coeficient al polinomului pătrat $ax^2 + bx + c$ determină direcția ramurilor parabolei $y = ax^2 + bx + c$. Dacă $a > 0$ ramurile parabolei sunt orientate în sus, dacă $a < 0$ – în jos.

Plasarea schematică a parabolei $y = ax^2 + bx + c$ în referință cu axa absciselor depinde de semnele numerelor a și D este reprezentată în tabela (x_1 și x_2 – zerourile funcției, x_0 – abscisa vârfului parabolei).



Vom explica, cum poate fi folosită tabela pentru rezolvarea inegalităților pătrate.

Fie, de exemplu, necesară rezolvarea inegalității $ax^2 + bx + c > 0$, în care $a < 0$ și $D > 0$. Acestor condiții le corespunde celula 4 a tabelei. E clar, că răspunsul va fi intervalul $(x_1; x_2)$, pe care graficul funcției pătrate respective este situat mai sus de axa abciselor.

EXEMPLUL 1 Rezolvați inegalitatea $2x^2 - x - 1 > 0$.

Rezolvare. Pentru polinomul pătrat $2x^2 - x - 1$ obținem: $a = 2 > 0$, $D = 9 > 0$. Acestor condiții le corespunde celula 1 a tabelei. Rezolvăm ecuația $2x^2 - x - 1 = 0$. Obținem $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Schematic, graficul funcției $y = 2x^2 - x - 1$ poate fi reprezentat ca în figura 12.2.

Pe figura 12.2 se poate observa, că funcția pătrată respectivă are valori pozitive pe fiecare din intervalele $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ și $(1; +\infty)$.

Răspuns: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$. ◀

EXEMPLUL 2 Rezolvați inegalitatea $-9x^2 + 6x - 1 < 0$.

Rezolvare. Obținem: $a = -9$, $D = 0$. Acestor condiții le corespunde celula 5 a tabelei. Determinăm, că $x_0 = \frac{1}{3}$. Deci, schematic, graficul funcției $y = -9x^2 + 6x - 1$ poate fi reprezentat ca pe figura 12.3.

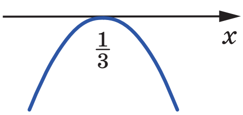


Fig. 12.3

Pe figura 12.3 se poate observa, soluții ale inegalității pot fi toate numerele, în afară de $\frac{1}{3}$.

Observăm, că această inegalitate poate fi rezolvată și în alt mod. Rescriem inegalitatea în felul următor: $9x^2 - 6x + 1 > 0$.

Atunci $(3x - 1)^2 > 0$.

De aici obținem acelaș rezultat.

Răspuns: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. ◀

EXEMPLUL 3 Rezolvați inegalitatea $3x^2 - x + 1 < 0$.

Rezolvare. Obținem: $a = 3 > 0$, $D = -11 < 0$. Acestor condiții le corespunde celula 3 a tabelei. În acest caz graficul funcției $y = 3x^2 - x + 1$ nu are puncte cu coordonate negative.

Răspuns: inegalitatea nu are soluții. ◀

EXEMPLUL 4 Rezolvați inegalitatea $0{,}2x^2 + 2x + 5 \leqslant 0$.

Rezolvare. Deoarece $a = 0{,}2$, $D = 0$, acestor condiții le corespunde celula 2 a tabelei, iar $x_0 = -5$. Dar în acest caz funcția pătrată are doar valori nenegative. Așa dar, inegalitatea are o singură soluție $x = -5$.

Răspuns: -5. ◀

?

1. Cu ce fel de simbol se notează reuniunea mulțimilor?
2. Care inegalități se numesc inegalități pătrate?
3. Ce cazuri de plasare există pentru parabola $y = ax^2 + bx + c$ în referință cu axa absciselor dependent de semnele numerelor a și D, dacă D – este discriminantul polinomului pătrat $ax^2 + bx + c$? Reprezentați schematic aceste cazuri.

EXERCIȚII

12.1.° Care din numerele –2; 0; 1 sunt soluții ale inegalității:
1) $x^2 - x - 2 < 0$; 2) $x^2 + x \geqslant 0$; 3) $-3x^2 - x + 2 > 0$?

12.2.° Pe figura 12.4 este reprezentat graficul funcției $y = x^2 + 4x - 5$. Aflați mulțimea de soluții a inegalității:
1) $x^2 + 4x - 5 < 0$; 3) $x^2 + 4x - 5 > 0$;
2) $x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$; 4) $x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$.

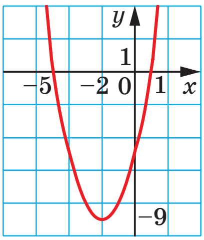


Fig. 12.4

12.3.° Pe figura 12.5 este reprezentat graficul funcției $y = -3x^2 - 6x$. Aflați mulțimea de soluții a inegalității:
1) $-3x^2 - 6x < 0$; 3) $-3x^2 - 6x > 0$;
2) $-3x^2 - 6x \leqslant 0$; 4) $-3x^2 - 6x \geqslant 0$.

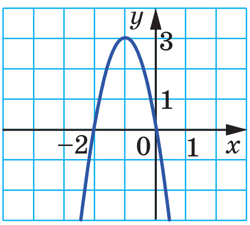


Fig. 12.5

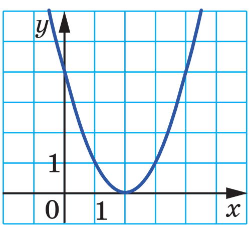


Fig. 12.6

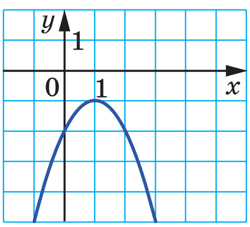


Fig. 12.7

12.4.° Pe figura 12.6 este reprezentat graficul funcției $y = x^2 - 4x + 4$. Aflați mulțimea de soluții a inegalității:
1) $x^2 - 4x + 4 < 0$; 3) $x^2 - 4x + 4 > 0$;
2) $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$; 4) $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$.

12.5.° Pe figura 12.7 este reprezentat graficul funcției $y = -x^2 + 2x - 2$. Aflați mulțimea de soluții a inegalității:
1) $-x^2 + 2x - 2 < 0$; 3) $-x^2 + 2x - 2 > 0$;
2) $-x^2 + 2x - 2 \leqslant 0$; 4) $-x^2 + 2x - 2 \geqslant 0$.

12.6.° Rezolvați inegalitatea:
1) $x^2 + 6x - 7 < 0$; 5) $3x^2 - 7x + 4 \leqslant 0$;
2) $x^2 - 2x - 48 \geqslant 0$; 6) $2x^2 + 3x + 1 > 0$;
3) $-x^2 - 6x - 5 > 0$; 7) $4x^2 - 12x \leqslant 0$;
4) $-x^2 + 4x - 3 < 0$; 8) $4x^2 - 9 > 0$;

9) $x^2 - 12x + 36 > 0$;
10) $4x^2 - 12x + 9 \geqslant 0$;
11) $x^2 + 4x + 4 < 0$;
12) $49x^2 - 14x + 1 \leqslant 0$;
13) $2x^2 - x + 3 > 0$;
14) $3x^2 - 4x + 5 \leqslant 0$;
15) $-4x^2 + 5x - 7 > 0$;
16) $-2x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$.

12.7.° Rezolvați inegalitatea:
1) $x^2 + 4x + 3 > 0$;
2) $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 12x + 45 < 0$;
4) $-3x^2 - 5x - 2 \geqslant 0$;
5) $x^2 - 5x > 0$;
6) $-25x^2 + 16 \leqslant 0$;
7) $5x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$;
8) $-3x^2 + 6x - 4 > 0$;
9) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \leqslant 0$;
10) $-x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{36} > 0$;
11) $2x^2 - 2x + 0{,}5 < 0$.

12.8.° Aflați mulțimea de soluții a inegalității:
1) $x^2 \leqslant 49$; 2) $x^2 > 5$; 3) $7x^2 \leqslant 4x$; 4) $0{,}9x^2 < -27x$.

12.9.° Aflați mulțimea de soluții a inegalității:
1) $x^2 > 1$; 2) $x^2 < 3$; 3) $-3x^2 \geqslant -12x$; 4) $-2x^2 < -128$.

12.10.• Rezolvați inegalitatea:
1) $x(x + 5) - 2 < 4x$;
2) $11 - (x + 1)^2 \leqslant x$;
3) $(2x + 1)^2 - (x + 1)(x - 7) \leqslant 5$;
4) $5x(x + 4) - (2x - 3)(2x + 3) > 30$;
5) $(3x - 7)(x + 2) - (x - 4)(x + 5) > 30$;
6) $\frac{2x^2 - 1}{4} - \frac{3 - 4x}{6} + \frac{8x - 5}{8} \leqslant \frac{19}{24}$.

12.11.• Rezolvați inegalitatea:
1) $2(x^2 + 2) \geqslant x(x + 5)$;
2) $x - (x + 4)(x + 5) > -5$;
3) $(6x - 1)(6x + 1) - (12x - 5)(x + 2) < 7 - 3x$;
4) $\frac{x - 1}{4} - \frac{2x - 3}{2} < \frac{x^2 + 3x}{8}$.

12.12.• Pentru care valori ale lui x:
1) valoarea polinomului $-3x^2 + 6x + 1$ este mai mare decât $-\frac{4}{3}$;
2) valoarea polinomului $-5x^2 + 11x + 2$ nu e mai mare decât $-\frac{2}{5}$?

12.13.• Pentru care valori ale lui x:

1) valoarea polinomului $x^2 - 2x - 11$ este mai mică decât $\frac{1}{4}$;

2) valoarea polinomului $-3x^2 + 8x + 6$ nu e mai mică decât $-\frac{2}{3}$?

12.14.• Pentru care valori ale argumentului valorile funcției

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 9$$

sunt mai mari decât valorile respective ale funcției $y = 2x - 1$?

12.15.• Pentru care valori ale argumentului valorile funcției

$$y = \frac{3}{2}x^2 - 7x + 1$$

sunt mai mici decât valorile respective ale funcției $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4$?

12.16.• Aflați soluțiile întregi ale inegalităților

1) $x^2 + 5x \leqslant 0$;
3) $6x^2 + x - 2 \leqslant 0$;
2) $x^2 - 10 < 0$;
4) $-\frac{1}{4}x^2 + x + 3 > 0$.

12.17.• Câte soluții întregi are inegalitatea:

1) $20 - 8x - x^2 > 0$;
2) $4x^2 - 15x - 4 < 0$?

12.18.• Aflați cea mai mică soluție întreagă a inegalității:

1) $42 - x^2 - x > 0$;
2) $2x^2 - 3x - 20 < 0$.

12.19.• Aflați cea mai mare soluție întreagă a inegalității:

1) $1{,}5x^2 - 2x - 2 < 0$;
2) $-2x^2 - 15x - 25 \geqslant 0$.

12.20.• Alcătuiți o oarecare inegalitate pătrată, mulțimea de soluții a căreia:

1) este reuniunea intervalelor $(-\infty; -4)$ și $(8; +\infty)$;
2) este intervalul $[-2; 9]$;
3) este formată din unicul număr 7.

12.21.• Aflați domeniul de definiție al funcției:

1) $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$;
3) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}$;
2) $y = \sqrt{2x^2 + 5x - 3}$;
4) $y = \frac{x + 2}{\sqrt{6x - 2x^2}}$.

12.22.• Aflați domeniul de definiție al expresiei:

1) $\sqrt{2x^2 - 9x - 18}$;
2) $\frac{1}{\sqrt{15 + 2x - x^2}}$.

12.23.• Sunt oare echivalente inegalitățile:

1) $x^2 - 2x - 15 > 0$ și $x^2 - 2x - 15 \geqslant 0$;

2) $\frac{1}{x^2 - x - 20} < 0$ și $\frac{1}{x^2 - x - 20} \leqslant 0$;

3) $x^2 - 6x + 10 > 0$ și $-x^2 + x - 1 \leqslant 0$;

4) $x^2 + 2x + 3 < 0$ și $-2x^2 - 4 > 0$?

12.24.• Pentru ce valori ale lui a ecuația nu are rădăcini:

1) $x^2 - ax + 4 = 0$;

2) $x^2 + (a - 2)\,x + 25 = 0$;

3) $4{,}5x^2 - (4a + 3)\,x + 3a = 0$?

12.25.• Pentru ce valori ale lui b ecuația are două rădăcini diferite:

1) $x^2 - 8bx + 15b + 1 = 0$;

2) $2x^2 + 2\,(b - 6)\,x + b - 2 = 0$?

12.26.•• Rezolvați sistemul de inegalități:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leqslant 0, \\ x > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 - 11x - 6 \geqslant 0, \\ x + 4 \geqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 9x - 10 \leqslant 0, \\ 6x - x^2 < 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x^2 + 3x - 10 < 0. \end{cases}$

12.27.•• Rezolvați sistemul de inegalități:

1) $\begin{cases} -6x^2 + 13x - 5 \leqslant 0, \\ 6 - 2x > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 7x - 18 < 0, \\ 5x - x^2 \leqslant 0. \end{cases}$

12.28.•• Aflați soluțiile întregi ale sistemului de inegalități:

1) $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 18 \geqslant 0, \\ x^2 + 4x - 5 \leqslant 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - \left(\sqrt{5} - 3\right)x - 3\sqrt{5} \leqslant 0, \\ x^2 + x > 0. \end{cases}$

12.29.•• Aflați domeniul de definiție al funcției:

1) $y = \frac{5}{\sqrt{x^2 - 4x - 12}} + \sqrt{x + 1}$;

2) $y = \frac{x - 3}{\sqrt{18 + 3x - x^2}} + \frac{8}{x - 5}$;

3) $y = \sqrt{x^2 - 5x - 14} - \frac{9}{x^2 - 81}$;

4) $y = \frac{1}{\sqrt{6 - 7x - 3x^2}} + \frac{2}{\sqrt{x + 1}}$.

12.30.•• Aflați domeniul de definiție al funcției:

1) $y = \sqrt{20 + 4x - 3x^2} + \frac{3}{\sqrt{8 - 4x}}$;

2) $y = \frac{x + 5}{\sqrt{35 + 2x - x^2}} + \frac{x - 1}{|x| - 6}$.

12.31.•• Aflați mulțimea de soluții ale inegalității:

1) $x^2 - 8\,|x| - 33 < 0$;

2) $8x^2 + 7|x| - 1 \geqslant 0$.

12.32.•• Aflați mulțimea de soluții ale inegalității:

1) $5x^2 - 7|x| + 2 \geqslant 0$;

2) $x^2 + 10|x| - 24 \leqslant 0$;

12.33.•• Rezolvați inegalitatea:

1) $|x| \cdot (x^2 + 3x - 10) < 0$;
2) $\sqrt{x}\,(x^2 + 2x - 8) \leqslant 0$;
3) $(x - 2)^2\,(x^2 - 8x - 9) < 0$;
4) $(x + 5)^2\,(x^2 - 2x - 15) > 0$;
5) $\dfrac{x^2 + 7x - 8}{(x - 4)^2} \geqslant 0$;
6) $\dfrac{x^2 + 10x - 11}{(x + 3)^2} \leqslant 0$.

12.34.•• Rezolvați inegalitatea:

1) $|x| \cdot (x^2 - 5x + 6) > 0$;
2) $\sqrt{x}\,(x^2 + 6x - 40) > 0$;
3) $(x + 3)^2\,(x^2 - x - 6) > 0$;
4) $\dfrac{3x^2 - 8x - 3}{(x - 1)^2} \leqslant 0$.

12.35.* Rezolvați inegalitatea:

1) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} > 0$;
2) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} \geqslant 0$;
3) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} < 0$;
4) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} \leqslant 0$.

12.36.* Rezolvați inegalitatea:

1) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} > 0$;
2) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} \geqslant 0$;
3) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} < 0$;
4) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} \leqslant 0$.

12.37.* Pentru care valori ale lui a inegalitatea dată va fi corectă pentru toate valorile reale ale lui x:

1) $x^2 - 4x + a > 0$;
2) $x^2 + (a - 1)\,x + 1 - a - a^2 \geqslant 0$;
3) $-\dfrac{1}{4}x^2 + 5ax - 9a^2 - 8a < 0$;
4) $(a - 1)\,x^2 - (a + 1)\,x + a + 1 > 0$?

12.38.* Pentru care valori ale lui a inegalitatea nu are soluții:

1) $-x^2 + 6x - a > 0$;
2) $x^2 - (a + 1)\,x + 3a - 5 < 0$;
3) $ax^2 + (a - 1)\,x + (a - 1) < 0$?

12.39.* Pentru fiecare valoare a lui a rezolvați sistemul de inegalități:

1) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0, \\ x > a; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 4x^2 - 3x - 1 \leqslant 0, \\ x < a. \end{cases}$

12.40.* Pentru fiecare valoare a lui a rezolvați sistemul de inegalități:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 72 < 0, \\ x > a; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2 - 9x + 8 > 0, \\ x < a. \end{cases}$

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

12.41. Simplificați expresia:

1) $\frac{x^2+3xy}{x+6}:\frac{x^2-9y^2}{2x+12}$; 2) $\frac{4a^2-12ab+9b^2}{2a^2-8b^2}\cdot\frac{2a^2-8ab+8b^2}{6a-9b}$.

12.42. Aflați valoarea expresiei, folosind proprietățile rădăcinei pătrate aritmetice:

1) $\sqrt{20\cdot66\cdot330}$; 3) $2\sqrt{18}\cdot3\sqrt{30}\cdot5\sqrt{15}$;

2) $\sqrt{3^5\cdot12^3}$; 4) $6\sqrt{10}\cdot\sqrt{45}\cdot\sqrt{50}$.

12.43. Prima brigadă poate culege roada în 12 zile. Pentru înfăptuirea acestui lucru, a doua brigadă are nevoie de 75 % din acest timp. După ce prima brigadă a muncit 5 zile, i s-a alăturat a doua brigadă și brigăzile au terminat lucrul împreună. Câte zile brigăzile au muncit împreună?

12.44. În timpul unei călătorii automobilul a consumat 10 % din benzina din rezervor, iar în timpul celei de- a doua călătorii – 25 % din benzina rămasă. După călătorii în rezervor au rămas cu 13 l de benzină mai puțin, decât au fost până la călătorii. Câți litri de benzină au fost în rezervor înainte de prima călătorie?

NE PREGĂTIM DE ÎNSUȘIREA TEMEI NOI

12.45. Este oare perechea de numere (2; –3) soluție a ecuației:

1) $4x-3y=17$; 2) $x^2+5=y^2$; 3) $xy=6$?

12.46. Graficul ecuației $5x-y=2$ trece prin punctul A (4; b). Cu ce este egal b?

12.47. Construiți graficul funcției:

1) $4x+y=3$;
2) $2x-3y=6$;
3) $xy=-8$;
4) $(x-2)^2+y^2=0$;
5) $(x-2)^2+(y+1)^2=9$;
6) $x^2+y^2=4$;
7) $x^2+2x+y^2-6y+10=0$;
8) $(x-3)(y-x)=0$;
9) $\frac{y-x}{y^2-1}=0$.

12.48. Care din perechile (–2; 1), (2; –1), (6; 4) este soluție a sistemului de ecuații $\begin{cases}3x-8y=-14,\\4x+y=28?\end{cases}$

12.49. Rezolvați prin metoda grafică sistemul de inegalități:

1) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ y - x = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = -5, \\ 4x - y = -5. \end{cases}$

12.50. Rezolvați sistemul de inegalități:

1) $\begin{cases} 2x + y = 10, \\ 4x - 7y = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - 9y = 11, \\ 7x + 9y = 25; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4y - x = 11, \\ 5x - 2y = 17; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 12x + 7y = -26. \end{cases}$

13. Sisteme de ecuații cu două variabile

În clasa 7-a ați făcut cunoștință deja cu metoda grafică de rezolvare a sistemelor de ecuații. Amintim, că sensul metodei constă în căutarea punctelor comune ale graficelor ecuațiilor, ce formează sistemul. La lecțiile de geometrie ați aflat, că graficul ecuației $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, în care $R > 0$, este o circumferință cu raza R și centrul $(a; b)$. De asemenea ați învățat să construiți graficul funcției pătrate. Toate acestea sporesc posibilitățile de aplicare a metodei grafice la rezolvarea sistemelor de ecuații.

EXEMPLUL 1 Rezolvați prin metoda grafică sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

Rezolvare. Prima ecuație a sistemului este echivalentă cu ecuația: $y = x^2 - 4x + 3$. Graficul ecuației este parabola, reprezentată pe figura 13.1.

Graficul celei de-a doua ecuații este dreapta, care intersectează parabola construită în două puncte: (1; 0) și (4; 3) (priviți fig. 13.1).

Evident, metoda grafică nu garantează, că rezultatul obținut este exact. De aceea soluțiile obținute necesită verificare. Verificarea confirmă, că perechile de numere (1; 0) și (4; 3) într-adevăr sunt soluțiile sistemului dat.

Răspuns: (1; 0), (4; 3). ◄

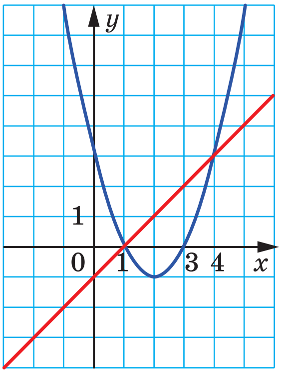


Fig. 13.1

Atragem atenția, că sistemul dat de ecuații a fost “comod” pentru metoda grafică: coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor s-au dovedit a fi numere întregi. E clar, că așa o situație nu este permanentă. De aceea, metoda grafică este eficientă, dacă se calculă numărul de soluții sau valorile aproximative ale soluțiilor.

Sistemul de ecuații studiat poate fi rezolvat și fără aplicarea graficelor ecuațiilor. Pregătindu-vă de însușirea acestei teme, ați repetat **metoda substituției** de rezolvare a sistemelor de ecuații. Această metodă este eficientă și la rezolvarea ecuațiilor mai complicate, în care doar o ecuație este lineară și pentru sistemele, în care ecuațiile lineare în genere lipsesc.

Rezolvăm sistemul de ecuații $\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0 \end{cases}$ prin metoda substituției.

Din a doua ecuație a sistemului exprimăm y prin x:

$$y = x - 1.$$

Substituim în prima ecuație variabila y cu expresia $x - 1$:

$$x^2 - 4x - (x - 1) + 3 = 0.$$

Am obținut o ecuație cu o singură variabilă. Simplificând-o, obținem o ecuație pătrată $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Rezultă $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Valorile lui y, care corespund valorilor obținute ale lui x, le calculăm din ecuația $y = x - 1$. Obținem:

$$y_1 = 1 - 1 = 0,\ y_2 = 4 - 1 = 3.$$

În așa fel, ne-am convins, că perechile de numere (1; 0) și (4; 3) într-adevăr sunt soluțiile sistemului dat.

EXEMPLUL 2 Determinați numărul de soluții a sistemului de ecuații

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

Rezolvare. Graficul primei ecuații este o circumferință cu raza 3 și centrul (0; 0).

A doua ecuație este echivalentă cu ecuația: $y = \dfrac{3,5}{x}$. Graficul acestei ecuații este o hiperbolă.

Reprezentăm circumferința și hiperbola pe acelaș plan de coordonate (fig. 13.2). Vedem, că graficele se intersectează în patru puncte. Deci, sistemul dat are patru soluții. ◄

Figura 13.2 de asmenea permite calcularea aproximativă a valorilor soluțiilor sistemului dat.

Valorile soluțiilor sistemului pot fi calculate fără a se adresa la metoda grafică.

Pregătindu-vă de însușirea temei actuale, ați repetat **metoda adunării** de rezolvare a sistemelor de ecuații lineare. Vom arăta, cum “funcționează” această metodă la rezolvarea sistememlor mai complicate.

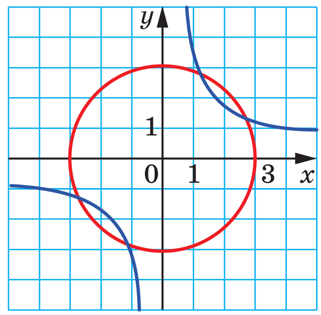


Fig. 13.2

Înmulțim a doua ecuație a sistemului studiat cu 2. Obținem: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 2xy = 7. \end{cases}$

Adunăm aparte părțile stângi și părțile drepte ale ambelor ecuații. Obținem: $x^2 + y^2 + 2xy = 16$. De aici $(x + y)^2 = 16$; $x + y = 4$ sau $x + y = -4$.

Evident, pentru rezolvarea sistemului inițial este suficient să fie rezolvate două sisteme simple.

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 2xy = 7. \end{cases}$ De aici $\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x(4 - x) = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x^2 - 8x + 7 = 0. \end{cases}$

Rezolvând a doua ecuație a acestui sistem, obținem:

$x_1 = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}$.

Atunci $y_1 = \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}$, $y_2 = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}$.

2) $\begin{cases} x + y = -4, \\ 2xy = 7. \end{cases}$ De aici $\begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x(-4 - x) = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x^2 + 8x + 7 = 0. \end{cases}$

Rezolvând a doua ecuație a acestui sistem, obținem:

$x_3 = \dfrac{-4 - \sqrt{2}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-4 + \sqrt{2}}{2}$.

Atunci $y_3 = \dfrac{-4 + \sqrt{2}}{2}$, $y_4 = \dfrac{-4 - \sqrt{2}}{2}$.

Răspuns: $\left(\dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}; \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}; \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-4 - \sqrt{2}}{2}; \dfrac{-4 + \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-4 + \sqrt{2}}{2}; \dfrac{-4 - \sqrt{2}}{2}\right)$. ◀

Evident, că calcularea prin metoda grafică a soluțiilor de acest tip este imposibil.

În clasa 8-a ați făcut cunoștință cu **metoda de înlocuire a variabilei** de rezolvare a ecuațiilor. Această metodă este aplicată la rezolvarea unei serii de sisteme de ecuații.

EXEMPLUL 3 Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$

Rezolvare. Fie $\dfrac{x+y}{x-y} = t.$ Atunci $\dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{1}{t}.$

Prima ecuație a sistemului poate fi notată în următorul fel:

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}.$$

De aici $2t^2 - 5t + 2 = 0$; $t_1 = 2,\ t_2 = \dfrac{1}{2}.$

Pentru rezolvarea sistemului inițial este suficient să fie rezolvate două sisteme simple.

1) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = 2, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$ De aici $\begin{cases} x + y = 2x - 2y, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3y, \\ 10y^2 = 10. \end{cases}$

Din a doua ecuație obținem: $y_1 = 1$, $y_2 = -1$.

Atunci $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$ De aici $\begin{cases} 2x + 2y = x - y, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3y, \\ 10y^2 = 10. \end{cases}$

Din a doua ecuație obținem: $y_3 = 1$, $y_4 = -1$.

Atunci $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

Răspuns: (3; 1), (–3; –1), (–3; 1), (3; –1). ◀

EXEMPLUL 4 Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + 2y + xy = 8, \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 14. \end{cases}$

Rezolvare. Menținem, că sistemul dat va fi identic, dacă variabila x va fi înlocuită cu y, iar y cu x. În așa cazuri este eficientă exprimarea $x + y = u$, $xy = v$.

Reprezentăm sistemul în forma:

$$\begin{cases} 2(x + y) + xy = 8, \\ (x + y)^2 - 2xy + 3(x + y) = 14. \end{cases}$$

Îndeplinim înlocuirea menținută. Obținem sistemul:

$$\begin{cases} 2u + v = 8, \\ u^2 - 2v + 3u = 14. \end{cases}$$

Sistemul poate fi rezolvat prin metoda substituției (îndepliniți de sinestătător). Obținem:

$$\begin{cases} u = 3, \\ v = 2 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} u = -10, \\ v = 28. \end{cases}$$

Ne rămâne să rezolvăm două sisteme:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2 \end{cases} \text{ și } \begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 28. \end{cases}$$

Fiecare din sisteme poate fi rezolvată prin metoda substituției. Dar aici este rațional de folosit teorema, inversă teoremei lui Viete. Așa, pentru sistemul $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2 \end{cases}$ se poate considera, că x și y – sânt rădăcinile ecuației pătrate $t^2 - 3t + 2 = 0$. De aici $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. În așa fel, perechile de numere (1; 2) și (2; 1) sunt soluțiile acestui sistem.

Folosind teorema, inversă teoremei lui Viete, ne convingem ușor (înfăptuiți de sinestătător), că sistemul $\begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 28 \end{cases}$ nu are soluții.

Răspuns: (1; 2), (2; 1). ◀

?

1. Ce metode de rezolvare a sistemelor de ecuații cunoașteți?
2. Explicați sensul metodei grafice de rezolvare a sistemelor de ecuații.
3. În ce cazuri metoda grafică este cea mai eficientă?

EXERCIȚII

13.1.° Rezolvați prin metoda grafică sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y + x^2 = 3, \\ y = x - 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12. \end{cases}$

13.2.° Rezolvați prin metoda grafică sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} y = x + 2, \\ xy = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ 2x + y = -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

13.3.° Rezolvați prin metoda substituției sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} y = x + 3, \\ x^2 - 2y = 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x = 2, \\ x^2 - 2xy = 3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = 15, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 4y = 2, \\ xy + 2y = 8; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

13.4.° Rezolvați prin metoda substituției sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 28; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - 2x^2 = 2, \\ 3x + y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 - x = 14, \\ x - y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 8, \\ x + y = 6. \end{cases}$

13.5.• Determinați prin metoda grafică numărul de soluții ale sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ y = x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = -6, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 2 - x^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ y = 6 - x^2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - 4x + y = -1, \\ xy = 4. \end{cases}$

13.6.• Determinați prin metoda grafică numărul de soluții ale sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} y = (x - 5)^2, \\ xy = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x^2 = 1, \\ x^2 + y = 4x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - x = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ xy = 1. \end{cases}$

13.7.• Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} 3x + 4y = 24, \\ xy = 12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 5, \\ (x - 3)(y + 5) = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y + 2x = 0, \\ x^2 + y^2 - 6y = 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4y - 3x = 4, \\ 5x^2 + 16y = 60; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 19, \\ x - y = 7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 - x - 2y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$

13.8.• Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63, \\ y - x = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (x - 1)(y - 2) = 2, \\ x + y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x - 2y = 3, \\ 3x^2 - 8y = -5. \end{cases}$

13.9.• Fără a construi graficele, aflați coordonatele punctelor de intersecție:

1) ale dreptei $3x - y = 1$ și ale parabolei $y = 3x^2 + 8x - 3$;
2) ale dreptei $2x - y = 2$ și ale hiperbolei $y = \frac{4}{x}$;
3) ale dreptei $x + y = 1$ și ale circumferinței $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 16$;
4) ale perabolelor $y = x^2 - 4x + 7$ și $y = 3 + 4x - 2x^2$.

13.10.• Demonstrați, că dreapta $y - x = 3$ este tangentă la circumferința $(x + 5)^2 + + y^2 = 2$, și aflați coordonatele punctului de tangență.

13.11.• Demonstrați, că:

1) drepta $y = -2x - 4$ și parabola $y = 6x^2 - 7x - 2$ nu se intersectează;
2) parabola $y = 4x^2 - 3x + 6$ și dreapta $y = x + 5$ au un punct comun, aflați coordonatele acestui punct;
3) parabolele $y = 4x^2 - 3x - 24$ și $y = 2x^2 - 5x$ au două puncte comune, aflați coordonatele acestor puncte.

13.12.• Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 1, \\ x + 5y = 3. \end{cases}$

13.13.• Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{4}{5}, \\ 3x + y = 8. \end{cases}$

13.14.• Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ xy(x + y) = 20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = \frac{21}{10}, \\ x + y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{6y}{x} = 5, \\ x^2 + 4xy - 3y^2 = 18; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{y}{x} + xy = -10, \\ \frac{5y}{x} - 2xy = 13; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2y^2 + xy = 6, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3(x + y)^2 + 2(x - 2y)^2 = 5, \\ 2(x - 2y) - x - y = 1. \end{cases}$

13.15.• Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2{,}5, \\ 2x-3y=3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{3}, \\ x^2-y^2=72; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-2y}=\dfrac{15}{4}, \\ 4x+5y=3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4(x-y)^2+7(x-y)=15, \\ 2x+5y=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=4, \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x}=10; \end{cases}$

6) $\begin{cases} (x-y)^2+2x=35+2y, \\ (x+y)^2+2y=3-2x. \end{cases}$

13.16.•• Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x+y=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-y^2=7, \\ xy=12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3-y^3=28, \\ x^2+xy+y^2=7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x^2-2y^2=19, \\ xy=-6. \end{cases}$

13.17.•• Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} x^3-y^3=56, \\ x-y=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x^2-y^2=-4, \\ xy=3. \end{cases}$

13.18.•• Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} 3y-2xy=2, \\ x+2xy=5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy+y=30, \\ xy+x=28; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x^2-5xy+3x-2y=10, \\ 5xy-2x^2+7x-8y=10. \end{cases}$

13.19.•• Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} x+y-xy=1, \\ x+y+xy=9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy-x=24, \\ xy-y=25; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3xy+2x=-4, \\ 3xy+y=-8; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x^2+y^2=66, \\ 2x^2-y^2=34. \end{cases}$

13.20.•• Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} x^2-12xy+36y^2=36, \\ x+6y=8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2-2xy=32, \\ x^2+6xy+9y^2=100; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 9x^2+y^2=10, \\ xy=-1. \end{cases}$

13.21.•• Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} x^2 + 10xy + 25y^2 = 49, \\ x - 5y = -3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 4x + 2y, \\ x + 2y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 25y^2 = 104, \\ xy = -4. \end{cases}$

13.22.•• Pentru ce valori ale lui a sistemul de ecuații $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x - y = a \end{cases}$

1) are o singură soluție; 3) nu are soluții?
2) are două soluții;

13.23.•• Pentru ce valori ale lui k sistemul de ecuații $\begin{cases} y - x^2 = 4, \\ y = kx + 3 \end{cases}$

1) are o singură soluție; 3) nu are soluții?
2) are două soluții;

13.24.* Câte soluții are sistemul de ecuații în dependență de valoarea lui a.

1) $\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ |x| = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x = 1, \\ xy = a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a? \end{cases}$

13.25.* Câte soluții are sistemul de ecuații în dependență de valoarea lui a:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |y| = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a - |x|; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = 4? \end{cases}$

13.26.* Sunt date două ecuații $ax^2 + x + 1 = 0$ și $x^2 + ax + 1 = 0$. Afloați toate valorile lui a, pentru care aceste ecuații au cel puțin o rădăcină comună.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

13.27. Demonstrați, că valoarea expresiei $25^{10} - 5^{17}$ se divide la 31.

13.28. Simplificați expresia $\dfrac{5a+5}{a^2-a} : \left(\dfrac{a+3}{a^2-1} - \dfrac{1}{a^2+a}\right)$.

13.29. Rezolvați sistemul de inegalități:

$$\begin{cases} 2(x-3) \geqslant -3(x+2), \\ \dfrac{7x}{3} \leqslant 1 - \dfrac{x}{2}. \end{cases}$$

13.30. Se știe că x_1 și x_2 – sunt rădăcinile ecuației $x^2 + 6x - 2 = 0$. Aflați valoarea expresiei $x_1^2 + x_2^2$.

13.31. Reduceți fracția:

1) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{7\sqrt{3}-21}{14\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$.

NE PREGĂTIM DE ÎNSUȘIREA TEMEI NOI

13.32. (*Din tractatul antic chinez "Nouă departamente ale artei calculului"*) 5 tauri și 2 berbeci au un preț de 11 taeley, iar 2 tauri și 8 berbeci – 8 taeley. Cât costă aparte fiecare taur și berbec?

13.33. *(Problema lui Leonardo de Pizza (Fibonacci))* Un om îi spune altuia: "Dă-mi 7 dinari și eu voi deveni de 5 ori mai bogat decât tine". Al doilea răspunde : "Dă-mi 5 dinari și eu voi deveni de 7 ori mai bogat decât tine". Câți bani are fiecare?

13.34. Din satul A spre satul B, între care este distanța de 140 km, s-a pornit un motociclist. Cu 20 min mai devreme în întâmpinare din satul B spre satul A a pornit o ciclistă, care s-a întâlnit cu motociclistul peste 2 ore după propriul start. Aflați viteza fiecăruia din ei, dacă se stie, că motociclistul în 2 ore parcurge o distanță, cu 104 km mai mare, decât ciclista în 4 ore.

ÎNSUȘIM ACȚIUNI NESTANDARTE

13.35. Există oare 100 numere naturale, că orice sumă a câtorva din ele nu este pătratul unui număr natural?

Prima olimpiadă a tinerilor matematicieni din Ucraina

Sperăm, că problema 13.26 v-a fost pe plac, și că ați simțit bucuria succesului, rezolvând-o. Această problemă merită atenție, deoarece în anul 1961 ea a fost propusă participanților primei olimpiade a tinerilor matematicieni din Ucraina.

În genere, olimpiadele de matamatică în Ucraina au o tradiție îndelungată. Prima olimpiadă orășenească a avut loc în anul 1935 la Kiev. De atunci s-au scurs 80 ani, și în acest timp olimpiadele de matematică au devenit pentru mulți școlari talentați primul pas pe calea creației științifice. Astăzi așa nume, ca O. V. Pogorelov, C. G. Krein, M. O. Krasniseliskiy, B. G. Grinfeld, sunt cunoscute în toată lumea științifică. Ei toți în ani diferiți au fost învingători ai olimpiadelor de matematică din Ucraina.

Dorim să menținem cu satisfacție, că și în prezent olimpiadele de matematică în Ucraina sunt foarte populare. Zeci de mii de școlari din țară participă la diferite etape ale acestei competiții. La organizarea și petrecerea olimpiadei sunt angajați cei mai buni învățați, metodiști, profesori. Anume datorită entusiasmului și profesionalismului lor echipa Ucrainei reprezintă cu demnitate țara noastră la olimpiadele internaționale de matematică.

Vă sfătuim și pe voi, dragi copii, să participați la olimpiadele de matematică. Mai jos vor fi prezentate câteva probleme de la prima olimpiadă a tinerilor matematicieni din Ucraina. Încercați-vă puterile.

1. Ecuațiile $x^2 + ax + b = 0$ și $x^2 + px + q = 0$ au o rădăcină comună. Alcătuiți ecuația pătrată, rădăcinile căreia sunt celelalte rădăcini ale ecuațiilor date.

2. Rezolvați ecuația $\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} = 1.$

3. Distanța dintre A și B – 999 km. De-a lungul traseului sunt montați stâlpi de kilometraj, pe care distanța până la A și pănâ la B sunt notate în următorul fel:

0	999		1	998		2	997	...	999	0

Pe câți din acești stâlpi inscripțiile conțin doar două cifre diferite?

Alexei Vasilievici Pogorelov (1919–2002)

Selim Grigorovici Kreim (1917–1999)

Mark Alexandrovici Krsnoselskii (1920–1997)

Vladimir Gherșonovici Drinfield (n. 1954)

14. Sistemul de două ecuații cu două variabile ca model matematic al problemei de aplicație

Probabil, astăzi nu există un așa domeniu al științei, în care să nu fie aplicate realizările matematicii. Fizicienii și chimiștii, astronomii și biologii, geografii și economiștii, ba chiar lingviștii și istoricii se folosesc de aparatul matematic.

În ce constă universalizmul "instrumentului matematic".

"Cheia rezolvării pentru multe probleme științifice – este traducerea lor reușită în lumba matematicii". Așa răspuns la întrebare a dat unul din fondatorii și primul director al Institutului de matematică al Academiei de științe al Ucrainei academicianul D. O. Grave.

Dmitro Olexandrovici Grave

(1863 – 1939)

Într-adevăr, formulările problemelor din diferite domenii de cunoștințe conțin noțiuni nematematice. Dacă un matematician participă la rezolvarea problemei, el în primul rând se va strărui să traducă problema în limba "natală" de matematică, adică în limba expresiilor, formulelor, graficelor etc. Rezultatul acestei traduceri este numit **model mathematic**, iar însăși problema – **problemă de aplicație**.

Termenul "model" (din latină *modulus* - exemplu) este întrebuințat destul de des: modelul de avion, modelul nucleului atomic, modelul sistemului Solar, modelul unui oarecare proces sau fenomen. Studiind proprietățile modelului unui obiect, în același timp studiem proprietățile obiectului.

Domeniul matematicii, ce se ocupă cu crearea și studierea modelelor matematice, se numește **modelare matematică**.

Vom studia câteva probleme, în care sistemele de ecuații de gradul doi sunt aplicate ca modele matematice de situații reale.

EXEMPLUL 1 Din două puncte, distanța dintre care este egală cu 18 km, concomitent una în întâmpinarea alteia, au pornit două turiste și s-au întâlnit peste 2 ore. Cu ce viteză s-a deplasat fiecare turistă, dacă toată distanța poate fi parcursă de prima turistă într-un timp cu 54 min mai mare, decât a doua?

Rezolvare. Fie că viteza primei turiste este egală cu x km/oră, iar viteza celeilalte – y km/oră, $x < y$. Până la întâlnire prima turistă a parcurs $2x$ km, a doua – $2y$ km. Împreună turistele au parcurs 18 km. Deci $2x + 2y = 18$.

Toată distanța dintre puncte prima turistă o poate parcurge în $\frac{18}{x}$ ore, a doua – în $\frac{18}{y}$ ore. Deoarece prima turistă pentru parcurgerea întregii distanțe are nevoia de un timp cu $54\,\text{min} = \frac{54}{60}\,\text{ore} = \frac{9}{10}$ ore mai mult, decât a doua turistă, atunci $\frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}$.

Obținem un sistem de ecuații:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 18, \\ \frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}. \end{cases}$$

Atunci $\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{2}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9 - y, \\ \frac{2}{9-y} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}. \end{cases}$

Rezolvând a doua ecuație a ultimului sistem, obținem: $y_1 = 5$, $y_2 = -36$. Rădăcina -36 este exclusă în condiția problemei. Rezultă, că $y = 5$, $x = 4$.

Răspuns: 4 km/oră, 5 km/oră. ◀

EXEMPLUL 2 Doi lucrători pot îndeplini împreună un oarecare lucru în 10 zile. Peste 6 zile de lucru colectiv un lucrător a fost transferat la altă activitate, iar al doilea a continuat lucrul recent. Peste 2 zile de lucru de sinestătător s-a constatat, că sunt îndeplinite $\frac{2}{3}$ din lucrul programat. În câte zile poate îndeplini tot lucrul fiecare din lucrători?

Rezolvare. Fie, că primul lucrător poate înfăptui tot lucrul în x zile, iar al doilea – în y zile. Într-o zi primul lucrător îndeplinește $\frac{1}{x}$ parte din lucru, iar în 10 zile – $\frac{10}{x}$ părți din lucru. Al doilea lucrător într-o zi îndeplinește $\frac{1}{y}$ parte din lucru, iar în 10 zile – $\frac{10}{y}$ părți din lucru. Deoarece în 10 zile de muncă comună lucrătorii înfăptuiesc tot lucrul, atunci $\frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1$.

Primul lucrător a muncit 6 zile și a îndeplinit $\frac{6}{x}$ părți din lucru, iar al doilea a muncit 8 zile și a îndeplinit $\frac{8}{y}$. Ca rezultat, au fost îndeplinite $\frac{2}{3}$ din lucru, reiese că $\frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3}$.

Obținem un sistem de ecuații

$$\begin{cases}\frac{10}{x}+\frac{10}{y}=1,\\ \frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3},\end{cases}$$

soluția căruia este $x = 15$, $y = 30$. În așa fel, primul lucrător poate îndeplini tot lucrul în timp de 15 zile, al doilea – în timp de 30 de zile.

Răspuns: 15 zile, 30 de zile. ◀

EXEMPLUL 3 În timpul împărțirii unui număr cu două cifre la produsul cifrelor sale se obține câtul nedeplin 5 și restul 2. Diferența dintre acest număr și un număr, obținut din el prin permutarea cifrelor, este egală cu 36. Aflați acest număr.

Rezolvare. Presupunem, că numărul căutat conține x zeci și y unități. Atunci numărul va egala cu $10x + y$. Deoarece la împărțirea numărului la numărul xy se obține câtul nedeplin 5 și restul 2, reiese că $10x + y = 5xy + 2$.

Numărul, obținut prin permutarea cifrelor este egal cu $10y + x$. Conform condiției $(10x + y) – (10y + x) = 36$.

Obținem sistemul de ecuații

$$\begin{cases}10x+y=5xy+2,\\ (10x+y)-(10y+x)=36,\end{cases}$$

soluții ale căruia sunt două perechi de numere: $x = 6$, $y = 2$ sau $x = 0{,}2$, $y = –3{,}8$. Încă a doua pereche nu satisface conținutului problemei.

În așa fel, numărul căutat este 62.

Răspuns: 62. ◀

?

1. Ce se numește model matematic al problemei?
2. Care problemă este numită problemă de aplicație?
3. Ce se numește modelare matematică?

EXERCIȚII

14.1.° Diferența a două numere naturale este egală cu 3, iar produsul lor este cu 87 mai mare decât suma. Aflați aceste numere.

14.2.° Diferența pătratelor a două numere naturale este egală cu 20, iar suma numărului mai mare și dublul celuilalt este egală cu 14. Aflați aceste numere.

14.3.° Un lot de pământ cu aria 2400 m^2 a fost îngrădit cu un gard cu lungimea de 220 m. Aflați lungimea și lățimea lotului.

14.4.° Perimetrul dreptunghiului este egal cu 32 cm, iar suma ariilor pătratelor, construite pe laturile vecine ale dreptunghiului, - 130 cm^2 . Aflați laturile dreptunghiului.

14.5.• Care număr cu două cifre este de 4 ori mai mare decât suma cifrelor sale și de 2 ori mai mare decât produsul lor?

14.6.• Dacă un oarecare număr cu două cifre este împărțit la suma cifrelor sale, se obține câtul nedeplin 7 și restul 6, iar dacă acest număr este împărțit la produsul cifrelor, se obține câtul nedeplin 5 și restul 2. Aflați acest număr.

14.7.• Numărul cu două cifre este de 7 ori mai mare decât suma cifrelor sale și cu 52 mai mare decât produsul cifrelor. Aflați acest număr.

14.8.• Diferența a două numere naturale este egală cu 12, iar suma numerelor, inverse cu ele, este egală cu $\frac{1}{8}$. Aflați aceste numere.

14.9.• Suma a două numere naturale este egală cu 15, iar diferența numerelor, inverse cu ele, este egală cu $\frac{1}{18}$. Aflați aceste numere.

14.10.• Ipotenuza triunghiului dreptunghic este egală cu 13 cm, iar aria lui – 30 cm^2 . Aflați catetele acestui triunghi.

14.11.• Perimetrul triunghiului dreptunghic este egal cu 40 cm, iar una din catete – cu 8 cm. Aflați a două catetă și ipotenuza triunghiului.

14.12.• Aria dreptunghiului este egală cu 180 cm^2 . Dacă una din laturi va fi micșorată cu 3 cm, iar a doua – cu 2 cm, aria dreptunghiului va fi egală cu 120 cm^2 . Aflați dimensiunile inițiale ale dretunghiului.

14.13.• Dacă lungimea dreptunghiului va fi micșorată cu 3 cm, iar lățimea va fi mărită cu 2 cm, aria dreptunghiului se va mări cu 6 cm^2 . Dacă lungimea dreptunghiului va fi micșorată cu 5 cm, iar lățimea va fi mărită cu 3 cm, aria dreptunghiului nu se va schimba. Aflați laturile acestui dreptunghi.

14.14.• Dintr-o foaie de metal cu formă dreptunghiulară a fost confecționată o cutie deschisă. Pentru aceasta, în colțurile foii au fost tăiate pătrate cu latura de 4 cm. Aflați lungimea și lățimea foii, dacă perimetrul ei este egal cu 60 cm, iar volumul cutiei – cu 160 cm^2.

14.15.• Doi motocicliști au pornit concomitent din orașele A și B unul în întâmpinarea altuia. Peste o oră ei s-au întâlnit și fără să se oprească, au continuat mișcarea cu aceeași viteză. Unul a ajuns în orașul A cu 35 min mai devreme, decât al doilea – în orașul B. Aflați viteza fiecărui motociclist, dacă distanța dintre orașe este egală cu 140 km.

14.16.• De la stațiunea M spre stațiunea N, distanța dintre care este egală cu 300 km, a pornit un tren de marfă. Cu 40 min mai târziu de la stațiunea N spre stațiunea M a pornit un tren rapid, care peste două ore s-a întâlnit cu trenul de marfă. Trenul de marfă parcurge distanța dintre stațiunile M și N cu 3 ore 20 min mai încet, decât trenul rapid. Aflați viteza fiecărui tren.

14.17.• Dintr-un oraș spre alt oraș, distanța dintre care este egală cu 240 km, concomitent au pornit un autobus și un automobil. Autobusul a ajuns la destinație cu o oră mai târziu decât automobilul. Aflați viteza automobilului și viteza autobusului, dacă în 2 ore autobusul parcurge o distanță cu 40 km mai mare, decât automobilul timp de o oră, iar vitezele lor nu depășesc viteza de 90 km/oră.

14.18.• Pe o pistă circulară cu lungimea de 800 m într-o direcție se deplasează doi patinori. Un patinor parcurge ciclul cu 24 sec mai repede ca al doilea. Aflați viteza fiecărui patinor.

14.19.• Două brigăzi, lucrânt împreună, pot îndeplini sarcina de producție în 8 zile. Dacă prima brigadă, lucrând de sinestătător, va îndeplini $\frac{1}{3}$ din sarcină, iar apoi va fi înlocuită cu a doua brigadă, sarcina va fi îndeplinită în 20 zile. În câte zile poate îndeplini sarcina de producere fiecare brigadă, muncind de sinestătător?

14.20.• Două brigăzi, lucrând împreună, pot descărca un tren de marfă în 6 ore. Prima brigadă a îndeplinit $\frac{3}{5}$ din tot lucrul, apoi a fost înlocuită de a doua brigadă, care a-și terminat descărcarea. Tot lucrul a fost efectuat în 12 ore. De cât timp are nevoie fiecare brigadă pentru a descărca autonom trenul?

14.21.• Dacă vor fi deschise concomitent două țevi, bazinul va fi complet umplut cu apă în timp de 12 ore. Dacă bazinul se va umplea doar prin prima țeavă timp de 5 ore, apoi doar prin a doua țeavă timp de 9 ore, bazinul se va umplea cu apă până la jumătate. În câte ore poate fi umplut cu apă bazinul prin fiecare țeavă?

14.22.• Doi tractoriști, lucrând împreună, pot ara un lan în 6 ore. Dacă primul tractorist va lucra singur 4 ore, iar apoi va fi înlocuit de al doilea tractorist, al doilea va termina arătura peste 9 ore. În cât timp, lucrănd autonom, poate ara lanul fiecare tractorist

14.23.• La conectarea consecutivă a doi conductori rezistența din circuitul electric este egală cu 150 Ohm, iar la conectarea paralelă – 36 Ohm. Aflați rezistența fiecărui conductor.

14.24.• La conectarea consecutivă a trei conductori de acelaș tip și a unui conductor de alt tip rezistența din circuitul electric este egal cu 10 Ohm. Dacă vor fi conectate paralel un conductor de primul tip și un conductor de al doilea tip, la tensiunea de 24 V intensitatea curentului din circuit va fi egală cu 10 A. Aflați rezistența fiecărui tip de conductor.

14.25.•• O barcă a parcurs pe râu distanța de la debarcaderul A până la debarcaderul B și înapoi în 6 ore. Aflați viteza apei, dacă 2 km în direcția cursului apei barca îi parcurge în acelaș timp ca și 1 km contra curentului apei, iar distanța dintre debarcaderele A și B este egală cu 16 km.

14.26.•• O pontonieră parcurge 48 km contra curentului apei râului și 30 km în direcția cursului apei în 3 ore, iar 15 km în direcția cursului – cu 1 oră mai repede, decât 36 km contra curentului apei. Aflați viteza proprie a pontonierei și viteza apei.

14.27.•• Din orașile A și B, distanța dintre care este egală cu 40 km, concomitent una în întâmpinarea alteia, au pornit Galina și Katerina. Galina a ajuns în orașil B peste 40 min, iar Katerina - în orașul A peste 1,5 ore după ce s-au întâlnit. Aflați viteza de deplasare a fiecărei fetițe.

14.28.•• Din același sat în aceiași direcție pe jos au pornit Petro și Vasile. Viteza lui Petro este egală cu 3 km/oră, iar a lui Vasile – 4 km/oră. Peste o oră și jumătate din acelaș sat s-a pornit pe bicicletă Irina, care l-a întrecut pe Vasile peste 15 min după ce l-a întrecut pe Petro. Aflați viteza Irinei.

14.29.•• Distanța dintre debarcaderele A și B este egală cu 28 km. Pornind de la debarcaderul A spre debarcaderul B, peste 2 ore după start pontoniera a întâlnit o plută, îndreptată de la debarcaderul B în direcția cursului apei cu două ore mai devreme de startul pontonierei. Aflați viteza apei și viteza proprie a pontonierei, dacă pontoniera parcurge distanța de la A până la B și înapoi în 4 ore 48 min.

14.30.•• Masa unui calup de metal este egală cu 336 g, iar masa calupului de alt metal – 320 g. Volumul primului calup este cu 10 cm³ mai mic decât volumul celui de-al doilea calup, iar densitatea primului – cu 2 g/cm³ mai mare decât decitatea celuilalt. Aflați densitatea fiecărui metal.

14.31.•• Modulul forței de echilibru a două forțe, aplicate asupra unui punct sub un unghi drept, este egală cu 25 N. Dacă modulul uneia din forțe va fi micșorat cu 8 N, iar modulul altei forțe va fi mărit cu 4 N, modulul forței de echilibru nu se va schimba. Aflați modulele acestor forțe.

14.32.•• Pe ambele laturi ale unui unghi drept în direcția vârfului unghiului se mișcă două corpuri. Primul corp se mișcă cu viteza de 12 m/min, iar al doilea – cu viteza de 16 m/min. Într-un oarecare moment de timp distanța dintre corpuri a fost egală cu 100 m. Cu 2 min mai târziu distanța dintre corpuri a devenit de 60 m. La ce distanță de vârful unghiului erau situate corpurile în primul moment fixat de timp?

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

14.33. Simplificați expresia:

1) $\frac{2}{a^2-3a}-\frac{1}{a^2+3a}-\frac{a+1}{a^2-9}$;

2) $\frac{3}{b-2}-\frac{3b-2}{b^2+2b+4}-\frac{b^2+16b+12}{b^3-8}$.

14.34. Înlăturați iraționalitatea din numitorul fracției:

1) $\frac{4a}{5\sqrt{a}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{b}-1}$; 3) $\frac{5}{\sqrt{6}-1}$; 4) $\frac{2}{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}}$.

14.35. Rezolvați inegalitatea:

1) $1{,}1(5x - 4) \leqslant 0{,}2(10x + 13)$;

2) $\frac{0{,}6 - 5y}{4} < \frac{0{,}5 - 5y}{6}$.

14.36. Aflați cea mai mare soluție întreagă a inegalității

$$(2x + 1)(x + 4) - 3x(x + 2) > 0.$$

14.37. Pentru care valori ale variabilei expresia arer sens

$$\sqrt{12 - 5x} + \sqrt{2x + 1}?$$

14.38. Aflați intervalul de descreștere al funcției:

1) $y = 2x^2 + 10x - 9$; 2) $y = 5x - 3x^2$.

14.39. Pe data de 14 decembrie 1840 la Paris o comisie de academicieni matematicieni s-a întrunit pentru a studia înzestrarea matematică a copilului Henri Mondieux, ce producea fenomenal calcule. Rezolvați una din problemele propuse lui Mondieux, pe care copilul a rezolvat-o oral: “Care două numere naturale trebuiesc luate, ca diferența pătratelor lor să fie egală cu 133?”

INSĂRCINAREA №3 "VERIFICAȚI-VĂ CUNOȘTINȚELE" ÎN FORMĂ DE TESTE

1. Pentru ce valori ale lui x este corectă inegalitatea $x^2>4$?
A) $x>2$; C) $x<-2$ sau $x>2$;
B) $x>2$ sau $x>-2$; D) $-2<x<2$.

2. Care este mulțimea de soluții ale inegalității $x^2+8x-9\geqslant 0$?
A) $(-\infty; -9)\cup(1; +\infty)$; C) $(-\infty; -1)\cup(9; +\infty)$;
B) $(-\times; -9]\cup[1; +\infty)$; D) $(-\infty; -1]\cup[9; +\infty)$.

3. Căte soluții întregi ale inegalitate $3x^2+5x-8<0$?
A) 3; B) 4; C) 5; D) 6.

4. Care din inegalitățile date este corectă pentru toate valorile reale ale variabilei?
A) $x^2-14x+49>0$; C) $x^2-3x+4>0$;
B) $-3x^2+x+2\leqslant 0$; D) $-x^2+7x-10<0$.

5. Care este domeniul de definiție al funcției $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{8x-4x^2}}$?
A) $(-\infty; 0]\cup[2; +\infty)$; C) $[0; 2]$;
B) $(-\infty; 0)\cup(2; +\infty)$; D) $(0; 2)$.

6. Arătați inegalitatea, ce nu are soluții.
A) $x^2-6x+10<0$; C) $-3x^2+8x+3<0$;
B) $-5x^2+3x+2>0$; D) $-x^2-10x>0$.

7. Perechile de numere $(x_1; y_1)$ și $(x_2; y_2)$ sunt soluții ale sistemului de ecuații $\begin{cases} y-x=2,\\ xy-y=10.\end{cases}$ Cu ce este egală valoarea expresiei $x_1y_1+x_2y_2$?
A) 23; B) 7; C) 35; D) –26.

8. Care figuri sunt graficele sistemului de ecuații $\begin{cases} x^2+y^2=5,\\ xy=-3?\end{cases}$
A) O dreaptă și o parabolă; C) O circumferință și o hiperbolă;
B) O circumferință și o parabolă; D) O parabolă și o hiperbolă.

9. Câte soluții are sistemul de ecuații $\begin{cases} x^2-y=4,\\ x+y=1?\end{cases}$
A) Nici o soluție; C) Două soluții;
B) O singură soluție; D) Patru soluții.

10. Care este cea mai mare valoare a expresiei $x + y$, dacă perechea de numere $(x; y)$ este soluția sistemului de ecuații $\begin{cases} x - y = 5, \\ x^2 + 2xy - y^2 = -7? \end{cases}$

A) 1; B) 6; C) 0; D) –5.

11. Perechea de numere $(a; b)$ este soluția sistemului de ecuații $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 4, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y} = 9. \end{cases}$

Aflați valoarea expresiei $a - b$.

A) 5; B) 1; C) $\dfrac{1}{6}$; D) $\dfrac{5}{6}$.

12. Perechile de numere $(x_1; y_1)$ și $(x_2; y_2)$ sunt soluțiile sistemului de ecuații $\begin{cases} 2x - xy = 5, \\ y + xy = 6. \end{cases}$ Aflați valoarea expresiei $| x_1y_1 - x_2y_2 |$.

A) 1; B) 11; C) 70; D) 10.

13. Perimetrul dreptunghiului este egal cu 34 cm, iar diagonala lui – cu 13 cm. Fie, că laturile dreptunghiului sunt egale cu x cm și y cm. Care din sistemele date de ecuații este modelul matematic al situației, descrise în condiție?

A) $\begin{cases} x + y = 34, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$ C) $\begin{cases} x + y = 34, \\ x^2 + y^2 = 169; \end{cases}$

B) $\begin{cases} 2(x + y) = 34, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$ D) $\begin{cases} 2(x + y) = 34, \\ x^2 + y^2 = 169. \end{cases}$

14. Distanța dintre două orașe, care este egală cu 120 km, este parcursă de automobil cu 30 min mai repede decât de camion. Se știe , că camionul în 2 ore parcurge o distanță cu 40 km mai mare, decât distanța, parcursă de automobil într-o oră.

Fie, că viteza camionului este egală cu x km/oră, iar a automobilului – cu y km/oră. Care din sistemele date de ecuații este modelul matematic al situației, descrise în condiție?

A) $\begin{cases} \dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{y} = 30, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$ C) $\begin{cases} \dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{y} = \dfrac{1}{2}, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$

B) $\begin{cases} \dfrac{120}{y} - \dfrac{120}{x} = 30, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$ D) $\begin{cases} \dfrac{120}{y} - \dfrac{120}{x} = \dfrac{1}{2}, \\ 2x - y = 40. \end{cases}$

15. Două lucrătoare pot culegerea la calculator a textului manualului de algebră în 8 zile. Dacă prima lucrătoare va culegea $\frac{2}{3}$ din text, iar apoi a doua lucrătoare va termina culegerea, întregul text al manualului va fi cules în 16 zile.
Fie, că prima lucrătoare poate culege textul în x zile, a doua – în y zile. Care din sistemele date de ecuații este modelul matematic al situației, descrise în condiție??

A) $\begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 16; \end{cases}$

B) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{16}; \end{cases}$

C) $\begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 16; \end{cases}$

D) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 16. \end{cases}$

16. Pentru ce valori ale lui b ecuația $3x^2 - bx + 3 = 0$ nu are rădăcini?

A) $-6 < b < 6$;
B) $b < 6$;
C) $b > 6$;
D) $b < -6$ sau $b > 6$.

17. Pentru ce valoare a lui a sistemul de ecuații $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = a \end{cases}$ are o singură soluție?

A) $a = 5$;
B) $a = 5\sqrt{2}$;
C) $a = -5$ sau $a = 5$;
D) $a = -5\sqrt{2}$ sau $a = 5\sqrt{2}$.

18. Pentru ce valori ale lui a inegalitatea $ax^2 - 2x + a < 0$ nu are soluții?

A) $a < -1$ sau $a > 1$;
B) $a \geqslant 1$;
C) $-1 < a < 1$;
D) nu are soluții.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 2

Funcția

Fie X – mulțimea de valori a unei variabile independente, Y – mulțimea de valori a variabilei dependente. Funcția - este regula, prin intermediul căreia pentru fiecare valoare a variabilei independente din mulțimea X poate fi aflată valoarea unică a variabilei dependente din mulțimea Y.

Zeroul funcției

Valoarea argumentului, în care valoarea funcției este egală cu zero, este numită zerou al funcției.

Intercalul de semn constant al funcției

Intervalul, pe care funcția are valori de același semn, se numește interval de semn constant al funcției.

Creșterea și descreșterea funcției

Funcția este numită crescătoare pe un oarecare interval, dacă pentru orice două valori ale argumentului de pe acest interval, valori mai mari a argumentului îi corespunde valoarea mai mare a funcției.
Funcția este numită descrescătoare pe un oarecare interval, dacă pentru orice două valori ale argumentului de pe acest interval, valorii mai mari a argumentului îi corespunde valoarea mai mică a funcției.

Construirea graficului funcției $y = kf(x)$

Graficul funcției $y = kf(x)$ poate fi obținut din graficul funcției $y = f(x)$ în urma extinderii de k ori de la axa absciselor, dacă $k > 1$, sau în rezultatul comprimării de $\frac{1}{k}$ ori spre axa absciselor, dacă $0 < k < 1$.

Construirea graficului funcției $y = f(x) + b$

Graficul funcției $y = f(x) + b$ poate fi obținut în urma translației graficul funcției $y = f(x)$ de-a lungul axei ordonatelor cu b unități în sus, dacă $b > 0$, sau cu $-b$ unități în jos, dacă $b < 0$.

Construirea graficului funcției $y = f\,(x + a)$

Graficul funcției $y = f\,(x + a)$ poate fi obținut în urma translației graficul funcției $y = f\,(x)$ de-a lungul axei absciselor cu a unități spre stânga, dacă $a > 0$, sau cu $-a$ unități spre dreapta, dacă $a < 0$.

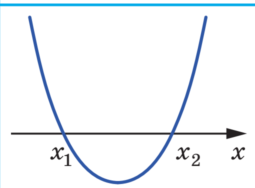
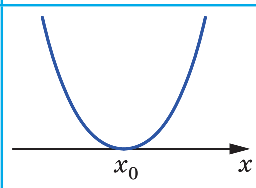
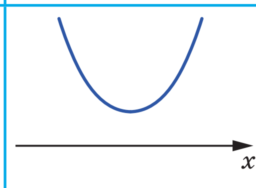
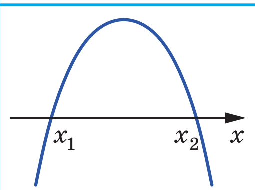
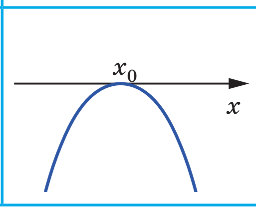
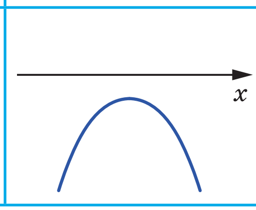
Funcția pătrată

Funcția, ce poate fi reprezentată prin formula $y = ax^2 + bx + c$, în care x – variabila independentă, a, b și c – oarecare numere, dintre care $a \neq 0$, se numește funcție pătrată.

Inegalități pătrate

Inegalitățile de forma $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $\boldsymbol{ax^2 + bx + c \geqslant 0}$, $\boldsymbol{ax^2 + bx + c \leqslant 0}$, în care x – variabila, a, b și c – oarecare numere, din care $a \neq 0$, se numesc inegalități pătrate.

Plasarea schematică a parabolei $y = ax^2 + bx + c$ în referință cu axa absciselor

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

§ 3 ȘIRURI NUMERICE

- Veți cunoaște așa noțiuni noi, cum ar fi șirul numeric, termenul de rangul n al șirului, progresiile aritmetice și geometrice, șiruri finite și infinite; veți afla, prin ce metode pot fi definite șirurile.
- Veți învăța a calcula termenii progresiei, a calcula suma primilor n termeni ai progresiei.

15. Șiruri numerice

Deseori în viața de zi cu zi întâlnim obiecte, cu care e mai ușor a avea de-a face, dacă aceste obiecte sânt apriori numerotate. De exemplu numere de ordine au lunile și cvartalele anului, zilele săptămânii, intrările și locuințele blocului locativ, vagoanele trenului, și chiar fiecare elev din clasa voastră are număr de ordine în catalog.

Obiectele, numerotate consecutiv cu numere naturale 1, 2, 3, ..., n, ..., formează **șiruri**.

Astfel, poate fi vorba despre sirul de pagini din carte, de litere din cuvânt, de etaje la clădire etc.

Obiectele, ce formează șirul, se numesc **termeni ai șirului**. Fiecare termen are propriul număr. De exemplu, ianuarie - este **primul termen** al șirului de luni ale anului, numărul 3 – **al doilea termen** în șirul de numere prime. În genere, dacă termenul șirului are numărul n, termenul este numit **termen de rangul *n*** al șirului.

Dacă termenii șirului sunt numere, un astfel de șir este numit șir **numeric**.

Vom da exemple de șiruri numerice.

1, 2, 3, 4, 5, ... – șirul de numere naturale;

2, 4, 6, 8, 10, ... – șirul de numere pare;

0,3; 0,33; 0,333; ... – șirul de aproximații ale fracției $\frac{1}{3}$;

19, 38, 57, 76, 95 – șirul de numere cu numere de două cifre dividente la 19;

–1, –2, –3, –4, –5, ... – șirul de numere întregi negative.

Mai departe vor fi studiate doar șiruri numerice.

Șirurile pot fi **finite** și **infinite**. De exemplu, șirul de numere naturale pare – este șir infinit, iar șirul de numere cu două cifre, divizibile la 19, – este șir finit.

Pentru notarea termenilor șirului sunt folosite litere cu rang:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

Rangul determină numărul de ordine al termenului șirului. Pentru notarea a însăși șirului este folosită notația (a_n). De exemplu, dacă (p_n) – este șirul numerelor simple, atunci $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ etc.

Șirul este considerat definit, dacă orice termen poate fi determinat de rangul său.

Vom cunoaște principalele metode de definiție ale șirurilor.

Vom studia un șir, în care primul termen este egal cu 1, iar fiecare următor termen este cu 3 mai mare decât precedentul. Această metodă de definiție a șirului este numită definiție **prin descriere**. Metoda poate fi ilustrată cu ajutorul notației cu trei puncte, fiind scrise primii câțiva termeni în ordine de creștere a rangurilor:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...$$

Această notație poate fi aplicată, dacă este clar, ce fel de numere trebuiesc scrise în loc de trei puncte.

De exemplu, în șirul dat e clar, că după numărul 19 va fi scris numărul 22.

Dacă șirul e finit, el poate fi definit prin tabelă. De exemplu, în tabela dată e reprezentat șirul de cuburi al numerelor naturale cu o singură cifră:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Șirurile pot fi definite prin intermediul formulelor. De exemplu, egalitatea $x_n = 2^n$, în care variabila n primește toate valorile naturale, definește șirul (x_n) de puteri naturale ale numărului 2:

$$2, 4, 8, 16, 32, ...$$

În asemenea cazuri se spune, că șirul e definit prin **formula termenului de rangul *n* al șirului**.

Analizăm câteva exemple.

Formula $a_n = 2n - 1$ definește șirul de numere naturale impare:

$$1, 3, 5, 7, 9, ...$$

Formula $y_n = (-1)^n$ definește șirul (y_n), în care toți termenii cu ranguri impare sunt egali cu -1, iar termenii cu ranguri pare sunt egali cu 1:

$$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots .$$

Formula $c_n = 7$ definește șirul (c_n), în care toți termenii sunt egali cu numărul 7:

$$7, 7, 7, 7, 7, \ldots .$$

Metodele prezentate de definire ale șirurilor ne permit să observăm relația dintre noțiunea de "funcție" și "șir".

Studiem funcția $y = f(x)$, domeniu de definiție al căreia este mulțimea numerelor naturale sau mulțimea primelor n numere naturale. Atunci funcția f definește un șir infinit $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$ sau un șir finit $f(1), f(2), \ldots, f(n)$.

De exemplu, dacă funcția f, domeniul de definiție al căreia este mulțimea numerelor naturale, este definită prin formula $f(x) = x^2$, această funcție va defini șirul de pătrate ale numerelor naturale:

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots .$$

Deseori șirul este definit printr-o regulă, care permite calcularea următorului termen, dacă este cunoscut precedentul.

Analizăm șirul (a_n), în care primul termen este egal cu 1, iar fiecare termen următor este de 3 ori mai mare, decât termenul precedent. Obținem:

$$1, 3, 9, 27, 81, \ldots .$$

Acest șir poate fi de asemenea definit prin condițiile:

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n.$$

Aceste egalități arată primul termen al șirului și regula, aplicarea căreia permite calcularea termenului următor pe baza termenului curent:

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 3a_1 = 3,$$
$$a_3 = 3a_2 = 9,$$
$$a_4 = 3a_3 = 27,$$

etc.

Formula, care exprimă termenul succesiv al șirului prin unul sau câțiva termeni precedenți, este numită **formulă recurentă** (din latină, *recurro* – a se întoarce). În exemplul demonstrat aceasta este formula $a_{n+1} = 3a_n$. Condițiile, care determină primul sau primii câțiva termeni, sânt numite **condiții inițiale**. În exemplul analizat condiția inițială – este egalitatea $a_1 = 1$.

Metoda de definire a șirului cu ajutorul condițiilor inițiale și a formulei recurente este numită **metodă recurentă** de definire a șirului.

În metoda recurentă de definire a șirului primul sau primii câțiva termeni sunt determinați, iar ceilalți termeni sunt calculați consecutiv. Din acest punct de vedere metoda de definire a șirului prin formula termenului de rangul n pare mai comodă: cu ajutorul ei poate fi direct calculat orice termen al șirului, fiind cunoscut doar rangul lui.

EXEMPLUL Exemplu. Șirul (c_n) este definit prin formula termenului de rangul n: $c_n = 37 - 3n$. Este oare termen al acestui șir numărul: 1) 19; 2) –7? În caz de răspuns afirmativ, aflați rangul termenului respectiv.

Rezolvare. 1) Dacă numărul 19 este termen al șirului dat, atunci există un așa număr natural n, pentru care este corectă egalitatea $37 - 3n = 19$. De aici $3n = 18$; $n = 6$. În așa fel, numărul 19 este al șaselea termen al șirului (c_n).

2) Obținem: $37 - 3n = -7$; $3n = 44$; $n = 14\frac{2}{3}$. Deoarece numărul $14\frac{2}{3}$ nu este număr natural, numărul –7 nu este termen al acestui șir.

Răspuns: 1) Da, $n = 6$; 2) nu. ◀

?

1. Ce formează obiectele, numerotate consecutiv cu numere naturale?
2. Cum se numesc obiectele, care formează șirul?
3. Cum este numit termenul șirului, ce are numărul de ordine n?
4. Care șir este numit șir numeric?
5. În ce cazuri șirul este considerat ca definit?
6. Ce metode de definire ale șirurilor cunoașteți?
7. Explicați, ce este formula termenului de rangul n al șirului.
8. Care este relația dintre noțiunea "funcția" și "șirul"?
9. Explicați ce este formula recurentă.

EXERCIȚII

15.1.° Scrieți în ordine ascendentă primii cinci termeni ai șirului:
1) numerelor cu două cifre, divizibile la 4;
2) fracțiilor improprii cu numărătorul 11;
3) numerelor naturale, ce formează la împărțire restul 5.
Arătați, finite sau infinite sunt aceste șiruri.

15.2.° Șirul (a_n) este șirul numerelor cu trei cifre, divizibile la 5, aranjate în ordine ascendentă. Completați tabela:

n	1	2	3	4	5	6
a_n						

15.3.° Aflați primele patru termeni ai șirului (a_n), definit prin formula termenului de rangul n:

1) $a_n = n + 4$; 2) $a_n = 4n - 3$; 3) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$; 4) $a_n = \frac{2^n}{n}$.

15.4.° Aflați al doilea, al șaptelea termen și termenul de rangul 100 ai șirului (b_n), definit prin formula termenului de rangul n:

1) $b_n = \frac{10}{n}$; 2) $b_n = 5 - 2n$; 3) $b_n = n^2 + 2n$; 4) $b_n = (-1)^{n+1}$.

15.5.° Șirul (c_n) este definit prin formula termenului de rangul n: $c_n = (-1)^n \cdot 5$. Aflați:

1) c_1; 2) c_8; 3) c_{2k}; 4) c_{2k+1}; 5) c_{k+2}.

15.6.° Șirul (x_n) este definit prin formula termenului de rangul n: $x_n = 3n + 1$. Aflați:

1) x_1; 2) x_7; 3) x_{20}; 4) x_{300}; 5) x_{k+1}.

15.7.° Aflați primii cinci termeni ai șirului (a_n), dacă:

1) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3$;

2) $a_1 = -2$, $a_2 = 6$, $a_{n+2} = 3a_n + a_{n+1}$.

15.8.° Aflați primii cinci termeni ai șirului (b_n), dacă:

1) $b_1 = 18$, $b_{n+1} = -\frac{b_n}{3}$;

2) $b_1 = -1$, $b_2 = 2$, $b_{n+2} = b_n^2 + 2b_{n+1}$.

15.9.• Șirul (a_n) este definit prin formula termenului de rangul n: $a_n = 7n + 2$. Este oare termen al acestui șir numărul: 1) 23; 2) 149; 3) 47? În caz de răspuns afirmativ, calculați rangul termenului respectiv.

15.10.• Șirul (b_n) este definit prin formula termenului de rangul n: $b_n = n^2 - 4$. Este oare termen al acestui șir numărul: 1) 5; 2) 16; 3) 77? În caz de răspuns afirmativ, calculați rangul termenului respectiv.

15.11.• Câți termeni negativi conține șirul (x_n), definit prin formula termenului de rangul n: $x_n = 6n - 50$?

15.12.• Aflați rangul primului termen negativ al șirului (y_n), definit prin formula termenului de rangul n: $y_n = 38 - 3n$.

15.13.•• Șirul (a_n) este definit prin formula termenului de rangul n: $a_n = n^2 - 3n - 8$. Aflați rangurile termenilor acestui șir, valoarea cărora este mai mică decât 10.

15.14.•• Șirul (b_n) este definit prin formula termenului de rangul n: $b_n = -n^2 + 15n - 20$. Câți termeni ai acestui șir sunt mai mari decât 16?

15.15.•• Alegeți una din formulele posibile ale termenului de rangul n al șirului, primii termeni ai căruia sânt numerele:

1) 1, 4, 9, 25, ...;
2) 5, 8, 11, 14, 17, ...;
3) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$;
4) 0, 2, 0, 2, 0, ...

15.16.•• Alegeți una din formulele posibile ale termenului de rangul n al șirului, primii termeni ai căruia sunt numerele:

1) 2, 9, 28, 65, 126, ...;
2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \ldots$.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

15.17. Reduceți fracția:

1) $\dfrac{3x^2 - 7x + 2}{2 - 6x}$;
2) $\dfrac{5xy - 5x - 2y + 2}{10x^2 - 9x + 2}$.

15.18. Aflați domeniul de definiție al funcției:

1) $y = \dfrac{\sqrt{2 - x}}{x + 2}$;
2) $y = \dfrac{\sqrt{6 - 5x - x^2}}{x - 1}$.

15.19. Graficul funcției pătrate este parabola cu vârful în originea sistemului de coordonate, ce trece prin punctul $A\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$. Definiți această funcție prin formulă.

15.20. Un lucrător a programat să confecționeze într-un oarecare timp 160 de piese. Dar a terminat lucrul cu 2 ore mai devreme de timpul programat, deoarece a confecționat cu 12 piese pe oră mai mult decât au fost programate. Câte piese a confecționat lucrătorul în fiecare oră?

15.21. Apa de mare conține 5 % de sare. Ce cantitate de apă potabilă trebue adăugată la 40 kg de apă de mare, ca concentrația de sare să devină egală cu 2 %?

15.22. În prima zi un băiat a citit 25 % din toată cartea, în a doua zi – 75 % din paginile rămase, iar în a treia zi – restul de 84 de pagini. Câte pagini are cartea?

ÎNSUȘIM ACȚIUNI NESTANDARTE

15.23. Fie dată funcția pătrată $y = x^2 + px + q$, în care $p + q = 5$. Demonstrați, că parabolele, ce sânt grafice ale acestor funcții, se intersectează în acelaș punct.

Destpre iepuri, floarea soarelui, conuri de pin și secțiunea de aur

Vom studia șirul (u_n), definit recurent prin relațiile:

$$u_1 = u_2 = 1,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Scriem câțiva din primii termeni ai acestui șir:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots .$$

Termenii acestui șir sunt numite **numerele lui Fibonacci**. Denumirea aceasta este provocată de faptul, că matematecianul italian Leonardo de Pizza (Fibonacci), rezolvând problema populară în secolul XII despre numărul de urmași ai unui cuplu de iepuri, a atras atenția asupra proprietăților excelente ale acestui șir. În această problemă numărul de urmași se mărea în următorul fel: fiecare pereche matură de epuri în fiecare lună naște o pereche de iepurași, care peste o lună și ei încep a da urmași. Pe figura 15.1 numărul de iepurași corespunde numerelor lui Fibonacci.

Numerele lui Fibonacci pot fi întâlnite în diferite situații. Imaginați-vă, că vă deplasați pe o pistă, acoperită cu un rând de plite pătrate, pășind de fiecare dată pe plita următoare sau peste o plită. Atunci numărul de metode

Leonardo de Pizza (Fibonacci)
(secolul 12–13)

Matematecian italian. Călătorind prin țările din Orient, a studiat realizările matematecienilor arabi și a popularizat aceste cunoștințe în Europa. Lucrările lui de bază: "Liber Abaci" (1202) – un tractat despre aritmetică și algebră, "Practica Geometriae" (1220) au inițializat aplicarea metodelor algebrice în geometrie.

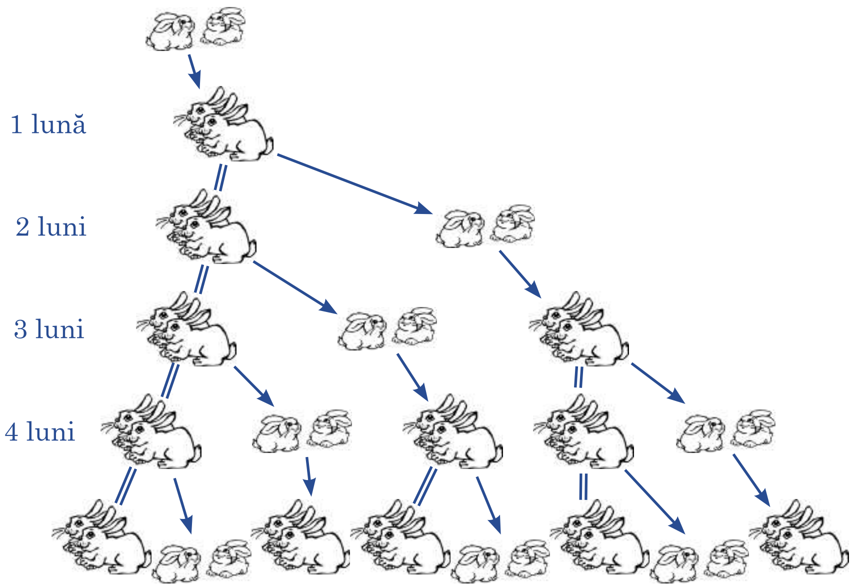


Fig. 15.1

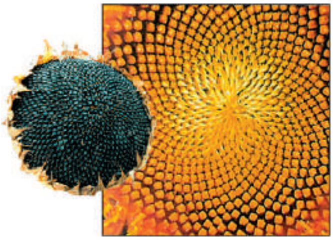
de trecere a pistei de n plite este egală cu termenul de rangul n în șirul lui Fibonacci (verificați de sinestătător, de exemplu pentru cazul $n = 8$).

Chiar și multe fenomene naturale sunt legate de numerele lui Fibonacci.

Dacă veți privi semințele din pălăria de floarea soarelui sau romaniță, puteți observa, că semințele sunt plasate în formă de două familii de spirale, ce se încovoaie în direcții opuse. Numărul de spirale în aceste familii sunt termeni vecini în șirul lui Fibonacci. De obicei, în floarea soarelui aceste numere sunt 34 și 55, dar pot fi întâlnite și gigante cu 89 și 144 de spirale. O structură similară poate fi observată și la conurile de pin. Acelaș fenomen[1] este observat la ananași, unde numărul de spirale, de regulă, este de 8 și 13.

Dacă în șirul lui Fibonacci pentru fiecare număr natural n va fi calculat raportul $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, se va obține șirul 1; 2; 1,5; 1,(6); 1,6; 1,625; 1,(615384); 1,61(904761); ... .

[1] În botanică așa o compoziție de familii de spirale este numită filotaxis.



Acest șir posedă următoarea proprietate: cu creșterea rangului termenii tot mai puțin se deosebesc de numărul $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx \mathbf{1,618}$.

Încă în anticitate acest număr se referea la concepția de frumusețe și armonie. Sculptorii greci cunoșteau bine corespunderea proporțiilor corecte ale corpului omenesc acestui număr magic. Și nu în zadar meșterii antici îl foloseau la crearea operelor nemuritoare. Așa, raportul dintre lungimea Partenonului și înălțimea lui aproximativ este egală cu 1,618. Geniul epocii Renesansului Leonardo da Vinci considera, că dintre multe proporții, folosite de Creator, există una, unică și nerepetată. Această proporție a fost numită de el "secțiunea de aur".

Învățatul francez *Jacques Binet* (1786–1856) a exprimat formula termenului de rangul n a șirului lui Fibonacci:

$$u_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Este greu de imaginat, că această formulă determină numere naturale. Dar aceasta este într-adevăr așa.

16. Progresia aritmetică

Vom studia următoarele șiruri:

$$2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ \ldots;$$
$$1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 3;\ 3{,}5;\ \ldots;$$
$$3,\ 1,\ -1,\ -3,\ -5,\ -7,\ \ldots\ .$$

[1] Partenon – templu în Athena, construit în sec. V până la Cristos.

Aceste șiruri posedă următoarea particularitate: *fiecare termen succesiv este obținut ca rezultat al adunării la termenul precedent al unuia și aceluiaș număr.* Pentru primul șir acest număr este egal cu 5, pentru a doua acest număr este egal cu 0,5, pentru a treia acest număr este egal cu –2.

Cu astfel de șiruri oamenii au avut de-a face încă din vremurile antice, când au avut nevoie să numere obiectele prin perechi, câte cinci, câte zece, cu duzinele... Astfel de șiruri sunt numite **progresii aritmetice** (din latină *progressio* – mișcare înainte).

Definiție. Progresie aritmetică se numește șirul, fiecare termen al căreia, începând cu al doilea, este egal cu termenul precedent, la care este adunat unul și același număr.

Numărul, care este egal cu diferența dintre termenul succesiv și termenul precedent, este numit **rație a progresiei aritmetice** și este notat cu litera $\boldsymbol{d}$ (prima literă a cuvântului latin *differentia* – diferența).

În așa fel, dacă (a_n) – este progresie aritmetică cu rația d, atunci

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots,$$

adică pentru orice număr natural n este corectă egalitatea $a_{n+1} - a_n = d$. De aici

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Cu alte cuvinte, progresia aritmetică poate fi definită recurent:

$$\boxed{\boldsymbol{a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d}}$$

În așa fel, *pentru a defini o progresie aritmetică, trebuiesc determinate primul termen și rația.*

Demonstrăm câteva exemple.

Dacă $a_1 = 2$ și $d = 5$, vom obține progresia aritmetică, prezentată la începutul punctului:

$$2, 7, 12, 17, 22, 27, \ldots .$$

Dacă $a_1 = 1$ și $d = 2$, vom obține progresia aritmetică – șirul de numere impare:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots .$$

Am dat exemple de progresii aritmetice, în care rația este număr pozitiv. Dar rația progresiei aritmetice poate fi număr negativ sau chiar zero. Așa, șirul 5, 5, 5, 5, ..., toți termenii căruia sunt egali între ei, este o progresie aritmetică , în care $a_1 = 5$, $d = 0$.

Vom arăta, cum poate fi definită progresia aritmetică prin formula termenului de rangul n.

Din definiția progresiei aritmetice (a_n) reiese:

$$a_2 = a_1 + d;$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + d\text{æ}2;$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + d\text{æ}2) + d = a_1 + d\text{æ}3;$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + d\text{æ}3) + d = a_1 + d\text{æ}4.$$

Aceste exemple ne permit să observăm următoarea regulă pentru a obține un oarecare termen al progresiei aritmetice, la primul termen poate fi adunat produsul rației d cu un număr, ce este cu 1 mai mic decât rangul termenului căutat. De aici, de exemplu $a_6 = a_1 + d \cdot 5$, $a_7 = a_1 + d \cdot 6$, și în genere

$$\boxed{a_n = a_1 + d\,(n - 1)}$$

Formula evidențiată este numită **formula termenului de rangul n al progresiei aritmetice.**

Vom determina o proprietate importantă a termenilor progresiei aritmetice (a_n).

Obținem:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2, \text{ de aici } 2a_2 = a_1 + a_3;\ a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}.$$

$$a_3 - a_2 = a_4 - a_3, \text{ de aici } 2a_3 = a_2 + a_4;\ a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}.$$

În genere, pentru orice număr natural n, mai mare ca 1, poate fi scris: $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, din care reiese

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}$$

Orice termen al progresiei aritmetice, în afară de primul (și ultimul, dacă progresia este finită), este egal cu media aritmetică a doi termeni vecini.

EXEMPLUL Demonstrați, că șirul (a_n), definit prin formula termenului de rangul n: $a_n = 9n - 2$, este o progresie aritmetică.

Rezolvare. Calculăm diferența dintre doi termeni arbitrari succesivi ai șirului.

$$a_{n+1} - a_n = 9\,(n + 1) - 2 - (9n - 2) = 9n + 9 - 2 - 9n + 2 = 9.$$

În așa fel, pentru orice număr natural n este corectă egalitatea $a_{n+1} = a_n + 9$, adică fiecare termen al șirului dat, începând cu al doilea, este egal cu termenul precedent, la care este adunat unul și același număr 9. Astfel, șirul dat este o progresie aritmetică. ◄

1. Care șir este numit progresie aritmetică?
2. Care număr este numit rație al progresiei aritmetice? Cum este notat acest număr?
3. Ce trebuie determinat, pentru ca progresia aritmetică să fie definită?
4. Cum poate fi definită recurent progresia aritmetică?
5. Ce formă are formula termenului de rangul n al progresiei aritmetice?
6. Care este relația dintre oricare termen al progresiei aritmetice și termenii vecini?

EXERCIȚII

16.1.° Dintre șirurile date arătați progresiile aritmetice:
1) 3, –6, 12, –24; 2) 4, 8, 12, 16; 3) 5, 10, 5, 10; 4) 42, 39, 36, 33; 5) –5, –3, –1, 1; 6) 1,2; 1,3; 1,5; 1,6.

16.2.° Este oare șirul progresie aritmetică (în caz de răspuns afirmativ, calculați rația):
1) 24, 22, 20, 18; 2) 16, 17, 19, 23; 3) –3, 2, 7, 12?

16.3.° Aflați primii patru termeni ai progresiei aritmetice, în care primul termen este egal cu 1,2, iar rația este egală cu –0,3.

16.4.° Primul termen al progresiei aritmetice este egal cu –7,4, iar rația este egală cu 1,8. Aflați primii cinci termeni ai progresiei.

16.5.° Primul termen al progresiei aritmetice (a_n) este egal cu 4, iar rația este egală cu 0,4. Aflați: 1) a_3; 2) a_{11}; 3) a_{32}.

16.6.° Primul termen al progresiei aritmetice (a_n) este egal cu 17, iar rația este egală cu –2. Aflați: 1) a_4; 2) a_{15}; 3) a_{60}.

16.7.° Aflați rația și termenul de rangul 201 ai progresiei aritmetice 2,6; 2,9; 3,2; ... .

16.8.° Cu ce este egală rația progresiei aritmetice (a_n), dacă $a_6 = -2$, $a_7 = 6$?

16.9.° Aflați rația progresiei aritmetice (a_n), dacă $a_8 = 3$, $a_9 = -12$.

16.10.° Aflați rația progresiei aritmetice (x_n), dacă $x_1 = 2$, $x_8 = -47$.

16.11.° Aflați primul termen al progresiei aritmetice (y_n), dacă $y_{17} = 22$, iar rația progresiei este $d = 0,5$.

16.12.$^{\bullet}$ Aflați formula termenului de rangul n al progresiei aritmetice:

1) $-5, -7, -9, -11, \ldots;$ 3) $a^2, 2a^2, 3a^2, 4a^2, \ldots;$

2) $2,\ 2\frac{1}{6},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{2}, \ldots;$ 4) $a+3, a+1, a-1, a-3, \ldots$.

16.13.$^{\bullet}$ Este oare termen al progresiei aritmetice (c_n):

1) numărul 20,4, dacă $c_1 = 11,4$, iar rația progresiei este $d = 0,6$;

2) numărul 38, dacă $c_1 = 8$, iar rația progresiei este $d = 1,4$?

În caz de răspuns afirmativ, calculați rangul acestui termen.

16.14.$^{\bullet}$ Aflați rangul termenului progresiei aritmetice 8,1; 8,5; 8,9; 9,3; ..., care este egal cu 13,7.

16.15.$^{\bullet}$ Aflați al doilea termen al progresiei aritmetice, dacă primul și al treilea termeni sunt egali respectiv cu –6 și 12.

16.16.$^{\bullet}$ Termenii de rangul opt și de rangul zece ai progresiei aritmetice sânt respectiv egali cu 3,5 și 2,7. Cu ce este egal termenul de rangul nouă al progresiei?

16.17.$^{\bullet}$ Aflați primul termen al progresiei aritmetice (b_n), dacă $b_5 = 11$, $b_{11} = -7$.

16.18.$^{\bullet}$ Cu ce este egală rația progresiei aritmetice (x_n), dacă $x_8 = 58$, $x_{15} = 16$?

16.19.$^{\bullet}$ Cum se va schimba rația unei prigresii aritmetice finite, dacă termenii progresiei vor fi permutați în ordine inversă?

16.20.$^{\bullet}$ Câți termeni pozitivi conține progresia aritmetică 5,2; 4,9; 4,6; ...?

16.21.$^{\bullet}$ Care este rangul primului termen pozitiv al progresiei aritmetice –10,2; –9,5; –8,8; ...?

16.22.$^{\bullet}$ Aflați primul termen negativ al progresiei aritmetice 7,2; 6,6; 6; ... .

16.23.$^{\bullet}$ Între numerele –6 și 3 introduceți cinci numere în așa fel, ca ele, împreună cu numerele date, să formeze o progresie aritmetică.

16.24.$^{\bullet}$ Care patru numere trebuiesc introduse între numerele 4 și –5, ca ele, împreună cu numerele date, să formeze o progresie aritmetică?

16.25.$^{\bullet}$ Aflați primul termen si rația progresiei aritmetice (a_n), dacă:

1) $a_3 + a_7 = 30$ și $a_6 + a_{16} = 60$;

2) $a_4 + a_{10} = 36$ și $a_5 \cdot a_{11} = 340$.

16.26.• Aflați primul termen și rația progresiei aritmetice (a_n), dacă:
1) $a_5 + a_{12} = 41$ și $a_{10} + a_{14} = 62$;
2) $a_7 + a_{13} = -104$ și $a_2 \cdot a_6 = -240$.

16.27.• În ce cazuri pentru termenii progresiei aritmetice este corectă egalitatea $a_1 a_4 = a_2^2$?

16.28.• Demonstrați, că valorile expresiilor $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, $(a - b)^2$ sunt termeni consecutivi ai progresiei aritmetice.

16.29.• Este oare corectă afirmația: dacă lungimile unui patrulater convex (fig. 16.1), luate în ordinea a, b, d și c, formează o progresie aritmetică, în acest patrulater poate fi înscrisă o circumferință?

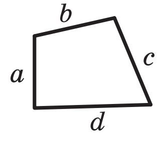


Fig. 16.1

16.30.• Mărimile unghiurilor unui triunghi formează o progresie aritmetică. Care este mărimea unghiulară a unghiului cu mărime medie a triunghiului?

16.31.• Este oare șirul (a_n) progresie aritmetică, dacă șirul este definit prin formula termenului de rangul n:

1) $a_n = -6n + 3$; 2) $a_n = 2n^2 - n$; 3) $a_n = -2{,}8n$; 4) $a_n = \frac{n}{n+1}$?

În caz de răspuns afirmativ, calculați primul termen și rația progresiei.

16.32.• Este oare șirul (a_n) progresie aritmetică, dacă șirul este definit prin formula termenului de rangul n:

1) $a_n = 6 + 7n$; 2) $a_n = \frac{2n-1}{5}$; 3) $a_n = \frac{1}{n} + 2$?

În caz de răspuns afirmativ, calculați primul termen și rația progresiei.

16.33.• Din progresia aritmetică au fost excluși termenii cu ranguri impare. Formează oare termenii rămași o progresie aritmetică?

16.34.• Sânt date două progresii aritmetice infinite. Dacă de la termenii unei progresii vor fi scăzuți termenii respectivi ai celei de-a doua progresii, va fi oare șirul obținut progresie aritmetică?

16.35.• Dacă dintr-o progresie aritmetică cu rația diferită de zero vor fi excluși termenii cu rangurile, divizibile la 3, va fi oare șirul obținut progresie aritmetică?

16.36.• Fiecare termen al progresiei aritmetice a fost înmulțit cu 4. Va fi oare șirul obținut progresie aritmetică?

16.37.• Demonstrați, că numerele, ce sunt egale respectiv cu sumele unghiurilor în triunghi, patrulater, pentagon etc., formează o progresie aritmetică.

16.38.• Pentru care valoare a lui x valorile expresiilor $x^2 - 4$, $5x + 3$ și $3x + 2$ vor fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice? Aflați termenii acestei progresii.

16.39.• Pentru care valoare a lui y valorile expresiilor $y^2 + 1$, $y^2 + y$ și $8y - 10$ vor fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice? Aflați termenii acestei progresii.

16.40.•• Pentru care valoare a lui y valorile expresiilor $y^2 - 2y$, $3y + 5$, $4y + 13$ și $2y^2 - y + 25$ vor fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice? Aflați termenii acestei progresii.

16.41.•• Pentru care valoare a lui x valorile expresiilor $3x + 4$, $2x + 3$, x^2 și $2x^2 + x$ vor fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice? Aflați termenii acestei progresii.

16.42.* Demonstrați, că dacă numerele a, b și c – sunt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci:

1) $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$;

2) $\frac{2}{9}(a+b+c)^3 = a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)$.

16.43.* Demonstrați, că dacă numerele pozitive a, b și c – sânt trei termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atunci:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}.$$

16.44.* Demonstrați, că dacă valorile expresiilor $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ și $\frac{1}{a+b}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, atuncă și a^2, b^2 și c^2 de asemenea vor fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

16.45. Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 46, \\ x + y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -4, \\ x^2 + 2y^2 = 12. \end{cases}$

16.46. Care din inegalitățile date este echivalentă cu inegalitatea $-5x<10$:
1) $5x<-10$; 2) $10x>-20$; 3) $10x<-20$; 4) $5x>10$?

16.47. Cu ce este egal cea mai mică soluție întreagă a inegalității
$$3(x-1)^2-3x(x-5)>-40?$$

16.48. Simplificați expresia:
1) $\left(2\sqrt{6}-2\sqrt{54}+6\sqrt{96}\right)\cdot 2\sqrt{3}$; 2) $\left(5\sqrt{20}-6\sqrt{10}+2\sqrt{40}\right)\cdot 3\sqrt{5}$.

16.49. Demonstrați, că dacă un număr cu trei cifre este compus din cifre identice, acest număr se divide la 37.

16.50. Un lucrător a avut de confecționat 216 piese într-un oarecare timp. Primele trei zile lucrătorul și-a îndeplinit norma zilnică, iar apoi a îneput a confecționa zilnic cu 8 piese peste normă. Cu o zi înainte de termen deja erau confecționate 232 de piese. Câte piese pe zi trebuia să confecționeze lucrătorul conform normei zilnice?

16.51. (*Problema lui Bézout*[1].) Cineva a cumpărat un cal și peste câteva zile l-a vândut cu 24 de pistoli. La vânzare a pierdem atâtea procente, cât a și plătit, cumpărând calul. Întrebare: cu ce preț a cumpărat calul?

16.52. Aplicarea de noi tehnologii a permis reducerea timpului de confecționare a unei piese de la 12 min până la 10 min. Cu câte procente va fi supraîmplinit planul, dacă norma de timp va rămâne neschimbată?

17. Suma primilor *n* termeni ai progresiei aritmetice

Fie dată progresia aritmetică finită $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$.
Notăm suma termenilor acestei progresii prin S_n.
Obținem:
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \qquad (*)$$
Vom determina formula pentru calcularea acestei sume.

Vom analiza întâi o problemă, rezolvarea căreia ne va sugera, cum poate fi obținută formula dorită.

[1] Étienne Bézout (1730–1783) – matematecian francez, principalele lucrări ale căruia se referă la algebră superioară. A fost profesor de matematică la scoala de marină, Corpul Regal de artilerie. Autorul lucrării de șase volume “Curs de matematică”.

Vom analiza progesia aritmetică

$$1, 2, 3, ..., 98, 99, 100$$

și vom calcula suma termenilor acestei progresii.

Notăm suma căutată prin două expresii și adunăm egalitățile obținute:

$$\begin{array}{rrcrcrcccrcrcr} & S_{100} = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & ... & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ + & S_{100} = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & ... & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 2S_{100} = & \multicolumn{13}{l}{\underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101}_{\textbf{100 termeni}}} \end{array}$$

Obținem: $2S_{100} = \mathbf{101 \cdot 100}$; $S_{100} = 5050$.

Carl Friedrich Gauß
(1777–1855)

Se spune, că remarcabilul matematician german Carl Friedrich Gauß a inventat această rezolvare la vârste de 5 ani.

Ne fom folosi de aceiaș metodă pentru calcularea sumei (*).

Vom scrie suma S_n prin două expresii. Întâi scriem suma, primul termen al căreia este egal cu a_1, iar fiecare termen succesiv se obține din termenul precedent prin adunarea rației d. Apoi scriem suma, primul termen al căreia este egal cu a_n, iar fiecare termen succesiv se obține din termenul precedent prin scăderea rației d.

Obținem:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + ... + (a_1 + (n-2)\,d) + (a_1 + (n-1)\,d),$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + ... + (a_n - (n-2)\,d) + (a_n - (n-1)\,d).$$

Adunând aceste egalități, obținem:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n).$$

Expresia, scrisă în partea dreaptă a ultimei egalități, este o sumă cu n termeni, fiecare din ei fiind egal cu $a_1 + a_n$.

Atunci $2S_n = (a_1 + a_n)\,n$, adică

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

Egalitatea obținută este numită **formula sumei primilor *n* termeni ai progresiei aritmetice.**

Substituind în această formulă expresia a_n cu expresia $a_1 + d\,(n-1)$, obținem:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d\,(n-1)}{2} \cdot n.$$

De aici

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n}$$

Ultima formulă este foarte utilă, dacă sunt dați primul termen și rația progresiei.

EXEMPLUL 1 Aflați suma numerelor cu trei cifre, divizibile la 6.

Rezolvare. Aceste numere formiază o progresie aritmetică, primul temen al căreia este $a_1 = 102$, iar rația $d = 6$. Atunci $a_n = 102 + 6(n - 1) = 6n + 96$. Aflăm numărul de termeni ai acestei progresii. Deoarece $a_n < 1000$, numărul de termeni – este cea mai mare soluție naturală a inegalității $6n + 96 < 1000$. Obținem:

$$6n < 904;$$

$$n < 150\frac{2}{3}.$$

În așa fel, $n = 150$. Acum calculăm suma căutată:

$$S_{150} = \frac{2 \cdot 102 + 6 \cdot (150 - 1)}{2} \cdot 150 = 82\,350.$$

82 350. ◀

EXEMPLUL 2 Suma primilor șaptezeci și cinci de termeni ai progresiei aritmetice este egală cu 450. Aflați termenul progresiei cu rangul treizeci și opt.

Rezolvare. Fie , că primul termen și rația progresiei aritmetice sunt respectiv egale cu a_1 și d. Atunci poate fi scris:

$$S_{75} = \frac{2a_1 + 74d}{2} \cdot 75 = 75(a_1 + 37d) = 450.$$

Deoarece $a_{38} = a_1 + 37d$, termenul căutat este egal cu

$$a_{38} = 450 : 75 = 6.$$

Răspuns: 6. ◀

?

1. Cum poate fi calculată suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice, dacă sunt cunoscuți primul și ultimul termen ai progresiei?
2. Cum poate fi calculată suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice, dacă sunt cunoscuți primul termen și rația progresiei?

EXERCIȚII

17.1.° Cu ce este egală suma primilor șapte termeni ai progresiei aritmetice (a_n), dacă $a_1 = 9$ și $a_7 = 15$?

17.2.° Cu ce este egală suma primilor șase termeni ai progresiei aritmetice (b_n), dacă $b_1 = 19$ și $b_6 = 14$?

17.3.° Aflați suma primilor doisprezece termeni ai progresiei aritmetice, în care $a_1 = -6$ și $d = 4$.

17.4.° Aflați suma primilor douăzeci de termeni ai progresiei aritmetice $-8, -6, -4, \dots$.

17.5.° Locurile în sectorul circului sunt distribuite în așa fel, că în primul rând sunt 6 locuri, iar în fiecare rând următor sunt cu 3 locuri mai mult decât în cel precedent. Cîte locuri sunt în sector, dacă el are 16 rînduri?

17.6.° Dumitru a luat la bibliotecă o carte. În prima zi el a citit 40 de pagini, iar în fiecare următoare zi a citit cu 10 pagini mai mult, ca în ziua precedentă. Câte pagini sunt în carte, dacă Dumitru a citit-o în 7 zile?

17.7.° Progresia aritmetică (a_n) este definită prin formula termenului de rangul n: $a_n = -4n + 1$. Aflați suma primilor treizeci și doi de termeni ai acestei progresii.

17.8.° Progresia aritmetică (c_n) este definită prin formula termenului de rangul n: $c_n = 5n - 2$. Aflați suma primilor douăzeci și șase de termeni ai acestei progresii.

17.9.• Aflați suma primilor doisprezece termeni ai progresiei aritmetice (a_n), dacă:

1) $a_1 = 6$, $a_9 = 22$; 2) $a_6 = 49$, $a_{20} = 7$.

17.10.• Cu ce este egală suma primilor patruzeci de termeni ai progresiei aritmetice (x_n), dacă $x_8 = -14$, $x_{30} = -3$?

17.11.• Câte lovituri va efectua un ceasornic timp de o zi, dacă ceacornicul efectuează bătăi la fiecare ceas întreg de la 1 până la 12?

17.12.• Aflați suma primilor douăzeci și cinci de termeni ai progresiei aritmetice (a_n), dacă $a_{10} = 44$, iar rația $d = 4$.

17.13.• Aflați suma primilor douăzeci de termeni ai progresiei aritmetice (a_n), dacă $a_6 + a_8 - a_{14} = -17$ și $a_5 + a_{22} = 101$.

17.14.• Aflați suma primilor treizeci și trei de termeni ai progresiei aritmetice (a_n), dacă $a_3 + a_5 + a_{13} = 33$ și $a_{15} - a_8 - a_{10} = -1$.

17.15.• Pentru orice n suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice poate fi calculată cu ajutorul formulei $S_n = 3n^2 + 5n$. Aflați primii trei termeni ai acestei progresii.

17.16.• Pentru orice n suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice poate fi calculată cu ajutorul formulei $S_n = 9n - 2n^2$. Aflați al șaptelea termen al acestei progresii.

17.17.• (*Problemă antică egipteană*) O sută de măsuri de pâne trebuiesc împărțite între cinci oameni în așa fel, ca al doilea să obțină cu atâtea măsuri mai mult decât primul, cum al treilea – mai mult decât al doilea, al patrulea – mai mult decât al treilea și al cincilea – mai mult decât al patrulea. În afară de aceasta, primii doi trebuie să obțină de 7 ori mai puțin, decât ultimii trei. Câte măsuri de pâne trebuie să obțină fiecare?

17.18.• Cu ce este egală suma primelor n:

1) numere naturale; 2) numere impare?

17.19.• Cu ce este egală suma primelor n numere pare?

17.20.•• Care număr natural este egal cu suma tuturor numerelor naturale precedente?

17.21.•• Aflați suma tuturor termenilor negativi ai progresiei aritmetice –6,2; –5,9; –5,6; ... .

17.22.•• Aflați suma tuturor termenilor pozitivi ai progresiei aritmetice 8,4; 7,8; 7,2; ... .

17.23.•• Aflați suma tuturor numerelor naturale, care sunt divizibile la 5 și nu depășesc valoarea de 240.

17.24.•• Aflați suma tuturor numerelor naturale, care sunt divizibile la 4 și sânt mai mici decât 130.

17.25.•• Aflați suma tuturor numerelor naturale, care sunt divizibile la 12 și sânt mai mici decât 200.

17.26.•• Aflați suma tuturor numerelor cu trei cifre, divizibile la 8.

17.27.•• Aflați suma tuturor numerelor cu trei cifre, divizibile la 7.

17.28.•• Aflați rația progresiei aritmetice, primul termen al căreia este egal cu 8,5, iar suma primilor șaisprezece termeni este egală cu 172?

17.29.•• Aflați primul termen al progresiei aritmetice, rația căreia este egală cu –4, iar suma primilor nouă termeni este egală cu –54.

17.30.•• Primul termen al progresiei aritmetice este egal cu –9, iar rația este egală cu 6. Câți din primii termeni ai progresiei sunt necesari, ca suma lor să fie egală cu 960?

17.31.•• Care este cel mai mic număr de numere impare succesive, începând cu numărul 7, necesare pentru obținerea unei sume mai mari ca 315?

17.32.•• Poate fi suma a oarecare cinci termeni succesivi ai progresiei aritmetice 3,7,11, ... egală cu 135? În caz de răspuns afirmativ, aflați acești termeni.

17.33.•• Poate fi suma a oarecare patru termeni succesivi ai progresiei aritmetice 2,8,14, ... egală cu 176? În caz de răspuns afirmativ, aflați acești termeni.

17.34.•• În timpul căderii libere corpul în prima secundă parcurge distanța de 4,9 m, iar în fiecare următoare secundă – cu 9,8 m mai mult decât în secunda precedentă, ignorând rezistența aerului. Aflați timpul căderii corpului de la înălțimea de 490 m (rezistența aerului poate fi ignorată).

17.35.•• Suma numerelor impare ale paginilor unei cărți este un număr impar, mai mare ca 400 și mai mic ca 500. Câte pagini are cartea?

17.36.•• Aflați suma termenilor progresiei aritmetice de la rangul opt până la rangul douăzeci și șase inclusiv, dacă primul termen al progresiei este egal cu 24, iar rația progresiei este egală cu –8.

17.37.•• Aflați suma termenilor progresiei aritmetice (x_n) e la rangul zece până la rangul douăzeci și cinci inclusiv, dacă $x_1 = -3$ și $x_{11} = 12$.

17.38.•• Suma primilor șase termeni ai progresiei aritmetice este egală cu 39, iar suma primilor paisprezece termeni este egală cu –77. Aflați primul termen și rația progresiei.

17.39.•• Primul termen al progresiei aritmetice este egal cu 100, iar suma primilor șase termeni este de 5 ori mai mare decât suma următorilor șase termeni. Cu ce este egală rația progresiei?

17.40.•• Rația progresiei aritmetice este egală cu 28, iar suma primilor cinci termeni este de 4 ori mai mică decât suma următorilor șase termeni. Cu ce este egal primul termen al progresiei?

17.41.•• Al doisprezecelea termen al progresiei aritmetice este egal cu 30. Aflați suma primilor douăzeci și trei de termeni ai acestei progresii.

17.42.•• Aflați suma primilor douăzeci de termeni ai progresiei aritmetice (a_n), dacă $a_5 + a_{10} + a_{12} + a_{15} = 50$.

17.43.•• Rezolvați ecuația:

1) $7 + 13 + 19 + ... + (6n + 1) = 480$, în care n – număr natural;
2) $5 + 8 + 11 + ... + x = 124$, în care x – număr natural.

17.44.•• Rezolvați ecuația:

1) $11 + 19 + 27 + ... + (8n + 3) = 470$, în care n – număr natural;
2) $1 + 5 + 9 + ... + x = 630$, în care x – număr natural.

17.45.•• Aflați primul termen și rația progresiei aritmetice, în care media aritmetică a primilor n termeni pentru orice n este egală cu numărul de termeni.

17.46.•• (*Problema lui Hypsicles din Alexandria*) Demonstrați, că în progresia aritmetică cu un număr par de termeni, ce este alcătuită din numere întregi, suma termenilor din a doua jumătate de progresie este mai mare decât suma termenilor din prima jumătate de progresie cu un număr, ce este divizibil la pătratul jumătății numărului de termeni.

17.47.•• Demonstrați, că dacă suma primilor n termeni ai șirului poate fi calculată prin formula $S_n = n^2 - 3n$, acest șir este o progresie aritmetică. Aflați primul termen și rația acestei progresii.

17.48.•• Aflați suma tuturor numerelor cu două cifre, ce nu sunt divizibile nici la 3 și nici la 5.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

17.49. Construiți graficul funcției:

1) $y = x^2 - 4x + 4$; 2) $y = 2x^2 + 8x + 8$.

Folosind graficul construit, aflați domeniul valorilor, intervalele de creștere și descreștere ale funcției.

17.50. Calculați:

1) $\dfrac{3^{49}}{9^{25}}$; 2) $\dfrac{4^8}{8^4}$; 3) $\dfrac{5^4 \cdot 11^7}{55^6}$; 4) $\dfrac{12^5}{18^3}$.

17.51. Pentru ce valoare a lui k graficele funcțiilor $y = kx - 3$ și $y = x^2$ se intersectează într-un punct cu abscisa egală cu -2?

17.52. Simplificați expresia:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}} + \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{c}}{\sqrt{bc}}$; 2) $\dfrac{d-49}{d+12\sqrt{d}+36} \cdot \dfrac{4\sqrt{d}+24}{3\sqrt{d}+21}$.

[1] Hypsicles din Alexandria (secolul II de până la Cristos) – învățat antic grec, autorul cărții XIV a “Începutului” lui Euclide.

17.53. Un ciclist în fiecare minut parcurge o distanță cu 600 m mai mică decât un motociclist, de acewa pentru un drum de 120 km ciclistul are nevoie de 3 ori mai mult timp, decât motociclistul. Aflați viteza ciclistului.

17.54. O lucrătoare poate broda un complect de șervețele în 6 ore, iar a doua – în 4 ore. Dar dacă ele vor lucra împreună, productivitatea muncii a fiecărei lucrătoare va spori cu 20 %. În cât timp pot broda ele complectul de șervețele, lucrând împreună?

17.55. A fost amestecată o soluție de 30 de procente de acid cu o soluție de 10 procente și s-au obținut 800 g de soluție de 15 procente. Câte grame de fiecare soluție au fost folosite?

ÎNSUȘIM ACȚIUNI NESTANDARTE

17.56. Aflați toate perechile de numere $(x; y)$, care satisfac ecuația

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=x^2+y^2+2.$$

18. Progresia geometrică

Fie date șirurile:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ ...,$$

$$2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ ...,$$

$$5;\ –0{,}5;\ 0{,}05;\ –0{,}005;\ 0{,}0005;\ ...\ .$$

Ele posedă următoarea particularitate: *fiecare termen succesiv al șirului este obținut ca rezultat al înmulțirii termenului precedent cu unul și acelaș număr.* Pentru primul șir acest număr este egal cu 3, pentru a doua acest număr este egal cu $\frac{1}{2}$, pentru a treia acest număr este egal cu $–0{,}1$.

Astfel de șiruri putem întâlni, de exemplu, în timpul studierii creșterii coloniilor de bacterii, la estimarea lunară a sumei de bani pe contul bancar, pus pe procente. Astfel de șiruri sunt numite **progresii geometrice**.

Definiție. Progresie geometrică se numește șirul cu primul termen diferit de zero, fiecare termen al căreia, începând cu al doilea, este egal cu termenul precedent, înmulțit cu unul și același număr, diferit de zero.

Numărul, care este egal cu raportul dintre termenul succesiv și termenul precedent, este numit **rație a progresiei geometrice** și este notat cu litera q (prima literă de la cuvântul francez *quotient* - câtul).

În așa fel, dacă (b_n) – progresie geometrică cu rația q, atunci

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \ldots,$$

adică pentru orice număr natural n este corectă egalitatea $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. De aici se obține formula recurentă $b_{n+1} = b_n q$.

În așa fel, progresia geometrică poate fi definită recurent:

$$\boxed{b_1 = b,\ b_{n+1} = b_n q}$$

Cu alte cuvinte, pentru a defini o progresie geometrică trebuiesc determinate primul termen și rația.

Demonstrăm câteva exemple.

Dacă $b_1 = 1$ și $q = 3$, se obține progresia geometrică, prezentată la începutul punctului:

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots .$$

Dacă $b_1 = 2$ și $q = 2$, se obține progresia geometrică, care este șirul de puteri naturale ale numărului 2:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \ldots .$$

Atragem atenția, că progresia geometrică cu rația egală cu 1, este un șir, în care toți termenii sunt identici. Așa, șirul 5, 5, 5, 5, ... este o progresie geometrică , în care $b_1 = 5$ și $q = 1$. Paralel, acest șir poate fi considerat progresie aritmetică, în care $a_1 = 5$ și $d = 0$ progresie aritmetică.

În genere, orice șir, toți termenii căruia sânt ădentici și diferiți de zero, este concomitent și progresie geometrică și progresie aritmetică. Șirul 0, 0, 0, 0, ..., cu toți termenii egali cu zero, e doar progresie aritmetică.

Vom arăta, cum poate fi definită progresia geometrică prin formula termenului de rangul n.

Din definiția progresiei geometrice reiese:

$$b_2 = b_1 \cdot q;$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 q) \cdot q = b_1 q^2;$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 q^2) \cdot q = b_1 q^3;$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 q^3) \cdot q = b_1 q^4.$$

Aceste exemple permit să observăm următoare regularitate: pentru a afla un oarecare termen al progresiei geometrice, poate fi înmulțit primul termen cu o putere, ce are baza q și o exponentă cu 1 mai mică decât rangul termenului căutat. De aceea, de exemplu, $b_6 = b_1q^5$, $b_7 = b_1q^6$, și în genere

$$\boxed{b_n = b_1q^{n-1}}$$

Egalitatea evidențiată este numită formulă **a termenului de rangul *n* al progresiei geometrice**.

Demonstrăm o proprietate importantă a termenilor progresiei geometrice (b_n).

Vom avea:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2}, \text{ de unde } b_2^2 = b_1 \cdot b_3;$$

$$\frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3}, \text{ de unde } b_3^2 = b_2 \cdot b_4.$$

În genere, pentru orice număr natural n, mai mare ca 1, poate fi scris: $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. De aici

$$\boxed{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$$

Pătratul oricărui termen al progresiei geometrice, în afară de primul (și ultimul, dacă progresia este finită), este egal cu produsul a doi termeni vecini.

Dacă toți termenii progresiei geometrice (b_n) sunt pozitivi, egalitatea $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ poate fi scrisă în următorul fel:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

În așa fel, fiecare termen al progresiei geometrice, în afară de primul (și ultumul, dacă progresia este finită), este egal cu media geometrică a doi vecini ai săi.

Fie date două șiruri.

Progresia aritmetică (a_n), în care $a_1 = 1$, $d = 2$:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, ...

Progresia geometrică (b_n), în care $b_1 = 1$, $q = 2$:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

În aceste progresii primii termeni sunt egali. La construcția ambelor șiruri participă acelaș număr 2 ($d = q = 2$). În același timp, comparând termenii respectivi ai acestor șiruri, observăm, că progresia geometrică “crește” mult mai rapid, decât progresia aritmetică. De exemplu, în progresia aritmetică $a_{20} = 1 + 2 \cdot 19 = 39$, în cea geometrică $b_{20} = 1 \cdot 2^{19} = 524\,288$.

Vă este cunoscut, că bacteriile se înmulțesc prin divizare: o bacterie se împarte în două. Acum este clar, de ce numărul de bacterii crește atât de rapid, dacă bacteriile nimeresc într-un mediu favorabil.

Posibil, la acest exemplu se referă fraza, pronunțată des, când doresc să accentuieze creșterea rapidă a unei oarecare mărimi, că “crește în progresie geometrică”.

EXEMPLUL 1 În progresia geometrică (b_n) cu rația $q = \frac{1}{3}$ aflați b_1, dacă $b_6 = \frac{5}{81}$.

Rezolvare. Deoarece $b_6 = b_1q^5$, atunci

$$b_1 = b_6 : q^5 = \frac{5}{81} : \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{5}{3^4} \cdot 3^5 = 5 \cdot 3 = 15.$$

Răspuns: 15. ◀

EXEMPLUL 2 Aflați al patrulea termen al progresiei geometrice (b_n), dacă $b_3 = 36$, $b_5 = 49$.

Rezolvare. Din proprietatea progresiei geometrice $b_4^2 = b_3b_5$, de unde $b_4 = \sqrt{b_3b_5} = \sqrt{36 \cdot 49} = 6 \cdot 7 = 42$ sau $b_4 = -\sqrt{b_3b_5} = -42$.

Dacă $b_4 = 42$, rația progresiei va fi $q = b_4 : b_3 = \frac{42}{36} = \frac{7}{6}$; dacă $b_4 = -42$, atunci $q = -\frac{7}{6}$.

Răspuns: $b_4 = 42$, $q = \frac{7}{6}$ sau $b_4 = -42$, $q = -\frac{7}{6}$. ◀

EXEMPLUL 3 Aflați primul termen și rația progresiei geometrice (b_n), dacă $b_3 + b_6 = 504$ și $b_4 - b_5 + b_6 = 378$.

Rezolvare. Fie q – rația acestei progresii. Obținem un sistem de două ecuații cu două variabile b_1 și q:

$$\begin{cases} b_1q^2 + b_1q^5 = 504, \\ b_1q^3 - b_1q^4 + b_1q^5 = 378. \end{cases}$$

Împărțim aparte părțile stângi și părțile drepte ale ecuațiilor sistemului:

$$\frac{b_1q^2(1+q^3)}{b_1q^3(1-q+q^2)} = \frac{504}{378}.$$

Apoi obținem:

$$\frac{b_1q^2(1+q)(1-q+q^2)}{b_1q^3(1-q+q^2)} = \frac{4}{3};$$

$$\frac{1+q}{q}=\frac{4}{3};$$
$$4q = 3 + 3q;$$
$$q = 3.$$

Substituind valoare q în prima ecuație a sistemului, obținem: $9b_1 + 243b_1 = 504$; de aici $252b_1 = 504$; $b_1 = 2$.

Răspuns: $b_1 = 2$, $q = 3$. ◀

EXEMPLUL 4 Pentru care valoare a lui x valoarea expresiilor $3x$, $7 - x$ și $5x + 7$ vor fi termeni consecutivi ai unei progresii geometrice? Aflați aceste numere.

Rezolvare. Dacă valirile expresiilor $3x$, $7 - x$ și $5x + 7$ sânt termeni consecutivi ai progresiei geometrice, pentru ele este corectă egalitatea $(7 - x)^2 = 3x(5x + 7)$.

De unde obținem:

$$49 - 14x + x^2 = 15x^2 + 21x;$$
$$14x^2 + 35x - 49 = 0;$$
$$2x^2 + 5x - 7 = 0;$$
$$x = 1 \text{ sau } x = -\frac{7}{2}.$$

Dacă $x = 1$, vom obține progresia geometrică: 3, 6, 12.

Dacă $x = -\frac{7}{2}$, vom obține progresia geometrică: $-\frac{21}{2}$, $\frac{21}{2}$, $-\frac{21}{2}$.

Răspuns: pentru $x = 1$ avem: 3, 6, 12; pentru $x = -\frac{7}{2}$ avem: $-\frac{21}{2}$, $\frac{21}{2}$, $-\frac{21}{2}$. ◀

Analizăm o problemă de aplicație, care este des rezolvată de lucrătorii bancari, și de cei, ce-și țin banii în bancă sub procente.

EXEMPLUL 5 Fie, că un client a depus în bancă o sumă de 100 000 grn cu 10 % anuale. Ce sumă de bani va fi pe contul clientului peste 7 ani cu condiția, că clientul acești 7 ani nu va scoate bani de pe cont?

Rezolvare. Fie a_0 – capitalul inițial al clientului, adică

$$a_0 = 100\ 000 \text{ grn}.$$

Notăm prin $a_1, a_2, ..., a_7$ uma de bani de pe contul clientului la finalul primului, al doilea, ..., al șaptelea an. Evident, că șirul $a_0, a_1, a_2, ..., a_7$ este o progresie geometrică, rația căreia este 110 %, adică 1,1.

Atunci

$$a_7 = a_0 \cdot 1{,}1^7 = 100\,000 \cdot 1{,}1^7 = 194\,871{,}71 \text{ (grn)}.$$

Răspuns: 194 871,71 grn. ◀

În mod analogic este rzolvată această problemă în caz general, dacă capitalul inițial, egal cu a_0, este depus în bacă cu dividente de p % anuale. La finalul anului n vom avea:

$$\boxed{a_n = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

Formila obținută este numită **formulă de procente compuse**.

?

1. Care șir este numit progresie geometrică?
2. Care număr este numit rația progresiei geometrice?
3. Ce formă are formula termenului de rangul n al progresiei geometrice?
4. Ce relație este între trei termeni succesivi ai progresiei geometrice?
5. Ce formă are formula procentelor compuse? Explicați formula.

EXERCIȚII

18.1.° Dintre șirurile date determinați progresiile geometrice, primul termen și rația acestor progresii:

1) 2, 6, 18, 36; 4) 81, 27, 9, 3; 7) –9, –9, –9, –9;
2) 4, 8, 16, 32; 5) 2, –2, 2, –2; 8) 1, 2, 3, 5;
3) 10, 20, 30, 40; 6) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2$; 9) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4$.

18.2.° Al șaselea termen al progresiei geometrice (b_n) este egal cu 8, Iar rația este egală cu –4. Aflați al șaptelea termen al progresiei.

18.3.° Aflați al șaptelea termen al progresiei geometrice (b_n), dacă $b_8 = 16$, iar rația progresiei $q = \frac{3}{4}$.

18.4.° Aflați rația progresiei geometrice (b_n), dacă:
1) $b_1 = 6$, $b_2 = -3$; 2) $b_7 = -9$, $b_8 = 15$; 3) $b_{10} = 3\sqrt{3}$, $b_{11} = 9$?

18.5.° Aflați rația progresiei geometrice (b_n), dacă:
1) $b_{12} = 24$, $b_{13} = 4$; 2) $b_4 = -\frac{2}{9}$, $b_5 = \frac{4}{15}$.

18.6.° Cu ce este egal primul termen al progresiei geometrice (b_n), dacă $b_2 = 12$, iar rația progresiei $q = \frac{1}{3}$?

18.7.° Al șaptelea termen al progresiei geometrice este egal cu $\frac{1}{2}$, iar rația progresiei este egal cu 4. Aflați al șaselea termen al progresiei.

18.8.° Aflați primii patru termeni ai progresiei geometrice (x_n), dacă $x_1 = 0{,}2$, iar rația progresiei $q = -5$.

18.9.° Primul termen al progresiei geometrice este egal cu $-\frac{1}{27}$, iar rația este egală cu 3. Aflați primii cinci termeni ai progresiei.

18.10.° În progresia geometrică (y_n) primul termen $y_1 = 64$, iar rația $q = -\frac{1}{2}$. Aflați: 1) y_3; 2) y_6; 3) y_{10}.

18.11.° În progresia geometrică (c_n) primul termen $c_1 = 9$, iar rația $q = -1$. Aflați: 1) c_{21}; 2) c_{50}.

18.12.° Primul termen al progresiei geometrice este $b_1 = \frac{1}{125}$, iar rația $q = 5$. Aflați: 1) b_4; 2) b_7.

18.13.° Aflați rația și al cincilea termen al progresiei geometrice $\frac{1}{216}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{6}$, ...

18.14.° Aflați rația și al șaselea termen ai progresiei geometrice 18, 12, 8, ...

18.15.° Demonstrați, că dacă șirul (x_n) – este progresie geometrică, atunci $x_3x_{13} = x_5x_{11}$.

18.16.° Demonstrați, că dacă șirul (y_n) – este progresie geometrică, atunci $y_4y_{21} = y_8y_{17}$.

18.17.° Un client a depus la bancă 5000 grn cu 8 % anuale. Ce sumă de bani va fi pe contul clientului peste trei ani?

18.18.° Cu patru ani în urmă uzina confecționa 10 000 unități de confecție pe an. Datorită modernizației producerii și a creșterii productivității muncii uzina a reușit creșterea anuală a producerii cu 20 %. Câte unități de confecții vor fi produse în anul curent?

18.19.° După două reduceri consecutive a prețului cu 10 % o masă de birou costă 2916 grn. Aflați prețul inițial al mesei.

18.20.° După două măriri consecutive a prețului cu 25 % o lustră costă 937 grn 50 cop. Aflați prețul inițial al lustrei

18.21.° Populația orașului în ultimii doi ani a crecut de la 40 000 de locuitori până la 44 100. Aflați creșterea medie anuală în procente a populației din acest oraș.

18.22.° În urma a două reduceri consecutive cu acelaș număr de procente prețul scaunului a scăzut de la 800 grn până la 578 grn. Cu câte procente o fost redus prețul de fiecare dată?

18.23.• Exprimați termenii b_8, b_{13} și b_{60} ai progresiei geometrice (b_n) prin b_7 și rația q.

18.24.• Exprimați termenii c_{18}, c_{36} și c_{50} ai progresiei geometrice (c_n) prin c_{12} și rația q.

18.25.• Aflați rația progresiei geometrice (b_n), dacă:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_8 = 64$; 2) $b_6 = 75$, $b_8 = 27$.

18.26.• Aflați primul termen al progresiei geometrice (c_n), dacă:

1) $c_4 = \frac{1}{98}$, iar rația $q = \frac{2}{7}$; 2) $c_6 = 100$, $c_9 = 100\ 000$.

18.27.• Numărul 486 este termen al progresiei geometrice 2, 6, 18, ... Aflați rangul acestui termen.

18.28.• Numărul 96 este termen al progresiei geometrice $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, ... Aflați rangul acestui termen.

18.29.• Care două numere trebuiesc introduse între numerele 6 și 750, ca ele, împreună cu numerele date, să formeze o progresie geometrică?

18.30.• Care patru numere trebuiesc introduse între numerele 0,5 și 16, ca ele , împreună cu numerele date, să formeze o progresie geometrică?

18.31.• Șirul (b_n) este definit prin formula termenului de rangul n: $b_n = 5 \cdot 4^{n-2}$. Este oare acest șir o progresie geometrică? În caz de răspuns afirmativ, aflați primul termen și rația progresiei.

18.32.• Demonstrați, că șirul (x_n), definit prin formula termenului de rangul n: $x_n = 7^{n+1}$, este o progresie geometrică, aflați primul termen și rația progresiei.

18.33.• Șirul (b_n) este o progresie geometrică. Aflați:

1) b_5, dacă $b_4 = 9$, $b_6 = 25$;
2) b_{20}, dacă $b_{19} = -3$, $b_{21} = -12$;
3) b_{17}, dacă $b_{16} = 2$, $b_{18} = 10$.

18.34.• Pentru care valoare a variabilei x numerele x, $3x$ și 18 vor fi termeni consecutivi ai unei progresii geometrice?

18.35.• Pentru care valoare a variabilei y numerele -1, $2y$ și -8 vor fi termeni consecutivi ai unei progresii geometrice?

18.36.• Al doilea termen al progresiei geometrice este egal cu 6. Aflați produsul primilor trei termeni ale acestei progresii.

18.37.• Al treilea termen al progresiei geometrice este egal cu 3. Aflați produsul primilor cinci termeni ale acestei progresii.

18.38.• Demonstrați, că în progresia geometrică produsul termenilor egal depărtați de extremele progresiei, este egal cu produsul termenilor extremi.

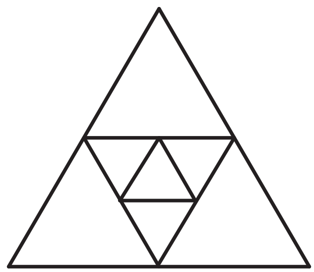


Fig. 18.1

18.39.• Într-un triunghi echilateral cu latura a consecutiv sunt înscrise triunghiuri în așa fel, că vârfurile triunghiului consecutiv sunt centre ale laturilor triunghiului precedent (fig. 18.1). Demonstrați, că perimetrele acestor triunghiuri formează o progresie geometrică și scrieți formula termenului de rangul n a acestei progresii.

18.40.• Este oare progresie geometrică șirul:

1) 2^{-n}, 2^{-2n}, 2^{-3n}, 2^{-4n};
2) 2^{n}, 2^{n^2}, 2^{n^3}, 2^{n^4};
3) 2^{n}, 2^{n+1}, 2^{n+2}, 2^{n+3}?

În caz de răspuns afirmativ, calculați rația progresiei.

18.41.• Șirul (b_n) este progresie geometrică cu rația q. Este oare progresie geometrică șirul:

1) b_1, b_3, ..., b_{2n-1};
2) $2b_1$, $2b_2$, ..., $2b_n$;
3) $b_1 + b_2$, $b_2 + b_3$, ..., $b_{n-1} + b_n$;
4) $\frac{1}{b_1}$, $\frac{1}{b_2}$, ..., $\frac{1}{b_n}$?

În caz de răspuns afirmativ, calculați rația progresiei.

18.42.• Șirul (b_n) este progresie geometrică cu rația q. Este oare progresie geometrică șirul:

1) b_2, b_4, ..., b_{2n};
2) b_1b_3, b_2b_4, b_3b_5, ..., $b_{n-2}b_n$?

În caz de răspuns afirmativ, calculați rația progresiei.

18.43.•• Introduceți între numerele 80 și 5 așa trei numere, ca ele, împreună cu numerele date, să formeze o progresie geometrică.

18.44.•• Introduceți între numerele 6 și 486 așa trei numere, ca ele, împreună cu numerele date, să formeze o progresie geometrică.

18.45.•• Aflați primul termen și rația progresiei geometrice (b_n), dacă:

1) $b_5 = 3b_3$ și $b_6 - b_2 = 48$;
2) $b_4 + b_7 = \frac{56}{9}$ și $b_5 - b_6 + b_7 = \frac{14}{9}$;
3) $b_5 - b_4 = 168$ și $b_3 + b_4 = -28$.

18.46.•• Aflați primul termen și rația progresiei geometrice (b_n), dacă:

1) $b_4 - b_2 = 30$ și $b_4 - b_3 = 24$;
2) $b_2 - b_5 = 78$ și $b_3 + b_4 + b_5 = -117$.

18.47.•• Pentru care valoare a lui x valorile expresiilor $2x + 1$, $x + 5$ și $x + 11$ vor fi termeni consecutivi ai unei progresii geometrice? Aflați termenii acestei progresii.

18.48.•• Pentru care valoare a lui x valorile expresiilor $x + 6$, $x + 2$ și $3x - 4$ vor fi termeni consecutivi ai unei progresii geometrice? Aflați termenii acestei progresii.

18.49.•• Demonstrați, că dacă termenii șirului (b_n) sunt diferiți de zero și pentru orice număr natural $n > 1$ este corectă egalitatea $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, șirul (b_n) este o progresie geometrică.

18.50.•• Aflați progresia geometrică, ce conține șase termeni, dacă suma primilor trei termeni ai progresiei este egală cu 168, iar suma ultimilor trei termeni este egală cu 21.

18.51.•• Fie date trei numere pozitive, ce formează o progresie aritmetică. Suma lor este egală cu 21. Dacă la aceste numere se va adăuga respectiv 2, 3 și 9, numerele obținute vor forma o progresie geometrică. Aflați aceste numere.

18.52.•• Fie date trei numere, ce formează o progresie aritmetică. Suma lor este egală cu 30. Dacă de la primul număr se va scădea 5, de la al doilea se va scădea 4, iar al treilea va rămâne neschimbat, numerele obținute vor forma o progresie geometrică. Aflați aceste numere.

18.53.•• Fie date trei numere, ce formează o progresie geometrică. Suma lor este egală cu 65. Dacă de la primul număr se va scădea 1, al doilea va rămâne neschimbat, iar de la al treilea se va scădea 19, numerele obținute vor forma o progresie aritmetică. Aflați aceste numere.

18.54.•• Fie date trei numere, ce formează o progresie geometrică. Suma lor este egală cu 26. Dacă la aceste numere se va adăuga respectiv 1, 6 și 3, numerele obținute vor forma o progresie aritmetică. Aflați aceste numere.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

18.55. Aflați valoarea expresiei:

1) $\frac{7^9}{7^{10}}$; 2) $\frac{125^3}{25^4}$; 3) $\frac{32^5}{64^4}$; 4) $\frac{39^8}{3^{10}\cdot 13^7}$.

18.56. Transformați expresia în fracție:

1) $\frac{2}{x+y}+\frac{3}{x-y}$; 2) $\frac{a+1}{a-4}+\frac{a-1}{a-6}$; 3) $\frac{c-7}{c+1}-\frac{c-3}{c-5}$.

18.57. Demonstrați identitatea:

$$\left(\frac{2b}{b^3+1}:\frac{1-b}{b^2-b+1}+\frac{2}{b-1}\right)\cdot\frac{b^2-2b+1}{4}:\frac{b-1}{b+1}=\frac{1}{2}.$$

18.58. Demonstrați, că valoarea expresiei este număr rațional:

1) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\sqrt{10}+9}-3}-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\sqrt{10}+9}+3}$; 2) $\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}+\frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$.

18.59. Trei lucrători au săpat cartofii în 2 zile, lucrând câte 8 ore pe zi. În câte zile pot săpa aceeași normă de cartofi 6 lucrători, muncind câte 6 ore pe zi, dacă productivitatea muncii la toți lucrătorii este identică?

18.60. La un aliaj de cupru și zinc, ce conținea cu 12 kg de cupru mai mult, decât de zinc, au fost adăugate 6 kg de cupru. In urma acestui proces conținutul în procente de zinc din aliaj a scăzut cu 5 %. Căte kilograme de zinc și căte kilograme de cupru conținea aliajul inițial?

18.61. La un aliaj de magneziu și aluminiu, ce conținea 12 kg de aluminiu, au fost adăugate 5 kg de magneziu, ca urmare conținutul în procente de magneziu din aliaj a crescut cu 20 %. Căte kilograme de magneziu conținea aliajul inițial?

18.62. Un client a depus la bancă o sumă de 4000 grn. În primul an la cont au fost adăugate oarecare procente anuale, iar în al doilea an procentele bancare au crescut cu 4 %. La sfârșitul anului doi pe cont erau 4664 grn. Care era norma de procente bancare în primul an?

18.63. Un client a depus la bancă o sumă de 10 000 grn. În primul an la cont au fost adăugate oarecare procente anuale, iar în al doilea an procentele bancare au scăzut cu 2 %. La sfârșitul anului doi pe cont erau 11 880 grn. Care era norma de procente bancare în primul an?

Cum pot fi evitate situațiile nedeterminate în problemele cu calcule procentuale

Problemele, în care este vorba de scimbarea normelor de procentare, pot provoca complicații. Exemplu tipic este problema 18.62, 18.63, în care este vorba despre mărirea (micșorarea) “procentelor bancare”. Cota bancară – este o măsură, asimilară altor valori variabile – viteza, distanța, prețul și altele. Unica deosebire constă în aceea, că însăși mărimea este reprezentată de asemenea în procente. De aceea situația, în care merge vorba despre schimbarea cotei bancare, permite concluzii neunanime. Comparăm:

Creșterea prețului x	Creșterea cotei bancare x	Modelul matemetic, ce descrie valoarea nouă
Prețul a crescut cu 10 grn	Cota bancară a crescut cu 10 %	$x + 10$
Prețul a crescut cu 10 %	Cota bancară a crescut cu 10 %	$1{,}1x$

Vedem, că în cazul cotei bancare descrierile verbale pentru diferite modele s-au dovedit a fi identice.

Pentru a evita tractări neunanime, în economie și în alte domenii, unde sunt prezente calcule procentuale, este folosită noțiunea de “puncte procentuale”.

Vom demonstra un exemplu.

În clasei a 9-a învață 100 de copii, din care 20 % la începutul anului au fost eminenți.

Dacă vom spune, că la finalul anului numărul de eminenți a crescut cu 5 %, această frază înseamnă, că numărul de eminenți (ce exprimă numărul de persoane) s-a mărit cu 5 % din această mărime. Numărul de eminenți din clasă era de 20 de persoane; după ce numărul de eminenți s-a mărit cu 5 %, numărul de eminenți a devenit de 21 de persoane.

Dacă, totuși, dorim să spunem, că indexul “20 %” s-a mărit și acum a devenit “25 %”, trebuie aplicate cuvintele “puncte procentuale”: “la sfârșitul anului numărul de eminenți a crescut cu 5 puncte procentuale”. La o așa formulare numărul de eminenți la sfârșitul anului va fi de 25 de persoane.

Acum putem refraza problemele ăn ața fel ca să fie exclusă tractarea necorectă.

18.62. Un client a depus la bancă o sumă de 4000 grn. În primul an la cont au fost adăugate oarecare procente anuale, iar în al doilea an procentele bancare au crescut cu 4 puncte procentuale. La sfârșitul anului doi pe cont erau 4664 grn. Care era norma de procente bancare în primul an?

19. Suma primilor n termeni ai progresiei geometrice

Fie dată o progresie geometrică finită b_1, b_2, b_3, ..., b_{n-1}, b_n. Suma termenilor acestei progresii o notăm prin S_n.

Vom avea:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n. \qquad (*)$$

Vom afla formula pentru calcularea acestei sume.

Începem cu o problemă, rezolvarea căreia ne va sugera, cum se obține formula căutată.

Vom studia progresia geometrică 1, 2, 2^2, ..., 2^{62}, 2^{63} și vom calcula suma termenilor ei S_{64}:

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Înmulțim ambele părți ale egalității scrise cu rația progresiei – numărul 2:

$$2S_{64} = 2 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63} + 2^{64}.$$

Calculăm diferența $2S_{64} - S_{64}$:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcccccr} & 2S_{64} = & & & & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \ldots & + & 2^{63} & + & 2^{64} \\ - & S_{64} = & & 1 & + & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \ldots & + & 2^{63} & & \\ \hline & 2S_{64} - S_{64} = & & -1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & + & 0 & + & 2^{64} \end{array}$$

De aici $S_{64} = 2^{64} - 1$.

Poate să vă apară întrebarea firească: de ce am ales ca exemplu anume această progresie 1, 2, 2^2, ..., 2^{62}, 2^{63}?

La această progresie se referă o veche legendă. Înțeleptul indian, care a inventat focul de șah, a cerut pentru invenția sa De ma radja o recompensă, la prima vedere, modestă: pentru prima celulă a tablei de șah un grăunte de grâu, pentru a doua – 2 grăunțe de grâu, pentru a treia – 4 și așa mai departe – pentru fiecare următoare celulă de două ori mai multe grăunțe, decât pentru celula precedentă.

E clar că numărul total de grăunțe, cerute de inventator, este egal cu $S_{64} = 2^{64} - 1$.

Bogatul radja a fost şocat, când i s-a sus, că nu e capabil să satisfacă dorinţa “modestă” a înţeleptului. Sensul constă în aceea, că valoarea expresiei $2^{64} - 1$ este egal cu 18 446 744 073 709 551 615.

Ca să înţelegem cât de imens este acest număr, ne imaginăm că grâul este depozitat într-un ambar cu suprafaţa de 12 hectare. Atunci înălţimea ambarului va fi mai mare decât distanţa de la Pământ până la Soare.

Folosim metoda discutată pentru a afla formula de calculare a sumei (*).

Scriem egalitatea (*) în următoarea formă:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Înmulţim ambele părţi ale egalităţii cu q:

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1q^n.$$

Aflăm diferenţa $S_nq - S_n$:

$$-\begin{array}{rcccccccccccccc} S_nq = & & & b_1q & + & b_1q^2 & + & b_1q^3 & + & \ldots & + & b_1q^{n-1} & + & b_1q^n \\ S_n = & b_1 & + & b_1q & + & b_1q^2 & + & b_1q^3 & + & \ldots & + & b_1q^{n-1} & & \\ \hline S_nq - S_n = & -b_1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & + & 0 & + & b_1q^n \end{array}$$

De aici,

$$S_nq - S_n = b_1q^n - b_1.$$

În aşa fel $S_n\ (q - 1) = b_1\ (q^n - 1)$.

Pentru $q \neq 1$ obţinem:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1\,(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Această formulă este numită formula sumei primilor n termeni ai progresiei geometrice cu raţia diferită de 1.

Dacă $q = 1$, toţi termenii progresiei sunt egali cu primul termen. Atunci $S_n = nb_1$.

EXEMPLUL Pentru orice număr natural n suma primilor n termeni ai progresiei geometrice poate fi calculată cu formula $S_n = 10\ (2^n - 1)$. Aflaţi primul termen şi raţia acestei progresii.

Rezolvare. Fie b_1 – primul termen al progresiei, q – raţia progresiei.

Atunci $b_1 = S_1 = 10\ (2 - 1) = 10$; $b_1 + b_2 = S_2 = 10\ (2^2 - 1) = 30$. De aici $b_2 = 30 - b_1 = 20$; $q = \frac{b_2}{b_1} = 2$.

Răspuns: $b_1 = 10$, $q = 2$. ◀

1. Cum poate fi calculată suma primilor n termeni ai progresiei geometrice cu rația diferită de unu?

2. Cu ce este egală suma primilor n termeni ai progresiei geometrice, rația căreia este egală cu unu?

EXERCIȚII

19.1.° Aflați suma primilor n termeni ai progresiei geometrice (b_n) cu rația q, dacă:

1) $b_1 = 10$, $q = 3$, $n = 4$;

2) $b_1 = -4$, $q = -1$, $n = 10$;

3) $b_1 = 0{,}6$, $q = 2$, $n = 5$;

4) $b_1 = 4{,}5$, $q = \frac{1}{3}$, $n = 8$;

5) $b_1 = -9$, $q = \sqrt{3}$, $n = 6$;

6) $b_1 = 8$, $q = -\frac{1}{2}$, $n = 4$.

19.2.° Aflați suma primilor n termeni ai progresiei geometrice (b_n) cu rația q, dacă:

1) $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 9$;

2) $b_1 = 15$, $q = \frac{2}{3}$, $n = 3$;

3) $b_1 = 18$, $q = -\frac{1}{3}$, $n = 5$;

4) $b_1 = 4$, $q = -\sqrt{2}$, $n = 4$.

19.3.° Aflați suma primilor cinci termeni ai progresiei geometrice:

1) 12, 72, 432, ...;

2) $\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, ...

19.4.° Aflați suma primilor patru termeni ai progresiei geometrice:

1) –0,6; 3; –15; ...;

2) 56; 42; 31,5; ... .

19.5.• Aflați suma primilor șase termeni ai progresiei geometrice (c_n), dacă:

1) $c_4 = 216$, iar rația progresiei este $q = -3$;

2) $c_1 = 5\sqrt{5}$, $c_5 = 125\sqrt{5}$, iar rația progresiei este $q > 0$.

19.6.• Aflați suma primilor șapte termeni ai progresiei geometrice (x_n), dacă $x_3 = 24$, $x_8 = 768$.

19.7.$^{\bullet}$ Progresia geometrică (b_n) este definită prin formula termenului de rangul n: $b_n = 10 \cdot 3^{n-1}$. Aflați suma primilor cinci termeni ai progresiei.

19.8.$^{\bullet}$ Progresia geometrică (y_n) este definită prin formula termenului de rangul n: $y_n = \frac{(-2)^{n+1}}{20}$. Aflați suma primilor zece termeni ai progresiei.

19.9.$^{\bullet}$ Rația progresiei geometrice este egală cu $\frac{2}{3}$, iar suma primilor patru termeni este egală cu 65. Aflați primul termen al progresiei.

19.10.$^{\bullet}$ Suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice este egală cu 516, iar primul termen este egal cu 12. Aflați rația progresiei.

19.11.$^{\bullet}$ Suma termenilor unei progresii geometrice finite este egală cu 605. Aflați numărul de termeni ai progresiei, dacă primul termen $b_1 = 5$, iar rația progresiei $q = 3$.

19.12.$^{\bullet}$ Bacteria, nimerind într-un mediu favorabil, peste douăzeci de minute se divide în două bacterii, fiecare din ele peste 20 min se divide din nou în două și așa mai departe. Câte bacterii se formează dintr-o bacterie în timp de o zi?

19.13.$^{\bullet}$ Pentru orice n suma primilor n termeni ai progresiei geometrice poate fi calculată prin formula $S_n = 4\,(3^n - 1)$. Aflați al treilea termen al acestei progresii.

19.14.$^{\bullet}$ Pentru orice n suma primilor n termeni ai progresiei geometrice poate fi calculată prin formula $S_n = 6\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)$. Aflați al patrulea termen al acestei progresii.

19.15.$^{\bullet\bullet}$ Aflați suma pătratelor primilor șase termeni ai progresiei geometrice, primul termen al căreia este egal cu $2\sqrt{3}$, iar rația este egală cu $\sqrt{3}$.

19.16.$^{\bullet\bullet}$ Aflați suma cuburilor primilor patru termeni ai progresiei geometrice (b_n), dacă $b_1 = 3$ și $b_2 = -6$.

19.17.$^{\bullet\bullet}$ Demonstrați identitatea

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1).$$

19.18.$^{\bullet\bullet}$ Demonstrați identitatea

$$a^{2n+1} + 1 = (a + 1)(a^{2n} - a^{2n-1} + \ldots + a^2 - a + 1).$$

19.19.* Aflați numărul de termeni ai unei progresii geometrice finite, rația căreia $q = 3$, ultimul termen $c_n = 162$, iar suma tuturor termenilor $S_n = 242$.

EXERCIȚII PENTRU REPETARE

19.20. Rezolvați sistemul de inegalități:

1) $\begin{cases} (x+2)(x-6) \leqslant (x+2)(x+1)+4, \\ 2(6x-1) \geqslant 7(2x-4); \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-2}{3} \geqslant \dfrac{x-3}{4} - x, \\ 1 - x > 0{,}5x - 5. \end{cases}$

19.21. Aflați intervalul de creștere al funcției:

1) $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 4$;

2) $f(x) = -3x^2 - 2x + 4$.

19.22. Construiți graficul funcției:

1) $y = -\dfrac{6}{x} + 3$;

2) $y = -\dfrac{6}{x+3}$;

3) $y = -\dfrac{6}{x+3} + 3$.

19.23. În prima zi doi lucrători au confecționat 90 de piese. În a doua zi primul lucrător a confecționat cu 10 % de piese mai mult, iar al doilea lucrător – cu 15 % de piese mai mult decât în prima zi. În total în a doua zi au fost confecționate 101 piese. Câte piese a confecționat fiecare lucrător în prima zi?

19.24. Simplificați expresia:

1) $\sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{16a^2}$, dacă $a<0$ și $b>0$;

2) $\sqrt{(x-y)^2} - \sqrt{9y^2}$, dacă $x>0$ și $y<0$.

19.25. Prețul unui costum a fost de 600 grn. După o dublă reducere prețul costumului a devenit de 432 grn, reducerea a doua în procente fiind de două ori mai mare decât prima reducere. Cu câte procente s-a făcut reducerea de fiecare dată?

19.26. O oarecare marfă costa 200 grn. Întâi prețul marfei a fost ridicat cu câteva procente, iar apoi coborât cu același număr de procente, după ce prețul a devenit de 192 grn. Cu câte procente de fiecare dată a fost schimbat prețul marfei?

ÎNSUȘIM ACȚIUNI NESTANDARTE

19.27. Pe plan sunt repartizate 100 de puncte. Se știe, că prin fiecare patru din ele trece graficul unei funcții pătrate. Demonstrați, că toate aceste 100 de puncte aparțin graficului unei funcții pătrate.

Sumarea

Parelel cu fiecare șir a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... poate fi studiat și următorul șir (S_n):

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,\ \ldots .$$

Deducerea formulei pentru termenul de rangul n al șirului (S_n) este **numită sumare a primilor *n* termeni ai șirului** (a_n).

Deoarece cunoașteți formulele pentru calcularea sumei primilor n termeni ai progresiei aritmetice și ai progresiei geometrice, prin aceasta sunteți capabili să sumați primii n termeni ai acestor șiruri.

Cu ajutorul literei grecești Σ (sigma) suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ este notată în următorul fel: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

De exemplu, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$;

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Unul din metodele eficiente de sumare este aplicarea formulelor deja demonstrate.

EXEMPLUL 1 Aflați suma $\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{25}{8} + \ldots + \frac{2^n \cdot n + 1}{2^n}$.

Rezolvare. Avem: $\frac{2^k \cdot k + 1}{2^k} = k + \frac{1}{2^k}$.

Suma dată poate fi scrisă în forma următoare:

$$\left(1 + \frac{1}{2^1}\right) + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(3 + \frac{1}{2^3}\right) + \ldots + \left(n + \frac{1}{2^n}\right).$$

De aici

$$\left(1 + \frac{1}{2^1}\right) + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(3 + \frac{1}{2^3}\right) + \ldots + \left(n + \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= (1+2+3+\ldots+n) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 1 - \frac{1}{2^n}.$$

În așa fel, $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k \cdot k + 1}{2^k} = \frac{n(n+1)}{2} + 1 - \frac{1}{2^n}$. ◀

EXEMPLUL 2 Aflați suma $7 + 77 + 777 + \underbrace{77\ldots7}_{n}$.

Rezolvare. Deoarece $\underbrace{77\ldots7}_{n} = 7 \cdot \underbrace{11\ldots1}_{n}$, pentru rezolvarea însărcinării este suficient să calculăm suma $S_n = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{11\ldots1}_{n}$ și rezultatil obținut să-l înmulțim cu 7.

Avem:

$$S_n = \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \ldots + \frac{10^n-1}{9} =$$

$$= \frac{1}{9}(10 + 10^2 + \ldots + 10^n) - \frac{1}{9}\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n} =$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \frac{10(10^n-1)}{10-1} - \frac{n}{9} = \frac{10(10^n-1)}{81} - \frac{n}{9}.$$

Suma căutată este egală cu $\frac{70(10^n-1)}{81} - \frac{7n}{9}$. ◀

Dacă pentru șirul dat (a_n) vom reuși să găsim un așa șir (b_n), încât $a_n = b_{n+1} - b_n$, atunci suma $\sum_{k=1}^{n} a_k$ poate fi ușor calculată. Într-adevăr, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \ldots + (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1$.

EXEMPLUL 3 Aflați suma $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!$.

Rezolvare. Avem:

$$n \cdot n! = (n+1)! - n!.$$

Acum putem scrie:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \ldots + ((n+1)! - n!) = (n+1)! - 1.$$ ◀

EXEMPLUL 4 Demonstrați, că dacă (a_n) – este progresie aritmetică cu termeni diferiți de zero, atunci

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

Rezolvare. Avem: $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\cdot\frac{1}{d}$, unde d – rația progresiei. Atunci

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)\cdot\frac{1}{d}+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)\cdot\frac{1}{d}+\ldots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\cdot\frac{1}{d}=$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=$$

$$=\frac{a_{n+1}-a_1}{da_1\cdot a_{n+1}}=\frac{a_1+dn-a_1}{da_1\cdot a_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$ ◄

EXEMPLUL 5 Aflați suma $\frac{5}{1\cdot2}+\frac{13}{2\cdot3}+\frac{25}{3\cdot4}+\ldots+\frac{2n^2+2n+1}{n(n+1)}$.

Rezolvare. Avem:

$$\frac{2n^2+2n+1}{n(n+1)}=\frac{2n(n+1)+1}{n(n+1)}=2+\frac{1}{n(n+1)}=2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Atunci poate fi scris:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2+2k+1}{k(k+1)}=\left(2+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(2+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=2n+1-\frac{1}{n+1}=\frac{n(2n+3)}{n+1}.$$ ◄

EXERCIȚII

1. Aflați suma $\sum_{k=1}^{n}\frac{5^k\cdot k-1}{5^k}$.

2. Aflați suma $\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{k+1}\cdot k^2+3^k\cdot\ k+1}{3^k}$.

3. Aflați suma

1) $9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{n}$;

2) $5+55+555+\ldots+\underbrace{55\ldots5}_{n}$.

4. Demonstrați, că dacă șirul (a_n) – este progresie aritmetică cu termeni pozitivi, atunci

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}}}.$$

5. Aflați suma:

1) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-7)(4n-3)}$;

2) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{7}{2\cdot 3}+\frac{13}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$;

3) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}$;

4) $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\frac{7}{144}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

6. Aflați suma:

1) $\frac{1}{2\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 17}+\ldots+\frac{1}{(5n-3)(5n+2)}$;

2) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{13}{2\cdot 3}+\frac{37}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n^3+n^2+1}{n(n+1)}$.

7. Aflați suma: $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2-1}$.

8. Aflați suma: $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

9. Aflați suma: $S_n=1+2a+3a^2+4a^3+\ldots+n\cdot a^{n-1}$, unde $a\neq 1$.

ÎNSĂRCINAREA № 4 "VERIFICAȚI-VĂ CUNOȘTINȚELE" ÎN FORMĂ DE TESTE

1. Dintre șirurule date arătați progresia aritmetică.
A) 6, 9, 12, 13;
B) 2, 9, 16, 23;
C) 2, 8, 14, 21;
D) 2, 9, 16, 21.

2. Care dintre șirurile date este progresie geometrică?
A) 3, 6, 9, 12;
B) 3, 5, 7, 14;
C) 3, 6, 12, 24;
D) 5, 8, 12, 16.

3. Cu ce este egal al șaselea termen al progresiei aritmetice, primul termen al căreia este egal cu 12, iar rația este egală cu 0,4?
A) 14,4; B) 14; C) 13,6; D) 13.

4. Aflați rația progresiei aritmetice (a_n), dacă $a_1 = -7$, $a_2 = 5$.
A) –2; B) 2; C) –12; D) 12.

5. Calculați suma primilor zece termeni ai progresiei aritmetice, primul termen al căreia este $a_1 = -16$, iar rația $d = 3$.
A) –10; B) –15; C) –20; D) –25.

6. Aflați al patrulea termen al progresiei geometrice, primul termen al căreia este $b_1 = -\frac{1}{8}$, iar rația $q = -2$.
A) –2; B) –1; C) 1; D) 2.

7. Cu ce este egală rația progresiei geometrice (b_n), dacă $b_1 = 36$, $b_2 = 9$?
A) $\frac{1}{4}$; B) 4; C) 27; D) –27.

8. Calculați suma primilor patru termeni ai progresiei geometrice, primul termen al căreia este $b_1 = 2$, iar rația $q = 3$.
A) 56; B) 80; C) 96; D) 192.

9. Aflați suma primilor cincisprezece termeni ai progresiei aritmetice (a_n), definite prin formula termenului de rangul n: $a_n = -4n + 13$.
A) –300; B) –285; C) –275; D) –250.

10. Care este rangul termenului progresiei aritmetice (a_n), ce este egal cu 6,2, dacă $a_1 = 0{,}2$, iar rația $d = 0{,}4$?
A) 14; B) 15; C) 16; D) 17.

11. Câți termeni pozitivi conține progresia aritmetică (a_n), dacă $a_1 = 41$ și $a_2 = 38$?
A) 13; B) 14; C) 15; D) 16.

12. Aflați rația progresiei aritmetice (a_n), dacă $a_1 + a_5 = 28$ și $a_2 + a_3 = 24$.
A) 4; B) 3; C) 2,5; D) 2.

13. Un client a depus la bancă 4000 grn cu 10 % anuale. Ce sumă de bani va fi pe contul clientului peste 2 ani?
A) 4840 grn; B) 4800 grn; B) 4080 grn; D) 4440 grn.

14. Prețul dulapului a fost de 15 000 grn. După două reduceri consecutive de preț cu acelaș număr de procente prețul dulapului a devenit de 9600 grn. Cu câte procente a fost redus prețul de fiecare dată?
A) 25 %; B) 10 %; C) 15 %; D) 20 %.

15. Aflați suma tuturor numerelor naturale, divizibile la 9 și mai mici decât 120.
A) 810; B) 702; C) 819; D) 882.

16. Cu ce este egală suma primilor nouă termeni ai progresiei aritmetice (a_n), dacă $a_1 + a_4 + a_{10} = 18$?
A) 48; C) 72;
B) 54; D) calcularea este imposibilă.

17. Pentru care valoare a lui x valorile expresiilor $7x - 8$, $2x + 1$ i $x + 6$ sunt termeni consecutivi ai progresiei aritmetice?
A) 1; C) –1;
B) 2; D) așa valoare nu există.

18. Pentru care valoare pozitivă a lui x valorile expresiilor $x + 1$, $3x - 1$ și $2x + 10$ sunt termeni consecutivi ai progresiei geometrice?
A) 1,5; C) 3;
B) 4; D) așa valoare nu există.

PRINCIPALUL ÎN PARAGRAFUL 3

Șirul

Obiectele, numerotate consecutiv cu numerele naturale 1, 2, 3, ..., n, ..., formează un șir.

Progresia aritmetică

Șirul, fiecare termen al căruia, începând cu al doilea, este egal cu termenul precedent, la care se adună unul și același număr, este numit progresie aritmetică.

Formula termenului de rangul *n* al progresiei aritmetice

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1)$$

Proprietatea termenilor progresiei aritmetice

Orice termen al progresiei aritmetice, în afară de primul (și ultimul, dacă progresia este finită), este egal cu media aritmetică a doi termeni vecini cu el:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Formulele sumei primilor *n* termeni ai progresiei aritmetice

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d\,(n - 1)}{2} \cdot n$$

Progresia geometrică

Progresie geometrică se numește șirul cu primul termen diferit de zero, în care fiecare termen, începând cu al doilea, este egal cu termenul precedent, înmulțit cu unul și același număr, diferit de zero.

Formula termenului de rangul *n* al progresiei geometrice

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Proprietatea termenilor progresiei geometrice

Pătratul oricărui termen al progresiei geometrice, în afară de primul (și ultimul, dacă progresia este finită), este egal cu produsul a doi termeni vecini cu el:

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}.$$

Formula sumei primilor n termeni ai progresiei geometrice

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

20. Exerciții pentru repetarea cursului de algebră de clasa 9-a

20.1. Scrieți în formă de inegalitate afirmația:
1) a – număr pozitiv;
2) b – număr negativ
3) modulul numărului c – număr nenegativ;
4) modulul sumei a două numere raționale a și b nu e mai mare decât suma modulelor acestor numere.

20.2. Demonstrați inegalitatea:
1) $3a(a+6)<(3a+6)(a+4)$;
2) $(2b-1)(3b+2)<(3b-1)(2b+1)$;
3) $25m^2+n^2\geqslant 10mn$;
4) $2a^2-4a+5>0$;
5) $x^2+x+1>0$;
6) $4y^2-12\geqslant 12y-21$;
7) $a^2+b^2+2\geqslant 2(a+b)$;
8) $a^2+b^2+c^2+3\geqslant 2(a+b+c)$;
9) $2a^2+5b^2+2ab+1>0$;
10) $x^2+y^2+15>6x+4y$.

20.3. Demonstrați, că este corectă inegalitatea:
1) $a^5-5\geqslant 5a^4-a$, dacă $a\geqslant 5$;
2) $b^3+b+2\geqslant 0$, dacă $b\geqslant -1$;
3) $c^3+c\leqslant 3c^2+3$, dacă $c\leqslant 3$.

20.4. Se știe, că $a>3$. Comparați cu zero valoarea expresiei:
1) $2a-6$;
2) $15-5a$;
3) $2a-4$;
4) $(a-3)(2-a)$;
5) $\frac{a-2}{a-1}$;
6) $\frac{-4}{3-a}$.

20.5. Se știe, că $b<2$. Comparați cu zero valoarea expresiei:
1) $4b-8$;
2) $(b-2)^2(b-3)$;
3) $\frac{b-3}{(2-b)(b-4)}$.

20.6. Demonstrați, că dacă $a>b>1$, atunci

$$a^2b+b^2+a>ab^2+a^2+b.$$

20.7. Demonstrați, că dacă $a < b < 2$, atunci

$$a^2b + 2b^2 + 4a < ab^2 + 2a^2 + 4b.$$

20.8. Comparați cu zero numărul a, dacă:

1) $6a < 5a$;
2) $-2a < 2a$;
3) $9a > 4a$;
4) $-37a > -3a$.

20.9. Demonstrați, că dacă $a > 7$ și $b > 3$, atunci:

1) $4a + b > 31$;
2) $10a + 3b > 75$.

20.10. Demonstrați, că dacă $a > 5$ și $b < -2$, atunci:

1) $3a - b > 17$;
2) $5b - 2a < -10$.

20.11. Comparați, dacă este posibil:

1) $4a + b$ și 12, dacă $a > 2$ și $b > 5$;
2) $b - 2a$ și 0, dacă $a > 4$ și $b < 6$;
3) $b - 3a$ și 1, dacă $a < 6$ și $b < 0$;
4) $a - 5b$ și 1, dacă $a < 12$ și $b > 2$.

20.12. Numerele pozitive a, b, c și d satisfac condițiile $a > b$, $d < b$ și $c > a$. Aranjați în ordine ascendentă numerele $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ i $\frac{1}{d}$.

20.13. Se știe, că $5 < a < 8$. Estimați valoarea expresiei:

1) $0{,}4a$;
2) $a - 3$;
3) $2a + 1$;
4) $-3a + 2$.

20.14. Se știe, că $3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2$. Estimați valoarea expresiei:

1) $2\sqrt{10}$;
2) $-4\sqrt{10}$;
3) $3\sqrt{10} - 5$.

20.15. Se știe, că $3 < m < 4$ și $-3 < n < -2$. Estimați valoarea expresiei:

1) $2m + 3n$;
2) $0{,}2m - n$;
3) $-5m + 4n$;
4) $m - \frac{m}{n}$.

20.16. Rezolvați inegalitatea:

1) $16 - 4n \geqslant 8$;
2) $10x > 13x + 6$;
3) $6x + 3 > 5x - 2$;
4) $\frac{4 - 3x}{7} < 1$;
5) $3x + 4 < 5x - 4$;
6) $4x - 7 > 7x - 6$.

20.17. Aflați suma numerelor naturale, ce aparțin domeniului de definiție al funcției $y = \sqrt{10 - 3x}$.

20.18. Fie dată funcția $f(x) = 3x + 12$. Pentru care valori ale argumentului funcția va avea:

1) valori pozitive;
2) valori negative;
3) valori, ce aparțin intervalului $[-4; 7]$?

20.19. Alcătuiți o inegalitate de tipul $ax + b > 0$, în care x – variabila, a și b – oarecare numere, pentru care mulțimea de soluții este:

1) intervalul $(-3; +\infty)$;

2) intervalul $(-\infty; -1{,}6)$;

3) mulțimea numerelor reale;

4) mulțimea vidă.

20.20. Aflați mulțimea de soluții ale inegalității:

1) $(2x-3)^2 \leqslant (4x-1)(x-2)+7$;

2) $(x-2)(2+x) \geqslant 2-(x+4)(1-x)$;

3) $\dfrac{1-x}{2}+3<3x-\dfrac{2x+1}{4}$;

4) $\dfrac{3x-37}{2}-9>\dfrac{7-2x}{4}+2x$;

5) $\dfrac{5x-3}{5} \geqslant \dfrac{3x+4}{3}-\dfrac{29}{15}$.

20.21. Cu ce este egală cea mai mică soluție întreagă a inegalității

$$\frac{3x+5}{4}-1 \leqslant \frac{x-2}{3}+x?$$

20.22. Cu ce este egală cea mai mare soluție întreagă a inegalității

$$\frac{3x+5}{2}<\frac{8-x}{3}?$$

20.23. Sunt oare echivalente inegalitățile:

1) $\dfrac{x+1}{2}+\dfrac{x-1}{3}<1$ i $3(x+1)+2(x-1)<1$;

2) $(x+3)(x^2+4)>0$ i $x+3>0$;

3) $x-1>3$ i $x-1+\dfrac{1}{x-5}>3+\dfrac{1}{x-5}$;

4) $x+2<1$ i $x+2+\dfrac{1}{x}<1+\dfrac{1}{x}$?

20.24. Rezolvați sistemul de inegalități:

1) $\begin{cases} x-3<2x-3, \\ 4x+5>10-x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9+2x \leqslant 3x+7, \\ x-2>2x-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-5)^2-15 \geqslant (x-3)(x-4)-50, \\ 4(x+7)-16 \geqslant 2-x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4}+\dfrac{x+1{,}7}{3} \geqslant \dfrac{3x+1}{5}, \\ \dfrac{x+2}{4}-\dfrac{x+8}{5}<\dfrac{3x-1}{10}. \end{cases}$

20.25. Aflați suma soluțiilor întregi ale sistemului de inegalități:

1) $\begin{cases} 3x - 5 < 23 - 4x, \\ 7x - 9 \leqslant 9x + 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2(3x - 4) < 3(4x - 5) + 23, \\ 4(x + 1) \leqslant 3x + 5. \end{cases}$

20.26. Alcătuiți un sistem de două inegalități lineare cu o variabilă, mulțimea de soluții a căruia este:

1) intervalul $(-2; +\infty)$;

2) intervalul $\left[-4; \dfrac{1}{3}\right]$;

3) intervalul $(-\infty; -10]$;

4) mulțimea vidă;

5) mulțumea, formată din unicul număr 8;

6) mulțimea numerelor reale.

20.27. Se știe, că $1 \leqslant a \leqslant 4$. Câte valori întregi poate avea expresia $0{,}5a - 3$?

20.28. Rezolvați inegalitatea dublă:

1) $-3 \leqslant 2x - 1 < 5$;

2) $-1 < 3x - 9 \leqslant 6$;

3) $2 < 7 - 4x < 11$;

4) $-2 \leqslant \dfrac{1 - x}{3} \leqslant 1$.

20.29. Pentru ce valori ale lui a sistemul de inegalități are măcar o soluție:

1) $\begin{cases} x < 4, \\ x > a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > a; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x \leqslant -3, \\ x \geqslant a; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \leqslant a? \end{cases}$

20.30. Pentru ce valori ale lui a sistemul de inegalități nu are o soluții:

1) $\begin{cases} x < 6, \\ x > a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \leqslant 5, \\ x > a; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x \leqslant -8, \\ x \geqslant a; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x > 0, \\ x \leqslant a? \end{cases}$

20.31. Pentru ce valori ale lui a mulțimea de soluții ale sistemului de inegalități $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x > a \end{cases}$ sunt:

1) intervalul $[7; +\infty)$;

2) intervalul $[3; +\infty)$;

3) intervalul $(-2; +\infty)$;

4) mulțimea vidă?

20.32. Pentru ce valori ale lui a ecuația

$$x^2 - (2a + 2)\,x - 2a - 3 = 0$$

are două rădăcini negative diferite?

20.33. Pentru ce valori ale lui a ecuația

$$x^2 - (2a - 1)\,x + a^2 - a - 6 = 0$$

are două rădăcini diferite, ce aparțin intervalului $[-3;\ 2]$?

20.34. Pe figura 20.1 este reprezentat graficul funcției $y = f\,(x)$, definite pe mulțimea numerelor reale. Folosind figura, determinați:
1) zerourile funcției;
2) intervalele de creștere și descreștere ale funcției;
3) mulțimea de soluții ale inegalității $f\,(x) > 0$.

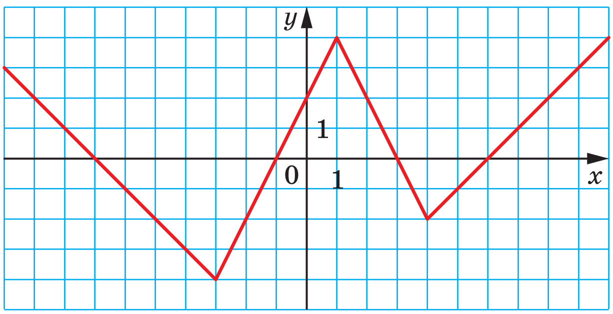


Fig. 20.1

20.35. Pe figura 20.2 este reprezentat graficul funcției $y = g\,(x)$, definite pe intervalul $[-5;\ 6]$. Folosind figura, determinați:
1) mulțimea valorilor funcției;
2) zerourile funcției;
3) intervalele de creștere și descreștere ale funcției;
4) mulțimea de soluții ale inegalității $g\,(x) \leqslant 0$.

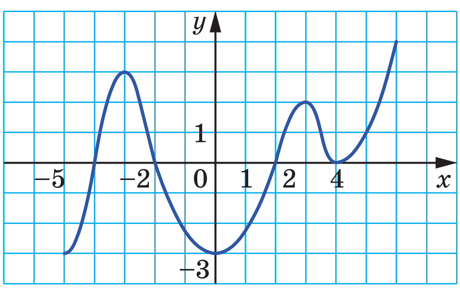


Fig. 20.2

20.36. Determinați, care din funcțiile lineare date sunt crescătoare, iar care – descrescătoare:

1) $y = -4x$;
2) $y = 4x - 7$;
3) $y = \frac{x}{4}$;
4) $y = 4 - x$.

20.37. Care din funcțiile date sunt descrescătoare:

1) $y = x^2$;
2) $y = \frac{2}{x}$;
3) $y = -2x$;
4) $y = 2x$?

20.38. Rezolvați ecuația prin metoda grafică:

1) $(x+1)^2 = -\frac{2}{x}$;
2) $x^2 - 2 = -\sqrt{x}$;
3) $\sqrt{x+1} = 5 - x$;
4) $\frac{6}{x-2} = x + 3$;
5) $(x+2)^2 = \sqrt{x} + 4$;
6) $\frac{5}{x} + 3 = (x-3)^2$.

20.39. Cu ce este egală abscisa vărfului parabolei:

1) $y = 4x^2 - 12x + 1$;
2) $y = -0{,}2x^2 - 2x + 3$?

20.40. Determinați, vârful căreia din parabolele date este situat pe axa ordonatelor și care – pe axa abscicelor:

1) $y = x^2 - 4x + 3$;
2) $y = x^2 - 8$;
3) $y = x^2 - 6x + 9$;
4) $y = x^2 + 2x$.

20.41. Aflați valorile b și c, pentru care funcția $y = x^2 + bx + c$:

1) are un singur zerou în punctul $x = -3$;
2) are cea mai mică valoare, egală cu 4, în punctul $x = 0$;
3) are zerouri în punctele $x = -2$ și $x = 5$.

20.42. Construiți graficul funcției date, aflați domeniul de valori, intervalele de creștere și descreștere:

1) $y = -2x^2 + 1$;
2) $y = 0{,}5x^2 - 2$;
3) $y = x^2 + 6x + 5$;
4) $y = 4x - x^2$;
5) $y = -x^2 + 4x - 3$;
6) $y = x^2 - 4x + 5$;
7) $y = 2x^2 - 3x - 2$;
8) $y = -3x^2 + 8x + 3$.

20.43. Pentru care valoare c graficul funcției $y = x^2 - 6x + c$:

1) trece prin originea sistemului de coordonate;
2) are un singur punct comun cu axa absciselor;
3) intersectează axa ordonatelor în punctul A $(0; -4)$;
4) intersectează axa absciselor în punctul B $(2; 0)$?

20.44. Pentru care valoare b graficul funcției $y = x^2 + bx + 2$:
1) are un singur punct comun cu axa absciselor;
2) nu are puncte comune cu axa absciselor;
3) intersectează axa absciselor în puncte, distanța dintre care este egală cu 4?

20.45. Graficul funcției $y = x^2 + px + q$ trece prin punctele A (1; 1) și B (2; 2). Trece oare acest grafic prin punctul:
1) C (–1; –1); 2) D (3; 5)?

20.46. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ trece prin punctul (0; 10), iar vârful parabolei este punctul (6; –2). Aflați coeficienții a, b și c.

20.47. Valoarea funcției pătrate $y = ax^2 + bx + c$ în punctul $x = -1$ este egală cu 0, iar în $x = \frac{1}{4}$ funcția are cea mai mică valoare, ce este egală cu $-\frac{25}{8}$. Aflați coeficienții a, b și c.

20.48. Pentru ce valoare a lui m:
1) cea mai mică valoare a funcției $y = x^2 - 6x + m$ este egală cu –8;
2) cea mai mare valoare a funcției $y = -x^2 + 4x - m$ este egală cu 12?

20.49. Construiți graficul funcției:
1) $y = \frac{x^3 + 4x^2 - 5x}{x}$;
2) $y = \frac{x^3 + 8}{x + 2} - 3$;
3) $y = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$;
4) $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 - 9}$.

20.50. Pentru care valoare a lui a suma pătratelor rădăcinilor ecuației $x^2 + ax + a - 2 = 0$ va avea cea mai mică valoare?

20.51. Se știe, că $a + 3b = 10$. Care este cea mai mică valoare, posibilă pentru expresia $a^2 + b^2$ și pentru ce valori a și b se obține această valoare?

20.52. Rezolvați inegalitatea:
1) $x^2 - 4x + 3 > 0$;
2) $x^2 - 6x - 40 \leqslant 0$;
3) $x^2 + x + 1 \geqslant 0$;
4) $x^2 - x + 1 < 0$;
5) $-3x^2 + 2x + 1 > 0$;
6) $x - x^2 < 0$;
7) $x^2 + 25 \geqslant 0$;
8) $0{,}1x^2 - 2 \leqslant 0$.

20.53. Aflați soluțiile întregi ale inegalității:
1) $\frac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0$;
2) $-4x^2 + 3x + 1 \geqslant 0$.

20.54. Pentru ce valori ale lui c polinomul $2x^2 - 2x + 5c$ are valori pozitive pentru orice valoare x?

20.55. Rezolvați sistemul de inegalități:

1) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x > -1{,}2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x > 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x \geqslant 6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leqslant 0, \\ x \geqslant 6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > -\dfrac{1}{3}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > -2; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 \geqslant 0, \\ x \leqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

20.56. Rezolvați inegalitatea:

1) $\dfrac{x^2 - 16}{|x+1|} \leqslant 0$; 2) $\dfrac{x^2 - 5x - 14}{|x-8|} \geqslant 0$.

20.57. Aflați domeniul de definiție al funcției:

1) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + 3x - 10}} + \dfrac{1}{3x - 9}$;

2) $y = \dfrac{6}{\sqrt{12 + x - x^2}} - \dfrac{2}{x^2 - 4}$;

3) $y = \sqrt{49 - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}$.

20.58. Pentru ce valori ale lui a ecuația dată va avea două rădăcini diferite:

1) $2x^2 + ax + a - 2 = 0$;

2) $(2a - 1)\, x^2 + (a - 3)\, x + 1 = 0$;

3) $ax^2 - (3a + 1)\, x + a = 0$?

20.59. Pentru ce valori ale lui a mulțimea de soluții ale ecuației date este mulțimea numerelor reale:

1) $5x^2 - x + a > 0$;

2) $ax^2 - 10x - 5 < 0$;

3) $ax^2 - 2(a-1)\, x + 4a \leqslant 0$;

4) $(a - 1)\, x^2 - (a + 1)\, x + a + 1 > 0$?

20.60. Rezolvați sistemul de ecuații prin metoda grafică:

1) $\begin{cases} y - x^2 = 3, \\ x + y = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = -12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = -x^2 + 4x - 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = x^2 - 5. \end{cases}$

20.61. Rezolvați sistemul de ecuații:

1) $\begin{cases} x - 4y = -6, \\ x^2 + 4y^2 = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + y = -2, \\ 3x^2 - 2xy = 28; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 13, \\ xy = 15; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - 2y = 18, \\ xy = -12; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x + y = -3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x - y = 1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = -2, \\ x + y = 1; \end{cases}$

8) $\begin{cases} (x-2)(y+1) = 1, \\ x - y = 3; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{8}, \\ x + y = 12; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{5}, \\ y - x = 4. \end{cases}$

20.62. Aflați soluțiile sistemului de ecuații:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ xy(x + y) = 30; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + xy + y = 5, \\ x - xy + y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = 2, \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 25, \\ x^2 - 3xy = 4; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 14, \\ xy = -6; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{10}, \\ xy = 50; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{16}{15}, \\ x^2 - y^2 = 16; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{25}{12}, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2 + 2xy = 5, \\ y^2 - 4xy = -4. \end{cases}$

20.63. Aflați coordonatele punctelor de intersecție:

1) a dreptei $3x - y - 5 = 0$ și a parabolei $y = \frac{2}{3}x^2 - 2x + 4;$

2) a dreptei $2x - 3y - 3 = 0$ și a hiperbolei $xy = 3$;

3) a circumferinței $x^2 + y^2 = 13$ și a hiperbolei $xy = 6$.

20.64. Pentru care valoare a lui a sistemul de ecuații are o singură soluție:

1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ x + y = a? \end{cases}$

20.65. Diagonala dreptunghiului este egală cu 17 cm, iar aria lui este egală cu 120 cm^2. Aflați laturile dreptunghiului.

20.66. Ipotenuza truinghiului dreptunghic este egală cu 41 cm, iar aria lui este egală cu – 180 cm^2. Aflați catetele triunghiului.

20.67. Din două orașe, distanța dintre care este egală cu 240 km, concomitent au pornit unul în întâmpinarea altuia două automobile. Peste 2 ore după începutul mișcării distanța dintre automobile era de 40 km, întâlnirea automobilelor fiind deja înfăptuită. Aflați viteza fiecărui automobil, dacă distanța dintre orașe un automobil a parcurs-o cu o oră mai devreme decât al doilea.

20.68. Din două sate, distanța dintre care este egală cu 20 km, concomotent unul în întâmpinarea altuia au pornit doi pietoni, care s-au întâlnit peste două ore. Aflați viteza, cu care s-a deplasat fiecare pieton, dacă unul din pietoni parcurge distanța dintre sate cu 1 oră 40 min mai repede, decât al doilea.

20.69. Din punctele A și B concomitent unul în întâmpinarea altuia au pornit corespunzător o ciclistă și un pieton, care s-au întâlnit peste o oră după start. Aflați viteza fiecăruia din ei, dacă ciclista a ajuns în punctul B cu 2 ore 40 min mai devreme, decât pietonul în punctul A, iar distanța dintre puncte este egală cu 16 km.

20.70. Din orașul A spre orașul B concomitent au pornit un autobus și un automobil. Peste 1 oră 30 min după ce au pornit automobilul s-a departat de autobus cu 30 km. Când automobilul a ajuns la orașul B, autobusul se afla la o distanță de 80 km de acest oraș. Aflați viteza autobusului și viteza automobilului, dacă distanța dintre orașele A și B este egală cu 300 km.

20.71. La bazin au fost conectate două țevi. Dacă ambele țevi vor fi deschise, bazinul va fi umplut cu apă în 1,5 ore, iar dacă jumătate de bazin va fi umplută prin prima țeavă, iar restul – prin a doua, bazinul va fi umplut în 4 ore. În cât timp poate fi umplut bazinul prin fiecare țeavă?

20.72. Două lucrătoare pot îndeplini o oarecare însărcinare în 9 ore. Dacă prima lucrătoare ar lucra 1 oră 12 min, iar apoi a doua – 2 ore , ar fi îndeplinit 20 % din însărcinare. În cât timp poate îndeplini însărcinarea fiecare lucrătoare, muncind autonom?

20.73. Barca parcurge 15 km în direcția cursului apei în același timp, ca și 12 km contra curentului. Cu ce este egală viteza curentului apei, dacă 1 km în direcția cursului și 1 km contra barca îi parcurge în 27 min?

20.74. Un ciclist a parcurs distanța din sat până la stațiunea de cale ferată pe șoseaua de 10 km și s-a întors pe un drum de țară cu lungimea de 5 km, aflându-se pe traseu 1 oră 5 min. Aflați viteza ciclistului pe șosea și viteza ciclistului pe drumul de țară, dacă calea de retur ciclistul a făcut-o cu 15 min mai repede, decât drumul spre stațiune.

20.75. Din orașele A și B, distanța dintre care este egală cu 180 km, concomitent unul în întâmpinarea altuia au pornit un autobus și un camion. După ce s-au întâlnit, autobusul, ce pornise din orașul A, a ajuns în orașul B peste 1 oră, iar camionul, a ajuns în orașul A peste 2 ore 15 min. Aflați viteza autobusului și viteza camionului.

20.76. Șirul (a_n) este definit prin formula termenului de rangul n: $a_n = n^2 - 4n + 4$. Aflați primii șase termeni ai acestui șir. Este oare termen al acestui șir numărul 1) 256; 2) 361; 3) 1000; 4) 10 000? În caz de răspuns afirmativ, calculați rangul acestui termen.

20.77. Aflați numărul de termeni ai progresiei aritmetice finite (a_n), dacă $a_1 = 4$, rația progresiei $d = -5$, iar ultimul termen este egal cu -36.

20.78. Ultimul termen al progresiei aritmetice, ce conține 7 termeni, este egal cu $3\frac{1}{6}$. Aflați primul termen al acestei progresii, dacă rația este egală cu $\frac{3}{8}$.

20.79. Care este rangul primului termen negativ al progresiei aritmetice 2; 1,9; 1,8; 1,7; ...?

20.80. Ce ranguri au termenii progresiei aritmetice 8, 11, 14, ..., care sunt mai mari decât 100, dar mai mici decât 200?

20.81. Suma a câți termeni ai progresiei aritmetice 105, 98, 91, ... este egală cu zero?

20.82. Aflați mărimile unghiurilor unui patrulater convex, dacă ele formează o progresie aritmetică cu rația de 54°.

20.83. Lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic formează o progresie aritmetică. Aflați catetele triunghiului, dacă ipotenuza este egală cu 4 cm.

20.84. Se știe, că șirul infinit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ este o progresie aritmetică cu rația $d \neq 0$. Este oare progresie aritmetică șirul:

1) $-a_2, -a_4, -a_6, -a_8, \ldots$;

2) $a_1 + 5, a_2 + 5, a_3 + 5, \ldots$;

3) $1 - a_1, 1 - a_2, 1 - a_3, \ldots$;

4) $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots$;

5) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots$;

6) $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \ldots$;

7) $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, \ldots$?

În caz de răspuns afirmativ, aflați cu ce este egală rația progresiei.

20.85. Suma a trei numere, ce formează o progresie aritmetică, este egală cu 12, iar suma pătratelor acestor numere este egală cu 80, aflați aceste numere.

20.86. Demonstrați, că dacă numerele a, b și c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, valorile expresiilor $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ de asemenea vor fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

20.87. Demonstrați, că:

1) dacă lungimile a, b și c ale laturilor unui triunghi formează o progresie aritmetică, atunci $ac = 6Rr$, unde R și r – respectiv razele circumferinței circumscrise și ale circumferinței înscrise a triunghiului.

2) dacă lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic formează o progresie aritmetică, rația aceste progresii este egală cu raza circumferinței înscrise a acestui triunghi;

3) dacă lungimile laturilor unui triunghi cu un unghi de 120° formează o progresie aritmetică, aceste lungimi se raportă ca $3 : 5 : 7$.

20.88. Aflați suma primilor n termeni ai șirului:

1) $\frac{a-1}{a}, \frac{a-3}{a}, \frac{a-5}{a}, \ldots$;

2) $\frac{a-b}{a+b}, \frac{3a-b}{a+b}, \frac{5a-b}{a+b}, \ldots$.

20.89. Al treilea termen al progresiei aritmetice este egal cu 11, iar al șaptelea termen este egal cu 27. Câți termeni ai acestei progresii trebuiesc adunați, ca suma lor să fie egală cu 253??

20.90. Fie S_n – suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice (a_n). Aflați primul termen și rația progresiei, dacă:
1) $a_3 + a_5 + a_8 = 18$ și $a_2 + a_4 = -2$;
2) $a_5 - a_3 = -4$ și $a_2a_4 = -3$;
3) $a_2 + a_4 + a_6 = 36$ și $a_2a_3 = 54$;
4) $S_5 - S_2 - a_5 = 0{,}1$ și $a_7 + S_4 = 0{,}1$;
5) $S_4 = 9$ și $S_6 = 22{,}5$.

20.91. Suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice finite este egală cu 3, suma primilor patru termeni este egală cu 16, iar suma tuturor termenilor este egală cu 220. Aflați numărul de termeni ai acestei progresii.

20.92. Cu ce este egală suma primilor șaptesprezece termeni ai progresiei aritmetice, dacă al nouălea termen este egal cu 15?

20.93. Lungimile laturilor triunghiului dreptunghic formează o progresie aritmetică, iar cateta mică este egală cu a. Aflați aria triunghiului.

20.94. Aflați suma primelor douăzeci de numere impare, care, fiind împărțite la 3, au restul egal cu 1.

20.95. Cu ce este egală suma tuturor numerelor cu două cifre, ce nu se divid nici la 3, nici la 5?

20.96. Pot oare lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic forma o progresie geometrică?

20.97. După două reduceri consecutive cu unul și același număr de procente prețul unei cratițe a scăzut de la 300 grn până la 192 grn. Cu câte procente a fost redus prețul de fiecare dată?

20.98. Fie dată o progresie geometrică (b_n) cu rația q. Aflați:
1) b_1, dacă $b_5 = -\frac{16}{27}$, $q = -\frac{2}{3}$;
2) q, dacă $b_1 = \frac{2}{3}$, $b_4 = \frac{9}{32}$;
3) suma primilor șapte termeni ai progresiei, dacă $b_7 = 192$, $q = 2$;
4) suma primilor cinci termeni ai progresiei, dacă $b_5 = 9\sqrt{6}$, $q = \sqrt{3}$.

20.99. Suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice, ce conține 6 termeni, e de 8 ori mai mare decât suma ultimilor trei termeni. Cu ce este egală rația progresiei?

20.100. Aflați 4 numere, care formează o progresie geometrică, dacă suma termenilor extremi este egală cu $\frac{35}{3}$, iar suma termenilor intermediari este egală cu 10.

20.101. Se știe, că șirul infinit b_1, b_2, b_3, ... este o progresie geometrică cu rația $q \neq 1$. Este oare progresie geometrică șirul:

1) b_2, b_4, b_6, ...;

2) $b_1 + 1$, $b_2 + 1$, $b_3 + 1$, ...;

3) b_1^2, b_2^2, b_3^2, ...;

4) $-b_1$, $-b_3$, $-b_5$, ...;

5) $b_1 + b_2$, $b_2 + b_3$, $b_3 + b_4$, ...;

6) $\frac{1}{b_1}$, $\frac{1}{b_2}$, $\frac{1}{b_3}$, ...?

În caz de răspuns afirmativ, aflați cu ce este egală rația progresiei.

21. Regulile de bază ale combinatoricii

Prin câte metode se pot aranja unul după altul la coada de la cantină elevii clasei voastre? Prin câte metode poate fi ales în clasa voastră șeful clasei și adjunctul său? Prin câte metode pot fi repartizate medaliile de aur, argint și bronz la campionatul mondial de fotbal?

Răspunzând la aceste întrebări, e necesar de calculat, câte combinații diferite, formate după unele reguli, pot fi alcătuite din elementele unei mulțimi finite. Domeniul matematicii, care se ocupă de rezolvarea problemelor de acest gen, este numit **combinatorică.**

La baza rezolvării majorității problemelor de combinatorică stau două reguli: regula de adunare și regula de înmulțire.

Analizăm următorul exemplu. Pe un turist l-au interesat 5 trasee din zona Niprului și 7 trasee din Carpați. Clarificăm, prin câte metode își poate organiza turistul concediul, având timp pentru un singur traseu.

Deoarece în total sunt $5 + 7 = 12$ trasee diferite, unul din ele poate fi ales prin 12 metode.

Generalizare a acestui exemplu este următoarea regulă.

Regula de adunare. **Dacă mulțimea A este alcătuită din m elemente, iar mulțimea B – din k elemente, în așa fel, că mulțimile nu au elemente comune, alegerea "a sau b", unde $a \in A$, $b \in B$, poate fi înfăptuită prin $m + k$ metode.**

Regula de adunare poate fi generalizată pentru trei sau mai multe mulțimu. De exemplu, dacă mulțimile A, B și C conțin respectiv m, k și n elemente, în așa fel, că nici una din aceste mulțimi nu are elemente comune cu alta, alegerea "a sau b sau c", unde $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, poate fi înfăptuită prin $m + k + n$ metode.

Ne adresăm din nou la exemplul despre alegerea traseelor. Dacă turistul are timp pentru două trasee și el dorește să vizioneze întâi zona Niprului, iar apoi Carpații, el își poate organiza odihna prin 35 de metode. Într-adevăr, dacă este ales un traseu din zona Niprului, al doilea traseu poate fi oricare din cele 7 trasee carpatice. Deoarece sunt 5 trasee din zona Niprului, numărul de cupluri (traseu niprean; traseu carpatic) este egal cu $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \cdot 5 = 35$.

Aceste calcule sunt ilustrate în tabela:

		Trasee în Carpați						
		1	2	3	4	5	6	7
Trasee în zona Niprului	1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
	2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
	3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
	4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
	5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	(5; 7)

Generalizarea acestui exemplu este următoerea regulă.

Regula de înmulțire. Dacă elementul *a* poate fi ales prin *m* metode și după fiecare astfel de alegere elementul *b* poate fi ales prin *k* metode[1], alegerea "*a* și *b*" în ordinea stabilită poate fi făcută prin *mk* metode.

Regula de înmulțire de asemenea poate fi generalizată. De exemplu, dacă elementul a poate fi ales prin m metode, după fiecare astfel de alegere elementul b poate fi ales prin k metode, și după ce au fost alese elementele a și b, elementul c poate fi ales prin n metode, alegerea "a și b și c" poate fi făcută prin mkn metode.

EXEMPLUL 1 Din clasa, în care învață 28 de elevi, trebuiesc aleși trei elevi de serviciu , câte unul pentru fiecare etaj al școlii. Prin câte metode poate fi făcută această selecție?

Rezolvare. Există 28 de metode de alegere ale elevului de serviciu pentru parter. După ce această alegere este făcută, rămân 27 de elevi, din care poate fi făcută alegerea elevului de serviciu pentru primul etaj. După alegerea elevilor de serviciu pentru parter și primul etaj, elevul de serviciu pentru etajul doi poate fi ales prin 26 metode.

În așa fel, după regula de înmulțire numărul de metode de alegere a trei elevi de serviciu este egal cu: $28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\ 656$.

Răspuns: prin 19 656 de metode. ◄

1 Vom numi această proprietate "principiul de independență al numărului de alegeri".

EXEMPLUL 2 Pe figura 21.1 este reprezentată schița drumurilor, ce unesc orașele A și B. Prin câte metode se poate ajunge din orașul A în orașul B?

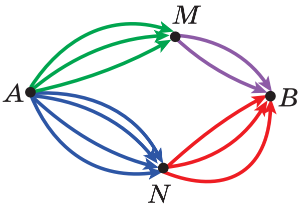


Fig. 21.1

Rezolvare. Folosind regula de înmulțire, ajungem la concluzia, că din orașul A la orașul B prin orașul M se poate ajunge prin $3 \cdot 2 = 6$ metode, iar prin orașul N – $4 \cdot 3 = 12$ metode. Atunci, conform regulei de adunare numărul total de metode este egal cu: $6 + 12 = 18$ metode.

Răspuns: prin 18 metode. ◄

?

1. Formulați regula de adunare.
2. Formulați regula de înmulțire.

EXERCIȚII

21.1.° De la poalele muntelui spre vârful muntelui duc trei cărări. Câte trasee există de la poalele muntelui până în vârful muntelui și apoi în jos spre poalele muntelui?

21.2.° Unei echipe i-au fost propuse tricouri de trei culori: roșii, verzi și albastre, și pantaloni scurți – albi și galbeni. Câte variante de alegere a echipamentului are echipa?

21.3.° Tatiana are trei rochițe și două perechi de pantofi. Câte variante de îmbrăcare și încălțăminte are Tatiana?

21.4.° În clasă sânt 10 băeți și 7 fetițe. Câte variante de complectare a unui cuplu de dans, alcătuite dintr-un băiat și o fetiță există?

21.5.° Câte numere de trei cifre pot fi alcătuite din cifrele:
1) 1 i 2; 2) 0 i 1
(cifrele se pot repeta)?

21.6.° Din orașul A pînă la orașul B duc 4 șosele, iar din orașul B până la orașul C duc 3 soșele (fig. 21.2). Prin câte metode se poate ajunge din orașul A până la orașul C?

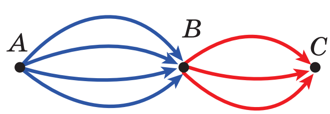


Fig. 21.2

21.7.° Cafeneaua propune un meniu, alcătuit din 3 supe, 6 garnire și 5 deserturi. Câte metode de completare ale prânzului există (câte un fel din fiecare categorie)?

21.8.° Vom analiza silabe de două litere, dintre care prima este consoană, iar a doua – vocală. Câte silabe pot fi alcătuite din literele cuvântului:
1) Poltava; 2) Harkiv?

21.9.• Câte numere de patru cifre, în care toate cifrele sunt diferite, pot fi alcătuite din cifrele 1, 2, 3, 4, dacă aceste numere trebuie să se înceapă:
1) cu cifra 4; 2) cu notația “23”?

21.10.• Câte numere de trei cifre pot fi scrise cu ajutorul cifrelor 0, 1, 2, 3, 4?

21.11.• Câte numere cu două cifre, în care toate cifrele sunt pare, există?

21.12.• Câte numere cu două cifre, în care toate cifrele sunt impare, există?

21.13.• O monetă este aruncată de 3 ori. Câte șiruri diferite de număr și pajură pot fi obținute?

21.14.• Zarul este aruncat de 3 ori. Câte șiruri diferite de puncte pot fi obținute?

21.15.• Fiecare celulă a unui pătrat 2×2 poate fi vopsită în culoare albastră sau culoare roșie. Câte metode de vopsire ale acestui pătrat există?

21.16.• Prin câte metode pot fi alese pe tabla de șah un pătrățel alb și un pătrățel negru, ce nu sunt situate pe aceeași verticală și orizontală

21.17.•• Căte numere pare de cinci cifre există?

21.18.•• Câte numere cu cinci cifre, divizibile la 10, există?

21.19.•• Un colecționar are pentru schimb 11 timbre și 8 monete, iar al doilea – 9 timbre și 7 monete. Prin câte metode colecționarii pot face schimbul unui timbru cu un timbru sau a unei monete cu o monetă?

21.20.•• Câte numere de cinci cifre, în care toate cifrele au aceeași paritate, există?

22. Frecvența și probabilitatea evenimentului aleator

Deseori avem posibilitatea de a înfăptui supravegheri, experiențe, de a participa le experimente și studii. Deseori astfel de studii se termină cu rezultate, inițial imprevizibile.

Analizăm câteva exemple tipice.

- Dacă deschidem o carte la întâmplare, este imposibil de pronosticat, ce număr de pagină o să vedem.
- Înainte de începutul meciului de fotbal este imposibil de pronosticat, cu ce scor se va termina joaca.
- Nu puteți fi siguri, că apăsând întrerupătorul, vom aprinde lampa de masă.
- Nu există garanție, că din oul de găină, pus în incubator, se va naște un pui.

De regulă, supravegherile sau experiențele sunt determinate de unele complexe de condiții. De exemplu, meciul de fotbal parcurge conform regulamentului; ouăle de găină trebuie să fie în incubator nu mai puțin de 21 de zile cu îndeplinirea metodicei de modificare a temperaturii și umidității aerului.

Rezultatul supravegherii, experienței, studiului este numit **eveniment**.

Eveniment aleator se numește un așa rezultat al suprevegherii sau al experienței, care, la îndeplinirea complexului de condiții, poate să apară, dar poate și să nu apară.

De exemplu, dacă e aruncată o monetă, eveniment aleator este căderea pajurei. Găsirea unei scrisori în cutia poștală de asemenea este un eveniment aleator.

Să presupunem, că au fost lansate 1 000 000 de bilete de loterie și e pus în miză un automobil. Se poate oare câștiga automobilul, fiind cumpărat un singur bilet de loterie? Desigur, că se poate, cu toate că un așa eveniment este *puțin probabil*. Dar dacă în joc sunt puse 10 automobile. Evident, **probabilitatea** câștigului sporește. Dacă ne imaginăm, că în joc sunt puse 999 999 automobile, probabilitatea câștigului este mult mai mare.

În așa fel, **probabilitatea evenimentelor aleatoare** pot fi comparate. Dar pentru aceasta e necesară o înțelegere, în ce mod poate fi estimată numeric posibilitatea de apariție a unuia sau a altui eveniment.

Pretext pentru o astfel de estimare numerică pot fi rezultatele supravegherilor sau experiențelor. Chiar așa, oamenii demult au observat, că multe evenimente se înfăptuiesc cu o oarecare, uimitor de stabilă, **frecvență**.

Pentru demografi[1] este bine cunoscut numărul 0,512. Datele statistice, obținute în diferite perioade de timp în diferite țări, demonstrează, că din 1000 de noi născuți în mediu 512 sunt băieți. Numărul 0,512 este numit **frecvență a evenimentului aleator** “de naștere a băieților”. Ea este determinată prin formula

$$\text{Frecvența} = \frac{\text{Numărul de băieți născuți}}{\text{Numărul total de noi născuți}}$$

Accentăm, că acest număr a fost obținut în rezultatul analizei multor observări. În așa cazuri se spune că probabilitatea „nașterii unui băiețel” este aproximativ egală cu 0,512.

Știți, că fumatul este dăunător sănătății. Conform datelor organizației de ocrotire a sănătății fumătorii alcătuiesc aproximativ 92 % din bolnavii de cancer pulmonar. Numărul 0,92 – este frecvența evenimentului aleator “cel ce s-a îmbolnăvit de cancer pulmonar – este fumător”, ce este determinată prin formula

$$\text{Frecvența} = \frac{\text{Numărul de fumători între bolnavii de cancer pulmonar}}{\text{Numărul total de bolnavi de cancer pulmonar}}.$$

În așa cazuri se spune, că probabilitatea întâlnirii unui fumător între bolnavii de cancer pulmonar este aproximativ egală cu 0,92 (sau 92 %).

Pentru a ne cunoaște mai minuțios cu noțiunea de probabilitate a evenimentului aleator, ne vom adresa la exemplul clasic cu aruncarea monetei.

Presupunem, că în urma a două aruncări, obținem două pajure. Atunci în seria dată, ce este alcătuită din două aruncări, frecvența apariției pajurei este egală cu:

$$\text{Frecvența} = \frac{\text{Numărul de apariții al pajurei}}{\text{Numărul de aruncări}}\ \frac{2}{2} = 1.$$

Demonstrează oare aceasta, că probabilitatea apariției pajurei este egală cu 1? Sigur, că nu.

[1] Demografie - știința despre populație.

Pentru ca probabilitatea unui eveniment aleator să fie estimată prin frecvență, numărul de experimente efectuate trebuie să fie suficient de mare.

Începând cu secolul XVIII mulți cercetători au efectuat serii de încercări cu aruncarea monetei.

În tabelă sunt prezentate rezultate ale unor asemenea încercări.

Cercetătorul	Numărul de aruncări ale monetei	Numărul de apariție al pajurei	Frecvența apariției pajurei
Jorge-Louis de Buffon (1707–1788)	4040	2048	0,5069
Augustus de Morgan (1806–1871)	4092	2048	0,5005
Williams Jevons(1835–1882)	20 480	10 379	0,5068
Vsevolod Romanovsky (1879–1954)	80 640	39 699	0,4923
Carl Peerson (1857–1936)	24 000	12 012	0,5005
Williams Fuller (1906–1970)	10 000	4979	0,4979

În datele prezentate este observată o regularitate: la aruncarea multiplă a monetei frecvența apariției pajurei neesențial deviază de la 0,5.

Cu alte cuvinte, se poate considera, că probabilitatea evenimentului "apariția pajurei" este aproximativ egală cu 0,5.

În fiecare din exemplele prezentate a fost întrebuințată noțiunea de **frecvență a evenimentului aleator**. Această mărime metrică a fost calculată prin formula:

$$\text{Frtecvența} = \frac{\text{Numărul de evenimente, ce ne interesează}}{\text{Numărul total de încercări (observații)}}.$$

Ne vom adresa din nou la tabela de mai sus. Se poate oare pe baza datelor din tabelă de afirmat garantat, că probabilitatea evenimentului "apariția pajurei" este egală cu 0,5? Răspunsul la această întrebare este contradictoriu. Întradevăr, pe baza acestor date se poate spune, că frecvența apariției pajurei neesențial deviază de la 0,502 sau de la 0,4997, adică numărul 0,5 nu are nici o superioritate față de numărul 0,502 sau de numărul 0,4997.

În așa fel, frecvența evenimentului aleator permite doar estimarea aproximativă a probabilității evenimentului aleator. *Cu cât mai multe experimente sunt efectuate, cu atât mai exactă este estimația probabilității evenimentului aleator prin frecvența lui.*

Această estimare a probabilității evenimentului aleator este numită estimare statistică. Ea este aplicată în diferite domenii ale activității omului: în fizică, chimie, biologie, în asigurări, sociologie, economie, ocrotirea sănătății, sport etc.

Probabilitatea evenimentului este notată prin litera P (prima literă de la cuvântul francez *probabilite* – probabilitate).

Dacă în primul exemplu evenimentul "nasterii băiețelului" este notat prin litera A, rezultatul obținut poate fi scris:

$$P\ (A) \approx 0{,}512.$$

Având în vedere caracterul aproximativ al estimației, datele obținute pot fi rotunjite. De exemplu, dacă frecvența evenimentului este egală cu 0,512, se poate scrie, că $P\ (A) \approx 0{,}51$ sau $P\ (A) \approx 0{,}5$.

Dacă evenimentul „apariției pajurei" este notată cu litera B, atunci

$$P\ (B) \approx 0{,}5.$$

În finalul acestui punct putem menține următoarele. Deseori în viața de zi cu zi luăm decizii corecte și optimale, folosind proprietățile aleatoare ale fenomenelor sau obiectelor înconjurătoare.

Vom prezenta câteva exemple.

- Dacă doriți să aflați cum se rezolvă problema din însărcinarea pentru acasă, e foarte posibil, că o să-i telefonați colegului de clasă. Această alegere se bazează pe faptul, că pentru un elev cu cunoștințe bune probabilitatea de a rezolva problema este mai mare, decât pentru un elev slab.
- Mărfurile firmelor vestite sunt mai scumpe decât mărfurile analogice ale firmelor puțin cunoscute. Dar destul de des cumpărăm marfa mai scumpă. Așa o decizie în mare măsură este determinată de faptul că probabilitatea de cumpărare a unei marfe necalitative de la o firmă vestită este mai mică , decât de la o firmă necunoscută.
- Fie că lucrarea de control este alcătuită din zece însărcinări în formă de teste cu alegere de răspuns. Presupunem, că v-ați isprăvit cu nouă insărcinări, iar pe a zecea n-o puteți rezolva. Vă rămâne o singură soluție – să ghiciți răspunsul. Foarte probabil, că nu veți alege litera, care în însărcinările precedente a fost întâlnită cel mai des. Aceste calcule se bazează pe faptul, că autorii testelor puțin probabil că vor alcătui testele în așa fel, că o variantă de răspuns să fie mult mai frecventă decât altele.

Accentăm, că o alegere, luată aparte, făcută pe baza estimării probabile, poate fi nereușită. Necătând la aceasta, la primirea deciziilor analogice din viitor, nu merită să vă deziceți de la strategia de utilizare a caracteristicelor probabile, deoarece această strategie sporește șansele de reușită.

?

1. Prezentați exemple de evenimente aleatoare.
2. Descrieți, ce este frecvența evenimentului aleator.
3. În ce caz frecvența evenimentului aleator poate estima probabilitatea evenimentului aleator?
4. Cum este notată probabilitatea evenimentului A?

EXERCIȚII

22.1.° Prezentați exemple de încercări, rezultatul cărora, la părerea voastră, este: 1) eveniment puțin probabil; 2) eveniment foarte probabil.

22.2.° Poate oare fi considerată puțin probabil evenimentul:
1) la aruncarea monedei de 200 la rând a apărut pajura;
2) săptămâna viitoare veți fi chemat la tablă măcar o dată;
3) la meciul de fotbal "Șahtar" – "Dinamo" (Kiev) va fi fixat rezultatul 1 : 1;
4) apăsând simultan testele calculatorului, veți obține cuvântul "matematica"?

22.3.° Experimentul constă în aruncarea pionezei. Pioneza poate cădea cu acul în jos sau pe pălărie (fig. 22.1). Aruncați pioneza: 1) de 10 ori; 2) de 20 de ori; 3) de 50 de ori; 4) de 100 ori; 5) de 200 ori. Rezultatele, obținute în cinci serii de experimente, notați-le în tabelă.

Fig. 22.1

Numărul seriei	1	2	3	4	5
Numărul de experimente (aruncări) din serie	10	20	50	100	200
Numărul de căderi al pionezei cu acul în jos					
Numărul de căderi al pionezei cu acul în sus					

În fiecare din cinci serii de experimente calculați frecvența căderii pionezei cu acul în sus și estimați probabilitatea acestui eveniment. Care din evenimente este mai probabil: "pioneza cade cu acul în jos" sau „pioneza cade cu acul în sus"?

22.4.° Experimentul constă în aruncarea a două monete. Efectuați acest experiment: 1) de 10 ori; 2) de 20 de ori; 3) de 50 de ori; 4) de 150 ori. Rezultatele, obținute în patru serii de experimente, notați-le în tabelă.

Numărul seriei	1	2	3	4
Numărul de experimente (aruncări) din serie	10	20	50	150
Numărul de experimente în care au apărut două pajure				
Numărul de experimente în care a apărut o singură pajură				
Numărul de experimente în care n-a apărut nici o pajură				

În fiecare din patru experimente calculați frecvența evenimentului aleatoriu:

1) apariției a două pajure;
2) apariția unei singure pajure;
3) apariția a două numere.

Poate oare fi făcută pe baza acestor experimente presupunerea, că evenimentul ”Apariția unei singure pajure” este mai probabilă, decât evenimentul ”Nu apare nici o pajură”? Pe ce este bazată această presupunere? Se poate oare pe baza acestor experimente garanta, că primul din evenimentele numite este mai mult probabil, decât al doulea?

22.5.° Efectuați o serie de 100 de experimente, în care este aruncat nasturele cu ureche (fig 22.2). Aflați frecvența evenimentului “Nasturele cade cu urechea în jos”. Estimați probabilitatea evenimentului “Nasturele cade cu urechea în sus” în seria efectuată de experimente.

Fig. 22.2

22.6.° În tabelă sunt date despre nașterea copiilor în orașul N în anul 2016.

Luna	Ianuarie	Februarie	Martie	Aprilie	Mai	Iunie	Iulie	August	Septembrie	Octombrie	Noembrie	Decembrie
Numărul de băieței născuți	1198	1053	1220	1151	1151	1279	1338	1347	1329	1287	1196	1243
Numărul de fetițe născute	1193	1065	1137	1063	1163	1228	1258	1335	1218	1239	1066	1120

Calculați frecvența nașterii băieților în fiecare lună și în tot anul 2016. Estimați probabilitatea nașterii unei fetițe în anul 2016.

22.7.° Operatorul de la recepție în timpul zilei de lucru (9:00–17:00) în mediu vorbește la telefon 6 ore. Estimați probabilitatea evenimentului, că dacă veti telefona la recepție în această perioadă, telefonul va fi liber.

22.8.° Conform statisticii în orașul Odesa în perioada de vară numărul de zile însorite în mediu este egal cu 70. Estimați probabilitatea, că, sosind la Odesa pentru o zi, oaspetele va fi întâlnit cu vreme posomorâtă.

22.9.° Dintr-un număr mare de becuri au fost alese 1000, dintre care 5 s-au dovedit a fi defectate. Estimați probabilitatea de a cumpăra un bec defectat.

22.10.° În perioada epidemiei de gripă, din 40000 de locuitori controlați 7900 s-au dovedit a fi bolnavi. Estimați probabilitatea evenimentului „un om , ales provizoriu, este bolnav de gripă".

22.11.° Probabilitatea de a cumpăra o baterie defectată este egală cu 0,02. Se poate oare afirma, că în orice grup de 100 de baterii două vor fi defectate?

22.12.° Probabilitatea nimeririi în țintă este egală cu 85 %. Este oare posibil, ca dintr-o serie de 100 de împușcături, 98 să fie în țintă?

22.13.• E dată tabela „Planul de învățământ pentru clasa 9-a al școlii generale":

Obiectul	Numărul de ore pe săptă-mână	Obiectul	Numărul de ore pe săptămână
Limba ucraineană	2	Geometria	2
Literatura ucraineană	2	Biologia	2
Limba străină	3	Geografia	2
Literatura străină	2	Fizica	3
Istoria Ucrainei	2	Chimia	2
Istoria mondială	1	Instruirea prin muncă	1
Dreptul	1	Informatica	2
Arta	1	Bazele ocrotirii sănătății	1
Algebra	2	Educația fizică	3

Estimați probabilitatea evenimentului, că o lecție, aleasă provizoriu din orarul clase a 9-a va fi o lecție: 1) de algebră, 2) de geometrie; 3) de matematică; 4) de educație fizică; 5) de limbă străină.

22.14.• Alegeți simultan o pagină din povestirea "Institutka" de Marko Vovciok. Calculați de câte ori pe această pagină pot fi înâlnite literele "f","j","z" și "ț", și câte litere sunt pe pagină în total? Estimați probabilitatea apariției acestor litere în textul ales. Această estimație permite să întelegem de ce pe tastatura mașinii de tipărit și a calculatorului (fig. 22.3) literele “f” și ”j” sunt situate în centrul tastaturii, iar literele ”z” și “ț” – mai aproape de margine.

Fig. 22.3

22.15.• În tabelă sânt prezentate datele despre numărul de zile a anului 2016, în care la ora 12.00 a fost fixată temperatura și umiditatea dată a aerului din orașul *N*.

Diapazonul temperaturii aerului , C⁰	Diapazonul umidității aerului, %						Zile în total
	Între 0 % și 40 %	Între 41 % și 60 %	Între 61 % și 70 %	Între 71 % și 80 %	Între 81 % și 90 %	Între 91 % și 100 %	
Mai joasă decât –11 °C	0	1	1	3	2	0	7
Între –10° și -1 °C	0	0	11	15	13	5	44
Între 0° și 10 °C	10	19	12	13	19	47	120
Între 11° și 20 °C	23	27	15	6	10	2	83
Între 21° și 30 °C	57	32	6	2	1	0	98
Mai înaltă decât 31 °C	9	4	0	0	0	0	13
Zile în total	99	83	45	39	45	54	365

Calculați frecvența observărilor în anul 2016:

1) A temperaturii atmosferice în diapazonul de la 11 °C până la 20 °C în zilele, când umiditatea fixată n-a depășit 40 %;
2) A umidității atmosferice în diapazonul de la 71 % până la 80 % în zilele, când temperatura fixată a fost sub 0 °C;
3) Temperatura atmosferică în diapazonul de la 21 °C până la 30 °C și concomitent umiditatea în diapazonul de la 41 % până la 70 %.

23. Definiția clasică a probabilității

Pentru calcularea probabilității unui eveniment nu e absolut necesar de efectuat experimente sau observări. E suficient să ne folosim de practica de viața și gândire logică.

EXEMPLUL 1 Fie că într-o cutie sunt 10 bile roșii. Care este probabilitatea, că o bilă, luată simultan din cutie va fi de culoare roșie? De culoare galbenă?

În condițiile date, orice bilă, luată din cutie, va fi de culoare roșie.

Evenimentul, care în condițiile date se va înfăptui la fiecare încercare, este numit ***eveniment sigur.*** *Probabilitatea unui așa eveniment e considerată egală cu 1*, adică:

dacă A – eveniment sigur, atunci

$$P\,(A) = \mathbf{1.}$$

În așa fel, probabilitatea faptului, că o bilă, luată simultan din cutie, va fi de culoare roșie, este egală cu 1.

Deoarece în cutie nu există nici o bilă galbenă, scoaterea din cutie a unei bile galbene este imposibilă.

Evenimentul, care în condițiile date nu poate fi înfăptuit în nici o încercare, este numit ***eveniment imposibil****. Probabilitatea unui astfel de eveniment este considerată egală cu 0*, adică:

dacă A – eveniment imposibil, atunci

$$P\,(A) = \mathbf{0.}$$

În așa fel, probabilitatea faptului, că o bilă, luată provizoriu din cutie, va fi de culoare galbenă, este egală cu 0. ◄

EXEMPLUL 2 O monetă este aruncată o singură dată. Care este probabilitatea apariției pajurei?

În acest experiment poate fi obținut doar unul din două rezultate posibile: apariția numărului sau apariția pajurei. Și nici unul din rezultate n-are avantaje. Astfel de rezultate sunt numite rezultate cu **posibilități egale**, iar evenimentele corespunzătoare – evenimente cu **probabilități egale**. E natural de considerat, că probabilitatea fiecărui evenimemt “apariția numărului” și „apariția pajurei” este egal cu $\frac{1}{2}$.

Din cele spuse nu reiese, că în orice serie de experimente cu aruncarea monetei exact jumătate din rezultate va fi apariția pajurei și exact jumătate –

apariția cifrei. Putem doar pronostica, că la un număr mare de încercări frecvența apariției pajurei va fi aproximativ egală cu $\frac{1}{2}$.

Vom analiza încă câteva exemple cu un așa complex de condiții, care fac toate rezultatele experimentelor egal posibile.

EXEMPLUL 3 Zarul (fig. 23.1) este aruncat o singură dată. Care este probabilitatea apariției cifrei 4?

În acest experiment poate fi obținut unul din șase rezultate: pot apare 1, 2, 3, 4, 5, 6 puncte. Toate aceste rezultate sunt egal posibile. De aceea este natural de considerat, că probabilitatea evenimentului “apariția cifrei 4” este egală cu $\frac{1}{6}$. ◀

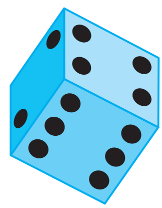


Fig. 23.1

EXEMPLUL 4 Fie că au fost tirajate 100 000 bilete de loterie, 20 din care sunt cu câștig. Care este probabilitatea succesului la cumpărarea unui bilet de loterie?

Experimentul constă în cumpărarea unui bilet de loterie. În acest experiment poate fi obținut unul din 100 000 de rezultate egal posibile: e cumpărat biletul cu numărul 1, biletul cu numărul 2 și așa mai departe. Din cele 20 de rezultate aduc la succes. Este natural de considerat, că probabilitatea succesului la cumpărarea unui bilet este egală cu $\frac{20}{100\,000} = \frac{1}{5000}$. ◀

EXEMPLUL 5 În cutie sânt 15 bile de biliard, numerotate cu numere de la 1 până la 15. Care este probabilitatea faptului, că o bilă, luată provizoriu din cutie, va avea numărul divizibil la 3?

În acest experiment poate fi obținut unul din 15 rezultate egal posibile: să fie luată bila cu numărul 1, bila cu numărul 2... Din ele la apariția evenimentului „e luată o bilă cu numărul divizibil la 3” duc 5 rezultate: e luată bila cu numărul 3, sau 6, sau 9, sau 12, sau 15. Deacea e normal de considerat, că probabilitatea căutată este egală cu $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. ◀

Cu toate că în exemplele 1-5 sunt analizate diferite experimente, ele sunt descrise de același model matematic. Explicăm cele spuse.

• În fiecare exemplu în urma experimentului poate fi obținut unul din n rezultate egal posibile.

Exemplul 1: $n = 10$.

Exemplul 2: $n = 2$.

Exemplul 3: $n = 6$.

Exemplul 4: $n = 100\,000$.

Exemplul 5: $n = 15$.

• În fiecare exemplu este analizat un oarecare eveniment A, la apariția căruia duc m rezultate. Le vom numi **favorabile**.

Exemplul 1: A – este luată bila roșie, $m = 10$, sau A – este luată bila galbenă, $m = 0$.

Exemplul 2: A – apariția pajurei, $m = 1$.

Exemplul 3: A – apariția numărului dorit de puncte pe fațeta zarurilor, $m = 1$.

Exemplul 4: A – câștigarea trofeului $m = 20$.

Exemplul 5: A – e luată o bilă cu numărul divizibil la 3, $m = 5$.

• În fiecare exemplu probabilitatea evenimentului A poate fi calculat prin formula:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

Definiție. **Dacă experimentul poate duce la unul din n rezultate egal posibile, din care m duc la apariția evenimentului A, atunci probabilitatea evenimentului A este numit raportul $\frac{m}{n}$.**

Această definiție a probabilității este numită **definiție clasică**.

Accentăm, că dacă *complexul de condiții al experimentului nu garantează rezultate egal posibile, definiția clasică a probabilității la un astfel de experiment nu poate fi aplicată.*

EXEMPLUL 6 Sunt aruncate concomitent două zaruri: unul albastru și unul galben. Care este probabilitatea, că vor cădea doi de “șase”?

Cu ajutorul tabelei, reprezentate pe figura 23.2, putem constata, că în acest experiment sunt posibile 36 de rezultate egal posibile, dintre care favorabil e doar unul. De aceea probabilitatea căutată este egală cu $\frac{1}{36}$. ◄

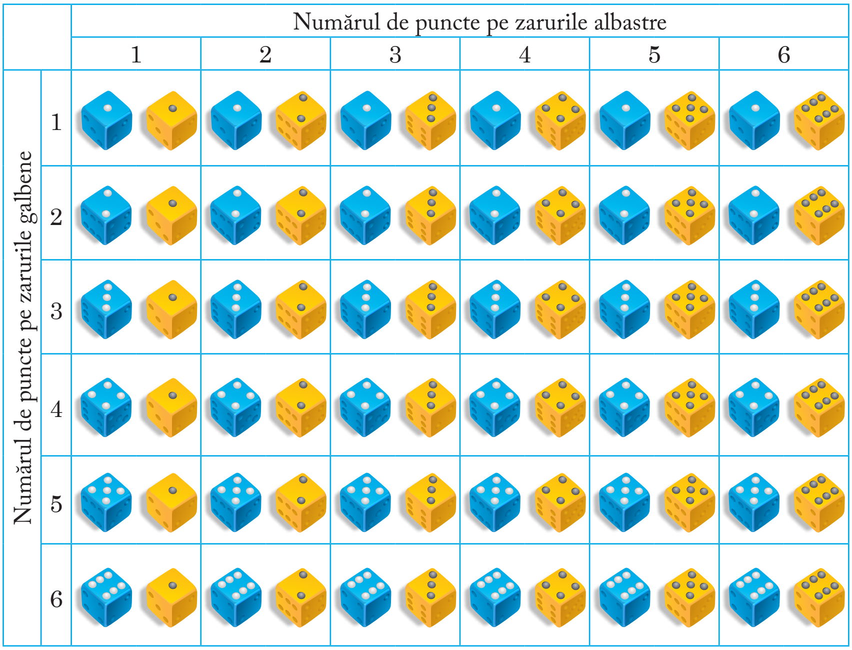


Fig. 23.2

EXEMPLUL 7 (problema lui d'Alembert) Sunt aruncate concomitent două monete identice. Care este probabilitatea, că măcar pe una din ale va cădea pajura?

Această problemă este asemănătoare cu problema din exemplul 6. Diferența constă în aceea că zarurile erau de diferite culori, iar monetele sunt identice. În acest experiment, pentru a crea un complex de condiții, ce duce la rezultate egal posibile, vom deosebi monetele, numerotându-le. Atunci putem obține patru rezultate egal posibile (fig. 23.3).

Fig. 23.3

În primele patru din aceste rezultate măcar o dată a apărut pajura. De acea probabilitatea faptului, că la aruncarea concomitentă a două monete măcar pe una din ele va apărea pajura, este egală cu $\frac{3}{4}$. ◀

EXEMPLUL 8 Sunt aruncate concomitent două zaruri identice. Care este probabilitatea, că vor cădea numere, suma cărora este egală cu 11?

Experimentul dat are 11 rezultate. Suma numerelor căzute poate fi egală cu 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Dar este incorect de considerat, că probabilitatea evenimentului “suma numerelor pe două zaruri este egală cu 11” este egală cu $\frac{1}{11}$. Problema e că cele 11 rezultate obținute nu sunt egal posibile. De exemplu, rezultatul “suma numerelor pe două zaruri este egală cu 2” poate fi obținut printr-o singură metodă, iar rezultatul “suma numerelor pe două zaruri este egală cu 6” – prin 5 metode diferite (convingeți-vă singuri).

Pentru aplicarea definiției clasice a probabilității, vom descrie condițiile experimentului în așa fel, ca rezultatele să devină egal posibile.

Cu acest scop vom diversa zarurile, de exemplu prin culoare. Atunci se vor obține 36 de răspunsuri egal posibile (fig. 23.2). Din ele doar două sunt favorabile. De aceea probabilitatea căutată este egală cu $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$. ◄

EXEMPLUL 9 Sunt analizate toate familiile cu doi copii, în care măcar unul din copii este băiat. Care este probabilitatea faptului, că într-o astfel de familie, aleasă arbitrar, ambii copii sunt băieți? (Considerăm, că probabilitatea nașterii unei fete și probabilitatea nașterii unui băiat sunt egale).

S-ar părea, că răspunsul la această întrebare este numărul $\frac{1}{2}$. Doar un copil în familie este băiat, deci al doilea cu probabilități egale poate fi sau un băiat, sau o fetiță.

În realitate aceste calcule se referă la altă problemă: sunt analizate familiile, în care primul copil este băiat. Care este probabilitatea, că într-o astfel de falilie, aleasă arbitrar, sunt doi băieți?

Complexul de condiții el experimentului nostru presupune trei rezultate egal posibile:

primul copil – băiat, al doilea copil – băiat ;

primul copil – băiat, al doilea copil – fetiță;

primul copil – fetiță, al doilea copil – băiat.

În așa fel, probabilitatea căutată este egală cu $\frac{1}{3}$. ◄

În finalul punctului dorim să menținem următoarele.

La prima vedere ne pare, că multe fenomene, ce se petrec în jurul nostru, sunt controlate de “măria sa întâmplarea”. Dar la o analiză mai minuțioasă se clarifică, că prin haosul de fapte întâmplătoare își face drum o regularitate, care poate fi estimată numeric. Știința, ce se ocupă de astfel de estimări, este numită **teorie a probabilităților**.

?

1. Care eveniment este numit eveniment sigur?
2. Care eveniment este numit eveniment imposibil?
3. Care este probabilitatea: 1) evenimentului sigur; 2) evenimentului imposibil?
4. Prezentați exemple de evenimente egal probabile.
5. Formulați definiția clasică a probabilității.
6. în care situații este imposibilă aplicarea definiției clasice a probabilității?

EXERCIȚII

23.1.° Prezentați exemple de evenimente sigure.

23.2.° Prezentați exemple de evenimente imposibile.

23.3.° În coș sunt 10 mere roșii și 15 mere verzi. Care este probabilitate că din coș arbitrar este luată o pară? un măr?

23.4.° Arbitrar sunt alese trei cifre pare. Care este probabilitatea, că numărul notat cu aceste cifre va fi impar?

23.5.° Arbitrar sunt alese trei cifre impare. Care este probabilitatea, că numărul notat cu aceste cifre va fi impar?

23.6.° Care este probabilitatea, că permutând literele în cuvântul “algebră”, veți obține cuvântul „geometrie”?

23.7.° Prezentați exemple de evenimente cu rezultate egal posibile.

23.8.° Prezentați exemple de evenimente cu rezultate cu posibilități diferite.

23.9.° Sunt oare egal probabile evenimentele A și B:

1) evenimentul A: din 15 bile de biliard, numerotate cu numere de la 1 până la 15, este arbitrar luată bila cu numărul 1;
   evenimentul B: din 15 bile de biliard, numerotate cu numere de la 1 până la 15, este arbitrar luată bila cu numărul 7;
2) evenimentul A: din 15 bile de biliard, numerotate cu numere de la 1 până la 15, este arbitrar luată o bilă cu număr par;
   evenimentul B: din 15 bile de biliard, numerotate cu numere de la 1 până la 15, este arbitrar luată o bilă cu număr impar?

23.10.° Care este probabilitatea, că la o aruncare a zarului va cădea un număr de puncte egal:
1) cu unu;
2) cu trei;
3) cu un număr impar;
4) cu un număr divizibil la 5;
5) cu un număr, ce nu e divizibil la 3;
6) cu un număr, divizibil la 9?

23.11.° Imaginați-vă, că în clasa, în care învățați, e pusă în joc o vizită turistică gratuită la Londra? Care este probabilitatea, că veți fi persoana cu succes?

23.12.° Pentru susținerea examenului de matematică, e necesar să înveți 35 de bilete. Un elev a învățat ideal 30 de bilete. Care este probabilitatea, că răspunzând la biletul, ales arbitrar, elevul va obține nota 12?

23.13.° Pentru susținerea examenului de matematică, e necesar să înveți 30 de bilete. Un elev a învățat un singur bilet. Care este probabilitatea, că răspunzând la un bilet, ales arbitrar, elevul nu va susține examenul?

23.14.° Care este probabilitatea, că eleva din clasă, care va fi chemată la tablă la lecția de matematică, poartă numele Caterina?

23.15.° La loterie participă 20 de bilete cu câștig și 280 de bilete fără câștig. Care este probabilitatea succesului, dacă e cumpărat un singur bilet?

23.16.° În cutie sunt 7 bile albastre și 5 bile galbene. Care este probabilitatea, că o bilă, aleasă arbitrar, va fi: 1) galbenă; 2) albastră?

23.17.° În cutie sunt 23 de cartele numerotate de la 1 până la 23. Din cutie arbitrar este aleasă o cartelă. Care este probabilitatea, că pe cartelă este scris un număr:
1) 11;
2) 24;
3) divizibil la 6;
4) divizibil la 5;
5) cu o singură cifră;
6) comun;
7) în notația căruia este cifra 7;
8) în notația căruia este cifra 2;
9) în notația căruia lipsește cifra 4;
10) suma cifrelor căruia este divizibilă la 3;

11) care la împărțirea la 11 dă restul 2;
12) în notația căruia lipsește cifra 1?

23.18.° Dintre numerele naturale de la 1 până la 30 în mod arbitrar alegați un număr. Care este probabilitatea, că acest număr va fi:
1) simplu;
2) divizor al numărului 18;
3) pătratul unui număr natural?

23.19.° Culegând numărul de telefon al colegului, Micola a uitat: 1) ultima cifră; 2) prima și ultima cifră. Care este probabilitatea, că Micola va culege corect numărul din prima încercare?

23.20.• Abonentul a uitat ultimele două cifre a numărului de telefon și le culege în mod arbitrar. Care este probabilitatea, că abonentul va culege corect numărul, dacă ține doar minte că ultimele două cifre:
1) sunt impare; 2) diferite și pare?

23.21.• Care este probabilitatea, că cea mai fericită zi din anul următor va cădea: 1) pe data de 7; 2) pe data de 31; 3) pe data de 29?

23.22.• Fețetele cubușorului sunt vopsite în culoare roșie sau albă (fiecare față o singură culoare). Probabilitatea apariției faței roșii este egală cu $\frac{5}{6}$, iar probabilitatea apariției fațetei albe – $\frac{1}{6}$. Câte fațete roșii și câte fețe albe are cubușorul?

23.23.• În cutie sunt 4 bile albastre și câteva bile roșii. Căte bile roșii sunt în cutie, dacă probabilitatea că o bilă, luată arbitrar din cutie, va fi albastră, este egală cu $\frac{2}{7}$?

23.24.• Dintre numerele cu două cifre în mod arbitrar este ales un număr. Care este probabilitatea faptului, că:
1) cifra din ordinea zecilor este mai mare decăt cifra din ordinea unităților;
2) cifra din ordinea zecilor și cifra din ordinea unităților coincid;
3) acest număr este divizibil la 9?

23.25.• Cartelele cu numerele 1, 2, 3 au fost arbitrar aranjate în rând. Care este probabilitatea, că cartelele cu numere impare vor fi situate pe poziții vecine?

23.26.• Pe o laiță în mod arbitrar se asează doi băieți și o fetiță. Care este probabilitatea, că băieții se vor așeza alături?

23.27.• În cutie sunt 5 creioane verzi și 7 creioane albastre. Ce număr minim de creioane trebue luate arbitrar din cutie, pentru ca probabilitatea faptului, că printre creioanele luate măcar unul este verde, să fie egală cu 1?

23.28.• În cutie sunt 3 creioane roșii, 7 creioane galbene și 11 creioane albastre. Ce număr minim de creioane trebue luate arbitrar din cutie, pentru ca probabilitatea faptului, că printre creioanele luate măcar unul este roșu, să fie egală cu 1?

23.29.•• Concomitent sunt aruncate două zaruri. Cu ajutorul figurii 27.2 determinați, care este probabilitatea, că vor cădea:
1) două unități;
2) două numere identice;
3) două numere, suma cărora este egală cu 7;
4) două numere, suma cărora este mai mare decât 10;
5) două numere, produsul cărora este egal cu 6.

23.30.•• Zarul este aruncat de două ori. Care este probabilitatea faptului, că:
1) prima oară vor cădea mai puțin de 4 puncte, iar a doua – mai mult de 4 puncte;
2) prima oară vor cădea mai puține puncte, decât a doua;
3) la două aruncări în total vor cădea 5 puncte?

23.31.•• Care este probabilitatea faptului, că la aruncarea dublă a zarului:
1) prima oară va cădea un număr de puncte mai mic ca 5, iar a doua oară – mai mare ca 4;
2) șasele va cădea doar a doua oară;
3) prima oară vor cădea mai multe puncte, decât a doua?

23.32.•• Dmitro și Petro concomitent aruncă câte un zar. Dacă suma de puncte căzute este egală cu 6, învinge Dmitro, iar dacă în sumă cad 7 puncte, va învinge Petro. Cine din jucători are mai multe șanse de succes în această joacă.

23.33.•• Moneta este aruncată de două ori. Care este probabilitatea, că vor cădea: 1) două pajure; 2) o pajură și un număr?

23.34.•• Din cinci cartele numerotate este arbitrar aleasă una, numărul este memorizat și cartela este readusă la un loc cu celelalte. Apoi din nou este arbitrar aleasă o cartelă din cele cinci. Care este probabilitatea, că la ambele probe este aleasă cartela cu același număr.

23.35.•• Care este probabilitatea, că la trei aruncări ale monetei: 1) de trei ori va cădea pajura; 2) de două ori va cădea pajura; 3) o dată va cădea pajura; 4) măcar o dată va cădea pajura?

23.36.•• La o masă rotundă în mod arbitrar s-au așezat n persoane ($n > 2$). Din ei doar doi sunt cunoscuți între ei. Care este probabilitatea, că cunoscuții s-au așezat alături?

23.37.•• La coadă în mod arbitrar s-au aranjat patru persoane: A, B, C, D. Considerând toate variantele de aranjament egal posibile, determinați probabilitatea faptului, că A va sta la coadă înaintea lui B.

La început a fost jocul

Cunoașteți multe jocuri, la care rezultatul depinde de măiestria jucătorilor. Dar există și astfel de jocuri, la care de posibilitățile jucătorilor nu depinde nimic. Totul e decis de întâmplare. Unul din aceste jocuri sânt zarurile. Se consideră că anume de la zaruri s-a început știința despre procese aleatoare.

Unul din curtenii regelui francez Ludovic XIV, jucător de noroc, filosof și literator cavalerul de Mere s-a adresat la remarcabilul matematecian Pascal Blaise cu rugămintea, ca acesta să-i explice upmătorul paradox. Dintr-o parte, bogata practică de joc a lui Mere mărturisește, că la aruncarea a trei zaruri suma de 11 puncte cade mai des, decât suma de 12 puncte.

Din altă parte, acest fapt întră în contradicție cu următoarele calcule. Suma de 11 puncte poate fi obținută din 6 combinații de zaruri:

6–4–1	6–3–2	5–5–1
5–4–2	5–3–3	4–4–3

Dar și 12 puncte pot fi obținute din șase combinații:

6–5–1	6–4–2	6–3–3
5–5–2	5–4–3	4–4–4

În așa fel, pentru apariția sumelor de 11 și 12 puncte sunt favorabile numere identice de rezultate. Reiese , că aceste evenimente au șanse egale, ce este in contradicție cu practica.

Pascal și-a dat seama: eroarea constă în aceea, că evenimentele, observate de Mere, nu sănt egal probabile. De exemplu, suma de 11 puncte din combinația 6-4-1 poate fi obținută prin 6 metode diferite de aruncare a zarurilor: (6; 4; 1); (6; 1; 4); (4; 6; 1); (4; 1; 6); (1; 6; 4); (1; 4; 6).

Dacă vor fi calculate pentru fiecare combinație și numărul de metode de obținere, vom primi: pentru suma 11 numărul de rezultate favorabile este 27, iar pentru suma 12 – 25. Și toate aceste rezultate sunt egal posibile.

Această și alte probleme, referitoare la jocurile de noroc, Pascal Blaise le-a discutat în corespondența cu Pierre Fermat. Astăzi se consideră, că această corespondență a pus bazele teoriei probabilităților.

Este interesant, că o greșală, similară greșelii lui de Mere, a comis-o și remarcabilul matematecian francez Jean Le Rond d'Alembert, rezolvând problema: "Moneta este aruncată de două ori. Care este probabilitatea, că măcar o dată va cădea pajura"? El făcea următoarela calcule.

Sunt posibile trei rezultate: pajura a apărut la prima aruncare, pajura a apărut la a doua aruncare, pajura în genere nu a apărut. Atunci din trei rezultate favorabile vor fi doar două, adică probabilitatea căutată este $\frac{2}{3}$.

Dar din exemplul 7 p. 23 deja cunoașteți, că răspunsul correct este $\frac{3}{4}$.

Eroarea consta în aceea, că trei rezultate menținute nu erau egal posibile (constatați de ce). Probabil, această eroare se explică prin aceea, că în secolul XVIII teoria probabilităților era o știință "tânără", care cerea detalizarea însăși a noțiunii de "probabilitate a evenimentului".

Pascal Blaise
(1623–1662)

Filosof și teolog francez, scriitor, matematician și fizician. La vârstă fragedă a demonstrat înzestrare matematică, a întrat în istoria matematicii ca exemplu clasic de genialitate minoră. Cercul lui de interese era foarte larg. Printre altele, el este autorul algoritmului de determinare a divizibilității numerelor întregi, a formulat o serie de noțiuni de bază a teoriei probabilităților, metode de calcul a ariilor figurilor, ariilor suprafețelor, și volumelor corpurilor. A construit prima mașină de calcul – sumatorul.

Consolidarea și dezvoltarea teoriei probabilităților a fost posibilă datorită lucrărilor unor matematecieni remarcabili, cum ar fi Jakob Bernoulli (1654–1705), Pierre-Simon Laplace (1749–1827), Rihard von Mizess (1883–1953). În secolul XX un rol important au avut lucrările remarcabilului matematecian sovietic Andrei Nicolaevici Kolmogorov.

Știința matematică ucraineană a dat lumii o pleadă de remarcabili specialiști în domeniul teoriei probabilităților. Numele lui I.I. Hicman, B.V. Gnedenko, A.V. Skorohod, M.I. Iadrenko sunt cunoscute pentru matematicienii din întreaga lume.

A.N. Kolmogorov
(1903–1987)

M.I. Iadrenko
(1932–2004)

Mihailo Iosipovici Iadrenko o mare parte din forțele sale de creație le-a consacrat activității pedagogice. A lucrat timp îndelungat cu tineri dotați, a fost fondatorul Olimpiadei tinerilor matematecieni din Ucraina. A depus mari eforturi pentru popularizarea științei. Astfel, din inițiativa lui în anul 1968 a fost, pentru prima dată în Ucraina, editată prima culegere de articole de popularizare a științei „În lumea matematicii”.

24. Cunoștințe inițiale despre statistică

Cu ce tiraj trebue editat manualul de algebră pentru clasa 9-a?

Este oare rațional pentru un politician să-și înainteze candidatura la alegerile a postul de primar?

Câte kilograme de pește și alte producte marine consumă în mediu pe an un locuitor al Ucrainei?

Este oare rentabil să fie arendat stadionul pentru concertul unui artist?

La aceste și multe alte întrebări poate da răspuns statistica.

Definiție. Statistica ***(din latină** status* ***– stare) – este știința despre dobândirea, prelucrarea și analiza datelor cantitative, care caracterizează fenomene multiple.***

Studiul statistic este alcătuit din câteva etape:

Acumularea de date

↓

Prelucrarea de date și prezentarea datelor în formă comodă

↓

Analiza de date

↓

Concluzii și recomandări

Ne vom opri mai detailat la fiecare etapă.

Acumularea de date

Vă e cunoscut, că obiceiurile dăunătoare, alimentarea incorectă, stilul de viață imobilă - duc la boli cardio-vasculare. Desigur, la această concluzie medicii au ajuns, fără să analizeze toată populația planetei.

E clar, că studiul a avut un caracter *selectiv*, dar de dimensiuni în *masă*.

În statistică mulțimea de date, pe baza căreia este efectuat studiul, este numită **set**.

În cazul dat setul a fost format din câteva milioane de persoane.

E cazul să menținem, că concluzia statistică, bazată doar pe numărul mare al setului, nu totdeauna este justă. De exemplu, dacă, analizând popularitatea unui artist, vom limita anchetarea cu persoanele, participante la concertul artistului, concluziile făcute nu vor fi obiective, deoarece aceste persoane au vizionat concertul anume grație faptului, că acest artist le este pe plac. Statisticii spun, că setul trebuie să fie **reprezentativ** (din cuvântul francez *représentatif*- demonstrativ).

Astfel medicii, studiind factorii de risc a apariției bolilor cardio-vasculare, au analizat oameni de diferite vârste, profesii, naționalități etc.

În așa fel, *acumularea de date trebuie bazată pe fenomenul de masă și principiul reprezentativ al setului.* **În unele cazuri** setul poate să coincidă cu mulțimea de obiecte, asupra căreia este efectuat studiul. Exemplu de astfel de studiu este efectuarea atestării de stat la matematică în clasa 9.

Metodele de prezentare a datelor

Informația dobândită (seturile de date) sunt eficient prezentate în formă de tabele, grafice, diagrame.

Vom analiza câteve exemple.

EXEMPLUL 1 În tabelă sunt prezentate rezultatele participării elevilor din Ucraina la olimpiadele internaționale de matematică în anii 1993–2016. (Echipele naționale la olimpiadele internaționale sunt alcătuite de cel mult 6 persoane).

Anul	Locul petrecerii	Numărul de medalii				Fără medalii
		aur	argint	bronz	În total	
1993	Turcia	0	2	3	5	1
1994	Honcong	1	1	2	4	2
1995	Canada	1	1	1	3	3
1996	India	1	0	5	6	0
1997	Argentina	3	3	0	6	0
1998	Taivan	1	3	2	6	0
1999	România	2	2	1	5	1
2000	Republica Corea	2	2	0	4	2
2001	SUA	1	5	0	6	0
2002	Marea Britanie	1	3	0	4	2
2003	Japonia	1	2	3	6	0
2004	Grecia	1	5	0	6	0
2005	Mexica	2	2	2	6	0
2006	Slovenia	1	2	2	5	1
2007	Vietnam	3	1	2	6	0
2008	Spania	2	2	2	6	0
2009	Germania	3	1	2	6	0
2010	Cazahstan	1	2	3	6	0
2011	Olanda	1	2	3	6	0
2012	Argentina	0	3	2	5	1
2013	Columbia	1	3	1	5	1
2014	Republica Sud Africană	2	3	1	6	0
2015	Tailanda	2	3	1	6	0
2016	Honcong	0	2	4	6	0

În multe cazuri datele sunt eficient prezentate prin **diagrame cu coloane**, care mai sunt numite **histograme** (din greacă *histos* – coloană și *gramma* - scriere). Astfel de informație este ușor primită și bine memorizată.

EXEMPLUL 2 Pe figura 24.1 este prezentată informația despre fondurile de rezervații naturale ele Ucrainei.

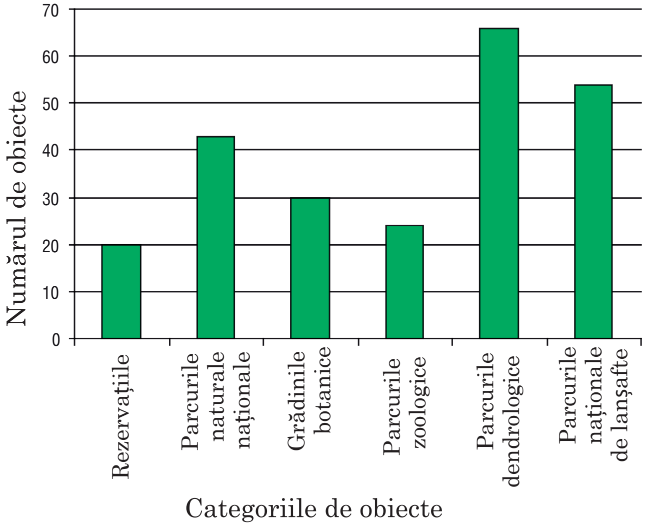


Fig. 24.1

EXEMPLUL 3 Informația mai poate fi prezentată în formă de grafice. În figura 24.2 este reprezentat graficul creșterii procentuale a numărului de abonenți la Internet în toată lumea în anii 1995–2016.

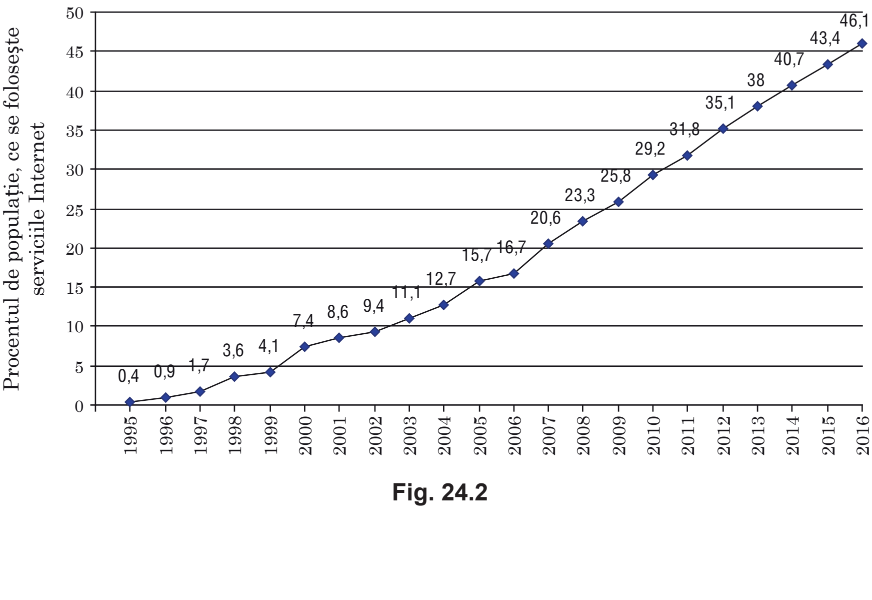


Fig. 24.2

Diagramele cu coloane și graficele, de regulă, sânt folosite în cazurile, când doresc să demonstreze, cum se scimbă o oarecare valoare cantitativă dependent de timp.

EXEMPLUL 4 Pe figura 24.3 este prezentată repartizarea medaliilor, câștigate de școlarii din Ucraina la participarea la olimpiadele internaționale în anul 2016. Pentru prezentare a fost aplicată **diagrama circulară**: cercul reprezintă numărul total de medalii, iar fiecărui obiect îi corespunde un oarecare sector de cerc.

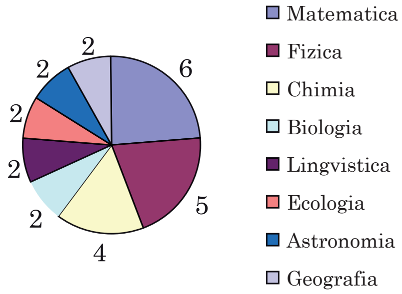


Fig. 24.3

Analiza de date, concluzii și recomendații

Datele statistice sânt acumulate din diferite domenii ale științei și a actvității omului: din economie, medicină, sociologie, demografie, agricultură, meteorologie, sport etc. Dar metodele de prelucrare statistică(analiză) în mare măsură sânt comune. Vom face cunoștință cu câteva din ele.

Ne vom adresa la exemplul 1. Tabela prezentată ne permite să aflăm, câte medalii în mediu pe an au dobândit elevii din Ucraina la olimpiadele internaționale de matematică. Pentru aceasta numărul total de medalii, dobândite în această perioadă, trebuiesc împărțite la numărul de ani. De exemplu, în peroada 1993–2016, avem:

$$\frac{5+4+3+6+6+6+5+4+6+4+6+6+6+5+6+6+6+6+6+5+5+6+6+6}{24}=$$

$$=\frac{130}{24}=5\frac{5}{12}.$$

Deoarece într-un an pot fi dobândite nu mai mult de 6 medalii, **valoarea medie** de $5\frac{5}{12}$ mărturisește, că echipa Ucrainei participă cu succes la acest forum de prestigiu.

În informația statistică valorile medii ale seturilor de date sunt întâlnite destul de frecvent. De exemplu, prezentăm tabela de realizare a principalelor producte alimentare prin rețelele mari de magazine în unele țări (în kilograme pe cap de locuitor pe an).

Țara	Carne	Pește și produse marine	Cereale	Legume	Fructe
Australia	118,1	22,1	86,6	93,8	103,5
Danemarca	111,9	24,3	139,5	102,2	146,5
Spania	122,0	27,4	98,9	143,3	105,4
Italia	91,0	26,2	162,6	178,3	131,0
Canada	99,0	25,6	119,3	120,3	119,2
SUA	123,4	21,1	110,8	123,5	113,5
Ucraina	33,9	15,6	158,4	116,0	36,4
Franța	98,3	31,2	117,2	142,9	95,5

Astfel de tabele pot fi folosite, de exemplu, de economiști în studiile, concluziile și recomandările lor, de proprietarii de magazine și producătorii alimentari la planificarea activității.

Dar valorile medii nu totdeauna reprezintă corect (adecvat) situația. De exemplu, dacă în țară veniturile la diferite grupe de populație se deosebesc esențial, atunci venitul mediu pe cap de locuitor nu va oglindi corect nivelul stării materiale al majorității populației.

De exemplu, într-o oarecare țară 100 de locuitori – sunt foarte bogați, iar restul 5 milioane – foarte săraci. În așa condiții valoarea venitului mediu poate arăta destul de înaltă, și deci, nu reprezintă adecvat sărăcia generală a populației.

În asemenea cazuri pentru analiză sunt folosite și alte caracteristici.

Folosind exemplul 1, alcătuim tabela, ce reprezintă numărul de medalii de fiecare tip:

Medalii de aur	Medalii de argint	Medalii de broz	Fără medalii
33	55	42	14

Astfel de tabelă este numită **tabelă de frecvențe**, iar numerele din rândul doi – **frecvențe**.

Frecvența 55 arată, că școlarii ucraineni cel mai regulat dobândesc medalii de argint. Categoria „medalii de argint” este numită **modă** a datelor prezentate.

Acest cuvânt ne e bine cunoscut. Des pronunțăm: “a intrat în modă”, ”a eșit din modă”, „a plăti bir modei”. În viața de zi cu zi moda înseamnă un sistem de opinii și preferințe, primite de majoritate în momentul dat.

Anume moda este cea mai importantă caracteristică în cazurile, când datele obținute nu sunt mulțime numerică. Demonstrăm aceasta cu următorul exemplu.

O firmă vestită, care intenționa să facă în Ucraina comerț cu pantaloni de jeans, a efectuat un sondaj cu un set reprezentativ de 500 de persoane. Rezultatele au fost prezentate în tabela de frecvențe:

Mărimea	XS	S	M	L	XL	XXL	XXXL
Frecvența	52	71	145	126	59	40	7
Frecvența relativă (în %)	10,4	14,2	29	25,2	11,8	8	1,4

În al treilea rând al tabelei sunt scrise raporturile dintre frecvența respectivă și dimensiunea setului. Acest raport, prezentat în procente, este numit **frecvență relativă**. De exemplu, pentru mărimea XS avem:

$$\frac{52}{500}\cdot 100 = 10,4\ (\%).$$

Moda acestui set – este mărimea M, și ei îi corespunde o frecvență relativă de 29 %.

În așa fel, firma a primit informația, că cea mai mare parte din pantalonii, propuși cumpărătorilor (aproximativ 29 %), trebuia să fie de mărimea M.

Vom relata, că dacă în tabelă două frecvențe ar fi avut valori maxime egale, două mărimi respective ar fi fost considerate mode.

Mai sus am demonstrat un exemplu, în care valoarea medie nu reprezintă corect starea materială a populației din țară. O informație mai detalizată poate fi obținută, completând valoarea medie cu rezultatele următoarelor studii.

Este alcătuit setul reprezentativ, format din cetățeni ai țării date, și se obțin seturi de date, ce reflectă veniturile. Apoi, aplicând o scară, ce determină nivelul veniturilor (mici, medii, mari) toate datele sunt divizate în trei grupe. Este alcătuită o tabelă, în care sunt notate frecvențele și frecvențele relative:

Nivelul de venituri	Mic	Mediu	Mare
Frecvența	m	n	k
Frecvența relativă	p %	q %	r %

Moda acestor seturi de date poate caracteriza nivelul de venituri din țară.

Studierea seturilor de date poate fi comparată cu lucrul unui medic, ce face diagnostica. În dependență de jalobele pacientului sau a simptomelor observate, medicul alege o oarecare metodică de determinare a pricinilor, ce provoacă boala. E clar, că această metodică va determina precizia diagnozei. Altfel și în statistică: în dependență de informația acumulată și de metodele de dobândire ale acestei informații, sunt aplicate diferite metode de prelucrare. Aceste metode pot să se completeze reciproc, una din ele poate fi mai precisă(sau mai adecvată), decât altele, în prezentarea unei situații concrete. În așa fel, analizând participarea elevilor ucraineni la olimpiadele internaționale de matematică, se poate face concluzia, că astfel de parametri statistici, cum ar fi valoarea medie și moda, sunt bine coordonate. Iar în exemplul, în care se determină mărimea cea mai solicitată a pantalonilor de jeans, cea mai informativă este moda.

Cu cât este mai bogat arsenalul de metode de prelucrare a datelor, cu atât și concluziile obținute vor fi mai obiective.

Vom prezenta încă o caracterictică statistică importantă.

O familie a decis să efectueze remontul bucătăriei și se interesează, care este prețul instalării unui metru de teracotă. Studiind prescurantul a 11 firme de construcție, au obținut următoarea informație (prețurile sunt date în grivne în ordine ascendentă)

80, 80, 90, 90, 100, 130, 180, 200, 300, 450, 500.

Familia ar dori să angajeze o firmă cu preț mediu.

Valoarea medie a masivului de date este egală cu 200.

Dar din datele obținute, vizual se poate face concluzia, că prețul de 200 grn corespunde mai mult nivelului de prețuri înalte, decât medii.

Observăm, că numărul 130 e situat la mijlocul șirului de numere ordonate. Acest număr este numit **mediană** a setului de date. În situația amintită anume mediana ne ajută să alegem firma cu prețul mediu. Într-adevăr, din șirul de 11 numere, cinci numere sunt mai mici decât 130, iar cinci = mai mari decât 130.

Acum vom analiza un set ordonat de date, format dintr-un număr par de numere, de exemplu, din 8 numere:

1, 4, 4, 7, 8, 15, 24, 24.

Aici „mijlocul" setului este format din două numere: 7 și 8. Se consideră, că mediana unui astfel de set este media aritmetică a acestor numere: $\frac{7+8}{2}=7{,}5.$

Valoarea medie, moda și mediana sunt numite **metrice ale tendinței centrale** ale setului de date.

EXERCIȚII

24.1.° Folosind tabela de temperaturi atmosferice medii anuale din unele orașe ale Ucrainei, construiți respectiva histogramă cu coloane:

Orașul	Temperatura, °C	Orașul	Temperatura, °C
Lviv	7,8	Cercasy	7,7
Ujgorod	10,1	Poltava	7,6
Kiev	8,4	Donețk	8,5
Sumy	6,8	Lugansk	8,8
Odesa	10,7	Herson	10,3
Mykolaiv	10,0		

24.2.° Folosind tabela dezvoltării metropolitanului din Kiev, construiți graficul lungimilor liniilor sale.

24.3.° Folosind tabela dezvoltării metropolitanului din Kiev, construiți graficul creșterii numărului de stațiuni.

Anul	Numărul de stațiuni	Lungimea liniilor, km	Anul	Nulărul de stațiuni	Lungimea liniilor, km
1960	5	5,2	2000	40	51,4
1965	10	12,7	2004	43	56,3
1971	14	18,1	2008	46	59,8
1976	17	20,42	2010	49	63,6
1981	23	27,72	2011	50	65,08
1987	28	32,6	2012	52	66
1992	35	43,1	2013	53	67,5

24.4.° Determinați, dacă selecția este reprezentativă:

1) pentru a afla, cât de des locuitorii orașului își petrec zilele de odihnă în sânul naturii, au fost anchetați membrii a trei cooperative de livădari;
2) cu scopul sondajului memorizării versurilor Lesei Ucrainca de către elevii claselor a noua, în mod aleativ au fost anchetați 4 mii de elevi din clasa noua din diferite regiuni ale Ucrainei;
3) pentru determinarea procentului de abonenți la Interner în Ucraina, în mod aleativ au fost anchetați 500 de kievleni;

4) pentru determinarea ratingului programului televizat pentru tineret, în mod aleativ au fost anchetați 10 mii de tineri și tinere în vârstă de la 15 până la 20 de ani.

24.5.° Aflați metricele tendinței centale a seturilor de date:
1) 3, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 10;
2) 12, 13, 14, 16, 18, 18, 19, 19, 19.

24.6.° Fetele din clasa 9-a la lecția de educație fizică au susținut probele de sărituri în înălțime. Învățătorul a fixat următoarele rezultate: 105 cm, 65 cm, 115 cm, 100 cm, 105 cm, 110 cm, 110 cm, 115 cm, 110 cm, 100 cm, 115 cm.
Aflați valoarea medie și mediana datelor obținute.

24.7.• Conducătorul de clasă al clasei a 9-a duce jurnalul de prezentare al elevilor la lecții. La finalul săptămânii au fost înregistrate următoarele date:

Ziua săptămânii	Luni	Marți	Mercuri	Joi	Vineri
Numărul de absenți	3	2	5	4	8

1) Aflați numărul mediu de absenți pe zi pe parcursul acestei săptămâni;
2) Aflați moda datelor obținute.

24.8.• În clasa 9, în care învață 23 de elevi, a fost efectuată anchetarea: aproximativ câte ore pe zi elevii sunt ocupați cu temele de acasă. Răspunsurile elevilor au fost prezentate cu histograma (fig. 24.4).

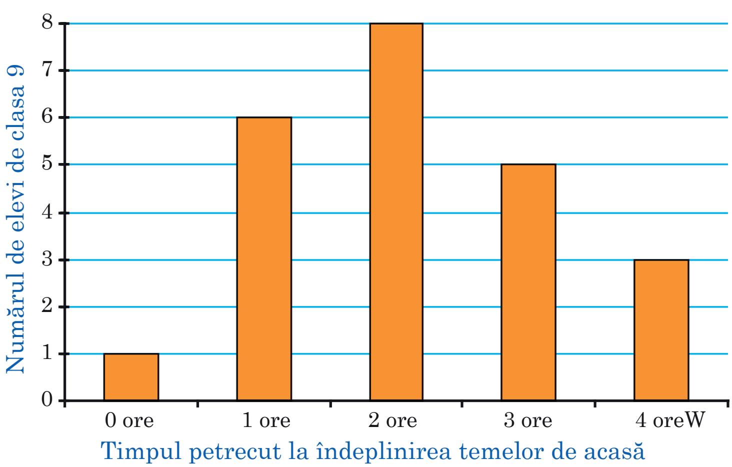


Fig. 24.4

1) Competați tabela de frecvențe:

Timpul petrecut la îndeplinirea temelor de acasă	0	1	2	3	4
Frecvența					
Frecvența relativă					

2) Câte ore pe zi în mediu petrec elevii acestei clase la îndeplinirea temelor pentru acasă? (aflați valoarea medie a șirului de date.)
3) Câte ore petrec majoritatea elevilor acestei clase la îndeplinirea temelor pentru acasă? (aflați moda șirului de date.)

24.9.• Pe figura 24.5 este reprezentată diagrama cu coloane a rezultatelor lucrării scrise la algebră în trei clase a noua.

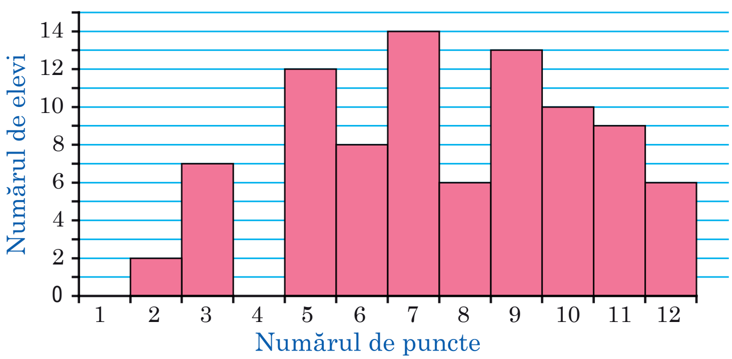


Fig. 24.5

1) Completați tabela de frecvențe:

Numărul de puncte	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecvența												
Frecvența relativă												

2) Aflați valoarea numărul mediu de puncte, obținute de elevi la această lucrare scrisă.
3) Aflați moda datelor obținute.

24.10.• Folosind rezultatele ultimii lucrări de control la algebră, ce a fost efectuată în clasa voastră, completați tabela de frecvențe, prezentate în problema 24.9.

1) Aflați numărul mediu de puncte, obținute de elevi la această lucrare de control.
2) Aflați moda datelor obținute.

24.11.• Elevii unei școli din Herson au fost anchetați, de câte ori în viață au zburat cu avionul. Datele obținute au fost înregistrate în tabela:

Numărul de zboruri efectuate	0	1	2	3	4	5
Numărul de elevi	530	92	46	30	8	4
Frecvența relativă (%)						

1) Completați al treilea rând al tabelei.
2) Prezentați datele obținute printr-o diagramă cu coloane.
3) Aflați moda și valoarea medie a datelor obținute.
4) Explicați, poate fi oare considerată selecția prezentată ca reprezentativă pentru concluzii referitor la toți elevii din orașul Herson.

24.12.• Scrieți toate notele, pe care le-ați obținut la algebră în decursul anului. Aflați valoarea medie, moda și mediana ale șirului obținut de date.

24.13.• Directorul firmei are un salariu de 50 000 grn pe lună, doi adjuncți – câte 20 000 grn pe lună, iar ceilalți 17 lucrători ai firmei – câte 4 500 grn pe lună. Aflați valoarea medie, moda, mediana salariilor la această firmă.

24.14.• Citiți unul din cele mai vestite versuri ale lui T. G. Șevcenko (propunem poezia în original):

Садок вишневий коло хати,
Хрущі над вишнями гудуть,
Плугатарі з плугами йдуть,
Співають ідучи дівчата,
А матері вечерять ждуть.

Сем'я вечеря коло хати,
Вечірня зіронька встає.
Дочка вечерять подає,
А мати хоче научати,
Так соловейко не дає.

Поклала мати коло хати
Маленьких діточок своїх;
Сама заснула коло їх.
Затихло все, тільки дівчата
Та соловейко не затих.[1]

Pentru literele “а”, “е”, “і”, “ї”, “н”, “о”, “р”, “у”, “ф”, “я” alcătuiți tabela de frecvențe a prezenței acestor litere în textul poeziei. Determinați moda datelor obținute.

24.15.• În decursul lunei mai a anului 2016 temperatura atmosferică în orașul Kiev la ora 8 dimineața a fost de:

	Temperatura, °C	Data	Temperatura, °C	Data	Temperatura, °C
01.05.2016	13,1	11.05.2016	17,8	21.05.2016	14,0
02.05.2016	15,3	12.05.2016	15,0	22.05.2016	16,9
03.05.2016	15,7	13.05.2016	16,6	23.05.2016	18,7
04.05.2016	15,4	14.05.2016	12,6	24.05.2016	17,4
05.05.2016	16,2	15.05.2016	13,1	25.05.2016	16,1
06.05.2016	13,1	16.05.2016	13,5	26.05.2016	16,8
07.05.2016	10,5	17.05.2016	8,8	27.05.2016	20,1
08.05.2016	14,2	18.05.2016	12,4	28.05.2016	19,2
09.05.2016	15,5	19.05.2016	9,5	29.05.2016	20,7
10.05.2016	17,5	20.05.2016	10,8	30.05.2016	17,3
				31.05.2016	17,4

Aflați metricele tendinței centrale ale datelor înregistrate.

24.16.• Formați un șir: 1) de cinci numere; 2) de șase numere, în care:
a) valoarea medie este egală cu mediana;
b) valoarea medie este mai mare ca mediana.

[1] T. G. Șevcenko. Opere în 12 v. Institutul de literatură T. G. Șevcenko a academiei de științși din Ucraina. K. : Naucova dumca, 2003. – V. 2. – P. 17.

Prietenim cu calculatorul

Continuați să perfecționați măiestria de lucru cu calculatorul, obținută în clasele 7 și 8, însușiți instrumente și soft-uri noi. Vă amintim, că în afară de însărcinările din acest capitol, puteți folosi diferite programe, create pentru însușirea cursului școlar de matematică. Vă puteți adresa la rețeaua mondială Internet cu scopul căutării da astfel de programe și alte informații suplimentare la cursul de algebră.

Dacă aveți intenția să alegeți o profesie, ce necesită aplicarea permanentă de cunoștințe matematice, puteți începe însușirea pachetelor de matematică (de exemplu, *Mathcad, MATLAB* și altele), care conțin instrumente perfecte de calcule matematice, construire geometrică și altele.

În acest capitol sunt prezentate însărcinări, pe care le puteți efectua la calculator pe măsura însușirii temelor respective. Majoritatea din aceste însărcinări sânt continuare și dezvoltare a exercițiilor din acest manual (astfel de însărcinări sunt notate cu pictograma “”, iar în capitolul dat sunt arătate numerele lor).

Celor, ce iubesc programarea, le propunem să creeze algoritme și programe, în care să fie utilizate cunoștințele matematice obținute. Astfel de însărcinări, ce conțin elemente de programare, sunt notate cu steluță. Până ce n-ați însușit la nivelul cuvenit un limbaj de programare, e suficient să prezentați algoritmele create prin metoda verbală sau în formă de bloc-schemă; pe măsura însușirii limbajelor de programare, puteți realiza aceste algoritme în formă de programe. Atragem atenția, că măiestria de a alcătui algoritme (șiruri de acțiuni) va fi de priință nu doar la programare, dar și în alte domenii de activitate.

La p. 1 “Inegalități numerice”

Căutați în rețeaua Internet regulile rutiere. Alegeți din semnele rutiere semnele, ce determină valorile extreme permise pentru orice mărimi numerice. Notați inegalitățile repective.

Desenați cu ajutorul redactorului grafic o axă de coordonate. Demonstrați vizual, că o valoare mai mică este situată pe axa de coordonate mai la stânga decât valoarea mai mare.

Păstrați figura obținută a axei de coordonate într-un fișier pentru a o putea folosi în următoarele însărcinări.

La p. 2 "Proprietățile de bază ale inegalităților numerice"

În ce mod pot fi demonstrate proprietățile inegalităților numerice cu ajutorul redactorului grafic? Ce instrumente ale redactorului pot fi aplicate?

La p. 3 "Adunarea și înmulțirea inegalităților numerice. Estimarea valorii expresiei"

Căutați în rețeaua Internet informație despre distanțele minime și maxime dintre planetele sistemului Solar și Soare. În ce mod poate fi făcută concluzia despre distanțele minime și maxime dintre fiecare două planete? Construiți tabela respectivă cu ajutorul redactorului de tabele. Puteți alcătui tabela în așa fel, ca distanța minimă și maximă dintre planete să fie calculată automat?

La p. 4 "Inegalități cu o variabilă"

Desenați cu ajutorul redactorului grafic o axă de coordonate. Ilustrați rezolvarea exerciilor 4.5, 4.6, 4.13. Care instrumente ale redactorului grafic v-au ajutat să prezentați vizual mersul rezolvării?

La p. 5 "Rezolvarea inegalităților lineare cu o variabilă. Intervale numerice"

Îndepliniți însărcinările 5.1, 5.2, 5.3 cu ajutorul redactorului grafic.

La p. 6 "Sisteme de inegalități lineare cu o variabilă"

Îndepliniți însărcinările 6.3, 6.4 cu ajutoril redactorului grafic.

* **6.33.** Alcătuiți algoritmul de rezolvare al acestei probleme prin metoda testării totale de variante.

* **6.54, 6.55, 6.56**. Aceste trei probleme sunt exemple tipice de probleme cu procente. Descrieți fiecare din aceste probleme în caz general, creați modelul matematic, descrieți datele inițiale și datele rezultante, alcătuiți algoritmul de rezolvare.

La p. 7 "Repetarea și profunzirea cunoștințelor despre funcție"

Ce metode de definire ale funcției sunt eficiente pentru reprezentarea acestei funcții cu ajutorul calculatorului? Ce instrumente pot fi utilizate pentru aceasta?

La p. 8 "Proprietățile funcției"

* Funcția este definită prin tabelă. Alcătuiți un algoritm de determinare a intervalelor de semn constant și un algoritm de determinare a intervale-

lor de creștere și descreștere a funcției. Căror condiții trebuie să satisfacă informația din tabele?

* **8.31.** Alcătuiți modelul matematic al acestei probleme în caz general. Descrieți algoritmul rezolvării acestei probleme în caz general.

La p. 9 “Cum poate fi construit graficul funcției $y = kf(x)$, dacă este cunoscut graficul funcției $y = f(x)$”

Cu ajutorul redactorului de tabele definiți o oarecare funcție $y = f(x)$ prin tabelă și construiți pe baza tabelei această funcție. Ce modificări trebuie efectuate în tabelă, pentru a obține graficul funcției $y = kf(x)$? Cum poate fi automatizat acest proces? Construiți în așa fel câteva grafice ale funcției $y = kf(x)$ pentru diferite valori k.

Construiți graficul unei oarecare funcții $y = f(x)$ cu ajutorul redactorului grafic. Ce instrumente ale redactorului grafic trebuiesc folosite, pentru a obține din acest grafic graficul funcției $y = kf(x)$ pentru $k > 1$; pentru $0 < k < 1$; pentru $k = -1$? Cum pot fi folosite aceste instrumente pentru obținerea graficului funcției $y = kf(x)$ cu $k < 0$ și $k \neq -1$?

La p. 10 “Cum pot fi construite graficele funcțiilor $y = f(x) + b$ i $y = f(x + a)$, dacă este cunoscut graficul funcției $y = f(x)$”

Cu ajutorul redactorului de tabele definiți o oarecare funcție $y = f(x)$ prin tabelă și construiți pe baza tabelei această funcție. Ce modificări trebuie efectuate în tabelă, pentru a obține graficele funcției $y = f(x) + b$? $y = f(x + a)$? $y = f(x + a) + b$? Cum poate fi automatizat acest proces? Construiți în așa fel câteva grafice ale funcției $y = f(x + a) + b$ pentru diferite valori a și b.

Construiți graficul unei oarecare funcții $y = f(x)$ cu ajutorul redactorului grafic. Ce instrumente ale redactorului grafic trebuiesc folosite, pentru a obține din acest grafic graficul funcției $y = f(x) + b$? $y = f(x + a)$? Cum pot fi folosite aceste instrumente pentru obținerea graficului funcției $y = f(x + a) + b$?

La p. 11 “Funcția pătrată, graficul și proprietățile funcției pătrate”

* Parabola este definită prin formula $y = ax^2 + bx + c$. Alcătuiți un algoritm cu datele inițiale a, b, c. Algoritmul trebuie să determine următoarele caracteristici ale parabolei: orientarea ramurilor, coordonatele vârfului, punctele de intersecție cu axele de coordonate, pe baza cărora se poate face concluzia, ce fragment de parabolă este rațional de reprezentat pe grafic.

Automatizați procesul de alcătuire al tabelei respective de valori ale funcției și construiți graficul conform tabelei obținute. Cum veți alege valoarea argumentului funcției pentru această tabelă, ca graficul să se obțină cât mai precis posibil?

La descrierea “Despre unele transformări ale graficelor funcțiilor”

Determinați, prin ce mod cu ajutorul redactorului de tabele și a redactorului grafic din graficul funcției $y = f(x)$ pot fi obținute graficele funcțiilor $y = f(-x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$.

La p. 12 “Rezolvarea inegalităților pătrate”

* Folosind tabela, prezentată în p. 12, alcătuiți un algoritm pentru rezolvarea inegalității pătrate $ax^2 + bx + c > 0$, date inițiale ale algoritmului fiind valorile a, b, c.

Ce date inițiate sunt necesare algoritmului, cu ajutorul căruia vor fi rezolvate inegalitățile $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$?

La p. 13 “Sisteme de ecuații cu două variabile”

Ostap Zabudiko a încercat să rezolve un sistem de ecuații prin metoda următoare: pentru fiecare din ecuații a construit graficul ecuației, definind în redactorul de tabele tabela cu valori respective, iar apoi a determinat pe ecranul calculatorului punctele de intersecție ale acestor grafice. În ce constă neajunsurile acestei metode?

La p. 14 “Sistemul de două ecuații cu două variabile ca model matematic al problemei de aplicație”

* Analizați exercițiile din acest punct. Multe din ele descriu situații similare. Puteți oare alege astfel de probleme și alcătui un algoritm pentru rezolvarea lor în caz general?

La p. 15 “Șiruri numerice”

În redactorul de tabele celulele tabelelor pot fi completate cu termenii șirului, definit prin formula termenului de rangul n sau prin formula recurentă. Însușiți aceste metode de completare ale tabelelor.

Observație. Evident, că în așa mod pot fi definite doar șiruri finite.

Aplicați această metodă la rezolvarea câtorva însărcinări din acest punct la propria alegere.

La p. 16 "Progresia aritmetică"

În redactorul de tabele creați un mecanism de completare al celulelor tabelei cu termeni ai progresiei aritmetice finite. Faceți acest mecanism în așa fel, ca să fie posibilă aplicarea lui pentru obținerea progresiilor aritmetuce cu orice valori a_1 și d.

La p. 17 "Suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice"

Creați în redactorul de tabele o tabelă, în care prima coloană conține numărul natura *k* – rangul termenului progresiei aritmetice, a doua coloană – valoarea termenului de rangul *k*, a treia – suma primilor *k* termeni ai progresiei. Valoare maximă a rangului *k* o alegeți la dorință. Poate fi oare automatizată complet construcția acestei tabele pentru valorile date a_1 și d?

La p. 18 "Progresia geometrică"

În redactorul de tabele creați un mecanism de completare al celulelor tabelei cu termeni ai progresiei geometrice finite. Faceți acest mecanism în așa fel, ca să fie posibilă aplicarea lui pentru obținerea progresiilor aritmetice cu orice valori b_1 și q.

Cum poate fi aplicat calculatorul pentru efectuarea calculelor procentelor compuse? Rezolvați însărcinările 18.17–18.20 cu ajutorul calculatorului.

La p. 19 „Suma primilor n termeni ai progresiei geometrice"

În anexa la punctul 17 ați creat o tabelă, ce formează o progresie aritmetică cu valorile date a_1 și d. Adăugați la această tabelă a patra coloană, în care este scrisă valoate termenului de rangul n a progresiei geometrice , în care $b_1 = a_1$, $q = d$, și a cincea coloană, ce conține sumele primilor n termeni ai acestei progresii geometrice. Pe baza acestei tabele construiți un grafic.

Studiați comportarea progresiei aritmetice și a progresiei geometrice pentru diferite valori a_1 și d.

Răspunsuri și sugestii la însărcinări

§ 1. Numerice

1. Inegalități numerice

1.10. 1) Nu; 2) da; 3) nu; 4) nu; 5) nu. **1.18.** Valoarea fracției ce crește. **1.19.** Valoarea fracției scade sau rămâne neschimbată. **1.22.** 1) Nu; 2) da. **1.26.** Da. **1.28.** 1) *Sugestie.* $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 = = (a^2 + 6a + 9) + (b^2 - 4b + 4)$.

2. Proprietăți de bază ale inegalităților numerice

2.13. 3) Comparația este imposibilă. **2.19.** 4) Dacă $c>0$, atunci $c^2>-4c$; dacă $-4<c<0$, atunci $c^2<-4c$; dacă $c=0$, inegalittea corectă nu poate fi obținută. **2.21.** 1. **2.22.** 24.

3. Adunarea și înmulțirea inegalităților numerice. Estimarea valorii expresiei

3.12. 3) Nu; 4) nu; 5) nu; 6) da; 8) da; 10) da; 11) nu; 12) da; 13) nu; 14) nu. **3.27.** 1) $\sqrt{10}+\sqrt{6}>\sqrt{11}+\sqrt{5}$; 2) $2+\sqrt{11}<\sqrt{5}+\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{15}-\sqrt{5}>\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{21}+\sqrt{20}>9$. **3.28.** 1) $\sqrt{6}+\sqrt{3}>\sqrt{7}+\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{26}-\sqrt{2}<\sqrt{14}$. **3.32.** 400 %.

4. Inegalități cu o variabilă

4.15. 4) Nu există rădăcini; 5) x – orice număr; 6) –6. **4.16.** 6 km.

5. Rezolvarea inegalităților lineare cu o variabilă. Intervale numerice

5.25. 3) $(-\infty; -5]$; 4) $(-\infty; 1)$; 5) $[7; +\infty)$; 6) $\left(-\infty; \frac{6}{11}\right]$; 7) $(-\infty; -7,5]$; 8) $(1; +\infty)$; 9) $(-\infty; +\infty)$; 10) $\varnothing$; 11) $(-\infty; +\infty)$; 12) $(-\infty; 0)$. **5.26.** 1) $\left(\frac{24}{19}; +\infty\right)$; 2) $[-6; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; -6]$; 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) $(-3,5; +\infty)$. **5.27.** 1) –8; 2) –1. **5.28.** 1) –6; 2) –3. **5.29.** 5 soluții. **5.30.** 8 soluții. **5.33.** 1) $a<-\frac{9}{4}$; 2) $a\leqslant 1,6$. **5.34.** 1) $b<3$; 2) $b<-\frac{1}{8}$. **5.35.** 12 km. **5.36.** Astfel de numere nu există. **5.37.** 18 bile. **5.38.** 44 vișini. **5.39.** 21. **5.40.** 28, 30, 32. **5.41.** 25, 30, 35. **5.42.** 1) Pentru $-4\leqslant x<2$

și $x>2$; 2) pentru $x<-4$ și $-4<x\leqslant 3$; 3) pentru $-3<x<-2$, $-2<x<2$ și $x>2$; 4) pentru $-1<x<1$ și $x>1$. **5.43.** 1) Pentru $x<-3$ și $-3<x\leqslant 9$; 2) pentru $7<x<8$ și $x>8$. **5.44.** 1) 9; 2) –3; 3) 13; 2,2; 4) nu are rădăcini. **5.45.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) –2; 12. **5.48.** 3) Pentru $a>-1$ și $a\neq 1$. **5.49.** 2) Pentru $m<7$ i $m\neq 0$. **5.50.** 1) Pentru $a>-1$ i $a\neq 0$; 2) pentru $a<\frac{9}{16}$ i $a\neq -1$; 3) pentru $a<\frac{19}{5}$ i $a\neq 3$. **5.51.** Pentru $a<-\frac{1}{12}$. **5.52.** 1) 3; 2) –1. **5.53.** 1) –7; 2) –4. **5.54.** 1) Dacă $a>0$, atunci $x>0$; dacă $a<0$, atunci $x<0$; dacă $a=0$, soluții nu există; 2) dacă $a>0$, atunci $x<\frac{1}{a}$; dacă $a<0$, atunci $x>\frac{1}{a}$; dacă $a=0$, atunci x – orice număr; 3) dacă $a>0$, atunci $x\geqslant 1$; dacă $a<0$, atunci $x\leqslant 1$; dacă $a=0$, atunci x – orice număr; 4) dacă $a<2$, atunci $x<-2$; dacă $a>2$, atunci $x>-2$; atunci $a=2$, soluții nu există; 5) dacă $a>2$, atunci $x>a+2$; dacă $a<2$, atunci $x<a+2$; dacă $a=2$, atunci soluții nu există; 6) dacă $a>-3$, atunci $x\leqslant a-3$; dacă $a<-3$, atunci $x\geqslant a-3$; dacă $a=-3$, atunci x – orice număr. **5.55.** 1) Dacă $a\neq 0$, atunci $x\leqslant 0$; dacă $a=0$, atunci x – orice număr; 2) dacă $a>-1$, atunci $x<\frac{2-a}{a+1}$; dacă $a<-1$, atunci $x>\frac{2-a}{a+1}$; dacă $a=-1$, atunci x – orice număr; 3) dacă $a>-4$, atunci $x>\frac{1}{a+4}$; dacă $a<-4$, atunci $x<\frac{1}{a+4}$; dacă $a=-4$, atunci soluții nu există. **5.59.** 15 ore, 10 ore.

6. Sisteme de inegalități lineare cu o variabilă

6.23. 1) $\left(\frac{1}{7}; \frac{13}{10}\right)$; 2) $(-\infty; -4,2)$; 3) $[-2; 3]$; 4) $[-0,8; +\infty)$; 5) $\frac{5}{7}$; 6) $(-\infty; -4]$; 7) $\varnothing$; 8) $\varnothing$. **6.24.** 1) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{8}\right)$; 2) $[-10; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; +\infty)$. **6.25.** 1) –3; –2; –1; 0; 2) 7; 8; 9; 10; 11. **6.26.** 1) 4 soluții; 2) 6 soluții. **6.27.** 1) $[2,5; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{5}{3}; 3\right)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; 4)$. **6.28.** 1) $(0; 8]$; 2) $(5; +\infty)$. **6.29.** 1) $(-0,5; 6,5)$; 2) $[14; 17]$. **6.30.** 1) $[-1,5; 2,5)$; 2) $\left[0; \frac{1}{3}\right)$. **6.31.** 2) $(1,5; 7)$; 3) $(-\infty; -2)$. **6.32.** 1) $\varnothing$;

2) (1; 3). **6.33.** 3 cm, 5 cm sau 4 cm, 4 cm. **6.34.** 1) [–4; 3]; 2) $x<-1$ sau $x>3{,}5$; 3) $x<1$ sau $x>8$; 4) (–2; 9); 5) (–2; 0,5]; 6) $x\leqslant-0{,}8$ sau $x>6$. **6.35.** 1) (–3; 2); 2) $x<4$ sau $x>8$; 3) $x<-9$ sau $x\geqslant1{,}2$; 4) $\left[-\frac{1}{4}; 10\right)$. **6.36.** 1) [–1,6; 5,6]; 2) (–4; 1); 3) $x<-12$ sau $x>6$; 4) $x\leqslant2$ sau $x\geqslant\frac{8}{3}$; 5) $[1; +\infty)$; 6) $\left(-\frac{11}{7}; +\infty\right)$. **6.37.** 1) $x\leqslant3{,}6$ sau $x\geqslant8{,}4$; 2) [–2; –1,2]; 3) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; 4) (–∞; 2]. **6.38.** 1) Pentru $a>3$; 2) pentru $a\leqslant3$. **6.39.** 1) Pentru $a\leqslant4$; 2) pentru $a>1$. **6.40.** 1) Pentru $a\leqslant-1$; 2) pentru $a=1$. **6.41.** Dacă $a<2$, atunci $x\leqslant a$; dacă $a\geqslant2$, atunci $x<2$. **6.42.** Dacă $a<-3$, atunci $a<x<-3$; dacă $a\geqslant-3$, soluții nu există. **6.43.** Pentru $10<a\leqslant11$. **6.44.** Pentru $1<b\leqslant2$. **6.45.** Pentru $8\leqslant a<9$. **6.46.** Pentru $-6\leqslant b<-5$. **6.47.** Pentru $a<3$. **6.48.** Pentru $-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant3$. **6.49.** Pentru $a<-7$ sau $a>8$. **6.50.** 1) –1; 2) –2; 4. **6.51.** 1) $2\sqrt{10}-\sqrt{6}$; 2) $0{,}5\sqrt{2b}$; 3) $-4\sqrt{6}$.

§ 2. Funcția pătrată

7. Repetarea și profunzirea cunoștințelor despre funcție

7.17. 2) Orice număr, în afară de 7 i –7; 4) orice număr, nu mai mici ca 4, în afară de numărul 6. **7.27.** 60 km/oră.

8. Proprietățile funcției

8.17. $a<\frac{1}{8}$. **8.18.** $a>9$. **8.19.** 2. **8.20.** $m<-2$. **8.26.** $a=1$, $a=2$ i $a=1{,}5$. **8.27.** Dacă $a<-2$, atunci vea nai mare valoare $f_{\text{mai mare}}=f(a)=a^2$, cea mai mică valoare $f_{\text{mai mic}}=f(0)=0$; dacă $a=-2$, atunci $f_{\text{mai mare}}=f(-2)=$ $=f(2)=4$, $f_{\text{mai mic}}=f(0)=0$; dacă $-2<a\leqslant0$, atunci $f_{\text{mai mare}}=f(2)=4$, $f_{\text{mai mic}}=f(0)=0$; dacă $0<a<2$, atunci $f_{\text{mai mare}}=f(2)=4$, $f_{\text{mai mic}}=f(a)=a^2$. **8.30.** 10 ore, 40 ore. **8.31.** 20 %.

9. Cum poate fi construit graficul funcției $y = k f(x)$, dacă este cunoscut graficul funcției $y = f(x)$

9.21. 3 t.

10. Cum pot fi construite graficele funcțiilor și $y = f(x) + b$ și $y = f(x + a)$, dacă este cunoscut graficul funcției $y = f(x)$

10.17. *a*) $y = x^2 + 3$; *b*) $y = -2x^2 - 1$. **10.18.** *a*) $y = 2x^2 - 6$; *b*) $y = 4 - x^2$. **10.19.** *a*) $y = (x - 2)^2$; *b*) $y = -3(x + 3)^2$. **10.20.** *a*) $y = \frac{1}{2}(x+4)^2$; *b*) $y = -2(x - 1)^2$. **10.21.** *a*) $y = (x + 2)^2 - 4$; *b*) $y = -(x - 2)^2 + 5$; *c*) $y = \frac{1}{3}(x-3)^2 + 1$. **10.22.** *a*) $y = (x - 4)^2 - 5$; *b*) $y = -2(x + 6)^2 + 7$. **10.25.** Ambele afirmații sunt corecte. **10.28.** 3) *Sugestie*. $y = \frac{-2x+2-2}{x-1} = -2 - \frac{2}{x-1}$. **10.32.** $\frac{3}{4}$.

11. Funcția pătrată, graficul și proprietățile funcției pătrate

11.12. –1; 1; 3. **11.13.** 4. **11.14.** 1) 2 rădăcini; 2) 1 rădăcină. **11.15.** 3 rădocini. **11.16.** 1) (–1; –1), (9; 9); 2) (2; 23), (8; 17). **11.17.** (3; 15), (–1; 11). **11.23.** 1) –25; 2) –13; 3) –22. **11.24.** 1) 26; 2) 17; 3) –10. **11.25.** $p = 1$, $q = 4$. **11.26.** $a = -\frac{7}{6}$, $b = \frac{7}{6}$. **11.27.** $a = 3$, $b = 5$. **11.30.** $b = -16$. **11.31.** $b = 18$. **11.32.** $a = 1$ sau $a = 4$. **11.33.** $a \geqslant \frac{9}{2}$. **11.34.** $a < -16$. **11.35.** $c = -8$. **11.36.** $c = 14$. **11.37.** *a*) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$; *b*) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$. **11.39.** $p = -4$, $q = 9$. **11.40.** $a = 1$, $b = -8$, $c = 6$. **11.41.** *a*) –4; *b*) 4. **11.42.** –1. **11.43.** 1) 25. *Sugestie*. Fie, că unul din numere este egal cu x, atunci al doilea număr este egal $10 - x$. Analizați funcția $f(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$; 2) 50. **11.44.** Peste 1 oră 30 min. **11.45.** 1600 m^2. **11.50.** 1) $a > -4$; 2) $a = -4$; 3) $a < -4$. **11.52.** $a > \frac{13}{8}$. **11.53.** $a \geqslant -0{,}5$. **11.57.** 1) $8a\sqrt{a}$; 2) 56; 3) $6\sqrt{2} - 5$. **11.58.** 4 km/oră. **11.59.** 20 min, 30 min.

12. Rezolvarea inegalităților pătrate

12.10. 1) (–2; 1); 2) $(-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$; 3) $\left[-3; -\frac{1}{3}\right]$; 4) $(-\infty; -21) \cup (1; +\infty)$; 5) $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$; 6) $\left[-\frac{13}{3}; 1\right]$. **12.11.** 1) $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$; 2) (–5; –3); 3) $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$; 4) $(-\infty; -10) \cup (1; +\infty)$. **12.12.** 1) Pentru

$-\frac{1}{3} < x < \frac{7}{3}$; 2) pentru $x \leqslant -0{,}2$ sau $x \geqslant 2{,}4$. **12.13.** 1) Pentru $-\frac{5}{2} < x < \frac{9}{2}$; 2) pentru $-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{10}{3}$. **12.14.** Pentru $-5<x<4$. **12.15.** Pentru $1<x<2{,}5$. **12.16.** 1) –5, –4, –3, –2, –1, 0; 2) –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3; 3) 0; 4) –1, 0, 1 , 2 , 3, 4, 5. **12.17.** 1) 11; 2) 4. **12.18.** 1) –6; 2) –2. **12.19.** 1) 1; 2) –3. **12.24.** 1) $-4<a<4$; 2) $-8<a<12$; 3) $\frac{3}{8} < a < \frac{3}{2}$. **12.25.** 1) $b < -\frac{1}{16}$ sau $b>1$; 2) $b<4$ sau $b>10$. **12.26.** 1) $(0;\ 3]$; 2) $[-4;\ -0{,}5] \cup [6;\ +\infty)$; 3) $[-1;\ 0) \cup (6;\ 10]$; 4) $(-5; -3]$. **12.27.** 1) $\left(-\infty;\ \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3};\ 3\right)$; 2) $(-2;\ 0] \cup$ $\cup\ [5;\ 9)$. **12.28.** 1) –4, –3, –2, –1, 0, 1; 2) –3, –2, 1, 2. **12.29.** 1) $(6;\ +\infty)$; 2) $(-3;\ 5) \cup (5;\ 6)$; 3) $(-\infty;\ -9) \cup (-9;\ -2] \cup [7;\ 9) \cup (9;\ +\infty)$; 4) $\left(-1;\ \frac{2}{3}\right)$. **12.30.** 1) $[-2; 2)$; 2) $(-5;\ 6) \cup (6;\ 7)$. **12.31.** 1) $(-11; 11)$; 2) $\left(-\infty;\ -\frac{1}{8}\right] \cup$ $\cup \left[\frac{1}{8};\ +\infty\right)$. **12.32.** 1) $(-\infty;\ -1] \cup [-0{,}4;\ 0{,}4] \cup [1;\ +\infty)$; 2) $[-2;\ 2]$. **12.33.** 1) $(-5;\ 0) \cup (0;\ 2)$; 2) $[0;\ 2]$; 3) $(-1;\ 2) \cup (2;\ 9)$; 4) $(-\infty;\ -5) \cup$ $\cup\ (-5;\ -3) \cup (5;\ +\infty)$; 5) $(-\infty;\ -8] \cup [1;\ 4) \cup (4;\ +\infty)$; 6) $[-11;\ -3) \cup (-3;\ 1]$. **12.34.** 1) $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ 2) \cup (3;\ +\infty)$; 2) $(4;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -3) \cup (-3;\ -2) \cup$ $\cup\ (3;\ +\infty)$; 4) $\left[-\frac{1}{3};\ 1\right) \cup (1;\ 3]$. **12.35.** 1) $(-4;\ -3) \cup (5;\ +\infty)$; 2) $[-4;\ -3] \cup$ $\cup\ [5;\ +\infty)$; 3) $(-\infty;\ -4)$; 4) $(-\infty;\ -4] \cup \{-3, 5\}$. **12.36.** 1) $(3;\ 7)$; 2) $[3;\ 7] \cup \{-2\}$; 3) $(-2;\ 3)$; 4) $[-2;\ 3] \cup \{7\}$. **12.37.** 1) Pentru $a>4$; 2) pentru $-1 \leqslant a \leqslant \frac{3}{5}$; 3) pentru $0 < a < \frac{1}{2}$; 4) pentru $a > \frac{5}{3}$. **12.38.** 1) Pentru $a \geqslant 9$; 2) pentru $3 \leqslant a \leqslant 7$; 3) pentru $a \geqslant 1$. **12.39.** 1) Dacă $a<1$, atunci $a<x<1$ sau $x>4$; dacă $1 \leqslant a \leqslant 4$, atunci $x>4$; dacă $a>4$, atunci $x>a$; 2) dacă $a \leqslant -\frac{1}{4}$, atunci soluții nu există; dacă $-\frac{1}{4} < a \leqslant 1$, atunci $-\frac{1}{4} \leqslant x < a$; dacă $a>1$, atunci $-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1$. **12.40.** 1) Dacă $a \leqslant -8$, atunci $-8<x<9$; dacă $-8<a<9$, atunci $a<x<9$; dacă $a \geqslant 9$, atunci soluții nu există; 2) dacă $a<1$, atunci $x<a$; dacă $\mathbf{1 \leqslant a \leqslant 8}$, atunci $x<1$; dacă $a>8$, atunci $x<1$ sau $8<x<a$. **12.43.** 3 zile. **12.44.** 40 l.

13. Sisteme de ecuații cu două variabile

13.3. 1) (5; 8), (–3; 0); 2) (4; 1), (1; 4); 3) (–1; 1), (–3; –1); 4) (6; 1), (–6; –2); 5) (5; 3), (–1,5; –10); 6) (2; –2). **13.4.** 1) (–4; –7), (7; 4); 2) (2; 4), (–5; –3); 3) (–1; 4), (–0,5; 2,5); 4) (4; 2), (20; –14). **13.5.** 1) 2 soluții; 2) 3 soluții; 3) 1 soluții; 4) 2 soluții; 5) nu există soluții; 6) 3 soluții. **13.6.** 1) 2 soluții; 2) soluții nu există; 3) 2 soluții; 4) 4 soluții. **13.7.** 1) (4; 3); 2) (0; 0), (–2,4; 4,8); 3) (4; –3), (17; 10); 4) (9; –4), (4; 1); 5) (2; 2,5), (–4,4; –2,3); 6) (4; –1), (0; 3). **13.8.** 1) (6; 9), (–9; –6); 2) (1; 0), (–0,5; 0,75); 3) (2; 4), (3; 3); 4) (1; 1), $\left(\frac{17}{3}; \frac{38}{3}\right)$. **13.9.** 1) $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$, (–2; –7); 2) (2; 2), (–1; –4); 3) (1; 0), (5; –4); 4) (2; 3), $\left(\frac{2}{3}; \frac{43}{9}\right)$. **13.10.** (–4; –1). **13.11.** 2) (0,5; 5,5); 3) (–4; 52), (3; 3). **13.12.** 1) (3; 4), (4; 6); 2) (–2; 1), $\left(-6; \frac{9}{5}\right)$. **13.13.** 1) (2; 1), $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; 2) (1; 5), $\left(\frac{10}{3}; -2\right)$. **13.14.** 1) (–5; 1), (1; –5), (4; 1), (1; 4); 2) (5; –2), $\left(\frac{6}{7}; \frac{15}{7}\right)$; 3) (3; 1), (–3; –1), $\left(2\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$; 4) (2; 3); 5) (–3; 3), (3; –3); 6) (2; 1), $\left(-\frac{1}{2}; -4\right)$; 7) (1; 0), $\left(-\frac{19}{21}; -\frac{8}{21}\right)$. **13.15.** 1) (6; 3), $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{2}\right)$; 2) (2; –1), $\left(\frac{21}{53}; \frac{15}{53}\right)$; 3) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$; 4) (9; 3), (–9; –3); 5) (–2; 1), $\left(\frac{29}{28}; -\frac{3}{14}\right)$; 6) (–3; 4), (–5; 2), (1; –4), (3; –2). **13.16.** 1) (1; 0), (0; 1); 2) (3; –1), (1; –3); 3) (4; 3), (–4; –3); 4) (–3; 2), (3; –2). **13.17.** 1) (4; 2), (–2; –4); 2) (1; 3), (–1; –3). **13.18.** 1) (1; 2), $\left(7\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$; 2) (–7; –5), (4; 6); 3) (–4; –3), (–4; 2), (3; –3), (3; 2); 4) (3; 1), $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. **13.19.** 1) (4; 1), (1; 4); 2) (1; –2), $\left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}\right)$; 3) (6; 5), (–4; –5); 4) (5; 4), (–5; –4), (5; –4), (–5; 4). **13.20.** 1) $\left(7; \frac{1}{6}\right)$, $\left(1; \frac{7}{6}\right)$; 2) (–2; 4), (2; –4), $\left(\frac{94}{7}; -\frac{8}{7}\right)$, $\left(-\frac{94}{7}; \frac{8}{7}\right)$; 3) (4; 3), (3;

4), (–4; –3), (–3; –4); 4) (1; –1), $\left(-\frac{1}{3}; 3\right)$, (–1; 1), $\left(\frac{1}{3}; -3\right)$.
13.21. 1) (2; 1), (–5; –0,4); 2) (4; 0); 3) (1; 3), (3; 1), (–3; –1), (–1; –3); 4) (–2; 2), $\left(-10; \frac{2}{5}\right)$, (2; –2), $\left(10; -\frac{2}{5}\right)$. **13.22.** 1) $a = 3\sqrt{2}$ sau $a = -3\sqrt{2}$; 2) $-3\sqrt{2} < a < 3\sqrt{2}$; 3) $a < -3\sqrt{2}$ sau $a > 3\sqrt{2}$. **13.23.** 1) $k = 2$ sau $k = -2$; 2) $k < -2$ sau $k > 2$; 3) $-2 < k < 2$. **13.24.** 1) Dacă $a > 0$, atunci 2 soluții; dacă $a = 0$, atunci 1 atunci; dacă $a < 0$, atunci soluții nu există; 2) dacă $-4 < a < 4$, atunci soluții nu existe; dacă $a = -4$ sau $a = 4$, atunci 2 soluții; dacă $a < -4$ sau $a > 4$, atunci 4 soluții; 3) dacă $a > -\frac{1}{4}$, atunci 2 soluții; dacă $a = -\frac{1}{4}$, atunci 1 soluție; dacă $a < -\frac{1}{4}$, atunci soluții nu există; 4) dacă $a < -\frac{17}{4}$ sau $a > 2$, atunci soluții nu există; dacă $a = -\frac{17}{4}$ sau $-2 < a < 2$, atunci 2 soluții; dacă $-\frac{17}{4} < a < -2$, atunci 4 soluții; dacă $a = -2$, atunci 3 soluții; dacă $a = 2$, atunci 1 soluție. **13.25.** 1) Dacă $a < 1$, atunci soluții nu există; dacă $a = 1$, atunci 2 soluții; dacă $a > 1$, atunci 4 soluții; 2) dacă $a > 3\sqrt{2}$ sau $a < -3$, atunci soluții nu există; dacă $a = 3\sqrt{2}$ sau $-3 < a < 3$, atunci 2 soluții; dacă $3 < a < 3\sqrt{2}$, atunci 4 soluții; dacă $a = 3$, atunci 3 soluții; dacă $a = -3$, atunci 1 soluție; 3) dacă $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$, atunci soluții nu există; dacă $a = -2\sqrt{2}$ sau $a = 2\sqrt{2}$, atunci 2 soluții; dacă $a < -2\sqrt{2}$ sau $a > 2\sqrt{2}$, atunci 4 soluții. **13.26.** $a = -2$. *Sugestie*. Evident, că $a \neq 0$. Rezolvați sistemul, alcătuit din două ecuații $ax^2 + x + 1 = 0$ și $ax^2 + a^2x + a = 0$. **13.28.** 5. **13.29.** $\left[0; \frac{6}{17}\right]$. **13.30.** 40. **13.33.** $7\frac{2}{17}$ dinari, $9\frac{14}{17}$ dinari. **13.34.** 72 km/oră, 10 km/oră.

14. Sistemul de două ecuații cu două variabile ca model matematic al problemei de aplicație

14.1. 9 și 12. **14.2.** 6 și 4. **14.3.** 80 м, 30 м. **14.4.** 7 cm, 9 cm. **14.5.** 36. **14.6.** 62. **14.7.** 84. **14.8.** 12 și 24. **14.9.** 6 9. **14.10.** 5 cm, 12 cm. **14.11.** 15 cm, 17 cm. **14.12.** 15 cm și 12 cm sau 18 cm și 10 cm. **14.13.** 15 cm, 6 cm. **14.14.** 18 cm, 12 cm. **14.15.** 80 km/oră, 60 km/oră. **14.16.** 90 km/oră, 45 km/oră. **14.17.** 80 km/oră, 60 km/oră. **14.18.** 500 m/min, 400 m/min. **14.19.** 12 zile, 24 ore sau 40 zile, 10 zile. **14.20.** 10 ore, 15 ore sau 12 ore, 12 ore. **14.21.** 16 ore, 48 ore. **14.22.** 10 ore, 15 ore. **14.23.** 60 Ohm, 90 Ohm. **14.24.** 4 Ohm, 6 Ohm sau 3,6 Ohm, 7,2 Ohm. **14.25.** 2 km/oră. **14.26.** 27 km/oră, 3 km/oră. **14.27.** 24 km/oră, 16 km/oră. **14.28.** 12 km/oră. **14.29.** 2 km/oră, 12 km/oră. **14.30.** 8,4 g/cm^3, 6,4 g/cm^3. **14.31.** 15 N, 20 N. **14.32.** 60 m, 80 m. **14.33.** 1) $-\frac{1}{a}$; 2) $\frac{1}{2-b}$. **14.35.** 1) $(-\infty; 2]$; 2) $(0{,}16; +\infty)$. **14.36.** 3. **14.37.** $-0{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}4$. **14.38.** 1) $(-\infty; -2{,}5]$; 2) $\left[\frac{5}{6}; +\infty\right)$. **14.39.** 13 și 6 sau 67 și 66.

§ 3. Șiruri numerice

15. Șiruri numerice

15.11. 8 termeni. **15.12.** 13. **15.13.** 1, 2, 3, 4, 5. **15.14.** 8. **15.15.** 1) $a_n = n^2$; 2) $a_n = 3n + 2$; 3) $a_n = \frac{n-1}{n}$; 4) $a_n = (-1)^n + 1$. **15.16.** 1) $a_n = n^3 + 1$; 2) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. **15.18.** 2) $[-6; 1)$. **15.20.** 32 piese. **15.21.** 60 kg. **15.22.** 400 pagini.

16. Progresia aritmetică

16.13. 1) Da, $n = 16$; 2) nu. **16.14.** 15. **16.17.** 23. **16.18.** –6. **16.20.** 18. **16.21.** 16. **16.22.** –0,6. **16.23.** –6; –4,5; –3; –1,5; 0; 1,5; 3. **16.24.** 2,2; 0,4; –1,4; –3,2. **16.25.** 1) $a_1 = 5$, $d = 2{,}5$; 2) $a_1 = -6$, $d = 4$ sau $a_1 = 15$, $d = \frac{1}{2}$. **16.26.** 1) $a_1 = -2$, $d = 3$; 2) $a_1 = 20$, $d = -8$ sau $a_1 = 51{,}5$, $d = -11{,}5$. **16.27.** Dacă primul termen al progresiei este egal cu rația sau rația este egală cu zero. **16.30.** 60°. **16.31.** 1) Da, $a_1 = -3$, $d = -6$; 2) nu; 3) da, $a_1 = -2{,}8$, $d = -2{,}8$; 4) nu. **16.32.** 1) Da, $a_1 = 13$, $d = 7$; 2) da, $a_1 = \frac{1}{5}$, $d = \frac{2}{5}$; 3) nu. **16.38.** Pentru $x = -1$ obținem: $a_1 = -3$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$; pentru $x = 8$ obținem: $a_1 = 60$, $a_2 = 43$, $a_3 = 26$. **16.39.** $y = 3$; $a_1 = 10$, $a_2 = 12$, $a_3 = 14$. **16.40.** $y = 1$; $a_1 = -1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 17$, $a_4 = 26$. **16.41.** $x = -1$; $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$. **16.45.** 1) (7; –1), (11; –5); 2) (2; 2), (2; –2), (–2; 2), (–2; –2). **16.47.** –4. **16.48.** 1) $120\sqrt{2}$; 2) $150 - 30\sqrt{2}$. **16.50.** 24 piese. **16.51.** 40 pistoli sau 60 pistoli. **16.52.** 120%.

17. Suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice

17.9. 1) 204; 2) 570. **17.10.** –310. **17.11.** 156 lovituri. **17.12.** 1400. **17.13.** 710. **17.14.** 1188. **17.15.** 8, 14, 20. **17.16.** –17. **17.17.** $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20, $29\frac{1}{6}$, $38\frac{1}{3}$. **17.18.** 1) $\frac{n(n+1)}{2}$; 2) n^2. **17.19.** $n(n+1)$. **17.20.** 3. **17.21.** –67,2. **17.22.** 63. **17.23.** 5880. **17.24.** 2112. **17.25.** 1632. **17.26.** 61 376. **17.27.** 70 336. **17.28.** 0,3. **17.29.** 10. **17.30.** 20. **17.31.** 16. **17.32.** Da, 19, 23, 27, 31, 35. **17.33.** Nu. **17.34.** 10 sec **17.35.** 42 pagini. **17.36.** –1976. **17.37.** 348. **17.38.** $a_1 = 14$, $d = -3$. **17.39.** –10. **17.40.** 10. **17.41.** 690. **17.42.** 250. **17.43.** 1) 12; 2) 26. **17.44.** 1) 10; 2) 69. **17.45.** $a_1 = 1$, $d = 2$. **17.47.** $a_1 = -2$, $d = 2$. *Sugestie.* $a_n = S_n - S_{n-1}$. **17.48.** 2610. **17.52.** 1) $\frac{a-\sqrt{bc}}{\sqrt{abc}}$; 2) $\frac{4\sqrt{d}-28}{3\sqrt{d}+18}$. **17.53.** 24 km/oră. **17.54.** 2 oră. **17.55.** 200 g, 600 g.

18. Prigresia geometrică

18.17. 6298,56 grn. **18.18.** 29 736 unități. **18.19.** 3600 grn. **18.20.** 600 grn. **18.21.** 5 %. **18.22.** Cu 15 %. **18.25.** 1) 2; 2) $\frac{3}{5}$ sau $-\frac{3}{5}$. **18.26.** 1) $\frac{7}{16}$; 2) 0,001. **18.27.** 6. **18.28.** 9. **18.29.** 30 i 150. **18.30.** 1; 2; 4; 8. **18.31.** Da, $b_1 = \frac{5}{4}$, $q = 4$. **18.32.** $x_1 = 49$, $q = 7$. **18.33.** 1) 15 sau –15; 2) 6 sau –6; 3) $2\sqrt{5}$ sau $-2\sqrt{5}$. **18.34.** 2. **18.35.** $\sqrt{2}$ sau $-\sqrt{2}$. **18.36.** 216. **18.37.** 243. **18.39.** $P_n = \frac{3a}{2^{n-1}}$. **18.41.** 3) Șirul este progresie aritmetică, dacă $q \neq -1$. **18.43.** 80, 40, 20, 10, 5 sau 80, –40, 20, –10, 5. **18.44.** 6, 18, 54, 162, 486 sau 6, –18, 54, –162, 486. **18.45.** 1) $b_1 = 2\sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$ sau $b_1 = -2\sqrt{3}$, $q = -\sqrt{3}$; 2) $b_1 = 162$, $q = \frac{1}{3}$; 3) $b_1 = 7$, $q = -2$ sau $b_1 = \frac{14}{9}$, $q = -3$. **18.46.** 1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 4$; 2) $b_1 = -1$, $q = 3$. **18.47.** Pentru $x = 1$ obținem 3, 6, 12; pentru $x = -14$ obținem –27, –9, –3. **18.48.** Pentru $x = 2$ obținem 8, 4, 2; pentru $x = -7$ obținem

–1, –5, –25. **18.50.** 96, 48, 24, 12, 6, 3. **18.51.** 3, 7, 11. **18.52.** 8, 10, 12 sau 17, 10, 3. **18.53.** 5, 15, 45 sau 45, 15, 5. **18.54.** 2, 6, 18 sau 18, 6, 2. **18.59.** În 2 zile. **18.60.** 6 kg, 18 kg sau 9 kg, 21 kg. **18.61.** 3 kg. **18.62.** 6 %. **18.63.** 10 %.

19. Suma primilor n termeni ai progresiei geometrice

19.5. 1) 1456; 2) $155\left(5+\sqrt{5}\right)$. **19.6.** 762. **19.7.** 1210. **19.8.** –68,2. **19.9.** 27. **19.10.** –7 sau 6. **19.11.** 5. **19.12.** (2^{72} – 1) bacterii. **19.13.** 72. **19.14.** $\frac{9}{8}$. **19.15.** 4368. **19.16.** –12 285. **19.19.** 5. **19.20.** 1) $\left[-\frac{18}{7}; 13\right]$; 2) [–1; 4). **19.23.** 50 piese, 40 piese. **19.24.** 1) $b - 5a$; 2) $x + 2y$. **19.25.** Cu 10 % prima oară și cu 20 % doua. **19.26.** 20 %.

20. Exerciții pentru repetarea cursului de algebră de clasa 9

20.17. 6. **20.24.** 1) $(1; +\infty)$; 2) [2; 3); 3) [–2; 16]; 4) (–4; 7]. **20.25.** 1) –9; 2) –2. **20.27.** 2. **20.29.** 1) $a < 4$; 2) $a < 2$; 3) $a \leqslant -3$; 4) $a \geqslant 1$. **20.30.** 1) $a \geqslant 6$; 2) $a \geqslant 5$; 3) $a > -8$; 4) $a \leqslant 0$. **20.32.** $a < -1{,}5$ i $a \neq -2$. **20.33.** $a = 0$. **20.41.** 1) $b = 6$, $c = 9$; 2) $b = 0$, $c = 4$; 3) $b = -3$, $c = -10$. **20.44.** 3) $-2\sqrt{2}$ sau $2\sqrt{2}$. **20.46.** $a = \frac{1}{3}$, $b = -4$, $c = 10$. **20.47.** $a = 2$, $b = -1$, $c = -3$. **20.48.** 1) 1; 2) –8. **20.50.** 1. **20.51.** 10 pentru $a = 1$ i $b = 3$. **20.54.** Pentru $c > 0{,}1$. **20.58.** 1) $a \neq 4$; 2) $a < \frac{1}{2}$, sau $\frac{1}{2} < a < 1$, sau $a > 13$; 3) $a < -1$, sau $-\frac{1}{5} < a < 0$, sau $a > 0$. **20.59.** 1) $a > \frac{1}{20}$; 2) $a < -5$; 3) $a \leqslant -1$; 4) $a > \frac{5}{3}$. **20.60.** 1) (1; 4), (–2; 7); 2) (3; –4), (4; –3); 3) (4; 0), (0; –4); 4) (0; –5), (3; 4), (–3; 4). **20.61.** 1) (–2; 1), (–0,4; 1,4); 2) (–2; 4), $\left(\frac{14}{9}; -\frac{20}{3}\right)$; 3) (3; 5), (10; 1,5); 4) (4; –3), (2; –6); 5) (–5; 2); 6) (3; 2), (–2; –3); 7) (3; –2), (0; 1); 8) (1; –2), (3; 0); 9) (8; 4), (4; 8); 10) (1; 5), (–5; –1). **20.62.** 1) (2; 1), (–2; –1), (1; 2), (–1; –2); 2) (5; 1), (1; 5), (2; 3), (3; 2); 3) (2; 1), (1; 2); 4) (6; 4), $\left(\frac{4}{5}; -\frac{6}{5}\right)$;

5) (4; 1), $\left(-\frac{1}{4}; 5\frac{1}{4}\right)$, (–4; –1), $\left(\frac{1}{4}; -5\frac{1}{4}\right)$; 6) (3; –2), (–3; 2); 7) (10; 5), (–5; –10); 8) (5; 3), (5; –3), (–5; 3), (–5; –3); 9) (3; 4), (4; 3), (–3; –4), (–4; –3); 10) (1; 2), $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, (–1; –2), $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **20.63.** 1) (3; 4), (4,5; 8,5); 2) (3; 1), (–1,5; –2); 3) (3; 2), (2; 3), (–3; –2), (–2; –3). **20.64.** 1) $a = \frac{1}{2}$; 2) $a = 2\sqrt{3}$ sau $a = -2\sqrt{3}$. **20.65.** 8 cm, 15 cm. **20.66.** 9 cm, 40 cm. **20.67.** 80 km/oră, 60 km/oră. **20.68.** 6 km/oră, 4 km/oră. **20.69.** 12 km/oră, 4 km/oră. **20.70.** 55 km/oră, 75 km/oră. **20.71.** 2 ore, 6 ore. **20.72.** 36 ore, 12 ore. **20.73.** 0,5 km/oră. **20.74.** 15 km/oră, 12 km/oră. **20.75.** 72 km/oră, 48 km/oră. **20.78.** $\frac{11}{12}$. **20.80.** De la treizeci și doi până la șasezeci și patru. **20.83.** 2,4 cm, 3,2 cm. **20.84.** 6) Da, $2d$; 7) da, $4d$. **20.85.** 0, 4, 8. **20.88.** 1) $\frac{n(a-n)}{a}$; 2) $\frac{n(na-b)}{a+b}$. **20.89.** 11. **20.90.** 1) $a_1 = -7$, $d = 3$; 2) $a_1 = 5$, $d = -2$ sau $a_1 = 3$, $d = -2$; 3) $a_1 = d = 3$ sau $a_1 = -33$, $d = 15$; 4) $a_1 = -0{,}7$, $d = 0{,}3$; 5) $a_1 = 0$, $d = 1{,}5$. **20.91.** 10. **20.92.** 255. **20.93.** $\frac{2a^2}{3}$. **20.94.** 1160. **20.95.** 2610. *Sugestie*. Suma căutată $S = S_1 - S_2 - S_3 + S_4$, în care S_1 – suma tuturor numerelor cu două cifre; S_2 – suma numerelor cu două cifre, divizibile la 3; S_3 – suma numerelor cu două cifre, divizibile la 5; S_4 – suma numerelor cu două cifre, divizibile la 15. **20.96.** Da, $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$. **20.97.** 20 %. **20.99.** 2. **20.100.** $2\frac{2}{3}$, 4, 6, 9. **20.101.** 3) Da, q^2; 4) da, q; 5) nu; 6) da, $\frac{1}{q}$.

Pentru cei care vor să obțină mai multe cunoștințe

21. Regulile de bază ale combinatoricii

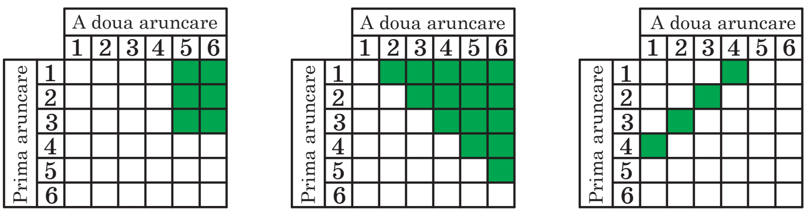
21.1. 9 trasee. **21.2.** 6 variante. **21.3.** 15 variante. **21.4.** 70. **21.5.** 1) 8; 2) 4. **21.6.** 4 · 3. **21.7.** 3 · 6 · 5. **21.8.** 1) 4 · 2; 2) 4 · 3. **21.9.** 1) 6; 2) 2. **21.10.** 100. **21.11.** 20. **21.12.** 25. **21.13.** 8. **21.14.** 6^3. **21.15.** 16. **21.16.** 32 · 24. **21.17.** 9 · 10 · 10 · 10 · 5. **21.18.** 9 · 10 · 10 · 10. **21.19.** 11 · 9 +8 · 7. **21.20.** $5^5 + 4 \cdot 5^4$.

22. Frecvența și probabilitatea evenimentului aleator

22.16. $a = 1$. **22.17.** 10 km/oră. **22.18.** 3.

23. Definiția clasică a probabilității

23.20. 1) $\frac{1}{25}$; 2) $\frac{1}{20}$. **23.23.** 10 bile. **23.24.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{10}$; 3) $\frac{1}{9}$. **23.25.** $\frac{2}{3}$. **23.26.** $\frac{2}{3}$. **23.27.** 8 creioane. **23.28.** 19 creioane. **23.30.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $\frac{1}{9}$. *Sugestie*. Evenimentele favorabile sunt reprezentate pe figură cu culoare verde. **23.31.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{5}{36}$; 3) $\frac{5}{12}$. *Sugestie*. Aruncarea unui zarului de două ori – este identică aruncării a două czaruri concomitant. Apoi folosiți figura 24.2. **23.32.** Pentru Petro.



1) 2) 3)

23.30

23.33. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$. **23.34.** $\frac{1}{5}$. **23.35.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{7}{8}$. *Sugestie*. Aruncarea monetei de trei ori – este identică aruncării concomitente a trei monete independent una de alta. Dacă numerotăm monetele, obținem 8 rezultate egal posibile, cum este arătat pe figură.

Prima monetă	A doua monetă	A treia monetă
P	P	P
P	P	N
P	N	P
P	N	N
N	P	P
N	P	N
N	N	P
N	N	N

La problema 23.35

23.36. $\frac{2}{n-1}$. *Sugestie.* Dacă unul din persoanele ce se cunosc deja s-a așezat, al doilea are egale posibilități să ocupe unul din cele $n - 1$ locuri încă neocupate. **23.37.** $\frac{1}{2}$. *Sugestie.* Fiecărei variante de distribuire, în care A stă înaintea lui B, îi corespunde o variantă, în care ei sânt schimbați cu locul și A stă după B. Deaceia numărul de variante favorabile este de două ori mai mic decât numărul total de variante. **23.38.** Graficul este parabola $y = x^2 + 1$, "perforată" în punctele cu abscisele 2 i –2. **23.39.** $c = -11\frac{3}{4}$. **23.40.** 50 km/oră. **23.41.** $6\frac{1}{3}$.

Răspunsuri și sugestii la exercițiile din descrierea «Sumarea» din rubrica «Când temele sânt deja făcute»

1. $\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot 5^n}$. **2.** $n(n+1)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}$. **3.** 1) $\frac{10(10^n-1)}{9}-n$; 2) $\frac{50(10^n-1)}{81}-\frac{5n}{9}$. **5.** 1) $\frac{n-1}{4n-3}$; 2) $\frac{n(n+2)}{n+1}$; 3) $1-\frac{1}{(n+1)!}$. *Sugestie.* $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$; 4) $1-\frac{1}{(n+1)^2}$. *Sugestie.* $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$.
6. 1) $\frac{n}{2(5n+2)}$; 2) $\frac{n(n^2+2n+3)}{2(n+1)}$. *Sugestie.* $\frac{n^3+n^2+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+n$.
7. $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$. *Sugestie.* $\frac{1}{(n+1)^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$. **8.** $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.
Sugestie. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.
9. $S_n=\frac{na^n}{a-1}-\frac{a^n-1}{(a-1)^2}$. *Sugestie.* Analizăm egalitatea $aS_n=a+2a^2+3a^3+4a^4+\ldots+n\cdot a^n$.

Răspunsuri la însărcinările “Verificați cunoștințele” în formă de teste

Numărul însărcinării	Numărul problemei																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	B	D	B	C	B	A	C	C	C	A	B	D	D	A	D	C	B	B
2	D	C	B	C	A	D	D	C	C	C	C	D	B	D	B	C	C	A
3	C	B	A	C	D	A	A	C	C	A	D	B	D	C	D	A	D	B
4	B	C	B	D	D	C	A	B	B	C	B	A	A	D	C	B	A	C

Glosar

Argumentul funcției 59

Proprietățile inegalităților numerice 12

Grafică metoda de rezolvare a inegalităților 118

Demonstrarea inegalităților 6

Semne de inegalitate 6

Rația progresiei geometrice 173

Valoarea funcției 60

Model matematic 138

Modelare matematică 138

Limitele valorii unei mărimi 19

Metoda adunării 129

— înlocuirea variabilei 130

— substituției 128

Mulțimea de soluții a inegalității 28

— — sistemului de inegalități 42

Inegalitate lineară cu o variabilă 35

— nestrictă 6

— strictă 6

Inegalități pătrate 118

— de acelaș semn 18

— cu semne opuse 18

— echivalente 29

— numerice 5

Zeroul funcției 69

Reuniunea intervalelor 118

Domeniul de definiție al expresiei 42

— — funcției 59

— valorilor funcției 60

Estimarea valorii expresiei 19

Parabhola 77

Secțiunea intervalelor 43

Compararea numerelor 5

Mulțimea vidă 28

Șirul 151

— infinit 152

— finit 152

— numeric 151

Condiții inițiale 153

Priblemă de aplicație 138

Progresie aritmetică 160

— geometrică 173

Interval de semn constant al funcției 69

— creșterii funcției 70

— descreșterii funcției 70

Puncte de procente 184

Rația progresiei aritmetice 160

CUPRINS

Pentru cei ce vor să obțină mai multe cunoștințe

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів з навчанням
молдовською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Переклад з української мови

Перекладач Фратавчан Валерій Григорович
Молдовською мовою

Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Коректор *О.Г. Кирчу*

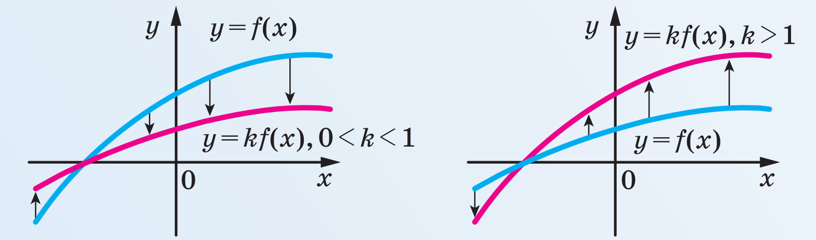
Формат 60×90/16.
Ум. друк. арк. 17,00. Обл.-вид. арк. 13,46.
Тираж 321 пр. Зам. № 61П

Державне підприємство
“Всеукраїнське спеціалізоване видавництво “Світ”
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21

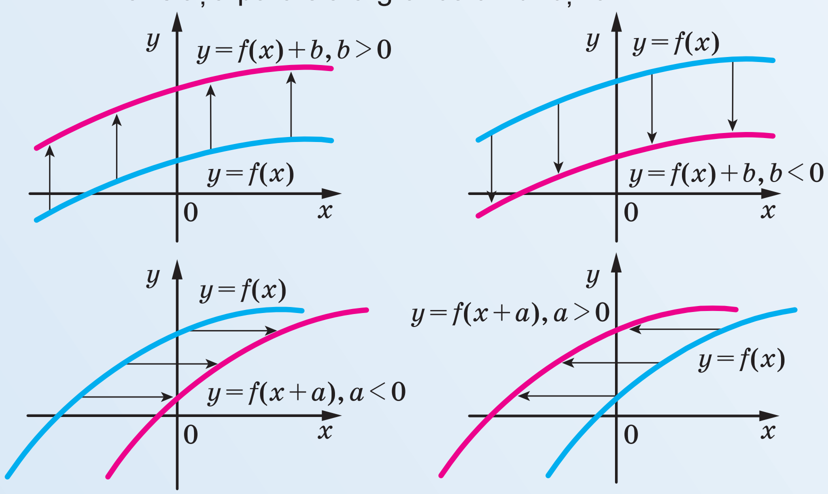
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи серія ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua, e-mail: office@svit.gov.ua

Друк ТДВ “Патент”
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи серія ДК № 4078 від 31.05.2011

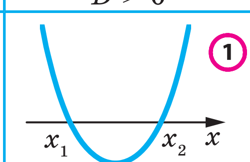
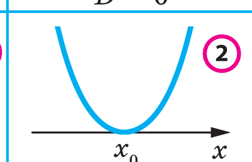
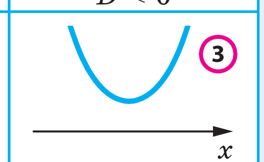
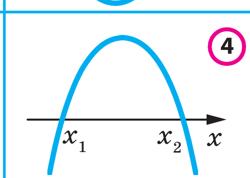
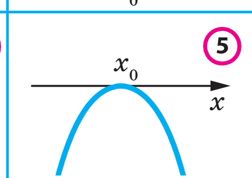
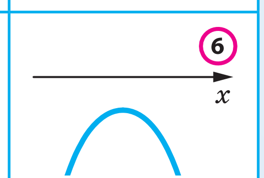
Transformarea graficelor funcțiilor



Translația paralelă a graficelor funcțiilor



Amplasarea graficiului funcției patrate față de axa abscisei

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Progresiile

Progresia Aritmetică	**Progresia geometrică**
fromula n - termen	
$a_n = a_1 + d\,(n-1)$	$b_n = b_1 q^{n-1}$
Formula sumei n primii termeni ai progresiei	
$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d\,(n-1)}{2} n$	$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1$
Proprietățile termenilor progresiei	
$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+2}}{2}$	$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$

Calcul procentual

Aflarea p % din numărul

$$b = \frac{ap}{100}$$

Aflarea numărului, p % egal cu a:

$$b = \frac{a \cdot 100}{p}$$

Aflarea raportului procentual al numărului a față de numărul b:

$$c = \frac{a}{b} \cdot 100\ \%$$

Formula conținutului procentual compus

$$a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$