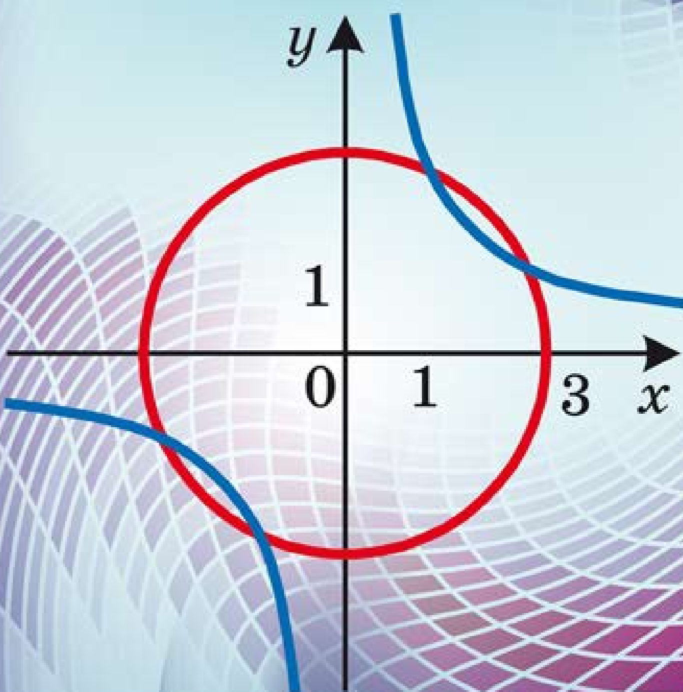
A. Merzlak
W. Połonski
M. Jakir

9

ALGEBRA



«Moja miłość — to Ukraina i matematyka».
Te słowa wycięto na granitowym postumencie pomnika naukowcy Mychajła Krawczuka (1892–1942).
Mamy nadzieję, że ta patriotyczna wypowiedź wybitnego ukraińskiego matematyka będzie dla was niezawodnym drogowskazem na drodze do profesjonalizmu.

Własności nierówności

Jeżeli $a > b$ i $b > c$, to $a > c$.

Jeżeli $a > b$ i c — dowolna liczba, to $a + c > b + c$.

Jeżeli $a > b$ i c — liczba dodatnia, to $ac > bc$.

Jeżeli $a > b$ i c — liczba ujemna, to $ac < bc$.

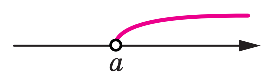
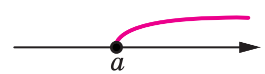
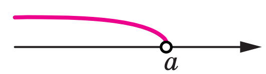
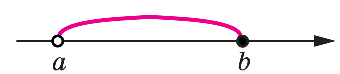
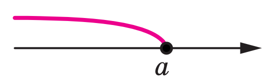
Jeżeli $ab > 0$ i $a > b$, to $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Jeżeli $a > b$ i $c > d$, to $a + c > b + d$.

Jeżeli $a > b$, $c > d$ i a, b, c, d — liczby dodatnie to $ac > bd$.

Jeżeli $a > b$ i a, b — liczby dodatnie, to $a^n > b^n$, gdy n — liczba naturalna.

Przedziały liczbowe

 $(a;\ +\infty)$	 $(a;\ b)$
 $[a;\ +\infty)$	 $[a;\ b)$
 $(-\infty;\ a)$	 $(a;\ b]$
 $(-\infty;\ a]$	 $[a;\ b]$

A. Merzlak
W. Połonski
M. Jakir

ALGEBRA

Podręcznik dla klasy 9.
szkół ogólnokształcących
z polskim językiem nauczania

Zalecany przez Ministerstwo Oświaty i Nauki Ukrainy

Львів
Видавництво "Світ"
2017

УДК 373.167.1:512
М52

Перекладено за виданням:
Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк., В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2017.

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 20.03.2017 № 417)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа “Рекомендовано Міністерством освіти і науки України”:

Я. П. Сисак, провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук;

Н. В. Кравченко, методист РМЦ відділу освіти Красноградської районної державної адміністрації Харківської області, старший учитель;

Ю. О. Андрух, учитель математики Чернівецького багатопрофільного ліцею № 4, учитель-методист

Мерзляк А. Г.
М52 Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів з навч. польськ. мовою / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. Б.-Г. І. Смірнова. – Львів : Світ, 2017. – 272 с. : іл.
ISBN 978-966-914-070-8

УДК 373.167.1:512

ISBN 978-966-914-070-8 (польськ.)
ISBN 978-966-474-293-8 (укр.)

Od autorów

KOCHANE DZIECI!

W tym roku szkolnym będziecie kontynuować naukę algebry. Spodziewamy się, że zdążyliście polubić tę ciekawą i trudną naukę, dlatego z wielką ciekawością będziecie opanowywali nowe wiadomości. Mamy nadzieję, że ten podręcznik, który będziecie trzymać w ręku, sprzyja temu. Zapoznajcie się z jego strukturą.

Podręcznik składa się z trzech paragrafów, każdy z których zawiera kilka punktów. Materiał teoretyczny jest podany w punktach. Najważniejsze informację są zaznaczone **drukiem** ***pogrubionym*** oraz *kursywą*.

Przeważnie materiał teoretyczny kończy się przykładami rozwiązania zadań. Zapisy te można rozpatrywać jako wzorzec zapisywania rozwiązań.

W każdym punkcie są podane zadania do pracy samodzielnej, które radzimy rozwiązywać po opanowaniu materiału teoretycznego.

Wśród tych zadań są łatwe, o średniej trudności oraz trudne, osobliwie te, które są oznaczone gwiazdką (*). Swoje wiadomości można sprawdzić, rozwiązując zadania pod tytułem “Sprawdź siebie”.

Dziesięć punktów w podręczniku kończą się rubryką pod tytułem “Uczymy się myśleć niestandardowo”. W niej są umieszczone zadania, które nie potrzebują nadzwyczajnych wiadomości z algebry, lecz więcej logiki, pomyślności i bystrości. Są te zadania potrzebne jak witaminy. One rozwijają umiejętności w podejmowaniu nieoczekiwanych i niestandardowych decyzji nie tylko w matematyce, ale i w życiu codziennym.

Gdy po odrobieniu zadań domowych pozostaje czas wolny, to radzimy zwrócić się do rubryki pod tytułem “Gdy odrobione są zadania domowe” oraz “Dla tych, kto pragnie dowiedzieć się więcej”. Materiał, który został tam umieszczony, nie jest łatwy. Ale tym ciekawiej jest spróbować własnych sił.

Bądźcie odważni! Życzymy powodzenia!

SZANOWNI KOLEDZY!

Spodziewamy się, że ten podręcznik będzie niezawodnym pomocnikiem w waszej ciężkiej pracy oraz ucieszymy się, gdy on spodoba się wam.

W podręczniku umieszczono wiele różnorodnych dydaktycznych materiałów. Lecz w ciągu jednego roku szkolnego niemożliwie jest zazwyczaj rozwiązać wszystkie zadania, oraz nie ma w tym potrzeby. Jednocześnie, posiadając większą ilość zadań, łatwiej jest pracować. Dlatego to umożliwia zrealizowanie poziomowego różnicowania oraz indywidualnego podejścia w nauczaniu. Materiał z rubryki pod tytułem "Gdy odrobione są zadania domowe" mogą też być zastosowane w pracy kółka matematycznego oraz zajęć fakultatywnych.

Życzymy twórczej inspiracji oraz cierpliwości.

Znaki umowne

n° zadania, odpowiadające poziomowi podstawowemu oraz średniemu osiągnięć w nauce;

$n^{\bullet}$ zadania, odpowiadające poziomowi dostatecznemu osiągnięć w nauce;

$n^{\bullet\bullet}$ zadania, odpowiadające poziomowi wysokiemu osiągnięć w nauce;

n^{*} zadania dla kółek matematycznych i zajęć fakultatywnych;

◀ koniec udowodnienia twierdzenia, rozwiązywania przykładu;

 zadania, które można rozwiązywać za pomocą komputera;

 rubryka pod tytułem "Gdy odrobione są zadania domowe".

Zielonym kolorem oznaczono numery zadań zalecanych do pracy domowej, **niebieskim** kolorem – numery zadań, które z uwzględnieniem indywidualnych możliwości uczniów klasy według uznania nauczyciela można rozwiązywać ustnie.

§ 1 NIERÓWNOŚCI

- W tym paragrafie dowiecie się w jakim przypadku liczba *a* jest "większa" lub "mniejsza" od liczby *b*. Zapoznacie się z własnościami liczbowych nierówności, dowiecie się, co nazywa się rozwiązaniem nierówności z jedną zmienną, rozwiązywaniem układu nierówności z jedną zmienną.
- Nauczycie się oceniać wartość wyrażenia, udowodniać nierówności, rozwiązywać liniowe nierówności oraz układy liniowych nierówności z jedną zmienną.

1. Liczbowe nierówności

Bardzo często na praktyce spotykamy się z porównywaniem różnych wielkości. Na przykład, powierzchnia sali gimnastycznej jest większa od powierzchni gabinetów, powierzchnia Ukrainy (603,5 tys. km) jest większa od powierzchni Francji (551,5 tys. km), wysokość góry Roman-Kosz (1545 m) jest mniejsza od wysokości góry Howerły (2061 m), odległość od Kijowa do Charkowa (450 km) jest równa 0,011 długości równika.

Wyniki takich porównań można zapisać w postaci liczbowych nierówności, zastosowując znaki >, <.

Gdy liczba a jest większa od liczby b, to można zapisać: $a>b$; gdy liczba a jest mniejsza od liczby b, to można zapisać: $a < b$.

Oczywiście, że $12>7$, $-17 < 3$, $\frac{15}{23} > \frac{11}{23}$, $\sqrt{2} > 1$. Prawidłowość tych nierówności wynika z reguł porównania liczb rzeczywistych, o których uczyliście się w klasach poprzednich.

Nie tylko liczby można porównywać za pomocą reguł już znanych. Istnieje również inny sposób o wiele uniwersalny, oparty na oczywistej wypowiedzi: gdy różnica dwóch liczb jest dodatnią, to odjemna jest większa od odjemnika; gdy różnica ich jest ujemną, to odjemna jest mniejsza od odjemnika.

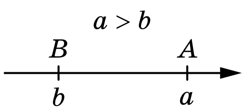
Ta wypowiedź podpowiada, że wygodnie podać następującą definicję.

Definicja. Liczba a jest większa od liczby b, gdy ich różnica $a - b$ jest liczbą dodatnią. Liczba a jest mniejsza od liczby b, gdy ich różnica $a - b$ jest liczbą ujemną.

Ta definicja umożliwia sprowadzenie zadania na porównanie dwóch liczb do zadania na porównanie ich różnicy z zerem. Na przykład, aby porównać wartości wyrażeń $\frac{2}{2+\sqrt{3}}$ i $2-\sqrt{3}$, należy rozpatrzyć ich różnicę:

$$\frac{2}{2+\sqrt{3}}-\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{2-\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-(4-3)}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

Ponieważ $\frac{1}{2+\sqrt{3}}>0$, to $\frac{2}{2+\sqrt{3}}>2-\sqrt{3}$.



Rys. 1.1

Zwróćmy uwagę, że różnica liczb a i b może być liczbą dodatnią lub ujemną, lub równą zeru, dlatego *dla dowolnych liczb a i b spełnia się dokładnie tylko jedna współzależność: $a > b$, $a < b$, $a = b$.*

Jeżeli $a > b$, to punkt, który przyporządkowany liczbie a na prostej współrzędnych leży bardziej na prawo od punktu, który przyporządkowany liczbie b (rys. 1.1).

Często w życiu codziennym zastosowujemy wypowiedzi "nie więcej", "nie mniej". Na przykład, zgodnie z wymaganiami sanitarnymi, uczniów w klasie nie powinno być nie więcej niż 30. Znak drogowy przedstawiony na rys. 1.2 oznacza, że prędkość ruchu samochodu ma być nie mniejszą niż 30 km/h.

Rys. 1.2

W matematyce zamiast słów "nie więcej" używa się znak $\leqslant$ (czyta się: "mniej lub równa się"), zaś dla słów "nie mniej" – znak $\geqslant$ (czyta się: "więcej lub równa się").

Jeżeli $a < b$ lub $a = b$, to spełnia się nierówność $a \leqslant b$.

Jeżeli $a > b$ lub $a = b$, to spełnia się nierówność $a \geqslant b$.

Na przykład, nierówności $7 \leqslant 7$, $7 \leqslant 15$, $-3 \geqslant -5$ spełniają się. Zauważymy, że na przykład, nierówność $7 \leqslant 5$ nie spełnia się.

Znaki $<$ i $>$ nazywają się znakami **ostrymi** nierówności, zaś znaki $\leqslant$ i $\geqslant$ nazywają się znakami **nieostrymi** nierówności.

PRZYKŁAD 1 Udowodnij, że przy dowolnej wartości a spełnia się nierówność

$$(a+1)(a+2) > a(a+3).$$

Rozwiązanie. Dla rozwiązania wystarczy przekonać się, że przy dowolnej wartości a różnica lewej i prawej części danej nierówności jest dodatnią. Otrzymamy:

$$(a+1)(a+2)-a(a+3)=a^2+2a+a+2-a^2-3a=2. \blacktriangleleft$$

W takich przypadkach stwierdza się, że **udowodniono nierówność**

$$(a+1)(a+2) > a(a+3).$$

PRZYKŁAD 2 Udowodnij, nierówność $(a-3)^2<2a^2-6a+10$, gdzie a – dowolna liczba rzeczywista.

Rozwiązanie. Rozpatrzymy różnicę lewej i prawej strony danej nierówności:

$$(a-3)^2-(2a^2-6a+10)=a^2-6a+9-2a^2+6a-10=$$
$$=-a^2-1=-a^2+(-1).$$

Przy dowolnej wartości a mamy że: $-a^2\leqslant 0$. Suma liczb nie dodatniej i ujemnej jest liczbą ujemną. A więc, $-a^2+(-1)<0$.

Stąd wynika, że $(a-3)^2<2a^2-6a+10$ przy dowolnych wartościach liczby a. ◄

PRZYKŁAD 3 Udowodnij nierówność $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$, gdzie $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.

Rozwiązanie. Rozpatrzymy różnicę lewej i prawej strony danej nierówności:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

Wyrażenie $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$ otrzymuje nie ujemne wartości przy dowolnych nie ujemnych wartościach liczb a i b. A więc nierówność, którą należało udowodnić, jest prawdziwa. ◄

Zwróć uwagę, że wyrażenie $\sqrt{ab}$ nazywa się **średnią geometryczną** liczb a i b.

A więc, udowodniliśmy, *że średnia arytmetyczna dwóch nieujemnych liczb jest nie mniejsza od średniej geometrycznej tych liczb*.

PRZYKŁAD 4 Udowodnij, że $a^2-ab+b^2\geqslant 0$ przy dowolnej wartości a i b.

Rozwiązanie. Mamy:

$$a^2-ab+b^2=a^2-2\cdot a\cdot\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}b^2+\frac{3}{4}b^2=\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2.$$

Ponieważ $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2\geqslant 0$ i $\frac{3}{4}b^2\geqslant 0$ przy dowolnych wartości a i b, to $\left(a-\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geqslant 0$ przy dowolnych wartościach a i b.

A więc, $a^2-ab+b^2\geqslant 0$ przy dowolnych wartościach a i b. ◄

1. W jakim przypadku uważa się, że liczba ***a*** jest większa od liczby ***b***?
2. Według jakiego warunku uważa się, że liczba ***a*** jest mniejsza od liczby ***b***?
3. Jak położony na prostej współrzędnej punkt, który przyporządkowany liczbie ***a*** względem punktu, który przyporządkowany liczbie ***b***, jeżeli ***a*** > ***b***?
4. Jaki symbol odpowiada współzależności "nie więcej" oraz jak ten symbol czyta się?
5. Jaki symbol odpowiada współzależności "nie mniej" oraz jak ten symbol czyta się?
6. Według jakiego warunku nierówność $a \leqslant b$? jest prawdziwą?
7. Według jakiego warunku nierówność $a \geqslant b$? jest prawdziwą?
8. Objaśnij, jakie znaki nazywają się znakami ostrymi, a jakie nieostrymi nierównościami?

ĆWICZENIA

1.1.° Porównaj liczby a i b, jeżeli a i b, jeżeli:
1) $a - b = 0{,}4$; 2) $a - b = -3$; 3) $a - b = 0$.

1.2.° Wiadomo, że $m < n$. Czy może różnica $m - n$ dorównywać liczbie:
1) 4,6; 2) –5,2; 3) 0?

1.3.° Która z liczb x czy y jest większa, jeżeli:
1) $x - y = -8$; 2) $y - x = 10$?

1.4.° Jak położony na prostej współrzędnej punkt A (a) względem punktu B (b), jeżeli:
1) $a - b = 2$; 3) $a - b = 0$;
2) $a - b = -6$; 4) $b - a = \sqrt{2}$?

1.5.° Czy nierówności mogą spełniać się jednocześnie:
1) $a > b$ i $a < b$; 2) $a \geqslant b$ i $a \leqslant b$?

1.6.° Porównaj wartości wyrażeń $(a - 2)^2$ i $a\,(a - 4)$ przy wartości a równej: 1) 6; 2) –3; 3) 2. Czy można według wyników wykonanych porównań stwierdzić, że przy dowolnej wartości a wartość pierwszego wyrażenia jest większa od odpowiednią wartości drugiego wyrażenia? Udowodnij, że przy dowolnej wartości a wartość pierwszego wyrażenia jest większa od odpowiedniej wartości drugiego wyrażenia.

1.7.° Porównaj wartości wyrażeń $4\,(b + 1)$ i $b - 2$ przy wartości b równej: 1) –1; 2) 0; 3) 3. Czy można stwierdzić, że przy dowolnej wartości b wartość wyrażenia $4\,(b + 1)$ jest większa od odpowiedniej wartości wyrażenia $b - 2$?

1.8.° Udowodnij, że przy dowolnej wartości zmiennej nierówność jest prawdziwa:
1) $(a+3)(a+1)>a(a+4)$;
2) $3(b-4)+2b<5b-10$;
3) $(c-4)(c+4)>c^2-20$;
4) $x(x+6)-x^2<2(3x+1)$;
5) $(y+5)(y-2)\geqslant 3y-10$;
6) $8m^2-6m+1\leqslant(3m-1)^2$;
7) $a(a-2)\geqslant -1$;
8) $(b+7)^2>14b+40$.

1.9.° Udowodnij, że przy dowolnej wartości zmiennej nierówność jest prawdziwa:
1) $(p-3)(p+4)<p(p+1)$;
2) $(x+1)^2>x(x+2)$;
3) $(a-5)(a+2)>(a+5)(a-8)$;
4) $y(y+8)<(y+4)^2$;
5) $(2a-5)^2\leqslant 6a^2-20a+25$;
6) $a^2+4\geqslant 4a$.

1.10.• Czy wypowiedź jest prawdziwa:
1) jeżeli $a>b$, to $\frac{a}{b}>1$;
2) jeżeli $a>1$, to $\frac{2}{a}<2$;
3) jeżeli $a<1$, to $\frac{2}{a}>2$;
4) jeżeli $\frac{a}{b}>1$, to $a>b$;
5) jeżeli $a^2>1$, to $a>1$?

1.11.• Udowodnij nierówność:
1) $2a^2-8a+16>0$;
2) $4b^2+4b+3>0$;
3) $a^2+ab+b^2\geqslant 0$;
4) $(3a+2)(2a-4)-(2a-5)^2>3(4a-12)$;
5) $a(a-3)>5(a-4)$;
6) $(a-b)(a+5b)\leqslant(2a+b)(a+4b)+ab$.

1.12.• Udowodnij nierówność:
1) $28a-32\leqslant 7a^2-4$;
2) $9x^2-6xy+4y^2\geqslant 0$;
3) $3(b-1)<b(b+1)$;
4) $(4p-1)(p+1)-(p-3)(p+3)>3(p^2+p)$.

1.13.• Udowodnij, że:

1) $a^3 - 6a^2 + a - 6 \geqslant 0,$ jeżeli $a \geqslant 6;$

2) $ab + 1 > a + b$, jeżeli $a > 1$ i $b > 1$;

3) $\frac{a+3}{3} + \frac{3a-2}{4} < a,$ jeżeli $a < -6$.

1.14.• Udowodnij, że:

1) $ab(b-a) \leqslant a^3 - b^3,$ jeżeli $a \geqslant b;$

2) $\frac{a-1}{2} - \frac{a-2}{3} > \frac{1}{2},$ jeżeli $a > 2$.

1.15.• Porównaj sumę kwadratów dwóch dowolnych liczb z ich podwojonym iloczynem.

1.16.• Podane są trzy kolejne liczby naturalne. Porównaj:

1) kwadrat liczby średniej według iloczynu dwóch pozostałych liczb;

2) podwojony kwadrat liczby średniej z sumą kwadratów dwóch liczb pozostałych.

1.17.• Porównaj sumę kwadratów dwóch liczb dodatnich z kwadratem ich sumy.

1.18.• Jak zmieni się – zwiększy się czy zmniejszy się – ułamek prawdziwy $\frac{a}{b},$ gdzie $a > 0$, $b > 0$, jeżeli jego licznik i mianownik zwiększyć o jedną i tę samą liczbę?

1.19.• Jak zmieni się – zwiększy się czy zmniejszy się – ułamek niewłaściwy $\frac{a}{b},$ gdzie $a > 0$, $b > 0$, jeżeli jego licznik i mianownik zwiększyć o jedną i tę samą liczbę?

1.20.• Udowodnij, że suma dwóch dowolnych wzajemnie odwrotnych liczb dodatnich jest nie mniejsza od 2.

1.21.• Udowodnij, że suma dwóch dowolnych wzajemnie odwrotnych liczb ujemnych jest nie większa od –2.

1.22.• Czy dana nierówność jest prawdziwa dla dowolnych wartości a i b:

1) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 1} > 1;$ 2) $\frac{a^2 - b^2}{b^2 + 1} > -1?$

1.23.• Udowodnij, że nierówność jest prawdziwa przy wszystkich wartościach zmiennej:

1) $\frac{a^2}{a^4 + 1} \leqslant \frac{1}{2};$ 2) $\frac{(5a+1)^2}{5} \geqslant 4a.$

1.24.• Udowodnij, że gdy $a < b$, to $a < \frac{a+b}{2} < b$.

1.25.•• Udowodnij, że gdy $a < b < c$, to $a < \frac{a+b+c}{3} < c$.

1.26.•• Czy prawdziwa nierówność $\frac{a^2+4}{2} \geqslant \sqrt{a^2+3}$ dla wszystkich wartości a?

1.27.•• Udowodnij, że przy wszystkich wartości zmiennych jest prawdziwą nierówność $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geqslant 2$.

1.28.•• Udowodnij nierówność:

1) $a^2+b^2+6a-4b+13 \geqslant 0$;
2) $x^2-2x+y^2+10y+28 > 0$;
3) $2m^2-6mn+9n^2-6m+9 \geqslant 0$;
4) $a^2+b^2+c^2+12 \geqslant 4(a+b+c)$;
5) $a^2b^2+a^2+b^2+1 \geqslant 4ab$.

1.29.•• Udowodnij nierówność:

1) $a^2+b^2-16a+14b+114 > 0$;
2) $x^2+y^2+10 \geqslant 6x-2y$;
3) $c^2+5d^2+4cd-4d+4 \geqslant 0$.

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

1.30. Wiadomo, że $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$, $d < 0$. Porównaj względem zera następujące wyrażenia:

1) bc; 3) $\frac{a}{b}$; 5) $\frac{ac}{d}$; 7) $abcd$;

2) cd; 4) $\frac{ab}{c}$; 6) $\frac{a}{bc}$; 8) $\frac{b}{acd}$.

1.31. Jakie znaki będą mieć a i b, gdy:

1) $ab > 0$; 3) $\frac{a}{b} > 0$; 5) $a^2b > 0$;

2) $ab < 0$; 4) $\frac{a}{b} < 0$; 6) $a^2b < 0$?

1.32. Objaśnij, dlaczego przy dowolnych wartościach zmiennej (lub zmiennych) nierówność jest prawdziwą:

1) $a^2 \geqslant 0$;
2) $a^2 + 1 > 0$;
3) $(a+1)^2 \geqslant 0$;
4) $a^2 - 4a + 4 \geqslant 0$;
5) $a^2 + b^2 \geqslant 0$;
6) $a^2 + b^2 + 2 > 0$;
7) $(a-2)^2 + (b+1)^2 \geqslant 0$;
8) $\sqrt{a^2+3} > 0$.

1.33. Porównaj względem wartości wyrażenia, gdzie a – dowolna liczba:

1) $4 + a^2$;
2) $(4 - a)^2$;
3) $-4 - a^2$;
4) $-4 - (a - 4)^2$;
5) $(-4)^8 + (a - 8)^4$;
6) $(4 - a)^2 + (4a - 1000)^2$.

1.34. Uprość wyrażenie:

1) $2a(5a - 7) - 5a(3 - 2a)$;
2) $(2b - 3)(4b + 9)$;
3) $(2c - 6)(8c + 5) - (5c + 2)(5c - 2)$;
4) $16m^2 - (3 - 4m)(3 + 4m)$;
5) $(2x - 1)^2 + (2x + 1)^2$;
6) $(x - 4)(x + 4) - (x - 8)^2$.

UCZYMY SIĘ NIESTANDARDOWEGO MYŚLENIA

1.35. Wszystkie liczby naturalne od 1 do 1000 włącznie podzielono na dwie grupy: liczby parzyste i liczby nieparzyste. W której grupie suma wszystkich cyfr, zastosowanych dla zapisywania liczb jest większą i o ile?

2. Podstawowe własności nierówności liczbowych

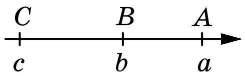
W tym punkcie rozpatrzymy własności nierówności liczbowych, które najczęściej zastosowują się podczas rozwiązywania zadań. One nazywają się **podstawowymi własnościami nierówności liczbowych**.

Twierdzenie 2.1. ***Jeżeli $a > b$ i $b > c$, to $a > c$.***

Dowód. Ponieważ, zgodnie z warunkiem $a > b$ i $b > c$, to różnice $a - b$ i $b - c$ są liczbami dodatnimi. Wtedy ich suma będzie dodatnią $(a - b) + (b - c)$. Mamy: $(a - b) + (b - c) = a - c$. A więc, różnica $a - c$ jest liczbą dodatnią, dlatego $a > c$. ◄

Analogicznie można udowodnić następującą własność: ***jeżeli $a < b$ i $b < c$, to $a < c$.***

Twierdzenie 2.1 można zilustrować geometrycznie (rys. 2.1) i jeżeli na prostej współrzędnej punkt A (a) leży na prawo od punktu B (b), a punkt B (b) leży na prawo od punktu C (c), wtedy punkt A (a) na prawo od punktu.



Rys. 2.1

Twierdzenie 2.2. ***Jeżeli a > b i c – dowolna liczba, to a + c > b + c.***

Dowód. Rozpatrzymy różnicę $(a + c) - (b + c)$. Otrzymamy: $(a + c) - (b + c) = a - b$. Ponieważ, według założenia $a > b$, to różnica $a - b$ jest liczbą dodatnią. A więc, $a + c > b + c$. ◀

Analogicznie można udowodnić następującą własność: ***jeżeli a < b i c – dowolna liczba, to a + c < b + c.***

Ponieważ odejmowanie można zamienić dodawaniem ($a - c = a + (-c)$), to twierdzenie 2.2 można sformułować następująco:

jeżeli do obu stron nierówności prawdziwej dodać lub od obu stron prawdziwej nierówności odjąć dokładnie tę samą liczbę, to otrzymamy nierówność prawdziwą.

Wniosek. ***Jeżeli dowolny składnik nierówności prawdziwej przenieść z jednej strony w drugą, zmieniają znak składnika na przeciwny, to otrzymamy nierówność prawdziwą.***

Dowód. Przypuśćmy, że nierówność $a > b + c$ jest prawdziwą. Od obu stron nierówności odejmiemy liczbę c. Otrzymamy: $a - c > b + c - c$, czyli $a - c > b$. ◀

Twierdzenie 2.3. ***Jeżeli a > b i c – liczba dodatnia, to ac > bc. Jeżeli a > b i c – liczba ujemna, to ac < bc.***

Dowód. Rozpatrzymy różnicę $ac - bc$. Otrzymamy:

$$ac - bc = c\,(a - b).$$

Zgodnie z założeniem $a > b$, wtedy różnica $a - b$ jest liczbą dodatnią.

Jeżeli $c > 0$, to iloczyn $c\,(a - b)$ jest liczbą dodatnią, wtedy różnica $ac - bc$ jest dodatnią, oznacza to, że $ac > bc$.

Jeżeli $c < 0$, to iloczyn $c\,(a - b)$ jest liczbą ujemną, wtedy różnica $ac - bc$ będzie ujemna, znaczy $ac < bc$. ◀

Analogicznie można udowodnić następującą własność: ***jeżeli a < b i c – liczba dodatnia, to ac < bc. Jeżeli a < b i c – liczba ujemna, to ac > bc.***

Ponieważ dzielenie można zamienić mnożeniem $\left(\frac{a}{c} = a \cdot \frac{1}{c}\right)$, to twierdzenie 2.3 można sformułować następująco:

jeżeli obie nierówności prawdziwej pomnożyć lub podzielić tą samą liczbą dodatnią, to otrzymamy nierówność prawdziwą;

jeżeli obie strony nierówności prawdziwej pomnożyć lub podzielić na tę samą liczbę ujemną, oraz zamienić znak nierówności na przeciwny, to otrzymamy nierówność prawdziwą.

Wniosek. ***Jeżeli $ab>0$ i $a>b$, to*** $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

Dowód. Podzielimy obustronnie nierówność $a>b$ przez liczbę dodatnią ab. Wtedy otrzymamy nierówność prawdziwą $\frac{a}{ab}>\frac{b}{ab}$, czyli $\frac{1}{b}>\frac{1}{a}$. Stąd $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. ◀

Zwróć uwagę, że przy zapisywaniu wniosku odrzucić warunek, że $ab>0$, to znaczy warunek, że liczby a i b są jednakowego znaku, wtedy z nierówności $a>b$ może nie spełnić się nierówność $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$. Rzeczywiście, nierówność $5>-3$ jest prawdziwą lecz nierówność $\frac{1}{5}<-\frac{1}{3}$ jest nie prawdziwa.

W twierdzeniach danego punktu brano pod uwagę, że nierówności są ostre. Analogiczne własności są właściwe również dla nierówności nieostrych. Na przykład, jeżeli $a \geqslant b$ i c – dowolna liczba, to $a+c \geqslant b+c$.

?

1. Która z liczb a, b lub c jest większą, jeżeli $a>b$ i $b>c$?
2. Podaj twierdzenie na obustronne dodawanie w nierówności dokładnie tę samą liczbę.
3. Podaj wniosek z twierdzenia na obustronne dodawanie w nierówności dokładnie tę samą liczbę.
4. Podaj wniosek z twierdzenia na obustronne mnożenie nierówności dokładnie przez tę samą liczbę.
5. Podaj wniosek z twierdzenia na obustronne mnożenie w nierówności dokładnie tę samą liczbę.

ĆWICZENIA

2.1.° Wiadomo, że $a>6$. Sprawdź, czy nierówność jest prawdziwa:
1) $a>4$; 2) $a \geqslant 5,9$; 3) $a>7$?

2.2.° Wiadomo, że $a<b$ i $b<c$. Która z wypowiedzi jest prawdziwa:
1) $a>c$; 2) $a=c$; 3) $c>a$?

2.3.° Zapisz nierówność, którą otrzymasz, gdy:
1) do obu stron nierówności $-3 < 4$ dodasz liczbę 5; oraz liczbę -2;
2) od obu stron nierówności $-10 < -6$ odejmiesz liczbę 3; oraz liczbę -4;
3) obie strony nierówności $7 > -2$ pomnożysz przez liczbę 5; oraz przez liczbę -1;
4) obie strony nierówności $12 < 18$ podzielisz przez liczbę 6; oraz przez liczbę -2.

2.4.° Wiadomo, że $a > b$. 2.4. Podaj nierówność, jaką otrzymasz, gdy:
1) do obu stron podanej nierówności dodasz liczbę 8;
2) od obu nierówności odejmiesz liczbę -6;
3) obustronnie części podanej nierówności pomnożysz przez liczbę 12;
4) obustronnie części podanej nierówności pomnożysz przez liczbę $-\frac{1}{3}$;
5) obustronnie części podanej nierówności podzielisz przez liczbę $\frac{2}{7}$;
6) obustronnie części podanej nierówności podzielisz przez liczbę -4.

2.5.• Wiadomo, że $b > a$, $c < a$ i $d > b$. Porównaj liczby:
1) a i d; 2) b i c.

2.6.• Przedstaw liczby a, b, c i 0, jeżeli $a > b$, $0 < b$ i $0 > c$ w kolejności rosnącej.

2.7.• Wiadomo, że $a > 4$. Porównaj względem zera wartości wyrażeń:
1) $a - 3$;
2) $2 - a$;
3) $(a - 3)(a - 2)$;
4) $\frac{(a-4)(a-2)}{3-a}$;
5) $(1 - a)^2 (4 - a)$.

2.8.• Wiadomo, że $-2 < b < 1$. Porównaj względem zera wartości wyrażenia:
1) $b + 2$;
2) $1 - b$;
3) $b - 2$;
4) $(b - 1)(b - 3)$;
5) $(b + 2)(b - 4)^2$;
6) $(b - 3)(b + 3)(b - 2)^2$.

2.9.• Dano: $a > b$. Porównaj:
1) $a + 9$ i $b + 9$;
2) $b - 6$ i $a - 6$;
3) $1{,}8a$ i $1{,}8b$;
4) $-a$ i $-b$;
5) $-40b$ i $-40a$;
6) $\frac{a}{20}$ i $\frac{b}{20}$;
7) $2a - 3$ i $2b - 3$;
8) $5 - 8a$ i $5 - 8b$.

2.10.• Wiadomo, że $1 \leqslant m < 2$. Które z podanych nierówności są prawdziwe:
1) $-1 \leqslant -m < -2$;
2) $-2 < -m \leqslant -1$;
3) $-1 \geqslant -m > -2$;
4) $-2 > -m \geqslant -1$?

2.11.• Dano: $-3a > -3b$. Porównaj:

1) a i b;
2) $\frac{2}{7}a$ i $\frac{2}{7}b$;
3) $b-4$ i $a-4$;
4) $-\frac{5}{9}b$ i $-\frac{5}{9}a$;
5) $3a+2$ i $3b+2$;
6) $-5a+10$ i $-5b+10$.

2.12.• Wiadomo, że $a > b$. Przedstaw liczby w kolejności malejącej $a+7$, $b-3$, $a+4$, $b-2$, b.

2.13.• Dano: $a < b$. Porównaj:
1) $a-5$ i b; 2) a i $b+6$; 3) $a+3$ i $b-2$.

2.14.• Porównaj liczby a i b, jeżeli a i b, wiedząc, że:
1) $a > c$ i $c > b+3$; 2) $a > c$ i $c-1 > b+d^2$,
gdy c i d – niektóre liczby.

2.15.• Porównaj liczby a i 0, jeżeli:
1) $7a < 8a$;
2) $\frac{a}{2} < \frac{a}{3}$;
3) $-6a > -8a$;
4) $-0{,}02a > -0{,}2a$.

2.16.• Dano: $a > -2$. Udowodnij, że:
1) $7a+10 > -4$; 2) $-6a-3 < 10$.

2.17.• Dano: $b \leqslant 10$. Udowodnij, że:
1) $5b-9 \leqslant 41$; 2) $1-2b > -21$.

2.18.• Czy wypowiedzi są prawdziwe:
1) jeżeli $a > b$, to $a > -b$;
2) jeżeli $a > b$, to $2a > b$;
3) jeżeli $a > b$, to $2a+1 > 2b$;
4) jeżeli $a > b+2$ i $b-3 > 4$, to $a > 9$;
5) jeżeli $a > b$, to $ab > b^2$;
6) ponieważ $5 > 3$, to $5a^2 > 3a^2$;
7) ponieważ $5 > 3$, to $5(a^2+1) > 3(a^2+1)$?

2.19.•• Podaj nierówności, które otrzymamy, jeżeli:
1) obie strony prawdziwej nierówności $a > 2$ pomnożymy przez a;
2) obie strony prawdziwej nierówności $b < -1$ pomnożymy przez b;
3) obie strony prawdziwej nierówności $m < -3$ pomnożymy przez $-m$;
4) obie strony prawdziwej nierówności $c > -4$ pomnożymy przez c.

2.20.•• Podaj nierówność, której otrzymamy, gdy:
1) obie strony nierówności prawdziwej $a < -a^2$ podzielimy przez a;
2) obie strony nierówności prawdziwej $a > 2a^2$ podzielimy przez a;
3) obie strony nierówności prawdziwej $a^3 > a^2$ podzielimy przez $-a$.

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

2.21. Jaka jest wartość wyrażenia ab, jeżeli wiadomo, że $a^2 + b^2 = 18$ i $(a + b)^2 = 20$.

2.22. Marek ma o 2 razy więcej znaczków od Joli, a Jola – o 2 razy więcej znaczków od Michała. Która z podanych liczb może odpowiadać ilości znaczków, którą ma Marek?

1) 18; 2) 22; 3) 24; 4) 30.

2.23. Wykonaj działania:

1) $\frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab}+\frac{b}{a+b}$;

2) $\frac{a^2+9}{a^2-9}-\frac{a}{a+3}$;

3) $\frac{c+1}{3c}:\frac{c^2-1}{6c^2}$;

4) $\frac{m^2+2mn+n^2}{m^2-n^2}:(m+n)$.

2.24. Motorówka może przepłynąć 48 km z prądem rzeki lub 36 km pod prądem rzeki za ten sam czas. Jaka jest własna prędkość motorówki, jeżeli prędkość prądu rzeki wynosi 2 km/h?

3. Dodawanie i mnożenie nierówności liczbowych. Ocena wartości wyrażenia

Rozpatrzymy następujące przykłady.

1) Jeżeli z pierwszego pola zebrano nie mniej od 40 t ziarna, zaś z drugiego pola – nie mniej od 45 t, to oczywiście razem z dwóch pól zebrano nie mniej niż 85 t ziarna.

2) 2) Jeżeli długość prostokąta jest nie większa od 70 cm, zaś szerokość – nie większa od 40 cm, to oczywiście, że jego pole nie większe od 2800 cm^2.

Wnioski z tych przykładów są widoczne. Prawdziwość ich potwierdzają następujące twierdzenia.

Twierdzenie 3.1 (na dodawanie stronami nierówności). ***Jeżeli $a>b$ i $c>d$, to $a + c > b + d$.***

Dowód. Rozpatrzymy różnicę $(a + c) - (b + d)$. Mamy:

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d).$$

Ponieważ $a>b$ i $c>d$, to różnice $a - b$ i $c - d$ są liczbami dodatnimi. A więc, rozpatrywana różnica jest dodatnia, to znaczy, że $a + c>b + d$. ◀

Analogicznie można udowodnić następującą własność: ***jeżeli a < b i c < d, to a + c < b + d.***

Nierówności $a > b$ i $c > d$ (lub $a < b$ i $c < d$) nazywają się **nierównościami o jednakowym zwrocie**, zaś nierówności $a > b$ i $c < d$ (lub $a < b$ i $c > d$) – **nierówności o zwrotach przeciwnych**.

Uważa się, że nierówność $a + c > b + d$ otrzymuje się od dodawania stronami następujących nierówności $a > b$ i $c > d$.

Twierdzenie 3.1 oznacza, że ***w wyniku dodawania stronami nierówności prawdziwych o tym samym zwrocie otrzymuje się nierówność prawdziwa o tym samym zwrocie***.

Zaznaczymy, że twierdzenie 3.1 spełnia się, gdy rozpatruje się trzy lub więcej nierówności. Na przykład, jeżeli $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$ i $a_3 > b_3$, to $a_1 + a_2 + a_3 > b_1 + b_2 + b_3$.

Twierdzenie 3.2 (na mnożenie stronami nierówności). ***Jeżeli a > b, c > d i a, b, c, d – liczby dodatnie, to ac > bd.***

Dowód. Rozpatrzymy różnicę $ac - bd$. Mamy:

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d).$$

Zgodnie z założeniem $a - b > 0$, $c - d > 0$, $c > 0$, $b > 0$. A więc, rozpatrywana różnica jest dodatnia. Z tego wynika, że $ac > bd$. ◄

Analogicznie można udowodnić nierówność: ***jeżeli a < b, c < d i a, b, c, d – liczby dodatnie, to ac < bd***.

Uważa się, że nierówność $ac > bd$ otrzymana od mnożenia stronami następujących nierówności $a > b$ i $c > d$.

Twierdzenie 3.2 oznacza, że ***w wyniku mnożenia stronami nierówności prawdziwych o tym samym zwrocie, w których prawe i lewe strony są liczbami dodatnimi otrzymuje się nierówność prawdziwa o tym samym zwrocie***.

Zwróćcie uwagę na to, że przy formułowaniu twierdzenia 3.2 odrzucono warunek, że a, b, c, d były liczbami dodatnimi, lecz w nierównościach $a > b$ i $c > d$ może nie spełnić się nierówność $ac > bd$. Rozpatrzymy dwie nierówności prawdziwe $-2 > -3$ i $4 > 1$. Pomnożymy stronami dane nierówności i otrzymamy nierówność nieprawdziwą $-8 > -3$.

Zwróćmy uwagę, że twierdzenie 3.2 spełnia się, gdy są rozpatrywane przy mnożeniu stronami trzy lub więcej nierówności. Na przykład, jeżeli liczby a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 – liczby dodatnie, przy czym $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$, $a_3 > b_3$, to $a_1a_2a_3 > b_1b_2b_3$.

Wniosek. ***Jeżeli a > b i a, b – liczby dodatnie, to*** $a^n > b^n$***, gdzie n – liczba naturalna.***

Dowód. Zapiszemy n razy nierówność prawdziwą postaci $a > b$:

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ a > b \\ \ldots \\ a > b \end{array}\right\} n \text{ nierówności}$$

Ponieważ a i b – liczby dodatnie, to możliwie obustronnie przemnożyć n wyżej zapisanych nierówności. Otrzymamy: $a^n > b^n$. ◄

Warto zaznaczyć, że rozpatrzone własności nierówności są prawdziwe również dla nierówności nieostrych:

jeżeli $a \geqslant b$ ***i*** $c \geqslant d$, ***to*** $a + c \geqslant b + d$;

jeżeli $a \geqslant b$, $c \geqslant d$ ***i*** a, b, c, d ***– liczby dodatnie, to*** $ac \geqslant bd$;

jeżeli $a \geqslant b$ ***i*** a, b ***– liczby dodatnie, to*** $a^n \geqslant b^n$, ***gdzie*** n ***– liczba naturalna***.

Wiecie, że wartości wyrażeń otrzymane przy mierzeniu są nie dokładne. Miernicze przyrządy umożliwiają tylko określenie między jakimi liczbami znajduje się dokładna wartość wielkości. Liczby te nazywają się **granicami wartości wyrażenia**.

Przypuśćmy, na przykład, w wyniku mierzenia szerokości x i długości y w prostokącie, ustalono, że $2{,}5 \text{ cm} < x < 2{,}7 \text{ cm}$ i $4{,}1 \text{ cm} < y < 4{,}3 \text{ cm}$. Wtedy, zgodnie z twierdzeniem 3.2 można ocenić pole prostokąta. Otrzymamy:

$$\times \begin{array}{c} 2{,}5 \text{ cm} < x < 2{,}7 \text{ cm} \\ 4{,}1 \text{ cm} < y < 4{,}3 \text{ cm} \\ \hline 10{,}25 \text{ cm}^2 < xy < 11{,}61 \text{ cm}^2. \end{array}$$

Ogółem, jeżeli są wiadome wartości granic wielkości, to można określić granice wartości wyrażenia, które zawiera te wielkości, to oznacza można **ocenić** wartość jego.

PRZYKŁAD 1 Wiadomo, że: $6 < a < 8$ i $10 < b < 12$. Oceń wartość wyrażenia:

1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) ab; 4) $\frac{a}{b}$; 5) $3a - \frac{1}{2}b$.

Rozwiązanie. 1) Po zastosowaniu twierdzenia na obustronne dodawanie nierówności, otrzymujemy:

$$+ \begin{array}{c} 6 < a < 8 \\ 10 < b < 12 \\ \hline 16 < a + b < 20. \end{array}$$

2) Po przemnożeniu wszystkich stron nierówności $10 < b < 12$ przez -1, otrzymamy: $-10 > -b > -12$, stąd $-12 < -b < -10$. Biorąc pod uwagę, że $a - b = a + (-b)$, otrzymamy:

$$+\begin{array}{r}6 < a < 8\\ -12 < -b < -10\\ \hline -6 < a - b < -2.\end{array}$$

3) Ponieważ $a > 6$ i $b > 10$, to a i b przyjmują dodatnie wartości. Zastosowując twierdzenie na mnożenie stronami nierówności, otrzymamy:

$$\times\begin{array}{c}6 < a < 8\\ 10 < b < 12\\ \hline 60 < ab < 96.\end{array}$$

4) Ponieważ $10 < b < 12$, to $\frac{1}{10} > \frac{1}{b} > \frac{1}{12}$, czyli $\frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10}$. Biorąc pod uwagę, że $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, otrzymamy:

$$\times\begin{array}{c}6 < a < 8\\ \frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10}\\ \hline \frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}.\end{array}$$

5) Po pomnożeniu każdej strony nierówności $6 < a < 8$ przez 3, zaś każdą stronę nierówności $10 < b < 12$ przez $-\frac{1}{2}$.

Otrzymamy dwie nierówności prawdziwe, a mianowicie:

$$18 < 3a < 24 \text{ i } -5 > -\frac{1}{2}b > -6.$$

Dodamy otrzymane nierówności:

$$+\begin{array}{c}18 < 3a < 24\\ -6 < -\frac{1}{2}b < -5\\ \hline 12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19.\end{array}$$

Odpowiedź: 1) $16 < a + b < 20$; 2) $-6 < a - b < -2$; 3) $60 < ab < 96$; 4) $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}$; 5) $12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19$. ◄

PRZYKŁAD 2 Udowodnij, że $\sqrt{24}+\sqrt{47}<12$.

Rozwiązanie. Ponieważ $\sqrt{24}<5$ i $\sqrt{47}<7$, to

$$\sqrt{24}+\sqrt{47}<5+7=12.$$ ◄

?

1. Podaj twierdzenie na obustronne dodawanie nierówności.
2. Objaśnij, jakie nierówności nazywają się nierównościami o jednakowym zwrocie, a jakie nierówności – nierówności o różnych zwrotach.
3. Podaj twierdzenie na obustronne mnożenie nierówności.
4. Podaj wnioski z twierdzenia na mnożenie każdej strony nierówności.

ĆWICZENIA

3.1.° Podaj nierówności, które otrzyma się, gdy:

1) dodać obustronnie nierówności $10>-6$ i $8>5$;

2) pomnożyć stronami nierówności $2<7$ i $3<4$;

3) pomnożyć stronami nierówności $1{,}2>0{,}9$ i $5>\frac{1}{3}$.

3.2.° Podaj nierówność, którą otrzyma się, jeżeli:

1) dodać stronami nierówności $-9<-4$ i $-6<4$;

2) pomnożyć stronami nierówności $\frac{1}{6}<\frac{1}{3}$ i $24<27$.

3.3.° Wiedząc, że: $-3<a<4$. Oceń znaczenie wyrażenia:

1) $2a$; 3) $a+2$; 5) $3a+1$; 7) $-4a$;

2) $\frac{a}{3}$; 4) $a-1$; 6) $-a$; 8) $-5a+3$.

3.4.° Wiedząc, że: $2<b<6$. Oceń wartość wyrażenia:

1) $\frac{1}{2}b$; 2) $b-6$; 3) $2b+5$; 4) $4-b$.

3.5.° Wiedząc, że $2{,}6<\sqrt{7}<2{,}7$. Oceń wartość wyrażenia:

1) $3\sqrt{7}$; 2) $-2\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{7}+1{,}3$; 4) $0{,}1\sqrt{7}+0{,}3$.

3.6.° Dano, że: $5<a<6$ i $4<b<7$. Oceń wartość wyrażenia:

1) $a+b$; 2) ab; 3) $a-b$.

3.7.° Wiedząc, że $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ i $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$. Oceń wartość wyrażenia:

1) $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; 3) $\sqrt{15}$.

3.8.° Dano: $2 < x < 4$. Oceń wartość wyrażenia $\frac{1}{x}$.

3.9.° Oceń średnią arytmetyczność wartości a i b, wiedząc, że $2{,}5 < a < 2{,}6$ i $3{,}1 < b < 3{,}2$.

3.10.° Oceń obwód trójkąta równoramiennego o podstawie a cm i ramieniem b cm, jeżeli $10 < a < 14$ i $12 < b < 18$.

3.11.° Oceń obwód równoległoboku o bokach a cm i b cm, jeżeli $15 \leqslant a \leqslant 19$ i $6 \leqslant b \leqslant 11$.

3.12.• Czy wypowiedź jest prawdziwa:

1) jeżeli $a > 2$ i $b > 7$, to $a + b > 9$;
2) jeżeli $a > 2$ i $b > 7$, to $a + b > 8$;
3) jeżeli $a > 2$ i $b > 7$, to $a + b > 9{,}2$;
4) jeżeli $a > 2$ i $b > 7$, to $a - b > -5$;
5) jeżeli $a > 2$ i $b > 7$, to $b - a > 5$;
6) jeżeli $a > 2$ i $b > 7$, to $ab > 13$;
7) jeżeli $a > 2$ i $b > 7$, to $3a + 2b > 20$;
8) jeżeli $a > 2$ i $b < -7$, to $a - b > 9$;
9) jeżeli $a < 2$ i $b < 7$, to $ab < 14$;
10) jeżeli $a > 2$, to $a^2 > 4$;
11) jeżeli $a < 2$, to $a^2 < 4$;
12) jeżeli $a > 2$, to $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$;
13) jeżeli $a < 2$, to $\frac{1}{a} > \frac{1}{2}$;
14) jeżeli $-3 < a < 3$, to $-\frac{1}{3} < \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$?

3.13.• Dano: $a > 2{,}4$ i $b > 1{,}6$. Porównaj:

1) $a + \frac{3}{4}b$ i $3{,}6$;
2) $(a + b)^2$ i 16;
3) $(a - 0{,}4)(b + 1{,}4)$ i 6.

3.14.• Wiedząc, że $a > 3$ i $b > -2$. Udowodnij, że $5a + 4b > 7$.

3.15.• Wiedząc, że $a > 5$ i $b < 2$. Udowodnij, że $6a - 7b > 16$.

3.16.• Dano: $5 < a < 8$ i $3 < b < 6$. Oceń wartość wyrażenia:

1) $4a + 3b$; 2) $3a - 6b$; 3) $\frac{a}{b}$; 4) $\frac{2b}{3a}$.

3.17.• Dano: $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ i $\frac{1}{7} < y < \frac{1}{4}$. Oceń wartość wyrażenia:

1) $6x + 14y$; 2) $28y - 12x$; 3) $\frac{y}{x}$.

3.18.• Porównaj znaczenie wyrażeń:

1) 2^{24} i 9^8; 2) $0{,}3^{20}$ i $0{,}1^{10}$; 3) $0{,}0015^{10}$ i $0{,}2^{40}$.

3.19.• Udowodnij, że obwód czworokąta jest większy od sumy jego przekątnych.

3.20.• Udowodnij, że każda przekątna wypukłego czworokąta jest mniejsza od połowy jego obwodu.

3.21.• Udowodnij, że suma dwóch przeciwległych boków czworokąta jest mniejsza od sumy jego przekątnych.

3.22.• Udowodnij wypowiedź:

1) jeżeli $a < b < 0$, to $a^2 > b^2$;

2) jeżeli $a > 0$, $b > 0$ i $a^2 > b^2$, to $a > b$.

3.23.• Udowodnij, że gdy $a < b < 0$, to $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

3.24.• Wiedząc, że $b > 0$ i $a > b$. Czy nierówność jest prawdziwa dla wszystkich wymienionych a i b:

1) $a^2 + a > b^2 + b$; 3) $2 - a^2 < 2 - b^2$;

2) $a^2 - a > b^2 - b$; 4) $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$?

3.25.•• Udowodnij, że:

1) $\sqrt{27} + \sqrt{65} > 13$; 3) $\sqrt{65} - \sqrt{35} > 2$;

2) $\sqrt{14} + \sqrt{15} < 8$; 4) $\sqrt{99} - \sqrt{82} < 1$.

3.26.•• Udowodnij, że:

1) $\sqrt{55} + \sqrt{35} > \sqrt{120}$; 2) $\sqrt{119} - \sqrt{67} < 3$.

3.27.•• Porównaj:

1) $\sqrt{10} + \sqrt{6}$ i $\sqrt{11} + \sqrt{5}$; 3) $\sqrt{15} - \sqrt{5}$ i $\sqrt{2}$;

2) $2 + \sqrt{11}$ i $\sqrt{5} + \sqrt{10}$; 4) $\sqrt{21} + \sqrt{20}$ i 9.

3.28.•• Porównaj:

1) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$ i $\sqrt{7} + \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{26} - \sqrt{2}$ i $\sqrt{14}$.

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

3.29. Uprość wyrażenie:

1) $\frac{x-3}{x+3} \cdot \left(x + \frac{x^2}{3-x}\right)$; 2) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{ab}{a^2 - b^2}$.

3.30. Uprość wyrażenie:

1) $6\sqrt{3}+\sqrt{27}-3\sqrt{75}$;
3) $\left(2-\sqrt{3}\right)^2$.
2) $\left(\sqrt{50}-3\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$;

3.31. Przy jakich wartości zmiennych wyrażenie ma sens:

1) $\frac{x^2}{x+4}$; 2) $\frac{x-4}{x^2-4}$; 3) $\frac{x^2-4}{x^2+4}$; 4) $\frac{4}{x-4}+\frac{1}{x}$?

3.32. W sadzie rosną jabłonie i wiśnie, przy czym wiśnie stanowią 20 % ze wszystkich drzew. Ile odsetek stanowi ilość jabłek do ilości wisien?

PRZYGOTOWUJEMY SIĘ DO NOWEGO TEMATU

3.33. Czy równania są równoważne:

1) $4x+6=2x-3$ i $4x+3=2x-6$;
2) $8x-4=0$ i $2x-1=0$;
3) $x^2+2x-3=0$ i $x^2+x=3-x$;
4) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ i $x^2-1=0$;
5) $\frac{x^2-1}{x+1}=0$ i $x-1=0$;
6) $x^2+1=0$ i $0x=5$?

UCZYMY SIĘ NIESTANDARDOWEGO MYŚLENIA

3.34. Udowodnij, że dla liczb nieparzystych a, b, c, d, e i f nie spełnia się nierówność $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}=1$.

O pewnych metodach udowodnienia nierówności

W p. 1 były udowodnione niektóre nierówności. Zastosowywaliśmy sposób: rozpatrywanie różnicy lewej i prawej strony nierówności oraz porównywaliśmy ją względem zera, lecz oprócz niego istnieją i inne sposoby udowodnienia nierówności.

Zapoznamy się z niektórymi z nich.

Rozważanie "od przeciwnego"

Nazwa tej metody odzwierciedla jego istotę.

PRZYKŁAD 1 Dla dowolnych liczb a_1, a_2, b_1, b_2 udowodnij nierówność

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right). \qquad (*)$$

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że nierówność, którą należy udowodnić, jest nie prawdziwa. Wtedy znajdą się takie liczby a_1, a_2, b_1, b_2, przy których nierówność będzie prawdziwa

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 > \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right).$$

Stąd

$$a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 > a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2;$$

$$2a_1b_1a_2b_2 > a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2;$$

$$a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2 < 0;$$

$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 < 0.$$

Końcowa nierówność jest nie prawdziwa. Otrzymane przeciwieństwo oznacza, że nierówność (*) jest prawdziwa. ◄

Nierówność (*) jest szczególnym przypadkiem ogólnej nierówności

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right). \qquad (**)$$

Nierówność (**) nazywa się *nierównością Cauchy'ego–Buniakowskiego*. Z jej dowodem możecie zapoznać się na zajęciu kółka matematycznego.

Metoda zastosowania oczywistych nierówności

PRZYKŁAD 2 Dla dowolnych a, b i c udowodnij, że spełnia się

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac.$$

Augustin Louis Cauchy
(1789–1857)

Wybitny francuski matematyk.
Jest autorem ponad 800 prac naukowych.

Rozwiązanie. Warto zaznaczyć, że przy dowolnych wartościach a, b, i c sprawdza się dana nierówność:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0.$$

Stąd, otrzymamy: $a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2 \geqslant 0;$

$$2a^2+2b^2+2c^2 \geqslant 2ab+2bc+2ac;$$

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac. \blacktriangleleft$$

Metoda zastosowania wyżej udowodnionych nierówności

W p. 1 udowodniliśmy, że przy dowolnych $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$ spełnia się nierówność

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Wyżej wymieniona nierówność nazywa się nierównością *Cauchy (czyt. Koszi) dla dwóch liczb.*

Rozpatrzymy, w jaki sposób można zastosować nierówność Cauchy podczas udowodnienia innych nierówności.

PRZYKŁAD 3 Udowodnij, że dla dodatnich liczb a i b spełnia się nierówność

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geqslant 4.$$

Rozwiązanie. Zastosowujemy nierówność Cauchy dla liczb dodatnich a i $\frac{1}{b}$. Otrzymamy:

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{2} \geqslant \sqrt{a \cdot \frac{1}{b}}.$$

Stąd $a+\frac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$

Analogicznie można udowodnić następującą nierówność $b+\frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}}.$

Wiktor Jakowlewicz Buniakowski
(1804–1889)

Wybitny matematyk XIX w.
Urodził się we Winnicy.
W ciągu wielu lat był wice-prezydentem Petersburskiej Akademii Nauk.

Zastosowując twierdzenie na obustronne mnożenie nierówności, otrzymamy:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geqslant 4\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Stąd $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geqslant 4.$ ◄

Metoda geometrycznej interpretacji

PRZYKŁAD 4 Udowodnij nierówność:

$$\sqrt{99\cdot 101}+\sqrt{98\cdot 102}+\ldots+\sqrt{2\cdot 198}+\sqrt{1\cdot 199}<\frac{100^2\pi}{4}.$$

Rozwiązanie. Rozpatrzymy czwartą część okręgu o promieniu 1 i środku 0. Wpiszemy do niej figurę strukturalną składającą się z 99 trójkątów prostokątnych w taki sposób jak przedstawiono na rysunku 3.1. Wtedy mamy:

$$OA_1=A_1A_2=\ldots=A_{98}A_{99}=\frac{1}{100}.$$

Pole pierwszego prostokąta jest

$$S_1=OA_1\cdot AA_1=OA_1\cdot\sqrt{1-OA_1^2}=\frac{1}{100}\sqrt{1-\frac{1}{100^2}}=\frac{\sqrt{99\cdot 101}}{100^2}.$$

Dla drugiego prostokąta otrzymamy:

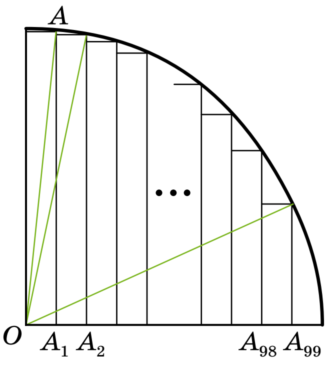
$$S_2=\frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{2}{100}\right)^2}=\frac{\sqrt{98\cdot 102}}{100^2}\text{ itd.}$$

$$S_{99}=\frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{99}{100}\right)^2}=\frac{\sqrt{1\cdot 199}}{100^2}.$$

Pole figury strukturalnej jest mniejsze od pola ćwiartki koła, a mianowicie

$$\frac{\sqrt{99\cdot 101}}{100^2}+\frac{\sqrt{98\cdot 102}}{100^2}+\ldots+\frac{\sqrt{1\cdot 199}}{100^2}<\frac{\pi}{4}.$$

Stąd wypływa nierówność jaką należało udowodnić. ◄



Rys. 3.1

ĆWICZENIA

1. Udowodnij nierówność:

1) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4,$ jeżeli $a>0$ i $b>0$;

2) $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$, jeżeli $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ i $c \geqslant 0$;

3) $(a^3+b)(a+b^3) \geqslant 4a^2b^2$, jeżeli $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$;

4) $(ab+1)(a+b) \geqslant 4ab$, jeżeli $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$;

5) $(a+2)(b+5)(c+10) \geqslant 80\sqrt{abc}$, jeżeli $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ i $c \geqslant 0$;

6) $a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant 4$, jeżeli $a>0$ i $b>0$;

7) $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geqslant 2^n$, jeżeli a_1, a_2, ..., a_n – liczby dodatnie, iloczyn których jest równy 1.

4. Nierówność z jedną zmienną

Rozpatrzymy zadanie. Jeden z boków równoległoboku jest równy 7 cm. Jakiej długości może mieć drugi jego bok, aby obwód równoległoboku był większy od 44 cm?

Przypuśćmy, że niewiadomy bok wynosi x cm. Wtedy obwód równoległoboku dorównuje $(14 + 2x)$ cm. Nierówność $14 + 2x > 44$ jest modelem matematycznym zadania na obwód równoległoboku.

Jeżeli w danej nierówności zamienić x, na przykład, liczbą 10, otrzymamy prawidłową nierówność liczbową, a mianowicie $14 + 32 > 44$. W tym przypadku uważa się, że liczba 16 jest **rozwiązaniem nierówności** $14 + 2x > 44$.

Definicja. Rozwiązaniem nierówności z jedną zmienną nazywa się wartość zmiennej, która przekształca ją w prawdziwą nierówność liczbową.

A więc, każda z liczb 15,1; 20; $10\sqrt{3}$ jest rozwiązaniem nierówności $14 + 2x > 44$, lecz liczba 10 nie będzie rozwiązaniem.

Uwaga. Definicja o rozwiązaniu nierówności jest analogiczna do definicji o pierwiastka równania. Lecz nie używa się termin "pierwiastek nierówności".

Definicja. Rozwiązać nierówność to znaczy znaleźć wszystkie jej rozwiązania lub udowodnić, że one nie istnieją.

Wszystkie rozwiązania nierówności tworzą **zbiór rozwiązań nierówności**. Jeżeli nierówność nie posiada rozwiązań, to uważa się, że zbiorem rozwiązań nierówności jest **zbiór pusty**. Przypominamy, że symbolem zbioru pustego jest symbol $\varnothing$.

A więc, można uważać, że ***rozwiązać nierówność to znaczy znaleźć zbiór jego rozwiązań***.

Na przykład, w zadaniu "Rozwiązać nierówność $x^2>0$" odpowiedź będzie następująca: "Wszystkie liczby rzeczywiste, oprócz liczby 0".

Oczywiście, że nierówność $|x| < 0$ nie posiada rozwiązań, to znaczy, że zbiorem jej rozwiązań jest zbiór pusty.

Definicja. Nierówności nazywają się równoważnymi, jeżeli zbiory ich rozwiązań są jednakowe.

Podamy kilka przykładów.

Nierówności $x^2 \leqslant 0$ i $|x| \leqslant 0$ są równoważne. Rzeczywiście, każda z nich posiada jedno rozwiązanie, a mianowicie $x = 0$.

Nierówności $x^2>-1$ i $|x|>-2$ są równoważne, ponieważ zbiorem rozwiązań każdej z nich jest zbiór liczb rzeczywistych.

Ponieważ każda z nierówności $\sqrt{x} < -1$ i $0x < -3$ nie posiada rozwiązań, to one także są równoważne.

?

1. Co nazywa się rozwiązaniem nierówności z jedną zmienną?
2. Co znaczy rozwiązać nierówność?
3. Co tworzą wszystkie rozwiązania nierówności?
4. W jakim przypadku rozwiązaniem nierówności jest zbiór pusty?
5. Jakie nierówności nazywają się równoważnymi?

ĆWICZENIA

4.1.° Które z podanych liczb -4; $-0{,}5$; 0; $\frac{1}{3}$; 2 4.1. są rozwiązaniem nierówności:

1) $x > \frac{1}{6}$; 3) $3x>x-1$; 5) $\sqrt{x-1} > 1$;

2) $x \leqslant 5$; 4) $x^2 - 9 \leqslant 0$; 6) $\frac{1}{x} > 1$?

4.2.° Która z wymienionych liczb będę rozwiązaniem nierówności $(x-2)^2(x-5)>0$:

1) 3; 2) 2; 3) 6; 4) -1?

4.3.° Czy wymienione liczby są rozwiązaniem nierówności $6x+1 \leqslant 2+7x$:

1) $-0{,}1$; 2) -2; 3) 0; 4) -1; 5) 2?

4.4.° Podaj dowolne dwa rozwiązania danej nierówności $x + 5 > 2x + 3$.

4.5.° Czy liczba 1,99 jest rozwiązaniem nierówności $x < 2$? Czy istnieją rozwiązania danej nierówności większe od 1,99? Gdy odpowiedź będzie stwierdzająca, to podaj przykład takiego rozwiązania.

4.6.° Czy liczba 4,001 jest rozwiązaniem nierówności $x > 4$? Czy istnieją rozwiązania danej nierówności, które są mniejsze od 4,001? Gdy odpowiedź będzie stwierdzająca, to podaj przykład takiego rozwiązania.

4.7.° Zbiorem rozwiązań jakich z wymienionych nierówności jest zbiór pusty:

1) $(x-3)^2 > 0$;
2) $(x-3)^2 \geqslant 0$;
3) $(x-3)^2 < 0$;
4) $(x-3)^2 \leqslant 0$?

4.8.° Która z wymienionych nierówności nie ma rozwiązań:

1) $0x > -2$; 2) $0x < 2$; 3) $0x < -2$; 4) $0x > 2$?

4.9.° Rozwiązanie której z wymienionych nierówności jest zbiór liczb rzeczywistych:

1) $0x > 1$; 2) $0x > 0$; 3) $0x > -1$; 4) $x + 1 > 0$?

4.10.° Rozwiązanie których z podanych nierówności jest dowolna liczba rzeczywista:

1) $x^2 > 0$; 2) $x > -x$; 3) $-x^2 \leqslant 0$; 4) $\sqrt{x} \geqslant 0$?

4.11.• Pośród podanych nierówności wskaż nierówność, rozwiązaniem której będzie liczba rzeczywista, oraz nierówność, która nie posiada rozwiązanie:

1) $\dfrac{x^2+1}{x^2} \geqslant 0$;
2) $\dfrac{x^2+1}{x^2+1} < 1$;
3) $\dfrac{x^2-1}{x^2-1} \geqslant 1$;
4) $\dfrac{x^2}{x^2+1} \geqslant 0$.

4.12.• Rozwiąż nierówność:

1) $\dfrac{2}{x^2} + 2 > 0$;
2) $(x+2)^2 > 0$;
3) $(x+2)^2 \leqslant 0$;
4) $\dfrac{x+2}{x+2} > 0$;
5) $\dfrac{x+2}{x+2} > \dfrac{2}{3}$;
6) $\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2 > 0$;
7) $\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2 \geqslant 0$;
8) $x + \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{x^2} + 2$;
9) $|x| \geqslant -x^2$;
10) $|x| > -x^2$;
11) $|x| > x$;
12) $|x| \geqslant -x$.

4.13.° Podaj zbiór rozwiązań nierówności:

1) $|x| > 0$;
2) $|x| \leqslant 0$;
3) $|x| < 0$;
4) $|x| \leqslant -1$;
5) $|x| > -3$;
6) $\left|\frac{1}{x}\right| > -3$.

4.14.° Czy nierówności są równoważne:

1) $\frac{1}{x} < 1$ i $x > 1$;
2) $x^2 \geqslant x$ i $x \geqslant 1$;
3) $(x + 5)^2 < 0$ i $|x - 4| < 0$;
4) $\sqrt{x} \leqslant 0$ i $x^4 \leqslant 0$?

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

4.15. Rozwiąż równania:

1) $9 - 7(x + 3) = 5 - 6x$;
2) $\frac{x+3}{2} - \frac{x-4}{7} = 1$;
3) $(x + 7)^2 - (x - 2)^2 = 15$;
4) $5x - 2 = 3(3x - 1) - 4x - 4$;
5) $6x + (x - 2)(x + 2) = (x + 3)^2 - 13$;
6) $(x + 6)(x - 1) - (x + 3)(x - 4) = 5x$.

4.16. Rowerzysta przejechał ze wsi do jeziora i powrócił tą samą drogą zatraciwszy na całą drogę 1 godz. Ze wsi do jeziora on jechał z prędkością równą 15 km/h, zaś powracał z prędkością 10 km/h. Oblicz odległość od wsi do jeziora.

5. Rozwiązywanie nierówności liniowych z jedną zmienną. Przedziały liczbowe

Własności liczbowych równości dopomogły nam rozwiązać równania. Analogicznie własności nierówności pozwolą nam rozwiązać nierówności.

Rozwiązując równania, zamieniamy go innym równoważnym danemu. Analogicznie według takiego schematu można rozwiązać także nierówności.

Podczas zamiany danego równania równoważnym równaniem zastosowujemy twierdzenie o przenoszeniu składników z jednej strony równania w drugą oraz o mnożeniu obu stron równania na tą samą liczbę, różną od zera.

Analogiczne reguły zastosowują się i podczas rozwiązywania nierówności.

Jeżeli dowolny składnik przenieść z jednej strony nierówności w drugą, mieniając znak na przeciwny, to otrzymamy nierówność równoważną danej.

Jeżeli obie strony nierówności pomnożyć (podzielić) przez tę samą liczbę dodatnią, to otrzymamy nierówność równoważną danej.

Jeżeli obie strony nierówności pomnożyć (podzielić) przez tę samą liczbę ujemną, zmieniając zwrot nierówności na przeciwny, to otrzymamy nierówność równoważną danej.

Za pomocą tych reguł rozwiążemy nierówność otrzymaną z rozwiązanego zadania na obliczenia pola równoległoboku (patrz p. 4).

Mamy: $14 + 2x > 44$.

Przeniesiemy składnik 14 do prawej strony nierówności:

$$2x > 44 - 14.$$

Stąd $2x > 30$.

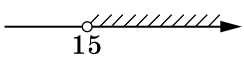
Dzieląc nierówność obustronnie przez 2, otrzymamy:

$$x > 15.$$

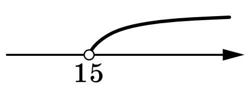
Warto zaznaczyć, że otrzymana nierówność jest równoważna danej nierówności. Zbiorem rozwiązań będą wszystkie liczby, które są większe od 15. Ten zbiór nazywa się **zbiorem liczbowym** i zapisuje się następująco: $(15; +\infty)$ (czyta się: "przedział od 15 do nieskończoności").

Odpowiedź w tym zadaniu można zapisać dwoma sposobami: $(15; +\infty)$ lub $x > 15$.

Na prostej współrzędnych punkty, które odpowiadają rozwiązaniu nierówności $x > 15$, będą punktami leżącymi na prawo od punktu, który przedstawia liczbę 15 i tworzą półprostą, w której "wyłączono" początek (rys. 5.1).



a



b

Rys. 5.1

Zwróć uwagę, że dla przedstawienia na rysunku liczbowego przedziału można zastosować dwa oznaczenia: za pomocą kreskowania (rys. 5.1, *a*), lub za pomocą nawiasu (rys. 5.1, *b*). Będziemy używać drugi sposób oznaczenia.

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż nierówność $3+\frac{x}{2}\leqslant 7+x$.

Rozwiązanie. Przeniesiemy składnik x z prawej strony liczbowej nierówności do lewej, zaś składnik 3 – z lewej strony do prawej oraz zredukujemy wyrazy podobne:

$$-x+\frac{x}{2}\leqslant 7-3;$$

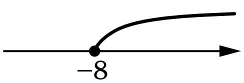
$$-\frac{x}{2}\leqslant 4.$$

Pomnożymy obie strony końcowej nierówności przez –2, otrzymamy:

$$x\geqslant -8.$$

Zbiorem rozwiązań tej nierówności jest liczbowy przedział który oznacza się następującą: $[-8;\,+\infty)$ (czyta się: “przedział od –8 do plus nieskończoności, włączając i –8”).

Na prostej liczbowej punkty, które odpowiadają rozwiązaniu nierówności $x\geqslant -8$, są przedstawione półprostą (rys. 5.2).



Rys. 5.2

Odpowiedź. Można zapisać dwoma sposobami: $[-8;\,+\infty)$ lub $x\geqslant -8$. ◀

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż nierówność $2(2-3x)>3(x+6)-5$.

Rozwiązanie. Zapiszemy łańcuszek nierówności, które są równoważne danej:

$$4-6x>3x+18-5;$$

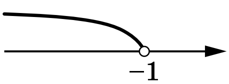
$$4-6x>3x+13;$$

$$-3x-6x>-4+13;$$

$$-9x>9;$$

$$x<-1.$$

Zbiorem rozwiązań końcowej nierówności jest liczbowy przedział, który oznacza się następująco: $(-\infty;\,-1)$ (czyta się: “przedział od minus nieskończoności do –1”). Na prostej współrzędnych punktu, które są rozwiązaniem nierówności $x<-1$, leżą na lewo od punktu –1 (rys. 5.3) oraz przedstawiają półprostą, w której “wyłączono” początek.



Rys. 5.3

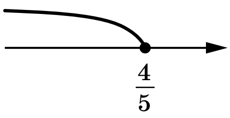
Odpowiedź. Można podać dwoma sposobami: $(-\infty;\,-1)$ lub $x<-1$. ◀

PRZYKŁAD 3 Rozwiąż nierówność $\frac{x-1}{2}+\frac{x}{3}\leqslant\frac{1}{6}$.

Rozwiązanie. Zapiszemy łańcuszek równoważnych nierówności:

$$6\cdot\frac{x-1}{2}+6\cdot\frac{x}{3}\leqslant 6\cdot\frac{1}{6};$$
$$3x-3+2x\leqslant 1;$$
$$5x\leqslant 4;$$
$$x\leqslant\frac{4}{5}.$$

Zbiorem rozwiązań końcowej nierówności jest liczbowy przedział który oznacza się następująco: $\left(-\infty;\ \frac{4}{5}\right]$ (czyta się: "przedział od minus nieskończoności do $\frac{4}{5}$, włączając $\frac{4}{5}$"). Na prostej współrzędnych punkty, które odpowiadają rozwiązaniu nierówności $x\leqslant\frac{4}{5}$, tworzą półprostą (rys. 5.4).



Rys. 5.4

Odpowiedź: Można podać dwoma sposobami: $\left(-\infty;\ \frac{4}{5}\right]$ lub $x\leqslant\frac{4}{5}$. ◀

PRZYKŁAD 4 Rozwiąż nierówność $3(2x-1)+7\geqslant 2(3x+1)$.

Rozwiązanie. Mamy: $6x-3+7\geqslant 6x+2;$

$$6x-6x\geqslant 2-4;$$
$$0x\geqslant -2.$$

Końcowa nierówność przy dowolnej wartości x przekształca się w nierówność liczbową $0\geqslant -2$. A więc, szukany zbiór rozwiązań będzie zbiorem liczb rzeczywistych.

Odpowiedź: x – dowolna liczba. ◀

Odpowiedź tą można zapisać króciej, a mianowicie: $(-\infty;\ +\infty)$ (czyta się: "przedział od minus nieskończoności do plus nieskończoności"). Ten liczbowy przedział nazywa się **prostą liczbową**.

PRZYKŁAD 5 Rozwiąż nierówność $4(x-2)-1<2(2x-9)$.

Rozwiązanie. Mamy:

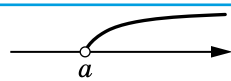
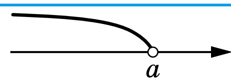
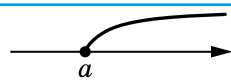
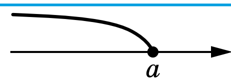
$$4x-8-1<4x-18;$$
$$4x-4x<9-18;$$
$$0x<-9.$$

Otrzymana nierówność przy dowolnej wartości x przekształca się w nierówność liczbową nie prawdziwą $0 < –9$.

Rozwiązanie tego zadania można zapisać dwojako: rozwiązań nie ma lub $\varnothing$. ◀

Wszystkie nierówności rozpatrzone w punktach 1–5, sprowadzają się do następujących czterech równoważnych: $ax > b$, $ax < b$, $ax \geqslant b$, $ax \leqslant b$, gdzie x – zmienna, a i b – dowolne liczby. Takie nierówności nazywają się **liniowymi nierównościami z jedną zmienną**.

Podamy tabelę oznaczeń i przedstawień wymienionych liczbowych przedziałów:

Nierówność	Przedział	Przedstawienie
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$	
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$	

?

1. 1. Podaj reguły, za pomocą których można otrzymać nierówność równoważną danej.
2. 2. Jakie nierówności nazywają się nierównościami liniowymi z jedną zmienną?
3. 3. W jaki sposób można zapisać, przeczytać i przedstawić przedziałem, który jest rozwiązaniem nierówności w postaci $x > a$? $x < a$? $x \geqslant a$? $x \leqslant a$?
4. 4. Rozwiązaniem nierówności jest jakokolwiek liczba. Jak w tym przypadku zapisać, przeczytać i oznaczyć przedział, który jest zbiorem rozwiązań nierówności?

ĆWICZENIA

5.1.° Przedstaw na prostej współrzędnych przedział:

1) $[-5; +\infty)$; 2) $(-5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -5)$; 4) $(-\infty; -5]$.

5.2.° Przedstaw na prostej współrzędnych i podaj przedział, który spełnia nierówność:

1) $x < 8$; 2) $x \leqslant -4$; 3) $x \geqslant -1$; 4) $x > 0$.

5.3.° Przedstaw na prostej współrzędnych i podaj przedział, który spełnia nierówność:

1) $x \leqslant 0$; 2) $x \geqslant \frac{1}{3}$; 3) $x > -1{,}4$; 4) $x < 16$.

5.4.° Podaj najmniejszą liczbę całkowitą, która należy do przedziału:

1) $(6; +\infty)$; 2) $[6; +\infty)$; 3) $(-3{,}4; +\infty)$; 4) $[-0{,}9; +\infty)$.

5.5.° Podaj największą liczbę całkowitą, która należy do przedziału:

1) $(-\infty; -4)$; 2) $(-\infty; -6{,}2]$; 3) $(-\infty; 1]$; 4) $(-\infty; -1{,}8)$.

5.6.° Do którego z wymienionych przedziałów należy liczba -7:

1) $(-\infty; -7)$; 2) $[-7; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $(-\infty; -6)$?

5.7.° Do którego z wymienionych przedziałów nie należy liczba 9:

1) $(8{,}99; +\infty)$; 2) $(-\infty; 10)$; 3) $(-\infty; 8{,}99]$; 4) $[9; +\infty)$?

5.8.° Rozwiąż nierówności:

1) $6x > 18$;
2) $-2x \geqslant 10$;
3) $\frac{1}{3}x < 9$;
4) $0{,}1x \geqslant 0$;
5) $\frac{3}{4}x > 24$;
6) $-10x < 0$;
7) $2\frac{1}{4}x \leqslant -1\frac{4}{5}$;
8) $-7x > \frac{14}{15}$;
9) $7x - 2 > 19$;
10) $5x + 16 \leqslant 6$;
11) $4 - x < 5$;
12) $5 - 8x \geqslant 6$;
13) $12 + 4x \geqslant 6x$;
14) $36 - 2x < 4x$;
15) $\frac{x+2}{5} < 2$.

5.9.° Rozwiąż nierówności:

1) $5x < 30$;
2) $-4x \leqslant -16$;
3) $\frac{2}{3}x \leqslant 6$;
4) $-12x \geqslant 0$;
5) $-3x < \frac{6}{7}$;
6) $-2\frac{1}{3}x > 1\frac{5}{9}$;
7) $4x + 5 > -7$;
8) $9 - x \geqslant 2x$;
9) $13 - 6x \geqslant -23$;
10) $5 - 9x > 16$;
11) $3x + 2 \leqslant -7x$;
12) $\frac{x-3}{4} > -1$.

5.10.° Rozwiąż nierówności:

1) $0x > 10$;
2) $0x < 15$;
3) $0x > -8$;
4) $0x < -3$;
5) $0x \geqslant 1$;
6) $0x \leqslant 2$;
7) $0x \leqslant 0$;
8) $0x > 0$.

5.11.° Podaj najmniejsze całkowite rozwiązanie nierówności:
1) $5x \geqslant 40$; 2) $5x > 40$; 3) $-2x < -3$; 4) $-7x < 15$.

5.12.° Podaj największe całkowite rozwiązanie nierówności:
1) $8x \leqslant -16$; 2) $8x < -16$; 3) $3x < 10$; 4) $-6x > -25$.

5.13.° Dla jakich wartości a wyrażenie $6a + 1$ nabywa wartości ujemne?

5.14.° Dla jakich wartości b wyrażenie $7 - 2b$ nabywa wartości dodatnie?

5.15.° Dla jakich wartości m wartość wyrażenia $2 - 4m$ nie mniejsza od -22?

5.16.° Dla jakich wartości n wartość wyrażenia $12n - 5$ nie większa od -53?

5.17.° Dla jakich wartości x wyrażenie ma sens:
1) $\sqrt{4x+20}$; 2) $\sqrt{5-14x}$; 3) $\frac{10}{\sqrt{4x+10}}$?

5.18.° Podaj dziedzinę określenia funkcji:
1) $f(x) = \sqrt{13-2x}$; 2) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x-1}}$.

5.19.° Rozwiąż nierówność:
1) $8x + 2 < 9x - 3$;
2) $6 - 6x > 10 - 4x$;
3) $6y + 8 \leqslant 10y - 8$;
4) $3 - 11y \geqslant -3y + 6$;
5) $-8p - 2 < 3 - 10p$;
6) $3m - 1 \leqslant 1{,}5m + 5$.

5.20.° Rozwiąż nierówność:
1) $4 + 11x > 7 + 12x$;
2) $35x - 28 \leqslant 32x + 2$;
3) $3x - 10 < 6x + 2$;
4) $6x - 3 \geqslant 2x - 25$.

5.21.° Dla jakich wartości c wartość dwumianu $9c - 2$ jest nie większa od odpowiedniej wartości dwumianu $4c + 4$?

5.22.° Dla jakich wartości k wartość dwumianu $11k - 3$ jest nie mniejsza od odpowiedniej wartości dwumianu $15k - 13$?

5.23.° Rozwiąż nierówność:
1) $\frac{4x}{3} + \frac{x}{2} < 11$;
2) $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{4} \geqslant \frac{1}{6}$;
3) $\frac{5x}{7} - x > -4$;
4) $\frac{x}{8} - \frac{1}{4} \leqslant x$.

5.24.° Rozwiąż nierówność:
1) $\frac{y}{6} - \frac{5y}{4} < 1$; 2) $\frac{x}{10} - \frac{x}{5} > -2$.

5.25.• Rozwiąż nierówność:

1) $3-5(2x+4)\geqslant 7-2x$;
2) $6x-3(x-1)\leqslant 2+5x$;
3) $x-2(x-1)\geqslant 10+3(x+4)$;
4) $2(2x-3{,}5)-3(2-3x)<6(1-x)$;
5) $(x+1)(x-2)\leqslant (x-3)(x+3)$;
6) $(4x-3)^2+(3x+2)^2\geqslant (5x+1)^2$;
7) $\frac{2x-1}{4}\geqslant \frac{3x-5}{5}$;
8) $\frac{3x+7}{4}-\frac{5x-2}{2}<x$;
9) $(x-5)(x+1)\leqslant 3+(x-2)^2$;
10) $\frac{x+1}{2}-\frac{x-3}{3}>2+\frac{x}{6}$;
11) $(6x-1)^2-4x(9x-3)\leqslant 1$;
12) $\frac{x-3}{9}-\frac{x+4}{4}>\frac{x-8}{6}$.

5.26.• Podaj zbiór rozwiązań nierówności:

1) $3(4x+9)+5>7(8-x)$;
2) $(2-y)(3+y)\leqslant (4+y)(6-y)$;
3) $(y+3)(y-5)-(y-1)^2>-16$;
4) $\frac{3x-7}{5}-1\geqslant \frac{2x-6}{3}$;
5) $\frac{2x}{3}-\frac{x-1}{6}-\frac{x+2}{2}<0$;
6) $\frac{y-1}{2}-\frac{2y+1}{8}-y<2$.

5.27.• Wskaż największe całkowite rozwiązanie nierówności:

1) $7(x+2)-3(x-8)<10$;
2) $(x-4)(x+4)-5x>(x-1)^2-17$.

5.28.• Wskaż najmniejsze całkowite rozwiązanie nierówności:

1) $\frac{4x+13}{10}-\frac{5+2x}{4}>\frac{6-7x}{20}-2$;
2) $(x-1)(x+1)-(x-4)(x+2)\geqslant 0$.

5.29.• Ile całkowitych ujemnych rozwiązań posiada nierówność

$$x-\frac{x+7}{4}-\frac{11x+30}{12}<\frac{x-5}{3}?$$

5.30.$^\bullet$ Ile naturalnych rozwiązań ma nierówność

$$\frac{2-3x}{4} \geqslant \frac{1}{5} - \frac{5x+6}{8}?$$

5.31.$^\bullet$ Dla jakich wartości x nierówność jest prawdziwa:

1) $|x-5| = x-5$; 2) $|2x+14| = -2x-14$?

5.32.$^\bullet$ Dla jakich wartości y nierówność jest prawdziwa:

1) $\frac{|y+7|}{y+7} = 1$; 2) $\frac{|6-y|}{y-6} = 1$?

5.33.$^\bullet$ Dla jakich wartości a równanie:

1) $x^2 + 3x - a = 0$ nie ma pierwiastków;

2) $2x^2 - 8x + 5a = 0$ ma chociażby jeden pierwiastek?

5.34.$^\bullet$ Dla jakich wartości b równanie:

1) $3x^2 - 6x + b = 0$ ma dwa różne pierwiastki;

2) $x^2 - x - 2b = 0$ nie ma pierwiastków?

5.35.$^\bullet$ Łódka przepłynęła pewną odległość z prądem rzeki, a zatem powróciła i zatraciła na całą podróż nie więcej od pięciu godzin. Prędkość łódki w wodzie stojącej jest równa 5 km/h, a prędkość prądu rzeki – 1 km/h. Jaką największą odległość może podołać łódka z prądem rzeki?

5.36.$^\bullet$ Wybrano cztery kolejne liczby całkowite i rozpatrzono różnicę iloczynów skrajnych i środkowych liczb. Czy istnieją takie cztery kolejne liczby całkowite, dla których ta różnica jest większa od zera?

5.37.$^\bullet$ W pudełku leżą niebieskie i żółte kulki. Stosunek ilości kulek niebieskich do ilości kulek żółtych wynosi 3 : 4. Jaka może być największa ilość kulek niebieskich w pudełku, jeżeli wszystkich kulek jest nie więcej od 44?

5.38.$^\bullet$ W sadzie rosną drzewa jabłoni, wiśni i śliwy, ilość których ma się odpowiednio, jak 5 : 4 : 2. Jaka może być największa ilość drzew wiśni, jeżeli wszystkich drzew w sadzie nie mniej od 120?

5.39.$^\bullet$ Boki trójkąta są równe 8 cm, 14 cm i a cm, gdzie a – liczba naturalna. Jaką największą wartość może mieć a?

5.40.$^\bullet$ Suma trzech kolejnych naturalnych liczb parzystych nie większa od 85. Podaj trzy najmniejsze liczby, które spełniają ten warunek.

5.41.$^\bullet$ Suma trzech kolejnych liczb naturalnych, które są wielokrotnością 5 jest nie większa od 100. Jakie największe trzy liczby spełniają ten warunek?

5.42.• Dla jakich wartości x funkcja jest określona:

1) $f(x) = \sqrt{x+4} + \frac{1}{x-2}$;

2) $f(x) = \sqrt{24-8x} + \frac{6}{x^2-16}$;

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+9}} - \frac{8}{|x|-2}$;

4) $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{4}{x^2-1}$?

5.43.• Dla jakich wartości x wyrażenie ma sens:

1) $\sqrt{9-x} + \frac{10}{x+3}$;

2) $\frac{6}{\sqrt{3x-21}} + \frac{9}{x^2-64}$?

5.44.•• Rozwiąż równania:

1) $|x-3| + x = 15$;

2) $|x+1| - 4x = 14$;

3) $|3x-12| - 2x = 1$;

4) $|x+2| - x = 1$.

5.45.•• Rozwiąż równania:

1) $|x+5| + 2x = 7$;

2) $|3-2x| - x = 9$.

5.46.•• Wykreśl wykres funkcji:

1) $y = |x-2|$;

2) $y = |x+3| - 1$;

3) $y = |x-1| + x$.

5.47.•• Wykreśl wykres funkcji:

1) $y = |x+4|$;

2) $y = |x-5| + 2$;

3) $y = |2x-6| - x$.

5.48.•• Dla jakich wartości a równanie:

1) $4x + a = 2$ ma pierwiastek dodatni;

2) $(a+6)x = 3$ ma pierwiastek ujemny;

3) $(a-1)x = a^2 - 1$ ma dokładnie jeden pierwiastek dodatni?

5.49.•• Dla jakich wartości m równanie:

1) $2 + 4x = m - 6$ ma nieujemny pierwiastek;

2) $mx = m^2 - 7m$ ma dokładnie jeden pierwiastek ujemny?

5.50.* Podaj wszystkie wartości a, dla których równanie ma dwa różne pierwiastki:

1) $ax^2 + 2x - 1 = 0$;

2) $(a+1)x^2 - (2a-3)x + a = 0$;

3) $(a-3)x^2 - 2(a-5)x + a - 2 = 0$.

5.51.* Podaj wszystkie wartości a, dla których równanie $(a-2)x^2 + (2a+1)x + a = 0$ nie ma pierwiastków.

5.52.* Czy istnieją takie wartości a, dla których nierówność nie ma rozwiązań (gdy odpowiedź jest stwierdzająca, to wskaż tę wartość):

1) $ax > 3x + 4$;

2) $(a^2 - a - 2)x \leqslant a - 2$?

5.53.* Czy istnieje taka wartość a przy której jakakolwiek liczba jest rozwiązaniem nierówności (przy odpowiedzi stwierdzającej wskaż tę wartość):

1) $ax > -1 - 7x$;
2) $(a^2 - 16)x \leqslant a + 4$?

5.54.* Rozwiąż nierówność dla każdej wartości a:

1) $ax > 0$;
2) $ax < 1$;
3) $ax \geqslant a$;
4) $2(x - a) < ax - 4$;
5) $(a - 2)x > a^2 - 4$;
6) $(a + 3)x \leqslant a^2 - 9$.

5.55.* Rozwiąż nierówność dla każdej wartości a:

1) $a^2x \leqslant 0$;
2) $a + x < 2 - ax$;
3) $(a + 4)x > 1$.

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

5.56. Rozwiąż równanie:

1) $6x - 5x^2 = 0$;
2) $25x^2 = 81$;
3) $4x^2 - 7x - 2 = 0$;
4) $3x^2 + 8x - 3 = 0$;
5) $x^2 + x - 12 = 0$;
6) $2x^2 + 6x + 7 = 0$.

5.57. Wiadomo, że m i n – kolejne liczby całkowite. Która z podanych wypowiedzi zawsze jest prawdziwa:

1) iloczyn mn jest większy o m;
2) iloczyn mn jest większy o n;
3) iloczyn mn jest liczbą parzystą;
4) iloczyn mn jest liczbą nieparzystą?

5.58. Porównaj wartości liczb:

1) $3\sqrt{98}$ i $4\sqrt{72}$;
2) $\frac{1}{2}\sqrt{68}$ i $\frac{4}{3}\sqrt{45}$;
3) $\frac{1}{6}\sqrt{108}$ i $6\sqrt{\frac{1}{12}}$.

5.59. Aby napełnić wodą basen jedną rurą potrzeba o 1,5 razy więcej czasu, który zatraci się na napełnienie tego basenu drugą rurą. Jeżeli włączyć jednocześnie dwie rury, to basen można napełnić wodą w ciągu 6 godz. Ile czasu potrzeba, aby basen zapełnić wodą napełniając go osobno każdą rurą?

UCZYMY SIĘ ROBIĆ NIE STANDARDOWE KROKI

5.60. Trzycyfrowa liczba n jest taką, że liczby $n - 6$, $n - 7$ i $n - 8$ są wielokrotnością odpowiednią liczb 7, 8, 9. Oblicz liczbę n.

6. Układ liniowych nierówności z jedną zmienną

Rozpatrzymy wyrażenie $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$. Określimy zbiór dopuszczalnych wartości zmiennej x, to oznacza znajdziemy wszystkie wartości x, przy których dane wyrażenie ma sens. Ten zbiór nazywa się **dziedziną określenia wyrazu**.

O ile podpierwiastkowe wyrażenie może przyjmować tylko wartości nie ujemne, to mają *jednocześnie* spełniać się dwie nierówności: $2x-1\geqslant 0$ i $5-x\geqslant 0$. Oznacza to, że szukane wartości x to są wszystkie wspólne rozwiązania tych nierówności.

Jeżeli należy znaleźć wszystkie wspólne rozwiązania dwóch lub kilku nierówności, to mówi się, że trzeba **rozwiązać układ nierówności**.

Układ równań jak również i układ nierówności zapisuje się za pomocą klamry. A więc, dla wyznaczenia dziedziny określenia wyrażenie $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$ należy rozwiązać następujący układ nierówności

$$\begin{cases} 2x-1\geqslant 0, \\ 5-x\geqslant 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Definicja. Rozwiązaniem układu nierówności z jedną zmienną nazywa się wartość zmiennej, która przekształca układ nierówności w prawdziwą nierówność liczbową.

Na przykład, liczby 2, 3, 4, 5 są rozwiązaniem układu (*), zaś liczba 7 nie jest rozwiązaniem układu.

Definicja. Rozwiązać układ nierówności, to znaczy znaleźć wszystkie jej rozwiązania lub udowodnić, że one nie istnieją.

Wszystkie rozwiązania układu nierówności tworzą **zbiór rozwiązań układu nierówności**. Jeżeli układ nierówności nie posiada rozwiązania, to uważa się, że zbiorem jego rozwiązań jest zbiór pusty.

Zatem, można uważać, że ***rozwiązać układ nierówności to znaczy znaleźć zbiór jego rozwiązań***.

Na przykład, w zadaniu “Rozwiązać układ nierówności $\begin{cases} 0x\geqslant -1, \\ |x|\geqslant 0 \end{cases}$ odpowiedź można zapisać następującą “zbiór liczb rzeczywistych”.

Oczywiście, że zbiorem rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} x\leqslant 5, \\ x\geqslant 5 \end{cases}$ będzie tylko dokładnie liczba 5.

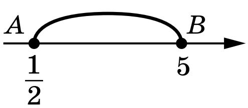
Układ nierówności $\begin{cases} x > 5, \\ x < 5 \end{cases}$ nie posiada rozwiązań, to oznacza, że zbirem jego rozwiązań jest zbiór pusty.

Rozwiążemy układ (*). Przekształcając każdą nierówność z układu w równoważną jej, otrzymamy: $\begin{cases} 2x \geqslant 1, \\ -x \geqslant -5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x \leqslant 5. \end{cases}$

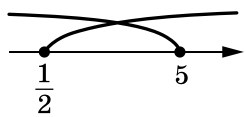
Zbiorem rozwiązań końcowego układu będą wszystkie liczby, które są nie mniejsze od $\frac{1}{2}$ i nie większe od 5, a to oznacza, że będą wszystkie liczby, które spełniają nierówność $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5.$ Ten zbiór jest liczbowym przedziałem, który zapisuje się następująco: $\left[\frac{1}{2};\ 5\right]$ (czyta się “przedział od $\frac{1}{2}$ do 5, włączając $\frac{1}{2}$ i 5”).

Odpowiedź zadania na znalezienie dziedziny określenia wyrażenie $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$ można podać dwoma sposobami: $\left[\frac{1}{2};\ 5\right]$ lub $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5.$

Punkty, które odpowiadają rozwiązaniom układu (*) położone są między punktami $A\left(\frac{1}{2}\right)$ i $B\,(5)$, włączając i punkty A i B (rys. 6.1). One zawierają odcinek.



Rys. 6.1



Rys. 6.2

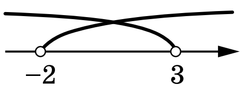
Zwróćmy uwagę, że wszystkie wspólne punkty przedziałów $\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$ i $(-\infty;\ 5]$ tworzą przedział $\left[\frac{1}{2};\ 5\right]$ (rys. 6.2). Uważa się, że przedział $\left[\frac{1}{2};\ 5\right]$ jest **przecięciem** przedziałów $\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right)$ i $(-\infty;\ 5]$. Zapisuje się następująco: $\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right) \cap (-\infty;\ 5] = \left[\frac{1}{2};\ 5\right].$

Przedziały $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ i $(-\infty; 5]$ są zbiorami rozwiązań odpowiednich nierówności $x \geqslant \frac{1}{2}$ i $x \leqslant 5$. Wtedy, można uważać, że *zbiorem rozwiązań układu* $\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x \leqslant 5 \end{cases}$ *jest przecięcie zbiorów rozwiązań każdej nierówności, wchodzącej do tego układu.*

A więc, ***aby rozwiązać układ nierówności, należy znaleźć przecięcie zbiorów rozwiązań nierówności, które wchodzą do układu***.

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż układ nierówności $\begin{cases} 3x - 1 > -7, \\ 3 - 4x > -9. \end{cases}$

Rozwiązanie. Mamy: $\begin{cases} 3x > -6, \\ -4x > -12; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -2, \\ x < 3. \end{cases}$



Rys. 6.3

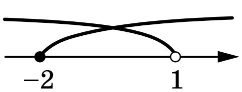
Za pomocą prostej współrzędnej znajdujemy przecięcie zbiorów rozwiązań nierówności danego układu, a to oznacza, że jest to przecięcie przedziałów $(-\infty; 3)$ i $(-2; +\infty)$ (rys. 6.3). Szukane przecięcie zawiera liczby, które spełniają nierówność $-2 < x < 3$. Ten zbiór jest liczbową nierówności i zapisuje się w postaci $(-2; 3)$ (czyta się "przedział od –2 do 3").

Odpowiedź można zapisać jednym ze sposobów: $(-2; 3)$ lub $-2 < x < 3$. ◀

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż układ nierówności $\begin{cases} 4x - 3 < 1, \\ 3 - x \leqslant 5. \end{cases}$

Rozwiązanie. Mamy: $\begin{cases} 4x < 4, \\ -x \leqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$

Za pomocą prostej współrzędnych znajdziemy przecięcie przedziałów $(-\infty; 1)$ i $[-2; +\infty)$, które są zbiorami rozwiązań nierówności wchodzącej do danego układu (rys. 6.4). Szukane przecięcie zawiera liczby, które spełniają nierówność $-2 \leqslant x < 1$. Ten zbiór jest liczbowym przedziałem, który zapisuje się w postaci $[-2; 1)$ (czyta się "przedział od –2 do 1, włączając –2").



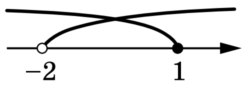
Rys. 6.4

Odpowiedź można zapisać jednym ze sposobów: $[-2; 1)$ lub $-2 \leqslant x < 1$. ◀

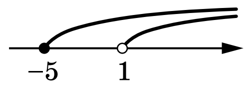
PRZYKŁAD 3 Rozwiąż układ nierówności $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x > -2. \end{cases}$

Zbiorem rozwiązań danego układu jest przecięcie przedziałów $(-\infty; 1]$ i $(-2; +\infty)$ (rys. 6.5). To przecięcie jest przedziałem liczbowym, który można zapisać w postaci $(-2; 1]$ (czyta się “przedział od –2 do 1, włączając 1”).

Odpowiedź: $(-2; 1]$. ◀



Rys. 6.5



Rys. 6.6

PRZYKŁAD 4 Podaj dziedzinę określenia funkcji

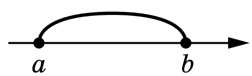
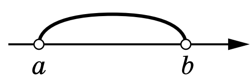
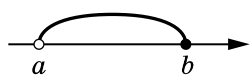
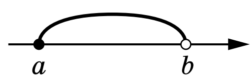
$$y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5}.$$

Rozwiązanie. Szukana dziedzina określenia – to zbiór rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} x-1 > 0, \\ x+5 \geqslant 0. \end{cases}$ Otrzymamy: $\begin{cases} x > 1, \\ x \geqslant -5. \end{cases}$

Na prostej współrzędnych przedstawimy przecięcie przedziałów $(1; +\infty)$ i $[-5; +\infty)$ (rys. 6.6). Tym przecięciem jest przedział $(1; +\infty)$.

Odpowiedź: $(1; +\infty)$. ◀

Podamy tabelę oznaczeń i przedstawień liczbowych przedziałów wymienionych w tym punkcie:

Nierówność	Przedział	Przedstawienie
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$	

1. Podaj definicję dziedziny określenia wyrazu?
2. W jakich przypadkach uważa się, że należy rozwiązać układ nierówności?
3. Za pomocą jakiego symbolu zapisuje się układ nierówności?
4. Co nazywa się rozwiązaniem układu nierówności z jedną zmienną?
5. Co oznacza rozwiązać układ nierówności?
6. W jaki sposób należy zapisać, przeczytać, przedstawić przedział, który jest zbiorem rozwiązań nierówności w postaci $a \leqslant x \leqslant b$? $a < x < b$? $a < x \leqslant b$? $a \leqslant x < b$?

ĆWICZENIA

6.1.° Która z liczb –6; –5; 0; 2; 4 jest rozwiązaniem układu nierówności:
$$\begin{cases} x - 2 < 0, \\ -2x \leqslant 10? \end{cases}$$

6.2.° Rozwiązaniem jakich z podanych nierówności jest liczba –3:

1) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \geqslant 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < -4, \\ x < 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > -4, \\ x < 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 1 > -1, \\ x - 2 < 0? \end{cases}$

6.3.° Przedstaw na prostej współrzędnych dany przedział:

1) (–3; 4); 2) [–3; 4]; 3) [–3; 4); 4) (–3; 4].

6.4.° Na prostej współrzędnych przedstaw nierówności i przedstaw przedział spełniający tę nierówność:

1) $0 < x < 5$; 3) $0,2 \leqslant x < 102$;

2) $\frac{1}{6} < x \leqslant 2\frac{1}{7}$; 4) $-2,4 \leqslant x \leqslant -1$.

6.5.° Wskaż wszystkie liczby, które należą do przedziału:

1) [3; 7]; 2) (2,9; 6]; 3) [–5,2; 1); 4) (–2; 2).

6.6.° Podaj najmniejszą i największą liczbę całkowitą, która należy do przedziału:

1) [–12; –6]; 3) (–10,8; 1,6];

2) (5; 11]; 4) [–7,8; –2,9].

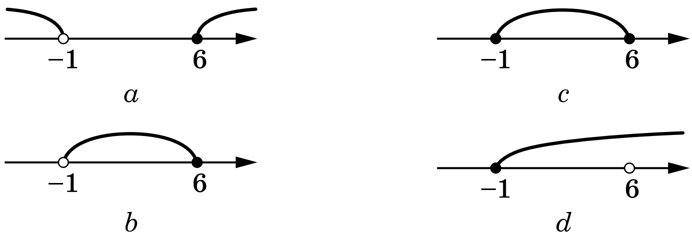
6.7.° Na prostej współrzędnych przedstaw przedziały i podaj ich przecięcie:

1) [–1; 7] i [4; 9]; 4) (–∞; 2,6) i (2,8; +∞);

2) [3; 6] i (3; 8); 5) [9; +∞) i [11,5; +∞);

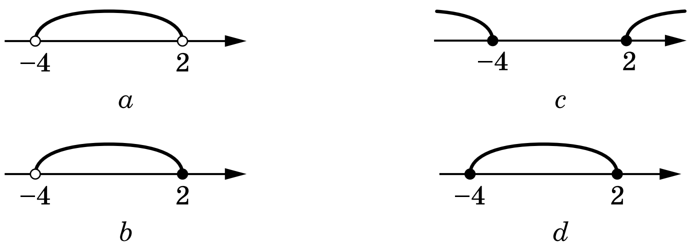
3) (–∞; 3,4) i (2,5; +∞); 6) (–∞; –4,2] i (–∞; –1,3).

6.8.° Z podanych rysunków 6.7 wskaż ten, który jest zbiorem rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} x > -1, \\ x \leqslant 6. \end{cases}$



Rys. 6.7

6.9.° Z podanych rysunków 6.8 wskaż ten, który jest rozwiązaniem podwójnej nierówności $-4 \leqslant x \leqslant 2$.



Rys. 6.8

6.10.° Który z podanych przedziałów jest zbiorem rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} x > -1, \\ x > 2: \end{cases}$

1) $(-\infty; -1)$; 2) $(-1; 2)$; 3) $(2; +\infty)$; 4) $(-1; +\infty)$?

6.11.° Wiadomo, że $a < b < c < d$. Który z podanych przedziałów jest przecięciem przedziałów $(a; c)$ i $(b; d)$:

1) $(a; d)$; 2) $(b; c)$; 3) $(c; d)$; 4) $(a; b)$?

6.12.° Wiadomo, że $m < n < k < p$. Który z podanych przedziałów jest przecięciem przedziałów $(m; p)$ i $(n; k)$:

1) $(m; n)$; 2) $(k; p)$; 3) $(n; k)$; 4) $(m; p)$?

6.13.° Przedstaw na prostej współrzędnych zbiór rozwiązań oraz podaj przedział, który spełnią ten układ nierówności:

1) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x \leqslant -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 2, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x > 2, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x < -1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x > 2, \\ x \leqslant -1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 2. \end{cases}$

6.14.° Rozwiąż układ nierówności:

1) $\begin{cases} x - 4 < 0, \\ 2x \geqslant -6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2 > 3, \\ -3x < -12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 6 > 2, \\ \dfrac{x}{4} < 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x + 3 \geqslant 0, \\ 7 - 4x < 7; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 10x - 1 \geqslant 3, \\ 7 - 3x \geqslant 2x - 3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x - 2 < 1 + 3x, \\ 5x - 7 \leqslant x + 9; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x - 6 \leqslant x - 1, \\ 11x + 13 < x + 3; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x + 14 \geqslant 18 - x, \\ 1{,}5x + 1 < 3x - 2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4x + 19 \leqslant 5x - 1, \\ 10x < 3x + 21. \end{cases}$

6.15.° Rozwiąż układ nierówności:

1) $\begin{cases} -4x \leqslant -12, \\ x + 2 > 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8 - x \geqslant 5, \\ x - 7 \leqslant 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 3 < 5x, \\ 7x - 10 < 5x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2 - 3x < 4x - 12, \\ 7 + 3x \geqslant 2x + 10; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 3 \geqslant 8, \\ \dfrac{x + 1}{3} < 6; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x - 2 \geqslant 2x + 1, \\ 2x + 3 \leqslant 33 - 3x. \end{cases}$

6.16.° Podaj zbiór rozwiązań nierówności:

1) $-3 < x - 4 < 7$;

2) $-2{,}4 \leqslant 3x + 0{,}6 \leqslant 3$;

3) $0{,}8 \leqslant 6 - 2x < 1{,}4$;

4) $4 < \dfrac{x}{5} - 2 \leqslant 5$.

6.17.° Rozwiąż nierówność:

1) $2 < x + 10 \leqslant 14$;

2) $10 < 4x - 2 < 18$;

3) $-1{,}8 \leqslant 1 - 7x \leqslant 36$;

4) $1 \leqslant \dfrac{x + 1}{4} < 1{,}5$.

6.18.° Ile rozwiązań całkowitych posiada układ nierówności $\begin{cases} -2x \geqslant -15, \\ 3x > -10? \end{cases}$

6.19.° Oblicz sumę całkowitych rozwiązań układu nierówności

$$\begin{cases} x + 8 \geqslant 4, \\ 5x + 1 \leqslant 9. \end{cases}$$

6.20.° Ile rozwiązań całkowitych posiada nierówność $-3 \leqslant 7x - 5 < 16$?

6.21.° Podaj najmniejsze całkowite rozwiązanie układu nierówności

$$\begin{cases} x + 8 \geqslant 17, \\ \dfrac{x}{2} > 4{,}5. \end{cases}$$

6.22.° Podaj największe całkowite rozwiązanie układu nierówności

$$\begin{cases} 2x + 1 < -4, \\ 3x - 6 \leqslant -12. \end{cases}$$

6.23.• Rozwiąż układ nierówności:

1) $\begin{cases} 8(2 - x) - 2x > 3, \\ -3(6x - 1) - x < 2x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{4} - \dfrac{2x+3}{3} > 1, \\ 6(2x - 1) < 5(x - 4) - 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(x - 3) \leqslant 3x + 4(x + 1), \\ (x - 3)(x + 3) \leqslant (x - 4)^2 - 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x + 11) \geqslant 3(6 - x), \\ (x - 3)(x + 6) \geqslant (x + 5)(x - 4); \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x - \dfrac{x+1}{2} \leqslant \dfrac{x+1}{3}, \\ (x + 5)(x - 3) + 41 \geqslant (x - 6)^2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x + 4 \leqslant 2x - 8, \\ (x + 2)(x - 1) \geqslant (x + 3)(x - 2); \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{7} < \dfrac{x+1}{4}, \\ (x - 6)(x + 2) + 4x < (x - 7)(x + 7); \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{6x+1}{6} - \dfrac{5x-1}{5} > -1, \\ 2(x + 8) - 3(x + 2) < 5 - x. \end{cases}$

6.24.$^{\bullet}$ Podaj zbiór rozwiązań układu nierówności:

1) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{5}-\dfrac{4x-9}{6}>1, \\ 5(x-1)+7(x+2)>3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x+2}{3}<\dfrac{x+12}{6}, \\ 0{,}3x-19\leqslant 1{,}7x-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-6)^2<(x-2)^2-8, \\ 3(2x-1)-8<34-3(5x-9); \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{3}-\dfrac{4x+1}{4}\leqslant 1, \\ (x-1)(x-2)>(x+4)(x-7). \end{cases}$

6.25.$^{\bullet}$ Podaj całkowite rozwiązania układu nierówności:

1) $\begin{cases} 2x-1<1{,}7-x, \\ 3x-2\geqslant x-8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{4}<1, \\ 2x-\dfrac{x}{2}\geqslant 10. \end{cases}$

6.26.$^{\bullet}$ Ile rozwiązań całkowitych posiada układ nierówności:

1) $\begin{cases} 4x+3\geqslant 6x-7, \\ 3(x+8)\geqslant 4(8-x); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{x-2}{6}<2, \\ \dfrac{2x-5}{3}\geqslant -3? \end{cases}$

6.27.$^{\bullet}$ Znajdź dziedzinę określenia wyrażenia:

1) $\sqrt{6x-9}+\sqrt{2x-5}$;

2) $\sqrt{3x+5}-\dfrac{1}{\sqrt{15-5x}}$;

3) $\sqrt{2x-4}+\sqrt{1-x}$;

4) $\sqrt{12-3x}-\dfrac{5}{x-4}$.

6.28.$^{\bullet}$ Przy jakiej wartości zmiennej wyrażenie ma sens:

1) $\sqrt{8-x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

2) $\sqrt{7x-35}+\dfrac{1}{x^2-5x}$?

6.29.$^{\bullet}$ Rozwiąż nierówność:

1) $-3<\dfrac{2x-5}{2}<4$;

2) $-4\leqslant 1-\dfrac{x-2}{3}\leqslant -3$.

6.30.$^{\bullet}$ Rozwiąż nierówność:

1) $-2\leqslant\dfrac{6x+1}{4}<4$;

2) $1{,}2<\dfrac{7-3x}{5}\leqslant 1{,}4$.

6.31.• Rozwiąż układ nierówności:

1) $\begin{cases} x < 4, \\ x > 2, \\ x < 3{,}6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 6 < 8, \\ 4 - 4x < 10, \\ 8x - 9 > 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0{,}4 - 8x \geqslant 3{,}6, \\ 1{,}5x - 2 < 4, \\ 4{,}1x + 10 < 1{,}6x + 5. \end{cases}$

6.32.• Rozwiąż układ nierówności:

1) $\begin{cases} -x < 2, \\ 2x > 7, \\ x < -4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 1 < 2x + 2, \\ 2x + 1 > 8 - 5x, \\ 5x - 25 \leqslant 0. \end{cases}$

6.33.• Długość jednego boku trójkąta wynosi 4 cm, zaś suma długości dwóch pozostałych – 8 cm. Oblicz niewiadome boki trójkąta, jeżeli długość każdego z nich jest wyrażona liczbą całkowitą w centymetrach.

6.34.•• Rozwiąż nierówność:

1) $(x-3)(x+4) \leqslant 0$;

2) $(x+1)(2x-7) > 0$;

3) $\frac{x-8}{x-1} > 0$;

4) $\frac{3x+6}{x-9} < 0$;

5) $\frac{2x-1}{x+2} \leqslant 0$;

6) $\frac{5x+4}{x-6} \geqslant 0$.

6.35.•• Rozwiąż nierówność:

1) $(14-7x)(x+3) > 0$;

2) $\frac{x-8}{3x-12} > 0$;

3) $\frac{5x-6}{x+9} \geqslant 0$;

4) $\frac{4x+1}{x-10} \leqslant 0$.

6.36.•• Rozwiąż nierówność:

1) $|x-2| \leqslant 3{,}6$;

2) $|2x+3| < 5$;

3) $|x+3| > 9$;

4) $|7-3x| \geqslant 1$;

5) $|x+3| + 2x \geqslant 6$;

6) $|x-4| - 6x < 15$.

637.•• Rozwiąż nierówność:

1) $|x-6| \geqslant 2{,}4$;

2) $|5x+8| \leqslant 2$;

3) $|x+5| - 3x > 4$;

4) $|x-1| + x \leqslant 3$.

6.38.* Przy jakiej wartości a układ nierówności posiada chociażby jedno rozwiązanie:

1) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

6.39.* Przy jakiej wartości a układ nierówności nie posiada rozwiązania:

1) $\begin{cases} x > 4, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

6.40.* Przy jakiej wartości a zbiorem rozwiązań nierówności $\begin{cases} x > -1, \\ x \geqslant a \end{cases}$ jest przedział:

1) $(-1; +\infty)$; 2) $[1; +\infty)$?

6.41.* Dla każdej wartości a rozwiąż układ nierówności

$$\begin{cases} x < 2, \\ x \leqslant a. \end{cases}$$

6.42.* Dla każdej wartości a rozwiąż układ nierówności

$$\begin{cases} x < -3, \\ x > a. \end{cases}$$

6.43.* Dla jakiej wartości a zbiorem rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} x \geqslant 7, \\ x < a \end{cases}$ będą dokładnie tylko cztery liczby całkowite?

6.44.* Przy jakiej wartości b zbiorem rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} x < 5, \\ x \geqslant b \end{cases}$ będą dokładnie tylko trzy liczby całkowite?

6.45.* Przy jakiej wartości a najmniejszym całkowitym rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} x \geqslant 6, \\ x > a \end{cases}$ będzie liczba 9?

6.46.* Przy jakiej wartości b największym całym rozwiązaniem układu nierówności $\begin{cases} x \leqslant b, \\ x < -2 \end{cases}$ będzie liczba –6?

6.47.* Przy jakiej wartości a pierwiastki równania $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$ są mniejsze od liczby 5?

6.48.* Przy jakiej wartości a pierwiastki równania

$$x^2 - (4a - 2)\,x + 3a^2 - 4a + 1 = 0$$

należą do przedziału $[-2; 8]$?

6.49.* Przy jakiej wartości a jeden z pierwiastków równania

$$3x^2-(2a+5)x+2+a-a^2=0$$

jest mniejszy od –2, zaś drugi – większy od 3?

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

6.50. Rozwiąż równanie:

1) $\frac{x^2}{x^2-16}=\frac{3x+4}{x^2-16}$; 2) $\frac{5}{x-3}-\frac{8}{x}=3$.

6.51. Uprość wyrażenie:

1) $0{,}5\sqrt{24}-4\sqrt{40}-\sqrt{150}+\sqrt{54}+\sqrt{1000}$;

2) $\sqrt{8b}+0{,}3\sqrt{50b}-3\sqrt{2b}$;

3) $1{,}5\sqrt{72}-\sqrt{216}-0{,}6\sqrt{450}+0{,}5\sqrt{96}$.

6.52. Z danego równania wyraź x przez pozostałe zmienne:

1) $2x-\frac{m}{n}=2$; 2) $\frac{1}{m}-\frac{1}{x}=\frac{1}{n}$.

6.53. Wiadomo, że a – liczba parzysta, b – nieparzysta, $a>b$. Wartość którego z podanych wyrażeń będzie liczbą całkowitą:

1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$; 2) $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$; 3) $\frac{a}{b}$; 4) $\frac{b}{a}$?

6.54. Ile kilogramów soli mieści się w 40 kg 9-odsetkowego roztworu?

6.55. Ruda zawiera 8 % żelaza. Ile kilogramów rudy należy wziąć, aby otrzymać 72 kg żelaza?

6.56. Jaka odsetkowa zawartość soli jest w roztworze, jeżeli w 350 g roztworu mieści się 21 g soli?

ZADANIE TESTOWE N 1 "SPRAWDŹ SIEBIE"

1. Porównaj liczby a i b, jeżeli $a - b = -3{,}6$.
A) $a > b$;
B) $a < b$;
C) $a = b$;
D) niemożliwie porównać.

2. Wiadomo, że $m > n$. Która z podanych nierówności jest błędna?
A) $m - 2 > n - 2$;
B) $2m > 2n$;
C) $m + 2 > n + 2$;
D) $-2m > -2n$.

3. Oceń obwód P trójkąta równobocznego o boku a cm, jeżeli $0{,}8 < a < 1{,}2$.
A) $1{,}6$ cm $< P < 2{,}4$ cm;
B) $2{,}4$ cm $< P < 3{,}6$ cm;
C) $3{,}2$ cm $< P < 4{,}8$ cm;
D) $1{,}2$ cm $< P < 1{,}8$ cm.

4. Wiadomo, że $2 < x < 3$ i $1 < y < 4$. Oceń wartość wyrażenia xy.
A) $4 < xy < 8$;
B) $3 < xy < 7$;
C) $2 < xy < 12$;
D) $6 < xy < 14$.

5. Wiadomo, że $-18 < y < 12$. Oceń wartość wyrażenia $\frac{1}{6}y + 2$.

A) $-3 < \frac{1}{6}y + 2 < 4$;

B) $-1 < \frac{1}{6}y + 2 < 4$;

C) $-1 < \frac{1}{6}y + 2 < 2$;

D) $-3 < \frac{1}{6}y + 2 < 2$.

6. Dane są: $a > 0$, $b < 0$. Która z podanych nierówności jest prawdziwa?
A) $a^2 < b^2$;
B) $\frac{a}{b} > 1$;
C) $a - b < 0$;
D) $a^2b^3 > 0$.

7. Dla której z podanych nierówności zbiorem rozwiązań jest zbiór liczb rzeczywistych?

A) $2x>-2$; C) $0x>-2$;
B) $2x>0$; D) $0x>0$.

8. Dla której z podanych nierówności zbiorem rozwiązań jest przedział $(3; +\infty)$?

A) $x \geqslant 3$; C) $x>3$;
B) $x \leqslant 3$; D) $x<3$.

9. Znajdź rozwiązania nierówności $\frac{x}{4} \leqslant \frac{1}{5}$.

A) $x \geqslant \frac{4}{5}$; C) $x \leqslant \frac{4}{5}$;
B) $x \geqslant \frac{1}{20}$; D) $x \leqslant \frac{1}{20}$.

10. Rozwiąż nierówność $-3x+8 \geqslant 5$.

A) $x \leqslant 1$; C) $x \leqslant -1$;
B) $x \geqslant 1$; D) $x \geqslant -1$.

11. Podaj najmniejsze rozwiązanie całkowite dla nierówności $\frac{3x-5}{2} > \frac{8-x}{3}$.

A) 2; C) 4;
B) 3; D) niemożliwie wyznaczyć.

12. Ile jest równy iloczyn liczb naturalnych, które należą do dziedziny określenia wyrażenia $\sqrt{14-3x}$?

A) 4; C) 18;
B) 10; D) 24.

13. Który z podanych układów nierówności nie posiada rozwiązań?

A) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \leqslant -2; \end{cases}$ C) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \leqslant -3; \end{cases}$

B) $\begin{cases} x > -3, \\ x > -2; \end{cases}$ D) $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x \leqslant -3. \end{cases}$

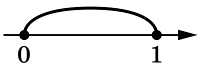
14. Podaj zbiór rozwiązań układu nierówności

$$\begin{cases} x-1 > 2x-3, \\ 4x+5 > x+17. \end{cases}$$

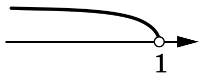
A) $\varnothing$; C) $(-\infty; 4)$;
B) $(2; +\infty)$; D) $(2; 4)$.

15. Który z przedstawionych przedziałów liczbowych odpowiada zbiorowi rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} 8-7x>3x-2, \\ -2(3x-2{,}6)\leqslant -2(-2{,}6)? \end{cases}$

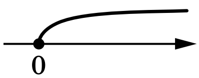
A)



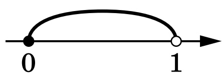
C)



B)



D)



16. Ile rozwiązań całkowitych posiada układ nierówności

$$\begin{cases} x-\dfrac{x-2}{3}\geqslant\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{x-1}{2}, \\ 1-0{,}5x>x-4? \end{cases}$$

A) 3; C) 5;
B) 4; D) 6.

17. Rozwiąż nierówność $-3<\dfrac{1-2x}{5}-2<1.$

A) (–3; 7); C) (–7; –3);
B) (–7; 3); D) (3; 7).

18. Przy jakich wartościach a równanie $2x^2+6x+a=0$ nie posiada pierwiastków?

A) $a<4{,}5$; C) $a>-4{,}5$;
B) $a>4{,}5$; D) $a<-4{,}5$.

GŁÓWNE W PARAGRAFIE 1

Porównanie liczb

Liczba a uważa się większą od liczby b, jeżeli różnica $a - b$ jest liczbą dodatnią.
Liczba a uważa się mniejszą od liczby b, jeżeli różnica $a - b$ jest liczbą ujemną.

Podstawowe własności nierówności liczbowych

Jeżeli $a > b$ i $b > c$, to $a > c$.
Jeżeli $a > b$ i c – dowolna liczba, to $a + c > b + c$.
Jeżeli $a > b$ i c – liczba dodatnia, to $ac > bc$.
Jeżeli $a > b$ i c – liczba ujemna, to $ac < bc$.
Jeżeli $a > b$ i $ab > 0$, to $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Dodawanie i mnożenie nierówności liczbowych

Jeżeli $a > b$ i $c > d$, to $a + c > b + d$.
Jeżeli $a > b$, $c > d$ i a, b, c, d – liczby dodatnie, to $ac > bd$.

Rozwiązanie nierówności z jedną zmienną

Rozwiązaniem nierówności z jedną zmienną nazywa się wartość zmiennej, która przekształca ją w prawdziwą nierówność liczbową.

Nierówności równoważne

Nierówności nazywają się równoważnymi, jeżeli one mają taki sam zbiór rozwiązań.

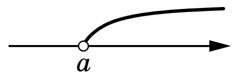
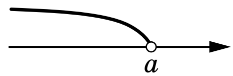
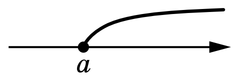
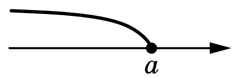
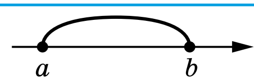
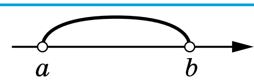
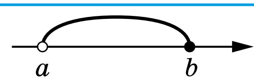
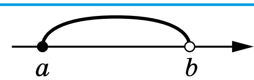
Własności rozwiązań nierówności z jedną zmienną

- Jeżeli dowolny składnik nierówności z jedną zmienną przenieść z jednej strony w drugą mieniając znak jego na przeciwny, to otrzymamy nierówność równoważną danej.
- Jeżeli obie strony nierówności pomnożyć (podzielić) przez tę samą liczbę dodatnią, to otrzymamy nierówność równoważną danej.
- Jeżeli obie strony nierówności pomnożyć (podzielić) przez tą samą liczbę ujemną, zmieniając znak nierówności na przeciwny, to otrzymamy nierówność równoważną danej.

Rozwiązywanie układu nierówności z jedną zmienną

Rozwiązaniem układu nierówności z jedną zmienną nazywa się wartość zmiennej, która przekształca każdą nierówność układu w nierówność prawdziwą.
Rozwiązać układ nierówności to znaczy znaleźć wszystkie jej rozwiązania lub udowodnić, że one nie istnieją, czyli znaleźć zbiór jej rozwiązań.

Liczbowe przedziały

Nierówność	Przedział	Przedstawienie
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$	
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$	
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$	

§ 2 FUNKCJA KWADRATOWA

- W tym paragrafie powtórzycie i rozszerzycie swoje wiadomości o funkcji i jej własnościach.
- Nauczycie się zastosowując wykres funkcji $y = f(x)$, konstruować wykresy funkcji $y = kf(x)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$.
- Dowiecie się, jaka funkcja nazywa się kwadratową, jaki jej wykres, zapoznacie się w własnościami funkcji kwadratowej.
- Nauczycie się zastosowywać własności funkcji kwadratowej.
- Rozszerzycie swoje wiadomości o pojęciu układu równań z dwiema zmiennymi, metody ich rozwiązania, zdobędziecie nowe pojęcia do rozwiązywania układów równań.

7. Powtórzenie i rozszerzenie wiadomości o funkcji

W życiu codziennym często spotykamy się z procesami, w których jedna z wielkości (niezależna zmienna) sprowadzą do drugiej wielkości (zależnej zmiennej). Nauczenie tych procesów potrzebuje utworzenia ich matematycznych modeli. Jedną z takich najważniejszych modeli jest **funkcja**.

Z tym pojęciem zapoznaliśmy się w klasie 7. Przypomnimy i uogólnimy podstawowe wiadomości.

Niech x – zbiór wartości niezależnej zmiennej, y – zbiór wartości zależnej zmiennej. **Funkcja – to reguła za pomocą której znając każdą wartość niezależnej zmiennej ze zbioru x można znaleźć dokładnie jedną wartość zależnej zmiennej ze zbioru Y.**

Przeważnie niezależną zmienną oznacza się literą x, zaś zależną – literą y, funkcję (regułę) – literą f. Uważa się, że zmienna y **funkcjonalnie zależy** od zmiennej x. Ten fakt oznacza się: $y = f(x)$.

Niezależną zmienną jeszcze nazywamy **argumentem funkcji**.

Zbiór wszystkich wartości, jakie można nadać argumentowi nazywa się **dziedziną określenia funkcji** i oznacza się $D(f)$ lub $D(y)$.

A więc, dziedziną określenia funkcji $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ jest przedział $(0; +\infty)$, to znaczy $D(y) = (0; +\infty)$.

W funkcjonalnej zależności każdej wartości argumentu x przyporządkowuje się pewne wartość zależnej zmiennej y. Wartość zależnej zmiennej nazywa się **znaczeniem funkcji** i oznacza się $f(x)$. Zbiór wszystkich wartości, których nabywa zależna zmienna nazywa się **dziedziną wartości funkcji** (przeciwdziedzina) i oznacza się $E(f)$ lub $E(y)$. A więc, dziedziną wartości funkcji $y = \sqrt{x}$ jest przedział $[0; +\infty)$, czyli $E(y) = [0; +\infty)$.

Funkcja uważa się określoną, jeżeli jest podana jej dziedzina określenia oraz sposób, za pomocą którego znając każdą wartość niezależnej zmiennej można znaleźć wartość zależnej zmiennej.

Sposoby określenia funkcji:
- słownie;
- za pomocą wzoru;
- za pomocą tabelki;
- za pomocą wykresów.

Najczęściej funkcję podaje się za pomocą wzorów. Taki sposób określenia funkcji nazywa się **analitycznym**. Jeżeli nie jest podana dziedzina określenia, to uważa się, że dziedziną określenia funkcji jest dziedzina określenia wyrażenia wchodzącego do wzoru. Na przykład, jeżeli funkcja określona wzorem $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, to jej dziedziną określenia będzie dziedzina wyrażenia $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, to znaczy przedział $(1; +\infty)$.

W tabeli są podane funkcje z którymi zapoznaliście się w klasach 7–8.

Funkcja	Dziedzina określenia	Zbiór wartości	Wykres
$y = kx + b$	$(-\infty; +\infty)$	Jeżeli $k \neq 0$, to $(-\infty; +\infty)$; jeżeli $k = 0$, to zbiorem wartości będzie tylko jedna liczba b	Prosta
$y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$	Zbiór, który składa się z przedziałów $(-\infty; 0)$ i $(0; +\infty)$	Zbiór, który składa się z przedziałów $(-\infty; 0)$ i $(0; +\infty)$	Hiperbola
$y = x^2$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Parabola
$y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Część paraboli

1. Co to jest funkcja?
2. W jaki sposób oznacza się fakt, że zmienna *y* jest funkcjonalną zależnością od zmiennej ***x***?
3. Co nazywa się argumentem funkcji?
4. Co nazywa się dziedziną określenia funkcji?
5. Co nazywa się wartością funkcji?
6. Co nazywa się zbiorem wartości funkcji?
7. Dla jakiego warunku funkcja będzie określona?
8. Jakie są sposoby określenia funkcji?
9. Co uważa się za dziedziną określenia funkcji, jeżeli ona jest podana wzorem, ale nie podana dziedzina określenia?

ĆWICZENIA

7.1.° Funkcja jest podana wzorem $f(x) = -2x^2 + 5x$.

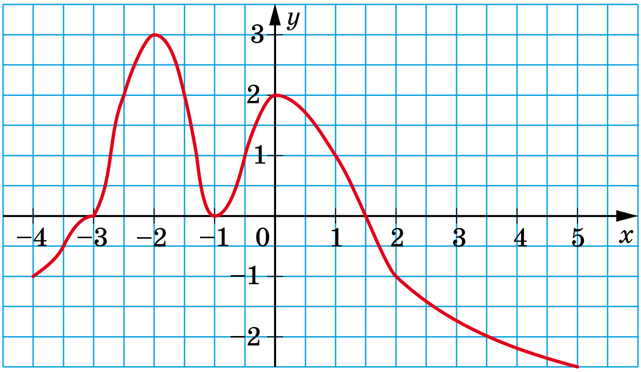
1) Oblicz: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(-5)$.
2) Oblicz wartości argumentu, przy których wartość funkcji jest równa: 0; 2; –3.
3) Czy równość $f(-1) = 7$; $f(4) = -12$ jest prawdziwa?

7.2.° Funkcję określono wzorem $f(x) = 3x - 2$.
1) Oblicz: $f(3)$; $f(0)$; $f(-0{,}2)$; $f(1{,}6)$.
2) Oblicz wartości x, przy których: $f(x) = 10$; $f(x) = -6$; $f(x) = 0$.

7.3.° Każdej liczbie naturalnej większej od 10, lecz mniejszej od 20 przyporządkowuje się reszta od dzielenia danej liczby przez 5.
1) Jakim sposobem podana ta funkcja?
2) Jaki jest zbiór wartości tej funkcji?
3) Podaj tę funkcję za pomocą tabeli.

7.4.° Funkcję określono wzorem $y = 0{,}4x - 2$. 7.4. Zapełnij tabelę odpowiednich znaczeń x i y:

x	2		–2,5	
y		–2		0,8



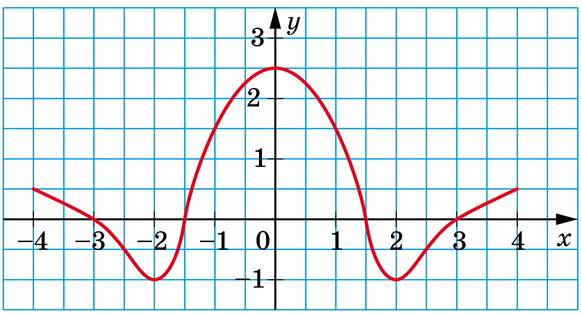
Rys. 7.1

7.5.° Dana jest funkcja $y = -\dfrac{16}{x}$. Uzupełnij tabelę odpowiednich wartości x i y:

x	2		–0,4	
y		0,8		–32

7.6.° Na rysunku 7.1 przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$, określonej w przedziale $[-4; 5]$. Korzystając z wykresu oblicz:
1) $f(-3{,}5)$; $f(-2{,}5)$; $f(-1)$; $f(2)$;
2) wartości x, przy których $f(x) = -2{,}5$; $f(x) = -2$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;
3) zbiór wartości funkcji.

7.7.° Na rysunku 7.2 przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$, określonej w przedziale $[-4; 4]$. Korzystając z wykresu, oblicz:
1) $f(-4)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f(2{,}5)$;
2) wartości x, przy których $f(x) = -1$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;
3) zbiór wartości funkcji.



Rys. 7.2

7.8.° Określ dziedzinę określenia funkcji:

1) $f(x) = 7x - 15$;
2) $f(x) = \frac{8}{x+5}$;
3) $f(x) = \frac{x-10}{6}$;
4) $f(x) = \sqrt{x-9}$;
5) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$;
6) $f(x) = \frac{10}{x^2-4}$;
7) $f(x) = \frac{6x+11}{x^2-2x}$;
8) $f(x) = \sqrt{x+6} + \sqrt{4-x}$.

7.9.° Określ dziedzinę określenia funkcji:

1) $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$;
2) $f(x) = \frac{9}{x^2+16}$;
3) $f(x) = \frac{5x+1}{x^2-6x+8}$;
4) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-3}$;
5) $f(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{5-x}$;
6) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

7.10.° Sporządź wykres funkcji:

1) $f(x) = -2x + 3$;
2) $f(x) = -\frac{1}{4}x$;
3) $f(x) = 3$;
4) $f(x) = -\frac{6}{x}$.

7.11.° Sporządź wykres funkcji:

1) $f(x) = 4 - \frac{1}{3}x$;
2) $f(x) = \frac{8}{x}$.

7.12.° Nie sporządzając konstrukcję, znajdź punkty przecięcia z osiami współrzędnych wykresu funkcji:

1) $f(x) = \frac{1}{6}x - 7$;
2) $f(x) = \frac{20+4x}{3x-5}$;
3) $g(x) = 9 - x^2$;
4) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 3$.

7.13.° Nie sporządzając konstrukcję, znajdź punkty przecięcia z osiami współrzędnych wykresu funkcji:

1) $h(x) = 9 - 10x$; 2) $p(x) = 4x^2 + x - 3$; 3) $s(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$.

7.14.• Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} 3x-1, \text{ jeżeli } x \leqslant -1, \\ x^2-5, \text{ jeżeli } -1 < x < 4, \\ 11, \text{ jeżeli } x \geqslant 4. \end{cases}$

Oblicz: 1) $f(-3)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(6{,}4)$.

7.15.• Sporządź wykres funkcji $f(x)=\begin{cases}6, \text{ jeżeli } x\leqslant -3,\\ x^2, \text{ jeżeli } -3<x<1,\\ x, \text{ jeżeli } x\geqslant 1.\end{cases}$

7.16.• Sporządź wykres funkcji $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{4}{x}, \text{ jeżeli } x<-2,\\ -x, \text{ jeżeli } -2\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, \text{ jeżeli } x>0.\end{cases}$

7.17.• Znajdź dziedzinę określenia funkcji:

1) $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{x+2}{x-5}$;
3) $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}$;
2) $f(x)=\dfrac{x}{|x|-7}$;
4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{4x-3}{x^2-7x+6}$.

7.18.• Znajdź dziedzinę określenia funkcji:

1) $f(x)=\sqrt{x+4}+\dfrac{2}{x+1}$;
2) $f(x)=\sqrt{8-x}+\dfrac{4}{x^2-8x}$.

7.19.• Podaj zbiór wartości funkcji:

1) $f(x)=\sqrt{x}-1$;
3) $f(x)=-7$;
5) $f(x)=\sqrt{-x^2}$;
2) $f(x)=5-x^2$;
4) $f(x)=|x|+2$;
6) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$.

7.20.• Oblicz zbiór wartości funkcji:

1) $f(x)=x^2+3$;
2) $f(x)=6-\sqrt{x}$;
3) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$.

7.21.• Zapisz wzór dowolnej funkcji, dziedziną określenia której jest:

1) zbiór liczb rzeczywistych, oprócz 1 i 2;
2) zbiór wszystkich liczb nie mniejszych od 5;
3) zbiór wszystkich liczb nie większych od 10, oprócz liczby –1;
4) zbiór składający się z dokładnie jednej liczby –4.

7.22.•• Podaj dziedzinę określenia funkcji i sporządź jej wykres:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$;
2) $f(x)=\dfrac{12x-72}{x^2-6x}$;
3) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-9}$.

7.23.•• Podaj dziedzinę określenia funkcji i sporządź jej wykres:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}$;
2) $f(x)=\dfrac{x^3}{x}$.

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

7.24. Rozłóż na czynniki trójmian kwadratowy:

1) $x^2 - x - 12$;
2) $-x^2 + 2x + 35$;
3) $6x^2 + 11x - 2$;
4) $\frac{2}{3}x^2 + 3x - 6$.

7.25. Oblicz wartość wyrażenia:

1) $(10^3)^2 \cdot 10^{-8}$;
2) $\frac{25^{-3} \cdot 5^3}{5^{-5}}$;
3) $\frac{81^{-2} \cdot 3^5}{9^{-2}}$;
4) $\frac{0{,}125^3 \cdot 32^2}{0{,}5^{-2}}$.

7.26. Cena dwóch szaf była jednakowa. Na początku cenę pierwszej szafy podwyższono o 20%, a zatem ją obniżono o 10%. Cenę drugiej szafy zmieniono odwrotnie, na początku ją obniżono o 10%, a następnie podwyższono o 20%. Cena jakiej szafy była wyższa?

7.27. Odległość między miastami A i B wynosiła 120 km. Samochód wyjechał z punktu A i po dwóch godzinach jazdy zatrzymał się na przejeździe kolejowym na 6 min. Aby przybyć do miasta B w oznaczonym czasie, samochód musiał zwiększyć swoją prędkość o 12 km/h. Z jaką prędkością jechał samochód po zatrzymaniu?

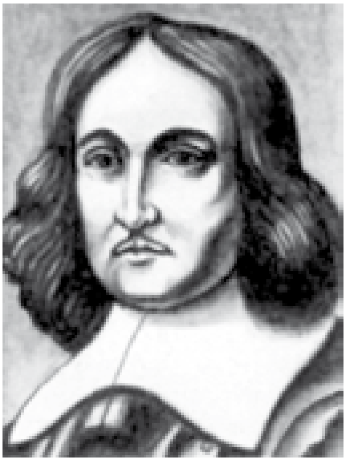
UCZYMY SIĘ NIESTANDARDOWEGO MYŚLENIA

7.28. Liczba naturalna n posiada dokładnie 100 różnych naturalnych dzielników (włączając 1 i n). Oblicz ich iloczyn.

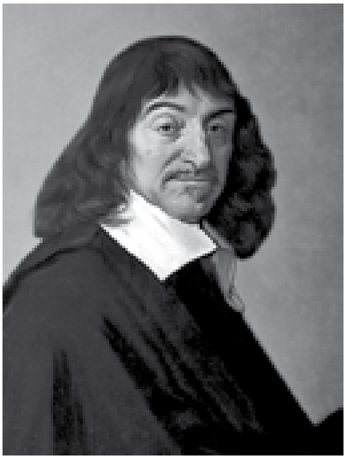
Z historii rozwoju pojęcia funkcji

Definicja funkcji, którą obecnie zastosowuje się ucząc się matematyki, pojawiła się nie bardzo dawno – w pierwszej połowie XIX wieku. Ona kształtowała się ponad 200 lat przy częstych kłótniach między wybitnymi matematykami wielu pokoleń.

Badaniami funkcjonalnej zależności między wielkościami zajmowali się jeszcze starogreccy uczeni. Te badania przyczyniły się do wyprowadzenia wzorów na obliczenie pól i objętości niektórych figur. Astronomiczne tablicy babilończyków oraz starożytnych greków i arabów mogą być przykładem do podania funkcji w postaci wykresu.



Pierre de Fermat
(1601–1665)



René Descartes (Kartezjusz)
(1596–1650)

Lecz tylko w pierwszej połowie XVII wieku zawdzięczając odkryciu układu współrzędnych przez francuskich uczonych Pierre de Fermata i René Descartesa (Kartezjusza) udało się utorować drogę do wyniknięcia pojęcia funkcji.

W swoich pracach oni badali zmianę rzędnej punktu w zależności od zmiany jego odciętej.

Wielką rolę w formowaniu pojęcia funkcji odegrały prace angielskiego uczonego Isaaca Newtona. On uważał, że funkcja to wielkość. Funkcję on urzeczywistniał z wielkością, która mienia swoje wartości pod wpływem czasu.

Termin “funkcja” (od łaciny *funcio* – zrealizowanie, wykonanie) wprowadził niemiecki matematyk Gottfried Wilhelm Leibniz. On wraz ze swoim uczniem, szwajcarskim matematykiem Jakubem Bernoulli pod pojęciem funkcji uważał wzór, który wskazuje na zmianę jednej wielkości względem drugiej, co oznacza, że funkcja jest tożsamościowo równa jednemu ze sposobów jej podania.

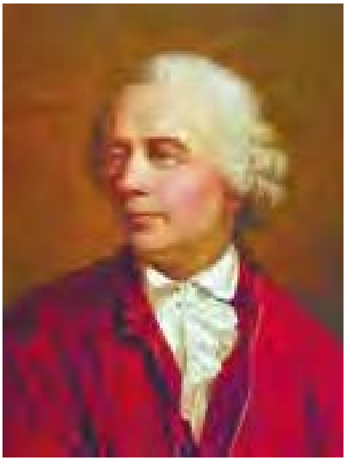
Isaac Newton
(1643–1727)

Dalszemu rozwoju pojęcia funkcji wiele przyczyniło się wyjaśnienie prawid-

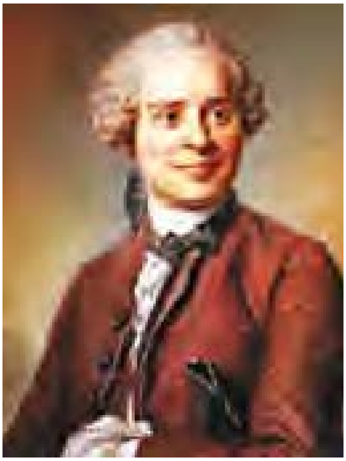
Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646–1716)

Jakub Bernoulli
(1667–1748)

łowości wieloletniemu wyjaśnieniu między wybitnymi matematykami Leonhardem Eulerem, Jeanem Le Rond d'Alembertem, jednym z celem którego było wyjaśnienie istotowości tego pojęcia. Podczas tego było sformułowano o wiele konkretne wiadomości o funkcji licząc ją jako zależność jednej zmiennej wielkości od drugiej, w której to pojęcie nie ma nic wspólnego ze sposobem podania funkcji.



Leonhard Euler
(1707–1783)



Jean Le Rond d'Alembert
(1717–1783)

W 30. latach XIX w. idea Eulera otrzymała wielkie zastosowanie w pracach wybitnych uczonych rosyjskiego matematyka Nikołaja Łobaczewskiego oraz niemieckiego uczonego Petera Gustava Lejeuna Dirichleat. W tym czasie wypłynęła następująca definicja: zmienną wielkością *y* nazywa się funkcja zmiennej wielkości *x*, jeżeli każdej wartości wielkości *x* przyporządkowuje się dokładnie jedna wartość wielkości *y*.

Nikolaj Łobaczewski
(1792–1856)

Peter Dirichlet
(1805–1859)

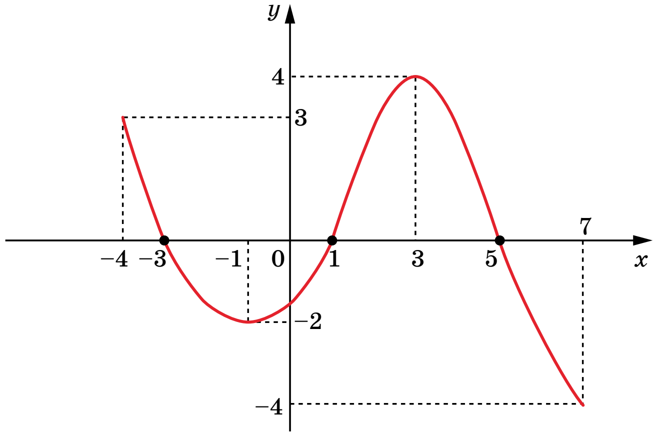
Taką definicję funkcji można spotkać w teraźniejszych podręcznikach. Więcej udoskonalona definicja to *traktowanie funkcji jako regułę, za pomocą której według wartości niezależnej zmiennej można znaleźć dokładnie jedną wartość zależnej zmiennej.*

Gdy między XIX i XX wiekiem pojawiła się teoria zbiorów i odkryto, że dziedziną określenia i zbiorem wartości nie obowiązkowo muszą być liczby, wtedy zaczęto funkcję traktować jako regułę według której *każdemu elementowi ze zbioru x przyporządkowuje się dokładnie jeden element ze zbioru Y.*

8. Własność funkcji

Bardzo często własności obiektu można określić za pomocą środków przekazu: zdjęć, rentgenowskich zdjęć, rysunków i in.

“Podaniem” funkcji może być również jej wykres. Pokażemy jak za pomocą wykresu funkcji można określić jej pewne własności.



Rys. 8.1

Na rysunku 8.1 przedstawiony jest wykres funkcji $y = f(x)$.

Dziedziną określenia tej funkcji jest przedział [–4; 7], a zbiorem wartości –przedział [–4; 4].

Dla $x = -3$, $x = 1$, $x = 5$ wartość funkcji jest równa zeru.

Definicja. **Wartość argumentu, przy której wartość funkcji jest równa zeru nazywa się** **zerem funkcji.**

A więc, liczby –3, 1, 5 są zerami funkcji.

Zwróć uwagę, że w przedziałach [–4; –3) i (1; 5) wykres funkcji f położony powyżej osi odciętych, zaś w przedziałach (–3; 1) i (5; 7] –poniżej osi odciętych. Oznacza to, że w przedziałach [–4; –3) i (1; 5) funkcja posiada wartości dodatnie, a w przedziałach (–3; 1) i (5; 7] –ujemne.

Każdy z wymienionych przedziałów nazywa się **przedziałem stałego znaku** funkcji f.

Definicja. **Przedział, w którym funkcja zachowuje wartości jednakowego znaku, nazywa się** **przedziałem stałego znaku funkcji.**

Zaznaczymy, że, na przykład, przedział (0; 5) nie jest przedziałem stałego znaku funkcji.

Uwaga. Podczas podania przedziałów stałego znaku funkcji przyjęto wybierać przedziały maksymalnej długości. Na przykład, przedział (–2; –1) jest przedziałem stałego znaku funkcji f (rys. 8.1), lecz w podaniu odpowiedzi należy zapisać przedział (–3; 1), w który wchodzi przedział (–2; –1).

Jeżeli przesuwać się po osi odciętych od –4 do –1, to można zauważyć, że wykres funkcji “opuszcza się do dołu”, to znaczy, że wartości funkcji zmniejszają się. Uważa się, że w przedziale [–4; –1] **funkcja maleje**. Ze zwiększeniem x od –1 do 3 wykres funkcji “idzie do góry”, to oznacza, że wartości funkcji zwiększają się. Uważa się, że **funkcja rośnie** w przedziale [–1; 3].

Definicja. **Funkcja f nazywa się rosnącą w pewnym przedziale, jeżeli dla jakichkolwiek dwóch wartości argumentu x_1 i x_2 należących do tego przedziału przy $x_2 > x_1$, spełnia się nierówność $f(x_2) > f(x_1)$.**

Definicja. **Funkcja f nazywa się malejącą w pewnym przedziale, jeżeli dla jakichkolwiek dwóch wartości argumentu x_1 i x_2 należących do tego przedziału przy $x_2 > x_1$, spełnia się nierówność $f(x_2) < f(x_1)$.**

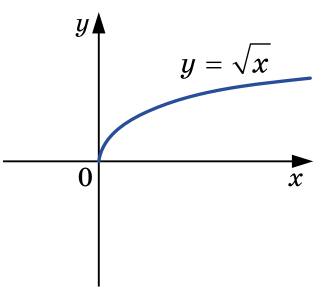
Często używa się również następujące traktowanie.

Definicja. **Funkcja nazywa się rosnącą w pewnym przedziale, jeżeli dla jakiejkolwiek większej wartości argumentu należącemu do tego przedziału, przyporządkowuje się większa wartość funkcji.**

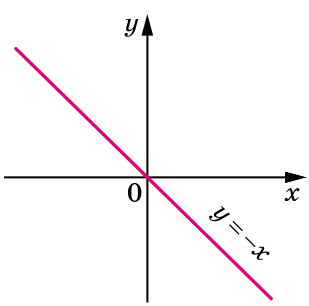
Definicja. **Funkcja nazywa się malejącą w pewnym przedziale, jeżeli z każdym wzrostem argumentu należącemu do tego przedziału, zmniejsza się wartość funkcji.**

Jeżeli funkcja rośnie na całej dziedzinie jej określenia, to ona nazywa się **rosnącą**. Jeżeli funkcja maleje na całej dziedzinie jej określenia, to ona nazywa się **malejącą**.

Na przykład, na rysunku 8.2 jest przedstawiony wykres funkcji $y = \sqrt{x}$. Ta funkcja jest rosnącą. Na rysunku 8.3 jest przedstawiony wykres funkcji malejącej $y = -x$. Na rysunku 8.1 jest przedstawiony wykres funkcji, która nie jest ani rosnąca ani malejąca.



Rys. 8.2



Rys. 8.3

PRZYKŁAD 1 Udowodnij, że funkcja $y = x^2$ maleje w przedziale $(-\infty; 0]$.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że x_1 i x_2 –dowolne wartości argumentu z przedziału $(-\infty; 0]$, gdzie $x_2 > x_1$. Pokażemy, że $x_2^2 < x_1^2$, co będzie oznaczać, że większej wartości argumentu odpowiada większa wartość funkcji.

Mamy: $x_2 > x_1$; stąd $-x_2 < -x_1$. Obie części ostatniej nierówności są liczbami nie ujemnymi. Wtedy, według własności nierówności liczbowych możemy zapisać, że $(-x_2)^2 < (-x_1)^2$, to znaczy $x_2^2 < x_1^2$. ◀

Zauważymy, że w podobnych przypadkach uważa się: przedział $(-\infty; 0]$ jest **przedziałem** w którym funkcja $y = x^2$ **maleje**. Analogicznie możemy udowodnić, że przedział $[0; +\infty)$ jest **przedziałem** w którym funkcja $y = x^2$ **rośnie**.

W zadaniach na określenie przedziałów w których funkcja rośnie i maleje przyjęto zapisywać przedziały maksymalnej długości.

PRZYKŁAD 2 Udowodnij, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest malejąca na każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$ i $(0; +\infty)$.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że x_1 i x_2 –dowolne wartości argumentu z przedziału $(0; +\infty)$, przy czym $x_2 > x_1$. Wtedy według własności nierówności liczbowej $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$. A więc, dana funkcja maleje w przedziale $(0; +\infty)$.

Analogicznie możemy udowodnić, że funkcja $f(x)$ maleje w przedziale $(-\infty; 0)$. ◀

Ale nie można stwierdzać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ maleje na całej dziedzinie określenia czyli jest malejącą. Prawdziwie jest, że gdy na przykład, $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, to z nierówności $x_2 > x_1$ nie wynika, że $\frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}$.

PRZYKŁAD 3 Udowodnij, że funkcja liniowa $f(x) = kx + b$ jest rosnącą gdy $k > 0$ i malejącą gdy $k < 0$.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że x_1 i x_2 –to dowolne wartości argumentu, gdzie $x_2 > x_1$.

Mamy:

$$f(x_2) - f(x_1) = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1).$$

Ponieważ $x_2 > x_1$, to $x_2 - x_1 > 0$.

Wtedy, jeżeli $k > 0$, to $k\,(x_2 - x_1) > 0$, to znaczy $f\,(x_2) > f\,(x_1)$. A więc, dla $k > 0$ dana funkcja jest rosnącą.

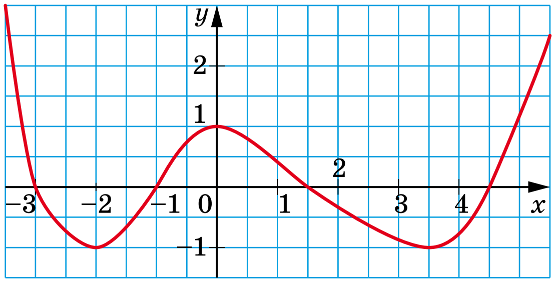
Jeżeli $k < 0$, to $k\,(x_2 - x_1) < 0$, to znaczy $f\,(x_2) < f\,(x_1)$. A więc, dla $k < 0$ dana funkcja jest malejąca. ◀

?

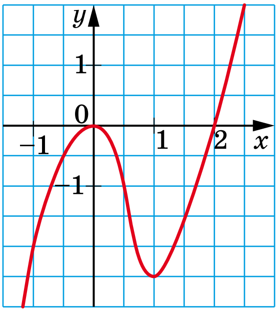
1. Jaka wartość argumentu nazywa się zerem funkcji?
2. Objaśnij, co nazywa się przedziałem stałego znaku funkcji.
3. Jaka funkcja nazywa się rosnącą na pewnym przedziale?
4. Jaka funkcja nazywa się malejącą na pewnym przedziale?
5. Jaka funkcja nazywa się rosnącą?
6. Jaka funkcja nazywa się malejącą?

ĆWICZENIA

8.1.° Na rysunku 8.4 jest przedstawiony wykres funkcji $y = f\,(x)$, określonej na zbiorze liczb rzeczywistych. Korzystając z wykresu, oblicz:
1) zera funkcji;
2) przy jakich wartościach argumentu wartości funkcji są dodatnie;
3) przedziały, gdzie funkcja rośnie i gdzie maleje.



Rys. 8.4



Rys. 8.5

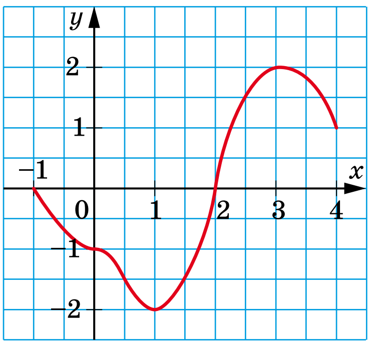
8.2.° Na rysunku 8.5 jest podany wykres funkcji $y = f\,(x)$, określonej na zbiorze liczb rzeczywistych. Korzystając z wykresu, znajdź:
1) zera funkcji;
2) przy jakich wartościach argumentu wartości funkcji są ujemne;
3) przedziały, gdzie funkcja rośnie i gdzie maleje.

8.3.° Na rysunku 8.6 jest podany wykres funkcji, określony w podziale [–1; 4]. Korzystając z wykresu, określ:

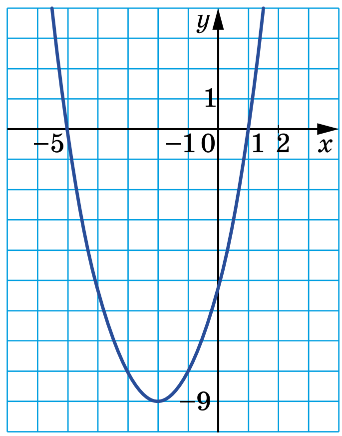
1) zera funkcji;

2) przy jakich wartościach x wartości funkcji są ujemne;

3) przedziały, gdzie funkcja rośnie i gdzie funkcja maleje.



Rys. 8.6



Rys. 8.7

8.4.° Na rysunku 8.7 jest podany wykres funkcji $y = f(x)$, określony na zbiorze liczb rzeczywistych. Które z podanych niżej wypowiedzi są prawdziwe:

1) funkcja maleje w przedziale $(-\infty; -9]$;

2) $f(x) < 0$ przy $-5 \leqslant x \leqslant 1$;

3) funkcja rośnie w przedziale $[-2; +\infty)$;

4) $f(x) = 0$ przy $x = -5$ i przy $x = 1$;

5) funkcja na dziedzinie określenia osiąga najmniejszą wartość przy $x = -2$?

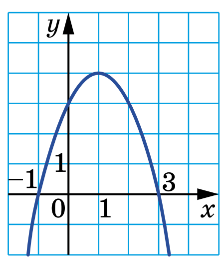
8.5.° Na rysunku 8.8 jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$, określony na zbiorze liczb rzeczywistych. Korzystając z wykresu, określ:

1) zera funkcji;

2) wartości x, przy których $y < 0$;

3) przedział, gdzie funkcja maleje;

4) dziedzina wartości funkcji.



Rys. 8.8

8.6.° Rosnąca czy malejąca jest funkcja:

1) $y = 9x - 4$; 3) $y = 12 - 3x$; 5) $y = \frac{1}{6}x$;

2) $y = -4x + 10$; 4) $y = -x$; 6) $y = 1 - 0{,}3x$?

8.7.° Podaj zera funkcji:

1) $f(x) = 0{,}2x + 3$; 4) $h(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 3}$;

2) $g(x) = 35 - 2x - x^2$; 5) $f(x) = x^3 - 4x$;

3) $\varphi(x) = \sqrt{x + 3}$; 6) $f(x) = x^2 + 1$.

8.8.° Podaj zera funkcji:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x + 12$; 4) $f(x) = -5$;

2) $f(x) = 6x^2 + 5x + 1$; 5) $f(x) = \frac{3 - 0{,}2x}{x + 1}$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; 6) $f(x) = x^2 - x$.

8.9.° Określ przedziały stałego znaku funkcji:

1) $y = 5x - 15$; 3) $y = x^2 - 2x + 1$;

2) $y = -7x - 28$; 4) $y = \frac{9}{3 - x}$.

8.10.° Określ przedziały stałego znaku funkcji:

1) $y = -4x + 8$; 2) $y = -x^2 - 1$; 3) $y = \sqrt{x} + 2$.

8.11.• Sporządź wykres jakiejkolwiek funkcji, na zbiorze liczb rzeczywistych, zerami której są liczby:

1) –2 i 5; 2) –4, –1, 0 i 4.

8.12.• Sporządź wykres jakiejkolwiek funkcji, określonej w przedziale [–5; 5], zerami której są liczby –3, 0 i 3.

8.13.• Sporządź wykres jakiejkolwiek funkcji, określonej w przedziale [–4; 3], która:

1) rośnie w przedziale [–4; –1] i maleje w przedziale [–1; 3];

2) maleje w przedziałach [–4; –2] i [0; 3] oraz rośnie w przedziale [–2; 0].

8.14.• Sporządź wykres jakiejkolwiek funkcji, na zbiorze liczb rzeczywistych, która rośnie w przedziałach $(-\infty; 1]$ i $[4; +\infty)$ oraz maleje w przedziale [1; 4].

8.15.• Sporządź wykres funkcji $f(x)=\begin{cases}2x+8, \text{jeżeli } x\leqslant -2,\\ x^2, \text{ jeżeli } -2<x<2,\\ -2x+8, \text{jeżeli } x\geqslant 2.\end{cases}$

Korzystając ze sporządzonego wykresu, podaj zera funkcji, jej przedziały stałego znaku, przedział, w którym ona rośnie oraz podział, w którym ona maleje.

8.16.• Sporządź wykres funkcji $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, \text{jeżeli } x<-1,\\ \dfrac{x}{4}, \text{jeżeli } -1\leqslant x\leqslant 1\\ \dfrac{4}{x}, \text{jeżeli } x>1.\end{cases}$

Korzystając ze sporządzonego wykresu, podaj zera funkcji, jej przedziały stałego znaku, przedział, w którym ona rośnie oraz podział, w którym ona maleje.

8.17.• Przy jakich wartościach a funkcja $y=x^2+(2a-1)x+a^2+a$ posiada dwa miejsca zerowe?

8.18.• Przy jakich wartościach a funkcja $y=x^2+6x+a$ nie posiada miejsc zerowych?

8.19.• Przy jakiej największej całkowitej wartości n funkcja $y=$ $=(8-3n)x-7$ jest rosnącą?

8.20.• Przy jakich wartościach m funkcja $y=mx-m-3+2x$ jest malejącą?

8.21.• Funkcja $y=f(x)$ jest malejącą. Rosnące czy malejące będą następujące funkcje (odpowiedź uzasadnij):

1) $y=3f(x)$; 2) $y=\dfrac{1}{3}f(x)$; 3) $y=-f(x)$?

8.22.• Funkcja $y=f(x)$ jest rosnącą w pewnym przedziale. Rosnącą czy malejącą w tym przedziale będzie następująca funkcja (odpowiedź uzasadnij):

1) $y=\dfrac{1}{2}f(x)$; 2) $y=-2f(x)$?

8.23.•• Udowodnij, że funkcja:

1) $y=\dfrac{6}{3-x}$ rośnie w przedziale $(3;+\infty)$;

2) $y=x^2-4x+3$ maleje w przedziale $(-\infty;2]$.

8.24.•• Udowodnij, że funkcja:

1) $y = \frac{7}{x+5}$ maleje w przedziale $(-5; +\infty)$;

2) $y = 6x - x^2$ rośnie w przedziale $(-\infty; 3]$.

8.25.•• Udowodnij, że funkcja $y = \frac{k}{x}$ maleje w każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$ i $(0; +\infty)$ przy $k > 0$ oraz rośnie w każdym z przedziałów przy $k < 0$.

8.26.* Przy jakich wartościach a funkcja $f(x) = (a-1)x^2 + 2ax + 6 - a$ posiada miejsce zerowe?

8.27.* Sporządź wykres funkcji $f(x) = x^2$, określonej w przedziale $[a; 2]$, gdzie $a < 2$. Dla każdej wartości a oblicz najmniejszą oraz największą wartość funkcji.

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

8.28. Skróć ułamek:

1) $\frac{x^2+x-6}{7x+21}$;

2) $\frac{2y-16}{8+7y-y^2}$;

3) $\frac{m^2-16m+63}{m^2-81}$;

4) $\frac{3a^2+a-2}{4-9a^2}$.

8.29. Wykonaj mnożenie:

1) $\left(\sqrt{11}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{11}-\sqrt{6}\right)$;

2) $\left(\sqrt{32}-5\right)\left(\sqrt{32}+5\right)$;

3) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$;

4) $\left(\sqrt{10}+8\right)^2$.

8.30. Dwie koparki o różnej wydajności pracy mogą wykopać wykop w ciągu 8 godz. Pierwsza koparka, pracując osobno może wykopać ten wykop o 4 razy prędzej niż druga. W ciągu ilu godzin może wykopać wykop każda koparka, pracując osobno?

8.31. Do roztworu o masie 200 g, który zawiera 12 % soli, dodano 20 g soli. Jaki odsetek soli mieści nowy roztwór?

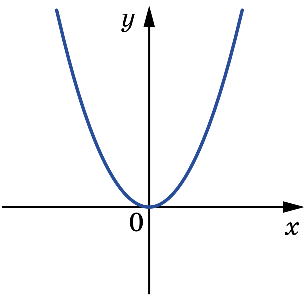
9. Jak sporządzić wykres funkcji $y = kf(x)$, według znanego wykresu funkcji $y = f(x)$

W klasie 8. zapoznaliście się z funkcją $y = x^2$ i dowiedzieliście się, że jej wykresem jest figura, która nazywa się parabolą (rys. 9.1).

Dowiemy się, jak za pomocą wykresu funkcji $y = x^2$ można sporządzić wykres funkcji $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$.

Sporządzimy, na przykład wykres funkcji $y = 2x^2$.

Ułożymy tabelę wartości funkcji $y = x^2$ i $y = 2x^2$ dla tych samych wartości argumentu:



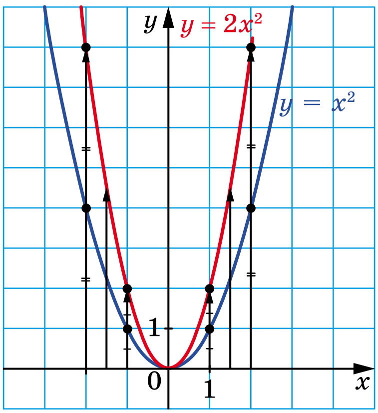
Rys. 9.1

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = 2x^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18

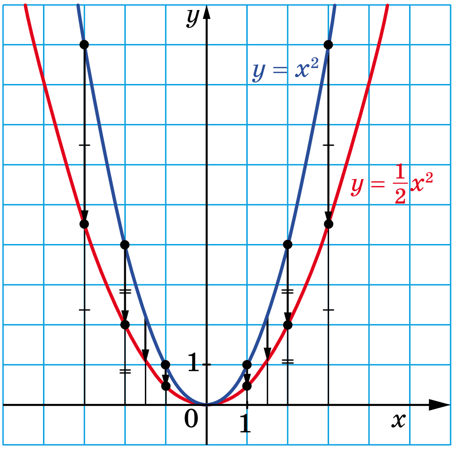
Przypatrując się do otrzymanej tabeli, widzimy, że dla każdego punktu $(x_0; y_0)$ wykresu funkcji $y = x^2$ przyporządkowuje się dokładnie jeden punkt $(x_0; 2y_0)$ wykresu funkcji $y = 2x^2$. Zaś każdy punkt $(x_1; y_1)$ wykresu funkcji $y = 2x^2$ przyporządkowuje się dokładnie jednemu punktu $\left(x_1; \frac{y_1}{2}\right)$ wykresu funkcji $y = x^2$. Dlatego wszystkie punkty wykresu funkcji $y = 2x^2$ można otrzymać, zamieniając każdy punkt wykresu funkcji $y = x^2$ na punkt o tej samej odciętej, lecz o rzędnej o 2 razy zwiększonej(rys. 9.2).

Korzystając z wykresu funkcji $y = x^2$, możemy sporządzić wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x^2$.

Oczywiście, że wszystkie punkty dla wykresu funkcji $y = \frac{1}{2}x^2$ można otrzymać, zmieniając każdy punkt wykresu funkcji $y = x^2$ zamieniając punktami o tej samej odciętej, zaś o rzędnej pomnożonej przez $\frac{1}{2}$ (rys. 9.3).



Rys. 9.2

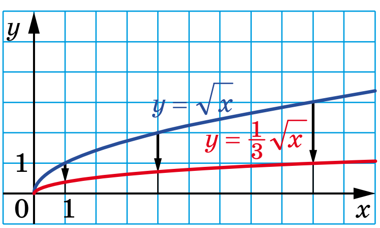


Rys. 9.3

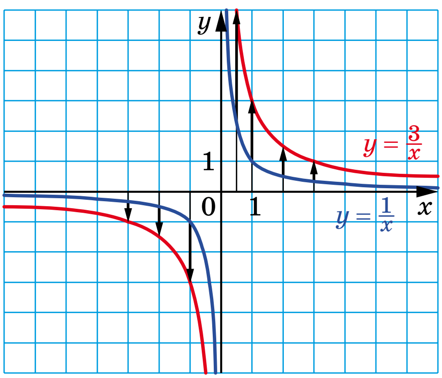
Rozpatrzone przykłady dają możliwość zrozumieć, w jaki sposób wykorzystać wykres funkcji $y = f(x)$ do sporządzenia wykresu funkcji $y = kf(x)$, gdzie $k > 0$.

Wykres funkcji $y = kf(x)$, gdzie $k > 0$, można otrzymać, z wykresu funkcji $y = f(x)$ pozostawiając w każdym punkcie tę samą odciętą, lecz rzędną mnożąc przez k.

Na rysunkach 9.4, 9.5 jest pokazane w jaki sposób "pracuje" ta reguła dla sporządzenia wykresów funkcji $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ i $y = \frac{3}{x}$.



Rys. 9.4



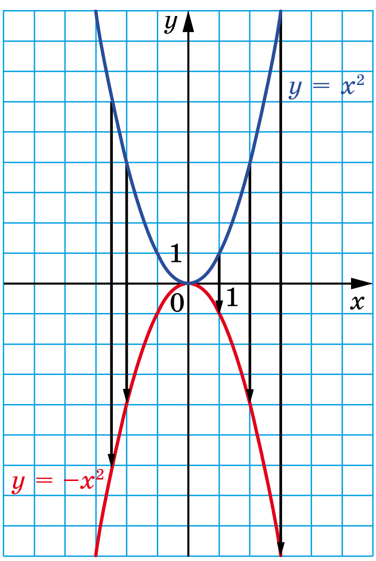
Rys. 9.5

Uważa się, że wykres funkcji $y = kf(x)$ otrzymano з wykresu funkcji $y = f(x)$ w wyniku **oddalenia od osi odciętych *k***, gdy $k > 1$, lub w wyniku **przybliżenia do osi odciętych o $\frac{1}{k}$**, gdy $0 < k < 1$.

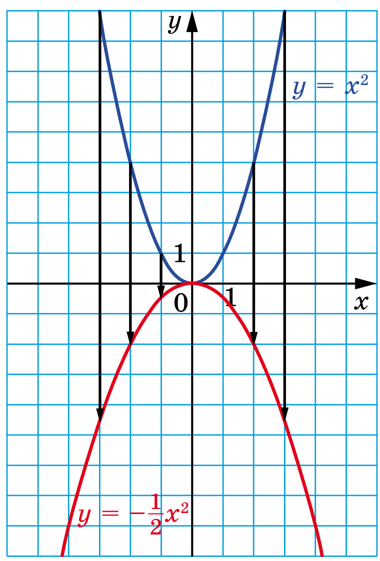
Tak, wykres funkcji $y = \frac{3}{x}$ można otrzymać w wyniku oddalenia wykresu funkcji $y = \frac{1}{x}$ o 3 razy od osi odciętych, zaś wykres funkcji $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ otrzyma się w wyniku przybliżenia do osi odciętych wykresu funkcji $y = \sqrt{x}$ o 3 razy od osi odciętych.

Rozpatrzymy funkcje $y = x^2$ i $y = -x^2$. Każdemu punktu $(x_0; y_0)$ wykresu funkcji $y = x^2$ przyporządkowuje się dokładnie jeden punkt $(x_0; -y_0)$ wykresu funkcji $y = -x^2$. Zatem, każdy punkt $(x_1; y_1)$ wykresu funkcji $y = -x^2$ jest przyporządkowany do każdego punktu dokładnie jednemu $(x_1; -y_1)$ wykresu funkcji $y = x^2$.

Dlatego wszystkie punkty wykresu funkcji $y = -x^2$ można otrzymać, zamieniając każdy punkt wykresu funkcji $y = x^2$ na punkt o tej samej odciętej i o rzędnej pomnożonej przez –1 (rys. 9.6).



Rys. 9.6

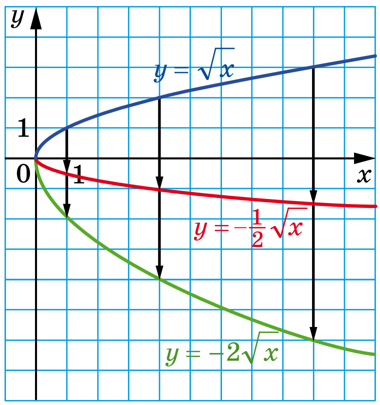


Rys. 9.7

Jest zrozumiałe, że reguła sporządzenia wykresu funkcji $y = kf(x)$, dla $k < 0$, jest identyczna również dla przypadku $k > 0$.

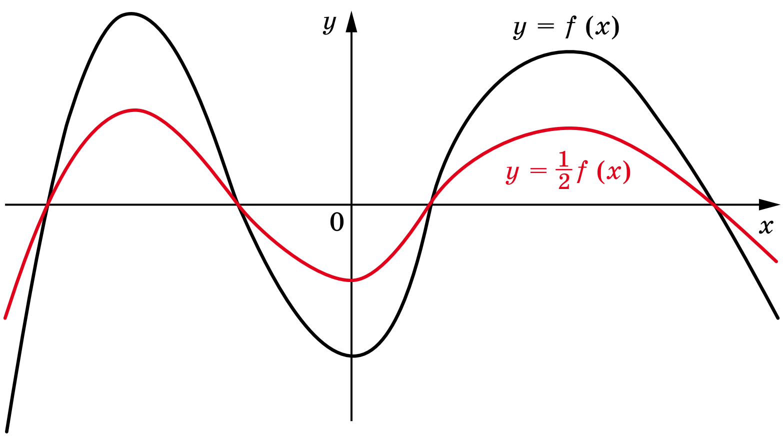
Na przykład, na rysunku 9.7 jest pokazano, w jaki sposób można sporządzić wykres funkcji $y = x^2$, znając wykres funkcji $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Rysunek 9.8 ilustruje sporządzenie wykresów funkcji $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ i $y = -2\sqrt{x}$ według wiadomego wykresu funkcji $y = \sqrt{x}$.

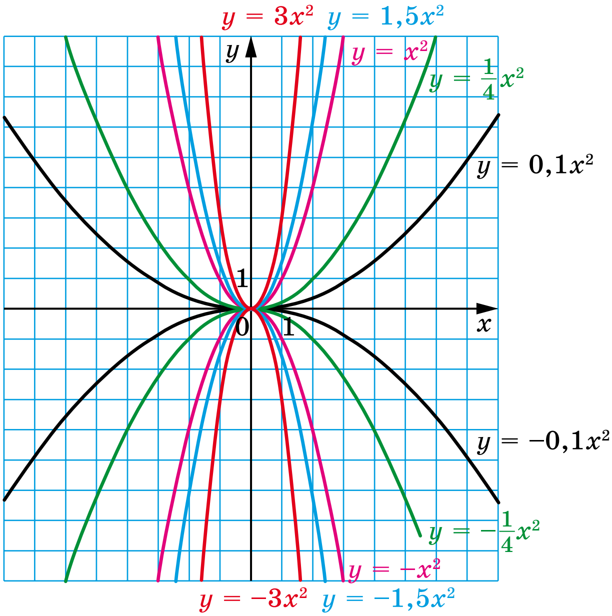


Rys. 9.8

Zauważymy, że dla $k \neq 0$ funkcji $y = f(x)$ i $y = kf(x)$ posiadają jedne i te same zera funkcji. A więc, wykresy tych funkcji przecinają oś odciętych w takich samych punktach. Fakt ten ilustruje rysunek 9.9.



Rys. 9.9



Rys. 9.10

Na rysunku 9.10 przedstawiono wykresy funkcji $y = ax^2$ przy niektórych wartościach a. Każdy z tych wykresów, oraz wykres funkcji $y = x^2$, nazywa się **parabolą**. Punkt (0; 0) jest wierzchołkiem każdej z tych paraboli.

Jeżeli $a > 0$, *to ramiona paraboli są skierowane do góry*, *jeżeli* $a < 0$, *to ramiona paraboli są skierowane do dołu*.

Czasami, słowa "Dana jest funkcja $y = ax^2$" zamieniają słowami "Dana jest parabola $y = ax^2$".

Własności funkcji $y = ax^2$, $a \neq 0$ umieszczono w następującej tabeli.

Własności	$a > 0$	$a < 0$
Dziedzina określenia	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Zbiór wartości	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Zera funkcji	$x = 0$	$x = 0$
Przedziały stałego znaku	$y > 0$ na każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$ i $(0; +\infty)$	$y < 0$ na każdym z przedziałów $(-\infty; 0)$ i $(0; +\infty)$
Rośnie w przedziale	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Maleje w przedziale	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$

?

1. Jak z wykresu funkcji $y = kf(x)$, gdzie $k \neq 0$, można otrzymać wykres funkcji $y = f(x)$?
2. Jaka figura jest wykresem funkcji $y = ax^2$, gdzie $a \neq 0$?
3. Jaki punkt jest wierzchołkiem paraboli $y = ax^2$?
4. W jaką stronę są skierowane ramiona paraboli $y = ax^2$ gdy $a > 0$? gdy $a < 0$?
5. Jaka jest dziedzina określenia funkcji $y = ax^2$, gdy $a \neq 0$?
6. Jaki jest zbiór wartości funkcji $y = ax^2$ dla $a > 0$? dla $a < 0$?
7. W jakim przedziale funkcja rośnie, a w jakim maleje, gdy jest podaną $y = ax^2$ dla $a > 0$? dla $a < 0$?

ĆWICZENIA

9.1.° Czy dany punkt leży na wykresie funkcji $y = -25x^2$ gdy:

1) $A\,(2; -100)$;
2) $B\,(-2; 100)$;
3) $C\left(-\frac{1}{5}; -1\right)$;
4) $D\,(-1; 25)$?

9.2.° W jakich ćwiartkach układu współrzędnych leży wykres funkcji $y = ax^2$ gdy $a > 0$? gdy $a < 0$?

9.3.° Nie sporządzając wykresu paraboli, podaj współrzędne punktów przecięcia paraboli $y = 3x^2$ i prostej:

1) $y = 300$;
2) $y = 42x$;
3) $y = -150x$;
4) $y = 6 - 3x$.

9.4.° Nie sporządzając wykresu paraboli, podaj współrzędne punktów przecięcia wykresów funkcji:

1) $y = \frac{1}{3}x^2$ i $y = 3$;
2) $y = \frac{1}{2}x^2$ i $y = x + 4$.

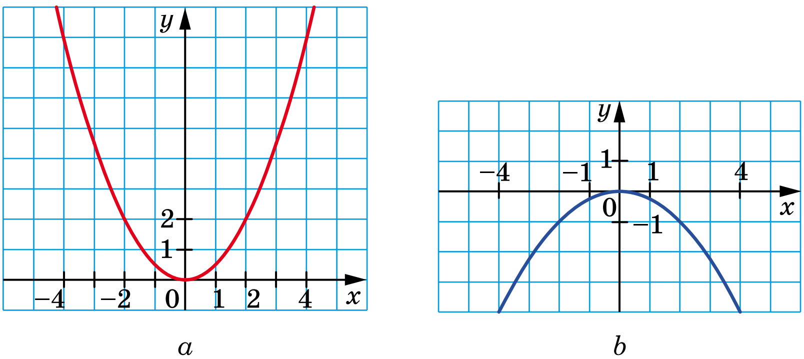
9.5.° Przy jakich wartościach a punkt $A\,(a; 16)$ leży na wykresie funkcji $y = 4x^2$?

9.6.° Przy jakich wartościach b punkt $B\,(-2; b)$ leży na wykresie funkcji $y = -0{,}2x^2$?

9.7.° Wiadomo, że punkt $M\,(3; -6)$ leży na wykresie funkcji $y = ax^2$. Oblicz wartość a.

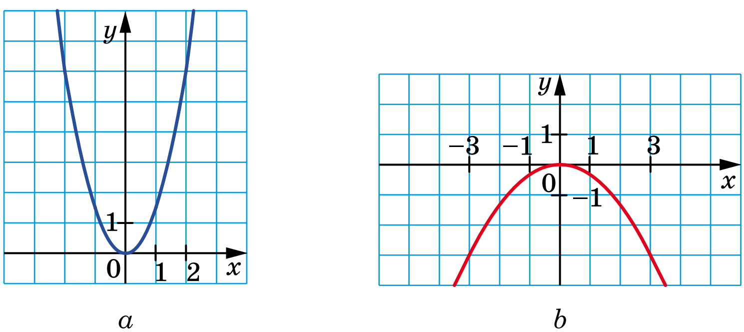
9.8.° Wiadomo, że punkt $K\,(-5; 10)$ leży na wykresie funkcji $y = ax^2$. Oblicz wartość a.

9.9.$^{\bullet}$ Na rysunku 9.11 jest przedstawiony wykres funkcji $y = ax^2$. Oblicz wartość a.



Rys. 9.11

9.10.$^{\bullet}$ Na rysunku 9.12 jest przedstawiony wykres funkcji $y = ax^2$. Oblicz wartość a.



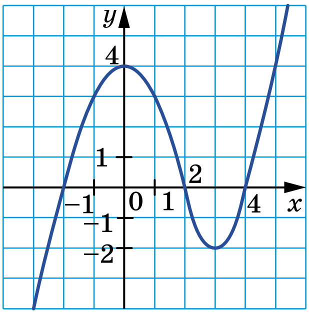
Rys. 9.12

9.11.$^{\bullet}$ Na rysunku 9.13 jest przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządź wykres funkcji:

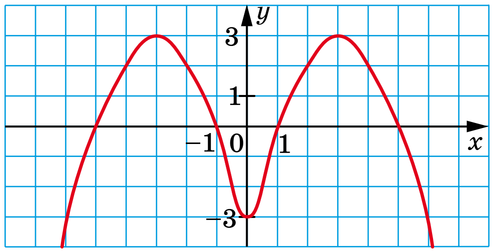
1) $y = \frac{1}{2} f(x)$; 2) $y = -f(x)$; 3) $y = -2f(x)$.

9.12.$^{\bullet}$ Na rysunku 9.14 jest przedstawiony wykres funkcji $y = g(x)$. Sporządź wykres funkcji:

1) $y = \frac{1}{3} g(x)$; 2) $y = -\frac{1}{2} g(x)$.



Rys. 9.13



Rys. 9.14

9.13.• Sporządź wykres funkcji $y = x^2$. Korzystając z tego wykresu, sporządź wykres funkcji:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = -\frac{1}{4}x^2$.

9.14.• Sporządź wykres funkcji $y = \sqrt{x}$. Korzystając z tego wykresu, sporządź wykres funkcji:

1) $y = 4\sqrt{x}$; 2) $y = -\sqrt{x}$.

9.15.• Udowodnij, że funkcja $y = ax^2$ dla $a > 0$ w przedziale $(-\infty; 0]$ maleje, a w przedziale $[0; +\infty)$ rośnie.

9.16.• Udowodnij, że funkcja $y = ax^2$ dla $a < 0$ w przedziale $(-\infty; 0]$ rośnie, a w przedziale $[0; +\infty)$ maleje.

9.17.• Sporządź wykres funkcji:

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ jeżeli } x \leqslant -2, \\ -2x, \text{ jeżeli } -2 < x < 2, \\ -x^2, \text{ jeżeli } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Korzystając z sporządzonego wykresu, podaj przedziały, w których funkcja rośnie, a także w których maleje.

9.18.• Sporządź wykres funkcji:

$$y = \begin{cases} -2, \text{ jeżeli } x < -1, \\ -2x^2, \text{ jeżeli } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 2x^2, \text{ jeżeli } x > 0. \end{cases}$$

Korzystając z sporządzonego wykresu, podaj przedziały, w których funkcja rośnie, a także w których maleje.

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

9.19. Udowodnij tożsamość:

$$\left(\frac{m-n}{m^2+mn}-\frac{m}{mn+n^2}\right):\left(\frac{n^2}{m^3-mn^2}+\frac{1}{m+n}\right)=\frac{n-m}{n}.$$

9.20. Uprość wyrażenie:

1) $\sqrt{(a-b)^2}$, jeżeli $b \geqslant a$;
2) $\sqrt{c^2+6c+9}$, jeżeli $c \geqslant -3$;
3) $\dfrac{\sqrt{(m-5)^4}}{m^2-10m+25}$;
4) $\dfrac{x^2-2x+1}{\sqrt{(x-1)^6}}$, jeżeli $x < 1$.

9.21. Dla przewiezienia 45 t towaru planowano zamówić ciężarówkę o pewnej ładowności. W wyniku tego, że ona była uszkodzona, zamówiono ciężarówkę o ładowności o 2 t mniejszą od poprzedniej. Więc, ona musiała wykonać o 6 kursów więcej od poprzedniej. Jaka jest ładowność ciężarówki, która przewoziła ten towar?

9.22. Jaką będzie najmniejsza wartość wyrażenia i przy jakiej wartości zmiennej:

1) $(x - 6)^2 + 3$;
2) $(x + 4)^2 - 5$;
3) $x^2 + 2x - 6$;
4) $x^2 - 10x + 18$?

UCZYMY SIĘ NIESTANDARDOWEGO MYŚLENIA

9.23. Dla pomalowania jednej ściany sześcianu potrzeba 10 sekund. Za jaki najmniejszy czas 6 osób pomaluje 101 sześcian? (Dwie osoby nie mogą jednocześnie malować jeden sześcian.)

10. Jak sporządzić wykres funkcji $y = f(x) + b$ i $y = f(x + a)$ według znanego wykresu funkcji $y = f(x)$

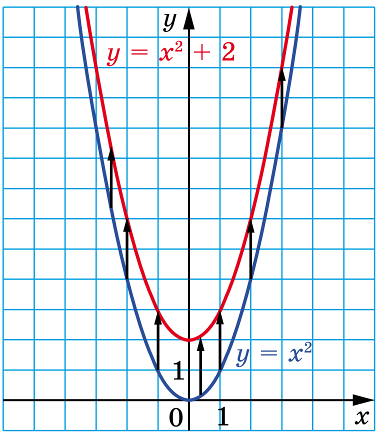
Pokażemy, w jaki sposób można wykorzystać wykres funkcji $y = x^2$, aby sporządzić wykres funkcji $y = x^2 + 2$.

Ułożymy tabelę znaczeń funkcji przy jednakowej wartości argumentu.

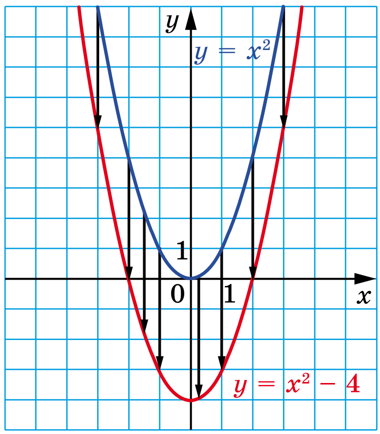
x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = x^2 + 2$	11	8,25	6	4,25	3	2,25	2	2,25	3	4,25	6	8,25	11

Według wyżej otrzymanej tabeli można zobaczyć, że każdemu punktu $(x_0; y_0)$ na wykresie funkcji $y = x^2$ przyporządkowuje się dokładnie jeden punkt $(x_0; y_0 + 2)$ na wykresie funkcji $y = x^2 + 2$. Zaś każdy punkt $(x_1; y_1)$ należący do wykresu funkcji $y = x^2 + 2$ odpowiada dokładnie jednemu punktu $(x_1; y_1 – 2)$ należącemu do wykresu funkcji $y = x^2$. Dlatego wszystkie punkty, należące do wykresu funkcji $y = x^2 + 2$ powstają od zamiany punktu należącego do wykresu funkcji $y = x^2$ na punkt o tej samej odciętej i rzędnej zwiększonej o 2 (rys. 10.1).

Uważa się, że wykres funkcji $y = x^2 + 2$ powstaje podczas **równoległego przesunięcia**[1] wykresu funkcji $y = x^2$ o 2 jedności w górę wzdłuż osi rzędnych.



Rys. 10.1



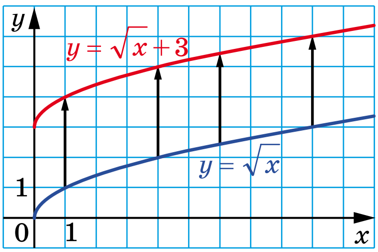
Rys. 10.2

Analogicznie, wykres funkcji $y = x^2 – 4$ można otrzymać z równoległego przesunięcia wykresu funkcji $y = x^2$ o 4 jednostki do dołu wzdłuż osi rzędnych (rys. 10.2). Wyżej przytoczone przykłady wskazują, za pomocą jakich przekształceń wykresu funkcji $y = f(x)$, można szybko otrzymać wykres funkcji $y = f(x) + b$.

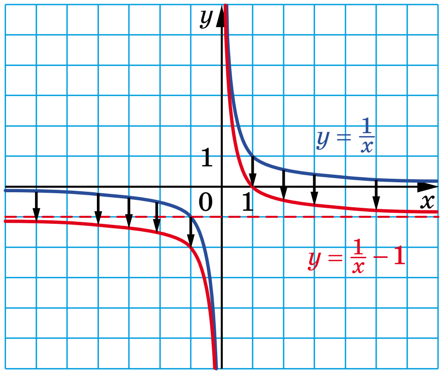
Wykres funkcji $y = f(x) + b$ powstaje w wyniku równoległego przesunięcia wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi rzędnych o b jednostek do góry w przypadku, gdy $b > 0$, oraz o b jednostek do dołu, w przypadku, gdy $b < 0$.

[1] Potem na lekcjach geometrii dokładniej dowiedziecie się o równoległym przesunięciu.

Na rysunkach 10.3, 10.4 pokazano, w jaki sposób “działa” ta reguła dla sporządzania wykresu funkcji $y = \sqrt{x} + 3$ i $y = \frac{1}{x} - 1$.



Rys. 10.3



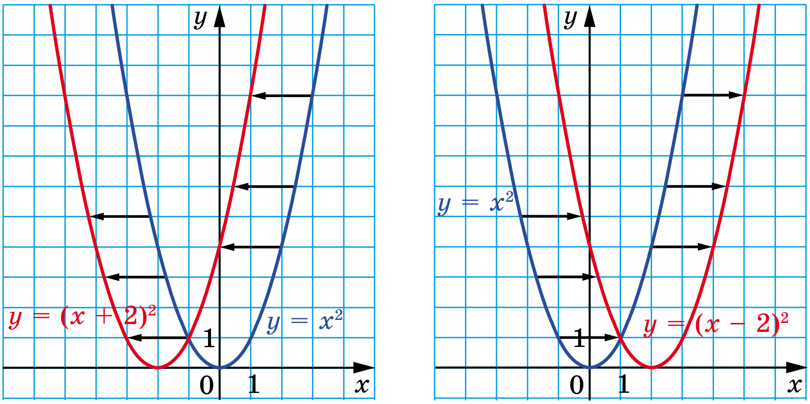
Rys. 10.4

Oczywiście, że w rezultacie równoległego przesunięcia powstaje figura, wykres której odpowiada początkowej figurze. Na przykład, wykresem każdej funkcji $y = x^2 + 2$ i $y = x^2 - 4$ jest parabola, która jest identyczna z parabolą $y = x^2$. Wówczas wykresami funkcji $y = x^2 + 2$ i $y = x^2 - 4$ także są parabole.

Pokażemy, jak za pomocą wykresu funkcji $y = x^2$ powstaje wykres funkcji $y = (x + 2)^2$. Przypuśćmy, że punkt $(x_0; y_0)$ należy do wykresu funkcji $y = x^2$, czyli $x_0^2 = y_0$. Udowodnimy, że punkt $(x_0 - 2; y_0)$ należy do wykresu funkcji $y = (x + 2)^2$. Znajdziemy wartość tej funkcji w punkcie o odciętej $x_0 - 2$. Otrzymamy: $((x_0 - 2) + 2)^2 = x_0^2 = y_0$. A więc, każdemu punktu $(x_0; y_0)$ leżącemu na wykresie funkcji $y = x^2$ odpowiada dokładnie jedna wartość punktu $(x_0 - 2; y_0)$ należącego do wykresu funkcji $y = (x + 2)^2$. Analogicznie, można przekonać się, że każdy punkt $(x_1; y_1)$ leżący na wykresie funkcji $y = (x + 2)^2$ jest odpowiednio punktem dokładnie jedynym $(x_1 + 2; y_1)$ leżącym na wykresie funkcji $y = x^2$.

Wówczas, wszystkie punkty należące do wykresu funkcji $y = (x + 2)^2$ powstają od zamiany każdego punktu wykresu funkcji $y = x^2$ na punkt o jednakowej rzędnej oraz odciętej zmniejszonej o 2 (rys. 10.5).

Uważa się, że wykres funkcji $y = (x + 2)^2$ powstaje w wyniku równoległego przesunięcia wykresu funkcji $y = x^2$ wzdłuż osi odciętych o 2 jednostki w lewo. Pokażemy, że za pomocą wykresu funkcji $y = x^2$ można sporządzić wykres funkcji $y = (x - 2)^2$. Łatwo ustalić (zrób to samodzielnie), że każdemu punktu $(x_0; y_0)$ należącemu do wykresu funkcji $y = x^2$ przyporządkowuje się dokładnie jeden punkt $(x_0 + 2; y_0)$ należący do wykresu funkcji $y = (x - 2)^2$ oraz każdy punkt $(x_1; y_1)$ należący do wykresu



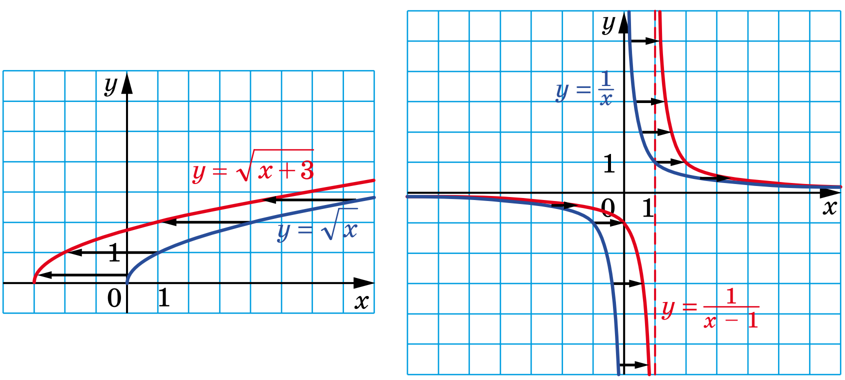
Rys. 10.5 Rys. 10.6

funkcji $y = (x - 2)^2$ jest dokładnie jednym odpowiednim punktem $(x_1 - 2; y_1)$ należącym do wykresu funkcji $y = x^2$. Dlatego wykres funkcji $y = (x - 2)^2$ powstaje w wyniku równoległego przesunięcia wykresu funkcji $y = x^2$ wzdłuż osi odciętych o 2 jednostki w prawo (rys. 10.6).

Te wyżej wymienione przypadki wskazują, że łatwo sporządzić wykres funkcji $y = f(x + a)$ korzystając z wykresu funkcji $y = f(x)$.

Wykres funkcji $y = f(x + a)$ powstaje w wyniku równoległego przesunięcia wykresu funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi odciętych o a jednostek w lewo, w przypadku, gdy $a > 0$, oraz o $-a$ jednostek w prawo w przypadku, gdy $a < 0$.

Na rysunkach 10.7, 10.8 pokazano, w jaki sposób "działa" ta reguła do sporządzania wykresów funkcji $y = \sqrt{x+3}$ i $y = \frac{1}{x-1}$.



Rys. 10.7 Rys. 10.8

Warto zwrócić uwagę, że wykresami funkcji $y = (x + 2)^2$ i $y = (x - 2)^2$ są parabole, identyczne do paraboli $y = x^2$.

PRZYKŁAD 1 Sporządź wykres funkcji $y = (x - 1)^2 + 3$.

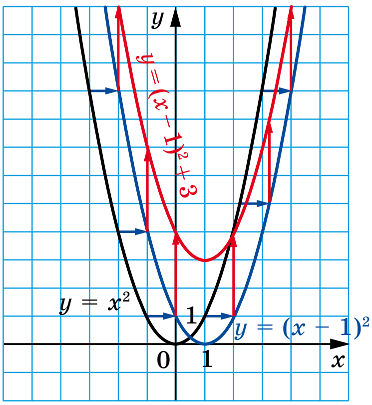
Rozwiązanie. 1) Sporządzimy wykres funkcji $y = x^2$.

2) Wykres funkcji $y = x^2$ przesuniemy równolegle wzdłuż osi odciętych o 1 jednostkę w prawo. Otrzymamy wykres funkcji $y = (x - 1)^2$ (rys. 10.9).

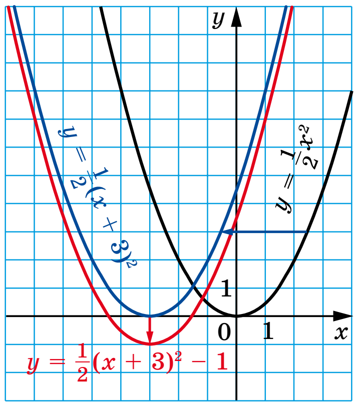
3) Wykres funkcji $y = (x - 1)^2$ przesuniemy równolegle wzdłuż osi odciętych o 3 jednostki do góry. Otrzymamy wykres funkcji $y = (x - 1)^2 + 3$ (patrz rys. 10.9).

Opisany algorytm sporządzenia wykresu podamy w postaci schematu:

$$y = x^2 \xrightarrow{\substack{\text{w prawo} \\ \text{o 1 jedn.}}} y = (x - 1)^2 \xrightarrow{\substack{\text{do góry} \\ \text{o 3 jedn.}}} y = (x - 1)^2 + 3$$



Rys. 10.9



Rys. 10.10

PRZYKŁAD 2 Sporządź wykres funkcji $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$.

Rozwiązanie. 1) Sporządzimy wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x^2$ (rys. 10.10).

2) Wykres funkcji $y = \frac{1}{2}x^2$ przesuniemy równolegle wzdłuż osi odciętych o 3 jednostki w lewo. Otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$ (patrz rys. 10.10).

3) Wykres funkcji $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$ przesuniemy równolegle wzdłuż osi rzędnych o 1 jednostkę do dołu. Otrzymamy szukany wykres (patrz rys. 10.10).

Schemat sporządzenia wykresu będzie następujący:

$$y = \frac{1}{2}x^2 \xrightarrow[\text{o 3 jedn.}]{\text{w lewo}} y = \frac{1}{2}(x+3)^2 \xrightarrow[\text{o 1 jedn.}]{\text{do dołu}} y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$$

Z wyżej opisanych przekształceń wynika, że wykresem funkcji $y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 1$ jest parabola, która jest identyczną z parabolą $y = \frac{1}{2}x^2$ o wierzchołku w punkcie (–3; –1). ◀

Ten przykład pomaga ustalić algorytm sporządzenia wykresu funkcji $y = kf(x+a) + b$, a konkretnie funkcji $y = k(x+a)^2 + b$.

Wykresem funkcji $\boldsymbol{y = k(x+a)^2 + b}$***, gdzie*** $\boldsymbol{k \neq 0}$***, jest parabola identyczna z parabolą*** $\boldsymbol{y = kx^2}$ ***o wierzchołku w punkcie*** $\boldsymbol{(-a;\ b)}$.

PRZYKŁAD 3 Sporządź wykres funkcji $y = -2x^2 - 20x - 47$.

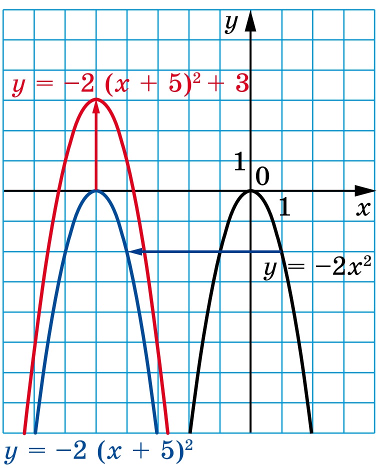
Rozwiązanie. Mamy: $y = -2x^2 - 20x - 47 = -2x^2 - 20x - 50 + 3 = -2(x+5)^2 + 3$.

Przedstawiliśmy wzór, który podaje daną funkcję w postaci $y = kf(x+a) + b$, gdzie $f(x) = x^2$, $k = -2$, $a = 5$, $b = 3$.

Schemat sporządzenia wykresu będzie następujący:

$$y = -2x^2 \xrightarrow[\text{o 5 jedn.}]{\text{w lewo}} y = -2(x+5)^2 \xrightarrow[\text{o 3 jedn.}]{\text{do góry}} y = -2(x+5)^2 + 3$$

Sporządzony wykres jest parabolą, identyczną z parabolą $y = -2x^2$ o wierzchołku w punkcie (–5; 3) (rys. 10.11). ◀



Rys. 10.11

1. Jak sporządzić wykres funkcji $y = f(x) + b$, korzystając z wykresu funkcji $y = f(x)$?
2. Jaka figura jest wykresem funkcji $y = x^2 + b$?
3. Jakie współrzędne posiada wierzchołek paraboli $y = x^2 + b$?
4. Jak sporządzić wykres funkcji $y = f(x + a)$, korzystając z wykresu funkcji $y = f(x)$?
5. Jaka figura jest wykresem funkcji $y = (x + a)^2$?
6. Jakie współrzędne posiada wierzchołek paraboli $y = (x + a)^2$?
7. Jaka figura jest wykresem funkcji $y = k(x + a)^2 + b$, gdzie $k \neq 0$?
8. Jakie współrzędne posiada wierzchołek paraboli $y = k(x + a)^2 + b$?

ĆWICZENIA

10.1.° Wykres jakiej funkcji otrzymamy, w wyniku równoległego przesunięcia wykresu funkcji $y = x^2$:
1) o 6 jednostek do góry względem osi rzędnych;
2) o 9 jednostek w prawo względem osi odciętych;
3) o 12 jednostek do dołu względem osi rzędnych;
4) o 7 jednostek w lewo względem osi odciętych;
5) o 2 jednostek w prawo względem osi odciętych i o 3 jednostki do dołu względem osi rzędnych;
6) o 1 jednostkę w lewo względem osi odciętych i o 1 jednostkę do góry względem osi rzędnych?

10.2.° Jaki wykres otrzymamy z niżej podanych funkcji w wyniku równoległego przesunięcia wykresu funkcji $y = x^2$ o 4 jednostki w prawo względem osi odciętych:
1) $y = x^2 + 4$; 2) $y = x^2 - 4$; 3) $y = (x + 4)^2$; 4) $y = (x - 4)^2$?

10.3.° Jaki wykres otrzymamy z niżej podanych funkcji w wyniku równoległego przesunięcia wykresu funkcji $y = x^2$ o 5 jednostki do góry względem osi odciętych:
1) $y = x^2 + 5$; 2) $y = x^2 - 5$; 3) $y = (x + 5)^2$; 4) $y = (x - 5)^2$?

10.4.° Jakie współrzędne wierzchołka posiada parabola:
1) $y = x^2 + 8$;
2) $y = x^2 - 8$;
3) $y = (x + 8)^2$;
4) $y = (x - 8)^2$;
5) $y = (x - 4)^2 + 3$;
6) $y = (x + 4)^2 + 3$;
7) $y = (x - 4)^2 - 3$;
8) $y = (x + 4)^2 - 3$?

10.5.° W jakiej z ćwiartek układu współrzędnych leży wierzchołek następującej paraboli:
1) $y = (x + 10)^2 - 16$;
2) $y = (x - 11)^2 + 15$;
3) $y = (x + 15)^2 + 4$;
4) $y = (x - 11)^2 - 9$?

10.6.° Jak należy wykres funkcji $y = \frac{5}{x}$ przesunąć równolegle, aby otrzymać wykres funkcji $y = \frac{5}{x-8}$:

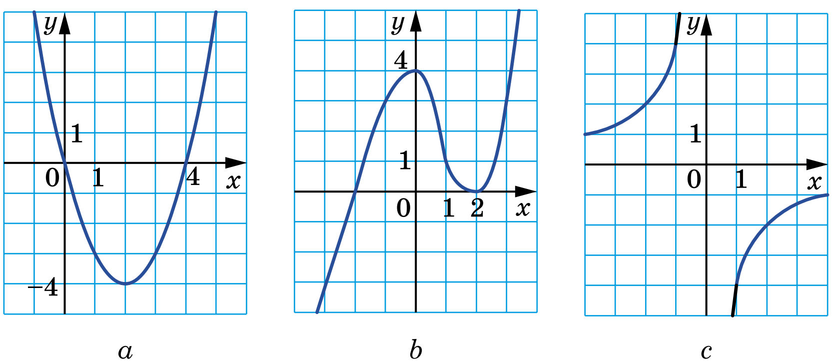
1) o 8 jednostek w górę względem osi rzędnych;
2) o 8 jednostek w dół względem osi rzędnych;
3) o 8 jednostek w prawo względem osi odciętych;
4) o 8 jednostek w lewo względem osi odciętych?

10.7.° Jak należy wykres funkcji $y = \sqrt{x}$ przesunąć równolegle, aby otrzymać wykres funkcji $y = \sqrt{x+3}$:

1) o 3 jednostek w górę względem osi rzędnych;
2) o 3 jednostek w dół względem osi rzędnych;
3) o 3 jednostek w prawo względem osi odciętych;
4) o 3 jednostek w lewo względem osi odciętych?

10.8.• Na rysunku 10.12 przedstawiony wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządź wykres funkcji:

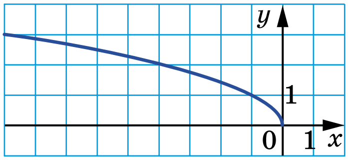
1) $y = f(x) - 2$;
2) $y = f(x) + 4$;
3) $y = f(x - 3)$;
4) $y = f(x + 1)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = 3 - f(x)$.



Rys. 10.12

10.9.• Na rysunku 10.13 przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$. Sporządź wykres funkcji:

1) $y = f(x) + 5$;
2) $y = f(x) - 3$;
3) $y = f(x + 1)$;
4) $y = f(x - 2)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = -f(x) - 1$.



Rys. 10.13

10.10.• Sporządź wykres funkcji $y = x^2$. Korzystając z tego wykresu, sporządź wykres funkcji:

1) $y = x^2 - 3$;
2) $y = x^2 + 4$;
3) $y = (x - 5)^2$;
4) $y = (x + 2)^2$;
5) $y = (x - 1)^2 + 2$;
6) $y = (x + 3)^2 - 2$.

10.11.• Sporządź wykres funkcji $y = -x^2$. Korzystając z tego wykresu, sporządź wykres funkcji:

1) $y = -x^2 + 1$;
2) $y = -x^2 - 2$;
3) $y = -(x - 2)^2$;
4) $y = -(x + 4)^2$;
5) $y = -(x + 1)^2 - 1$;
6) $y = -(x - 3)^2 + 4$.

10.12.• Sporządź wykres funkcji $y = -\frac{6}{x}$. Korzystając z tego wykresu, sporządź wykres funkcji:

1) $y = -\frac{6}{x} + 5$;
2) $y = -\frac{6}{x - 2}$;
3) $y = -\frac{6}{x + 4} - 2$.

10.13.• Sporządź wykres funkcji $y = \frac{2}{x}$. Korzystając z tego wykresu, sporządź wykres funkcji:

1) $y = \frac{2}{x} - 1$;
2) $y = \frac{2}{x + 1}$;
3) $y = \frac{2}{x - 3} + 6$.

10.14.• Sporządź wykres funkcji $y = \sqrt{x}$. Korzystając z tego wykresu, sporządź wykres funkcji:

1) $y = \sqrt{x} - 4$;
2) $y = \sqrt{x - 4}$;
3) $y = \sqrt{x - 1} + 3$.

10.15.• Sporządź wykres funkcji $y = (x + 5)^2 - 9$. Na podstawie wykresu podaj:

1) miejsca zerowe funkcji;
2) wartości argumentu dla jakich funkcja przyjmuje dodatnie wartości;
3) przedział, w którym funkcja jest rosnąca oraz przedział, w którym funkcja jest malejąca;
4) zbiór wartości funkcji.

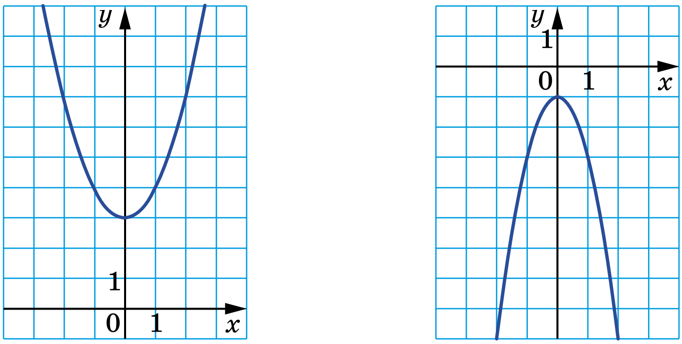
10.16.• Sporządź wykres funkcji $y = (x - 4)^2 + 4$. Na podstawie wykresu podaj:

1) miejsca zerowe funkcji;
2) wartości argumentu dla jakich funkcja przyjmuje wartości ujemne;
3) przedział, w którym funkcja jest rosnąca oraz przedział, w którym funkcja jest malejąca;
4) zbiór wartości funkcji.

10.17.• Podaj wzór funkcji w postaci $y = ax^2 + n$, wykres której przedstawiono na rysunku 10.14.

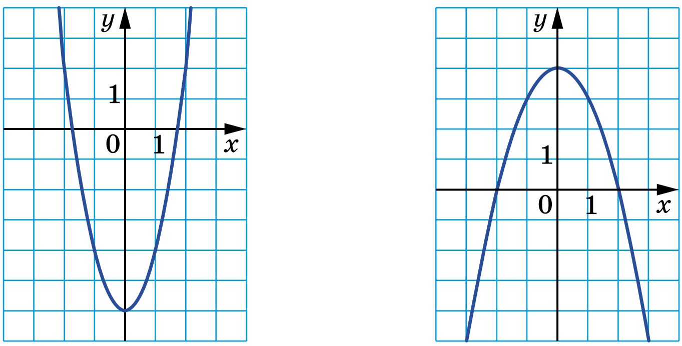
10.18.• Podaj wzór funkcji w postaci $y = ax^2 + n$, wykres której przedstawiono na rysunku 10.15.

10.19.• Podaj wzór funkcji w postaci $y = a(x + m)^2$, wykres której przedstawiono na rysunku 10.16.



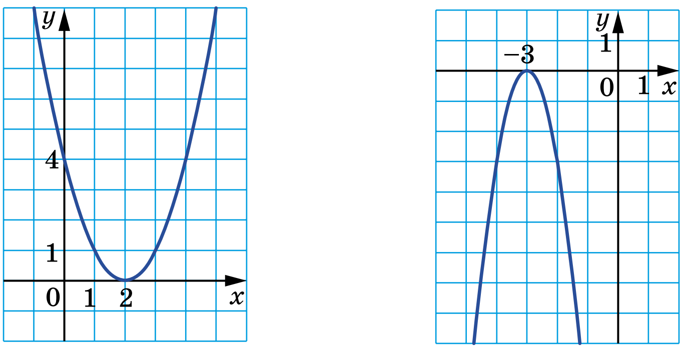
a *b*

Rys. 10.14



a *b*

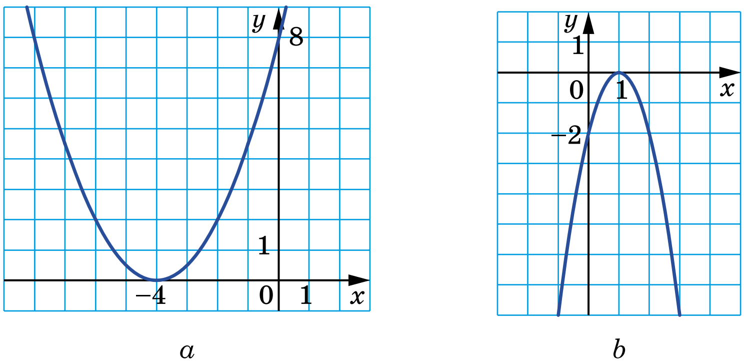
Rys. 10.15



a *b*

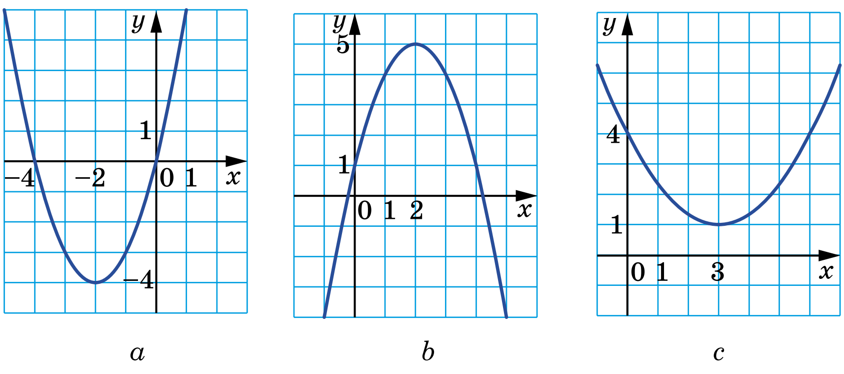
Rys. 10.16

10.20. Podaj wzór funkcji w postaci $y = a(x + m)^2$, wykres której przedstawiono na rysunku 10.17.



Rys. 10.17

10.21. Podaj wzór funkcji w postaci $y = a(x + m)^2 + n$, wykres której przedstawiono na rysunku 10.18.



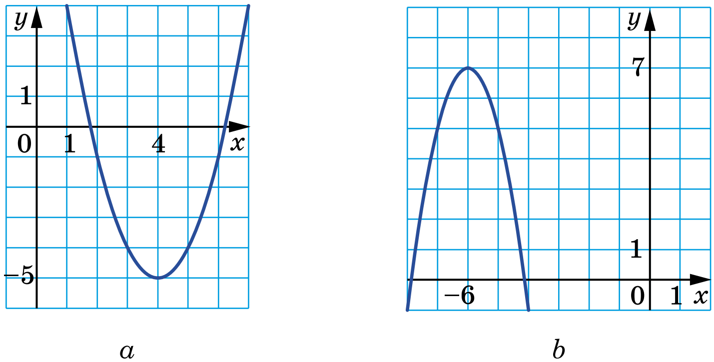
Rys. 10.18

10.22. Podaj wzór funkcji w postaci $y = a(x + m)^2 + n$, wykres której przedstawiono na rysunku 10.19.

10.23. Rozwiąż graficznie równania:

1) $(x-1)^2 = \frac{2}{x}$; 2) $1 - x^2 = \sqrt{x} - 1$.

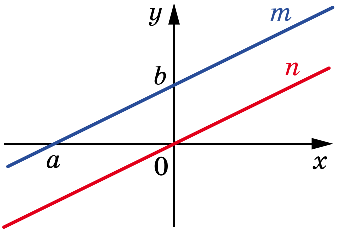
10.24. Rozwiąż graficznie równanie $\frac{3}{x} = \sqrt{x} + 2$.



Rys. 10.19

10.25.• Proste m i n, przedstawione na rysunku 10.20, są równoległe, przy czym prosta n jest wykresem funkcji $y = f(x)$. Która z wymienionych wypowiedzi jest prawdziwa:

1) prosta m jest wykresem funkcji $y = f(x) + b$;
2) prosta m jest wykresem funkcji $y = f(x - a)$?



Rys. 10.20

10.26.•• Podaj wzór funkcji w postaci $y = a(x - m)^2 + n$ i sporządź jej wykres, korzystając z wykresu funkcji $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 4x + 6$;
2) $y = -x^2 + 6x - 6$;
3) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
4) $y = 0{,}2x^2 - 2x - 4$.

10.27.•• Podaj wzór funkcji w postaci $y = a(x - m)^2 + n$ i sporządź jej wykres, korzystając z wykresu funkcji $y = ax^2$:

1) $y = x^2 - 2x - 8$;
2) $y = -2x^2 + 8x - 3$.

10.28.•• Podaj wzór funkcji w postaci $y = \dfrac{k}{x+a} + b$ i sporządź jej wykres, korzystając z wykresu funkcji $y = \dfrac{k}{x}$:

1) $y = \dfrac{3x+8}{x}$; 2) $y = \dfrac{2x+14}{x+3}$; 3) $y = \dfrac{-2x}{x-1}$.

10.29.•• Podaj wzór funkcji w postaci $y = \dfrac{k}{x+a} + b$ i sporządź jej wykres, korzystając z wykresu funkcji $y = \dfrac{k}{x}$:

1) $y = \dfrac{4x+14}{x+1}$; 2) $y = \dfrac{7-x}{x-2}$.

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

10.30. Uprość wyrażenie:

1) $\dfrac{5a-3}{8a} + \dfrac{a+9}{4a}$;

2) $\dfrac{5a-6b}{ab} + \dfrac{5b-5c}{bc}$;

3) $\dfrac{8a+5b}{5ab^2} - \dfrac{2a-7b}{2a^2b}$;

4) $\dfrac{m^2+4n^2}{8m^4n^4} - \dfrac{3m+4n}{6m^5n^2}$.

10.31. Skróć ułamek:

1) $\dfrac{9+\sqrt{m}}{m-81}$;

2) $\dfrac{\sqrt{27}+\sqrt{45}}{\sqrt{18}+\sqrt{30}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{5m}+\sqrt{7n}}{5m+2\sqrt{35mn}+7n}$;

4) $\dfrac{25m+10n\sqrt{3m}+3n^2}{5\sqrt{m}+n\sqrt{3}}$.

10.32. Licznik ułamka zwykłego jest o 1 mniejszy od jego mianownika. Gdy licznik i mianownik tego ułamka zmniejszyć o 1, to wartość ułamka zmniejszy się o $\dfrac{1}{12}$. Oblicz ten ułamek.

10.33. Udowodnij, że przy wartości dodatnich a i b spełnia się równość $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$.

11. Funkcja kwadratowa, jej wykres i własności

Definicja. Funkcja, która jest określona wzorem $y = ax^2 + bx + c$, gdzie x –niezależna zmienna, a, b i c – dowolne liczby, przy czym $a \neq 0$, nazywa się funkcją kwadratową.

Funkcja kwadratowa nie jest dla was czymś nowym. W klasie 8. zapoznaliście się z jej szczególnym przypadkiem, a mianowicie z funkcją $y = x^2$. Zależność funkcjonalna pola koła S i jego promienia r określa się funkcją kwadratową $S(r) = \pi r^2$, która jest funkcją postaci $y = ax^2$. Z tą funkcją zapoznaliście się w p. 9.

Na lekcjach fizyki zapoznaliście się ze wzorem $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, który określa zależność między wysokością h, na której znajduje się ciało, które rzucono do góry z początkową prędkością v_0, i od czasu jego ruchu t. Wzór ten określa funkcję kwadratową o postaci $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$.

Pokażemy, jak za pomocą wykresu funkcji $y = ax^2$ można otrzymać wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$.

Już sporządzaliście wykres funkcji $y = ax^2 + bx + c$, wyodrębniając kwadrat dwumianu (patrz przykład 3 p. 10). Zastosujemy ten fakt w ogólnej postaci. Otrzymamy:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

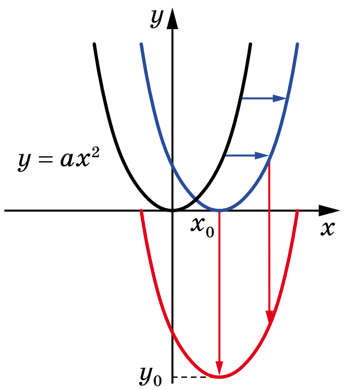
Wprowadzimy oznaczenie $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Wtedy wzór $y = ax^2 + bx + c$ można podać w postaci

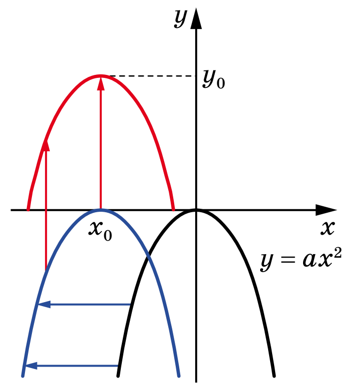
$$y = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

A więc, schemat sporządzenia szukanego wykresu jest taki:

$$y = ax^2 \xrightarrow[\text{jedn.}]{\substack{\text{w prawo} \\ \text{lub w lewo} \\ \text{o } |x_0|}} y = a(x - x_0)^2 \xrightarrow[\text{jedn.}]{\substack{\text{w górę} \\ \text{lub w dół} \\ \text{o } |y_0|}} y = a(x - x_0)^2 + y_0$$



Rys. 11.1



Rys. 11.2

Na rysunku 11.1 jest przedstawiona konstrukcja dla przypadku, gdy $a>0$, $x_0>0$, $y_0<0$. Na rysunku 11.2 jest przedstawiona konstrukcja dla przypadku, gdy $a<0$, $x_0<0$, $y_0>0$.

A zatem, z podanych wyżej zagadnień wynika: wykresem funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ jest parabola, która równoważna paraboli $y = ax^2$, o wierzchołku w punkcie $(x_0; y_0)$, gdzie $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Ramiona paraboli $y = ax^2 + bx + c$ są skierowane tak samo, jak i ramiona paraboli $y = ax^2$: jeżeli $a>0$, to ramiona paraboli są skierowane do góry, jeżeli $a<0$, to ramiona paraboli są skierowane w dół.

Ogólne pojęcie o wyglądzie wykresu funkcji kwadratowej można określić według współrzędnych wierzchołka paraboli oraz kierunków jej ramion. Dla pełnego przedstawienia warto wziąć jeszcze kilka punktów, należących do wykresu. A zatem, dla sporządzenia wykresu, można skorzystać z innego sposobu bez zastosowania równoległego przesunięcia lecz według następującego schematu:

1) *znaleźć odciętą wierzchołka paraboli według wzoru* $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

2) *znaleźć rzędną wierzchołka paraboli według wzoru*[1]

$$y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a},$$

gdzie D – wyróżnik kwadratowego trójmianu $ax^2 + bx + c$ i oznaczyć wierzchołek paraboli na płaszczyźnie współrzędnych;

---

[1] Wzór $y_0 = -\frac{D}{4a}$ nie musimy znać na pamięć. Wystarczy obliczyć wartość funkcji $y = ax^2 + bx + c$ w punkcie o odciętej $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

3) *określić kierunek ramion paraboli;*

4) *obliczyć współrzędne jeszcze kilku punktów, które należą do szukanego wykresu, mianowicie współrzędne punktu przecięcia paraboli z osią odciętych (jeżeli funkcja posiada zera), współrzędne punktu przecięcia paraboli z osią rzędnych; oznaczyć te punkty na płaszczyźnie współrzędnych;*

5) *złączyć wszystkie oznaczone punkty ciągłą linią.*

PRZYKŁAD Sporządź wykres funkcji $f(x) = x^2 + 4x - 5$. Korzystając z wykresu funkcji, podaj dziedzinę jej określenia, przedziały, w których funkcja jest rosnącą i malejącą, przedziały stałego znaku, największą i najmniejszą wartość funkcji.

Rozwiązanie. Dana funkcja jest kwadratową. Wykresem jej jest parabola, ramiona której są skierowane do góry.

Obliczymy odciętą i rzędną wierzchołka paraboli. Mamy: $x_0 = -\frac{4}{2} = -2$, odcięta wierzchołka $y_0 = f(x_0) = f(-2) = -9$.

A więc, punkt $(-2; -9)$ jest wierzchołkiem paraboli.

Znajdziemy współrzędne punktów przecięcia paraboli z osią odciętych. W tym celu rozwiążemy równanie:

$$x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Stąd $x_1 = -5$, $x_2 = 1$.

A więc, parabola przecina oś odciętych w dwóch punktach $(-5; 0)$ i $(1; 0)$.

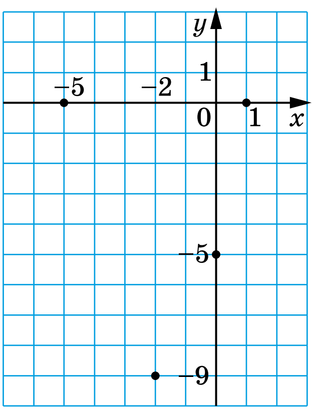
Znajdziemy punkt przecięcia paraboli z osią rzędnych. Otrzymamy: $f(0) = -5$. Parabola przecina oś rzędnych w punkcie $(0; -5)$.

Na płaszczyźnie współrzędnych oznaczymy znalezione cztery punkty(rys. 11.3).

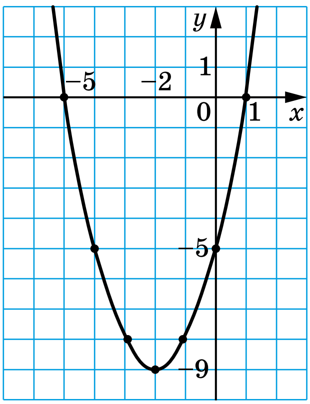
Widzimy, że trzeba znaleźć wartości danej funkcji w punktach –1, –3, –4 oraz oznaczyć otrzymane punkty na płaszczyźnie współrzędnych.

Mamy: $f(-3) = f(-1) = -8$; $f(-4) = f(0) = -5$.

Łączymy wszystkie oznaczone punkty ciągłą linią.



Rys. 11.3



Rys. 11.4

Szukany wykres funkcji jest przedstawiony na rysunku 11.4.

Dziedziną określenia funkcji jest zbiór $E(f) = [-9; +\infty)$.

Funkcja jest rosnącą w przedziale $[-2; +\infty)$ i jest malejącą w przedziale $(-\infty; -2]$.

Mamy: $f(x) > 0$ w każdym z przedziałów $(-\infty; -5)$ i $(1; +\infty)$; $f(x) < 0$ jest w przedziale $(-5; 1)$.

Najmniejsza wartość funkcji wynosi –9, największej wartości brak. ◀

?

1. Jaka funkcja nazywa się kwadratową?
2. Jaka figura jest wykresem funkcji kwadratowej?
3. Według jakiego wzoru można znaleźć odciętą wierzchołka paraboli $y = ax^2 + bx + c$?
4. Jak są skierowane ramiona paraboli $y = ax^2 + bx + c$ w zależności od wartości a?
5. Podaj schemat sporządzenia wykresu funkcji kwadratowej.

ĆWICZENIA

11.1.° Która z wymienionych funkcji jest kwadratową:

1) $y = 4x^2 + 3x + 6$;

2) $y = 4x + 3$;

3) $y = \dfrac{1}{2x^2 - 3x + 2}$;

4) $y = 6x^2 - 5x$?

11.2.° Oblicz wartość funkcji $f(x) = 5x^2 - 7x + 2$, jeżeli argument x jest równa 1; –2; 4.

11.3.° Dana funkcja $f(x) = x^2 - 2x - 15$. Oblicz wartość x, przy którym:
1) $f(x) = 0$; 2) $f(x) = -7$; 3) $f(x) = 33$.

11.4.° Wykres funkcji $y = -6x^2 + x + c$ przecina oś rzędnych w punkcie $M(0; -8)$. Oblicz wartość c.

11.5.° Określ kierunek ramion oraz współrzędne wierzchołka paraboli:
1) $y = x^2 - 12x + 3$;
2) $y = -x^2 + 4x - 6$;
3) $y = 0,3x^2 + 2,4x - 5$;
4) $y = -5x^2 + 10x + 2$.

11.6.° Sporządź wykres funkcji:
1) $y = x^2 - 4x - 5$;
2) $y = -x^2 + 2x + 3$;
3) $y = 6x - x^2$;
4) $y = 2x^2 - 8x + 8$;
5) $y = x^2 - 2x + 4$;
6) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$;
7) $y = x^2 - 6x + 5$;
8) $y = 2x^2 - 5x + 2$.

11.7.° Sporządź wykres funkcji:
1) $y = x^2 + 2x - 8$;
2) $y = x^2 - 2x$;
3) $y = -x^2 + 4x - 5$;
4) $y = 2x^2 - 2x - 4$.

11.8.• Sporządź wykres funkcji $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Korzystając z wykresu funkcji, oblicz:
1) $f(6)$; $f(1)$;
2) wartości x, dla których $f(x) = 8$; $f(x) = -1$; $f(x) = -2$;
3) największe i najmniejsze wartości funkcji;
4) zbiór wartości funkcji;
5) przedziały, w których funkcja jest rosnącą i malejącą;
6) przy jakich wartościach argumentu funkcja osiąga wartości dodatnich, a przy jakich – ujemnych.

11.9.• Sporządź wykres funkcji $f(x) = -x^2 - 6x - 5$. Korzystając z wykresu, odczytaj z niego:
1) zbiór wartości funkcji;
2) przedział, w którym funkcja jest rosnąca;
3) zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$.

11.10.• Sporządź wykres funkcji $f(x) = x - 0,5x^2$. Korzystając z wykresu, odczytaj z niego:
1) zbiór wartości funkcji;
2) przedział, w którym funkcja jest rosnąca;
3) przy jakich wartościach x spełnia się nierówność $f(x) \leqslant 0$.

11.11. Sporządź wykres funkcji $f(x) = 3x^2 - 6x$. Korzystając z wykresu, odczytaj z niego:
1) zbiór wartości funkcji;
2) przedział, w którym funkcja jest malejąca;
3) przy jakich wartościach x spełnia się nierówność $f(x) \geqslant 0$.

11.12. Rozwiąż równanie graficznie $x^2 - 3x - 1 = -\frac{3}{x}$.

11.13. Rozwiąż równanie graficznie $-\frac{1}{4}x^2 + x + 2 = \sqrt{x}$.

11.14. Na jednym układzie współrzędnych sporządź wykresy funkcji $y = f(x)$ i $y = g(x)$ oraz określ ilość rozwiązań równania $f(x) = g(x)$:
1) $f(x) = -x^2 + 6x - 7$, $g(x) = -\sqrt{x}$;
2) $f(x) = 4x - 2x^2$, $g(x) = -\frac{4}{x}$.

11.15. Na jednym układzie współrzędnych sporządź wykresy funkcji $y = x^2 + 4x + 1$ i $y = \frac{6}{x}$, oraz określ ilość pierwiastków równania $x^2 + 4x + 1 = \frac{6}{x}$.

11.16. Oblicz współrzędne punktu paraboli $y = -x^2 + 9x + 9$, jeżeli:
1) odcięta i rzędna są równe;
2) suma odciętej i rzędnej wynosi 25.

11.17. Oblicz współrzędne punktu paraboli $y = 2x^2 - 3x + 6$, dla której rzędna jest o 12 większa od odciętej.

11.18. Podaj zbiór wartości funkcji, przedziały w których funkcja jest rosnąca oraz malejąca:
1) $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$;
2) $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x - 6$;
3) $f(x) = 4 - 12x - 0{,}3x^2$;
4) $f(x) = 7x^2 + 21x$.

11.19. Podaj zbiór wartości funkcji, przedziały w których funkcja jest rosnąca oraz malejąca:
1) $f(x) = 2x^2 - 12x + 8$;
2) $f(x) = 9 + 8x - 0{,}2x^2$.

11.20. Sporządź wykres funkcji, podaj zbiór wartości funkcji, oraz przedziały, w których funkcja jest rosnąca i jest malejąca:

$$y = \begin{cases} 3 - x, & \text{jeżeli } x \leqslant -2, \\ x^2 - 2x - 3, & \text{jeżeli } -2 < x < 2, \\ -3, & \text{jeżeli } x \geqslant 2. \end{cases}$$

11.21.• Sporządź wykres funkcji, podaj zbiór wartości funkcji, oraz przedziały, w których funkcja jest rosnąca i jest malejąca:

$$y = \begin{cases} x, & \text{jeżeli } x \leqslant 0, \\ 4x - x^2, & \text{jeżeli } 0 < x < 5, \\ x - 10, & \text{jeżeli } x \geqslant 5. \end{cases}$$

11.22.• Podaj wzór jakiejkolwiek funkcji kwadratowej, która:
1) maleje w przedziale $(-\infty; 1]$ i rośnie w przedziale $[1; +\infty)$;
2) rośnie w przedziale $(-\infty; -2]$ i maleje w przedziale $[-2; +\infty)$.

11.23.• Oblicz najmniejszą wartość funkcji $y = 3x^2 - 18x + 2$ w przedziale:
1) $[-1; 4]$; 2) $[-4; 1]$; 3) $[4; 5]$.

11.24.• Oblicz największą wartość funkcji $y = -x^2 - 8x + 10$ w przedziale:
1) $[-5; -3]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $[-11; -10]$.

11.25.• Dla jakich wartości p i q wykres funkcji $y = x^2 + px + q$ przechodzi przez punkty $M(-1; 4)$ i $K(2; 10)$?

11.26.• Dla jakich wartości a i b funkcja $y = ax^2 + bx + 7$ posiada miejsce zerowe równe -2 i 3?

11.27.• Dla jakich wartości a i b parabola $y = ax^2 + bx - 4$ przechodzi przez punkty $C(-3; 8)$ i $D(1; 4)$?

11.28.• Przyjmiemy, że D – wyróżnik trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$. Przedstaw schematycznie wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, jeżeli:

1) $a > 0$, $D > 0$, $c > 0$, $-\frac{b}{2a} > 0$;

2) $a > 0$, $D = 0$, $-\frac{b}{2a} < 0$;

3) $a < 0$, $D < 0$, $-\frac{b}{2a} > 0$;

4) $a < 0$, $c = 0$, $-\frac{b}{2a} < 0$.

11.29.• Przypuśćmy, że D – wyróżnik trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$. Przedstaw schematycznie wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$, jeżeli:

1) $a > 0$, $D < 0$, $-\frac{b}{2a} < 0$;

2) $a < 0$, $D > 0$, $c < 0$, $-\frac{b}{2a} > 0$;

3) $a < 0$, $D = 0$, $-\frac{b}{2a} < 0$.

11.30.• Dla jakiej wartości b przedział $(-\infty; 2]$ jest przedziałem, w którym funkcja $y = -4x^2 - bx + 5$ jest rosnąca?

11.31.• Dla jakiej wartości b przedział $(-\infty; -3]$ jest przedziałem, w którym funkcja $y = 3x^2 + bx - 8$ jest malejąca?

11.32.• Dla jakiej wartości a funkcja $y = ax^2 + (a - 2)x + \frac{1}{4}$ jest kwadratowa oraz jej wykres ma z osią odciętych tylko jeden wspólny punkt?

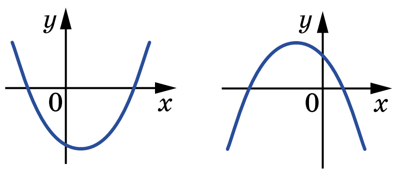
11.33.•• Dla jakiej wartości a funkcja $y = 0{,}5x^2 - 3x + a$ osiąga wartości nieujemne dla wszystkich wartości rzeczywistych x?

11.34.•• Dla jakiej wartości a funkcja $y = -4x^2 - 16x + a$ osiąga wartości ujemne dla wszystkich wartości rzeczywistych x?

11.35.•• Dla jakiej wartości c funkcja $y = -5x^2 + 10x + c$ osiąga największą wartość równą -3?

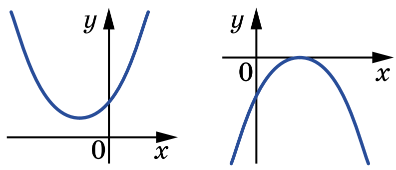
11.36.•• Dla jakiej wartości c funkcja $y = 0{,}6x^2 - 6x + c$ osiąga najmniejszą wartość równą -1?

11.37.•• Na rysunku 11.5 przedstawiono wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$. Podaj znaki współczynników a, b i c.



a *b*

Rys. 11.5



a *b*

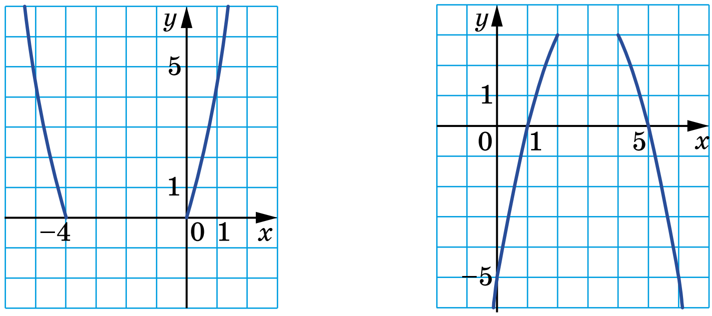
Rys. 11.6

11.38.•• Na rysunku 11.6 przedstawiono wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$. Podaj znaki współczynników a, b i c.

11.39.•• Dla jakich wartości p i q wierzchołek paraboli $y = x^2 + px + q$ leży w punkcie $A\ (2; 5)$?

11.40.•• Wierzchołek paraboli $y = ax^2 + bx + c$ jest w punkcie $C\ (4; -10)$ oraz ona przechodzi przez punkt $D\ (1; -1)$. Oblicz wartości współczynników a, b i c.

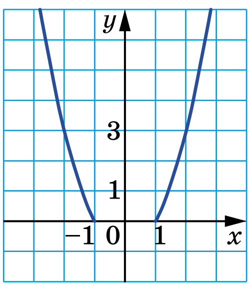
11.41.•• Oblicz rzędną wierzchołka paraboli, fragment której przedstawiono na rysunku 11.7.



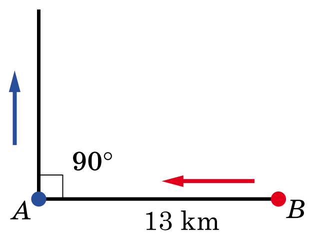
a *b*

Rys. 11.7

11.42.•• Oblicz rzędną wierzchołka paraboli, fragment której przedstawiono na rysunku 11.8.



Rys. 11.8



Rys. 11.9

11.43.•• Suma dwóch liczb jest równa 10. Oblicz:

1) największą wartość, jaką może osiągnąć suma kwadratów tych liczb;
2) najmniejszą wartość, jaką może osiągnąć suma kwadratów tych liczb.

11.44.•• Z punktu B do punktu A, odległość między którymi wynosi 13 km, wyruszył turysta z prędkością 6 km/h. Jednocześnie z punktu A wyruszył drugi turysta w kierunku prostopadłym do drogi AB (rys. 11.9) z prędkością 4 km/h. Ile potrzeba czasu, od początku ruchu, aby odległość między turystami była najmniejszą?

11.45.•• Działkę ziemi o kształcie prostokątnym trzeba odrodzić parkanem o długości 160 m. Jakie największe pole może mieć ta działka?

11.46.•• Sporządź wykres funkcji:

1) $y = \dfrac{8x + 2x^2 - x^3}{x}$;

2) $y = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} - 3$;

3) $y = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$;

4) $y = \dfrac{x^4 + 4x^2 - 5}{x^2 - 1}$.

11.47.•• Sporządź wykres funkcji:

1) $y = \dfrac{(x+3)^3}{x + 3}$;

2) $y = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x}$;

3) $y = \dfrac{x^4 - 1}{1 - x^2}$.

11.48.•• Sporządź wykres funkcji:

1) $y = x \mid x \mid$;

2) $y = \dfrac{x}{|x|}(x^2 - x - 6)$;

3) $y = x^2 - 4 \mid x \mid + 3$;

4) $y = x^2 + 3x \cdot \dfrac{|x - 3|}{x - 3} - 4$.

11.49.•• Sporządź wykres funkcji:

1) $y = \dfrac{x^3}{|x|} + 4x$;

2) $y = 6 \mid x \mid - x^2$.

11.50.•• Sporządź wykres funkcji $y = x^2 + 2x - 3$. Korzystając ze sporządzonego wykresu, ustal, dla jakich wartości a równanie $x^2 + 2x - 3 = a$:

1) ma dwa pierwiastki;

2) ma jeden pierwiastek;

3) nie posiada pierwiastków.

11.51.•• Sporządź wykres funkcji $y = -x^2 - 4x + 5$. Korzystając ze sporządzonego wykresu, ustal, ile pierwiastków posiada równanie $-x^2 - 4x + 5 = a$ w zależności od wartości a.

11.52.* Przypuśćmy, że x_1 i x_2 – są zerami funkcji $y = -3x^2 - (3a - 2)x + 2a + 3$. Dla jakich wartości a spełnia się nierówność $x_1 < -2 < x_2$?

11.53.* Wiadomo, że x_1 i x_2 – są zerami funkcji $y = 2x^2 - (3a - 1)x + a - 4$, $x_1 < x_2$. Dla jakich wartości a liczba 1 należy do przedziału $[x_1; x_2]$?

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

11.54. Rozwiąż równania:

1) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;
2) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$;
3) $x^4 + 9x^2 + 8 = 0$;
4) $x^4 - 16x^2 = 0$.

11.55. Oblicz sumę i iloczyn pierwiastków równania:

1) $x^2 - 5x - 10 = 0$;
2) $2x^2 + 6x - 7 = 0$;
3) $-\frac{1}{3}x^2 + 8x - 1 = 0$.

11.56. Wykonaj działania:

1) $\frac{b+3}{b-3} + \frac{b-2}{b+2}$;
2) $\frac{p+4}{p-1} - \frac{p-20}{p+5}$;
3) $\frac{x}{2x+3} - \frac{x+1}{2x-3}$.

11.57. Uprość wyrażenia:

1) $\left(2\sqrt{a} + 3\sqrt{b}\right)\left(4a - 6\sqrt{ab} + 9b\right) - 9\sqrt{9b^3}$;
2) $\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{28} + 4\sqrt{63}\right)\cdot\sqrt{7} - \sqrt{126}$;
3) $\left(2 - \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)\left(2 + \sqrt{3} - \sqrt{6}\right)$.

11.58. Motorówka płynęła po rzece z jednej przystani do drugiej i powróciła za 2,5 h, tracąc na postój 25 min. Oblicz prędkość prądu rzeki, jeżeli prędkość motorówki wynosi 20 km/h, a odległość między przystaniami wynosi 20 km.

11.59. Jedna z dwóch rur może napełnić pojemnik wodą o 10 min prędzej od drugiej. Gdy otworzyć dwie rury jednocześnie, to one w ciągu 8 min napełnią $\frac{2}{3}$ zbiornika. Ile czasu potrzeba, aby napełnić ten pojemnik przez każdą rurę?

UCZYMY SIĘ NIESTANDARDOWEGO MYŚLENIA

11.60. Na tablicy jest zapisana liczba 1001. Dwaj gracze bawią się w następującą grę. Każdy z graczy po kolei ściera liczbę i zapisuje nową, która jest różnicą między startą liczbą a jej jakimkolwiek dzielnikiem. Przegrywa ten, w zapisie którego po wykonaniu odejmowania, okaże się liczba 0. Który z graczy wygra?

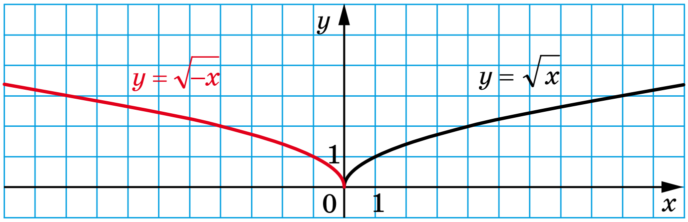
Niektóre przekształcania wykresów funkcji

Jak sporządzić wykres funkcji $y = f\,(-x)$, według znanego wykresu funkcji $y = f\,(x)$

Warto zaznaczyć, że gdy punkt $(x_0; y_0)$ leży na wykresie funkcji $y = f\,(x)$, to punkt $(-x_0; y_0)$ leży na wykresie funkcji $y = f\,(-x)$. Rzeczywiście, $f\,(-(-x_0)) = f\,(x_0) = y_0$.

Dlatego wszystkie punkty dla wykresu funkcji $y = f\,(-x)$ można otrzymać z wykresu funkcji $y = f\,(x)$ zamieniając każdy punkt na taki, w którym pozostaje niezmienną rzędną, lecz odcięta jest przeciwna[1].

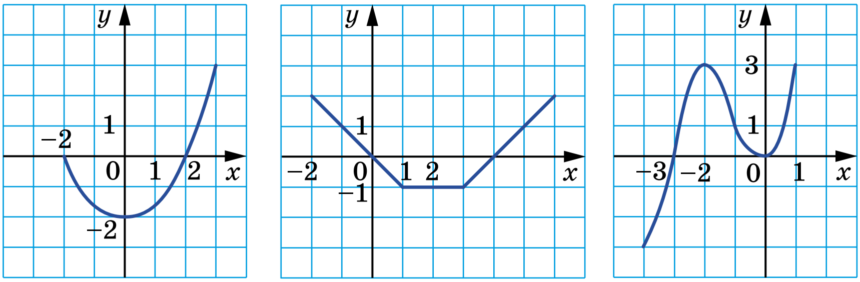
Na rysunku 11.10 przedstawiono w jaki sposób sporządzono wykres funkcji $y = \sqrt{x}$ za pomocą wykresu funkcji $y = \sqrt{-x}$.



Rys. 11.10

ĆWICZENIA

1. Korzystając z wykresu funkcji $y = f\,(x)$, przedstawionego na rysunku 11.11, sporządź wykres funkcji $y = f\,(-x)$.



a *b* *c*

Rys. 11.11

[1] Na lekcjach geometrii dowiecie się, że opisane przekształcenia wykresu funkcji $y = f\,(x)$ nazywa się symetrią osiową.

2. Sporządź wykres funkcji $y = \sqrt{x-2}$. Korzystając ze sporządzonego wykresu, sporządź wykres funkcji $y = \sqrt{-x-2}$.

Jak sporządzić wykres funkcji $y = f(|x|)$ według znanego wykresu funkcji $y = f(x)$

Korzystając z definicji modułu, zapiszemy:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{jeżeli } x \geqslant 0, \\ f(-x), & \text{jeżeli } x < 0. \end{cases}$$

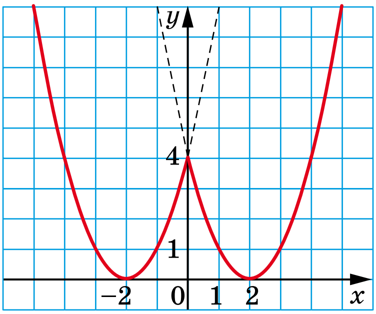
Stąd wnioskujemy, że wykres funkcji $y = f(|x|)$ dla $x \geqslant 0$ pokrywa się z wykresem funkcji $y = f(x)$, a dla $x < 0$, z wykresem funkcji $y = f(-x)$.

Wtedy sporządzenie wykresu funkcji $y = f(|x|)$ można wykonać według następującego schematu:

1) sporządzić tę część wykresu funkcji $y = f(x)$, wszystkie punkty której mają nieujemne odcięte;
2) sporządzić tę część wykresu funkcji $y = f(-x)$, wszystkie punkty której mają ujemne odcięte.

Łączność tych dwóch części i będzie wykresem funkcji $y = f(|x|)$.

Na rysunku 11.12 przedstawiono kolejność sporządzenia wykresu funkcji $y = (x-2)^2$ znając wykres funkcji $y = (|x| - 2)^2$.



Rys. 11.12

ĆWICZENIA

1. Korzystając z wykresu funkcji $y = f(x)$, przedstawionego na rysunku 11.11, sporządź wykres funkcji $y = f(|x|)$.

2. Korzystając z wykresu funkcji $y = x + 2$, sporządź wykres funkcji $y = |x| + 2$.

3. Sporządź wykres funkcji:

1) $y = |x| - 3$;

2) $y = x^2 - 4|x|$;

3) $y = x^2 + 2|x| - 3$;

4) $y = 2|x| - x^2$;

5) $y = \frac{4}{|x|}$;

6) $y = \frac{4}{|x|} - 2$;

7) $y = \frac{4}{|x| - 2}$;

8) $y = \sqrt{|x|}$.

Jak sporządzić wykres funkcji $y = |f(x)|$ według znanego wykresu funkcji $y = f(x)$

Dla funkcji $y = |f(x)|$ można zapisać:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{jeżeli } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{jeżeli } f(x) < 0. \end{cases}$$

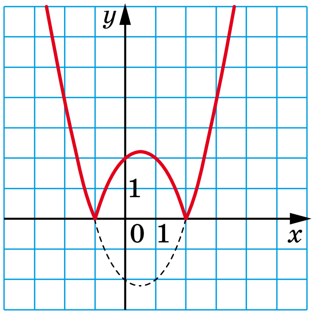
Stąd wynika, że wykres funkcji $y = |f(x)|$ dla wszystkich x, dla których $f(x) \geqslant 0$, pokrywa się z wykresem funkcji $y = f(x)$, a dla wszystkich x, dla których $f(x) < 0$, z wykresem funkcji $y = -f(x)$.

Wtedy sporządzenie wykresu funkcji $y = |f(x)|$ można wykonać według następującego schematu:

1) wszystkie punkty wykresu funkcji $y = f(x)$ o nieujemnych rzędnych pozostawić bez zmiany;

2) punkty o ujemnych rzędnych zamienić na punkty o jednakowych odciętych, lecz o przeciwnych rzędnych.

Na rysunku 11.13 przedstawiono, jak można sporządzić wykres funkcji $y = |x^2 - x - 2|$ za pomocą wykresu funkcji $y = x^2 - x - 2$.



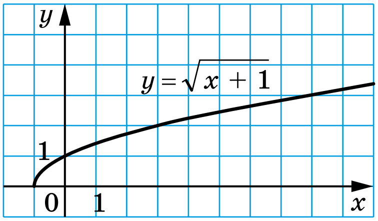
Rys. 11.13

PRZYKŁAD 1 Sporządź wykres funkcji $y = \left|\sqrt{|x|+1} - 2\right|$.

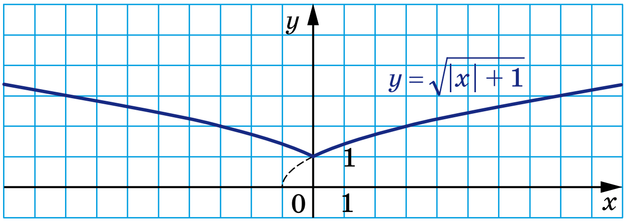
Rozwiązanie. Konstrukcję szukanego wykresu można wykonać według następującego schematu:

$$y = \sqrt{x+1} \to y = \sqrt{|x|+1} \to y = \sqrt{|x|+1} - 2 \to y = \left|\sqrt{|x|+1} - 2\right|$$

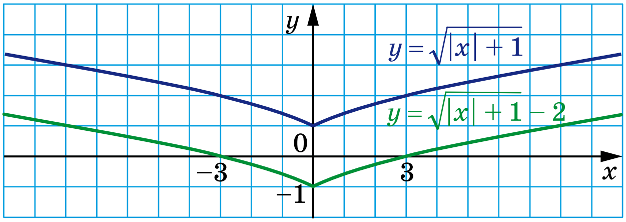
(rys. 11.14). ◀



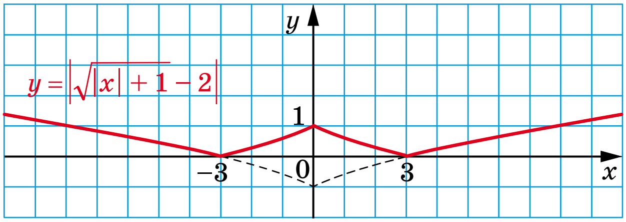
a



b



c



d

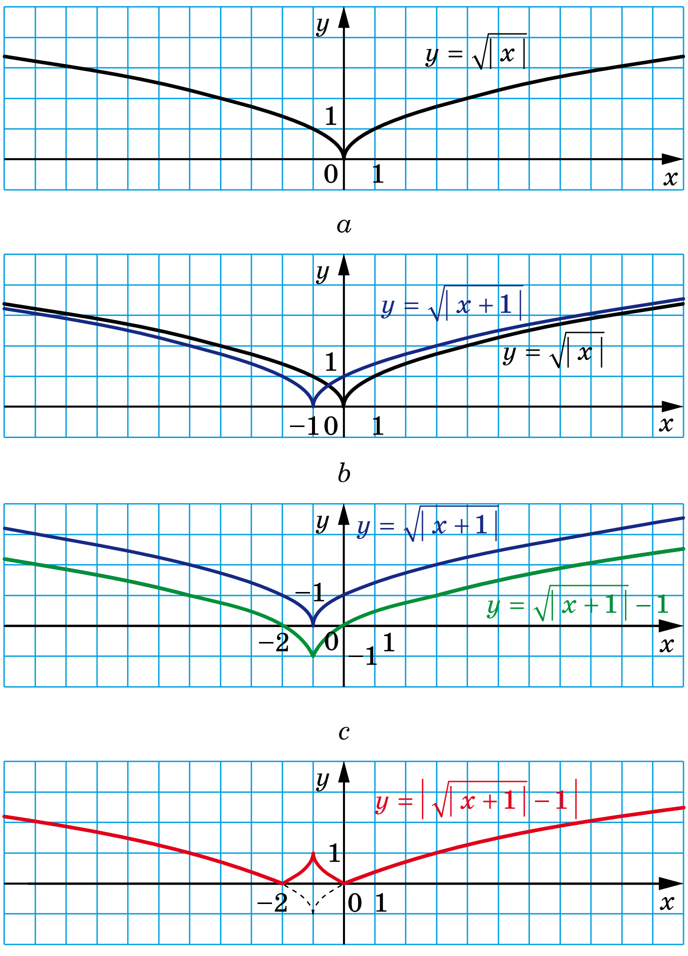
Rys. 11.14

PRZYKŁAD 2 Sporządź wykres funkcji $y=\left|\sqrt{|x+1|}-1\right|$.

Rozwiązanie. Konstrukcję szukanego wykresu można wykonać według następującego schematu:

$$\boxed{y=\sqrt{|x|}\to y=\sqrt{|x+1|}\to y=\sqrt{|x+1|}-1\to y=\left|\sqrt{|x+1|}-1\right|}$$

(rys. 11.15). ◀



Rys. 11.15

ĆWICZENIA

1. Korzystając z wykresu funkcji $y = f(x)$, przedstawionego na rysunku 11.11, sporządź wykres funkcji:

1) $y = |f(x)|$;
2) $y = |f(|x|)|$.

2. Korzystając z wykresu funkcji $y = x + 2$, sporządź wykres funkcji $y = |x + 2|$.

3. Sporządź wykres funkcji:

1) $y = |x - 3|$;
2) $y = |x^2 - 4x|$;
3) $y = |x^2 + 2x - 3|$;
4) $y = |2x - x^2|$;
5) $y = \left|\dfrac{4}{x} - 2\right|$;
6) $y = \left|\dfrac{4}{x - 2}\right|$.

4. Sporządź wykres funkcji:

1) $y = ||x| - 3|$;
2) $y = |x^2 - 4|x||$;
3) $y = |x^2 + 2|x| - 3|$;
4) $y = |2|x| - x^2|$;
5) $y = \left|\dfrac{4}{|x|} - 2\right|$;
6) $y = \left|\dfrac{4}{|x| - 2}\right|$.

5. Sporządź wykres funkcji:

1) $y = \sqrt{4 - |x|}$;
2) $y = 3 - \sqrt{4 - |x|}$;
3) $y = \left|3 - \sqrt{4 - |x|}\right|$;
4) $y = \sqrt{|4 - x|}$;
5) $y = 3 - \sqrt{|4 - x|}$;
6) $y = \left|3 - \sqrt{|4 - x|}\right|$.

ZADANIE TESTOWE № 2 “SPRAWDŹ SIEBIE”

1. Ile wynosi wartość funkcji $f(x) = 2x^2 - 1$ w punkcie $x_0 = -3$?

A) –19; C) 11;
B) –13; D) 17.

2. Pośród wymienionych funkcji wskaż kwadratową.

A) $y = 2x - 5$; C) $y = 2x^2 - 5$;
B) $y = 2\sqrt{x} - 5$; D) $y = \frac{2}{x^2} - 5$.

3. Dla której funkcji dziedziną określenia jest przedział $(-\infty; 6)$?

A) $y = \sqrt{6+x}$; C) $y = \frac{1}{\sqrt{6+x}}$;
B) $y = \frac{1}{\sqrt{6-x}}$; D) $y = \sqrt{6-x}$.

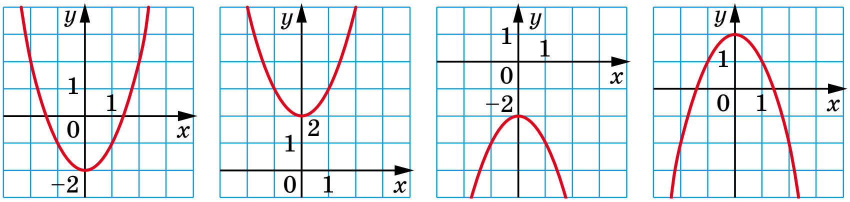
4. Jak należy zastosować równoległe przesunięcie dla wykresu funkcji $y = \frac{7}{x}$, aby otrzymać wykres funkcji $y = \frac{7}{x-5}$?

A) O 5 jednostek do góry wzdłuż osi rzędnych;
B) o 5 jednostek w lewo wzdłuż osi odciętych;
C) o 5 jednostek w prawo wzdłuż osi odciętych;
D) o 5 jednostek do dołu wzdłuż osi rzędnych.

5. Wykres funkcji $y = \sqrt{x}$ równolegle przesunięto o 2 jednostki w lewo i o 7 jednostek do dołu. Wykres jakiej funkcji otrzymano?

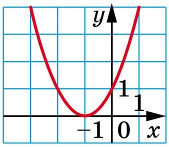
A) $y = \sqrt{x+2} - 7$; C) $y = \sqrt{x-2} + 7$;
B) $y = \sqrt{x-2} - 7$; D) $y = \sqrt{x+2} + 7$.

6. Na którym z rysunków przedstawiono wykres funkcji $y = -x^2 + 2$?



A) B) C) D)

7. Wykres jakiej funkcji przedstawiono na rysunku?

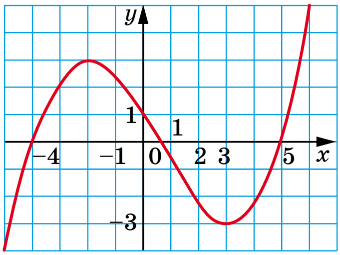


A) $y = x^2 - 1$;
B) $y = x^2 + 1$;
C) $y = (x - 1)^2$;
D) $y = (x + 1)^2$.

8. Wskaż współrzędne wierzchołka paraboli $y = 3\,(x - 4)^2 - 5$.

A) (4; 5); C) (4; –5);
B) (–4; 5); D) (–4; –5).

9. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = f\,(x)$, określonej na zbiorze liczb rzeczywistych. Korzystając z rysunku, wskaż przedział w którym funkcja jest malejąca.



A) [–4; 1]; C) [–2; 3];
B) [–3; 3]; D) [–3; 1].

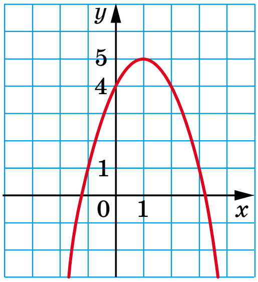
10. Podaj odciętą wierzchołka paraboli $y = 2x^2 - 12x + 3$.

A) 6; C) 3;
B) –6; D) –3.

11. Wierzchołek której z podanych funkcji, leży na osi odciętych?

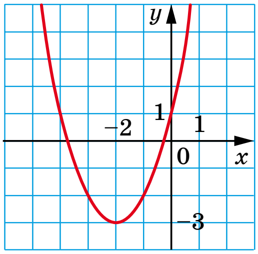
A) $y = x^2 - 6$; C) $y = (x - 6)^2$;
B) $y = x^2 - 6x$; D) $y = (x - 6)^2 + 2$.

12. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = -x^2 + 2x + 4$. Korzystając z rysunku, określ zbiór wartości funkcji.



A) $(-\infty; +\infty)$;
B) $(-\infty; 1]$;
C) $[1; +\infty)$;
D) $(-\infty; 5]$.

13. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = x^2 + 4x + 1$. Korzystając z rysunku, wskaż przedział, w którym funkcja jest rosnąca.



A) $(-\infty; -2]$;
B) $[-2; +\infty)$;
C) $[-3; +\infty)$;
D) wyznaczyć jest niemożliwym.

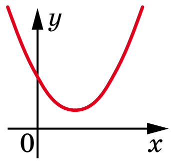
14. Podaj miejsca zerowe funkcji $y = 2x^2 + x - 6$.

A) –1,5; –2; C) –1,5; 2;
B) 1,5; 2; D) 1,5; –2.

15. Dla jakich wartości b i c wierzchołek paraboli $y = x^2 + bx + c$ leży w punkcie M (3; 8)?

A) $b = 6$, $c = –19$;
B) $b = –6$, $c = 17$;
C) $b = –3$, $c = 8$;
D) ne da się określić.

16. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$. Wskaż prawidłową wypowiedź, gdy D – wyznacznik trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$.



A) $b > 0$, $D > 0$;
B) $b > 0$, $D < 0$;
C) $b < 0$, $D < 0$;
D) $b > 0$, $D = 0$.

17. Dla jakiej wartości a funkcja $y = 3x^2 – 6x + a$ osiąga najmniejszą wartość równą 4?

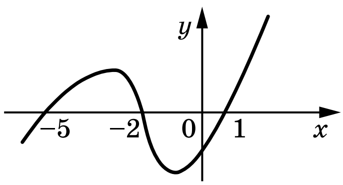
A) –5; B) 4; C) 7; D) 8.

18. Wiadomo, że $m – n = 8$. Określ zbiór wartości funkcji mn.

A) $[–16; +\infty)$;
B) $[8; +\infty)$;
C) $(–\infty; +\infty)$;
D) ne da się określić.

12. Rozwiązywanie nierówności kwadratowych

Na rysunku 12.1 przedstawiono wykres pewnej funkcji $y = f(x)$, dziedziną określenia której jest zbiór liczb rzeczywistych.



Rys. 12.1

Za pomocą tego wykresu łatwo określić przedziały stałego znaku funkcji f, a mianowicie: $y > 0$ w każdym z przedziałów $(-5; -2)$ i $(1; +\infty)$; $y < 0$ w każdym z przedziałów $(-\infty; -5)$ i $(-2; 1)$.

Po ustaleniu przedziałów stałego znaku funkcji f, możemy uważać, że rozwiązaliśmy nierówności $f(x) > 0$ i $f(x) < 0$.

Przedziały $(-5; -2)$ i $(1; +\infty)$ wzięte razem tworzą zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$. W takich przypadkach mówi się, że zbiorem rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ jest **połączenie** podanych przedziałów. Połączenie przedziałów oznacza się specjalnym symbolem $\geqslant$.

Wtedy zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$ można zapisać tak:

$$(-5; -2) \cup (1; +\infty).$$

Zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$ można zapisać następująco:

$$(-\infty; -5) \cup (-2; 1).$$

Taka metoda rozwiązywania nierówności $f(x) > 0$ i $f(x) < 0$ za pomocą wykresu funkcji $y = f(x)$ nazywa się metodą **graficzną**.

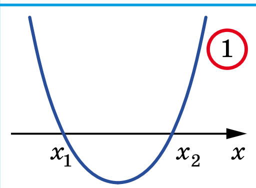
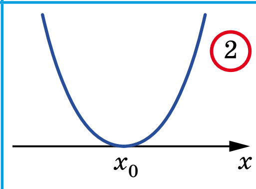
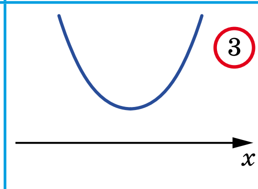
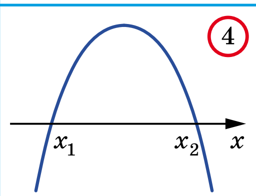
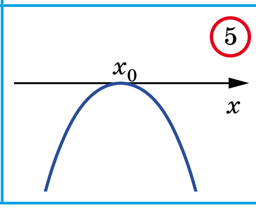
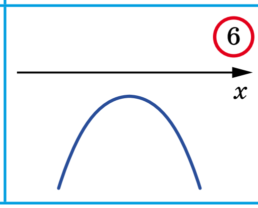
Pokażemy, jak za pomocą tej metody można rozwiązać nierówności kwadratowe.

Definicja. Nierówności postaci $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, gdzie x – zmienna, zaś a, b i c – dowolne liczby, przy czym $a \neq 0$, nazywa się nierównościami kwadratowymi.

Wyjaśnimy, w jaki sposób można poznać położenie wykresu funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ względem osi odciętych. Istnienie oraz ilość miejsc zerowych funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ można wyznaczyć za pomocą wyróżnika D trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$: jeżeli $D > 0$, to funkcja posiada dwa miejsca zerowe; jeżeli $D = 0$, to funkcja posiada jedno miejsce zerowe; jeżeli $D < 0$, to brak miejsc zerowych.

Znak pierwszego współczynnika trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ określa kierunek ramion paraboli $y = ax^2 + bx + c$. Gdy $a > 0$, to ramiona są skierowane do góry, gdy $a < 0$ – do dołu.

Schematyczne położenie paraboli $y = ax^2 + bx + c$ względem osi odciętych, w zależności od a i D podaje tabela (x_1 i x_2 – zera funkcji, x_0 – odcięta wierzchołka paraboli).

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a>0$			
$a<0$			

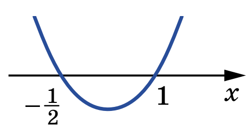
Objaśnimy, w jaki sposób można zastosować tę tabelę, przy rozwiązywaniu nierówności.

Przypuśćmy, że, na przykład, trzeba rozwiązać nierówność postaci $ax^2 + bx + c > 0$, gdzie $a < 0$ i $D > 0$. Kwadracik 4 w tabeli odpowiada tym warunkom. Wtedy oczywiście, odpowiedzią będzie przedział $(x_1; x_2)$, na którym wykres wymienionej nierówności funkcji kwadratowej będzie położony nad osią odciętych.

PRZYKŁAD 1 Rozwiąż nierówność $2x^2 - x - 1 > 0$.

Rozwiązanie. Dla trójmianu kwadratowego $2x^2 - x - 1$ mamy: $a = 2 > 0$, $D = 9 > 0$. Tym warunkom odpowiada kwadracik 1 w tabeli. Rozwiążemy równanie $2x^2 - x - 1 = 0$. Otrzymamy $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Wtedy schematycznie wykres funkcji $y = 2x^2 - x - 1$ można przedstawić tak, jak pokazano na rysunku 12.2.

Z rysunku 12.2 widzimy, że wymieniona funkcja kwadratowa osiąga wartości dodatnich w każdym z przedziałów $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ i $(1; +\infty)$.

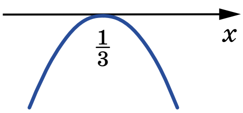


Rys. 12.2

Odpowiedź: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$. ◄

PRZYKŁAD 2 Rozwiąż nierówność $-9x^2 + 6x - 1 < 0$.

Rozwiązanie. Mamy: $a = -9$, $D = 0$. Tym warunkom odpowiada kwadracik 5 w tabeli. Ustalamy, że $x_0 = \frac{1}{3}$. Wtedy schemat wykresu funkcji $y = -9x^2 + 6x - 1$ można przedstawić tak, jak podano na rysunku 12.3.



Rys. 12.3

Z rysunku 12.3 widzimy, że rozwiązaniem nierówności będą wszystkie liczby, oprócz $\frac{1}{3}$.

Warto zwrócić uwagę, że tę nierówność można rozwiązać również innym sposobem. Zapiszemy daną nierówność w postaci: $9x^2 - 6x + 1 > 0$.

Wtedy $(3x - 1)^2 > 0$.

Stąd otrzymamy taki samy wynik.

Odpowiedź: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. ◀

PRZYKŁAD 3 Rozwiąż nierówność $3x^2 - x + 1 < 0$.

Rozwiązanie. Mamy: $a = 3 > 0$, $D = -11 < 0$. Tym warunkom odpowiada kwadracik 3 w tabeli. W tym przypadku wykres funkcji $y = 3x^2 - x + 1$ nie posiada punktów o rzędnej ujemnej.

Odpowiedź: brak rozwiązań. ◀

PRZYKŁAD 4 Rozwiąż nierówność $0{,}2x^2 + 2x + 5 \leqslant 0$.

Rozwiązanie. Ponieważ $a = 0{,}2$, $D = 0$, to w danym przypadku odpowiedź posiada kwadracik 2 w tabeli, przy czym $x_0 = -5$. Lecz w tym przypadku funkcja kwadratowa tylko osiąga nieujemne wartości. A więc, dana nierówność posiada tylko jedno rozwiązanie $x = -5$.

Odpowiedź: -5. ◀

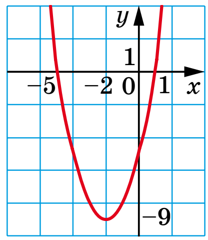
?

1. Za pomocą jakiego symbolu zapisuje się łączność przedziałów?
2. Jaka nierówność nazywa się kwadratową?
3. Jakie są możliwe przypadki położenia paraboli $y = ax^2 + bx + c$ względem osi odciętych w zależności od znaku a i D, gdzie D – wyróżnik trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$? Przedstaw schematy tych przypadków.

ĆWICZENIA

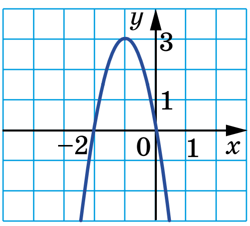
12.1.° Które z podanych liczb –2; 0; 1 są rozwiązaniem nierówności:
1) $x^2 - x - 2 < 0$; 2) $x^2 + x \geqslant 0$; 3) $-3x^2 - x + 2 > 0$?

12.2.° Na rysunku 12.4 przedstawiono wykres funkcji $y = x^2 + 4x - 5$. Podaj zbiór rozwiązań nierówności:
1) $x^2 + 4x - 5 < 0$; 3) $x^2 + 4x - 5 > 0$;
2) $x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$; 4) $x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$.

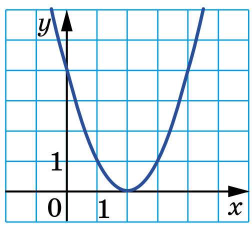


Rys. 12.4

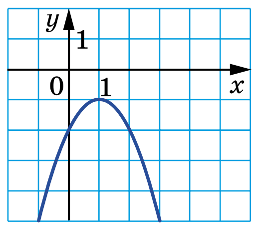
12.3.° Na rysunku 12.5 przedstawiono wykres funkcji $y = -3x^2 - 6x$. Podaj zbiór rozwiązań nierówności:
1) $-3x^2 - 6x < 0$; 3) $-3x^2 - 6x > 0$;
2) $-3x^2 - 6x \leqslant 0$; 4) $-3x^2 - 6x \geqslant 0$.



Rys. 12.5



Rys. 12.6



Rys. 12.7

12.4.° Na rysunku 12.6 przedstawiono wykres funkcji $y = x^2 - 4x + 4$. Podaj zbiór rozwiązań nierówności:
1) $x^2 - 4x + 4 < 0$; 3) $x^2 - 4x + 4 > 0$;
2) $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$; 4) $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$.

12.5.° Na rysunku 12.7 przedstawiono wykres funkcji $y = -x^2 + 2x - 2$. Podaj zbiór rozwiązań nierówności:
1) $-x^2 + 2x - 2 < 0$; 3) $-x^2 + 2x - 2 > 0$;
2) $-x^2 + 2x - 2 \leqslant 0$; 4) $-x^2 + 2x - 2 \geqslant 0$.

12.6.° Rozwiąż nierówność:
1) $x^2 + 6x - 7 < 0$; 5) $3x^2 - 7x + 4 \leqslant 0$;
2) $x^2 - 2x - 48 \geqslant 0$; 6) $2x^2 + 3x + 1 > 0$;
3) $-x^2 - 6x - 5 > 0$; 7) $4x^2 - 12x \leqslant 0$;
4) $-x^2 + 4x - 3 < 0$; 8) $4x^2 - 9 > 0$;

9) $x^2 - 12x + 36 > 0$;
10) $4x^2 - 12x + 9 \geqslant 0$;
11) $x^2 + 4x + 4 < 0$;
12) $49x^2 - 14x + 1 \leqslant 0$;
13) $2x^2 - x + 3 > 0$;
14) $3x^2 - 4x + 5 \leqslant 0$;
15) $-4x^2 + 5x - 7 > 0$;
16) $-2x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$.

12.7.° Rozwiąż nierówność:

1) $x^2 + 4x + 3 > 0$;
2) $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 12x + 45 < 0$;
4) $-3x^2 - 5x - 2 \geqslant 0$;
5) $x^2 - 5x > 0$;
6) $-25x^2 + 16 \leqslant 0$;
7) $5x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$;
8) $-3x^2 + 6x - 4 > 0$;
9) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \leqslant 0$;
10) $-x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{36} > 0$;
11) $2x^2 - 2x + 0{,}5 < 0$.

12.8.° Podaj zbiór rozwiązań nierówności:

1) $x^2 \leqslant 49$; 2) $x^2 > 5$; 3) $7x^2 \leqslant 4x$; 4) $0{,}9x^2 < -27x$.

12.9.° Podaj zbiór rozwiązań nierówności:

1) $x^2 > 1$; 2) $x^2 < 3$; 3) $-3x^2 \geqslant -12x$; 4) $-2x^2 < -128$.

12.10.• Rozwiąż nierówność:

1) $x(x + 5) - 2 < 4x$;
2) $11 - (x + 1)^2 \leqslant x$;
3) $(2x + 1)^2 - (x + 1)(x - 7) \leqslant 5$;
4) $5x(x + 4) - (2x - 3)(2x + 3) > 30$;
5) $(3x - 7)(x + 2) - (x - 4)(x + 5) > 30$;
6) $\frac{2x^2 - 1}{4} - \frac{3 - 4x}{6} + \frac{8x - 5}{8} \leqslant \frac{19}{24}$.

12.11.• Rozwiąż nierówność:

1) $2(x^2 + 2) \geqslant x(x + 5)$;
2) $x - (x + 4)(x + 5) > -5$;
3) $(6x - 1)(6x + 1) - (12x - 5)(x + 2) < 7 - 3x$;
4) $\frac{x - 1}{4} - \frac{2x - 3}{2} < \frac{x^2 + 3x}{8}$.

12.12.• Przy jakich wartościach x:

1) wartość trójmianu $-3x^2 + 6x + 1$ jest większa od $-\frac{4}{3}$;

2) wartość trójmianu $-5x^2 + 11x + 2$ jest nie większa od $-\frac{2}{5}$?

12.13.• Przy jakich wartościach x:

1) wartość trójmianu $x^2 - 2x - 11$ jest mniejsza od $\frac{1}{4}$;

2) wartość trójmianu $-3x^2 + 8x + 6$ nie jest mniejsza od $-\frac{2}{3}$?

12.14.• Dla jakich wartości argumentu wartości funkcji

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 9$$

są większe od odpowiednich wartości funkcji $y = 2x - 1$?

12.15.• Dla jakich wartości argumentu wartości funkcji

$$y = \frac{3}{2}x^2 - 7x + 1$$

są mniejsze od odpowiednich wartości funkcji $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4$?

12.16.• Znajdź całkowite rozwiązania nierówności:

1) $x^2 + 5x \leqslant 0$;
2) $x^2 - 10 < 0$;
3) $6x^2 + x - 2 \leqslant 0$;
4) $-\frac{1}{4}x^2 + x + 3 > 0$.

12.17.• Ile całkowitych rozwiązań nierówności posiada nierówność:

1) $20 - 8x - x^2 > 0$;
2) $4x^2 - 15x - 4 < 0$?

12.18.• Podaj najmniejsze całkowite rozwiązanie nierówności:

1) $42 - x^2 - x > 0$;
2) $2x^2 - 3x - 20 < 0$.

12.19.• Podaj największe całkowite rozwiązanie nierówności:

1) $1{,}5x^2 - 2x - 2 < 0$;
2) $-2x^2 - 15x - 25 \geqslant 0$.

12.20.• Ułóż dowolną nierówność kwadratową, zbiorem rozwiązań której:

1) jest łączność przedziałów $(-\infty; -4)$ i $(8; +\infty)$;
2) jest przedział $[-2; 9]$;
3) talko jedna liczba 7.

12.21.• Podaj dziedzinę określenia funkcji:

1) $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$;
2) $y = \sqrt{2x^2 + 5x - 3}$;
3) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}$;
4) $y = \frac{x + 2}{\sqrt{6x - 2x^2}}$.

12.22.• Podaj zbiór wartości wyrażenia:

1) $\sqrt{2x^2 - 9x - 18}$;
2) $\frac{1}{\sqrt{15 + 2x - x^2}}$.

12.23.• Czy nierówności są równoważne:

1) $x^2 - 2x - 15 > 0$ i $x^2 - 2x - 15 \geqslant 0$;

2) $\frac{1}{x^2 - x - 20} < 0$ i $\frac{1}{x^2 - x - 20} \leqslant 0$;

3) $x^2 - 6x + 10 > 0$ i $-x^2 + x - 1 \leqslant 0$;

4) $x^2 + 2x + 3 < 0$ i $-2x^2 - 4 > 0$?

12.24.• Dla jakich wartości a równanie nie posiada pierwiastków:

1) $x^2 - ax + 4 = 0$;

2) $x^2 + (a - 2)x + 25 = 0$;

3) $4{,}5x^2 - (4a + 3)x + 3a = 0$?

12.25.• Dla jakich wartości b równanie posiada dwa różne pierwiastki:

1) $x^2 - 8bx + 15b + 1 = 0$;

2) $2x^2 + 2(b - 6)x + b - 2 = 0$?

12.26.•• Rozwiąż układ nierówności:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leqslant 0, \\ x > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 - 11x - 6 \geqslant 0, \\ x + 4 \geqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 9x - 10 \leqslant 0, \\ 6x - x^2 < 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x^2 + 3x - 10 < 0. \end{cases}$

12.27.•• Rozwiąż układ nierówności:

1) $\begin{cases} -6x^2 + 13x - 5 \leqslant 0, \\ 6 - 2x > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 7x - 18 < 0, \\ 5x - x^2 \leqslant 0. \end{cases}$

12.28.•• Znajdź rozwiązania całkowite układu nierówności:

1) $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 18 \geqslant 0, \\ x^2 + 4x - 5 \leqslant 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - (\sqrt{5} - 3)x - 3\sqrt{5} \leqslant 0, \\ x^2 + x > 0. \end{cases}$

12.29.•• Wskaż dziedzinę określenia funkcji:

1) $y = \frac{5}{\sqrt{x^2 - 4x - 12}} + \sqrt{x + 1}$;

2) $y = \frac{x - 3}{\sqrt{18 + 3x - x^2}} + \frac{8}{x - 5}$;

3) $y = \sqrt{x^2 - 5x - 14} - \frac{9}{x^2 - 81}$;

4) $y = \frac{1}{\sqrt{6 - 7x - 3x^2}} + \frac{2}{\sqrt{x + 1}}$.

12.30.•• Wskaż dziedzinę określenia funkcji:

1) $y = \sqrt{20 + 4x - 3x^2} + \frac{3}{\sqrt{8 - 4x}}$;

2) $y = \frac{x + 5}{\sqrt{35 + 2x - x^2}} + \frac{x - 1}{|x| - 6}$.

12.31.•• Podaj zbiór rozwiązań nierówności:

1) $x^2 - 8|x| - 33 < 0$;

2) $8x^2 + 7|x| - 1 \geqslant 0$.

12.32.•• Podaj zbiór rozwiązań nierówności:

1) $5x^2 - 7|x| + 2 \geqslant 0$;

2) $x^2 + 10|x| - 24 \leqslant 0$;

12.33.•• Rozwiąż nierówność:

1) $|x| \cdot (x^2 + 3x - 10) < 0$;
2) $\sqrt{x}\,(x^2 + 2x - 8) \leqslant 0$;
3) $(x - 2)^2\,(x^2 - 8x - 9) < 0$;
4) $(x + 5)^2\,(x^2 - 2x - 15) > 0$;
5) $\dfrac{x^2 + 7x - 8}{(x - 4)^2} \geqslant 0$;
6) $\dfrac{x^2 + 10x - 11}{(x + 3)^2} \leqslant 0$.

12.34.•• Rozwiąż nierówność:

1) $|x| \cdot (x^2 - 5x + 6) > 0$;
2) $\sqrt{x}\,(x^2 + 6x - 40) > 0$;
3) $(x + 3)^2\,(x^2 - x - 6) > 0$;
4) $\dfrac{3x^2 - 8x - 3}{(x - 1)^2} \leqslant 0$.

12.35.* Rozwiąż nierówność:

1) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} > 0$;
2) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} \geqslant 0$;
3) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} < 0$;
4) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} \leqslant 0$.

12.36.* Rozwiąż nierówność:

1) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} > 0$;
2) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} \geqslant 0$;
3) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} < 0$;
4) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} \leqslant 0$.

12.37.* Dla jakich wartości a dana nierówność spełnia się dla wszystkich rzeczywistych wartości x:

1) $x^2 - 4x + a > 0$;
2) $x^2 + (a - 1)x + 1 - a - a^2 \geqslant 0$;
3) $-\dfrac{1}{4}x^2 + 5ax - 9a^2 - 8a < 0$;
4) $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a + 1 > 0$?

12.38.* Dla jakich wartości a nierówność nie posiada rozwiązania:

1) $-x^2 + 6x - a > 0$;
2) $x^2 - (a + 1)x + 3a - 5 < 0$;
3) $ax^2 + (a - 1)x + (a - 1) < 0$?

12.39.* Dla każdej wartości a rozwiąż układ nierówności:

1) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0, \\ x > a; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 4x^2 - 3x - 1 \leqslant 0, \\ x < a. \end{cases}$

12.40.* Dla każdej wartości a rozwiąż układ nierówności:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 72 < 0, \\ x > a; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2 - 9x + 8 > 0, \\ x < a. \end{cases}$

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

12.41. Uprość wyrażenie:

1) $\dfrac{x^2+3xy}{x+6} : \dfrac{x^2-9y^2}{2x+12}$;

2) $\dfrac{4a^2-12ab+9b^2}{2a^2-8b^2} \cdot \dfrac{2a^2-8ab+8b^2}{6a-9b}$.

12.42. Oblicz wartość wyrażenia, zastosowując własności arytmetycznego pierwiastka kwadratowego:

1) $\sqrt{20\cdot 66\cdot 330}$;

2) $\sqrt{3^5\cdot 12^3}$;

3) $2\sqrt{18}\cdot 3\sqrt{30}\cdot 5\sqrt{15}$;

4) $6\sqrt{10}\cdot\sqrt{45}\cdot\sqrt{50}$.

12.43. Pierwsza brygada może zebrać urodzaj za 12 dni. Druga brygada, wykonując tę samą pracę zatraci 75 % tego czasu. Po 5 dni pracy pierwszej brygady do niej dołączyła się druga brygada i one razem zakończyły pracę. Ile dni brygady pracowały razem?

12.44. Podczas pierwszego wyjazdu samochód zużył 10 % benzyny, którą miał w baku, a podczas drugiego – 25 % reszty. Wtedy w baku pozostało o 13 l benzyny mniej niż było na początku. Ile litrów benzyny było w baku przed pierwszym wyjazdem?

PRZYGOTOWUJEMY SIĘ DO NOWEGO TEMATU

12.45. Czy para liczb (2; –3) będzie rozwiązaniem równania:

1) $4x - 3y = 17$; 2) $x^2 + 5 = y^2$; 3) $xy = 6$?

12.46. Wykres równania $5x - y = 2$ przechodzi przez punkt A (4; b). Wyznacz wartość b?

12.47. Sporządź wykres równania:

1) $4x + y = 3$;

2) $2x - 3y = 6$;

3) $xy = -8$;

4) $(x-2)^2 + y^2 = 0$;

5) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$;

6) $x^2 + y^2 = 4$;

7) $x^2 + 2x + y^2 - 6y + 10 = 0$;

8) $(x-3)(y-x) = 0$;

9) $\dfrac{y-x}{y^2-1} = 0$.

12.48. Która z podanych par (–2; 1), (2; –1), (6; 4) jest rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} 3x - 8y = -14, \\ 4x + y = 28? \end{cases}$

12.49. Rozwiąż układ równań graficznie:

1) $\begin{cases} x - 2y = 1, \\ y - x = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = -5, \\ 4x - y = -5. \end{cases}$

12.50. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} 2x + y = 10, \\ 4x - 7y = 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x - 9y = 11, \\ 7x + 9y = 25; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4y - x = 11, \\ 5x - 2y = 17; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ 12x + 7y = -26. \end{cases}$

13. Układ równań z dwiema zmiennymi

W klasie 7. zapoznaliście się z graficzną metodą rozwiązywania układów równań. Przypominamy, że sens jej polega na tym, że w układzie współrzędnych szukamy wspólnych punktów wykresów równań, wchodzących do tego układu. Na lekcjach z geometrii dowiedzieliście się, że wykresem równania $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, gdzie $R > 0$, jest okrąg o promieniu R i o środku $(a; b)$. Już umiecie sporządzać wykres funkcji kwadratowej. Wszystkie te wiadomości umożliwiają zastosowanie graficznej metody do rozwiązywania układu równań.

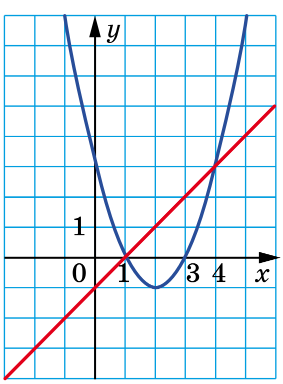
PRZYKŁAD 1 Rozwiąż układ równań graficznie

$$\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Pierwsze równanie danego układu jest równoważne następującemu równaniu: $y = x^2 - 4x + 3$. Wykresem jego jest parabola, przedstawiona na rysunku 13.1.

Wykresem drugiego równania jest prosta, która przecina sporządzoną parabolę w dwóch punktach: (1; 0) i (4; 3) (patrz rys. 13.1).

Wiadomo, że graficzna metoda nie daje gwarancji, że otrzymany wynik jest zawsze



Rys. 13.1

dokładny. Dlatego otrzymane rozwiązania należy sprawdzić. Sprawdzian potwierdza, że pary liczb (1; 0) i (4; 3) na prawdę są rozwiązaniami układu.

Odpowiedź: (1; 0), (4; 3). ◀

Zauważymy, że ten układ jest "wygodnie" stosować do metody graficznej: współrzędne punktów przecięcia wykresów okazały się liczbami całkowitymi. Oczywiście, że taka sytuacja powstaje się nie zawsze. Dlatego, graficzna metoda jest skuteczna wtedy, gdy należy określić ilość rozwiązań lub wystarczy znaleźć ich przybliżoną wartość.

Rozpatrywany układ można rozwiązać, nie sporządzając wykresów równań. Przygotowując się do tego tematu, należy powtórzyć **metodę podstawienia** do rozwiązywania układów równań liniowych. Metoda ta jest skuteczna przy rozwiązywaniu o wiele trudniejszych układów, w których tylko jedno równanie jest liniowym, oraz dla innych układów, które wcale nie posiadają równań liniowych.

Rozwiążemy układ $\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0 \end{cases}$ metodą podstawienia.

Z drugiego równania układu wyrazimy zmienną y przez zmienną x:

$$y = x - 1.$$

W pierwszym równaniu podstawimy zamiast y wyrażenie $x - 1$:

$$x^2 - 4x - (x - 1) + 3 = 0.$$

Wtedy otrzymaliśmy równanie z jedną zmienną. Po przekształceniu jego, otrzymamy równanie kwadratowe $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Stąd $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Wartości y, które odpowiadają otrzymanym wartościom x, możemy znaleźć z równania $y = x - 1$. Otrzymamy:

$$y_1 = 1 - 1 = 0,\ y_2 = 4 - 1 = 3.$$

A więc, jeszcze raz przekonaliśmy się, że pary liczb (1; 0) i (4; 3) są rozwiązaniami rozpatrywanego układu równań.

PRZYKŁAD 2 Podaj ilość rozwiązywań układu równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$$

Rozwiązanie. Wykresem pierwszego równania z danego układu jest okrąg o promieniu 3 i o środku (0; 0).

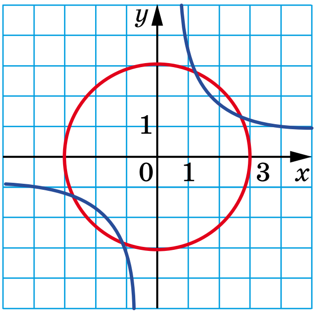
Drugie równanie jest równoważne następującemu: $y = \dfrac{3{,}5}{x}$. Wykresem tego równania jest hiperbola.

Na jednam układzie współrzędnych przedstawimy okrąg i hiperbolę (rys. 13.2). Widzimy, że wykresy ich przecinają się w czterech punktach. A więc, układ posiada cztery rozwiązania. ◀

Za pomocą rysunku 13.2 można określić przybliżoną wartość rozwiązań danego układu.

Nie zwracając się do graficznej metody, można znaleźć dokładne wartości rozwiązań układu równań.

Przygotowując się do tego tematu, powtórzyliście **metodę przeciwnych współczynników** do rozwiązania układów równań liniowych. Pokażemy, że ta metoda "pracuje" przy rozwiązywaniu skomplikowanych układów równań.



Rys. 13.2

Drugie równanie wyżej rozpatrywanego układu pomnożymy przez 2.

Otrzymamy: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 2xy = 7. \end{cases}$

Dodamy obustronnie lewe i prawe strony równań. Otrzymamy: $x^2 + y^2 + 2xy = 16$. Stąd $(x + y)^2 = 16$; $x + y = 4$ lub $x + y = -4$.

Zatem, zrozumiałe jest, że dla rozwiązania wymienionego wyżej układu wystarczy rozwiązać o wiele lżejsze dwa układy.

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 2xy = 7. \end{cases}$ Stąd $\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x(4 - x) = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x^2 - 8x + 7 = 0. \end{cases}$

Po rozwiązaniu drugiego równania z układu, otrzymamy:

$x_1 = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$. Wtedy $y_1 = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$, $y_2 = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$.

2) $\begin{cases} x + y = -4, \\ 2xy = 7. \end{cases}$ Stąd $\begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x(-4 - x) = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x^2 + 8x + 7 = 0. \end{cases}$

Po rozwiązaniu drugiego równania z układu, otrzymamy:

$x_3 = \frac{-4 - \sqrt{2}}{2}$, $x_4 = \frac{-4 + \sqrt{2}}{2}$.

Wtedy $y_3 = \frac{-4 + \sqrt{2}}{2}$, $y_4 = \frac{-4 - \sqrt{2}}{2}$.

Odpowiedź: $\left(\frac{4 - \sqrt{2}}{2}; \frac{4 + \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{4 + \sqrt{2}}{2}; \frac{4 - \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{-4 - \sqrt{2}}{2}; \frac{-4 + \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{-4 + \sqrt{2}}{2}; \frac{-4 - \sqrt{2}}{2}\right)$. ◄

Oczywiście, że znaleźć takie rozwiązania metodą graficzną jest niemożliwie.

W klasie 8. zapoznaliście się z **metodą zamiany zmiennych** dla rozwiązywania równań. Tą metodę zastosowuje się również dla rozwiązywania wielu układów równań.

PRZYKŁAD 3 Rozwiąż układ równań $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2}, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że $\dfrac{x+y}{x-y}=t$. Wtedy $\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{1}{t}$.

Wtedy pierwsze równanie można zapisać w taki sposób:

$$t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}.$$

Stąd $2t^2-5t+2=0$; $t_1=2,\ t_2=\dfrac{1}{2}$.

Aby rozwiązać dany układ, wystarczy rozwiązać dwa o wiele lżejsze układy.

1) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=2, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$ Stąd $\begin{cases} x+y=2x-2y, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3y, \\ 10y^2=10. \end{cases}$

Z drugiego równania układu otrzymamy, że: $y_1=1$, $y_2=-1$.
Wtedy $x_1=3$, $x_2=-3$.

2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{1}{2}, \\ x^2+y^2=10. \end{cases}$ Stąd $\begin{cases} 2x+2y=x-y, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3y, \\ 10y^2=10. \end{cases}$

Z drugiego równania układu otrzymamy, że: $y_3=1$, $y_4=-1$.
Wtedy $x_3=-3$, $x_4=3$.

Odpowiedź: (3; 1), (–3; –1), (–3; 1), (3; –1). ◄

PRZYKŁAD 4 Rozwiąż układ równań $\begin{cases} 2x+2y+xy=8, \\ x^2+y^2+3x+3y=14. \end{cases}$

Rozwiązanie. Zwróć uwagę, że dany układ równań nie zmieni się, jeżeli wprowadzimy zamianę x na y, zaś y na x. W takim przypadku warto zastosować następującą zamianę $x+y=u$, $xy=v$.

Zapiszemy dany układ w postaci:

$$\begin{cases} 2(x+y)+xy=8, \\ (x+y)^2-2xy+3(x+y)=14. \end{cases}$$

Zastosujemy wyżej wymienioną zamianę, wtedy otrzymamy układ:

$$\begin{cases} 2u + v = 8, \\ u^2 - 2v + 3u = 14. \end{cases}$$

Układ ten można rozwiązać metodą podstawienia (wykonaj to samodzielnie). Wtedy otrzymamy:

$$\begin{cases} u = 3, \\ v = 2 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} u = -10, \\ v = 28. \end{cases}$$

Pozostało rozwiązać dwa układy:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2 \end{cases} \text{ i } \begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 28. \end{cases}$$

Każdy z układów można rozwiązać metodą podstawienia. Lecz zręcznie jest zastosować twierdzenie odwrotne do twierdzenia Vietea. Wtedy, dla układu $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2 \end{cases}$ można uważać, że x i y – to pierwiastki równania kwadratowego $t^2 - 3t + 2 = 0$. Stąd $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. A więc, pary liczb (1; 2) i (2; 1) są rozwiązaniami tego układu.

Zastosowując twierdzenie, odwrotne do twierdzenia Vietea, lekko przekonać się (wykonaj to samodzielnie), że układ $\begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 28 \end{cases}$ nie posiada rozwiązań.

Odpowiedź: (1; 2), (2; 1). ◄

?

1. Jakie znasz metody rozwiązywania układów równań?

2. Uzasadnij, na czym polega metoda graficzna dla rozwiązywania układu równań.

3. W jakim przypadku metoda graficzna jest skuteczna?

ĆWICZENIA

13.1.° Rozwiąż układ równań graficznie:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y + x^2 = 3, \\ y = x - 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12. \end{cases}$

13.2.° Rozwiąż układ równań graficznie:

1) $\begin{cases} y = x + 2, \\ xy = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ 2x + y = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9. \end{cases}$

13.3.° Rozwiąż układ równań metodą podstawienia:

1) $\begin{cases} y = x + 3, \\ x^2 - 2y = 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x = 2, \\ x^2 - 2xy = 3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = 15, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 4y = 2, \\ xy + 2y = 8; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$

13.4.° Rozwiąż układ równań metodą podstawienia:

1) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 28; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - 2x^2 = 2, \\ 3x + y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 - x = 14, \\ x - y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 8, \\ x + y = 6. \end{cases}$

13.5.• Ustal graficznie ilość rozwiązań układu równań:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ y = x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = -6, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 2 - x^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ y = 6 - x^2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - 4x + y = -1, \\ xy = 4. \end{cases}$

13.6.• Ustal graficznie ilość rozwiązań układu równań:

1) $\begin{cases} y = (x - 5)^2, \\ xy = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x^2 = 1, \\ x^2 + y = 4x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - x = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ xy = 1. \end{cases}$

13.7.• Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} 3x + 4y = 24, \\ xy = 12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 5, \\ (x - 3)(y + 5) = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y + 2x = 0, \\ x^2 + y^2 - 6y = 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4y - 3x = 4, \\ 5x^2 + 16y = 60; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 19, \\ x - y = 7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 - x - 2y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$

13.8.• Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63, \\ y - x = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (x - 1)(y - 2) = 2, \\ x + y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x - 2y = 3, \\ 3x^2 - 8y = -5. \end{cases}$

13.9.$^\bullet$ Nie sporządzając wykresu, wskaż punkt przecięcia:

1) prostej $3x - y = 1$ i paraboli $y = 3x^2 + 8x - 3$;
2) prostej $2x - y = 2$ i hiperboli $y = \frac{4}{x}$;
3) prostej $x + y = 1$ i okręgu $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 16$;
4) paraboli $y = x^2 - 4x + 7$ i $y = 3 + 4x - 2x^2$.

13.10.$^\bullet$ Udowodnij, że prosta $y - x = 3$ jest styczną do okręgu $(x + 5)^2 + y^2 = 2$, i podaj współrzędne punktów przecięcia.

13.11.$^\bullet$ Udowodnij, że:

1) prosta $y = -2x - 4$ i parabola $y = 6x^2 - 7x - 2$ nie przecinają się;
2) parabola $y = 4x^2 - 3x + 6$ i prosta $y = x + 5$ mają jeden wspólny punkt, podaj współrzędne tego punktu;
3) parabole $y = 4x^2 - 3x - 24$ i $y = 2x^2 - 5x$ mają dwa wspólne punkty, podaj ich współrzędne.

13.12.$^\bullet$ Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 1, \\ x + 5y = 3. \end{cases}$

13.13.$^\bullet$ Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{2}, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{4}{5}, \\ 3x + y = 8. \end{cases}$

13.14.$^\bullet$ Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ xy(x + y) = 20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = \frac{21}{10}, \\ x + y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{6y}{x} = 5, \\ x^2 + 4xy - 3y^2 = 18; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{y}{x} + xy = -10, \\ \frac{5y}{x} - 2xy = 13; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2y^2 + xy = 6, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3(x + y)^2 + 2(x - 2y)^2 = 5, \\ 2(x - 2y) - x - y = 1. \end{cases}$

13.15.• Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2{,}5, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \frac{x-2y}{x+y} - \frac{x+y}{x-2y} = \frac{15}{4}, \\ 4x + 5y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 4, \\ \frac{1}{y} - \frac{2}{x} = 10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3}, \\ x^2 - y^2 = 72; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4(x-y)^2 + 7(x-y) = 15, \\ 2x + 5y = 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} (x-y)^2 + 2x = 35 + 2y, \\ (x+y)^2 + 2y = 3 - 2x. \end{cases}$

13.16.•• Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x + y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 28, \\ x^2 + xy + y^2 = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ xy = 12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 = 19, \\ xy = -6. \end{cases}$

13.17.•• Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 56, \\ x - y = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x^2 - y^2 = -4, \\ xy = 3. \end{cases}$

13.18.•• Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} 3y - 2xy = 2, \\ x + 2xy = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy + y = 30, \\ xy + x = 28; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 18, \\ x^2 - y^2 + x - y = 6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x^2 - 5xy + 3x - 2y = 10, \\ 5xy - 2x^2 + 7x - 8y = 10. \end{cases}$

13.19.•• Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ x + y + xy = 9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3xy + 2x = -4, \\ 3xy + y = -8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy - x = 24, \\ xy - y = 25; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 66, \\ 2x^2 - y^2 = 34. \end{cases}$

13.20.•• Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} x^2 - 12xy + 36y^2 = 36, \\ x + 6y = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 - 2xy = 32, \\ x^2 + 6xy + 9y^2 = 100; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 9x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -1. \end{cases}$

13.21.•• Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} x^2 + 10xy + 25y^2 = 49, \\ x - 5y = -3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + 4xy + 4y^2 = 4x + 2y, \\ x + 2y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 25y^2 = 104, \\ xy = -4. \end{cases}$

13.22.•• Dla jakich wartości a układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ x - y = a \end{cases}$

1) ma jedno rozwiązanie;
2) ma dwa rozwiązania;
3) nie ma rozwiązań?

13.23.•• Dla jakich wartości k układ równań $\begin{cases} y - x^2 = 4, \\ y = kx + 3 \end{cases}$

1) ma jedno rozwiązanie;
2) ma dwa rozwiązania;
3) nie ma rozwiązań?

13.24.* Ile rozwiązań ma układ równań w zależności od wartości a:

1) $\begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ |x| = 4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x = 1, \\ xy = a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a? \end{cases}$

13.25.* Ile rozwiązań ma układ równań w zależności od wartości a:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |y| = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a - |x|; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = 4? \end{cases}$

13.26.* Dane są dwa równania $ax^2 + x + 1 = 0$ i $x^2 + ax + 1 = 0$. Oblicz wszystkie wartości a, dla których równania mają chociażby jeden wspólny pierwiastek.

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

13.27. Udowodnij, że wartość wyrażenia $25^{10} - 5^{17}$ jest wielokrotnością liczby 31.

13.28. Uprość wyrażenie $\frac{5a+5}{a^2-a} : \left(\frac{a+3}{a^2-1} - \frac{1}{a^2+a}\right)$.

13.29. Rozwiąż układ nierówności:

$$\begin{cases} 2(x-3) \geqslant -3(x+2), \\ \frac{7x}{3} \leqslant 1 - \frac{x}{2}. \end{cases}$$

13.30. Wiadomo, że x_1 i x_2 – są pierwiastkami równania $x^2 + 6x - 2 = 0$. Oblicz wartość wyrażenia $x_1^2 + x_2^2$.

13.31. Skróć ułamek:

1) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{7\sqrt{3}-21}{14\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$.

PRZYGOTOWUJEMY SIĘ DO NOWEGO TEMATU

13.32. (*Ze starożytnego chińskiego traktatu "Dziewięć rozdziałów ze sztuki liczenia"*) 5 wołów i 2 barany kosztują 11 taelów, zaś 2 woły i 8 baranów – 8 taelów. Ile kosztuje osobno wół i baran?

13.33. (*Zadanie Leonardo z Pizzy* (*Fibonacci*)) Jeden mówi do drugiego: "Daj mnie 7 dinarów, wtedy będę 5 razy bogatszy od ciebie". A drogi mówi: "Daj mnie 5 dinarów, wtedy będę 7 razy bogatszy od ciebie". Ile pieniędzy ma każdy?

13.34. Ze wsi A do wsi B, odległych od siebie o 140 km, wyjechał motocyklista. 20 min przed tym ze wsi B do wsi A na spotkanie wyjechała rowerzystka, która spotkała się z motocyklistą po 2 h od czasu swego wyjazdu. Oblicz prędkość każdego, jeżeli motocyklista za 2 h przejeżdża o 104 km więcej, od rowerzystki za 4 h.

UCZYMY SIĘ NIESTANDARDOWEGO MYŚLENIA

13.35. Czy istnieje 100 liczb naturalnych takich, że jakakolwiek suma kilku z nich nie będzie kwadratem liczby naturalnej?

Pierwsza ogólnoukraińska olimpiada młodych matematyków

Spodziewamy się, że zadanie 13.26 podoba się wam, i odczuliście radość sukcesu, rozwiązując jego. Zadanie to warte uwagi, ponieważ w 1961 r. było zaproponowane uczestnikom pierwszej ogólnoukraińskiej olimpiady młodych matematyków.

Ogółem, olimpiady matematyczne na Ukrainie mają dawną tradycję. Pierwsza miejska olimpiada matematyczna odbyła się w 1935 r. w Kijowie. Od tego czasu minęło ponad 80 lat i w ciągu tego czasu olimpiady matematyczne stały dla utalentowanych uczniów pierwszym krokiem na drodze do naukowej twórczości. Dzisiaj, takie nazwiska, jak O. Pohoriełow, S. Krejn, M. Krasnosielskij, W. Drinfeld są znane całemu światu naukowemu. Wszyscy w różnych latach byli zwycięzcami olimpiad matematycznych na Ukrainie.

Z wielkim zadowoleniem chcemy podkreślić, że i w teraźniejszym czasie olimpiady matematyczne są bardzo popularne. Dziesiątki tysięcy uczniów naszego państwa w różnych etapach uczestniczą w tych zawodach matematycznych. Do organizacji i przeprowadzenia tych olimpiad są zatrudnieni najlepsi uczeni, metodyści, nauczyciele. Zawdzięczając ich entuzjazmu, profesjonalizmu drużyna Ukrainy godnie prezentowała nasze państwo na olimpiadach międzynarodowych.

Radzimy i wam, kochane dzieci uczestniczyć w olimpiadach matematycznych. Podamy wam niektóre zadania z pierwszej ogólnoukraińskiej olimpiady młodych matematyków. Spróbujcie swoje siły.

1. Równania $x^2 + ax + b = 0$ i $x^2 + px + q = 0$ mają wspólny pierwiastek. Ułóż równanie kwadratowe, pierwiastkami którego są pozostałe pierwiastki podanych wyżej równań.

2. Rozwiąż równanie $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$.

3. Odległość między A i B wynosi 999 km. Wzdłuż drogi są kilometrowe słupy, na jakiej odległości do A i do B jest napisane:

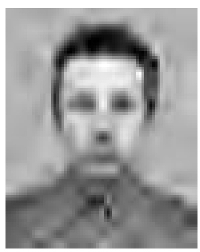
0	999	1	998	2	997	...	999	0

Z pośród nich, ile jest takich słupów aby na nich było tylko dwie różne cyfry?

Oleksyj Wasylowicz Pohorełow
(1919–2002)

Selim Hrygorowicz Krejn
(1917–1999)

Mark Oleksandrowicz Krasnoselkij
(1920–1997)



Wołodymyr Gerszonowicz Drinfeld
(1954 r. u.)

14. Układ równań z dwiema zmiennymi jako model matematyczny zadań stosowanych

Na pewno dzisiaj nie ma takiego rodzaju nauki, w którym nie zastosowuje się osiągnięcia w matematyce. Uczeni z różnych dziedzin, jak fizyki i chemii, astronomii i biologii, geografii i ekonomiki, nawet z historii i języków korzystają z języka matematyki.

Dmytro Oleksandrowicz Grawe
(1863 – 1939)

Na czym polega sekret uniwersalności “instrumentu matematycznego”?

“To klucz do rozwiązania do wielu naukowych zadań, ich prawidłowe tłumaczenie językiem matematyki”. W taki sposób na zadane pytanie odpowiedział jeden z założycieli i pierwszy dyrektor Instytutu matematyki Akademii nauk Ukrainy, akademik D. Grawe.

Oczywiście formułowanie zadań z różnych dziedzin nauki zawierają nie matematyczne pojęcia. Jeżeli matematyk uczestniczy w rozwiązaniu takiego zadania, to na początku on pragnie przekształcić go na swój zrozumiały “rodzimy” język matematyczny, a mianowicie, język wyrazów, wzorów, równań, nierówności, funkcji, wykresów itd. Proces takiej konstrukcji nazwano **modelem matematycznym**, zaś to zadanie – **zadaniem kluczowym**.

Termin “model” (od łac. *modulus* – wzorzec) zastosowuje się bardzo często: model samolotu, model jądra atomowego, model Układu Słonecznego, model jakiegoś procesu lub zjawiska i inne. Zapoznając się z własnościami modelu obiektu, zapoznajemy się ze samym obiektem.

Dział teorii matematyki, który zajmuje się konstrukcją oraz badaniem modeli matematycznych nazywa się **matematycznym modelowaniem**.

Rozpatrzymy zadania, w których układ równań drugiego stopnia zastosowuje się jako model matematyczny realnych sytuacji.

PRZYKŁAD 1 Z dwóch punktów, odległość między którymi wynosi 18 km, jednocześnie wyruszyły na spotkanie dwie turystki i spotkały się po 2 godz. Z jaką prędkością szła każda turystka, jeżeli na pokonanie całej drogi między punktami jednej z nich potrzeba o 54 min więcej, od drugiej?

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że prędkość pierwszej turystki jest równa x km/h, a drugiej y km/h, $x<y$. Zanim spotkały się pierwsza turystka przeszła $2x$ km, a druga $2y$ km. Razem one przeszły 18 km. Wtedy $2x + 2y = 18$.

Całą odległość między punktami pierwsza turystka przeszła za $\frac{18}{x}$ h, a druga za $\frac{18}{y}$ h. Ponieważ pierwszej turystce do przebycia tej odległości potrzeba więcej czasu o $54 \text{ min} = \frac{54}{60}\text{h} = \frac{9}{10}\text{h}$ od drugiej, to $\frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}$.

Otrzymaliśmy układ równań:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 18, \\ \frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}. \end{cases}$$

Wtedy $\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{2}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9 - y, \\ \frac{2}{9-y} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}. \end{cases}$

Rozwiązując drugie równanie z ostatniego układu, otrzymamy: $y_1 = 5$, $y_2 = -36$. Pierwiastek –36 nie odpowiada warunkowi zadania. A więc, $y = 5$, $x = 4$.

Odpowiedź: 4 km/h, 5 km/h. ◀

PRZYKŁAD 2 Dwaj robotników mogą wykonać pewną pracę za 10 dni. Po 6 dniach wspólnej pracy jednego z nich przeprowadzili na inną pracę, a drugi pracował dalej. Po 2 dniach pracy samodzielnej drugiego robotnika okazało się, że wykonano tylko $\frac{2}{3}$ całej pracy. Za ile dni każdy robotnik może wykonać tę pracę?

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że pierwszy robotnik może wykonać całą pracę za x dni, a drugi za y dni. Za 1 dzień pierwszy robotnik wykonuje $\frac{1}{x}$ części pracy, a za 10 dni $\frac{10}{x}$ części pracy. Drugi robotnik za 1 dzień wykonuje $\frac{1}{y}$ część pracy, a za 10 dni $\frac{10}{y}$ części pracy. Ponieważ w ciągu 10 dni wspólnej pracy robotnicy wykonają całą pracę, więc $\frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1$.

Pierwszy robotnik za 6 dni wykonał $\frac{6}{x}$ części pracy, a drugi robotnik pracował 8 dni i w ciągu tego czasu wykonał $\frac{8}{y}$ części pracy. Wówczas wykonano tylko $\frac{2}{3}$ pracy, to $\frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3}$.

Otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} \frac{10}{x}+\frac{10}{y}=1, \\ \frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3}, \end{cases}$$

rozwiązaniem którego jest para liczb $x = 15$, $y = 30$. Stąd wynika, że pierwszy robotnik może wykonać całą pracę w ciągu 15 dni, zaś drugi robotnik za 30 dni.

Odpowiedź: 15 dni, 30 dni. ◀

PRZYKŁAD 3 Podczas dzielenia liczby dwucyfrowej przez iloczyn jej cyfr otrzymuje się niepełny iloraz równy 5 i resztę równą 2. Różnica między początkową i liczbą, otrzymaną od zmiany jej cafr, wynosi 36. Podaj tę liczbę.

Rozwiązanie. Przyjmiemy, że szukana liczba zawiera x dziesiątek oraz y jednostek. Wtedy jej postać będzie $10x + y$. O ile przy dzieleniu tej liczby przez liczbę xy otrzymamy niepełny iloraz równy 5 i resztę 2, więc $10x + y = 5xy + 2$.

Liczba, otrzymana od zmiany cyfr w danej liczbie, jest równa $10y + x$. Według warunku $(10x + y) - (10y + x) = 36$.

Otrzymamy układ

$$\begin{cases} 10x+y=5xy+2, \\ (10x+y)-(10y+x)=36, \end{cases}$$

rozwiązaniem którego są dwie pary liczb: $x = 6$, $y = 2$ lub $x = 0{,}2$, $y = -3{,}8$. Lecz druga para liczb nie spełnia warunku zadania, a więc szukana liczba będzie 62.

Odpowiedź: 62. ◀

?

1. Co nazywa się modelem matematycznym?

2. Jakie zadanie nazywa się stosowanym?

3. Co nazywa się modelowaniem matematycznym?

ĆWICZENIA

14.1.° Różnica dwóch liczb naturalnych jest równa 3, zaś ich iloczyn jest o 87 większy od ich sumy. Znajdź te liczby.

14.2.° Różnica kwadratów dwóch liczb naturalnych jest równa 20, a suma liczby większej i podwojonej pozostałej liczby jest równa 14. Znajdź te liczby.

14.3.° 14.3. Działkę ziemi o kształcie prostokątnej, pole której jest 2400 m^2 zagrodzono parkanem o długości 220 m. Oblicz długość i szerokość działki.

14.4.° 14.4. Obwód prostokąta jest równy 32 cm, a suma pól kwadratów wykreślonych na sąsiednich bokach wynosi 130 cm^2. Oblicz boki prostokąta.

14.5.• Jaka liczba dwucyfrowa jest o 4 razy większa od sumy swoich cyfr i o 2 razy większa od ich iloczynu?

14.6.• Jeżeli pewną dwucyfrową liczbę podzielić przez sumę jej cyfr, to otrzymamy niepełny iloraz równy 7 i resztę 6, a gdy podzielić tę liczbę przez iloczyn jej cyfr, to otrzymamy niepełny iloraz równy 5 i resztę 2. Znajdź daną liczbę.

14.7.• Liczba dwucyfrowa jest o 7 razy większa od sumy swoich cyfr i o 52 większa od iloczynu jej cyfr. Znajdź tę liczbę.

14.8.• Różnica dwóch liczb naturalnych jest równa 12, zaś suma liczb odwrotnych do nich dorównuje $\frac{1}{8}$. Znajdź te liczby.

14.9.• Suma dwóch liczb naturalnych jest równa 15, zaś różnica liczb odwrotnych do nich jest równa $\frac{1}{18}$. Oblicz te liczby.

14.10.• W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest równa 13 cm, a jego pole – 30 cm^2. Oblicz długości przyprostokątnych trójkąta.

14.11.• Obwód trójkąta prostokątnego jest równy 40 cm, a jedna z przyprostokątnych – 8 cm. Znajdź drugą przyprostokątną i przeciwprostokątną.

14.12.• Pole prostokąta jest równe 180 cm^2. Jeżeli jeden z jego boków skrócić o 3 cm, zaś drugi – o 2 cm, to pole jego będzie równe 120 cm^2. Oblicz początkowe wymiary prostokąta.

14.13.• Jeżeli długość prostokąta skrócić o 3 cm, zaś szerokość zwiększyć o 2 cm, wtedy jego pole zwiększy się o 6 cm^2. Jeżeli długość prostokąta zmniejszyć o 5 cm, zaś szerokość zwiększyć o 3 cm, to pole prostokąta nie zmieni się. Oblicz boki danego prostokąta.

14.14.• Z prostokątnego arkusza blachy trzeba sporządzić otwarte pudełko. W tym celu w rogach prostokąta wycięto kwadraty o boku 4 cm. Oblicz długość i szerokość arkusza blachy, jeżeli obwód jego jest równy 60 cm, zaś objętość pudełka – 160 cm^3.

14.15.• Dwaj motocykliści wyjechali jednocześnie naprzeciw siebie z miasta A i B. Spotkali się po jednej godzinie i nie zatrzymując się nadal przedłużali jechać z tą samą prędkością. Jeden z nich przybył do miasta A o 35 min prędzej od drugiego, który przebył do miasta B. Oblicz prędkość każdego motocyklisty, jeżeli odległość między miastami wynosi 140 km.

14.16.• Ze stacji M do stacji N odległych od siebie o 300 km wyruszył pociąg towarowy. Po upływie 40 min ze stacji N do stacji M wyruszył pociąg pospieszny, który spotkał się z pociągiem towarowym po 2 godz. od czasu swego wyjazdu. Pociąg towarowy pokona odległość od miasta M do N o 3 godz. 20 min dłużej od pośpiesznego. Oblicz prędkość każdego pociągu.

14.17.• Z jednego miasta do drugiego, odległość między którymi wynosi 240 km wyjechali jednocześnie autobus i samochód. Autobus przybył do punktu przeznaczenia o 1 godz później od samochodu. Oblicz prędkość samochodu i prędkość autobusu, jeżeli w ciągu 2 godzin autobus przejeżdża o 40 km więcej niż samochód za jedną godzinę, zaś ich prędkości nie przewyższają 90 km/godz.

14.18.• Po kołowej trasie o długości 800 m w jednym kierunku jechali dwóch łyżwiarzy. Jeden łyżwiarz pokonuje koło w ciągu 24 sek. prędzej od drugiego łyżwiarza i dogania jego przez każde 8 min. Oblicz prędkość każdego łyżwiarza.

14.19.• Dwie brygady, pracując wspólnie, mogą wykonać pewną pracę w ciągu 8 dni. Gdy pierwsza brygada pracując samodzielnie wykona $\frac{1}{3}$ pracy, wtedy ją zamieni druga brygada, to zadanie będzie wykonane w ciągu 20 dni. W ciągu ilu dni każda brygada, pracując samodzielnie, może wykonać daną pracę?

14.20.• Dwie brygady, pracując wspólnie, mogą rozładować pociąg towarowy w ciągu 6 godz. Pierwsza brygada wykonała $\frac{3}{5}$ całej pracy, a zatem ją zmieniła druga brygada, która skończyła rozładowanie. Cała praca była wykonana w ciągu 12 godz. Ile czasu potrzeba każdej brygadzie dla samodzielnego rozładowania pociągu?

14.21.• Przy otwarciu dwóch rur basen napełni się wodą w ciągu 12 godz. Jeżeli na początku będzie napełniać basen wodą pierwsza rura w ciągu 5 godz., a zatem będzie napełniać basen tylko druga rura w ciągu 9 godz., to wodą będzie napełniona tylko połowa basenu. W ciągu ilu godzin każda rura może napełnić basen?

14.22.• Dwa traktorzyści, pracując wspólnie, mogą zorać pole w ciągu 6 godz. Gdy pierwszy traktorzysta, pracując samodzielnie, będzie orać pole 4 godz., a zatem jego zamieni drugi traktorzysta, to ten traktorzysta zakończy orać pole za 9 godz. W ciągu jakiego czasu każdy traktorzysta, pracując samodzielnie, może zorać to pole?

14.23.• Przy kolejnym połączeniu dwóch przewodników opór w polu elektrycznym będzie wynosić 150 Om, a przy równoległym – 30 Om. Oblicz opór każdego przewodnika elektrycznego.

14.24.• Przy kolejnym połączeniu trzech przewodników prądu jednego rodzaju oraz jednego przewodnika drugiego rodzaju opór w obwodzie elektrycznym będzie wynosić 18 Om. Gdy połączyć równoległe po jednym przewodniku każdego rodzaju, to przy naprężeniu 24 V prąd obwodzie elektrycznym wynosi 10 A. Znajdź opór przewodnika każdego rodzaju.

14.25.•• Łódka płynęła po rzece od przystani A do przystani B i wróciła z powrotem za 6 godz. Oblicz prędkość prądu rzeki, jeżeli łódka płynie 2 km z prądem rzeki tyle samo czasu, ile płynie 1 km pod prąd rzeki, przy tym odległość między przystaniami A i B wynosi 16 km.

14.26.•• Motorówka przepływa 48 km pod prąd rzeki i 30 km z prądem rzeki za 3 godz, zaś 15 km z prądem przepłynie o 1 godz prędzej niż 36 km pod prądem. Oblicz własną prędkość motorówki oraz prędkość prądu.

14.27.•• Z miast A i B, odległych od siebie 40 km, jednocześnie naprzeciwko siebie wyjechały rowerzystki Halina i Katarzyna. Halina przyjechała do miasta B za 40 min, zaś Katarzyna – do miasta A za 1,5 godz. po spotkaniu z Haliną. Oblicz prędkość ruchu każdej dziewczynki.

14.28.•• Z jednej wsi w tym samym kierunku wyszli pieszo Piotr i Wasyl. Prędkość Piotra wynosiła 3 km/godz., zaś Wasyla – 4 km/godz. Po upływie pół godziny od chwili ich wyjścia ze wsi na rowerze wyjechała Irena, która dopędziła Wasyla po 15 min po tym jak dopędziła Piotra. Z jaką prędkością jechała Irena?

14.29.•• Odległość między przystaniami A i B wynosi 28 km. Po upływie 2 godz od wypłynięcia z przystani A motorówka spotkała płot, który wypłynął z przystani B z prądem rzeki o 2 godz. prędzej od wypłynięcia motorówki. Oblicz prędkość prądu rzeki oraz własną prędkość motorówki, która na odległość między przystaniami A i B i na drogę powrotną zatraciła 4 godz. 48 min.

14.30.•• Masa stopu jednego metalu wynosi 336 g, a stopu drugiego – 320 g. Objętość pierwszego stopu żelaza jest o 10 cm^3 mniejsza od objętości drugiego stopu, zaś gęstość pierwszego – o 2 g/cm^3 jest większa od gęstości drugiego. Oblicz gęstość każdego metalu.

14.31.•• Moduł wypadkowej dwóch sił, które są przyłożone do jednego punktu pod kątem prostym, wynosi 25 N. Gdy moduł jednej siły zmniejszyć j 8 N zaś drugą zwiększyć o 4 N, wtedy moduł ich wypadkowej nie zmieni się. Oblicz moduły tych sił.

14.32.•• Wzdłuż dwóch ramion kąta prostego w kierunku do wierzchołka poruszają się dwa ciała. Pierwsze ciało porusza się z prędkością 12 m/sek, a drugie – z prędkością 16 m/sek. W pewnym momencie czasu odległość między nimi wynosi 100 m. Po 2 min potem odległość między nimi wynosiła 60 m. Na jakiej odległości od wierzchołka kąta prostego znajdywało się każde ciało w pierwszy zafiksowany czas?

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

14.33. Uprość wyrażenie

1) $\frac{2}{a^2-3a}-\frac{1}{a^2+3a}-\frac{a+1}{a^2-9}$;

2) $\frac{3}{b-2}-\frac{3b-2}{b^2+2b+4}-\frac{b^2+16b+12}{b^3-8}$.

14.34. Uwolnij się od niewymierności w mianowniku następującego ułamka:

1) $\frac{4a}{5\sqrt{a}}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{b}-1}$; 3) $\frac{5}{\sqrt{6}-1}$; 4) $\frac{2}{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}}$.

14.35. Rozwiąż nierówność:

1) $1{,}1(5x-4) \leqslant 0{,}2(10x+13)$;

2) $\dfrac{0{,}6-5y}{4} < \dfrac{0{,}5-5y}{6}$.

14.36. Podaj największe całkowite rozwiązanie nierówności

$$(2x+1)(x+4)-3x(x+2)>0.$$

14.37. Dla jakich wartości zmiennej wyrażenie ma sens

$$\sqrt{12-5x}+\sqrt{2x+1}?$$

14.38. Podaj przedział, w którym funkcja maleje:

1) $y = 2x^2 + 10x - 9$; 2) $y = 5x - 3x^2$.

14.39. 14 grudnia 1840 roku w Paryżu zebrała się komisja z akademików i matematyków, aby sprawdzić matematyczne zdolności chłopczyka Anri Mondio, który fenomenalnie wykonał obliczenia. Oblicz jeden ze zaproponowanych zadań dla Mondio, które on obliczył ustnie: “Jakie dwie liczby naturalne należy wziąć, aby różnica ich kwadratów wynosiła 133?”

ZADANIE TESTOWE N 3 "SPRAWDŹ SIEBIE"

1. Przy jakich wartościach x spełnia się nierówność $x^2>4$?

A) $x>2$;
B) $x>2$ lub $x>-2$;
C) $x<-2$ lub $x>2$;
D) $-2<x<2$.

2. Który z podanych przedziałów jest rozwiązaniem nierówności $x^2+8x-9\geqslant 0$?

A) $(-\infty;\ -9)\cup(1;\ +\infty)$;
B) $(-\infty;\ -9]\cup[1;\ +\infty)$;
C) $(-\infty;\ -1)\cup(9;\ +\infty)$;
D) $(-\infty;\ -1]\cup[9;\ +\infty)$.

3. Ile całkowitych rozwiązań posiada nierówność $3x^2+5x-8<0$?

A) 3; B) 4; C) 5; D) 6.

4. Która z niżej wymienionych nierówności spełnia się dla wszystkich wartości rzeczywistych zmiennej?

A) $x^2-14x+49>0$;
B) $-3x^2+x+2\leqslant 0$;
C) $x^2-3x+4>0$;
D) $-x^2+7x-10<0$.

5. Jaką dziedzinę określenia posiada funkcja $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{8x-4x^2}}$?

A) $(-\infty;\ 0]\cup[2;\ +\infty)$;
B) $(-\infty;\ 0)\cup(2;\ +\infty)$;
C) $[0;\ 2]$;
D) $(0;\ 2)$.

6. Wskaż nierówność, która nie ma rozwiązań.

A) $x^2-6x+10<0$;
B) $-5x^2+3x+2>0$;
C) $-3x^2+8x+3<0$;
D) $-x^2-10x>0$.

7. Pary liczb $(x_1;\ y_1)$ i $(x_2;\ y_2)$ są rozwiązywaniami układu równań $\begin{cases} y-x=2, \\ xy-y=10. \end{cases}$ Ile wynosi wartość wyrażenia $x_1y_1+x_2y_2$?

A) 23; B) 7; C) 35; D) –26.

8. Jakie figury są wykresami równań wchodzących do układu $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ xy=-3? \end{cases}$

A) Prosta i parabola;
B) okrąg i parabola;
C) okrąg i hiperbola;
D) parabola i hiperbola?

9. Ile rozwiązań posiada układ równań $\begin{cases} x^2-y=4, \\ x+y=1? \end{cases}$

A) Nie ma rozwiązań;
B) jedno rozwiązanie;
C) dwa rozwiązania;
D) cztery rozwiązania.

10. Jaką największą wartość osiąga wyrażenie $x + y$, jeżeli para liczb $(x; y)$ jest rozwiązaniem układu: $\begin{cases} x - y = 5, \\ x^2 + 2xy - y^2 = -7? \end{cases}$

A) 1; B) 6; C) 0; D) –5.

11. Para liczb $(a; b)$ jest rozwiązaniem układu $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 4, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y} = 9. \end{cases}$ Oblicz wartość wyrażenia $a - b$.

A) 5; B) 1; C) $\dfrac{1}{6}$; D) $\dfrac{5}{6}$.

12. Pary liczb $(x_1; y_1)$ i $(x_2; y_2)$ są rozwiązaniami układu $\begin{cases} 2x - xy = 5, \\ y + xy = 6. \end{cases}$

Oblicz wartość wyrażenia. $| x_1y_1 - x_2y_2 |$.

A) 1; B) 11; C) 70; D) 10.

13. Obwód prostokąta jest równy 34 cm, a jego przekątna – 13 cm. Niech boki prostokąta są równe x cm i y cm. Które z wymienionych układów jest matematycznym modelem wyżej opisanego warunku?

A) $\begin{cases} x + y = 34, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$ C) $\begin{cases} x + y = 34, \\ x^2 + y^2 = 169; \end{cases}$

B) $\begin{cases} 2(x + y) = 34, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$ D) $\begin{cases} 2(x + y) = 34, \\ x^2 + y^2 = 169. \end{cases}$

14. Odległość między dwoma miastami, która wynosi 120 km, taksówka przejeżdża o 30 min prędzej od ciężarówki. Wiadomo, że w ciągu 2 godz. ciężarówka przejeżdża o 40 km więcej od taksówki za 1 godz. Niech prędkość ciężarówki jest równa x km/godz, a taksówki – y km/godz. Który z podanych układów będzie matematycznym modelem sytuacji opisanej w warunku?

A) $\begin{cases} \dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{y} = 30, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$ C) $\begin{cases} \dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{y} = \dfrac{1}{2}, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$

B) $\begin{cases} \dfrac{120}{y} - \dfrac{120}{x} = 30, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$ D) $\begin{cases} \dfrac{120}{y} - \dfrac{120}{x} = \dfrac{1}{2}, \\ 2x - y = 40. \end{cases}$

15. Dwie robotnice mogą komputerowo nadrukować podręcznik w ciągu 8 godz. Gdy pierwsza pracownica nadrukuje $\frac{2}{3}$ tekstu, zatem druga pracownica zakończy druk, to cały tekst podręcznika będzie wydrukowano w ciągu 16 dni.
Niech pierwsza pracownica nadrukuje tekst podręcznika w ciągu x dni, zaś druga – w ciągu y dni. Który z wymienionych układów równań jest modelem matematycznym wyżej opisanej sytuacji?

A) $\begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 16; \end{cases}$

C) $\begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 16; \end{cases}$

B) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{16}; \end{cases}$

D) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 16. \end{cases}$

16. Dla jakich wartości b równanie $3x^2 - bx + 3 = 0$ nie posiada pierwiastków?

A) $-6 < b < 6$; C) $b > 6$;

B) $b < 6$; D) $b < -6$ lub $b > 6$.

17. Dla jakich wartości a układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = a \end{cases}$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie?

A) $a = 5$; C) $a = -5$ lub $a = 5$;

B) $a = 5\sqrt{2}$; D) $a = -5\sqrt{2}$ lub $a = 5\sqrt{2}$.

18. Dla jakich wartości a dana nierówność $ax^2 - 2x + a < 0$ nie posiada rozwiązania?

A) $a < -1$ lub $a > 1$; C) $-1 < a < 1$;

B) $a \geqslant 1$; D) takie wartości nie istnieją.

GŁÓWNE W PARAGRAFIE 2

Funkcja

Niech x – zbiór wartości niezależnej zmiennej, zaś y – zbiór wartości zależnej. Funkcja – to reguła, za pomocą której według każdej wartości niezależnej zmiennej ze zbioru x można znaleźć dokładnie jedną wartość zależnej zmiennej ze zbioru Y.

Zera funkcji

Wartości argumentu, przy którym wartości funkcji są równe zeru, nazywają się zerami funkcji.

Przedział stałego znaku funkcji

Przedział, na którym funkcja osiąga wartości jednakowego znaku, nazywa się przedziałem stałego znaku.

Funkcja rosnąca i malejąca

Funkcja nazywa się rosnącą w pewnym przedziale, jeżeli dla jakiejkolwiek wartości argumentu z tego przedziału wynika, że większej wartości argumentu odpowiada większa wartość funkcji.
Funkcja nazywa się malejącą w pewnym przedziale, jeżeli dla jakichkolwiek wartości argumentu z tego przedziału wynika, że większej wartości argumentu odpowiada mniejsza wartość funkcji.

Konstrukcja wykresu $y = kf(x)$

Wykres funkcji $y = kf(x)$ można sporządzić z wykresu funkcji $y = f(x)$ w wyniku oddalenia się o k razy od osi odciętych gdy $k>1$, lub przybliżenia się o $\frac{1}{k}$ razy do osi odciętych, gdy $0<k<1$.

Konstrukcja wykresu $y = f(x) + b$

Wykres funkcji $y = f(x) + b$ można sporządzić z wykresu funkcji $y = f(x)$ przenoszeniem wzdłuż osi rzędnych o b jednostek do góry, gdy $b>0$, i na $-b$ jednostek do dołu. Gdy $b<0$.

Konstrukcja wykresu $y = f(x + a)$

Wykres funkcji $y = f(x + a)$ można sporządzić z wykresu funkcji $y = f(x)$ równoległym przesunięciem względem osi odciętych o a jednostek w lewo, gdy $a>0$, i na $-a$ a jednostek w prawo, gdy $a<0$.

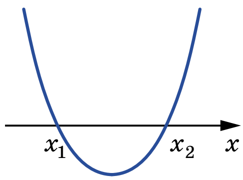
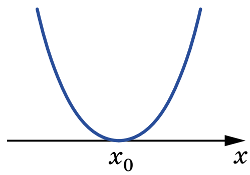
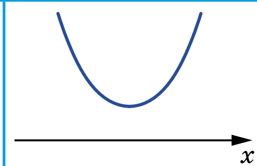
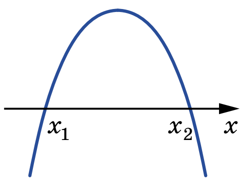
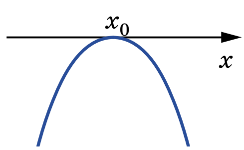
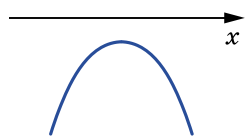
Funkcja kwadratowa

Funkcja, którą można podać w postaci $y = ax^2 + bx + c$, gdzie x – niezależna zmienna, oraz a, b i c – pewne liczby, przy czym $a \neq 0$, nazywa się kwadratową.

Nierówności kwadratowe

Nierówności w postaci $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $\boldsymbol{ax^2 + bx + c \geqslant 0}$, $\boldsymbol{ax^2 + bx + c \leqslant 0}$, gdzie x – zmienna, a, b i c – pewne liczby, przy czym $a \neq 0$, nazywają się kwadratowymi.

Schematyczne położenie paraboli $y = ax^2 + bx + c$ względem osi odciętych

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

§ 3 CIĄGI LICZBOWE

- Zapoznacie się z takimi nowymi pojęciami, jak ciąg n-ty wyraz ciągu, ciągami arytmetycznymi i geometrycznymi, ciągami skończonymi i nieskończonymi, dowiecie się jakie są metody podania ciągów liczbowych.
- Nauczycie się obliczać wyrazy ciągu, obliczać sumę n pierwszych wyrazów ciągów.

15. Ciągi liczbowe

Często w życiu codziennym spotykamy się z obiektami, z którymi jest wygodne mieć do czynienia, gdy ich poprzednio ponumerujemy. Przykładem są ponumerowane miesiące i pory roku, dni tygodnia, kamienice i mieszkania, wagony pociągu i nawet każdy uczeń z klasy ma swój numer w katalogu szkolnym.

Obiekty, które są ponumerowane za pomocą liczb naturalnych 1, 2, 3, ..., n, ..., tworzą **ciągi**.

Również, można mówić o ciągu stronic w książce, liter w słowie, piętr w kamienicy itp.

Obiekty które tworzą ciąg, nazywają się **wyrazami ciągu**. Każdy wyraz ciągu posiada swój numer. Na przykład, styczeń – to **pierwszy wyraz** ciągu miesięcy roku, liczba 3 – to **drugi wyraz** ciągu liczb prostych. Ogółem, jeżeli wyraz ciągu ma numer (indeks) n, to on nazywa się ***n*-tym wyrazem ciągu**.

Jeżeli ciąg liczbowy składa się z liczb, to on nazywa się ciągiem **liczbowym**.

Podamy przykłady ciągów liczbowych.

1, 2, 3, 4, 5, ... – ciąg liczb naturalnych;

2, 4, 6, 8, 10, ... – ciąg liczb parzystych;

0,3; 0,33; 0,333; ... – ciąg dziesiątkowych przybliżeń ułamka $\frac{1}{3}$;

19, 38, 57, 76, 95 – ciąg dwucyfrowych liczb wielokrotności 19;

–1, –2, –3, –4, –5, ... – ciąg liczb ujemnych.

Dalej będziemy rozpatrywać tylko ciągi liczbowe.

Istnieją ciągi **skończone** i **nieskończone**. Przykładem jest ciąg parzystych liczb naturalnych, który jest ciągiem nieskończonym, zaś ciąg dwucyfrowych liczb wielokrotnych – to ciąg skończony.

Dla oznaczenia wyrazów ciągu zastosowuje się litery i symbole.

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

Symbol wskazuje porządkowy numer wyrazu ciągu. Dla oznaczenia samego ciągu używa się oznaczenia (a_n). Na przykład, jeżeli (p_n) – ciąg liczb pierwszych, to $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ itp.

Ciąg liczy się określonym, jeżeli każdy jego wyraz posiada odpowiedni numer (indeks).

Zapoznamy się z podstawowymi sposobami podania ciągu.

Rozpatrzymy ciąg, w którym pierwszy wyraz równa się 1, a każdy następny wyraz jest o 3 większy od poprzedniego. Taki sposób podania ciągu nazywa się **opisowym**. Jego można zilustrować za pomocą podania kilku pierwszych wyrazów zapisanych w kolejności rosnących numerów, kończących się trzema kropkami:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...$$

Zapisywanie takie warto zastosowywać wtedy, gdy da się przewidzieć jakie liczby można zapisać zamiast podanych kropek.

Na przykład, w rozpatrywanym ciągu, jest oczywiste, że po liczbie 19 powinna być liczba 22.

Jeżeli ciąg jest skończony, to jego można określić za pomocą tabeli. Na przykład, podana tabela określa ciąg sześcianów jednocyfrowych liczb naturalnych:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Ciąg można określić za pomocą wzoru. Na przykład, równość $x_n = 2^n$, gdzie zmienna n zawiera wszystkie wartości naturalne, określa ciąg (x_n) naturalnych potęg liczby 2:

$$2, 4, 8, 16, 32, ...$$

W takich przypadkach mówi się, że ciąg określony za pomocą **wzoru *n*-tego wyrazu ciągu**.

Rozpatrzymy kilka przykładów.

Wzór $a_n = 2n - 1$ określa ciąg nieparzystych liczb naturalnych:

$$1, 3, 5, 7, 9, ...$$

Wzór $y_n = (-1)^n$ określa ciąg (y_n), w którym wszystkie wyrazy posiadające indeksy nieparzyste, są równe –1, zaś na parzystych indeksach są równe 1:

$$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots .$$

Wzór $c_n = 7$ określa ciąg (c_n), w których wszystkie wyrazy są równe 7:

$$7, 7, 7, 7, 7, \ldots .$$

Wyżej wymienione metody podania ciągów umożliwiają postrzeganie zależności między "funkcją" i "ciągiem".

Rozpatrzymy funkcji $y = f(x)$, dziedziną określenia której jest zbiór liczb naturalnych lub zbiór n pierwszych kolejnych liczb naturalnych. Wtedy funkcja f określa się ciągiem nieskończonym $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$, ... lub ciągiem skończonym $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$.

Na przykład, jeżeli funkcja f, o dziedzinie określenia równej zbiorowi liczb naturalnych, jest określona wzorem $f(x) = x^2$, wtedy ta funkcja jest określona ciągiem kwadratów liczb naturalnych

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots .$$

Często ciąg określa się regułą, która umożliwia znalezienie każdego wyrazu następnego, znając poprzedni.

Rozpatrzymy ciąg (a_n), pierwszy wyraz którego jest równy 1, a każdy wyraz następny jest o 3 razy większy od poprzedniego. Otrzymamy:

$$1, 3, 9, 27, 81, \ldots .$$

Ten ciąg można określić i w inny sposób, podając pewne jego warunki, jak:

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n.$$

Te równości podają pierwszy wyraz ciągu oraz wzór, za pomocą którego, znając dany wyraz można obliczyć następny po nim wyraz:

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 3a_1 = 3,$$
$$a_3 = 3a_2 = 9,$$
$$a_4 = 3a_3 = 27,$$
itp.

Wzór, który określa wyraz ciągu wyrażony jednym lub kilkoma poprzednimi wyrazami nazywa się **wzorem rekurentnym** (od łac. *recurro* – powracać). W rozpatrywanym przykładzie początkowy warunek – to równość $a_{n+1} = 3a_n$. Warunki, które określają pierwszy wyraz lub kilka wyrazów pierwszych, nazywa się **warunkami początkowymi**. W rozpatrywanym przykładzie warunkiem początkowym będzie nierówność $a_1 = 1$.

Metoda określenia ciągu za pomocą początkowych warunków oraz wzoru rekurencyjnego nazywa się metodą określenia ciągu.

W metodzie rekurencyjnej dla określenia ciągu jest podany pierwszy lub kilka początkowych wyrazów ciągu, zaś wszystkie następne wyrazy obliczają się kolejno jeden po drugim, Z tego punktu widzenia, metoda określenia ciągu za pomocą wzoru n-tego wyrazu jest o wiele "wygodniejsza" i według tej metody można od razu znaleźć potrzebny wyraz ciągu, znając tylko jego numer.

PRZYKŁAD Ciąg (c_n) określony jest wzorem n-tego wyrazu $c_n = 37 - 3n$. Czy są wyrazami ciągu następujące liczby: 1) 19; 2) –7? Jeżeli odpowiedź jest stwierdzająca, to wskaż numer wyrazu.

Rozwiązanie. 1) Jeżeli liczba 19 jest wyrazem tego ciągu, to istnieje takie naturalne znaczenie n dla którego spełnia się równość $37 - 3n = 19$. Stąd $3n = 18$; $n = 6$. A więc, liczba 19 jest szóstym wyrazem tego ciągu (c_n).

2) Mamy: $37 - 3n = -7$; $3n = 44$; $n = 14\frac{2}{3}$. Ponieważ liczba $14\frac{2}{3}$ nie jest naturalną liczbą, więc liczba 7 nie jest wyrazem z tego ciągu.

Odpowiedź: 1) tak, $n = 6$; 2) nie. ◀

1. Co tworzą obiekty, które są ponumerowane liczbami naturalnymi?
2. Jak nazywają się obiekty, które tworzą ciąg?
3. Jak nazywa się wyraz ciągu, którego numer jest n?
4. Jaki ciąg nazywa się liczbowym?
5. W jakim przypadku ciąg jest określony?
6. Jakie metody określają ciąg?
7. Objaśnij, co uważa się za wzór n-tego wyrazu ciągu.
8. Jaka jest zależność między "funkcją" i "ciągiem"?
9. Objaśnij, co to jest wzór rekurentny.

ĆWICZENIA

15.1.° Podaj w kolejności rosnącej pięć kolejnych pierwszych wyrazów ciągu:
1) dwucyfrowych liczb wielokrotnych 4;
2) niewłaściwych ułamków zwykłych o liczniku, równym 11;
3) liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 8 mają resztę równą 5.
Wskaż czy ciągi są skończone lub nieskończone.

15.2.° Ciąg (a_n) jest ciągiem trzycyfrowych liczb wielokrotnych liczbie 5, wziętych w kolejności rosnącej. Uzupełnij tabelę:

n	1	2	3	4	5	6
a_n						

15.3.° Wyznacz cztery kolejne wyrazy ciągu (a_n), określony wzorem n-tego wyrazu.

1) $a_n = n + 4$; 2) $a_n = 4n - 3$; 3) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$; 4) $a_n = \frac{2^n}{n}$.

15.4.° Wyznacz drugi, siódmy i setny wyraz ciągu (b_n), określonego wzorem n-tego wyrazu:

1) $b_n = \frac{10}{n}$; 2) $b_n = 5 - 2n$; 3) $b_n = n^2 + 2n$; 4) $b_n = (-1)^{n+1}$.

15.5.° Ciąg (c_n) określono wzorem n-tego wyrazu $c_n = (-1)^n \cdot 5$. Oblicz:
1) c_1; 2) c_8; 3) c_{2k}; 4) c_{2k+1}; 5) c_{k+2}.

15.6.° Ciąg (x_n) określono wzorem n-tego wyrazu $x_n = 3n + 1$. Oblicz:
1) x_1; 2) x_7; 3) x_{20}; 4) x_{300}; 5) x_{k+1}.

15.7.° Wyznacz pięć kolejnych pierwszych wyrazów ciągu (a_n), jeżeli:
1) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3$;
2) $a_1 = -2$, $a_2 = 6$, $a_{n+2} = 3a_n + a_{n+1}$.

15.8.° Wyznacz piźć kolejnych pierwszych wyrazów ciągu (b_n), jeżeli:

1) $b_1 = 18$, $b_{n+1} = -\frac{b_n}{3}$;

2) $b_1 = -1$, $b_2 = 2$, $b_{n+2} = b_n^2 + 2b_{n+1}$.

15.9.• Ciąg (a_n) określono wzorem n-tego wyrazu $a_n = 7n + 2$. Sprawdź, czy dane liczby należą do tego ciągu dla: 1) 23; 2) 149; 3) 47? Gdy odpowiedź jest stwierdzająca, to podaj numer wyrazu.

15.10.• Ciąg (b_n) określono wzorem n-tego wyrazu $b_n = n^2 - 4$. Sprawdź, czy dane liczby: 1) 5; 2) 16; 3) 77 są wyrazami danego ciągu. Gdy odpowiedź będzie stwierdzająca, to podaj indeks wyrazu.

15.11.• Oblicz, ile ujemnych wyrazów posiada ciąg (x_n), określony wzorem n-tego wyrazu $x_n = 6n - 50$?

15.12.• Podaj indeks pierwszego ujemnego wyrazu ciągu (y_n), określony wzorem n-tego wyrazu $y_n = 38 - 3n$.

15.13.•• Ciąg (a_n) określono wzorem n-tego wyrazu $a_n = n^2 - 3n - 8$. Znajdź indeksy wyrazów tego ciągu, które są mniejsze od 10.

15.14.•• Ciąg (b_n) określono wzorem n-tego wyrazu $b_n = -n^2 + 15n - 20$. Ile wyrazów tego ciągu są większe od 16?

15.15.•• Podaj jeden z możliwych wzorów n-tego wyrazu ciągu, pierwszymi kolejnymi wyrazami którego są:

1) 1, 4, 9, 25, ...;
2) 5, 8, 11, 14, 17, ...;
3) 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, ...;
4) 0, 2, 0, 2, 0, ...

15.16.•• Podaj jeden z możliwych wzorów n-tego wyrazu ciągu, pierwszymi kolejnymi wyrazami którego są:

1) 2, 9, 28, 65, 126, ...;
2) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{30}$, ...

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

15.17. Skróć ułamek:

1) $\dfrac{3x^2 - 7x + 2}{2 - 6x}$;
2) $\dfrac{5xy - 5x - 2y + 2}{10x^2 - 9x + 2}$.

15.18. Podaj dziedzinę określenia funkcji:

1) $y = \dfrac{\sqrt{2 - x}}{x + 2}$;
2) $y = \dfrac{\sqrt{6 - 5x - x^2}}{x - 1}$.

15.19. Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w początku współrzędnych i przechodząca przez punkt $A\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$. Podaj wzór tej funkcji.

15.20. Robotnik planował w ciągu pewnego czasu wyprodukować 160 detali. Lecz on zakończył pracę o 3 godz. prędzej niż planował, ponieważ w ciągu każdej godziny produkował o 12 detali więcej niż planowano. Ile robotnik produkował detali w ciągu godziny?

15.21. Morska woda zawiera 5 % soli. Ile zwykłej wody należy dolać do 40 g morskiej wody, aby koncentracja soli była 2 %?

15.22. W ciągu pierwszego dnia chłopczyk przeczytał 25 % całej książki, w ciągu drugiego dnia – 7 % od ilości stronic pozostałych, a w ciągu trzeciego dnia – resztę 84 stronic. Ile stronic miała książka?

UCZYMY SIĘ NIESTANDARDOWEGO MYŚLENIA

15.23. Rozpatrują się funkcje kwadratowe postaci $y = x^2 + px + q$, dla których $p + q = 5$. Udowodnij, że parabole, które są wykresami tych funkcji przecinają się w jednym punkcie.

O królikach, słonecznikach, sosnowych szyszkach i złotym przekroju

Rozpatrzymy ciąg (u_n), który określono rekurentną współzależnością:

$$u_1 = u_2 = 1,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Zapiszemy kilka pierwszych wyrazów tego ciągu:

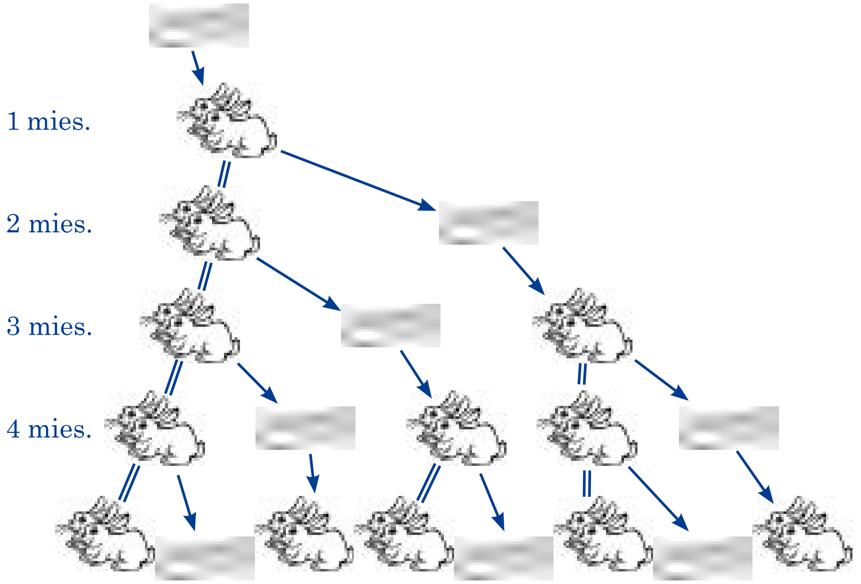
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots .$$

Wyrazy tego ciągu nazywają się **wyrazami Fibonacci**. Nazwa ta pochodzi od włoskiego matematyka Leonarda z Pizy (Fibonacci), który rozwiązał zadanie popularne w XII w o populacji potomstwa pary królików i po raz pierwszy zwrócił uwagę na piękne własności tego ciągu. W tym zadaniu ilościowe potomstwo królików zwiększa się w odpowiedni sposób: w każdej parze królików co miesięcznie rodzi się para króliczków, która po miesiącu też zaczyna rodzić potomstwo. Na rysunku 15.1 ilość par królików odpowiada ciągowi Fibonacci.

Liczby Fibonacci można spotkać w różnych sytuacjach. Przedstawcie sobie, że idziecie ścieżką pokrytą płytkami o kształcie kwadratów rozmieszczonych w jeden rząd, stając coraz na nową płytkę lub przez

Leonardo z Pizy
(Fibonacci)
(XII–XIII w.)

Włoski matematyk. Podróżując na Wschód, zapoznał się z osiągnięciami arabskich matematyków i pomógł rozprzestrzenić się tym wiadomościom w Europie. Jego najważniejsze prace "Liber Abaci" (1202) traktat o arytmetyce i o algebrze oraz "Practica Geometriae" (1220) zapoczątkowały zastosowanie algebraicznych metod do geometrii.



Rys. 15.1

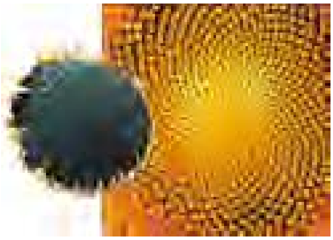
jedną. Wtedy, ilość sposobów przejścia tej ścieżki o n płytek odpowiada n-temu wyrazowi ciągu Fibonacci (sprawdź to samodzielnie) na przykład dla $n = 8$).

Nawet niektóre zjawiska przyrody są ściśle powiązane z liczbami Fibonacci.

Patrząc na nasiona w słoneczniku lub na rumianek, można zauważyć, że ziarenka są rozmieszczone w postaci dwóch rodzin spirali, które zakręcone są w dwóch różnych kierunkach. Ilość spirali w tych rodzinach są sąsiednimi wyrazami ciągu Fibonacci. Przeważnie dla słonecznika liczby te są równe 34 i 55, lecz spotyka się i giganty, które mają 89 i 144 spirali. Podobną własność[1] można zobaczyć w strukturze szyszek sosnowych. Te same zjawiska spotyka się i w ananasie, gdzie spirali zawsze będzie 8 i 13.

Jeżeli w ciągu Fibonacci dla każdego naturalnego n można obliczyć stosunek $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, to otrzymamy ciąg 1; 2; 1,5; 1,(6); 1,6; 1,625; 1,(615384); 1,61(904761); ... .

[1] Ulistnienie, filotaksja – regularny układ liści na łodydze roślin, stały dla poszczególnych gatunków.

Dla tego ciągu istnieje charakterystyczna własność: ze wzrostem numerów wyrazy tego ciągu coraz mniej i mniej różnią się od liczby $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618.$

Jeszcze w starożytności ludzie uważali, że ta liczba posiada walory piękności i harmonii. Greccy rzeźbiarze dobrze orientowali się o związku tej magicznej liczby z proporcją ciała ludzkiego. I niedaremnie starożytni architekci wykorzystywali własności tej liczby w swojej nieśmiertelnej architekturze i w rzeźbie. A więc, stosunek długości Partenona[1] do jego wysokości w przybliżeniu wynosi 1,618. Geniusz epoki Odrodzenia Leonardo da Vinci uważał, z wielu stosunków który wykorzystuje Stwórca, istnieje tylko jedno, jedyne niepowtarzalne, które nazywał "złotym podziałem".

Francuski uczony Jacques Binet (1786–1856) podał wzór n-tego wyrazu ciągu Fibonacci:

$$u_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Nie można nawet przedstawić sobie, że ten wzór określa liczby naturalne. Ale jest to fakt.

16. Ciąg arytmetyczny

Rozpatrzymy następujące ciągi:

$$2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ 27,\ \ldots;$$
$$1;\ 1{,}5;\ 2;\ 2{,}5;\ 3;\ 3{,}5;\ \ldots;$$
$$3,\ 1,\ -1,\ -3,\ -5,\ -7,\ \ldots\ .$$

[1] Partenon – świątynia w Atenach, zbudowana w V w. p.n.e.

Wszystkie one podporządkowują się charakterystycznej osobliwości: *każdy następny wyraz ciągu otrzymuje się w wyniku dodawania do poprzedniego jednej i tej samej liczby*. W pierwszym ciągu będzie to liczba 5, w drugim ciągu będzie to liczba 0,5; zaś dla trzeciego – to liczba – 2.

Z podobnymi ciągami starożytni ludzie spotykali się, gdy przedmioty liczono parami, piątkami, dziesiątkami, dwunastkami itd. Takie ciągi nazywały się **ciągami arytmetycznymi**.

Definicja. Ciągiem arytmetycznym nazywa się ciąg, w którym każdy wyraz, zaczynając od drugiego, powstaje przez dodawanie do wyrazu poprzedniego tej samej liczby.

Liczba, która dorównuje różnicy między następnym a poprzednim wyrazem ciągu, nazywa się **różnicą ciągu arytmetycznego** i oznacza się literą d (od pierwszej litery łacińskiego słowa *differentia* – różnica).

A więc, gdy (a_n) – ciąg arytmetyczny o różnicy d, wtedy

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ...,$$

oznacza to, że dla jakiegokolwiek naturalnego n spełnia się równość $a_{n+1} - a_n = d$. Stąd

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

A więc, ciąg arytmetyczny można podać rekurentnie:

$$\boxed{\boldsymbol{a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d}}$$

Z tego wynika, *że aby określić ciąg arytmetyczny należy podać pierwszy jego wyraz oraz różnicę*.

Podamy kilka przykładów.

Gdy $a_1 = 2$ i $d = 5$, to otrzymamy ciąg arytmetyczny, który był podany na początku punktu:

$$2, 7, 12, 17, 22, 27, ...$$

Gdy $a_1 = 1$ i $d = 2$, to otrzymamy ciąg arytmetyczny – kolejność liczb nieparzystych:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, ...$$

Podaliśmy przykłady ciągów arytmetycznych, różnica w których bywa liczbą dodatnią. Ale różnica może być także liczbą ujemną i nawet zerem. Więc, ciąg 5, 5, 5, 5, ..., wszystkie wyrazy którego są równe między sobą, jest ciągiem arytmetycznym, w którym $a_1 = 5$, $d = 0$.

Pokażemy, jak można określić ciąg arytmetyczny mając jego wzór n-tego wyrazu.

Z definicji ciągu arytmetycznego (a_n) wynika, że

$$a_2 = a_1 + d;$$
$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + d \cdot 2;$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + d \cdot 2) + d = a_1 + d \cdot 3;$$
$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + d \cdot 3) + d = a_1 + d \cdot 4.$$

Te równości pomagają zobaczyć następująca zależność: aby znaleźć dowolny wyraz ciągu arytmetycznego należy do wyrazu pierwszego dodać iloczyn różnicy d i liczby, która o 1 mniejsza od numeru szukanego wyrazu. Stąd, na przykład, $a_6 = a_1 + d \cdot 5$, $a_7 = a_1 + d \cdot 6$, i ogółem

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = a_1 + d\,(n - 1)}}$$

Wyżej podana równość nazywa się **wzorem ogólnego *n*-tego wyrazu ciągu arytmetycznego**.

Ustalimy bardzo ważną własność wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n). Mamy:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2, \text{ stąd } 2a_2 = a_1 + a_3;\ \boldsymbol{a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}}.$$

$$a_3 - a_2 = a_4 - a_3, \text{ stąd } 2a_3 = a_2 + a_4;\ \boldsymbol{a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}}.$$

Ogółem, dla dowolnego naturalnego n większego od 1 można zapisać, że: $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, stąd

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}}$$

Dowolny wyraz ciągu arytmetycznego, oprócz pierwszego (oraz ostatniego, jeżeli ciąg jest skończony) jest równy średniej arytmetycznej dwóch sąsiednich wyrazów tego ciągu.

PRZYKŁAD Udowodnij, że ciąg (a_n), który jest określony wzorem n-tego wyrazu $a_n = 9n - 2$, jest ciągiem arytmetycznym.

Rozwiązanie. Rozpatrzymy różnicę dowolnych dwóch kolejnych wyrazów ciągu:

$$a_{n+1} - a_n = 9\,(n + 1) - 2 - (9n - 2) = 9n + 9 - 2 - 9n + 2 = 9.$$

A więc, dla dowolnej naturalnej wartości n spełnia się równość $a_{n+1} = a_n + 9$, czyli, każdy wyraz tego ciągu, zaczynając od drugiego jest równy poprzedniemu wyrazowi do którego dodano tę samą liczbę 9. W ten sposób, dany ciąg jest ciągiem arytmetycznym. ◄

1. Jaki ciąg nazywa się ciągiem arytmetycznym?
2. Jaką liczbę nazwano różnicą ciągu arytmetycznego i jak ona oznacza się?
3. Co należy mieć, aby określić ciąg arytmetyczny?
4. Jak można określić ciąg arytmetyczny?
5. Jaka jest postać ogólnego n-tego wyrazu ciągu arytmetycznego?
6. Jak powiązane są między sobą dowolny wyraz ciągu arytmetycznego i sąsiednie wyrazy?

ĆWICZENIA

16.1.° Pośród niżej wymienionych ciągów wskaż ciąg arytmetyczny:
1) 3, –6, 12, –24; 2) 4, 8, 12, 16; 3) 5, 10, 5, 10; 4) 42, 39, 36, 33; 5) –5, –3, –1, 1; 6) 1,2; 1,3; 1,5; 1,6.

16.2.° Sprawdź, czy ciąg jest ciągiem arytmetycznym (jeżeli odpowiedź jest stwierdzająca, to podaj jego różnicę):
1) 24, 22, 20, 18; 2) 16, 17, 19, 23; 3) –3, 2, 7, 12?

16.3.° Oblicz cztery kolejne wyrazy ciągu arytmetycznego, pierwszy wyraz którego jest równy 1,2, a różnica wynosi –0,3.

16.4.° Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy –7,4, a różnica wynosi 1,8. Oblicz pięć pierwszych kolejnych wyrazów ciągu.

16.5.° Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 4, zaś różnica wynosi 0,4. Oblicz: 1) a_3; 2) a_{11}; 3) a_{32}.

16.6.° Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (a_n) jest równy 17, zaś rocznica wynosi –2. Oblicz: 1) a_4; 2) a_{15}; 3) a_{60}.

16.7.° Oblicz różnicę oraz dwieście pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego 2,6; 2,9; 3,2; ... .

16.8.° Ile dorównuje rusznica ciągu arytmetycznego (a_n), gdy $a_6 = –2$, $a_7 = 6$?

16.9.° Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego (a_n), gdy $a_8 = 3$, $a_9 = –12$.

16.10.° Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego (x_n), gdy $x_1 = 2$, $x_8 = –47$.

16.11.° Oblicz pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (y_n), gdy $y_{17} = 22$, a różnica ciągu $d = 0,5$.

16.12.• Podaj wzór ogólnego n-tego wyrazu ciągu arytmetycznego:

1) $-5, -7, -9, -11, \ldots$;
2) $2,\ 2\frac{1}{6},\ 2\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{2}, \ldots$;
3) $a^2, 2a^2, 3a^2, 4a^2, \ldots$;
4) $a+3, a+1, a-1, a-3, \ldots$.

16.13.• Sprawdź, czy jest wyrazem ciągu arytmetycznego (c_n):

1) liczba 20,4, gdy $c_1 = 11{,}4$, zaś różnica ciągu $d = 0{,}6$;
2) liczba 38, gdy $c_1 = 8$, zaś różnica ciągu $d = 1{,}4$?

Gdy odpowiedź będzie stwierdzająca, to podaj indeks tego wyrazu.

16.14.• Podaj indeks wyrazu ciągu arytmetycznego: 8,1; 8,5; 8,9; 9,3; ..., który wynosi 13,7.

16.15.• Oblicz drugi wyraz ciągu arytmetycznego, jeżeli pierwszy i trzeci wyraz jest odpowiednio równy –6 i 12.

16.16.• Ósmy i dziesiąty wyraz ciągu arytmetycznego odpowiednio dorównują 3,5 i 2,7. Ile dorównuje dziewiąty wyraz ciągu?

16.17.• Oblicz pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego (b_n), gdy $b_5 = 11$, $b_{11} = -7$.

16.18.• Ile wynosi różnica ciągu arytmetycznego (x_n), gdy $x_8 = 58$, $x_{15} = 16$?

16.19.• Jak zmieni się różnica skończonego ciągu arytmetycznego, jeżeli podać go w odwrotnym porządku?

16.20.• Ile wyrazów dodatnich ma ciąg arytmetyczny 5,2; 4,9; 4,6; ...?

16.21.• Jaki indeks ma pierwszy dodatni wyraz ciągu arytmetycznego –10,2; –9,5; –8,8; ...?

16.22.• Oblicz pierwszy ujemny wyraz ciągu arytmetycznego 7,2; 6,6; 6; ... .

16.23.• Między liczbami –6 i 3 wstaw pięć takich liczb, aby one wraz z danymi liczbami utworzyły ciąg arytmetyczny.

16.24.• Jakie cztery liczby należy wstawić między liczbami 4 i –5, aby one wraz z danymi tworzyły ciąg arytmetyczny?

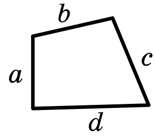
16.25.• Oblicz pierwszy wyraz oraz różnicę ciągu arytmetycznego:

1) $a_3 + a_7 = 30$ i $a_6 + a_{16} = 60$;
2) $a_4 + a_{10} = 36$ i $a_5 \cdot a_{11} = 340$.

16.26.• Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego (a_n), jeżeli:
1) $a_5 + a_{12} = 41$ i $a_{10} + a_{14} = 62$;
2) $a_7 + a_{13} = -104$ i $a_2 \cdot a_6 = -240$.

16.27.• W jakim przypadku dla wyrazów ciągu arytmetycznego spełnia się równość $a_1 a_4 = a_2^2$?

16.28.• Udowodnij, że wartości wyrazów $(a + b)^2$, $a^2 + b^2$, $(a - b)^2$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.



Rys. 16.1

16.29.• Czy wypowiedź jest prawdziwa, jeżeli długości boków wypukłego czworokąta (rys. 16.1), wzięte w kolejności a, b, d i c, tworzą ciąg arytmetyczny, to w ten czworokąt można wpisać okrąg?

16.30.• Wielkości kątów trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny. Jaka jest miara kątowa średniego według wielkości kąta trójkąta?

16.31.• Czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, jeżeli jest podany wzór na n-ty wyraz:

1) $a_n = -6n + 3$; 2) $a_n = 2n^2 - n$; 3) $a_n = -2{,}8n$; 4) $a_n = \frac{n}{n+1}$?

Jeżeli odpowiedź jest stwierdzająca, to podaj jego pierwszy wyraz oraz różnicę ciągu.

16.32.• Czy ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym, jeżeli jest określony wzorem na n-ty wyraz:

1) $a_n = 6 + 7n$; 2) $a_n = \frac{2n-1}{5}$; 3) $a_n = \frac{1}{n} + 2$?

Gdy odpowiedź będzie stwierdzającą, to podaj pierwszy wyraz oraz różnicę ciągu.

16.33.• Z ciągu arytmetycznego wyłączono wyrazy o wskaźnikach nieparzystych. Czy wyrazy, które pozostały tworzą ciąg arytmetyczny?

16.34.• Dane są dwa nieskończone ciągi arytmetyczne. Jeżeli od każdego wyrazu pierwszego ciągu odjąć odpowiedni wyraz drugiego ciągu, to czy utworzony ciąg będzie ciągiem arytmetycznym?

16.35.• Jeżeli w ciągu arytmetycznym, różnica którego nie jest równa zerowi, wyłączyć jego wyrazy o wskaźnikach, które są wielokrotnością 3, to czy utworzony ciąg będzie ciągiem arytmetycznym?

16.36.• Każdy z wyrazów ciągu arytmetycznego pomnożono przez 4. Czy nowy ciąg będzie ciągiem arytmetycznym?

16.37.• Udowodnij, że liczby, które są równe sumie kątów trójkąta, czworokąta, pięciokąta itd., tworzą ciąg arytmetyczny?

16.38.• Przy jakiej wartości x wartości wyrażeń $x^2 - 4$, $5x + 3$ i $3x + 2$ będą kolejnymi początkowymi wyrazami ciągu arytmetycznego? Oblicz wyrazy tego ciągu.

16.39.• Przy jakiej wartości y wartości wyrażeń $y^2 + 1$, $y^2 + y$ i $8y - 10$ będą kolejnymi pierwszymi wyrazami ciągu arytmetycznego? Oblicz wyrazy tego ciągu.

16.40.•• Przy jakiej wartości y wartości wyrażeń $y^2 - 2y$, $3y + 5$, $4y + 13$ i $2y^2 - y + 25$ będą kolejnymi pierwszymi wyrazami ciągu arytmetycznego? Oblicz wyrazy tego ciągu.

16.41.•• Przy jakiej wartości x wartości wyrażeń $3x + 4$, $2x + 3$, x^2 i $2x^2 + x$ będą kolejnymi pierwszymi wyrazami ciągu arytmetycznego? Oblicz wyrazy tego ciągu.

16.42.* Udowodnij, że gdy liczby a, b i c – są kolejnymi trzema wyrazami ciągu arytmetycznego, to:

1) $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$;

2) $\frac{2}{9}(a+b+c)^3 = a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)$.

16.43.* Udowodnij, że gdy liczby dodatnie a, b i c są trzema kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$.

16.44.* Udowodnij, że gdy wartości wyrażeń $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ i $\frac{1}{a+b}$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to wartości wyrazów a^2, b^2 i c^2 także są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego.

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

16.45. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 46, \\ x + y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -4, \\ x^2 + 2y^2 = 12. \end{cases}$

16.46. Która z niżej podanych nierówności jest równoważną z nierównością $-5x<10$:
1) $5x<-10$; 2) $10x>-20$; 3) $10x<-20$; 4) $5x>10$?

16.47. Ile wynosi najmniejsze całkowite rozwiązanie nierówności
$$3(x-1)^2-3x(x-5)>-40?$$

16.48. Uprość wyrażenie:
1) $\left(2\sqrt{6}-2\sqrt{54}+6\sqrt{96}\right)\cdot 2\sqrt{3}$; 2) $\left(5\sqrt{20}-6\sqrt{10}+2\sqrt{40}\right)\cdot 3\sqrt{5}$.

16.49. Udowodnij, że gdy wszystkie cyfry liczby trzycyfrowej są jednakowe, wtedy ta liczba jest wielokrotnością 37.

16.50. Robotnik w pewnym terminie miał wyprodukować 216 detali. Pierwsze trzy dni on produkował ustaloną codzienną normę, a następnie produkował codziennie o 8 detali ponad normę. Dzień przed ustalonym terminem wyprodukowano 232 detali. Ile detali robotnik miał produkować codziennie według ustalonej normy?

16.51. (*Zadanie Bezauta*[1].) Ktoś kupił konia i po pewnym czasie sprzedał go za 24 pistoli. Podczas sprzedaży on stracił tyle odsetek, ile kosztował koń. Pytanie: Za jaką sumę on kupił konia?

16.52. Podczas wprowadzenia nowych technologii udało się zmniejszyć czas na produkowanie jednej detali o 12 min. Na ile odsetek będzie wykonywał się plan, jeżeli normę czasu nie było zmieniono?

17. Suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego

Rozpatrzymy skończony ciąg arytmetyczny $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$. Sumę kolejnych początkowych jego wyrazów oznaczymy S_n. Mamy:
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. \qquad (*)$$
Wyprowadzimy wzór na obliczenie tej sumy.

Na początku rozpatrzymy zadanie, rozwiązanie którego podpowie w jaki sposób wyprowadzić szukany wzór.

[1] Bezout Etienne (1730–1783) – francuski matematyk, podstawowe prace którego tyczą się wyższej algebry. Wykładał matematykę w gardemaryjskiej wyższej szkole, w Królewskiej artyleryjskiej akademii. Autor sześciotomowej pracy "Kurs matematyki".

Rozpatrzymy ciąg arytmetyczny

$$1, 2, 3, \ldots, 98, 99, 100$$

i obliczymy sumę jego wyrazów.

Zapiszemy szukaną sumę dwoma sposobami a zatem dodamy otrzymane równości:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcccrcrcr} & S_{100} = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ + & S_{100} = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 2S_{100} = & \multicolumn{13}{l}{\underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 + 101}_{100 \text{ składników}}} \end{array}$$

Otrzymamy: $\mathbf{2S_{100} = 101 \cdot 100;}$ $S_{100} = 5050$.

Głosi legenda, że wybitny niemiecki matematyk Carl Friedrich Gauss mając 5 lat wymyślił wyżej wymienione rozwiązanie.

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

Skorzystamy z podanego opisu i zastosujemy go dla obliczenia sumy (*).

Zapiszemy sumę S_n dwoma sposobami. Na początku zapiszemy sumę z pierwszym składnikiem równym a_1, zaś każdy następny składnik otrzymano z poprzedniego do którego dodano różnicę d. Zatem zapiszemy sumę zaczynając z pierwszego składnika równego a_n, i każdego następnego składnika jako różnica między poprzednim i różnicy d.

Otrzymamy:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-2)\,d) + (a_1 + (n-1)\,d),$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-2)\,d) + (a_n - (n-1)\,d).$$

Dodając te równości obustronnie, otrzymamy:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n).$$

Wyrażenie zapisane w prawej stronie ostatniej równości jest sumą n-składników o każdym z nich równym $a_1 + a_n$.

Wtedy $2S_n = (a_1 + a_n)\,n$, czyli:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

Otrzymana równość nazywa się **wzorem na sumę n kolejnych pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego.**

Podstawiając do tego wzoru zamiast a_n wyraz $a_1 + d\,(n-1)$, otrzymamy:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d\,(n-1)}{2} \cdot n.$$

Stąd

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n}$$

Ostatni wzór wygodnie zastosowywać, gdy wiadomy jest pierwszy wyraz oraz różnica ciągu.

PRZYKŁAD 1 Oblicz sumę wszystkich trzycyfrowych liczb, które są wielokrotnością 6.

Rozwiązanie. Dane liczby tworzą ciąg arytmetyczny, w którym pierwszy wyraz $a_1 = 102$, zaś różnica $d = 6$. Wtedy $a_n = 102 + 6(n-1) =$ $= 6n + 96$. Podamy ilość wyrazów tego ciągu. Ponieważ $a_n < 1000$, to wtedy ilość wyrazów – to największe rozwiązanie nierówności $6n + 96 < 1000$. Otrzymamy:

$$6n < 904;$$

$$n < 150\frac{2}{3}.$$

A więc, $n = 150$. Teraz możemy znaleźć szukaną sumę:

$$S_{150} = \frac{2 \cdot 102 + 6 \cdot (150 - 1)}{2} \cdot 150 = 82\,350.$$

Odpowiedź: 82 350. ◀

PRZYKŁAD 2 Suma siedemdziesięciu pięciu kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego wynosi 450. Oblicz trzydziesty ósmy wyraz ciągu.

Rozwiązanie. Przyjmiemy, że pierwszy wyraz ciągu oraz jego różnica są odpowiednio równe a_1 i d. Wtedy możemy zapisać:

$$S_{75} = \frac{2a_1 + 74d}{2} \cdot 75 = 75(a_1 + 37d) = 450.$$

Ponieważ $a_{38} = a_1 + 37d$, to szukany wyraz ciągu

$$a_{38} = 450 : 75 = 6.$$

Odpowiedź: 6. ◀

?

1. Jak określić sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, jeżeli wiadomy pierwszy i ostatni wyraz?
2. Jak określić sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, gdy wiadomy pierwszy jego wyraz i różnica?

ĆWICZENIA

17.1.° Ilu jest równa suma siedmiu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), gdy $a_1 = 9$ i $a_7 = 15$?

17.2.° Ilu jest równa suma sześciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (b_n), gdy $b_1 = 19$ i $b_6 = 14$?

17.3.° Oblicz sumę dwunastu wyrazów początkowych ciągu arytmetycznego, w którym $a_1 = -6$ i $d = 4$.

17.4.° Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego $-8, -6, -4, \ldots$.

17.5.° Miejsca w sektorze cyrku rozmieszczono w taki sposób, że w pierwszym rzędzie jest 6 miejsc, a w każdym następnym o 3 miejsca więcej od poprzedniego rzędu. Ile miejsc jest w sektorze, jeżeli on mieści 16 rzędów?

17.6.° Dymitr wypożyczył książkę w bibliotece. W ciągu pierwszego dnia on przeczytał 40 stronic, a każdego następnego dnia on czytał o 10 stronic więcej od poprzedniego dnia. Ile stronic miała książka, jeżeli Dymitr czytał ją 7 dni?

17.7.° Ciąg arytmetyczny (a_n) jest określony wzorem n-tego wyrazu $a_n = -4n + 1$. Oblicz sumę trzydziestu dwóch początkowych wyrazów ciągu.

17.8.° Ciąg arytmetyczny (c_n) określony wzorem n-tego wyrazu $c_n = 5n - 2$. Oblicz sumę dwudziestu sześciu wyrazów początkowych ciągu.

17.9.• Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), gdy:

1) $a_1 = 6$, $a_9 = 22$;
2) $a_6 = 49$, $a_{20} = 7$.

17.10.• Ile wynosi suma czterdziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (x_n), gdy $x_8 = -14$, $x_{30} = -3$?

17.11.• Ile uderzeń zrobi zegar w ciągu doby, jeżeli on uderza tylko całą ilość godzin od 1 do 12?

17.12.• Oblicz sumę dwudziestu pięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), jeżeli $a_{10} = 44$, zaś różnica ciągu $d = 4$.

17.13.• Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), w którym $a_6 + a_8 - a_{14} = -17$ i $a_5 + a_{22} = 101$.

17.14.• Oblicz sumę trzydziestu trzech wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), gdy $a_3 + a_5 + a_{13} = 33$ i $a_{15} - a_8 - a_{10} = -1$.

17.15.• Dla jakiejkolwiek wartości n sumę n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego można obliczyć według wzoru $S_n = 3n^2 + 5n$. Oblicz trzy początkowe wyrazy tego ciągu.

17.16.• Dla jakiejkolwiek wartości n sumę n-początkowych wyrazów pewnego ciągu arytmetycznego można obliczyć według wzoru $S_n = 9n - 2n^2$. Oblicz siódmy wyraz tego ciągu.

17.17.• (*Starożytne zadanie Egiptu*) Sto miar chleba należało rozdzielić między pięcioma osobami tak, aby druga osoba otrzymała o tyle więcej od pierwszej, o ile trzecia otrzymała więcej od drugiej, czwarta więcej od trzeciej, piąta więcej od czwartej. Oprócz tego dwie pierwsze osoby powinne otrzymać 7 razy mniej od pozostałych trzech osób. Ile trzeba dać każdej osobie?

17.18.• Ile wynosi suma n-początkowych:
1) liczb naturalnych; 2) nieparzystych liczb?

17.19.• Ile wynosi suma n początkowych liczb parzystych?

17.20.•• Jaka liczba naturalna jest równa sumie wszystkich poprzedzających ją liczb naturalnych?

17.21.•• Oblicz sumę wszystkich ujemnych wyrazów ciągu arytmetycznego –6,2; –5,9; –5,6; ... .

17.22.•• Oblicz sumę wszystkich dodatnich wyrazów ciągu arytmetycznego 8,4; 7,8; 7,2; ... .

17.23.•• Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych, które są wielokrotnością 5 i nie większe od 240.

17.24.•• Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych, które są wielokrotnością 4 i mniejsze od 130.

17.25.•• Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych, które są wielokrotnością 12 i mniejsze od 200.

17.26.•• Oblicz sumę wszystkich trzycyfrowych liczb wielokrotności 8.

17.27.•• Oblicz sumę wszystkich trzycyfrowych liczb wielokrotności 7.

17.28.•• Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego, pierwszy wyraz którego jest równy 8,5, a suma szesnastu początkowych wyrazów wynosi 172.

17.29.•• Oblicz pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego, różnica którego jest równa –4, a suma dziewięciu początkowych wyrazów wynosi –54.

17.30.•• Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy –9, a różnica równa 6. Ile należy wziąć początkowych wyrazów ciągu, aby ich suma wynosiła 960?

17.31.•• Jaką najmniejszą ilość kolejnych nieparzystych liczb naturalnych zaczynając od 7 należy dodać, aby otrzymać ich sumę większą od 315?

17.32.•• Czy suma jakichkolwiek pięciu kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego 3, 7, 11, ... może wynosić 135? Jeżeli odpowiedź będzie stwierdzającą, to oblicz te liczby.

17.33.•• Czy suma czterech wyrazów kolejnych ciągu arytmetycznego 2, 8, 14, ... może wynosić 176? Jeżeli odpowiedź będzie stwierdzającą, to oblicz te liczby.

17.34.•• Podczas wolnego padania ciało w ciągu pierwszej sekundy spada na 4,9 m, a w ciągu każdej zaś następnej – o 9,8 m więcej od poprzedniej sekundy, jeżeli nie brać pod uwagę opór powietrza. Oblicz czas padania ciała z wysokości 490 m (nie brać pod uwagę opór powietrza).

17.35.•• Suma nieparzystych stronic w książce jest liczbą nieparzystą, która jest większą od 450 i mniejszą od 500. Ile stronic ma książka?

17.36.•• Oblicz sumę wyrazów ciągu arytmetycznego od ósmego włącznie do dwudziestego, jeżeli pierwszy wyraz tego ciągu jest równy 24, a różnica ciągu jest –8.

17.37.•• Oblicz sumę ciągu arytmetycznego (x_n) od dziesiątego do włącznie dwudziestego piątego jego wyrazów, jeżeli $x_1 = -3$ i $x_{11} = 12$.

17.38.•• Suma początkowych sześciu wyrazów ciągu arytmetycznego wynosi 39, zaś suma początkowych czternastu wyrazów wynosi –77. Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu.

17.39.•• Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 100, a suma sześciu początkowych wyrazów jest 5 razy większa od sumy następnych sześciu wyrazów. Ile wynosi różnica ciągu?

17.40.•• Różnica ciągu arytmetycznego jest równa 28, zaś suma kolejnych początkowych wyrazów jest 4 razy mniejsza od sumy następnych sześciu wyrazów. Ile wynosi pierwszy wyraz ciągu?

17.41.•• Dwunasty wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 30. Oblicz sumę dwudziestu trzech wyrazów tego ciągu.

17.42.•• Oblicz sumę dwudziestu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), jeżeli $a_5 + a_{10} + a_{12} + a_{15} = 50$.

17.43.•• Rozwiąż równanie:

1) $7 + 13 + 19 + ... + (6n + 1) = 480$, gdzie n – liczba naturalna;
2) $5 + 8 + 11 + ... + x = 124$, gdzie x – liczba naturalna.

17.44.•• Rozwiąż równania:

1) $11 + 19 + 27 + \ldots + (8n + 3) = 470$, gdzie n – liczba naturalna;
2) $1 + 5 + 9 + \ldots + x = 630$, gdzie x – liczba naturalna.

17.45.•• Oblicz pierwszy wyraz i różnicę ciągu arytmetycznego w którym średnia arytmetyczna n początkowych wyrazów jest równa ich ilości przy jakiejkolwiek wartości n.

17.46.•• (*Zadanie Hypsiklesa z Aleksandrii*[1]) Udowodnij, że w ciągu arytmetycznym o parzystej ilości wyrazów, które składa się z liczb całkowitych suma pierwszej połowy jest mniejsza od sumy drugiej połowy o liczbę, która jest wielokrotnością kwadratu połowy ilości wyrazów.

17.47.•• Udowodnij, że kiedy suma n początkowych wyrazów ciągu oblicza się według wzoru $S_n = n^2 - 3n$, to ten ciąg jest ciągiem arytmetycznym. Oblicz pierwszy wyraz oraz różnicę tego ciągu.

17.48.•• Oblicz sumę wszystkich liczb dwucyfrowych, które nie dzielą się bez reszty ani przez 3 ani przez 5?

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

17.49. Sporządź wykres funkcji

1) $y = x^2 - 4x + 4$;
2) $y = 2x^2 + 8x + 8$.

Korzystając z konstrukcji wykresu, podaj zbiór wartości, przedziały w których funkcja rośnie i maleje.

17.50. Oblicze:

1) $\frac{3^{49}}{9^{25}}$; 2) $\frac{4^8}{8^4}$; 3) $\frac{5^4 \cdot 11^7}{55^6}$; 4) $\frac{12^5}{18^3}$.

17.51. Dla jakiej wartości k wykres funkcji $y = kx - 3$ i $y = x^2$ przecina się w punkcie o odciętej równej –2?

17.52. Uprość wyrażenie:

1) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{bc}}$;
2) $\frac{d - 49}{d + 12\sqrt{d} + 36} \cdot \frac{4\sqrt{d} + 24}{3\sqrt{d} + 21}$.

17.53. W ciągu każdej minuty rowerzysta przejeżdża o 600 m mniej od motocyklisty, wskutek tego na drodze 120 km on traci o 3 godz więcej od motocyklisty. Oblicz prędkość motocyklisty.

[1] Hypsikles z Aleksandrii (II w. p.n.e.) – starogrecki uczony, autor XIV księgi "Początek"Euklidesa.

17.54. Jedna robotnica może wyhaftować komplet serwetek za 6 godz., zaś druga – za 4 godz. Przy wspólnej pracy ich wydajność zwiększy się o 20 %. Za jaki czas, pracując wspólnie, one wyhaftują ten komplet?

17.55. Zmieszano 30-odsetkowy roztwór kwasu solnego z 10-odsetkowym roztworem i otrzymano 800 g 15-odsetkowego roztworu. Ile gramów każdego roztworu wzięto?

UCZYMY SIĘ NIESTANDARDOWEGO MYŚLENIA

17.56. Znajdź wszystkie pary liczb (x; y), które spełniają równanie

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=x^2+y^2+2.$$

18. Ciąg geometryczny

Rozpatrzymy następujące ciągi:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ \ldots,$$

$$2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots,$$

$$5;\ -0{,}5;\ 0{,}05;\ -0{,}005;\ 0{,}0005;\ \ldots\ .$$

One przyporządkowują się następującej charakterystyce: *każdy następny wyraz ciągu otrzymuje się w wyniku mnożenia wyrazu poprzedniego przez jedną i tą samą liczbę*. Dla pierwszego ciągu będzie to liczba 3, dla drugiego ciągu jest to liczba równa $\frac{1}{2}$, zaś dla trzeciego jest to liczba równa –0,1.

Z ciągami podobnymi możemy spotkać się, na przykład, podczas nauki populacji kolonii bakterii, comiesięcznym pierwszym obliczeniom odsetek na ulokowane finanse w banku oprocentowaniem. Takie ciągi nazywają się **ciągami geometrycznymi.**

Definicja. Ciągiem geometrycznym nazywa się ciąg, o pierwszym wyrazie różnym od zera, w którym każdy wyraz, zaczynając od drugiego jest równy poprzedniemu pomnożonemu przez jedną i tę samą liczbę różną od zera.

Liczba, która jest równa stosunkowi następnego do poprzedniego wyrazu ciągu nazywa się **ilorazem ciągu geometrycznego** i oznacza się literą q (pierwszej literą słowa francuskiego *quotieut* – iloraz).

A więc, jeżeli (b_n) – to ciąg geometryczny o ilorazie q, to:

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \dots,$$

co oznacza, że dla jakiejkolwiek naturalnej wielkości n spełnia się równość $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$. Stąd, otrzymamy rekurencyjny wzór: $b_{n+1} = b_n q$.

Zatem, ciąg geometryczny można określić rekurencyjnie:

$$\boxed{\boldsymbol{b_1 = b,\ b_{n+1} = b_n q}}$$

A więc, aby określić ciąg geometryczny, należy podać jego pierwszy wyraz i iloraz.

Podamy kilka następujących przykładów.

Jeżeli $b_1 = 1$ i $q = 3$, to otrzymamy ciąg geometryczny, który był podany na początku punktu:

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots .$$

Jeżeli $b_1 = 2$ i $q = 2$, to otrzymamy ciąg geometryczny, który jest ciągiem naturalnych potęg liczby 2:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \dots .$$

Zauważymy, że ciąg geometryczny o ilorazie równym 1 jest ciągiem, wszystkie wyrazy którego są równe. Więc, ciąg 5, 5, 5, 5, ... jest ciągiem geometrycznym, w którym $b_1 = 5$, $q = 1$. Jednocześnie, ten ciąg możemy rozpatrywać jako ciąg arytmetyczny, gdzie $a_1 = 5$, $d = 0$.

Ogółem, jakikolwiek ciąg, wyrazy którego są równe między sobą lecz różne od zera, są jednocześnie ciągiem i geometrycznym i ciągiem arytmetycznym. Ciąg 0, 0, 0, 0, ..., wszystkie wyrazy którego są równe zeru, jest tylko ciągiem arytmetycznym.

Przekonamy się, jak można określić ciąg geometryczny według wzoru n-tego wyrazu.

Z definicji ciągu geometrycznego wynika, że:

$$b_2 = b_1 \cdot q;$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 q) \cdot q = b_1 q^2;$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 q^2) \cdot q = b_1 q^3;$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 q^3) \cdot q = b_1 q^4.$$

Te przykłady pomogą nam zrozumieć następującą własność: aby znaleźć jakikolwiek wyraz ciągu geometrycznego należy pierwszy wyraz pomnożyć przez potęgę o podstawie q i wykładnikiem, który jest o 1 mniejszy od wskaźnika szukanego wyrazu. Stąd, na przykład, $b_6 = b_1q^5$, $b_7 = b_1q^6$, i ogólnie:

$$\boxed{\boldsymbol{b_n = b_1q^{n-1}}}$$

Wyżej wymieniona równość nazywa się **wzorem na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego.**

Ustalimy bardzo ważną własność wyrazów ciągu geometrycznego (b_n).

Otrzymamy:

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2}, \text{ stąd } b_2^2 = b_1 \cdot b_3;$$

$$\frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3}, \text{ stąd } b_3^2 = b_2 \cdot b_4.$$

Ogółem, dla dowolnej wartości h większej od 1 można zapisać: $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Stąd

$$\boxed{\boldsymbol{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}}}$$

Kwadrat jakiegokolwiek wyrazu ciągu geometrycznego oprócz pierwszego (i ostatniego, jeżeli ciąg jest skończony) jest równy iloczynowi dwóch sąsiednich wyrazów.

Jeżeli wszystkie wyrazy ciągu geometrycznego (b_n) są dodatnie, to równość $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ można podać następująco:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

A więc, każdy wyraz ciągu geometrycznego, oprócz pierwszego (i ostatniego, jeżeli ciąg jest skończony), jest średnią geometryczną wielkością dwóch sąsiednich jego wyrazów.

Rozpatrzymy dwa ciągi.

Arytmetyczny ciąg (a_n), w którym $a_1 = 1$, $d = 2$:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, \ldots .$$

Geometryczny ciąg (b_n), w którym $b_1 = 1$, $q = 2$:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \ldots .$$

Pierwsze wyrazy tych ciągów są jednakowe. Obydwa te ciągi są skonstruowane za pomocą tej samej liczby 2 ($d = q = 2$). Jednocześnie, porównując odpowiednie wyrazy tych ciągów, możemy zauważyć, że ciąg geometryczny “rośnie” o wiele prędzej od ciągu arytmetycznego. Na przykład, w ciągu arytmetycznym $a_{20} = 1 + 2 \cdot 19 = 39$, zaś w ciągu geometrycznym $b_{20} = 1 \cdot 2^{19} = 524\,288$.

Już wiecie, że bakterie rozmnażają się przez podział: jedna bakteria dzieli się na dwie części. Teraz możemy zrozumieć, dlaczego tak prędko rośnie populacja bakterii, jeżeli ich umieścić w odpowiednie środowisko.

Możliwie, że z tym przykładem jest powiązane to, że często w życiu codziennym, gdy trzeba podkreślić szybki wzrost wielkości, używa się wypowiedzi: “rośnie jak ciąg geometryczny”.

PRZYKŁAD 1 W ciągu geometrycznym (b_n) o ilorazie $q = \frac{1}{3}$ oblicz b_1, gdy $b_6 = \frac{5}{81}$.

Rozwiązanie. Ponieważ $b_6 = b_1q^5$, to

$$b_1 = b_6 : q^5 = \frac{5}{81} : \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{5}{3^4} \cdot 3^5 = 5 \cdot 3 = 15.$$

Odpowiedź: 15. ◀

PRZYKŁAD 2 Oblicz czwarty wyraz i iloraz ciągu geometrycznego (b_n), w którym $b_3 = 36$, $b_5 = 49$.

Rozwiązanie. Według własności ciągu geometrycznego, otrzymamy $b_4^2 = b_3b_5$, stąd $b_4 = \sqrt{b_3b_5} = \sqrt{36 \cdot 49} = 6 \cdot 7 = 42$ lub $b_4 = -\sqrt{b_3b_5} = -42.$

Jeżeli $b_4 = 42$, to iloraz ciągu $q = b_4 : b_3 = \frac{42}{36} = \frac{7}{6}$; jeżeli $b_4 = -42$, to $q = -\frac{7}{6}$.

Odpowiedź: $b_4 = 42$, $q = \frac{7}{6}$ lub $b_4 = -42$, $q = -\frac{7}{6}$. ◀

PRZYKŁAD 3 Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu geometrycznego (b_n), w którym $b_3 + b_6 = 504$ i $b_4 - b_5 + b_6 = 378$.

Rozwiązanie. Przyjmiemy, że q – iloraz ciągu geometrycznego. Otrzymamy układ dwóch równań z dwiema zmiennymi b_1 i q:

$$\begin{cases} b_1q^2 + b_1q^5 = 504, \\ b_1q^3 - b_1q^4 + b_1q^5 = 378. \end{cases}$$

Podzielimy obustronnie lewe i prawe strony równań układu.

$$\frac{b_1q^2\,(1+q^3)}{b_1q^3\,(1-q+q^2)} = \frac{504}{378}.$$

Następnie otrzymamy:

$$\frac{b_1q^2\,(1+q)\,(1-q+q^2)}{b_1q^3(1-q+q^2)} = \frac{4}{3};$$

$$\frac{1+q}{q} = \frac{4}{3};$$

$$4q = 3 + 3q;$$
$$q = 3.$$

Podstawiając wartość q do pierwszego równania układu, otrzymamy: $9b_1 + 243b_1 = 504$; stąd $252b_1 = 504$; $b_1 = 2$.

Odpowiedź: $b_1 = 2$, $q = 3$. ◄

PRZYKŁAD 4 Dla jakiej wartości x wyrażenia $3x$, $7 - x$ i $5x + 7$ będą kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego? Oblicz te liczby.

Rozwiązanie. Jeżeli wartości wyrażeń $3x$, $7 - x$ i $5x + 7$ są wyrazami ciągu geometrycznego, to powinna spełniać się równość: $(7 - x)^2 = 3x(5x + 7)$.

Dalej otrzymamy:

$$49 - 14x + x^2 = 15x^2 + 21x;$$
$$14x^2 + 35x - 49 = 0;$$
$$2x^2 + 5x - 7 = 0;$$
$$x = 1 \text{ lub } x = -\frac{7}{2}.$$

Jeżeli $x = 1$, to otrzymamy następujący ciąg geometryczny: 3, 6, 12.

Jeżeli $x = -\frac{7}{2}$, to otrzymamy następujący ciąg geometryczny: $-\frac{21}{2}$, $\frac{21}{2}$, $-\frac{21}{2}$.

Odpowiedź: dla $x = 1$ mamy, że: 3, 6, 12; dla $x = -\frac{7}{2}$ otrzymamy: $-\frac{21}{2}$, $\frac{21}{2}$, $-\frac{21}{2}$. ◄

Rozwiążemy zadanie stosowane, z jakim bardzo często spotykają się pracownicy banku, oraz ci, którzy ulokowali swoje koszty na depozycie w banku.

PRZYKŁAD 5 Przypuśćmy, że wkładca wpłacił do banku 100 000 hrn pod 10 % rocznych. Jaka kwota będzie na koncie po 7 latach pod warunkiem, że wkładca nie zabierze tej kwoty w ciągu tego czasu?

Rozwiązanie. Przyjmiemy, że a_0 – to początkowy kapitał wkładcy, czyli

$$a_0 = 100\,000 \text{ hrn}.$$

Oznaczymy przez a_1, a_2, ..., a_7 ilość kwoty na koncie odpowiednio w końcu pierwszego, drugiego, ..., siódmego roku. Oczywiście, że ciąg a_0, a_1, a_2, ..., a_7 jest ciągiem geometrycznym, iloraz którego jest równy 110 %, czyli 1,1.

Wtedy

$$a_7 = a_0 \cdot 1{,}1^7 = 100\,000 \cdot 1{,}1^7 = 194\,871{,}71 \quad \text{(hrn)}.$$

Odpowiedź: 194 871,71 hrn. ◄

Analogicznie można rozwiązać to zadanie w ogólnej postaci, biorąc że początkowy kapitał równy a_0, był włożony do banku z oprocentowaniem p % rocznym. Wtedy w końcu n-tego roku będziemy mieć:

$$\boxed{a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

Otrzymaliśmy wzór, który nazywa się **wzorem składnych odsetek.**

?

1. Jaki ciąg nazywa się ciągiem geometrycznym?
2. Jaka liczba nazywa się ilorazem ciągu geometrycznego?
3. Jaką postać ma wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego?
4. Jaka jest zależność między trzema wyrazami ciągu geometrycznego?
5. Jaką postać ma wzór składnych odsetek? Uzasadnij go.

ĆWICZENIA

18.1.° Pośród niżej wymienionych ciągów wskaż ciągi geometryczne, ich pierwszy wyraz oraz iloraz każdego z nich:

1) 2, 6, 18, 36;
2) 4, 8, 16, 32;
3) 10, 20, 30, 40;
4) 81, 27, 9, 3;
5) 2, –2, 2, –2;
6) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2$;
7) –9, –9, –9, –9;
8) 1, 2, 3, 5;
9) $\sqrt{2},\ 2,\ 2\sqrt{2},\ 4$.

18.2.° Szósty wyraz ciągu geometrycznego (b_n) jest równy 8, zaś iloraz wynosi –4. Oblicz siódmy wyraz ciągu.

18.3.° Oblicz siódmy wyraz ciągu geometrycznego (b_n), jeżeli $b_8 = 16$, zaś iloraz ciągu $q = \frac{3}{4}$.

18.4.° Ile wynosi iloraz ciągu geometrycznego (b_n), jeżeli:

1) $b_1 = 6,\ b_2 = -3$;
2) $b_7 = -9,\ b_8 = 15$;
3) $b_{10} = 3\sqrt{3},\ b_{11} = 9$?

18.5.° Oblicz iloraz ciągu geometrycznego (b_n), jeżeli:

1) $b_{12} = 24,\ b_{13} = 4$;
2) $b_4 = -\frac{2}{9},\ b_5 = \frac{4}{15}$.

18.6.° Ile wynosi pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (b_n), jeżeli $b_2 = 12$, zaś iloraz ciągu $q = \frac{1}{3}$?

18.7.° Siódmy wyraz ciągu geometrycznego jest równy $\frac{1}{2}$, zaś jego iloraz wynosi 4. Oblicz szósty wyraz ciągu.

18.8.° Oblicz cztery początkowe wyrazy ciągu geometrycznego (x_n), jeżeli $x_1 = 0{,}2$, zaś iloraz ciągu $q = -5$.

18.9.° Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy $-\frac{1}{27}$, a iloraz równy 3. Oblicz pięć początkowych wyrazów ciągu.

18.10.° W ciągu geometrycznym (y_n) pierwszy wyraz $y_1 = 64$, zaś iloraz $q = -\frac{1}{2}$. Oblicz: 1) y_3; 2) y_6; 3) y_{10}.

18.11.° W ciągu geometrycznym (c_n) pierwszy wyraz $c_1 = 9$, zaś iloraz $q = -1$. Oblicz: 1) c_{21}; 2) c_{50}.

18.12.° Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego $b_1 = \frac{1}{125}$, a jego iloraz $q = 5$. Oblicz: 1) b_4; 2) b_7.

18.13.° Oblicz iloraz oraz piąty wyraz ciągu geometrycznego $\frac{1}{216}$, $\frac{1}{36}$, $\frac{1}{6}$, ...

18.14.° Oblicz iloraz oraz szósty wyraz ciągu geometrycznego. 18, 12, 8, ...

18.15.° Udowodnij, że, gdy ciąg (x_n) – jest ciągiem geometrycznym, to $x_3x_{13} = x_5x_{11}$.

18.16.° Udowodnij, że, gdy ciąg (y_n) – jest ciągiem geometrycznym, to $y_4y_{21} = y_8y_{17}$.

18.17.° Wkładca ulokował do banku 5000 hrn pod 8 % rocznych. Jaka kwota będzie na jego koncie po upływie roku?

18.18.° Cztery lata temu przedsiębiorstwo produkowało 10 000 jednostek pewnego wyrobu w ciągu roku. Zawdzięczając modernizacji i zwiększeniu wydajności pracy otrzyma przyrost produkcji o 20 %. Ile sztuk danego wyrobu będzie się produkować w tym roku?

18.19.° Po dwóch kolejnych zniżkach ceny o 10 % stół kosztuje 2916 hrn. Oblicz odsetkową cenę stołu.

18.20.° Po dwóch kolejnych podwyżkach o 25 % żyrandol kosztuje 937 hrn 50 kop. Oblicz początkową cenę żyrandola.

18.21.° Ilość ludności w mieście w ciągu dwóch lat zwiększyła się z 40 000 do 44 100. Oblicz średni coroczny przyrost ludności w tym mieście.

18.22.° Wskutek dwóch kolejnych obniżek cen o tę samą ilość odsetek cena krzesła obniżyła się z 800 hrn do 578 hrn. O ile odsetek każdego razu obniżyła się cena?

18.23.• Wyraź wyrazy b_8, b_{13} i b_{60} ciągu geometrycznego (b_n) przez b_7 i iloraz q.

18.24.• Wyraź wyrazy c_{18}, c_{36} i c_{50} ciągu geometrycznego (c_n) przez c_{12} i iloraz q.

18.25.• Oblicz iloraz ciągu geometrycznego (b_n), jeżeli:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_8 = 64$; 2) $b_6 = 75$, $b_8 = 27$.

18.26.• Oblicz pierwszy wyraz ciągu geometrycznego (c_n), jeżeli:

1) $c_4 = \frac{1}{98}$, iloraz $q = \frac{2}{7}$; 2) $c_6 = 100$, $c_9 = 100\,000$.

18.27.• Liczba 486 jest wyrazem ciągu geometrycznego 2, 6, 18, ... Podaj wskaźnik tej liczby.

18.28.• Liczba 96 jest wyrazem ciągu geometrycznego $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, ... Podaj wskaźnik tej liczby.

18.29.• Jakie dwie liczby należy wstawić między liczbami 6 i 750, aby wraz z podanymi tworzyły ciąg geometryczny?

18.30.• Jakie cztery liczby należy umieścić między liczbami 0,5 i 16, aby wraz z podanymi tworzyły ciąg geometryczny?

18.31.• Ciąg (b_n) określony wzorem n-tego wyrazu $b_n = 5 \cdot 4^{n-2}$. Czy ten ciąg będzie ciągiem geometrycznym? Czy odpowiedź będzie stwierdzająca, to wskaż jego pierwszy wyraz i iloraz.

18.32.• Udowodnij, że ciąg (x_n), określony wzorem n-tego wyrazu $x_n = 7^{n+1}$, jest ciągiem geometrycznym oraz podaj jego pierwszy wyraz i iloraz.

18.33.• Ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym. Oblicz:
1) b_5, jeżeli $b_4 = 9$, $b_6 = 25$;
2) b_{20}, jeżeli $b_{19} = -3$, $b_{21} = -12$;
3) b_{17}, jeżeli $b_{16} = 2$, $b_{18} = 10$.

18.34.• Dla jakiej wartości zmiennej x liczby x, $3x$ i 18 będą kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?

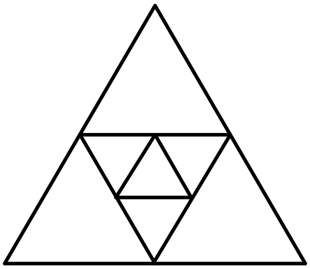
18.35.$^{\bullet}$ Dla jakiej wartości zmiennej y liczby -1, $2y$ i -8 będą kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?

18.36.$^{\bullet}$ Drugi wyraz ciągu geometrycznego jest równy 6. Oblicz iloczyn trzech początkowych wyrazów ciągu.

18.37.$^{\bullet}$ Trzeci wyraz ciągu geometrycznego jest równy 3. Oblicz iloczyn początkowych wyrazów tego ciągu.

18.38.$^{\bullet}$ Udowodnij, że w skończonym ciągu geometrycznym iloczyn wyrazów równooddalonych od końców jest równy iloczynowi skrajnych wyrazów.

18.39.$^{\bullet}$ W foremny trójkąt o boku a kolejno są wpisane trójkąty w taki sposób, że wierzchołki każdego następnego trójkąta są środkami boków poprzedniego trójkąta (rys. 18.1). Udowodnij, że obwody tych trójkątów tworzą ciąg geometryczny oraz podaj wzór na n-ty wyraz ciągu.



Rys. 18.1

18.40.$^{\bullet}$ Czy podane ciągi są ciągami geometrycznymi, jeżeli:

1) 2^{-n}, 2^{-2n}, 2^{-3n}, 2^{-4n};
2) 2^{n}, 2^{n^2}, 2^{n^3}, 2^{n^4};
3) 2^{n}, 2^{n+1}, 2^{n+2}, 2^{n+3}?

Gdy odpowiedź będzie stwierdzającą, wtedy wskaż iloraz tego ciągu.

18.41.$^{\bullet}$ Czy ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym q. Czy niżej wymienione ciągi są geometrycznymi:

1) $b_1, b_3, ..., b_{2n-1}$;
2) $2b_1, 2b_2, ..., 2b_n$;
3) $b_1 + b_2, b_2 + b_3, ..., b_{n-1} + b_n$;
4) $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, ..., \frac{1}{b_n}$?

Gdy odpowiedź będzie stwierdzającą, wtedy wskaż iloraz tego ciągu.

18.42.$^{\bullet}$ Ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym o ilorazie q. Czy niżej wymienione ciągi są geometrycznymi:

1) $b_2, b_4, ..., b_{2n}$;
2) $b_1b_3, b_2b_4, b_3b_5, ..., b_{n-2}b_n$?

Gdy odpowiedź będzie stwierdzającą, to podaj iloraz ciągu.

18.43.$^{\bullet\bullet}$ Między liczbami 80 i 5 zapisz trzy takie liczby, aby z danymi wyrazami tworzyły ciąg geometryczny.

18.44.$^{\bullet\bullet}$ Między liczbami 6 i 486 zapisz trzy takie liczby, aby wraz z danymi liczbami tworzyły ciąg geometryczny.

18.45.•• Oblicz pierwszy wyraz i iloraz wymienionych ciągów geometrycznych (b_n), w których:

1) $b_5 = 3b_3$ i $b_6 - b_2 = 48$;
2) $b_4 + b_7 = \frac{56}{9}$ i $b_5 - b_6 + b_7 = \frac{14}{9}$;
3) $b_5 - b_4 = 168$ i $b_3 + b_4 = -28$.

18.46.•• Oblicz pierwszy wyraz oraz iloraz ciągu geometrycznego: (b_n), w których:

1) $b_4 - b_2 = 30$ i $b_4 - b_3 = 24$;
2) $b_2 - b_5 = 78$ i $b_3 + b_4 + b_5 = -117$.

18.47.•• Dla jakiej wartości x wartości wyrażeń $2x + 1$, $x + 5$ i $x + 11$ będą ciągiem geometrycznym? Oblicz wyrazy tego ciągu.

18.48.•• Dla jakiej wartości x wyrażenia $x + 6$, $x + 2$ i $3x - 4$ będą stanowiły ciąg geometryczny? Oblicz wyrazy tego ciągu.

18.49.•• Udowodnij że gdy wyrazy ciągu (b_n) są różne od zera oraz dla jakiejkolwiek wartości naturalniej $n > 1$ spełnia się równość $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, to ten ciąg (b_n) będzie ciągiem geometrycznym.

18.50.•• Podaj ciąg geometryczny, który składa się z 6 wyrazów, jeżeli suma trzech pierwszych wyrazów wynosi 168, a suma trzech pozostałych wynosi 21.

18.51.•• Dane są trzy liczby dodatnie, które tworzą ciąg arytmetyczny, suma których jest równa 21. Jeżeli te liczby dopełnić liczbami 2, 3 i 9, to otrzymane liczby tworzą ciąg geometryczny. Oblicz dane liczby.

18.52.•• Dane są trzy wyrazy, które tworzą ciąg arytmetyczny. Ich suma wynosi 30. Jeżeli od pierwszej liczby odjąć 5, od drugiej liczby odjąć 4, zaś trzecią liczbę pozostawić bez zmian, to otrzymane liczby tworzą ciąg geometryczny. Oblicz dane liczby.

18.53.•• Dane są trzy liczby, które tworzą ciąg geometryczny. Suma tych liczb jest równa 65. Jeżeli od pierwszej z tych liczb odjąć 1, a drugą liczbę pozostawić bez zmian, oraz od trzeciej liczby odjąć 19, to otrzymane liczby będą tworzyć ciąg arytmetyczny. Oblicz dane liczby.

18.54.•• Dane są trzy liczby, które tworzą ciąg geometryczny, suma których jest równa 26. Jeżeli do tych liczb dodać odpowiednio liczby 1, 6 i 3, to otrzymane liczby będą tworzyć ciąg arytmetyczny. Oblicz te dane liczby.

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

18.55. Oblicz wartość wyrażenia:

1) $\frac{7^9}{7^{10}}$;
2) $\frac{125^3}{25^4}$;
3) $\frac{32^5}{64^4}$;
4) $\frac{39^8}{3^{10}\cdot 13^7}$.

18.56. Przekształć dane wyrażenie w ułamek:

1) $\frac{2}{x+y}+\frac{3}{x-y}$;
2) $\frac{a+1}{a-4}+\frac{a-1}{a-6}$;
3) $\frac{c-7}{c+1}-\frac{c-3}{c-5}$.

18.57. Udowodnij tożsamość:

$$\left(\frac{2b}{b^3+1}:\frac{1-b}{b^2-b+1}+\frac{2}{b-1}\right)\cdot\frac{b^2-2b+1}{4}:\frac{b-1}{b+1}=\frac{1}{2}.$$

18.58. Udowodnij, że wartość wyrażenia jest wymierną liczbą:

1) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\sqrt{10}+9}-3}-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\sqrt{10}+9}+3}$;
2) $\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}+\frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$.

18.59. Trzech robotników pracując razem wykopali ziemniaki za 3 dni, pracując codziennie 8 godz. W ciągu ilu dni ziemniaki wykopią 6 robotników pracując codziennie 6 godz., jeżeli wydajność ich pracy jest jednakowa.

18.60. Do stopu miedzi z cynkiem, który zawiera o 12 kg miedzi więcej od cynku, dodano 6 kg miedzi. Wskutek tego odsetkowa zawartość cynku w stopie zmniejszyła się o 5 %. Ile kilogramów cynku oraz ile kilogramów miedzi zawierał początkowy stop?

18.61. Do stopu magnezu i aluminium, zawierającego 12 % aluminium dodano 5 % magnezu, wskutek tego odsetkowa zawartość magnezu w stopie zwiększyła się o 20 %. Ile kilogramów magnezu było na początku w stopie?

18.62. Deponent złożył do banku 4000 hrn. W ciągu pierwszego roku naliczono mu pewny odsetek roczny, a w ciągu drugiego roku odsetek bankowy zwiększono o 4%. Po dwóch latach na koncie było 4664 hrn. Jaki był odsetek bankowy w ciągu pierwszego roku?

18.63. Deponent złożył do banku 10 000 hrn. W ciągu pierwszego roku naliczono mu pewny odsetek roczny. W następnym roku odsetek bankowy zmniejszono o 2 %. W końcu drugiego roku na koncie było 11 880. Ile odsetek stanowiła stopa bankowa w pierwszym roku?

Jak uniknąć niejednoznaczności w obliczeniach odsetkowych

Zadania, które zawierają odsetkowe stawki mogą czasami sprawiać trudności. Zadania 18.62 i 18.63 są typowymi przykładami o zwiększeniu (o zmniejszeniu) "odsetku bankierskiego". Stopa odsetkowa – to taka sama wielkość, jak i inne zmienne wielkości – prędkość, odległość, cena i inne. Różnica polega w tym, że ta wielkość jest wyrażona także w odsetkach. Dlatego sytuacja, w której mówi się o zmienianiu się tej wielkości, jest niejednoznaczną.

Podwyższenie cen x	Podwyższenie odsetkowej stopy x	Model matematyczny, który opisuje nowe wartości
Cena podwyższyła się o 10 hrn	Odsetkowa stopa podwyższyła się o 10 %	$x + 10$
Cena podwyższyła się o 10 %	Odsetkowa stopa podwyższyła się 10 %	$1,1x$

Widzimy, że w przypadku stopy odsetkowej podanie opisowe dla wszystkich modeli matematycznych jest jednakowe.

Aby uniknąć niejednoznaczności w ekonomice i w innych dziedzinach gdzie zastosowuje się odsetkowe obliczenie używa się pojęcie "punkty procentowe".

Podamy charakterystyczny przykład.

W klasach dziewiątych uczy się 100 uczniów, z których na początku roku szkolnego 20 % byli celującymi.

Jeżeli powiemy, że na koniec roku ilość celujących zwiększyła się o 5 %, wtedy to zdanie oznacza, że ilość celujących (wyrażona ilością osób) zwiększyła się o 5 % od danej ilości. Ilościowo celujących w tym przykładzie było 20 osób, gdy ta ilość zwiększyła się o 5 %, to wtedy będzie 21 osób.

Jeżeli chcemy powiedzieć, że wyznacznik "20 %" zwiększył się i teraz jest równy 25 %, to należy użyć słów "punktów procentowych": "na koniec roku ilość celujących zwiększyła się o 5 punktów procentowych". Zgodnie z takim formułowaniem ilość celujących na koniec roku wynosiła 25 osób.

Teraz zadanie można przefrazować tak, aby uniknąć błędnego tłumaczenia.

18.62. Deponent złożył do banku 4000 hrn. Za pierwszy rok naliczono pewny odsetek roczny, a w drugim roku odsetek bankowy zwiększono o 4 punkty procentowe. Pod koniec drugiego roku na koncie było 4664 hrn. Ile odsetek stanowiła stopa bankowa pierwszego roku?

19. Suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

Rozpatrzymy skończony ciąg geometryczny $b_1, b_2, b_3, ..., b_{n-1}, b_n$. Oznaczymy sumę tego ciągu przez S_n.

Otrzymamy:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_{n-1} + b_n. \qquad (*)$$

Wyprowadzimy wzór na obliczenie tej sumy.

Na początku rozpatrzymy zadanie, rozwiązanie którego będzie drogowskazem do wyprowadzenia szukanego wzoru.

Rozpatrzymy ciąg geometryczny $1, 2, 2^2, ..., 2^{62}, 2^{63}$ i obliczymy sumę jego wyrazów S_{64}:

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{62} + 2^{63}.$$

Obie strony zapisanej równości pomnożymy przez iloraz ciągu – liczbę 2, wtedy:

$$2S_{64} = 2 + 2^2 + ... + 2^{62} + 2^{63} + 2^{64}.$$

Obliczymy różnicę $2S_{64} - S_{64}$:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcccrcr} & 2S_{64} = & & & & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & ... & + & 2^{63} & + & 2^{64} \\ - & S_{64} = & 1 & + & & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & ... & + & 2^{63} & & \\ \hline & 2S_{64} - S_{64} = & -1 & + & & 0 & + & 0 & + & 0 & + & ... & + & 0 & + & 2^{64} \end{array}$$

Stąd $S_{64} = 2^{64} - 1$.

Może wyniknąć pytanie: Dlaczego dla przykładu obraliśmy taki ciąg $1, 2, 2^2, ..., 2^{62}, 2^{63}$?

Z tym ciągiem powiązana jest legenda. Hinduski mędrzec, który wynalazł grę w szachy, za swój wynalazek poprosił radżę, jak się wydaje, niewielką nagrodę: za pierwsze pole szachownicy – 1 ziarenko pszenicy, za drugie – 2 ziarenka, za trzecie – 4 itd. – za każde następne pole szachownicy dwa razy więcej ziarenek niż za poprzednie pole.

Oczywiście, że ogólna ilość ziarenek, jaką poprosił wynalazca, wynosiła $S_{64} = 2^{64} - 1$.

Bogaty radża był zaskoczony, gdy dowiedział się, że on nie będzie mógł spełnić “skromne” życzenie mędrca. Rzecz w tym, że wartość wyrażenia $2^{64} – 1$ wynosi 18 446 744 073 709 551 615.

Aby zrozumieć, jak wielka jest ta wartość wyobrazimy sobie, że ziarno chroni się w komorze o polu 12 ha. Wtedy wysokość jej powinna być większa od odległości Ziemi do Słońca.

Skorzystamy z opisanego sposobu, aby obliczyć sumę (*).

Przepiszemy równość (*) w następującej postaci:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \ldots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Pomnożymy obie strony tej równości przez q:

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 + \ldots + b_1q^{n-1} + b_1q^n.$$

Obliczymy różnicę $S_nq – S_n$:

$$\begin{array}{rrcccccc} & S_nq = & & b_1q & + b_1q^2 & + b_1q^3 + & \ldots & + b_1q^{n-1} & + b_1q^n \\ - & S_n = & b_1 + & b_1q & + b_1q^2 & + b_1q^3 + & \ldots & + b_1q^{n-1} & \\ \hline & S_nq - S_n = & -b_1 + & 0 & + \ 0 & + \ 0 \ + & \ldots & + \ 0 & + b_1q^n \end{array}$$

A więc,

$$S_nq – S_n = b_1q^n – b_1.$$

Stąd $S_n (q – 1) = b_1 (q^n – 1)$.

Dla $q \neq 1$ otrzymamy:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}}$$

Ta równość nazywa się **wzorem n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego** o ilorazie różnym od 1.

Gdy $q = 1$, to wszystkie wyrazy ciągu są równe pierwszemu wyrazowi. Wtedy $S_n = nb_1$.

PRZYKŁAD Dla jakiejkolwiek wartości naturalnej n suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego oblicza się zgodnie ze wzorem $S_n = 10 (2^n – 1)$. Oblicz pierwszy wyraz i iloraz ciągu.

Rozwiązanie. Przyjmiemy, że b_1 – pierwszy wyraz danego ciągu, q – jego iloraz.

Wtedy $b_1 = S_1 = 10 \ (2 – 1) = 10$; $b_1 + b_2 = S_2 = 10 \ (2^2 – 1) = 30$. Stąd $b_2 = 30 – b_1 = 20$; $q = \dfrac{b_2}{b_1} = 2$.

Odpowiedź: $b_1 = 10$, $q = 2$. ◀

1. Jak obliczyć sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie, różnym od jedynki?
2. Czemu jest równa suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o ilorazie równym jedynce?

ĆWICZENIA

19.1.° Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) o ilorazie q, gdy:

1) $b_1 = 10$, $q = 3$, $n = 4$;
2) $b_1 = -4$, $q = -1$, $n = 10$;
3) $b_1 = 0{,}6$, $q = 2$, $n = 5$;
4) $b_1 = 4{,}5$, $q = \frac{1}{3}$, $n = 8$;
5) $b_1 = -9$, $q = \sqrt{3}$, $n = 6$;
6) $b_1 = 8$, $q = -\frac{1}{2}$, $n = 4$.

19.2.° Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (b_n) o ilorazie q, gdy:

1) $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 9$;
2) $b_1 = 15$, $q = \frac{2}{3}$, $n = 3$;
3) $b_1 = 18$, $q = -\frac{1}{3}$, $n = 5$;
4) $b_1 = 4$, $q = -\sqrt{2}$, $n = 4$.

19.3.° Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:

1) 12, 72, 432, ...;
2) $\frac{1}{16}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \ldots$.

19.4.° Oblicz sumę czterech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego:

1) –0,6; 3; –15; ...;
2) 56; 42; 31,5; ... .

19.5.• Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (c_n), gdy:

1) $c_4 = 216$, zaś iloraz ciągu $q = -3$;
2) $c_1 = 5\sqrt{5}$, $c_5 = 125\sqrt{5}$, zaś iloraz ciągu $q > 0$.

19.6.• Oblicz sumę siedmiu wyrazów ciągu geometrycznego (x_n), gdy $x_3 = 24$, $x_8 = 768$.

19.7.• Ciąg geometryczny (b_n) określono wzorem n-tego wyrazu $b_n = 10 \cdot 3^{n-1}$. Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu.

19.8.• Ciąg geometryczny (y_n) określony wzorem n-tego wyrazu $y_n = \frac{(-2)^{n+1}}{20}$. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu.

19.9.• Iloraz ciągu geometrycznego jest równy $\frac{2}{3}$, a suma czterech początkowych wyrazów wynosi 65. Podaj pierwszy wyraz ciągu.

19.10.• Suma trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego wynosi 516, pierwszy wyraz jest równy 12. Oblicz iloraz ciągu.

19.11.• Suma wyrazów skończonego ciągu geometrycznego wynosi 605. Oblicz ilość wyrazów ciągu, jeżeli jego pierwszy wyraz $b_1 = 5$, a iloraz ciągu $q = 3$.

19.12.• Bakteria, znajdująca w sprzyjającym środowisku, przy końcu dwudziestej minuty dzieli się na dwie bakterie, każda z których przy końcu następnych 20 min dzieli się znowu na dwie itd. Ile bakterii utworzy się z jednej bakterii w ciągu doby?

19.13.• Dla dowolnej wartości n suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego $S_n = 4\,(3^n - 1)$. Oblicz trzeci wyraz ciągu.

19.14.• Dla dowolnej wartości n suma n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego $S_n = 6\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)$. Oblicz czwarty wyraz ciągu.

19.15.•• Oblicz sumę kwadratów sześciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, pierwszy wyraz którego jest równy $2\sqrt{3}$, zaś iloraz jest równy $\sqrt{3}$.

19.16.•• Oblicz sumę sześcianów czterech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego(b_n), gdy $b_1 = 3$ i $b_2 = -6$.

19.17.•• Udowodnij tożsamość

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1).$$

19.18.•• Udowodnij tożsamość

$$a^{2n+1} + 1 = (a+1)(a^{2n} - a^{2n-1} + \dots + a^2 - a + 1).$$

19.19.* Znajdź ilość wyrazów ciągu geometrycznego, iloraz którego $q = 3$, ostatni wyraz zaś $c_n = 162$, suma wszystkich wyrazów $S_n = 242$.

ZADANIA NA POWTÓRZENIE

19.20. Rozwiąż układ nierówności:

1) $\begin{cases} (x+2)(x-6) \leqslant (x+2)(x+1)+4, \\ 2(6x-1) \geqslant 7(2x-4); \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-2}{3} \geqslant \dfrac{x-3}{4} - x, \\ 1 - x > 0{,}5x - 5. \end{cases}$

19.21. Podaj przedział, w którym funkcja rośnie:

1) $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 4$;

2) $f(x) = -3x^2 - 2x + 4$.

19.22. Sporządź wykres funkcji:

1) $y = -\dfrac{6}{x} + 3$;

2) $y = -\dfrac{6}{x+3}$;

3) $y = -\dfrac{6}{x+3} + 3$.

19.23. Dwóch robotników za pierwszy dzień wyprodukowali 90 detali. W drugim dniu pierwszy robotnik wyprodukował o 10 % więcej, zaś drugi – o 15 % więcej niż oni produkowali w pierwszym dniu. Ogółem w ciągu drugiego dnia oni wyprodukowali 101 detali. Ile detali wyprodukował każdy z nich w ciągu pierwszego dnia?

19.24. Uprość wyrażenie:

1) $\sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{16a^2}$, gdy $a<0$ i $b>0$;

2) $\sqrt{(x-y)^2} - \sqrt{9y^2}$, gdy $x>0$ i $y<0$.

19.25. Ubranie kosztowało 600 hrn. Po podwójnym obniżeniu ceny, ubranie kosztowało 432 hrn, przy czym odsetek obniżenia drugiego był 2 razy większy od pierwszego. Na ile odsetek każdego razu obniżyła się cena?

19.26. Pewny towar kosztował 200 hrn. Na początku jego cenę podwyższono o kilka odsetek, zatem obniżono o taką samą ilość odsetek, więc wartość jego wynosiła 192 hrn. O ile odsetek każdego razu odbyła się zmiana ceny towaru?

UCZYMY SIĘ NIESTANDARDOWEGO MYŚLENIA

19.27. Na płaszczyźnie umieszczono 100 punktów. Wiadomo, że przez każdą czwartą z nich przechodzi wykres pewnej funkcji kwadratowej. Udowodnij, że wszystkie 100 punktów należą do jednej funkcji kwadratowej.

Sumowanie

Jednocześnie z każdym ciągiem $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ można rozpatrywać także następny ciąg (S_n):

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ ...,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n,\ ... .$$

Znalezienie wzoru n-tego wyrazu ciągu (S_n) nazywa się **sumą początkowych *n* wyrazów ciągu** (a_n).

O ile znacie wzory na obliczenie n początkowych wyrazów ciągów arytmetycznego i geometrycznego, to w ten sposób umiecie obliczać sumę tych ciągów.

Za pomocą litery greckiej Σ (sigma) sumę $a_1 + a_2 + ... + a_n$ można zapisać, jako: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Na przykład, $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$;

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Jednym z efektywnych sposobów zapisywania sumy jest wykorzystanie wyżej udowodnionych wzorów.

PRZYKŁAD 1 Oblicz sumę $\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{25}{8} + ... + \frac{2^n \cdot n + 1}{2^n}$.

Rozwiązanie. Mamy: $\frac{2^k \cdot k + 1}{2^k} = k + \frac{1}{2^k}$.

Wtedy daną sumę można zapisać w następujący sposób:

$$\left(1 + \frac{1}{2^1}\right) + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(3 + \frac{1}{2^3}\right) + ... + \left(n + \frac{1}{2^n}\right).$$

Stąd

$$\left(1 + \frac{1}{2^1}\right) + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(3 + \frac{1}{2^3}\right) + ... + \left(n + \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= (1+2+3+\ldots+n)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}+1-\frac{1}{2^n}.$$

A więc, $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^k\cdot k+1}{2^k}=\frac{n(n+1)}{2}+1-\frac{1}{2^n}$. ◄

PRZYKŁAD 2 Oblicz sumę $7+77+777+\underbrace{77\ldots7}_{n}$.

Rozwiązanie. Ponieważ $\underbrace{77\ldots7}_{n}=7\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}$, to dla rozwiązania zadania wystarczy znaleźć sumę $S_n=1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n}$ i otrzymany wynik pomnożyć przez 7.

Mamy:

$$S_n=\frac{10-1}{9}+\frac{10^2-1}{9}+\frac{10^3-1}{9}+\ldots+\frac{10^n-1}{9}=$$

$$=\frac{1}{9}(10+10^2+\ldots+10^n)-\frac{1}{9}\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n}=$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{10(10^n-1)}{10-1}-\frac{n}{9}=\frac{10(10^n-1)}{81}-\frac{n}{9}.$$

Szukana suma jest równa $\frac{70(10^n-1)}{81}-\frac{7n}{9}$. ◄

Gdy dla danego ciągu (a_n) uda się znaleźć taki ciąg (b_n), że $a_n=b_{n+1}-b_n$, wtedy sumę $\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ bardzo łatwo obliczyć. Oczywiście, $a_1+a_2+\ldots+a_n=$ $=(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+(b_4-b_3)+\ldots+(b_{n+1}-b_n)=b_{n+1}-b_1$.

PRZYKŁAD 3 Oblicz sumę $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+n\cdot n!$.

Rozwiązanie. Mamy:

$$n\cdot n!=(n+1)!-n!.$$

Wtedy można zapisać:

$$\sum_{k=1}^{n}k\cdot k!=(2!-1!)+(3!-2!)+(4!-3!)+\ldots+((n+1)!-n!)=(n+1)!-1.$$ ◄

PRZYKŁAD 4 Udowodnij, że gdy ciąg (a_n) – jest arytmetycznym ciągiem z niezerowymi wyrazami, to

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

Rozwiązanie. Mamy: $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\cdot\frac{1}{d}$, gdzie d – różnica ciągu. Wtedy

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)\cdot\frac{1}{d}+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)\cdot\frac{1}{d}+\ldots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\cdot\frac{1}{d}=$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=$$

$$=\frac{a_{n+1}-a_1}{da_1\cdot a_{n+1}}=\frac{a_1+dn-a_1}{da_1\cdot a_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$ ◀

PRZYKŁAD 5 Oblicz sumę $\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{13}{2\cdot 3}+\frac{25}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{2n^2+2n+1}{n(n+1)}$.

Rozwiązanie. Mamy:

$$\frac{2n^2+2n+1}{n(n+1)}=\frac{2n(n+1)+1}{n(n+1)}=2+\frac{1}{n(n+1)}=2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Wtedy można zapisać:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2+2k+1}{k(k+1)}=\left(2+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(2+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=2n+1-\frac{1}{n+1}=\frac{n(2n+3)}{n+1}.$$ ◀

ĆWICZENIA

1. Oblicz sumę $\sum_{k=1}^{n}\frac{5^k\cdot k-1}{5^k}$.

2. Oblicz sumę $\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{k+1}\cdot k^2+3^k\cdot\ k+1}{3^k}$.

3. Oblicz sumę:

1) $9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{n}$;

2) $5+55+555+\ldots+\underbrace{55\ldots5}_{n}$.

4. Udowodnij, że gdy ciąg (a_n) — to ciąg arytmetyczny z wyrazami dodatnimi, to

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}}}.$$

5. Oblicz sumę:

1) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-7)(4n-3)}$;

2) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{7}{2\cdot 3}+\frac{13}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$;

3) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}$;

4) $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\frac{7}{144}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

6. Oblicz sumę:

1) $\frac{1}{2\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 17}+\ldots+\frac{1}{(5n-3)(5n+2)}$;

2) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{13}{2\cdot 3}+\frac{37}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n^3+n^2+1}{n(n+1)}$.

7. Oblicz sumę $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2-1}$.

8. Oblicz sumę $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

9. Oblicz sumę $S_n=1+2a+3a^2+4a^3+\ldots+n\cdot a^{n-1}$, gdzie $a\neq 1$.

ZADANIE TESTOWE N 4 "SPRAWDŹ SIEBIE"

1. Z niżej wymienionych ciągów wybierz ciąg arytmetyczny.
A) 6, 9, 12, 13; C) 2, 8, 14, 21;
B) 2, 9, 16, 23; D) 2, 9, 16, 21.

2. Który z wymienionych ciągów jest ciągiem geometrycznym?
A) 3, 6, 9, 12; C) 3, 6, 12, 24;
B) 3, 5, 7, 14; D) 5, 8, 12, 16.

3. Ilu jest równy szósty wyraz ciągu arytmetycznego, pierwszy wyraz którego równy 12, zaś różnica jest równa 0,4?
A) 14,4; B) 14; C) 13,6; D) 13.

4. Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego (a_n), gdy $a_1 = -7$, $a_2 = 5$.
A) –2; B) 2; C) –12; D) 12.

5. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, pierwszy wyraz którego jest równy $a_1 = -16$, a różnica $d = 3$.
A) –10; B) –15; C) –20; D) –25.

6. Oblicz czwarty wyraz ciągu geometrycznego, pierwszy wyraz którego jest $b_1 = -\frac{1}{8}$, a iloraz $q = -2$.
A) –2; B) –1; C) 1; D) 2.

7. Ile wynosi iloraz ciągu geometrycznego (b_n), gdy $b_1 = 36$, $b_2 = 9$?
A) $\frac{1}{4}$; B) 4; C) 27; D) –27.

8. Oblicz sumę czterech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, pierwszy wyraz którego jest $b_1 = 2$, zaś iloraz $q = 3$.
A) 56; B) 80; C) 96; D) 192.

9. Oblicz sumę piętnastu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), określony wzorem n-tego wyrazu $a_n = -4n + 13$.
A) –300; B) –285; C) –275; D) –250.

10. Jaki wskaźnik ma wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), który jest równy 6,2, gdy $a_1 = 0{,}2$, a różnica $d = 0{,}4$?
A) 14; B) 15; C) 16; D) 17.

11. Ile dodatnich wyrazów zawiera ciąg arytmetyczny (a_n), gdy $a_1 = 41$ i $a_2 = 38$?
A) 13; B) 14; C) 15; D) 16.

12. Oblicz różnicę ciągu arytmetycznego (a_n), gdy $a_1 + a_5 = 28$ i $a_2 + a_3 = 24$.
A) 4; B) 3; C) 2,5; D) 2.

13. Deponent złożył w banku 4000 hrn pod 10 % rocznych. Jaka kwota będzie na jego koncie po 2 latach?
A) 4840 hrn; B) 4800 hrn; C) 4080 hrn; D) 4440 hrn.

14. Szafa kosztowała 15 000 hrn. Po dwóch kolejnych obniżkach jej ceny o jedną i tę samą ilość odsetek, ona kosztowała 9600 hrn. O ile odsetek każdego razu obniżano cenę?
A) 25 %; B) 10 %; C) 15 %; D) 20 %.

15. Oblicz sumę wszystkich liczb naturalnych, które są wielokrotnością 9 i mniejsze od 120.
A) 810; B) 702; C) 819; D) 882.

16. Ile wynosi suma dziewięciu wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n), gdy $a_1 + a_4 + a_{10} = 18$?
A) 48; C) 72;
B) 54; D) nie da się obliczyć.

17. Dla jakiej wartości x wartości wyrazów $7x - 8$, $2x + 1$ i $x + 6$ są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?
A) 1; C) –1;
B) 2; D) taka wartość nie istnieje.

18. Dla jakiej dodatniej wartości x wartości wyrażeń $x + 1$, $3x - 1$ i $2x + 10$ są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?
A) 1,5; C) 3;
B) 4; D) taka wartość nie istnieje.

GŁÓWNE W PARAGRAFIE 3

Ciągi

Obiekty, które są ponumerowane kolejnymi liczbami naturalnymi 1, 2, 3, ..., n, ..., tworzą ciąg.

Ciąg arytmetycznym

Ciąg, w którym każdy wyraz, zaczynając od drugiego, jest równy poprzedniemu, do którego dodano jedną i tę samą liczbę, nazywa się ciągiem arytmetycznym.

Wzór na *n*-ty wyraz ciągu arytmetycznego

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1)$$

Własności wyrazów ciągu arytmetycznego

Jakikolwiek wyraz ciągu arytmetycznego, oprócz pierwszego (ostatniego, jeżeli ciąg jest skończony) jest średnią arytmetyczną wielkością dwóch sąsiednich jego wyrazów.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d\,(n-1)}{2} \cdot n$$

Ciąg geometryczny

Ciągiem geometrycznym nazywa się ciąg o pierwszym wyrazie różnym od zera, w którym każdy wyraz, zaczynając od drugiego jest równy poprzedniemu pomnożonemu przez jedną i tą samą liczbę różną od zera.

Wzór *n*-tego wyrazu ciągu geometrycznego

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

Własność wyrazów ciągu geometrycznego

Kwadrat jakiegokolwiek wyrazu ciągu geometrycznego, oprócz pierwszego (i ostatniego jeżeli ciąg jest skończony) jest równy iloczynowi dwóch sąsiednich jego wyrazów:

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}.$$

Wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

20. Ćwiczenia powtórzeniowe z kursu algebry klasy 9.

20.1. Podaj wypowiedzi w postaci nierówności:
1) a – liczba dodatnia;
2) b – liczba ujemna;
3) moduł liczby c – nieujemna liczba;
4) moduł sumy dwóch liczb rzeczywistych a i b nie większy od sumy modułów tych liczb.

20.2. Udowodnij nierówność:
1) $3a(a+6)<(3a+6)(a+4)$;
2) $(2b-1)(3b+2)<(3b-1)(2b+1)$;
3) $25m^2+n^2\geqslant 10mn$;
4) $2a^2-4a+5>0$;
5) $x^2+x+1>0$;
6) $4y^2-12\geqslant 12y-21$;
7) $a^2+b^2+2\geqslant 2(a+b)$;
8) $a^2+b^2+c^2+3\geqslant 2(a+b+c)$;
9) $2a^2+5b^2+2ab+1>0$;
10) $x^2+y^2+15>6x+4y$.

20.3. Udowodnij, że nierówność jest prawdziwa:
1) $a^5-5\geqslant 5a^4-a$, gdy $a\geqslant 5$;
2) $b^3+b+2\geqslant 0$, gdy $b\geqslant -1$;
3) $c^3+c\leqslant 3c^2+3$, gdy $c\leqslant 3$.

20.4. Wiadomo, że $a>3$. Porównaj względem zera wartość wyrażenia:
1) $2a-6$;
2) $15-5a$;
3) $2a-4$;
4) $(a-3)(2-a)$;
5) $\frac{a-2}{a-1}$;
6) $\frac{-4}{3-a}$.

20.5. Wiadomo, że $b<2$. Porównaj wartość wyrażenia względem zera:
1) $4b-8$;
2) $(b-2)^2(b-3)$;
3) $\frac{b-3}{(2-b)(b-4)}$.

20.6. Udowodnij, że, gdy $a>b>1$, wtedy

$$a^2b+b^2+a>ab^2+a^2+b.$$

20.7. Udowodnij, że, gdy $a<b<2$, to
$$a^2b + 2b^2 + 4a < ab^2 + 2a^2 + 4b.$$

20.8. Porównaj liczbę a względem zera, gdy:
1) $6a<5a$;
2) $-2a<2a$;
3) $9a>4a$;
4) $-37a>-3a$.

20.9. Udowodnij, że, gdy $a>7$ i $b>3$, to:
1) $4a + b>31$;
2) $10a + 3b>75$.

20.10. Udowodnij, że, gdy $a>5$ i $b<-2$, to:
1) $3a - b>17$;
2) $5b - 2a<-10$.

20.11. Porównaj, jeżeli jest to możliwe:
1) $4a + b$ i 12, gdy $a>2$ i $b>5$;
2) $b - 2a$ i 0, gdy $a>4$ i $b<6$;
3) $b - 3a$ i 1, gdy $a<6$ i $b<0$;
4) $a - 5b$ i 1, gdy $a<12$ i $b>2$.

20.12. Liczby dodatnie a, b, c i d są takie, że $a>b$, $d<b$ i $c>a$. Uporządkuj liczby w kolejności rosnącej $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ i $\frac{1}{d}$.

20.13. Wiadomo, że $5<a<8$. Oceń wartość wyrażenia:
1) $0{,}4a$;
2) $a - 3$;
3) $2a + 1$;
4) $-3a + 2$.

20.14. Wiadomo, że $3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2$. Oceń wartość wyrażenia:
1) $2\sqrt{10}$;
2) $-4\sqrt{10}$;
3) $3\sqrt{10} - 5$.

20.15. Wiadomo, że $3<m<4$ i $-3<n<-2$. Oceń wartość wyrażenia:
1) $2m + 3n$;
2) $0{,}2m - n$;
3) $-5m + 4n$;
4) $m - \frac{m}{n}$.

20.16. Rozwiąż nierówność:
1) $16 - 4n \geqslant 8$;
2) $10x>13x + 6$;
3) $6x + 3>5x - 2$;
4) $\frac{4-3x}{7} < 1$;
5) $3x + 4<5x - 4$;
6) $4x - 7>7x - 6$.

20.17. Oblicz sumę liczb naturalnych, które należą do przedziału dziedziny określenia funkcji $y = \sqrt{10 - 3x}$.

20.18. Dana jest funkcja $f(x) = 3x + 12$. Dla jakich wartości argumentu funkcji osiąga:
1) wartości dodatnie;
2) wartości ujemne;
3) wartości, należące do przedziału $[-4;\ 7]$?

20.19. Podaj nierówność postaci $ax + b > 0$, w której x – zmienna, zaś, a i b – pewne liczby, zbiorem rozwiązań których jest:

1) przedział $(-3; +\infty)$;
2) przedział $(-\infty; -1{,}6)$;
3) zbiór liczb rzeczywistych;
4) zbiór pusty.

20.20. Podaj zbiór rozwiązań nierówności:

1) $(2x-3)^2 \leqslant (4x-1)(x-2)+7$;
2) $(x-2)(2+x) \geqslant 2-(x+4)(1-x)$;
3) $\frac{1-x}{2}+3<3x-\frac{2x+1}{4}$;
4) $\frac{3x-37}{2}-9>\frac{7-2x}{4}+2x$;
5) $\frac{5x-3}{5} \geqslant \frac{3x+4}{3}-\frac{29}{15}$.

20.21. Ile wynosi najmniejsze całkowite rozwiązanie nierówności

$$\frac{3x+5}{4}-1 \leqslant \frac{x-2}{3}+x?$$

20.22. Jakie jest największe całkowite rozwiązanie nierówności

$$\frac{3x+5}{2}<\frac{8-x}{3}?$$

20.23. Czy nierówności się równoważne:

1) $\frac{x+1}{2}+\frac{x-1}{3}<1$ i $3(x+1)+2(x-1)<1$;
2) $(x+3)(x^2+4)>0$ i $x+3>0$;
3) $x-1>3$ i $x-1+\frac{1}{x-5}>3+\frac{1}{x-5}$;
4) $x+2<1$ i $x+2+\frac{1}{x}<1+\frac{1}{x}$?

20.24. Rozwiąż układ nierówności:

1) $\begin{cases} x-3<2x-3, \\ 4x+5>10-x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9+2x \leqslant 3x+7, \\ x-2>2x-5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-5)^2-15 \geqslant (x-3)(x-4)-50, \\ 4(x+7)-16 \geqslant 2-x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \frac{x-1}{4}+\frac{x+1{,}7}{3} \geqslant \frac{3x+1}{5}, \\ \frac{x+2}{4}-\frac{x+8}{5}<\frac{3x-1}{10}. \end{cases}$

20.25. Oblicz sumę całkowitych rozwiązań nierówności:

1) $\begin{cases} 3x - 5 < 23 - 4x, \\ 7x - 9 \leqslant 9x + 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2(3x - 4) < 3(4x - 5) + 23, \\ 4(x + 1) \leqslant 3x + 5. \end{cases}$

20.26. Wymyśl układ dwóch liniowych nierówności z jedną zmienną, zbiorem rozwiązań którego jest:

1) przedział $(-2; +\infty)$;

2) przedział $\left[-4; \frac{1}{3}\right]$;

3) przedział $(-\infty; -10]$;

4) zbiór pusty;

5) zbiór, do którego należy dokładnie jedna liczba 8;

6) zbiór liczb rzeczywistych.

20.27. Wiadomo, że $1 \leqslant a \leqslant 4$. Ile całkowitych wartości może posiadać wyrażenie $0{,}5a - 3$?

20.28. Rozwiąż podwojoną nierówność:

1) $-3 \leqslant 2x - 1 < 5$;

2) $-1 < 3x - 9 \leqslant 6$;

3) $2 < 7 - 4x < 11$;

4) $-2 \leqslant \frac{1 - x}{3} \leqslant 1$.

20.29. Dla jakich wartości a układ nierówności posiada chociażby jedno rozwiązanie:

1) $\begin{cases} x < 4, \\ x > a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > a; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x \leqslant -3, \\ x \geqslant a; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \leqslant a? \end{cases}$

20.30. Dla jakich wartości a układ nierówności nie ma rozwiązań:

1) $\begin{cases} x < 6, \\ x > a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \leqslant 5, \\ x > a; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x \leqslant -8, \\ x \geqslant a; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x > 0, \\ x \leqslant a? \end{cases}$

20.31. Dla jakich wartości a zbiorem rozwiązań układu nierówności $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x > a \end{cases}$ będzie:

1) przedział $[7; +\infty)$;

2) przedział $[3; +\infty)$;

3) przedział $(-2; +\infty)$;

4) zbiór pusty?

20.32. Dla jakich wartości a równanie

$$x^2 - (2a + 2)\,x - 2a - 3 = 0$$

ma dwa różne ujemne pierwiastki?

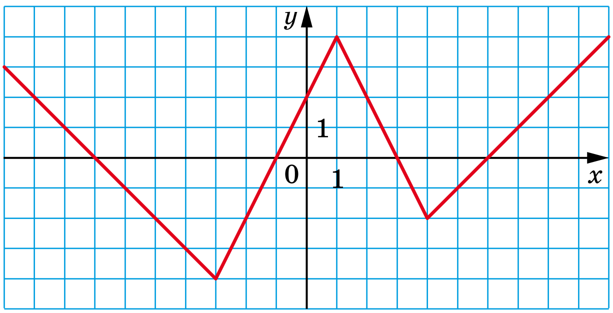
20.33. Dla jakich wartości a równanie

$$x^2 - (2a - 1)\,x + a^2 - a - 6 = 0$$

ma dwa różne pierwiastki, które należą do przedziału $[-3; 2]$?

20.34. Na rysunku 20.1 przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$, określonej w zbiorze liczb rzeczywistych. Korzystając z wykresu, podaj:

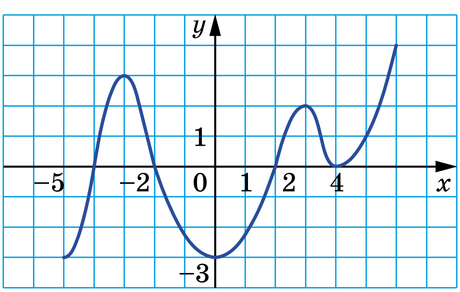
1) zera funkcji;
2) przedziały, w których funkcja rośnie i maleje;
3) zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$.



Rys. 20.1

20.35. Na rysunku 20.2 jest przedstawiony wykres funkcji $y = g(x)$, określonej w przedziale $[-5; 6]$. Korzystając z rysunku, podaj:

1) zbiór wartości funkcji;
2) zera funkcji;
3) przedziały, w których funkcja rośnie i maleje;
4) zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leqslant 0$.



Rys. 20.2

20.36. Ustal, które z wymienionych niżej funkcji liniowych są rosnącymi, a które malejącymi:

1) $y = -4x$;
2) $y = 4x - 7$;
3) $y = \dfrac{x}{4}$;
4) $y = 4 - x$.

20.37. Która z wymienionych funkcji jest malejąca:

1) $y = x^2$;
2) $y = \dfrac{2}{x}$;
3) $y = -2x$;
4) $y = 2x$?

20.38. Rozwiąż graficznie równanie:

1) $(x+1)^2 = -\dfrac{2}{x}$;
2) $x^2 - 2 = -\sqrt{x}$;
3) $\sqrt{x+1} = 5 - x$;
4) $\dfrac{6}{x-2} = x + 3$;
5) $(x+2)^2 = \sqrt{x} + 4$;
6) $\dfrac{5}{x} + 3 = (x-3)^2$.

20.39. Podaj odciętą wierzchołka paraboli:

1) $y = 4x^2 - 12x + 1$;
2) $y = -0{,}2x^2 - 2x + 3$?

20.40. Ustal, wierzchołek której paraboli leży na osi rzędnych, a której – na osi odciętych:

1) $y = x^2 - 4x + 3$;
2) $y = x^2 - 8$;
3) $y = x^2 - 6x + 9$;
4) $y = x^2 + 2x$.

20.41. Podaj wartości b i c dla których funkcja $y = x^2 + bx + c$:

1) ma jedno miejsce zerowe w punkcie $x = -3$;
2) osiąga najmniejszą wartość, która jest równa 4 w punkcie $x = 0$;
3) posiada miejsce zerowe w punktach $x = -2$ i $x = 5$.

20.42. Sporządź wykres funkcji, podaj jej zbiór wartości, oraz przedziały, w których ona rośnie i maleje:

1) $y = -2x^2 + 1$;
2) $y = 0{,}5x^2 - 2$;
3) $y = x^2 + 6x + 5$;
4) $y = 4x - x^2$;
5) $y = -x^2 + 4x - 3$;
6) $y = x^2 - 4x + 5$;
7) $y = 2x^2 - 3x - 2$;
8) $y = -3x^2 + 8x + 3$.

20.43. Dla jakich wartości c wykres funkcji $y = x^2 - 6x + c$:

1) przechodzi przez początek współrzędnych;
2) posiada z osią odciętych tylko jeden wspólny punkt;
3) przecina oś rzędnych w punkcie A (0; –4);
4) przecina oś odciętych w punkcie B (2; 0)?

20.44. Przy jakiej wartości b wykres funkcji $y = x^2 + bx + 2$:
1) przecina oś odciętych w jednym punkcie;
2) nie ma z osią odciętych wspólnych punktów;
3) przecina oś odciętych w punktach odległość między którymi wynosi 4?

20.45. Wykres funkcji $y = x^2 + px + q$ przechodzi przez punkt A (1; 1) i B (2; 2). Czy wykres funkcji będzie przechodzić przez punkt:
1) C (–1; –1); 2) D (3; 5)?

20.46. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ przechodzi przez punkt (0; 10), o wierzchołku w punkcie (6; –2). Oblicz współczynniki a, b i c.

20.47. Wartość funkcji kwadratowej $y = ax^2 + bx + c$ w punkcie $x = -1$ wynosi 0, zaś dla $x = \frac{1}{4}$ funkcja osiąga najmniejszą swoją wartość, równą $-\frac{25}{8}$. Oblicz współczynniki a, b i c.

20.48. Dla jakiej wartości m:
1) najmniejsza wartość funkcji $y = x^2 - 6x + m$ jest równa –8;
2) największa wartość funkcji $y = -x^2 + 4x - m$ jest równa 12?

20.49. Sporządź wykres funkcji:
1) $y = \frac{x^3 + 4x^2 - 5x}{x}$;
2) $y = \frac{x^3 + 8}{x + 2} - 3$;
3) $y = \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$;
4) $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 - 9}$.

20.50. Dla jakiej wartości a suma kwadratów pierwiastków równania $x^2 + ax + a - 2 = 0$ osiąga najmniejszą wartość?

20.51. Wiadomo, że $a + 3b = 10$. Jaką najmniejszą wartość może osiągnąć wyrażenie $a^2 + b^2$ oraz dla jakich wartości a i b?

20.52. Rozwiąż nierówność:
1) $x^2 - 4x + 3 > 0$;
2) $x^2 - 6x - 40 \leqslant 0$;
3) $x^2 + x + 1 \geqslant 0$;
4) $x^2 - x + 1 < 0$;
5) $-3x^2 + 2x + 1 > 0$;
6) $x - x^2 < 0$;
7) $x^2 + 25 \geqslant 0$;
8) $0{,}1x^2 - 2 \leqslant 0$.

20.53. Podaj całkowite rozwiązania nierówności:
1) $\frac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0$;
2) $-4x^2 + 3x + 1 \geqslant 0$.

20.54. Dla jakich wartości c trójmian $2x^2 - 2x + 5c$ osiąga wartości dodatnie dla jakiejkolwiek wartości x?

20.55. Rozwiąż układy nierówności:

1) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x > -1,2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x > 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x \geqslant 6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leqslant 0, \\ x \geqslant 6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > -\frac{1}{3}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > -2; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 \geqslant 0, \\ x \leqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$

20.56. Rozwiąż nierówność:

1) $\dfrac{x^2 - 16}{|x + 1|} \leqslant 0;$ 2) $\dfrac{x^2 - 5x - 14}{|x - 8|} \geqslant 0.$

20.57. Podaj dziedzinę określenia funkcji:

1) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + 3x - 10}} + \dfrac{1}{3x - 9};$

2) $y = \dfrac{6}{\sqrt{12 + x - x^2}} - \dfrac{2}{x^2 - 4};$

3) $y = \sqrt{49 - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}.$

20.58. Dla jakich wartości a równanie ma dwa różne pierwiastki:

1) $2x^2 + ax + a - 2 = 0;$

2) $(2a - 1)\,x^2 + (a - 3)\,x + 1 = 0;$

3) $ax^2 - (3a + 1)\,x + a = 0?$

20.59. Dla jakich wartości a zbiorem rozwiązaniem równania jest zbiór liczb rzeczywistych:

1) $5x^2 - x + a > 0;$

2) $ax^2 - 10x - 5 < 0;$

3) $ax^2 - 2(a - 1)\,x + 4a \leqslant 0;$

4) $(a - 1)\,x^2 - (a + 1)\,x + a + 1 > 0?$

20.60. Rozwiąż graficznie układ równań:

1) $\begin{cases} y - x^2 = 3, \\ x + y = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = -12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = -x^2 + 4x - 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = x^2 - 5. \end{cases}$

20.61. Rozwiąż układ równań:

1) $\begin{cases} x - 4y = -6, \\ x^2 + 4y^2 = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + y = -2, \\ 3x^2 - 2xy = 28; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 13, \\ xy = 15; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - 2y = 18, \\ xy = -12; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x + y = -3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x - y = 1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = -2, \\ x + y = 1; \end{cases}$

8) $\begin{cases} (x-2)(y+1) = 1, \\ x - y = 3; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{8}, \\ x + y = 12; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{5}, \\ y - x = 4. \end{cases}$

20.62. Podaj rozwiązania układu równań:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ xy(x + y) = 30; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + xy + y = 5, \\ x - xy + y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = 2, \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 25, \\ x^2 - 3xy = 4; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 14, \\ xy = -6; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{10}, \\ xy = 50; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{16}{15}, \\ x^2 - y^2 = 16; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{25}{12}, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2 + 2xy = 5, \\ y^2 - 4xy = -4. \end{cases}$

20.63. Podaj współrzędne punktów przecięcia:

1) prostej $3x - y - 5 = 0$ i paraboli $y = \frac{2}{3}x^2 - 2x + 4$;

2) prostej $2x - 3y - 3 = 0$ i hiperboli $xy = 3$;

3) okręgu $x^2 + y^2 = 13$ i hiperboli $xy = 6$.

20.64. Dla jakiej wartości a układ równań posiada jedno rozwiązanie:

1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ x + y = a? \end{cases}$

20.65. Przekątna prostokąta jest równa 17 cm, a jego pole –120 cm^2. Oblicz boki prostokąta.

20.66. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna jest równa 41 cm, zaś pole –180 cm^2. Oblicz przyprostokątne trójkąta.

20.67. Z dwóch miast odległych od siebie o 240 km, wyjechały jednocześnie na spotkanie dwa samochody. Po 2 godz. od początku ich ruchu odległość między samochodami była 40 km, przy czym samochody już spotkali się. Oblicz prędkość samochodów, jeżeli całą drogę jeden z nich jechał o jedną godzinę prędzej od drugiego.

20.68. Z dwóch wiosek, odległych między sobą o 20 km, dwaj turyści wyszli jednocześnie sobie na spotkanie i spotkali się po 2 godz. Oblicz prędkość, z jaką szedł każdy turysta, jeżeli jeden z nich pokonuje odległość między wioskami o 1 godz prędzej od drugiego.

20.69. Z punktów A i B jednocześnie na spotkanie wyruszyli odpowiednio rowerzystka i pieszy, którzy spotkali się po 1 godz. od początku ruchu. Oblicz prędkość każdego z nich, jeżeli rowerzystka przybyła do punktu B o 2 godz. 40 min prędzej niż pieszy przyszedł do punktu A. Odległość między tymi punktami wynosiła 16 km.

20.70. Z miasta A do miasta B jednocześnie wyjechali autobus i samochód. Po 1 godz 30 min od początku ruchu samochód wyprzedził autobus o 30 km. Gdy samochód przybył do miasta B, to autobus był na odległości 80 km od tego miasta. Oblicz prędkość samochodu i prędkość autobusu, jeżeli odległość między miastami A i B wynosi 300 km.

20.71. Do basenu podłączono dwie rury. Jeżeli otworzyć jednocześnie dwie rury, to basen napełni się wodą w ciągu 1,5 godz., a jeżeli połowę basenu napełnić przez pierwszą rurę, a zatem resztę – przez drugą, to basen napełni się w ciągu 4 godz. Ile czasu potrzeba aby napełnić basen wodą przez każdą rurę?

20.72. Dwie robotnice mogą wykonać zadanie za 9 godz. Jeżeli pierwsza robotnica będzie pracować 1 godz. 12 min, a zatem druga – 2 godz., to będzie wykonane 20% zadania. W ciągu jakiego czasu może samodzielnie wykonać każda robotnica to zadanie?

20.73. Statek przepływa 15 km z prądem rzeki i 12 km pod prąd w ciągu tego samego czasu. Ile wynosi prędkość prądu rzeki, jeżeli 1 km z prądem i 1 km pod prąd statek przepływa w ciągu 27 min?

20.74. Kolarz przejechał z wioski na dworzec kolejowy autostradą o długości 10 km i wrócił drogą gruntową o długości 5 km, tracąc na całą drogę 1 godz. 5 min. Oblicz prędkość kolarza na autostradzie i prędkość na drodze gruntowej, jeżeli droga powrotna zajęła o 15 min mniej, niż droga do stacji.

20.75. Z miasta A do B oddalonych między sobą o 180 km wyjechały jednocześnie na spotkanie sobie autobus i ciężarówka. Po ich spotkaniu, autobus, który wyjechał z miasta A przybył do miasta B w ciągu 1 godz., zaś ciężarówką przybyła do miasta A po 2 godz. 15 min. Oblicz prędkość autobusu i ciężarówki.

20.76. Ciąg (a_n) określony wzorem n-go ogólnego wyrazu $a_n = n^2 - 4n + 4$. Podaj sześć początkowych wyrazów tego ciągu. Czy będzie wyrazem tego ciągu następująca liczba: 1) 256; 2) 361; 3) 1000; 4) 10 000? Gdy odpowiedź będzie stwierdzająca podaj wskaźnik tego wyrazu.

20.77. Znajdź ilość wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego (a_n), jeżeli $a_1 = 4$, różnica ciągu $d = -5$, a ostatni wyraz ciągu wynosi –36.

20.78. Ostatni wyraz ciągu arytmetycznego, zawierającego 7 wyrazów, wynosi $3\frac{1}{6}$. Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu, jeżeli jego różnica wynosi $\frac{3}{8}$.

20.79. Jaki wskaźnik posiada pierwszy ujemny wyraz ciągu arytmetycznego 2; 1,9; 1,8; 1,7; ...?

20.80. Jaki wskaźnik posiada wyraz ciągu arytmetycznego 8, 11, 14, ..., który jest mniejszy od 100 lecz większy od 200?

20.81. Suma ilu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego 105, 98, 91, ... jest równa 0?

20.82. Znajdź wielkość kątów wypukłego czworokąta, jeżeli one tworzą ciąg arytmetyczny, różnica którego jest równa 54°.

20.83. Boki trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny. Oblicz długości przyprostokątnych trójkąta, jeżeli jego przeciwprostokątna wynosi 4 cm.

20.84. Wiadomo, że nieskończony ciąg $a_1, a_2, a_3, \ldots$ jest ciągiem arytmetycznym o różnicy $d \neq 0$. Czy będzie ciągiem arytmetycznym następujący ciąg:

1) $-a_2, -a_4, -a_6, -a_8, \ldots;$

2) $a_1 + 5, a_2 + 5, a_3 + 5, \ldots;$

3) $1 - a_1, 1 - a_2, 1 - a_3, \ldots;$

4) $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots;$

5) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots;$

6) $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, \ldots;$

7) $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, \ldots?$

Gdy odpowiedź będzie stwierdzająca, to podaj wielkość różnicy ciągu.

20.85. Suma trzech liczb, które tworzą ciąg arytmetyczny, wynosi 12, zaś suma ich kwadratów wynosi 80. Podaj te liczby.

20.86. Udowodnij, że gdy liczby a, b i c są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to wartości wyrażeń $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ też są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego.

20.87. Udowodnij, że:

1) gdy długości boków a, b i c trójkąta tworzą ciąg arytmetyczny, to $ac = 6Rr$, gdzie R i r – odpowiednio promienie opisanego i wpisanego okręgu w trójkącie;

2) gdy długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny, to różnica tego ciągu jest równa promieniowi okręgu wpisanego w ten kąt;

3) gdy boki trójkąta o kącie równym 120° tworzą ciąg arytmetyczny, to stosunek ich będzie równy 3 : 5 : 7.

20.88. Oblicz sumę n początkowych wyrazów ciągu:

1) $\frac{a-1}{a}, \frac{a-3}{a}, \frac{a-5}{a}, \ldots;$

2) $\frac{a-b}{a+b}, \frac{3a-b}{a+b}, \frac{5a-b}{a+b}, \ldots .$

20.89. Trzeci wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 11, a siódmy jest równy 27. Ile wyrazów tego ciągu należy wziąć, aby suma ich wynosiła 253?

20.90. Niech S_n – suma n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n). Oblicz pierwszy wyraz oraz różnicę ciągu, jeżeli:

1) $a_3 + a_5 + a_8 = 18$ i $a_2 + a_4 = -2$;
2) $a_5 - a_3 = -4$ i $a_2 a_4 = -3$;
3) $a_2 + a_4 + a_6 = 36$ i $a_2 a_3 = 54$;
4) $S_5 - S_2 - a_5 = 0{,}1$ i $a_7 + S_4 = 0{,}1$;
5) $S_4 = 9$ i $S_6 = 22{,}5$.

20.91. Suma trzech początkowych wyrazów skończonego ciągu arytmetycznego wynosi 3, zaś suma czterech początkowych wyrazów wynosi 16, a suma wszystkich wyrazów wynosi 220. Podaj ilość wyrazów tego ciągu.

20.92. Ile wynosi suma siedemnastu wyrazów początkowych ciągu arytmetycznego, jeżeli jego dziewiąty wyraz wynosi 15?

20.93. Długości boków trójkąta prostokątnego tworzą ciąg arytmetyczny, a jego mniejsza przyprostokątna jest równa a. Oblicz pole trójkąta.

20.94. Oblicz sumę dwudziestu początkowych liczb nieparzystych, przy dzieleniu których przez 3 otrzymuje się resztę równą 1.

20.95. Ile wynosi suma liczb dwucyfrowych, które nie dzielą się przez 3 ani przez 5 bez reszty?

20.96. Czy długości boków trójkąta prostokątnego tworzyć ciąg geometryczny? Gdy odpowiedź będzie stwierdzająca, to znajdź iloraz tego ciągu.

20.97. Po dwóch kolejnych obniżkach o tę samą ilość odsetek cena rondla obniżyła się z 300 hrn do 192 hrn. Na ile odsetek każdego razu obniżała się cena rondla?

20.98. Dany jest ciąg geometryczny (b_n) o ilorazie q. Oblicz:

1) b_1, jeżeli $b_5 = -\frac{16}{27}$, $q = -\frac{2}{3}$;
2) q, jeżeli $b_1 = \frac{2}{3}$, $b_4 = \frac{9}{32}$;
3) sumę siedmiu początkowych wyrazów ciągu, jeżeli $b_7 = 192$, $q = 2$;
4) sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu, jeżeli $b_5 = 9\sqrt{6}$, $q = \sqrt{3}$.

20.99. Suma trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, który zawiera 6 wyrazów, jest 8 razy mniejsza od sumy trzech ostatnich. Ile wynosi iloraz ciągu?

20.100. Znajdź 4 liczby, które tworzą ciąg geometryczny, jeżeli suma ich skrajnych wyrazów jest równa $\frac{35}{3}$, a suma środkowych liczb jest równa 10.

20.101. Wiadomo, że nieskończony ciąg b_1, b_2, b_3, ... jest ciągiem geometrycznym o ilorazie $q \neq 1$. Czy będzie ciągiem geometryczny ciąg:

1) b_2, b_4, b_6, ...;
2) $b_1 + 1$, $b_2 + 1$, $b_3 + 1$, ...;
3) b_1^2, b_2^2, b_3^2, ...;
4) $-b_1$, $-b_3$, $-b_5$, ...;
5) $b_1 + b_2$, $b_2 + b_3$, $b_3 + b_4$, ...;
6) $\frac{1}{b_1}$, $\frac{1}{b_2}$, $\frac{1}{b_3}$, ...?

Gdy odpowiedź będzie stwierdzającą, podaj iloraz tego ciągu.

Dla tych, kto chce wiedzieć więcej

21. Podstawowe reguły kombinatoryki

Iloma sposobami uczniowie waszej klasy mogą stanąć w kolejce do bufetu? Iloma sposobami w waszej klasie można wybrać starostę oraz jego zastępcę? Iloma sposobami mogą być podzielone medale złote, srebrne i brązowe na mistrzostwie piłkarskim?

Aby odpowiedzieć na te pytania, należy policzyć ile różnych kombinacji, utworzonych według pewnych zasad, można ułożyć z elementów danego skończonego zbioru. Rozdział matematyki, który zajmuje się rozwiązywaniem zadań podobnych do rozpatrywanych, nazywa się **kombinatoryką**.

W podstawie rozwiązywań większości problemów kombinatorycznych leżą dwie reguły: reguła dodawania i reguła mnożenia. Rozpatrzymy następujący przykład.

Turysta zaciekawił się 5 trasami po Dnieprze i 7 trasami po Karpatach. Wyjaśnijmy, iloma różnymi sposobami on może spędzić swój urlop, jeżeli ma czas tylko na jedną trasę.

O ile jest wszystkiego $5 + 7 = 12$ różnych tras, to on może wybrać tylko jedną z nich 12 sposobami.

Uwzględniając ten przykład można podać następującą regułę dodawania.

Reguła dodawania. Jeżeli zbiór A składa się z m elementów, a zbiór B – z k elementów, przy czym te zbiory nie posiadają wspólnych elementów, to wybór "a lub b", gdzie $a \in A$, $b \in B$, jest takim wyborem, że można go dokonać $m + k$ sposobami.

Regułę dodawania można uogólnić dla trzech lub więcej zbiorów. Na przykład, jeżeli są zbiory A, B i C składające się odpowiednio z m, k i n elementów przy czym żaden z dwóch zbiorów nie ma wspólnych elementów, to wyboru "a lub b lub c", gdzie $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, można dokonać $m + k + n$ sposobami.

Znowu powróćmy do przykładu wyboru tras. Jeżeli turysta ma czas na zrealizowanie dwóch tras oraz chce zwiedzić na początku okolice Dniepru, a następnie Karpaty, to on może organizować swój odpoczynek 35 sposobami. W rzeczywistości, jeżeli wybrać jedną trasę po Dnieprze, to w parze wraz z nią może być 7 Karpackich tras. O ile tras po Dnieprze jest 5, to ilość par (trasa po Dnieprze, trasa w Karpatach) jest równa $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 7 \cdot 5 = 35$.

Powyższe rozwiązania ilustruje następująca tabela:

		Trasy w Karpatach						
		1	2	3	4	5	6	7
Trasy po Dnieprze	1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
	2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
	3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
	4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
	5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	(5; 7)

Uogólnieniem tego przykładu jest następująca reguła.

Reguła mnożenia. **Jeżeli element *a* można wybrać *m* sposobami i po każdym takim wyborze można element *b* wybrać *k* sposobami[1], to wyboru "*a* i *b*" w wymienionej kolejności można dokonać na *mk* sposobów.**

Regułę mnożenia można uogólnić. Na przykład, jeżeli element a można wybrać m sposobami i po takim tym wyborze można element b wybrać k sposobami i zatem jak wybrano elementy a i b, można element c wybrać n sposobami to wyboru "a i b i c" można dokonać mnk sposobami.

PRZYKŁAD 1 W klasie, w której uczy się 28 uczniów, należy wybrać trzech dyżurnych po jednym na każdym z trzech piętr szkoły. Iloma sposobami to można zrobić?

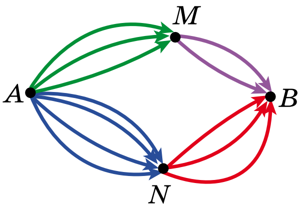
Rozwiązanie. Istnieje 28 sposobów wyboru dyżurnego na pierwszym piętrze, zatem jak ten wybór będzie zrobiony, to pozostaje 27 uczniów, każdy z których może być dyżurnym na drugim piętrze, po wyborze dyżurnego na pierwszym i drugim piętrze dyżurnego na trzecim piątrze można wybrać 26 sposobami.

W taki sposób, według reguły iloczynu, ilość sposobów wyboru trzech dyżurnych wynosi: $28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\,656$.

Odpowiedź: 19 656 sposobami. ◀

[1] Będziemy nazywać tę właściwość "zasadą niezależności ilości wyborów".

PRZYKŁAD 2 Na rysunku 21.1 przedstawiono schemat dróg między miastami A i B. Iloma sposobami można przejechać z miasta A do miasta B?



Rys. 21.1

Rozwiązanie. Korzystając z reguły iloczynu możemy wnioskować, że z miasta A do miasta B przez miasto M można dojechać $3 \cdot 2 = 6$ sposobami, a przez miasto N $4 \cdot 3 = 12$ sposobami. Wtedy, według reguły sumy ogólna ilość sposobów wynosi: $6 + 12 = 18$ sposobów.

Odpowiedź: 18 sposobami. ◄

1. Podaj regułę sumy.

2. Podaj regułę iloczynu.

ĆWICZENIA

21.1.° Podnóże gury i jej wierzchołka łączą trzy ścieżki. Ile jest tras od podnóża do wierzchołku, a potem do dołu do podnóża?

21.2.° Drużynie zaproponowano koszulki trzech kolorów: czerwone, zielone i błękitne, oraz spodenki dwóch kolorów – białe i żółte. Ile jest opcji wyboru formy dla drużyny?

21.3.° Kasia ma pięć sukienek i trzy pary bucików. Ile opcji wyboru stroju ma Kasia?

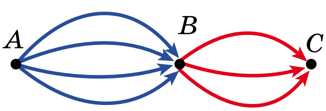
21.4.° W klasie jest 10 chłopców i 7 dziewczynek. Ile istnieje sposobów ułożenia par tanecznych składających się z jednego chłopca i jednej dziewczynki?

21.5.° Ile różnych trzycyfrowych liczb można ułożyć z cyfr:

1) 1 i 2; 2) 0 i 1

(cyfry mogą powtarzać się)?

21.6.° Z miasta A do miasta B prowadzą 4 drogi, a z miasta B do miasta C prowadzą 3 drogi (rys. 22.2). Iloma sposobami można dojechać z miasta A do miasta C?



Rys. 21.2

21.7.° Kawiarnia proponuje menu z trzech potraw pierwszych, 6 potraw drugich i 5 potraw trzecich. Ile jest sposobów wyboru obiadu z trzech potraw (po jednej potrawie z każdego wyboru)?

21.8.° Rozpatrzymy składy z dwóch liter: pierwsza z których oznacza spółgłoski, a druga – samogłoski. Ile takich różnych połączeń można ułożyć z liter słowa:
1) Połtawa; 2) Charków?

21.9.• Ile czterocyfrowych liczb wszystkie cyfry których są różne, można ułożyć z cyfr 1, 2, 3, 4, jeżeli te liczby powinne zaczynać się:
1) z cyfry 4; 2) z zapisu “23”?

21.10.• Ile trzycyfrowych liczb można zapisać za pomocą cyfr 0, 1, 2, 3, 4?

21.11.• Ile istnieje dwucyfrowych liczb, wszystkie cyfry której są parzyste?

21.12.• Ile istnieje dwucyfrowych liczb, wszystkie cyfry których są nieparzyste?

21.13.• Monetę podrzucono 3 razy. Ile różnych ciągów herbów i cyfr można otrzymać?

21.14.• Kostkę do gry podrzucono 3 razy. Ile różnych kolejnych oczek można otrzymać?

21.15.• Każde kratkę kwadratu 2×2 można pofarbować w błękitny lub czerwony kolor. Ile istnieje sposobów pofarbowania tego kwadratu?

21.16.• Iloma sposobami można wybrać na szachownicy białe i czarne pole, jakie nie leżą na tej samej poziomej i pionowej linii?

21.17.•• Ile istnieje parzystych pięciocyfrowych liczb?

21.18.•• Ile istnieje pięciocyfrowych liczb które są wielokrotnością 10?

21.19.•• Jeden kolekcjoner posiada do wymiany 11 znaczków i 8 monet, a drugi – 9 znaczków i 7 monet. Iloma sposobami kolekcjonerze mogą wymienić znaczek na znaczek, zaś monetę na monetę?

21.20.•• Ile istnieje pięciocyfrowych liczb, wszystkie cyfry których mają jednakową parzystość?

22. Częstość i prawdopodobieństwo zdarzenia losowego

Nie rzadko zdarza się nam obserwować, eksperymentować, uczestniczyć w doświadczeniach. Często kończy się to jakimś skutkiem, którego nie da się przewidzieć.

Rozpatrzymy kilka charakterystycznych przykładów.

- Jeżeli otworzymy na oślep książkę, to niemożliwie przewidzieć, jaki numer stronicy zobaczymy.
- Nie da się zanim rozpocznie się mecz piłki nożnej ustalić wynik gry.
- Nie można mieć pewności, że kiedy włączenie zostanie włączony, zapali się lampka.
- Nie ma gwarancji, że wyjdzie kurczak z jajka kurczaka, pomieszczonego w inkubatorze.

Z reguły obserwacja lub eksperyment wyznacza zestaw warunku, na przykład, mecz piłkarski powinien odbywać się zgodnie z zasadami, jaja kurczaka powinny znajdować się w inkubatorze nie mniej niż 21 dni z przestrzeganiem zalecanych metod zmiany temperatury i wilgotności w ciągu dnia.

Wynik obserwacji, eksperymentu nazywa się **zdarzeniem**.

Zdarzeniem losowym nazywa się wynik obserwacji lub eksperymentu, który może wystąpić lub może nie występować w przypadku przestrzegania danego zespołu stanu.

Na przykład, jeżeli rzucić monetę, przypadkiem jest to że wypadnie orzeł.

Znalezienie listu przy sprawdzeniu skrzynki pocztowej jest zdarzeniem losowym.

Wyobraź sobie, że 1 000 000 losów na loterię został rozegrany jeden samochód. Czy można wygrać tą nagrodę po kupieniu losu? Oczywiście, choć to zdarzenie jest *mało prawdopodobne*. A jeżeli będzie rozegrywać się 10 samochodów? Oczywiście, **prawdopodobieństwo** zwycięstwa wzrośnie. A jeśli będzie 999 999 samochodów do wygrania, to prawdopodobieństwo do wygrania staje się znacznie większe.

A więc, **prawdopodobieństwo zdarzeń losowych** można porównać. W tym celu konieczne jest uzgodnienie sposobu określania ilościowej możliwości tego lub innego zdarzenia.

Podstawą takiej oceny może być liczne obserwacje lub eksperymenty.

Ludzie dawno temu zauważyli, że dużo zdarzeń odbywa się na podziw, ze stałą **częstością**.

Badaczy demografii[1] dobrze znają liczbę 0,512. Statystycznie dane, otrzymane w różnych czasach i w różnych państwach świadczą o tym, że na 1000 nowo narodzonych przypada średnio 512 chłopczyków. Liczba 0,512 nazywa się **częstością zdarzenia losowego** "urodzenia chłopczyka". Ona wyraża się wzorem:

$$\text{Częstość} = \frac{\text{ilość nowonarodzonych chłopczyków}}{\text{ilość wszystkich nowonarodzonych}}.$$

Przypominamy, że liczba ta jest otrzymana w wyniku analizy wielu spostrzeżeń. W takich przypadkach uważa się, że prawdopodobieństwo zdarzenia "narodzenia" chłopczyków w przybliżeniu wynosi 0,512.

Wiecie, że palenie jest szkodliwe dla zdrowia. Według danych organizacji ochrony zdrowia, z palących osób jest 92% chorych na raka płuc. Liczba 0,92 – częstość zdarzenia losowego "ci, którzy chorują na raka płuc – to palaczy", określa się następującym stosunkiem:

$$\text{Częstość} = \frac{\text{ilość palaczy pośród chorych na raka płuc}}{\text{ilość wszystkich ludzi chorych na raka płuc}}.$$

W takich przypadkach mówi się, że prawdopodobieństwo trafić na palacza pośród chorych, którzy zachorował na raka płuc, w przybliżeniu jest równa 0,92 (lub 92%).

Aby szczególniej zapoznać się z pojęciem prawdopodobieństwa losowego zdarzenia, zwrócimy się do klasycznego przykładu rzutu monety.

Przypuśćmy, że w wyniku dwóch rzutów monety wypadł orzeł. Wtedy w danej serii, która składa się z dwóch prób, częstość wypadania orła wynosi:

$$\text{Częstość} = \frac{\text{ilość wypadania orła}}{\text{ilość wszystkich rzutów}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Czy oznacza to, że prawdopodobieństwo wypadania orła jest równe 1? Oczywiście, nie.

---

[1] Demografia – nauka o ludności.

Aby za pomocą częstości zdarzenia losowego było można ocenić jego prawdopodobieństwo, należy mieć wystarczającą ilość doświadczeń.

Zaczynając z XVIII wieku wielu badaczy przeprowadzili serię doświadczeń z rzutem monety.

W tabeli umieszczone wyniki niektórych doświadczeń.

Badacz	Ilość podrzuceń monety	Ilość wypadania orła	Częstość wypadania orła
Georges-lous de Bufon (1707–1788)	4040	2048	0,5069
Augustus de Morgan (1806–1871)	4092	2048	0,5005
William Jevon (1835–1882)	20 480	10 379	0,5068
Wsiewołod Romanow (1879–1954)	80 640	39 699	0,4923
Karl Person (1857–1936)	24 000	12 012	0,5005
Viliam Feller (1906–1970)	10 000	4979	0,4979

Według wyżej wymienionych danych spostrzega się prawowierność: przy wielokrotnym rzucie monety częstość pojawienia orła bardzo mało różni się od liczby 0,5.

A więc, można uważać, że prawdopodobieństwo że “wypadnie orzeł” w przybliżeniu jest równe 0,5.

W każdym z rozpatrywanych przykładów było stosowane pojęcie **częstości zdarzenia losowego**. Tą wielkość obliczaliśmy według wzoru:

$$\text{Częstość} = \frac{\text{ilość wystąpienia zdarzeń, które nas interesują}}{\text{ilość badań obserwacyjnych}}.$$

Powróćmy do rozpatrywanej tabeli. Czy można na podstawie jej danych stwierdzić, że prawdopodobieństwo zdarzenia losowego, że “wypadanie orła” jest równe liczbie 0,5? Odpowiedź na to pytanie jest przecząca. Rzeczywiście na podstawie tych danych można stwierdzić, że częstość pojawienia orła niewiele różni się od liczby 0,52 lub od liczby 0,4997, czyli liczba 0,5 nie ma żadnych przywilejów przed liczbą 0,52 lub liczbą 0,4997.

W taki sposób, częstość zdarzenia losowego umożliwia tylko w przybliżeniu ocenę prawdopodobieństwa zdarzenia wypadkowego *czym więcej przeprowadzić doświadczeń, tym bardziej będzie dokładna ocena prawdopodobieństwa zdarzenia wypadkowego i jego częstości.*

Taka ocena prawdopodobieństwa zdarzenia losowego nazywa się statystyczną. Ona zastosowuje się w różnych dziedzinach działalności człowieka: w fizyce, w chemii, w biologii, w biznesie ubezpieczeniowym, w socjologii, w ekonomice, w ochronie zdrowia, w sporcie i in.

Prawdopodobieństwo zdarzeń oznacza się literą P (od pierwszej litery słowa francuskiego *probalite* – prawdopodobieństwo).

Jeżeli w pierwszym przykładzie zdarzenie “narodzenie chłopczyka” oznaczyć literą A, to otrzymany wynik zapisuje się w następującej postaci:

$$P(A) \approx 0{,}512.$$

Biorąc pod uwagę przybliżenie statystycznego oceniania otrzymane dane można zaokrąglić. Na przykład, gdy częstość zdarzenia wypadkowego jest równa 0,512, to można zapisać, że $P(A) \approx 0{,}51$ lub $P(A) \approx 0{,}5$.

Jeżeli zdarzenie wypadania orła oznaczyć B, to

$$P(B) \approx 0{,}5.$$

Na koniec tego punktu zwrócimy uwagę na następujące kwestię.

Często w życiu codziennym podejmujemy właściwe i optymalne decyzje używając probabilistycznych właściwości, otaczających zjawisk i przedmiotów.

Rozpatrzymy kilka przykładów.

- Jeżeli chcemy dowidzieć się w jaki sposób rozwiązywać zadanie domowe, to przede wszystkim zatelefonuj koledze, który dobrze umie matematykę. Ten wybór bazuje się na tym, że dla zdolnego ucznia rozwiązanie zadania jest bardziej możliwe niż dla słabszego ucznia.
- Towary popularnych firm są droższe od analogicznych towarów mało znanych firm. Jednak często kupujemy droższe towary. Decyzja ta w dużej mierze jest zdeterminowana przez fakt, że prawdopodobieństwo kupić niskiej jakości produkt w firmie znanej jest mniejsze niż w mało znanej firmie.
- Niech praca kontrolna składa się z dziesięciu zadań napisana w testowej postaci z wyborem odpowiedniej odpowiedzi. Załóżmy, że daliście radę rozwiązać dziewięć zadań, lecz z dziesiątym nie poradzicie sobie. Pozostaje tylko jedno – odpowiedź odgadnąć. Najprawdopodobniej nie będziecie wybierać literę, która najczęściej w dziewięciu poprzednich zadaniach występowała. Rozważania te opierają się na fakcie, iż mało prawdopodobnie, że autorzy zadań testowych rozmieszczą odpowiedzi do wariantów tak, że jakaś litera, która odpowiada prawidłowemu rozwiązaniu występowała o wiele częściej od innej.

Zauważymy, że oddzielnie wzięty wybór, który zrobiony na podstawie prawdopodobieństwa, może być nie udanym. Nie zważając na to, podczas dalszych analogicznych rozwiązań nie należy odrzucać wybraną strategię, która charakteryzuje prawdopodobieństwa, ponieważ takie podejście zwiększa szanse powodzenia.

1. Podaj przykłady zdarzeń losowych.
2. Opisz jaka jest częstość zdarzenia losowego.
3. W jakich warunkach częstość zdarzeń losowych może ocenić prawdopodobieństwo zdarzeń losowych?
4. Jak oznacza się prawdopodobieństwo zdarzenia A?

ĆWICZENIA

22.1.° Podaj przykłady badań, wynikiem których twoim zdaniem jest: 1) mało prawdopodobne zdarzenie; 2) bardzo prawdopodobne zdarzenie.

22.2.° Czy można uważać mało prawdopodobnym zdarzenie:
1) przy rzucie monety 200 razy z rzędu wypadał orzeł;
2) w następnym tygodniu nauczyciel zawoła Cię do tablicy chociażby jeden raz;
3) mecz piłkarski “Szachtar – Dynamo” (Kijów) zakończył się wynikiem 1 : 1;
4) naciskając na oślep klawisze klawiatury komputera było uzyskane słowo “matematyka”?

22.3.° Eksperyment polega na rzut przycisku. Przycisk może upaść ostrzem do dołu lub na kapelusz (rys. 22.1). Podrzućcie przycisk: 1) 10 razy; 2) 20 razy; 3) 50 razy; 4) 100 razy; 5) 200 razy. Wyniki uzyskane w pięciu seriach eksperymentu podaj w tabeli.

Rys. 22.1

Numer serii	1	2	3	4	5
Ilość eksperymentów (rzutu) w serii	10	20	50	100	200
Ilość wypadnięcia przycisku ostrzem do dołu					
Ilość wypadania przycisku ostrzem do góry					

W każdej z pięciu serii eksperymentu oblicz częstość wypadania przycisku ostrzem do góry i oceń prawdopodobieństwo pojawienia się tego zdarzenia. Jakie zdarzenie jest więcej prawdopodobne: “przycisk upadnie ostrzem do dołu” lub “przycisk upadnie ostrzem do góry”.

22.4.° Zdarzenie polega na rzucie dwóch monet. Wykonaj to zdarzenie: 1) 10 razy; 2) 20 razy; 3) 50 razy; 4) 150 razy. Wyniki uzyskane w każdej z czterech serii zdarzeń podaj do tabeli.

Numer serii	1	2	3	4
Ilość zdarzeń (podrzucenie) w serii	10	20	50	150
Ilość zdarzeń, w których wypada 2 orły				
Ilość zdarzeń, w których wypadł tylko jeden orzeł				
Ilość zdarzeń, w których nie wypadł orzeł				

W każdej z czterech serii zdarzeń oblicz częstość zdarzeń losowych:
1) wypadnie dwa orły,
2) wypadnie tylko jeden orzeł
3) wypadnie dwie reszki.

Czy można na podstawie tych obserwacji zrobić wniosek, że zdarzenie, że "wypadnie jeden orzeł" jest więcej prawdopodobną od zdarzenia, że "nie wypadnie żadnego orła"? Na czym opiera się takie przepuszczenie? Czy można na podstawie tych spostrzeżeń gwarantować, że pierwsze z tych zdarzeń jest bardziej prawdopodobna niż drugie?

22.5.° Przeprowadźcie serię, która składa się ze 100 zdarzeń, w których podrzuca się guzik z pętlą (rys. 22.2). Znajdź częstość zdarzenia "guzik upadnie pętlą do dołu". Oceń prawdopodobieństwo zdarzenia "guzik upadnie pętlą do góry" w przeprowadzonej serii zdarzeń.

Rys. 22.2

22.6.° W tabeli podane dane narodzenia dzieci w mieście *M* w ciągu 2016 r.

Miesiąc	Styczeń	Luty	Marzec	Kwiecień	Maj	Czerwiec	Lipiec	Sierpień	Wrzesień	Październik	Listopad	Grudzień
Ilość narodzonych chłopców	1198	1053	1220	1151	1151	1279	1338	1347	1329	1287	1196	1243
Ilość narodzonych dziewcząt	1193	1065	1137	1063	1163	1228	1258	1335	1218	1239	1066	1120

Oblicz częstość rodzenia się chłopczyków w każdym miesiącu oraz za cały 2016 r. Oceń prawdopodobieństwo narodzenia dziewczynek w 2016 r.

22.7.° Operator służby informacyjnej w ciągu godzin pracy (9:00–17:00) średnio odpowiada telefonicznie 6 godz. Jakie prawdopodobieństwo tego, że gdy zatelefonować do służby informacyjnej w ten czas telefon okaże się nie zajęty.

22.8.° Według statystyki w Odessie w ciągu lata ilość dni słonecznych jest średnio 70. Oblicz prawdopodobieństwo, że przyjechawszy w lecie do Odessy na jeden dzień, gość będzie miał ten dzień pochmurny.

22.9.° Z wielkiej ilości żarówek wybrano 1000, i stwierdzono, że 5 żarówek jest wadliwych. Oblicz prawdopodobieństwo kupienia żarówki wadliwej.

22.10.° Podczas epidemii na grypę spośród zbadanych 40 000 osób okazało się 7900 chorych. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że “na oślep wybrana osoba będzie chora na grypę”.

22.11.° Prawdopodobieństwo kupienia baterii wadliwej wynosi 0,02. Czy można stwierdzić, że w jakiejkolwiek partii ze 100 baterii okażą się wadliwe?

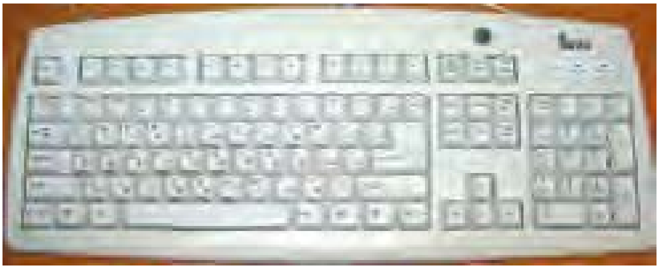
22.12.° Prawdopodobieństwo trafienia w tarczę wynosi 95% czy jest możliwym aby podczas serii ze 100 wystrzałów było 98 trafionych do tarczy?

22.13.• Niżej podana tabela nazywa się “Plan nauczania w klasie 9. ogólnokształcącej szkoły:

Przedmioty	Ilość godzin	Przedmioty	Ilość godzin
Język ukraiński	2	Geometria	2
Literatura ukraińska	2	Biologia	2
Język obcy	3	Geografia	2
Literatura światowa	2	Fizyka	3
Historia Ukrainy	2	Chemia	2
Historia powszechna	1	Praca	1
Prawoznawstwo	1	Informatyka	2
Sztuka	1	Podstawy zdrowia	1
Algebra	2	Wychowanie fizyczne	3

Oblicz prawdopodobieństwo, że wybrany przedmiot lekcyjny z tygodniowego planu klasy 9. okaże się: 1) algebra, 2) geometria, 3) matematyka; 4) wychowaniem fizycznym, 5) językiem obcym.

22.14.• Wybierz na oślep jedną ze stronic powieści Marka Wowczka “Instytutka”. Oblicz ile razy na tej stronicy spotykają się litery: “n”, “o”, “j”, “ju” oraz ile wszystkiego na niej liter. Oblicz prawdopodobieństwo obecności tych liter w wybranym tekście. To obliczenie wskaże ci dlaczego na klawiaturze maszynki drukarskiej oraz komputera (rys.) litery “n” i “o” rozmieszczono bliżej do środka, zaś litery “j” i “ja” bliżej do kraju.



Rys. 22.3

22.15.• W tabeli są umieszczone wiadomości o ilości dni w 2016 roku, w których o 12.00 było zanotowano daną temperaturę oraz dany poziom wilgotności powietrza w mieście *N*.

Skala temperatury powietrza, °C	Skala wilgotności powietrza, %						Razem dni
	Od 0 % do 40 %	Od 41 % do 60 %	Od 61 % do 70 %	Od 71 % do 80 %	Od 81 % do 90 %	Od 91 % do 100 %	
Mniejsza od –11 °C	0	1	1	3	2	0	7
Od –10° do –1 °C	0	0	11	15	13	5	44
Od 0° do 10 °C	10	19	12	13	19	47	120
Od 11° do 20 °C	23	27	15	6	10	2	83
Od 21° do 30 °C	57	32	6	2	1	0	98
Więcej od 31 °C	9	4	0	0	0	0	13
Razem dni	99	83	45	39	45	54	365

Oblicz częstość spostrzeżeń w 2016 roku:
1) temperatury powietrza w skali od 11 °C do 20 °C pośród tych dni, kiedy zanotowana wilgotność nie przewyższała 40 %;
2) wilgotności powietrza w skali od 71 % do 80 % pośród tych dni, w których zanotowana temperatura była mniejsza od 0 °C;
3) temperatury powietrza w skali od 21 °C do 30 °C oraz jednocześnie wilgotności powietrza w skali od 41 % do 70 %.

23. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Dla obliczenia prawdopodobieństwa niektórych zdarzeń nie obowiązkowo przeprowadzać doświadczenia lub obserwacje. Wystarczy kierować się życiowym doświadczeniem i zdrowym rozsądkiem.

PRZYKŁAD 1 Niech w pudełku jest 10 kulek czerwonych. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na oślep wybrana kulka będzie koloru czerwonego?

Według warunku jakakolwiek wybrana na oślep kulka będzie czerwonego koloru.

Zdarzenie, które według danych zbiorem warunków obowiązkowo zawsze odbędzie się w jakichkolwiek doświadczeniach nazywa się **prawdopodobnym (wiarygodnym)**: Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia uważa się równe 1, czyli jeżeli A – prawdopodobne zdarzenie, to

$$P(A) = 1.$$

A więc, prawdopodobieństwo, że wzięta na oślep kulka będzie koloru czerwonego jest równa 1.

O ile w pudełku nie ma kulek żółtego koloru, to wyjąć kulkę żółtego koloru jest niemożliwym.

Zdarzenie, według pewnych danych warunków nie może odbyć się w żadnym z doświadczeń nazywa się **niemożliwym**. *Prawdopodobieństwo takiego zdarzenia uważa się równe 0,* czyli:

jeżeli A – zdarzenie niemożliwe, to

$$P(A) = 0.$$

A więc, prawdopodobieństwo, że na oślep wzięta kulka będzie koloru żółtego jest równe 0. ◄

PRZYKŁAD 2 Pewną monetę rzucimy jeden raz. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadnie orzeł?

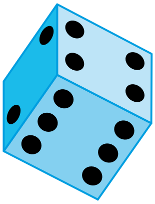
W tym doświadczeniu można otrzymać jeden z dwóch wyników: wypadnie orzeł. Przy czym żadne z nich nie ma przewagi. Taki wynik nazywa się **równo możliwym**, a odpowiednie zdarzenia losowe – **równo prawdopodobnym**. Wtedy można uważać, że prawdopodobieństwo każdego ze zdarzeń, że “wypadnie orzeł” i że “wypadnie reszka” jest równe $\frac{1}{2}$.

Wyżej wypowiedziane zdanie nie oznacza, że w jakiejkolwiek serii doświadczeń z rzutem monety równo na połowę wyników będzie, że wypadnie orzeł oraz równo połowa – wypadnie reszka. Możemy tylko myśleć, że w wypadku licznych doświadczeń częstość wypadania orła w przybliżeniu jest równa $\frac{1}{2}$.

Rozpatrzymy jeszcze kilka przykładów doświadczeń z takim zestawem warunków, które robią wszystkie wyniki doświadczeń możliwymi.

PRZYKŁAD 3 Sześcienną kostkę do gry (rys. 23.1) rzucono jeden raz. Jakie prawdopodobieństwo jest, że wypadnie cyfra 4?

W tym doświadczeniu można otrzymać jeden z sześciu wyników: 1, 2, 3, 4, 5 lub 6 oczek. Wszystkie te wyniki są równo możliwe. Dlatego można uważać, że prawdopodobieństwo zdarzenia, że "wypadnie 4 oczka" jest równe $\frac{1}{6}$. ◀



Rys. 23.1

PRZYKŁAD 4 Niech nadrukowano 1 000 000 biletów loterii, 20 z których wygrywają. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania kupując tylko jeden bilet?

Doświadczenie polega na tym, że kupiono jeden bilet. W doświadczeniu można otrzymać jeden z 1 00000 równo możliwych wyników: kupić bilet z numerem 1, kupić bilet z numerem 2 itd. Z nich 20 wyników doprowadzają do wygrania. Można uważać, że prawdopodobieństwo wygrania, gdy kupiono jeden bilet wynosi $\frac{20}{100\,000} = \frac{1}{5000}$. ◀

PRZYKŁAD 5 W pudełku leży 15 kul bilardowych, prenumerowanych od 1 do 15. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wyjęta na oślep kula może mieć numer wielokrotności 3?

W tym doświadczeniu można otrzymać jeden z 15 równo możliwych wyników: wyjęta kula ma numer 1, wyjęta kula ma numer 2 itd. Z nich do odbycia się zdarzenia, że "wyciągnięta kula ma numer 3 wielokrotny 3" posiada 5 wyników: wypadnie kula o numerze 3 lub 6 lub 9 lub 12 lub 15. Dlatego można uważać, że szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. ◀

Oprócz tego, że w przykładach 1+5 rozpatrywane są różne doświadczenia, jeszcze ich może opisywać inny model matematyczny. Objaśnimy podane wyżej.

• W każdym przykładzie przy doświadczeniach można otrzymać jeden z n równo możliwych wyników.

Przykład 1: $n = 10$.

Przykład 2: $n = 2$.

Przykład 3: $n = 6$.

Przykład 4: $n = 100\,000$.

Przykład 5: $n = 15$.

• W każdym z przykładów rozpatruje się pewne zdarzenie A, do odbycia której przyprowadzają m wyników. Nazwiemy ich **sprzyjającymi**.

Przykład 1: A – wyjmowanie czerwonej kuli, $m = 10$, lub A – wyjmowanie żółtej kuli, $m = 0$.

Przykład 2: A – wypadanie orła, $m = 1$.

Przykład 3: A – wypadła na początku podana ilość oczek na ścianie sześcianu, $m = 1$.

Przykład 4: A – wygranie loterii, $m = 20$.

Przykład 5: A – wyjęcie kuli, numer jakiej jest wielokrotnością 3, $m = 5$.

• W każdym z rozpatrywanych przykładach prawdopodobieństwo zdarzenia A można obliczyć według wzoru:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

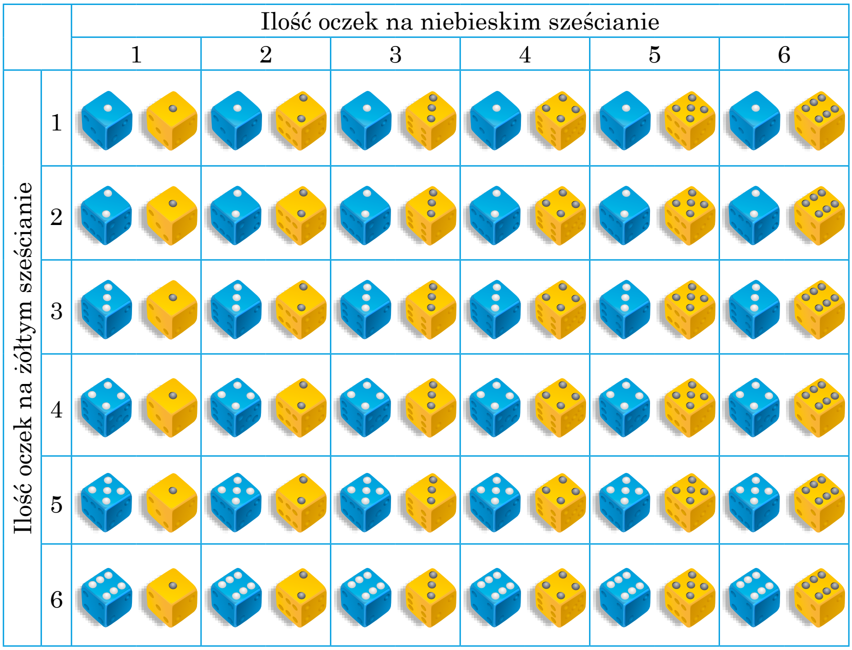
Definicja. **Jeżeli doświadczenie można zakończyć jednym z n równo możliwych wyników z których m powodują pojawienie się zdarzenia A, to prawdopodobieństwem zdarzenia A nazywa się stosunek $\frac{m}{n}$.**

Taka definicja nazywa się **klasyczną**.

Zwracamy uwagę, że *gdy zespół warunków doświadczeń taki, że jego wynikami nie są równo możliwe to klasyczna definicja prawdopodobieństwa do takiego doświadczenia zastosować nie można.*

PRZYKŁAD 6 Rzucono dwie kostki do gry: niebieską i żółtą. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że wypadną dwie szóstki?

Za pomocą tabeli umieszczonej na rysunku 23.2 można ustalić że w danym doświadczeniu można otrzymać 36 równo możliwych wyników, z jakich sprzyjających jest tylko jedna. Dlatego szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{36}$. ◄



Rys. 23.2

PRZYKŁAD 7 **(zadanie d'Alambera).** Rzucono jednocześnie dwie monety jednakowe. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wypadnie orzeł chociażby jeden raz?

To zadanie jest podobne do przykładu 6. Różnica tylko w tym, że sześciany różniły się kolorem, zaś monety są nie do odróżnienia (jednakowe). Aby utworzyć w tym doświadczeniu zestaw warunków, według których wszystkie jego wyniki będą równo możliwe, będziemy odróżniać monety, uprzednio numerowane. Wtedy można otrzymać cztery równo możliwe wyniki (rys. 23.3).

W pierwszych trzech wynikach chociażby jeden raz wypadł orzeł. Te wyniki są sprzyjające. Dlatego prawdopodobieństwo, że przy jednoczesnym rzucie dwóch monet wypadnie chociażby jeden raz orzeł, wynosi $\frac{3}{4}$. ◄

Rys. 23.3

PRZYKŁAD 8 Rzucamy jednocześnie dwie jednakowe kostki do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wypadną liczby, suma których jest równa 11?

Dane doświadczenie posiada 11 wyników. Suma liczb, jaka może wypaść, wynosi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Lecz tutaj będzie błędem uważać, że prawdopodobieństwo zdarzenia “suma liczb, które wypadną jest równa 11” wynosi $\frac{1}{11}$. Rzecz w tym, że z przeliczonych 11 wyników badania nie jest równo możliwym. Na przykład, wynik “suma liczb dorównuje 2” być mógł otrzymany tylko jednym sposobem, zaś wynik “suma liczb dorównuje 6% – pięcioma sposobami (przekonaj się w tym samodzielnie).

Aby można było skorzystać się z klasycznej definicji prawdopodobieństwa opiszemy warunki doświadczeń w taki sposób, aby wszystkie jego wyniki byłe równo możliwymi.

W tym celu będziemy warunkowo odróżniać kostki na przykład, względem kolorów. Wtedy można otrzymać 36 równo możliwych wyników (rys. 24.2). Ile wszystkich tylko dwa są sprzyjające. Dlatego szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. ◄

PRZYKŁAD 9 Rozpatrują się wszystkie rodziny mające dwoje dzieci, z których chociażby jedno dziecko – to chłopiec. Jakie prawdopodobieństwo tego, że w wybranej na oślep w ten sposób rodzinie są dwaj chłopcy? (Uważamy, że urodzenie chłopczyka oraz urodzenie dziewczynek są równo prawdopodobne).

Zdaje się, że w tym zadaniu odpowiedzią jest liczba $\frac{1}{2}$. Przecież jeden chłopczyk w rodzinie już jest, a więc drugim dzieckiem w rodzinie z jednakowym prawdopodobieństwem będzie lub chłopczyk lub dziewczynka.

W rzeczywistości, wyżej przeprowadzone rozumowania – to rozwiązanie innego zadania, a mianowicie: rozpatrują się wszystkie rodziny z dwiema dziećmi, w których starsze dziecko – chłopiec. Jakie prawdopodobieństwo tego, że wybrana na oślep rodzina ma dwóch chłopczyków?

Zestaw warunków naszego wyboru podaje jednakowo możliwe wyniki:

starsze dziecko – chłopczyk, młodsze dziecko – chłopczyk;

starsze dziecko – dziewczynka;

starsze dziecko – dziewczynka, młodsze dziecko – chłopczyk.

A więc, szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{3}$. ◄

Na zakończenie tego punktu zaznaczymy następujące wiadomości.

Na pierwszy rzut oka wydaje się, że wieloma zjawiskami, które dzieją wokół nas kieruje "jego królewska mość – zdarzenie". Jednak z dokładniejszą analizą okazuje się, że z powodu chaosu losowego wynika to, co można określić ilościowo. Nauka, która zajmuje się takimi określeniami nazywa się **teorią prawdopodobieństwa**.

?

1. Jakie zdarzenie nazywa się wiarygodnym.
2. Jakie zdarzenie nazywa się niemożliwym.
3. Jakie prawdopodobieństwo jest 1) wiarogodnego zdarzenia; 2) niemożliwego zdarzenia?
4. Podaj przykłady zdarzeń równo prawdopodobnych.
5. Sformułuj klasyczną definicję prawdopodobieństwa.
6. Do jakiej sytuacji niemożliwie zastosować klasyczną definicję prawdopodobieństwa?

ĆWICZENIA

23.1.° Podaj przykłady zdarzeń wiarygodnych.

23.2.° Podaj przykłady zdarzeń niemożliwych.

23.3.° W koszyku leżą 10 czerwonych i 15 zielonych jabłek. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wyciągając na oślep, wyciągniemy gruszkę? Jabłko?

23.4.° Wybrano na oślep trzy cyfry parzyste. Jakie prawdopodobieństwo tego, że liczba zapisana tymi cyframi będzie nieparzystą?

23.5.° Wybrano na oślep trzy cyfry nieparzyste. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że liczba zapisana tymi cyframi będzie nieparzystą?

23.6.° Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przestawiając litery w słowie "algebra" można otrzymać słowo "geometria"?

23.7.° Podaj przykłady zdarzeń równo możliwymi wynikami.

23.8.° Podaj przykłady zdarzeń z równo możliwymi wynikami.

23.9.° Czy zdarzenia A i B są równoprawno prawdopodobne:

1) zdarzenie A: z 15 kul bilardowych o numerach 1 do 15 wzięta na oślep kula będzie oznaczona numerem 1;
zdarzenie B: z 15 kul bilardowych z numerami od 1 do 15 wzięto na oślep jedną kulę, która jest z numerem 7;

2) zdarzenie A: z 15 kul bilardowych prenumerowanych od 1 do 15 wzięto na oślep kulę z numerem parzystym;
zdarzenie B: z 15 kul bilardowych prenumerowanych od 1 do 15 wybrano na oślep kulę z nieparzystym numerem?

23.10.° Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przy rzucie sześciennej kostki do gry ilość oczek na ścianach będzie równa:
1) jednej;
2) trzem;
3) liczbie nieparzystej;
4) liczbie wielokrotnej 5;
5) liczbie, która nie dzieli się bez reszty przez 3;
6) liczbie wielokrotnej 9?

23.11.° Wyobraź sobie, że w klasie w której uczysz się rozgrywa się jedna bezpłatna turystyczna podróż do Londynu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że do Londynu pojedziesz ty?

23.12.° Do egzaminu z matematyki trzeba nauczyć się 35 biletów. Uczeń bardzo dobrze nauczył się 30 biletów. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że odpowiadając na jeden bilet wybrany na oślep, on otrzyma 12 punktów?

23.13.° Aby zdać egzamin z matematyki należy nauczyć się 30 biletów. Uczeń nie nauczył się tylko jednego biletu. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że on nie zda egzamin odpowiadając na jeden bilet?

23.14.° Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że uczennica z waszej klasy, którą zapytają na lekcji matematyki u tablicy, nazywa się Katarzyną?

23.15.° W loterii jest 20 wygranych biletów i 280 biletów bez wygrań. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania, jeżeli kupiono jeden bilet?

23.16.° W pudełku jest 7 niebieskich i 5 żółtych kul. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wybrana na oślep kula okaże się: 1) żółtą; 2) niebieską?

23.17.° W pudełku było 23 kartki ponumerowane od 1 do 23 włącznie i z pudełka wzięto na oślep jedną kartkę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że na tej kartce jest zapisana liczba:
1) 11;
2) 24;
3) wielokrotna 6;
4) wielokrotna 5;
5) jednocyfrowa;
6) złożona;
7) w zapisie której jest cyfra 7;
8) w zapisie której jest cyfra 2;
9) w zapisie której nie ma cyfry 4;
10) suma cyfr której dzieli się przez 3;

11) która przy dzieleniu przez 11 daje resztę 2;
12) w zapisie której nie ma cyfry 1?

23.18.° Z liczb naturalnych od 1 do 30 na oślep wybrano jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że ta liczba będzie:
1) pierwszą;
2) dzielnikiem liczby 18;
3) kwadratem liczby naturalnej?

23.19.° Nabierając numer telefonu swego kolegi Mikołaj zapomniał: 1) ostatnią cyfrę; 2) pierwszą i ostatnią cyfrę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że on odrazu nabierze prawidłowy numer?

23.20.• Abonent zapomniał dwie ostatnie cyfry numeru telefonu i nabiera je na oślep. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że można prawidłowo nabrać numer, jeżeli abonent pamięta tylko dwie ostatnie cyfry:
1) nieparzyste; 2) różne i parzyste?

23.21.• Jakie prawdopodobieństwo tego, że twój najszczęśliwszy dzień w następnym roku wypadnie na: 1) 7 dzień; 2) 31 dzień; 3) 29 dzień?

23.22.• Ściany sześcianu pofarbowano w czerwony lub biały kolor (każdą ścianę w jeden kolor). Prawdopodobieństwo wypadnięcia czerwonej ściany wynosi $\frac{5}{6}$, zaś prawdopodobieństwo wypadnięcia białej ścianki $\frac{1}{6}$. Ile było czerwonych i białych ścian w sześcianie?

23.23.• W pudełku leży 4 niebieskie kule oraz kilka czerwonych. Ile czerwonych kul jest w pudełku, jeżeli prawdopodobieństwo tego, że na oślep wybrana kula okaże się niebieską, wynosi $\frac{2}{7}$?

23.24.• Pośród dwóch dwucyfrowych liczb wybrano na oślep jedną liczbę. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że:
1) jego cyfra w rzędzie dziesiątek jest większa od cyfry w rzędzie jednostek;
2) jego cyfra w rzędzie dziesiątek i jednostek jest jednakowa;
3) ta liczba dzieli się całkowicie przez 9?

23.25.• Kartki o numerach 1, 2, 3 w dowolny sposób ułożono w rząd. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że kartki z nieparzystymi numerami okażą się obok siebie?

23.26.• Na ławce siadają dowolnie dwóch chłopczyków i jedna dziewczynka. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że chłopczyki okażą się obok siebie?

23.27.• W pudełku leży 5 zielonych i 7 niebieskich ołówków. Jaką najmniejszą ilość ołówków trzeba wyjąć na oślep, aby prawdopodobieństwo tego, że pośród wybranych ołówków będzie zielonego koloru wynosiło 1?

23.28.• W pudełku leżą 3 czerwonych, 7 żółtych i 11 niebieskich ołówków. Jaką najmniejszą ilość ołówków trzeba wyjąć na oślep z pudełka, aby prawdopodobieństwo tego, że pośród wyjętych ołówków będzie czerwony, było równe 1?

23.29.•• Rzucono raz dwiema kostkami do gry. Według rysunku 23.2 ustal jakie prawdopodobieństwo tego, że wypadnie:
1) dwie jedynki;
2) dwie liczby jednakowe;
3) liczby, suma których jest równa 7;
4) liczby, suma których jest większa od 10;
5) liczby, iloczyn których jest równy 6.

23.30.•• Rzucono kostkę do gry dwa razy. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania:
1) że za pierwszym razem wypadnie mniej niż 4 oczka, a za drugim razem – więcej od 4.
2) za pierwszym razem wypadnie mniej oczek od drugiego razu
3) w sumie za dwa rzuty wypadnie 5 oczek?

23.31.•• Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przy dwóch rzutów kostki do gry:
1) za pierwszym razem wypadnie liczba mniejsza od 5, a w drugim – mniejsza od 4;
2) szóstka wypadnie tylko z drugiego razu;
3) pierwszego razu wypadnie więcej oczek niż w drugim?

23.32.•• Dmytro i Piotr jednocześnie rzucają po jednej kostce do gry. Jeżeli suma oczek, co wypadnie jest równa 6, to wygra Dmytro, a jeżeli w sumie wypadnie 7 oczek, to wygra Piotr. U kogo z graczy jest większa szansa do wygrania w tej grze?

23.33.•• Rzucono dwa razy monetę symetryczną. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wypadnie: 1) dwa orła; 2) orzeł i reszka?

23.34.•• Z pięciu prenumerowanych kartek na oślep wybrano jedną i zapamiętano jej numer i powrócono do pozostałych kartek, zatem znowu wybierano na oślep z tych pięciu kartek jedną. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dwa razy wybrano z jednakowymi liczbami?

23.35.•• Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przy trzykrotnym rzucie monety: 1) trzykrotnie wypadnie orzeł; 2) dwukrotnie wypadnie orzeł; 3) jednokrotnie wypadnie orzeł; 4) chociażby jeden raz wypadnie orzeł?

23.36.•• Za okrągłym stołem wypadkowo siadło n osób ($n > 2$). Z nich tylko dwoje znają się między sobą. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że dwoje znajomych będą siedzieć obok siebie?

23.37.•• W kolejkę ustawia się w przypadkowy sposób czworo ludzi: A, B, C, D. Biorąc pod uwagę różne warianty ich rozmieszczenia A, B, C, D możliwe, oblicz prawdopodobieństwo tego, że A będzie stać przed B.

Na początku była gra

Znasz wiele gier, których wynik zależy od umiejętności uczestników. Jednak takie gry nie zależą od możliwości graczy. Wszystko zależy od wypadku. Do ostatniej należy gra w kostki. Uważa się, że z niej zaczyna się nauka o przypadkowości.

Rzecznik francuskiego króla Ludwika XIV, hazardzista, filozof i pisarz kawaler de Méré zwrócił się do wybitnego uczonego Blaise'a Pascala z prośbą o wyjaśnieniu następującego paradoksu. Z jednej strony, bogaty doświadczenie w grach de Méré świadczyło o tym, że podczas rzutu kostki do gry suma 11 oczek wypada częściej od sumy 12 oczek.

Z drugiej strony ten fakt był sprzeczny z takimi rozważaniami. Sumę w 11 oczek można otrzymać z sześciu różnych kombinacji sześciennych kostek do gry:

6–4–1	6–3–2	5–5–1
5–4–2	5–3–3	4–4–3

Lecz 12 oczek można otrzymać również z sześciu kombinacji:

6–5–1	6–4–2	6–3–3
5–5–2	5–4–3	4–4–4

A więc, do pojawienia sumy 11 i 12 oczek prowadzi ta sama ilość sprzyjających wyników.

Takie zdarzenia mają te same szanse, co jest sprzeczne z praktyką, Pascal zrozumiał: błąd polegał na tym, że zdarzenia, które rozpatrywał de Méré są nierówno prawdopodobne. Na przykład, sumę 11 oczek za pomocą kombinacji 6–4–1 można uzyskać przy 6 różnych wyników rzutu kostki do gry: (6; 4; 1); (6; 1; 4); (4; 6; 1); (4; 1; 6); (1; 6; 4); (1; 4; 6).

Jeżeli możemy obliczyć dla każdej kombinacji sposoby jej pochodzenia, to otrzymujemy: dla sumy 11 ilość sprzyjających wyników wynosi 27, a dla sumy 12 – 25. Przy czym, wszystkie wyniki są równomożliwymi.

To oraz inne zadania, które są związane z hazardem, Blaise Pascal omawiał korespondencyjnie z Pierre Fermatem. Uważa się, że ta korespondencja położyła fundament dla teorii prawdopodobieństwa.

To ciekawe, że podobny błąd, który wykonał de Méré zrobił francuski matematyk Jean le Rond d'Alembert rozwiązując następujące zadanie: "Monetę podrzuca się dwukrotnie. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej jeden raz wypadnie orzeł?" Tak on myślał w przybliżeniu.

Są możliwe trzy wyniki: Orzeł wypadł pierwszego razu, orzeł wypadł drugiego razu oraz orzeł nie wypadł wcale. Wtedy z trzech prawdopodobnych wynikach tylko sprzyjające, znaczy szukane prawdopodobieństwo jest równe $\frac{2}{3}$.

Oprócz tego z przykładu 7 p. 23 wiecie, że odpowiedź prawidłowa jest $\frac{3}{4}$.

Błąd polegał na tym, że wyznaczone trzy wyniki są nie równomożliwymi. (Pomyślcie dlaczego). Najprawdopodobniej ten błąd wskazuje na to, że w XVIII w. teoria prawdopodobieństwa była "młodą" nauką, która potrzebowała wyjaśnienia samego pojęcia "prawdopodobieństwa zdarzeń".

Blaise Pascal
(1623–1662)

Francuski matematyk, fizyk i filozof religii. W młodym wieku wykazał zdolności matematyczne. Przeszedł do historii jako klasyczny przykład naukowcy, nastoletniego geniusza. Jego główne matematyczne zainteresowania były bardzo szerokie. W szczególności wymyślił ogólny algorytm dla znalezienia cech podzielności dowolnej liczby całkowitej, sformułował szereg podstawowych pojęć teorii prawdopodobieństwa, podał metody obliczenia pola figur, pola powierzchni i objętości brył. Skonstruował jedną z pierwszych maszyn do dodawania – Sumator.

Formacja i rozwój teorii prawdopodobieństwa są powiązane z pracą wybitnych naukowców, jak Jakob Bernoulli (1654–1705), Pierre Simon de Laplace (1749–1827), Richard von Mises (1883–1953). W XX w. osobliwe znaczenie otrzymały prace wybitnego radzieckiego matematyka Andrzeja Kołmogorowa.

Ukraińska nauka podarowała światu wiele fachowców w teorii prawdopodobieństwa. Nazwiska, jak J.I. Gichman, B.W. Hnedenko, A.W. Skorochod, M.J. Jadrenko są znane w całym świecie.

A. M. Kołmogorow
(1903–1987)

M. J. Jadrenko
(1932–2004)

M.J. Jadrenko – słynny matematyk, oddał wiele sił twórczych na działanie pedagogiczne. On dużo pracował z uzdolnioną młodzieżą, był założycielem Ogólnoukraińskich olimpiad dla młodych matematyków. M.J. Jadrenko udzielał dużo czasu działalności edukacyjnej. W szczególności z jego inicjatywy w 1968 r. było utworzono pierwszy na Ukrainie popularnonaukowego wydania “W świecie matematyki”.

24. Początkowe wiadomości o statystyce

Jakim nakładem należy wydrukować podręcznik algebry klasy 9.?

Czy warto pewnemu polityku kandydować w kolejnych wyborach burmistrza?

Ile kilogramów ryb i żywności morskiej średnio spożywa za rok jeden mieszkaniec Ukrainy?

Czy jest korzystne arendować stadion dla koncertu danego artysty?

Na te i wiele innych pytań pomoże odpowiedzieć statystyka.

Definicja. Statystyka (z łac. *status* – stan) – **nauka, której przedmiotem zainteresowania są metody pozyskiwania i prezentacji, a przede wszystkim analizy danych opisujących zjawiska, w tym masowe.**

Statystyczne badania składają się z kilku etapów:

Zbiór danych

↓

Opracowanie danych i prezentacja w dogodnej formie

↓

Analiza danych

↓

Wnioski i propozycji

Osobno zatrzymamy się na każdym etapie.

Zbiór danych

Wiecie, że złe nawyki, niedożywienie, mało ruchomy tryb życia prowadzą do chorób sercowo-naczyniowych. Do takiego wniosku doszli lekarze sprawdzając oczywiście nie wszystkich ludzi naszej planety.

Wiadomo, że badania były *selektywne* lecz nosiły *masowy* charakter.

W statystyce zbiór obiektów na podstawie których prowadzi się badania nazywa się **próbką**.

W danym przykładzie próbka składa się z kilku milionów osób.

Warto zauważyć, że statystyczny wniosek, oparty jedynie na wielkości próbek, nie zawsze jest wiarygodny. Na przykład, jeżeli badając popularność artysty, ograniczymy się opytywaniem ludzi, którzy przyszli na jego koncert, to uzyskane wnioski nie będą obiektywne, ponieważ przyszli na koncert dokładnie dlatego, że tego artystę lubią. Statystycy twierdzą, że próbka powinna być **reprezentatywna** (z fr. *représentatif* – pokazowy).

W taki sposób lekarze badają czynniki ryzyka chorób sercowo-naczyniowych, badając ludzi w różnym wieku, zawodu, narodowości itd.

A więc, *zbieranie danych opiera się na masowości oraz na reprezentatywności próbki*. Czasami próbka może pokrywać się z wieloma badaniami obiektów, wobec których prowadzi się badanie. Przykładem takiego badania jest przeprowadzenie państwowej niezależnej atestacji z matematyki w klasie 9.

Sposoby podania danych

Zebraną informację (zestaw danych) są dogodnie prezentowane w formie tabeli, wykresów, diagramów.

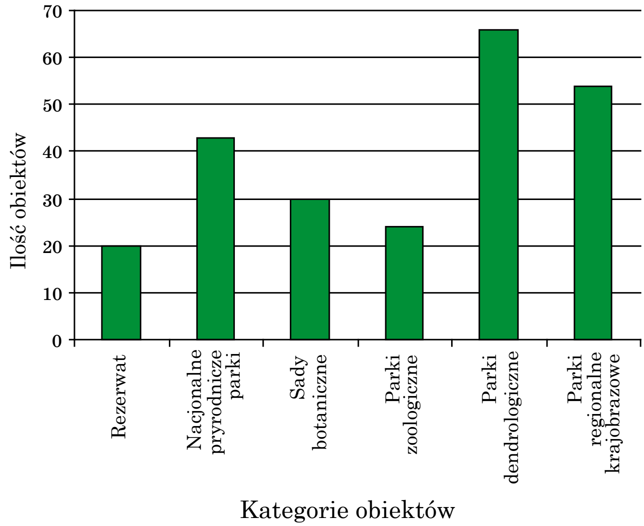
Rozpatrzymy kilka przykładów.

PRZYKŁAD 1 W tabeli przedstawiono wyniki wystąpień ukraińskich uczniów na międzynarodowych matematycznych olimpiadach w okresie 1993–2016 r. (Drużyna uczestników międzynarodowej matematycznej olimpiady składała się nie więcej niż 6 osób.)

Rok	Lokalizacja	Ilość medali				Bez medali
		Złoty	Srebrny	Brązowy	Razem medali	
1993	Turcja	0	2	3	5	1
1994	Hongkong	1	1	2	4	2
1995	Kanada	1	1	1	3	3
1996	Indie	1	0	5	6	0
1997	Argentyna	3	3	0	6	0
1998	Tajwan	1	3	2	6	0
1999	Rumunia	2	2	1	5	1
2000	Republika Korei	2	2	0	4	2
2001	Stany Zjednoczone	1	5	0	6	0
2002	Anglia	1	3	0	4	2
2003	Japonia	1	2	3	6	0
2004	Grecja	1	5	0	6	0
2005	Meksyk	2	2	2	6	0
2006	Słowenia	1	2	2	5	1
2007	Wietnam	3	1	2	6	0
2008	Hiszpania	2	2	2	6	0
2009	Niemcy	3	1	2	6	0
2010	Kazachstan	1	2	3	6	0
2011	Niderlandy	1	2	3	6	0
2012	Argentyna	0	3	2	5	1
2013	Kolumbia	1	3	1	5	1
2014	Republika Południowa Afryki	2	3	1	6	0
2015	Tajlandia	2	3	1	6	0
2016	Hongkong	0	2	4	6	0

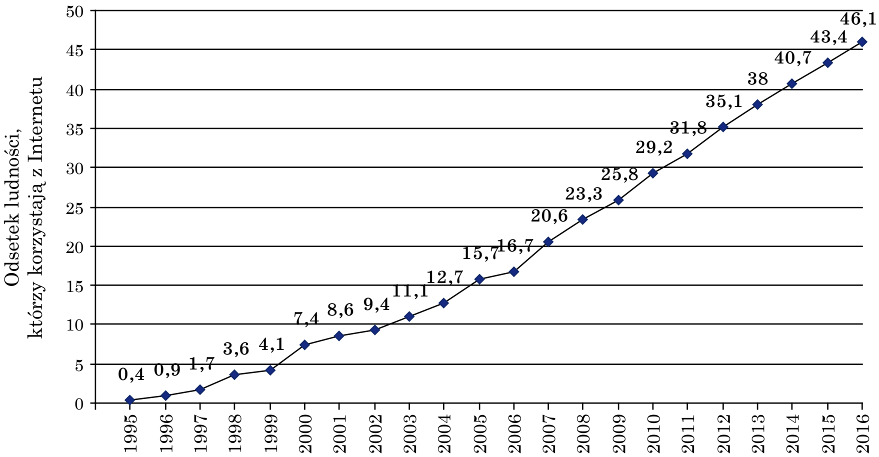
W wielu wypadkach dane są dogodnie prezentowane w postaci **wykresu słupkowego**, który nazywany jest **histogramem** (z grec. *histos* – słup i *gramma* – napisanie). Taka informacja jest łatwa do odczytania i dobrze zapamiętuje się.

PRZYKŁAD 2 Na rysunku 24.1 przedstawiono informację o przyrodniczo-rezerwatowych strefach Ukrainy.



Rys. 24.1

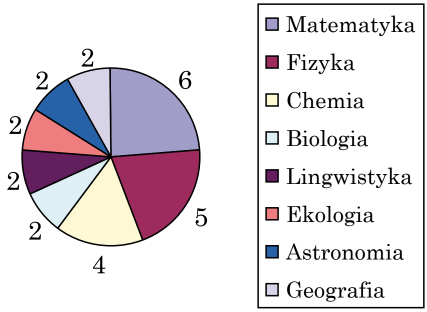
PRZYKŁAD 3 Informacje także można podawać w postaci wykresów. Na rysunku 24.2 przedstawiono wykres corocznego odsetkowego wyrostu ilości ludzi korzystających z Internetu w świecie w okresie lat 1995–2016.



Rys. 24.2

Diagramy słupkowe oraz wykresy zazwyczaj zastosowujemy, gdy chcemy zademonstrować jak z biegiem czasu zmieniła się dana wielkość.

PRZYKŁAD 4 Na rysunku 24.3 przedstawiono podział medali, które zdobyli ukraińscy uczniowie na międzynarodowych olimpiadach w 2016 r. W tym celu był zastosowany **diagram kołowy**, przedstawiający ilość medali, gdzie każdy przedmiot spełnia pewny wycinek okręgu.



Rys. 24.3

Analiza danych, wnioski i propozycji

Statystyczne wiadomości pochodzą z różnych dziedzin wiedzy i działalności ludzkiej: ekonomiki, medycyny, socjologii, demografii, gospodarstwa wiejskiego, meteorologii, sportu itp. Jednakże, metody statystycznej przetwarzania (analizy) danych są bardzo podobne. Zapoznamy się z niektórych z nich.

Wrócimy się do przykładu 1. Podana tabela pozwala dowiedzieć się ile średnio medali w ciągu roku wywalczyli uczniowie Ukrainy na międzynarodowych matematycznych olimpiadach. W tym celu należy ilość wszystkich medali otrzymanych w rozpatrywanym okresie, podzielić przez ilość lat. Na przykład, na czas lat 1993–2016 mamy:

$$\frac{5+4+3+6+6+6+5+4+6+4+6+6+6+5+6+6+6+6+6+5+5+6+6+6}{24} =$$

$$= \frac{130}{24} = 5\frac{5}{12}.$$

Ponieważ za rok można wygrać nie więcej niż 6 medali, więc obliczona **średnia wartość** $5\frac{5}{12}$ która świadczy o tym, że drużyna Ukrainy godnie występuje na tym prestiżowym forumie.

W informacji statystycznej średnie wartości otrzymanych danych spotyka się bardzo często. Przykładem jest tabela sprzedaży podstawowych produktów spożywczych poprzez sieć dużych sklepów w niektórych państwach (w kilogramach na osobę rocznie).

Państwo	Mięso	Ryba i owoce morza	Zboża	Warzywa	Owoce
Australia	118,1	22,1	86,6	93,8	103,5
Dania	111,9	24,3	139,5	102,2	146,5
Hiszpania	122,0	27,4	98,9	143,3	105,4
Włochy	91,0	26,2	162,6	178,3	131,0
Kanada	99,0	25,6	119,3	120,3	119,2
USA	123,4	21,1	110,8	123,5	113,5
Ukraina	33,9	15,6	158,4	116,0	36,4
Francja	98,3	31,2	117,2	142,9	95,5

Taką tabelę mogą wykorzystywać, na przykład ekonomiści, w badaniach, wnioskach i zaleceniach, sklepikarze i producenci w planowaniu swojej działalności.

Lecz średnia wartość nie zawsze dokładnie (odpowiednio) wyświetla sytuację. Na przykład, jeżeli w państwie dochody różnych warstw ludności bardzo różnią się, to średni dochód na osobę dla większości ludności może nie odzwierciedlać ich stan materialny.

Na przykład, w jakimś państwie jest 100 mieszkańców – bardzo bogaci zaś reszta 5 milionów – bardzo biedni. W tym przypadku wskaźnik średniego dochodu może być nie niski, a więc nie adekwatnie przedstawia ogólne ubóstwo ludności.

W podobnym przypadku dla analizy danych używa się inne charakterystyki.

Za pomocą przykładu 1 ułożymy tabelę, która przedstawia ilość medali każdego rozdziału:

Złote medale	Srebrne medale	Brązowe medale	Bez medali
33	55	42	14

Taką tabelę nazywają **częściową**, a liczby podane w drugim rzędzie – **częstością**.

Częstość 55 wskazuje, że ukraińscy uczniowie najczęściej wywalczyli “srebrne” medale. Wskaźnik “srebrne” medale nazywają modą otrzymanych danych.

Wszyscy znają to słowo. Często mówimy: “wejść w modę”, “wyjść z mody”, “hołd dla mody”. W życiu codziennym moda oznacza zestaw poglądów i preferencji, które w większości oddaje przewagę w danym momencie czasu.

Otóż moda jest najważniejszą charakterystyką wtedy, gdy otrzymany zbiór jest liczbowym zbiorem. Zademonstrujemy to na następnym przykładzie.

Jedna dobrze znana firma, która planuje dostarczać dżinsy na Ukrainę przeprowadziła badanie próby reprezentatywnej, która składała się z 500 osób. Wskutek mamy taką tabelę częstotliwości:

Rozmiar dżinsów	XS	S	M	L	XL	XXL	XXXL
Częstość	52	71	145	126	59	40	7
Względna częstość (%)	10,4	14,2	29	25,2	11,8	8	1,4

W trzecim rzędzie tej tabeli jest podany stosunek odpowiedniej częstości do wielkości próby. Ten stosunek podany w odsetkach nazywa się **względną częstością**. Na przykład, dla rozmiaru XS mamy:

$$\frac{52}{500} \cdot 100 = 10{,}4\ (\%).$$

Moda danej próby – to rozmiar M, a jej odpowiada względna częstość 29 %.

W ten sposób firma została poinformowana, że największą część dostarczania (około 29 %) mają dżinsy rozmiaru M.

Zauważymy, jeżeli w tabeli dwie częstości były by jednakowe oraz otrzymały największą wartość, to modą były by dwa odpowiednie rozmiary.

Oprócz tego podaliśmy powyżej przykład, który wskazuje, że średnia wartość nie odzwierciedla sytuację finansową ludzi w państwie. O wiele pełniejszą charakterystykę można otrzymać jeżeli średnią wartość dopełnić wynikiem takiego badania.

Tworzą reprezentatywną próbę, składającą się z ludzi kraju i uzyskują zestaw danych składających się z dochodów. Następnie, według skali, która determinuje (niski, średni i wysoki poziom) rozbija się otrzymaną serię danych na trzy grupy. Układa się tabelę, do której wpisano wartości częstości względnej częstości:

Poziom dochodów	Niski	Średni	Wysoki
Częstość	m	n	k
Względna częstość	p %	q %	r %

Moda takiego zestawu danych może charakteryzować poziom dochodów w państwie.

Zestaw danych badania można porównać z pracą lekarza, który diagnozuje chorego. W zależności od dolegliwości lub objawów choroby że obserwuje się, lekarz wybiera metodę znalezienia przyczyny choroby. Oczywiste, że ta metoda diagnozowania określa dokładność diagnozy. Analogicznie jak i w statystyce, na podstawie zebranej informacji oraz sposobu jej uzyskania zastosowują się różne metody jej opracowania. Te metody mogą dopełniać się nawzajem, lecz któraś z nich może dokładniej (adekwatniej) od innych odzwierciedlać konkretną sytuację. Otóż, analizując wystąpienie ukraińskich uczniów na międzynarodowych matematycznych olimpiadach można ustalić, że statystyczne charakterystyki średniej wartości i mody dobrze skoordynowane. Zaś w przykładzie, który określa najbardziej kupny rozmiar dżinsów najwięcej akceptowane jest szukanie mody.

Czym większy arsenał metodyk opracowania danych, tym obiektywniejszy wniosek można otrzymać.

Zapoznamy się jeszcze z jedną ważną statystyczną charakterystyką.

Rodzina zdecydowała zrobić remont na kuchni i ciekawi się, ile kosztuje układanie jednego metra płytki kaflowej. Po zapoznaniu się z cennikami 11 firm budowlanych, oni otrzymali taką informację (ceny podane w hrywniach w kolejności rosnącej):

80, 80, 90, 90, 100, 130, 180, 200, 300, 450, 500.

Rodzina chce wybrać firmę o średnich cenach.

Średnia wartość kompleksu danych jest równa 200.

Oprócz tego, według otrzymanych danych, cena 200 hrn może być przypisana do wysokiej niż do średniej wysokości cen.

Zaznaczymy, że liczba 130 jest na środku uporządkowanego rzędu danych. Nazwano ją **medianą** tej próby. W rozpatrywanej sytuacji, a mianowicie, mediana umożliwia wybrać firmę o średnich cenach. Oczywiście, w uporządkowanym rzędzie z 11 liczb jest pięć mniejszych od 130 oraz pięć większych od 130.

Teraz rozpatrzymy uporządkowany rząd danych, który składa się z parzystej ilości liczb na przykład, z ośmiu:

1, 4, 4, 7, 8, 15, 24, 24.

Tutaj “środkiem” prób są jednocześnie dwie liczby: 7, 8. Uważa się, że mediana takiej próby jest równa ich średniej arytmetycznej: $\frac{7+8}{2} = 7{,}5.$

Średnią wartość, modę i medianę nazwano **miarą tendencji centralnej** otrzymanej zbiorem danych.

ĆWICZENIA

24.1.° Korzystając z tabeli średnich rocznych temperatur w niektórych miastach Ukrainy, sporządź odpowiedni diagram słupkowy.

Miasto	Temperatura, °C	Miasto	Temperatura, °C
Lwów	7,8	Czerkasy	7,7
Użhorod	10,1	Połtawa	7,6
Kijów	8,4	Donieck	8,5
Sumy	6,8	Łuhańsk	8,8
Odessa	10,7	Chersoń	10,3
Mikołajów	10,0		

24.2.° Korzystając z tabeli rozwoju Kijowskiego metropolitana, wykreśl wykres wzrostu długości jego linii.

24.3.° Korzystając z tabeli rozwoju Kijowskiego metropolitana, wykreśl wykres zwiększenia ilości jego stacji.

Rok	Ilość stacyj	Długość linii, km	Rok	Ilość stacyj	Długość linii, km
1960	5	5,2	2000	40	51,4
1965	10	12,7	2004	43	56,3
1971	14	18,1	2008	46	59,8
1976	17	20,42	2010	49	63,6
1981	23	27,72	2011	50	65,08
1987	28	32,6	2012	52	66
1992	35	43,1	2013	53	67,5

24.4.° Określ, czy jest reprezentacyjną próbką:

1) aby dowiedzieć się jak często obywatele miasta w wolne dni odpoczywają na przyrodzie, odpytano członków trzech spółdzielni ogrodowych;
2) w celu wyjawienia wiedzy dziesięcioklasistów na pamięć wiersza Łesi Ukrainki losowo odpytano 4 tysięcy dziewięcioklasistów z różnych regionów w kraju;
3) dla określenia odsetek korzystających z Internetu na Ukrainie opytano losowo 500 mieszkańców Kijowa;

4) w celu ustalenia rankingu programów młodzieżowych losowo badano 10 tysięcy młodych ludzi w wieku od 15 do 20 lat.

24.5.° Oblicz miarę tendencji centralnej uporządkowanych danych:
1) 3, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 10;
2) 12, 13, 14, 16, 18, 18, 19, 19, 19.

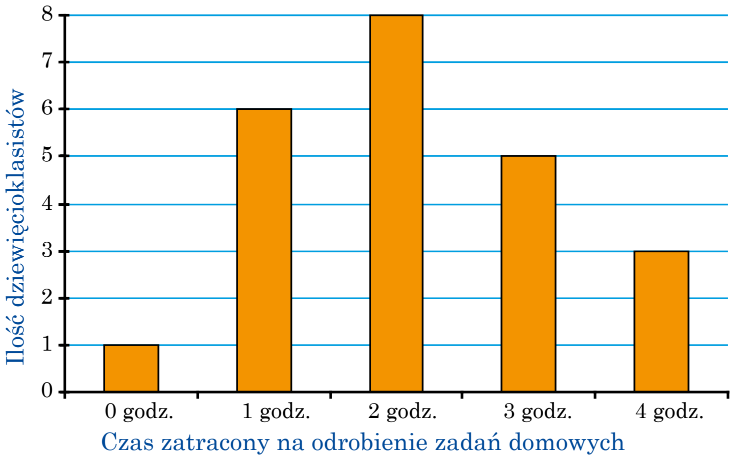
24.6.° Dziewczynki 9. klasy na lekcji wychowania fizycznego zdawały zaliczenie ze skoczków na wysokość. Nauczyciel zapisał następujący ciąg wyników:
105 cm, 65 cm, 115 cm, 100 cm, 105 cm, 110 cm, 110 cm, 115 cm, 110 cm, 100 cm, 115 cm.
Oblicz średnią wartość oraz medianę otrzymanych wyników.

24.7.• Kierownik klasowy 9. klasy prowadzi ewidencję obecności przez uczniów lekcji. W końcu tygodnia jego zapisy miały wygląd:

Dzień tygodnia	Poniedziałek	Wtorek	Środa	Czwartek	Piątek
Ilość nieobecnych	3	2	5	4	8

1) Oblicz, ile uczniów średnio było nieobecnych codziennie w ciągu tygodnia.
2) Oblicz modę otrzymanych danych.

24.8.• W klasie 9., w której uczy się 23 uczniów, przeprowadzono odpytywanie: ile w przybliżeniu godzin w ciągu tygodnia traci dziewięcioklasista na odrobienie zadań domowych. Odpowiedzi uczniów zostały podane w postaci histogramu (rys. 24.4).



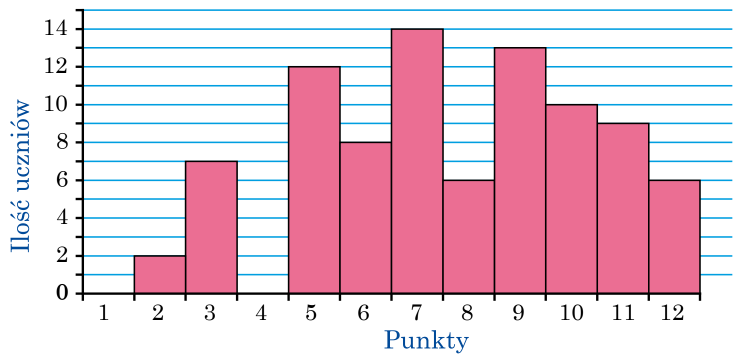
Rys. 24.4

1) Wypełnij tabelę:

Czas zatracony na wykonanie zadań domowych, godz.	0	1	2	3	4
Częstość					
Względna częstość					

2) Ile czasu w ciągu dnia traci średnio uczeń na wykonanie zadań domowych? (Oblicz średnią wartość rzędu danych.)
3) Ile czasu na wykonanie zadania domowego potrzebuje większość dziesięcioklasistów tej klasy? (Oblicz modę tego rzędu.)

24.9.• Na rysunku 24.5 przedstawiono słupkowy diagram wyników pracy pisemnej z algebry w trzech klasach dziewiątych.



Rys. 24.5

1) Wypełnij częstościową tabelę:

Ilość punktów	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Częstość												
Względna częstość												

2) Oblicz średni punkt otrzymany przez ucznia za tę pisemną pracę.
3) Podaj modę otrzymanych danych.

24.10.• Według wyników ostatniej pracy kontrolnej z algebry, która była przeprowadzona w waszej klasie wypełnij częstościową tabelę podaną w zadaniu 24.9.

1) Oblicz średni punkt otrzymany przez uczniów za tę pracę kontrolną.
2) Podaj modę otrzymanych wyników.

24.11.• Odpytywano uczniów z charkowskich szkół, ile razy w życiu latali samolotem. Otrzymane dane podano w tabeli:

Ilość wykonanych lotów	0	1	2	3	4	5
Ilość uczniów	530	92	46	30	8	4
Względna częstość (%)						

1) Wypełnij trzeci rząd tabeli.
2) Podaj otrzymane dane w postaci słupkowego diagramu.
3) Oblicz modę na środkową wartość otrzymanych danych.
4) Objaśnij, czy można uważać próbę, którą rozpatruje się, jako reprezentatywną dla wniosków wszystkich uczniów m. Charkowa.

24.12.• Wypisz wszystkie swoje oceny z algebry, które otrzymałeś w ciągu roku. Oblicz średnią wartość, modę, medianę otrzymanego rzędu danych.

24.13.• Dyrektor firmy otrzymuje 50 000 hrn za miesiąc, dwóch jego wicedyrektorów – po 20 000 hrn, a pozostali 17 robotników firmy – po 4 500 hrn za miesiąc. Oblicz średnią wartość, modę, medianę wynagrodzenia w tej firmie.

24.14.• Przeczytaj jeden z wiadomych wierszy Tarasa Szewczenki:

Wiśniowy sadek koło chaty,
Chrabąszczów nad wiśniami brzęk,
Powracających pługów szczęk.
Z wieczerzą już czekają matki,
Dziewczęcych piosnek słychać dźwięk.

Wieczerzać siedli koło chatki;
Lśni gwiazdka skroś gałęzi splot.
Wieczerzy córka poda wlot,
Matuś chce zrzędzić, lecz jej gadki.
Raz wraz przerywa słowik-trzpiot.

Do snu matula koło chatki
Pokładła małe dzieci już.
A sama przy nich legła tuż.
… I tylko słowik i dzierlatki.
Dziewczęta nie śpią aż do zórz.[1]

Dla liter “a”, “e”, “i”, “j”, “n”, “o”, “p”, “u”, “f”, “m” ułóż tabelę częstościową ich obecności w danym wierszu. Podaj modę otrzymanych danych.

24.15.• W ciągu maja 2016 r. temperatura powietrza o 8 godz. z rana wynosiła:

Data	Temperatura, °C	Data	Temperatura, °C	Data	Temperatura, °C
01.05.2016	13,1	11.05.2016	17,8	21.05.2016	14,0
02.05.2016	15,3	12.05.2016	15,0	22.05.2016	16,9
03.05.2016	15,7	13.05.2016	16,6	23.05.2016	18,7
04.05.2016	15,4	14.05.2016	12,6	24.05.2016	17,4
05.05.2016	16,2	15.05.2016	13,1	25.05.2016	16,1
06.05.2016	13,1	16.05.2016	13,5	26.05.2016	16,8
07.05.2016	10,5	17.05.2016	8,8	27.05.2016	20,1
08.05.2016	14,2	18.05.2016	12,4	28.05.2016	19,2
09.05.2016	15,5	19.05.2016	9,5	29.05.2016	20,7
10.05.2016	17,5	20.05.2016	10,8	30.05.2016	17,3
				31.05.2016	17,4

Oblicz miarę tendencji centralnej otrzymanych danych.

24.16.• Zapisz rząd: 1) z pięciu liczb; 2) z sześciu liczb, w których:
a) średnia wartość jest równa medianie;
b) średnia wartość jest większa od mediany.

[1] T.G. Szewczenko. Utwory T. 12. Instytut literatury im. T.G. Szewczenki Akademii Nauk Ukrainy. – K.: Naukowa dumka, 2003 r. – T. 2. – str. 17.

Przyjaźnimy się z komputerem

Kontynuujecie udoskonalenie swoich umiejętności komputerowych z poprzednich klas, opanowujecie nowe narzędzia i nowe oprogramowania. Przypomnijmy, że oprócz zadań podanych w tym rozdziale, można korzystać z różnych programów stworzonych dla pogłębienia nauki szkolnego kursu matematyki. Możecie odwołać się do globalnej sieci Internetu dla wyszukiwań w nich informacji oraz innej dodatkowej informacji do kursu algebry.

Jeżeli w przeszłości planujecie być matematykiem, to można zapoznać się ze specjalnymi pakietami matematycznymi (na przykład *Mathcad*, *MATLAB* itp.), które zawierają zaawansowane narzędzia do obliczeń matematycznych, geometrycznych konstrukcji i innych.

W tym rozdziale podane są zadania, które można wykonywać za pomocą komputera podczas nauki odpowiednich tematów. Większość z tych zadań – przedłużenie i rozwój tego podręcznika (takie ćwiczenia oznaczono piktogramem “”, a w danym rozdziale są podane ich numery).

Dla tych, kto lubi programowanie, proponujemy stworzenie programów i algorytmów, w których można wykorzystać zdobytą wiedzę matematyczną. Zadania zawierające elementy programowania są oznaczone gwiazdką. Dopóki nie nauczyliście się na wystarczającym poziomie żadnego języka programowania, wystarczy wymyślić algorytm i zapisać go słownie lub w formie schematu blokowego; podczas nauki języka programowania możecie realizować te algorytmy w postaci programu. Zauważymy, że umiejętność składania algorytmów (kolejność działań) przyda się nie tylko w programowaniu, lecz i w innych obszarach działalności.

Do p. 1 “Liczbowe nierówności”

Znajdź przepisy ruchu drogowego w Internecie. Wybierz te znaki drogowe, które przedstawiają maksymalne dopuszczalne wartości liczbowe. Zapisz, odpowiednie nierówności.

Wykreśl prostą współrzędnych za pomocą redaktora graficznego. Wskaż, że mniejsza liczba leży na prostej współrzędnych bezpośrednio po lewej stronie od liczby większej.

Zapisz w pliku do wykorzystania w następujących zadaniach.

Do p. 2 "Podstawowe własności nierówności liczbowych"

W jaki sposób za pomocą redaktora graficznego można zademonstrować własności nierówności liczbowych? Jakie instrumenty redaktora można zastosować?

Do p. 3 "Dodawanie i mnożenie nierówności liczbowych. Ocenianie wartości wyrażenia"

Wyszukaj w sieci Internet informacje o największej i najmniejszej odległości od planet układu Słonecznego do Słońca. W jaki sposób, można podać wniosek o największych i najmniejszych odległościach między każdymi dwoma planetami? Ułóż tabelę za pomocą układu tabelarycznego. Czy możesz wykonać tak, aby najmniejszą i największą odległości między każdą parą planet obliczyć automatycznie?

Do p. 4 "Nierówności z jedną zmienną"

Wykreśl za pomocą redaktora graficznego prostą współrzędnych. Zilustruj rozwiązanie przykładów 4.5, 4.6, 4.13. Jakie instrumenty redaktora graficznego pomogły wzorowo zademonstrować przebieg rozwiązania zadania?

Do p. 5 "Rozwiązywanie liniowych nierówności z jedną zmienną. Przedziały liczbowe"

Wykonaj zadanie 5.1, 5.2, 5.3 za pomocą redaktora graficznego.

Do p. 6 "Układy liniowych nierówności z jedną zmienną"

Wykonaj zadania 6.3, 6.4 za pomocą graficznego redaktora.

* **6.33.** Zapisz rozwiązanie tego zadania metodą sprawozdania.

* **6.54, 6.55, 6.56**. Te trzy zadania są typowymi zadaniami na odsetki. Opisz każde z nich w ogólnej postaci, utwórz model matematyczny, opisz początkowe i końcowe dane zadania oraz podaj algorytm rozwiązania.

Do p. 7 "Powtórzenie i rozszerzenie wiadomości o funkcji"

Jakie sposoby podania funkcji są zręczne dla tego, aby podać tę funkcję za pomocą komputera? Jakie instrumenty przy tym można wykorzystać?

Do p. 8 "Własności funkcji"

* Funkcję podano za pomocą tabeli. Podaj algorytm dla znalezienia przedziałów stałego znaku oraz algorytm dla przedziałów, w których

funkcja rośnie i maleje. Jaki warunek ma spełniać położenie informacji w tabeli?

* **8.31.** Ułóż model matematyczny w ogólnej postaci. Podaj algorytm rozwiązania tego zadania w ogólnej postaci.

Do p. 9 "Jak sporządzić wykres funkcji $y = kf(x)$, jeżeli wiadomo wykres funkcji $y = f(x)$"

Za pomocą układu tabelarycznego podaj dowolną funkcję $y = f(x)$ tabelaryczno oraz sporządź na podstawie tabeli wykres tej funkcji. Jakie zmiany należy wykonać w tabeli, aby otrzymać wykres funkcji $y = kf(x)$? Jak wykonać to automatycznie? Wykreśl w taki sposób kilka wykresów funkcji $y = kf(x)$ dla różnych wartości k.

Wykreśl wykres dowolnej funkcji $y = f(x)$ za pomocą redaktora graficznego. Jakie instrumenty redaktora graficznego należy wykorzystać, aby z tego wykresu otrzymać wykres funkcji $y = kf(x)$ dla $k > 1$; dla $0 < k < 1$; dla $k = -1$? W jaki sposób zastosować te instrumenty, aby otrzymać wykres funkcji $y = kf(x)$ dla $k < 0$ i $k \neq -1$?

Do p. 10 "Jak sporządzić wykres funkcji $y = f(x) + b$ i $y = f(x + a)$, według wykresu funkcji $y = f(x)$"

Za pomocą układu tabelarycznego zadaj dowolną funkcję $y = f(x)$ tabelaryczno, oprócz tego, wykreśl za pomocą tabeli wykres tej funkcji. Jakie zmiany należy wykonać w tabeli, aby otrzymać wykres funkcji $y = f(x) + b$? $y = f(x + a)$? $y = f(x + a) + b$? Jak wykonać to automatycznie? Sporządź w taki sposób kilka wykresów funkcji $y = f(x + a) + b$ dla różnych wartości a i b.

Sporządź wykres jakiejkolwiek funkcji $y = f(x)$ za pomocą redaktora graficznego. Jakie instrumenty redaktora graficznego należy wykorzystać, aby z wykresu otrzymać wykres funkcji $y = f(x) + b$? $y = f(x + a)$? Jak można wykorzystać te instrumenty, aby otrzymać wykres funkcji $y = f(x + a) + b$?

Do p. 11 "Funkcja kwadratowa, jej wykres i własności"

* Parabola podana za pomocą wzoru $y = ax^2 + bx + c$. Zapisz algorytm początkowymi danymi dla której są wartości a, b, c. Algorytm powinien określać następujące charakterystyki paraboli: kierunek gałęzi, współrzędne wierzchołka, punkty przecięcia z osiami współrzędnych, na podstawie tego wywnioskuj, jaką część paraboli należy przedstawić na wykresie.

Automatyzuj proces ułożenia odpowiedniej tabeli wartości funkcji oraz wykreśl wykres funkcji według otrzymanej tabeli. W jaki sposób wybierzesz znaczenie argumentu funkcji dla tej tabeli, aby wykres był jak najwięcej dokładny?

Do odpowiedzi "O pewnych przekształceniach wykresów funkcji"

Określ, w jaki sposób za pomocą układu tabelarycznego i redaktora graficznego wykres funkcji $y = f(x)$ można otrzymać wykres funkcji $y = f(-x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$.

Do p. 12 "Rozwiązanie nierówności kwadratowych"

* Korzystając z tabeli podanej w p. 12, podaj algorytm dla rozwiązania nierówności kwadratowej $ax^2 + bx + c > 0$, wejściowymi danymi dla którego są a, b, c.

Jakie dane wejściowe należy dodać do tego algorytmu oraz jak go zmienić, aby można było rozwiązać nierówności $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$?

Do p. 13 "Układy równań z dwiema zmiennymi"

Ostap Zapominalski chciał rozwiązać układ równań w taki sposób: dla każdego z nich sporządzić wykres równania, podając w układzie tabelarycznym tabelę odpowiednich wartości, a zatem znaleźć na ekranie komputera punkty przecięcia tych wykresów. Na czym polegają błędy tej budowy?

Do p. 14 "Układ dwóch równań z dwiema zmiennymi jako model matematyczny zadania stosowanego"

* Przeanalizuj zadania z tego punktu. Wiele z nich opisują podobne sytuacje. Czy możecie znaleźć takie zadania oraz zapisać algorytm ich rozwiązania w ogólnej postaci?

Do p. 15 "Ciągi liczbowe"

Za pomocą układu tabelarycznego można wypełnić kratki tabeli wyrazami ciągu, określoną za pomocą wzoru n-tego wyrazu ciągu oraz za pomocą renkurencyjnego wzoru. Opanuj te metody wypełnienia tabeli.

U w a g a. Oczywiście, w taki sposób można sformować tylko ciąg skończony.

Wykorzystaj te sposoby dla wykonania niektórych zadań z tego punktu na swój wybór.

Do p. 16 "Ciąg arytmetyczny"

W układzie tabelarycznym utwórz mechanizm dla wypełnienia kratek tabeli wyrazami skończonego ciągu arytmetycznego. Zrób, aby ten mechanizm można było wykorzystać dla otrzymania ciągu arytmetycznego z dowolnymi wartościami a_1 i d.

Do p. 17 "Suma *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego"

Utwórz w układzie tabelarycznym tabelę, pierwszy słupek której zawiera liczbę naturalną k – numer wyrazu ciągu arytmetycznego, drugi – wartości k-tego wyrazu, trzeci – sumę k początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego. Maksymalne wartości k wybierz według własnego uznania. Czy można całkowicie automatyzować budowę tabeli według danych znaczeń a_1 i d?

Do p. 18 "Ciąg geometryczny"

W układzie tabelarycznym utwórz mechanizm dla wypełnienia kratek tabeli wyrazami skończonego ciągu geometrycznego. Zrób tak, aby ten mechanizm można było wykorzystać dla otrzymania ciągu geometrycznego z dowolnymi wartościami b_1 i q.

W jaki sposób zastosować kalkulator dla obliczeń według wzorów odsetek składanych. Rozwiązać zadanie 18.17–18.20 za pomocą kalkulatora.

Do p. 19 "Suma *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego"

W zadaniu do p. 17 utworzona jest tabela, która konstruuje ciąg arytmetyczny z danymi a_1 i d. Uzupełnij tę tabelę czwartym słupkiem, jaki zawiera wielkości k-tego wyrazu ciągu geometrycznego, w którym $b_1 = a_1$, $q = d$, i piątym słupkiem, który zawiera sumę k początkowych wyrazów ciągu geometrycznego. Wykreśl wykres za pomocą tej tabeli.

Zbadaj, jak prowadzą się arytmetyczny i geometryczny ciągi dla różnych wartości a_1 i d.

Odpowiedzi i wskazówki do ćwiczeń

§ 1. Nierówności

1. Liczbowe nierówności

1.10. 1) Nie; 2) tak; 3) nie; 4) nie; 5) nie. **1.18.** Wartość ułamka zwiększy się. **1.19.** Wartość ułamka zmniejszy się lub nie zmniejszy się. **1.22.** 1) Nie; 2) tak. **1.26.** Tak. **1.28.** 1) *Wskazówka.* $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 = (a^2 + 6a + 9) + (b^2 - 4b + 4)$.

2. Podstawowe własności nierówności liczbowych

2.13. 3) Porównać niemożliwie. **2.19.** 4) Jeżeli $c>0$, to $c^2>-4c$; jeżeli $-4<c<0$, to $c^2<-4c$; jeżeli $c = 0$, to nierówność prawdziwą otrzymać nie można. **2.21.** 1. **2.22.** 24.

3. Dodawanie i mnożenie nierówności liczbowych. Ocenianie wartości wyrazów

3.12. 3) Nie; 4) nie; 5) nie; 6) tak; 8) tak; 10) tak; 11) nie; 12) tak; 13) nie; 14) nie. **3.27.** 1) $\sqrt{10}+\sqrt{6}>\sqrt{11}+\sqrt{5}$; 2) $2+\sqrt{11}<\sqrt{5}+\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{15}-\sqrt{5}>\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{21}+\sqrt{20}>9$. **3.28.** 1) $\sqrt{6}+\sqrt{3}>\sqrt{7}+\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{26}-\sqrt{2}<\sqrt{14}$. **3.32.** 400 %.

4. Nierówności z jedną zmienną

4.15. 4) Pierwiastków nie posiada; 5) x — jakakolwiek liczba; 6) –6. **4.16.** 6 km.

5. Rozwiązywanie nierówności liniowych z jedną zmienną. Przedziały liczbowe

5.25. 3) $(-\infty; -5]$; 4) $(-\infty; 1)$; 5) $[7; +\infty)$; 6) $\left(-\infty; \frac{6}{11}\right]$; 7) $(-\infty; -7{,}5]$; 8) $(1; +\infty)$; 9) $(-\infty; +\infty)$; 10) $\varnothing$; 11) $(-\infty; +\infty)$; 12) $(-\infty; 0)$. **5.26.** 1) $\left(\frac{24}{19}; +\infty\right)$; 2) $[-6; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; -6]$; 5) $(-\infty; +\infty)$; 6) $(-3{,}5; +\infty)$. **5.27.** 1) –8; 2) –1. **5.28.** 1) –6; 2) –3. **5.29.** 5 rozwiązań. **5.30.** 8 rozwiązań. **5.33.** 1) $a<-\frac{9}{4}$; 2) $a\leqslant 1{,}6$. **5.34.** 1) $b<3$; 2) $b<-\frac{1}{8}$. **5.35.** 12 km. **5.36.** Takich liczb nie istnieje. **5.37.** 18 kulek. **5.38.** 44 wiśni. **5.39.** 21. **5.40.** 28, 30, 32. **5.41.** 25, 30, 35. **5.42.** 1) Dla $-4\leqslant x<2$ i $x>2$; 2) Dla $x<-4$ i $-4<x\leqslant 3$; 3) Dla $-3<x<-2$, $-2<x<2$ i $x>2$;

4) Dla $-1 < x < 1$ i $x>1$. **5.43.** 1) Dla $x < -3$ i $-3 < x \leqslant 9$; 2) Dla $7<x<8$ i $x>8$. **5.44.** 1) 9; 2) –3; 3) 13; 2,2; 4) Pierwiastków nie posiada. **5.45.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) –2; 12. **5.48.** 3) Dla $a>-1$ i $a \neq 1$. **5.49.** 2) Dla $m<7$ i $m \neq 0$. **5.50.** 1) Dla $a>-1$ i $a \neq 0$; 2) Dla $a < \frac{9}{16}$ i $a \neq -1$; 3) Dla $a < \frac{19}{5}$ i $a \neq 3$. **5.51.** Dla $a < -\frac{1}{12}$. **5.52.** 1) 3; 2) –1. **5.53.** 1) –7; 2) –4. **5.54.** 1) Jeżeli $a>0$, to $x>0$; jeżeli $a<0$, to $x<0$; jeżeli $a = 0$, to rozwiązań nie posiada; 2) jeżeli $a>0$, to $x < \frac{1}{a}$; jeżeli $a<0$, to $x > \frac{1}{a}$; jeżeli $a = 0$, to x — jakakolwiek liczba; 3) jeżeli $a>0$, to $x \geqslant 1$; jeżeli $a<0$, to $x \leqslant 1$; jeżeli $a = 0$, to x — jakakolwiek liczba; 4) jeżeli $a<2$, to $x<-2$; jeżeli $a>2$, to $x>-2$; jeżeli $a = 2$, to rozwiązań nie posiada; 5) jeżeli $a>2$, to $x>a+2$; jeżeli $a<2$, to $x<a+2$; jeżeli $a = 2$, to rozwiązań nie posiada; 6) jeżeli $a>-3$, to $x \leqslant a-3$; jeżeli $a<-3$, to $x \geqslant a-3$; jeżeli $a = -3$, to x — jakakolwiek liczba. **5.55.** 1) Jeżeli $a \neq 0$, to $x \leqslant 0$; jeżeli $a = 0$, to x — jakakolwiek liczba; 2) jeżeli $a>-1$, to $x < \frac{2-a}{a+1}$; jeżeli $a<-1$, to $x > \frac{2-a}{a+1}$; jeżeli $a = -1$, to x — jakakolwiek liczba; 3) jeżeli $a>-4$, to $x > \frac{1}{a+4}$; jeżeli $a<-4$, to $x < \frac{1}{a+4}$; jeżeli $a = -4$, to rozwiązań nie posiada. **5.59.** 15 godz., 10 godz.

6. Układy nierówności liniowych z jedną zmienną

6.23. 1) $\left(\frac{1}{7}; \frac{13}{10}\right)$; 2) $(-\infty; -4,2)$; 3) $[-2; 3]$; 4) $[-0,8; +\infty)$; 5) $\frac{5}{7}$; 6) $(-\infty; -4]$; 7) $\varnothing$; 8) $\varnothing$. **6.24.** 1) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{8}\right)$; 2) $[-10; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; +\infty)$. **6.25.** 1) –3; –2; –1; 0; 2) 7; 8; 9; 10; 11. **6.26.** 1) 4 rozwiązań; 2) 6 rozwiązań. **6.27.** 1) $[2,5; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{5}{3}; 3\right)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; 4)$. **6.28.** 1) $(0; 8]$; 2) $(5; +\infty)$. **6.29.** 1) $(-0,5; 6,5)$; 2) $[14; 17]$. **6.30.** 1) $[-1,5; 2,5)$; 2) $\left[0; \frac{1}{3}\right)$. **6.31.** 2) $(1,5; 7)$; 3) $(-\infty; -2)$. **6.32.** 1) $\varnothing$; 2) $(1; 3)$. **6.33.** 3 cm, 5 cm lub 4 cm, 4 cm. **6.34.** 1) $[-4; 3]$; 2) $x<-1$ lub $x>3,5$; 3) $x<1$ lub $x>8$; 4) $(-2; 9)$; 5) $(-2; 0,5]$; 6) $x \leqslant -0,8$ lub $x>6$. **6.35.** 1) $(-3; 2)$; 2) $x < 4$ lub $x>8$; 3) $x < -9$ lub $x \geqslant 1,2$; 4) $\left[-\frac{1}{4}; 10\right)$. **6.36.** 1) $[-1,6; 5,6]$; 2) $(-4; 1)$;

3) $x<-12$ lub $x>6$; 4) $x\leqslant 2$ lub $x\geqslant\frac{8}{3}$; 5) $[1;+\infty)$; 6) $\left(-\frac{11}{7};+\infty\right)$. **6.37.** 1) $x\leqslant 3{,}6$ lub $x\geqslant 8{,}4$; 2) $[-2;-1{,}2]$; 3) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$; 4) $(-\infty;2]$. **6.38.** 1) Dla $a>3$; 2) Dla $a\leqslant 3$. **6.39.** 1) Dla $a\leqslant 4$; 2) Dla $a>1$. **6.40.** 1) Dla $a\leqslant -1$; 2) Dla $a=1$. **6.41.** Jeżeli $a<2$, to $x\leqslant a$; jeżeli $a\geqslant 2$, to $x<2$. **6.42.** Jeżeli $a<-3$, to $a<x<-3$; jeżeli $a\geqslant -3$, to rozwiązań nie posiada. **6.43.** Dla $10<a\leqslant 11$. **6.44.** Dla $1<b\leqslant 2$. **6.45.** Dla $8\leqslant a<9$. **6.46.** Dla $-6\leqslant b<-5$. **6.47.** Dla $a<3$. **6.48.** Dla $-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant 3$. **6.49.** Dla $a<-7$ lub $a>8$. **6.50.** 1) -1; 2) -2; 4. **6.51.** 1) $2\sqrt{10}-\sqrt{6}$; 2) $0{,}5\sqrt{2b}$; 3) $-4\sqrt{6}$.

§ 2. Funkcja kwadratowa

7. Powtórzenie i rozszerzenie wiadomości o funkcji

7.17. 2) Wszystkie liczby, oprócz 7 i –7; 4) wszystkie liczba nie mniejsze od 4, oprócz liczby 6. **7.27.** 60 km/h.

8. Własności funkcji

8.17. $a<\frac{1}{8}$. **8.18.** $a>9$. **8.19.** 2. **8.20.** $m<-2$. **8.26.** $a=1$, $a=2$ i $a=1{,}5$. **8.27.** Jeżeli $a<-2$, to największa wartość $f_{\text{największ}}=f(a)=a^2$, najmniejsza wartość $f_{\text{najmn}}=f(0)=0$; jeżeli $a=-2$, to $f_{\text{największ}}=f(-2)==f(2)=4$, $f_{\text{najmn}}=f(0)=0$; jeżeli $-2<a\leqslant 0$, to $f_{\text{największ}}=f(2)=4$, $f_{\text{najmn}}=f(0)=0$; jeżeli $0<a<2$, to $f_{\text{największ}}=f(2)=4$, $f_{\text{najmn}}=f(a)=a^2$. **8.30.** 10 godz., 40 godz. **8.31.** 20 %.

9. Jak sporządzić wykres funkcji $y=k\,f(x)$, jeżeli wiadomy wykres funkcji $y=f(x)$

9.21. 3 t.

10. Jak sporządzić wykres funkcji $y=f(x)+b$ i $y=f(x+a)$, jeżeli wiadomy wykres funkcji $y=f(x)$

10.17. *a*) $y=x^2+3$; *b*) $y=-2x^2-1$. **10.18.** *a*) $y=2x^2-6$; *b*) $y==4-x^2$. **10.19.** *a*) $y=(x-2)^2$; *b*) $y=-3(x+3)^2$. **10.20.** *a*) $y=\frac{1}{2}(x+4)^2$; *b*) $y=-2(x-1)^2$. **10.21.** *a*) $y=(x+2)^2-4$; *b*) $y=-(x-2)^2+5$; *c*) $y=\frac{1}{3}(x-3)^2+1$. **10.22.** *a*) $y=(x-4)^2-5$; *b*) $y=-2(x+6)^2+7$.

10.25. Dwa twierdzenia są prawidłowymi. **10.28.** 3) *Wskazówka*. $y = \frac{-2x+2-2}{x-1} = -2 - \frac{2}{x-1}$. **10.32.** $\frac{3}{4}$.

11. Funkcja kwadratowa, jej wykres i własności

11.12. –1; 1; 3. **11.13.** 4. **11.14.** 1) 2 pierwiastki; 2) 1 pierwiastek. **11.15.** 3 pierwiastki. **11.16.** 1) (–1; –1), (9; 9); 2) (2; 23), (8; 17). **11.17.** (3; 15), (–1; 11). **11.23.** 1) –25; 2) –13; 3) –22. **11.24.** 1) 26; 2) 17; 3) –10. **11.25.** $p = 1$, $q = 4$. **11.26.** $a = -\frac{7}{6}$, $b = \frac{7}{6}$. **11.27.** $a = 3$, $b = 5$. **11.30.** $b = -16$. **11.31.** $b = 18$. **11.32.** $a = 1$ lub $a = 4$. **11.33.** $a \geqslant \frac{9}{2}$. **11.34.** $a < -16$. **11.35.** $c = -8$. **11.36.** $c = 14$. **11.37.** *a*) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$; *b*) $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$. **11.39.** $p = -4$, $q = 9$. **11.40.** $a = 1$, $b = -8$, $c = 6$. **11.41.** *a*) –4; *b*) 4. **11.42.** –1. **11.43.** 1) 25. *Wskazówka*. Przypuśćmy, że jedna z tych liczb wynosi x, wtedy druga liczba jest równa $10 - x$. Rozpatrzymy funkcję $f(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$; 2) 50. **11.44.** Przez 1 godz. 30 min. **11.45.** 1600 m^2. **11.50.** 1) $a > -4$; 2) $a = -4$; 3) $a < -4$. **11.52.** $a > \frac{13}{8}$. **11.53.** $a \geqslant -0{,}5$. **11.57.** 1) $8a\sqrt{a}$; 2) 56; 3) $6\sqrt{2} - 5$. **11.58.** 4 km/h. **11.59.** 20 min, 30 min.

12. Rozwiązywanie nierówności kwadratowych

12.10. 1) (–2; 1); 2) $(-\infty; -5] \cup [2; +\infty)$; 3) $\left[-3; -\frac{1}{3}\right]$; 4) $(-\infty; -21) \cup (1; +\infty)$; 5) $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$; 6) $\left[-\frac{13}{3}; 1\right]$. **12.11.** 1) $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$; 2) (–5; –3); 3) $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$; 4) $(-\infty; -10) \cup (1; +\infty)$. **12.12.** 1) Dla $-\frac{1}{3} < x < \frac{7}{3}$; 2) Dla $x \leqslant -0{,}2$ lub $x \geqslant 2{,}4$. **12.13.** 1) Dla $-\frac{5}{2} < x < \frac{9}{2}$; 2) Dla $-\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant \frac{10}{3}$. **12.14.** Dla $-5 < x < 4$. **12.15.** Dla $1 < x < 2{,}5$. **12.16.** 1) –5, –4, –3, –2, –1, 0; 2) –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3; 3) 0; 4) –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5. **12.17.** 1) 11; 2) 4. **12.18.** 1) –6; 2) –2. **12.19.** 1) 1; 2) –3. **12.24.** 1) $-4 < a < 4$; 2) $-8 < a < 12$; 3) $\frac{3}{8} < a < \frac{3}{2}$. **12.25.** 1) $b < -\frac{1}{16}$ lub $b > 1$; 2) $b < 4$ lub $b > 10$. **12.26.** 1) (0; 3]; 2) $[-4; -0{,}5] \cup [6; +\infty)$; 3) $[-1; 0) \geqslant (6; 10]$; 4) (–5; –3]. **12.27.** 1) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; 3\right)$; 2) $(-2; 0] \geqslant$

$\geqslant$ **[5; 9). 12.28.** 1) –4, –3, –2, –1, 0, 1; 2) –3, –2, 1, 2. **12.29.** 1) $\mathbf{(6; +\infty)}$; 2) $\mathbf{(-3; 5) \geqslant (5; 6)}$; 3) $\mathbf{(-\infty; -9) \cup (-9; -2] \cup [7; 9) \cup (9; +\infty)}$; 4) $\left(-1; \frac{2}{3}\right)$.

12.30. 1) [–2; 2); 2) $\mathbf{(-5; 6) \geqslant (6; 7)}$. **12.31.** 1) (–11; 11); 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right] \cup$ $\cup \left[\frac{1}{8}; +\infty\right)$. **12.32.** 1) $\mathbf{(-\infty; -1] \cup [-0{,}4; 0{,}4] \cup [1; +\infty)}$; 2) [–2; 2]. **12.33.** 1) $\mathbf{(-5; 0) \geqslant (0; 2)}$; 2) [0; 2]; 3) $\mathbf{(-1; 2) \geqslant (2; 9)}$; 4) $\mathbf{(-\infty; -5) \cup}$ $\mathbf{\cup (-5; -3) \cup (5; +\infty)}$; 5) $\mathbf{(-\infty; -8] \cup [1; 4) \cup (4; +\infty)}$; 6) $\mathbf{[-11; -3) \geqslant (-3; 1]}$. **12.34.** 1) $\mathbf{(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (3; +\infty)}$; 2) $\mathbf{(4; +\infty)}$; 3) $\mathbf{(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup}$ $\mathbf{\cup (3; +\infty)}$; 4) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right) \geqslant \mathbf{(1; 3]}$. **12.35.** 1) $\mathbf{(-4; -3) \cup (5; +\infty)}$; 2) $\mathbf{[-4; -3] \geqslant}$ $\mathbf{\cup [5; +\infty)}$; 3) $\mathbf{(-\infty; -4)}$; 4) $\mathbf{(-\infty; -4] \cup \{-3, 5\}}$. **12.36.** 1) (3; 7); 2) $\mathbf{[3; 7] \geqslant \{-2\}}$; 3) (–2; 3); 4) $\mathbf{[-2; 3] \geqslant \{7\}}$. **12.37.** 1) Dla $a > 4$; 2) Dla $\mathbf{-1 \leqslant a \leqslant \frac{3}{5}}$; 3) Dla $\mathbf{0 < a < \frac{1}{2}}$; 4) Dla $a > \frac{5}{3}$. **12.38.** 1) Dla $\mathbf{a \geqslant 9}$; 2) Dla $\mathbf{3 \leqslant a \leqslant 7}$; 3) Dla $\mathbf{a \geqslant 1}$. **12.39.** 1) Jeżeli $a < 1$, to $a < x < 1$ lub $x > 4$; jeżeli $\mathbf{1 \leqslant a \leqslant 4}$, to $x > 4$; jeżeli $a > 4$, to $x > a$; 2) jeżeli $\mathbf{a \leqslant -\frac{1}{4}}$, to rozwiązań nie posiada; jeżeli $-\frac{1}{4} < a \leqslant 1$, to $-\frac{1}{4} \leqslant x < a$; jeżeli $a > 1$, to $-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1$. **12.40.** 1) Jeżeli $a \leqslant -8$, to $-8 < x < 9$; jeżeli $-8 < a < 9$, to $a < x < 9$; jeżeli $a \geqslant 9$, to rozwiązań nie posiada; 2) jeżeli $a < 1$, to $x < a$; jeżeli $1 \leqslant a \leqslant 8$, to $x < 1$; jeżeli $a > 8$, to $x < 1$ lub $8 < x < a$. **12.43.** 3 dni. **12.44.** 40 l.

13. Układy równań z dwiema zmiennymi

13.3. 1) (5; 8), (–3; 0); 2) (4; 1), (1; 4); 3) (–1; 1), (–3; –1); 4) (6; 1), (–6; –2); 5) (5; 3), (–1,5; –10); 6) (2; –2). **13.4.** 1) (–4; –7), (7; 4); 2) (2; 4), (–5; –3); 3) (–1; 4), (–0,5; 2,5); 4) (4; 2), (20; –14). **13.5.** 1) 2 rozwiązania; 2) 3 rozwiązania; 3) 1 rozwiązanie; 4) 2 rozwiązania; 5) rozwiązań nie posiada; 6) 3 rozwiązania. **13.6.** 1) 2 rozwiązania; 2) rozwiązań nie posiada; 3) 2 rozwiązania; 4) 4 rozwiązania. **13.7.** 1) (4; 3); 2) (0; 0), (–2,4; 4,8); 3) (4; –3), (17; 10); 4) (9; –4), (4; 1); 5) (2; 2,5), (–4,4; –2,3); 6) (4; –1), (0; 3). **13.8.** 1) (6; 9), (–9; –6); 2) (1; 0), (–0,5; 0,75); 3) (2; 4), (3; 3); 4) (1; 1), $\left(\frac{17}{3}; \frac{38}{3}\right)$. **13.9.** 1) $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$,

(–2; –7); 2) (2; 2), (–1; –4); 3) (1; 0), (5; –4); 4) (2; 3), $\left(\frac{2}{3}; \frac{43}{9}\right)$. **13.10.** (–4; –1). **13.11.** 2) (0,5; 5,5); 3) (–4; 52), (3; 3). **13.12.** 1) (3; 4), (4; 6); 2) (–2; 1), $\left(-6; \frac{9}{5}\right)$. **13.13.** 1) (2; 1), $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; 2) (1; 5), $\left(\frac{10}{3}; -2\right)$. **13.14.** 1) (–5; 1), (1; –5), (4; 1), (1; 4); 2) (5; –2), $\left(\frac{6}{7}; \frac{15}{7}\right)$; 3) (3; 1), (–3; –1), $\left(2\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$; 4) (2; 3); 5) (–3; 3), (3; –3); 6) (2; 1), $\left(-\frac{1}{2}; -4\right)$; 7) (1; 0), $\left(-\frac{19}{21}; -\frac{8}{21}\right)$. **13.15.** 1) (6; 3), $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{2}\right)$; 2) (2; –1), $\left(\frac{21}{53}; \frac{15}{53}\right)$; 3) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$; 4) (9; 3), (–9; –3); 5) (–2; 1), $\left(\frac{29}{28}; -\frac{3}{14}\right)$; 6) (–3; 4), (–5; 2), (1; –4), (3; –2). **13.16.** 1) (1; 0), (0; 1); 2) (3; –1), (1; –3); 3) (4; 3), (–4; –3); 4) (–3; 2), (3; –2). **13.17.** 1) (4; 2), (–2; –4); 2) (1; 3), (–1; –3). **13.18.** 1) (1; 2), $\left(7\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$; 2) (–7; –5), (4; 6); 3) (–4; –3), (–4; 2), (3; –3), (3; 2); 4) (3; 1), $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. **13.19.** 1) (4; 1), (1; 4); 2) (1; –2), $\left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}\right)$; 3) (6; 5), (–4; –5); 4) (5; 4), (–5; –4), (5; –4), (–5; 4). **13.20.** 1) $\left(7; \frac{1}{6}\right)$, $\left(1; \frac{7}{6}\right)$; 2) (–2; 4), (2; –4), $\left(\frac{94}{7}; -\frac{8}{7}\right)$, $\left(-\frac{94}{7}; \frac{8}{7}\right)$; 3) (4; 3), (3; 4), (–4; –3), (–3; –4); 4) (1; –1), $\left(-\frac{1}{3}; 3\right)$, (–1; 1), $\left(\frac{1}{3}; -3\right)$. **13.21.** 1) (2; 1), (–5; –0,4); 2) (4; 0); 3) (1; 3), (3; 1), (–3; –1), (–1; –3); 4) (–2; 2), $\left(-10; \frac{2}{5}\right)$, (2; –2), $\left(10; -\frac{2}{5}\right)$. **13.22.** 1) $a = 3\sqrt{2}$ lub $a = -3\sqrt{2}$; 2) $-3\sqrt{2} < a < 3\sqrt{2}$; 3) $a < -3\sqrt{2}$ lub $a > 3\sqrt{2}$. **13.23.** 1) $k = 2$ lub $k = -2$; 2) $k < -2$ lub $k > 2$; 3) $-2 < k < 2$. **13.24.** 1) Jeżeli $a > 0$, to 2 rozwiązania; jeżeli $a = 0$, to 1 rozwiązanie; jeżeli $a < 0$, to rozwiązań nie posiada; 2) jeżeli $-4 < a < 4$, to rozwiązań nie posiada; jeżeli $a = -4$ lub $a = 4$, to 2 rozwiązania; jeżeli $a < -4$ lub $a > 4$, to 4 rozwiązania; 3) jeżeli $a > -\frac{1}{4}$, to 2 rozwiązania; jeżeli $a = -\frac{1}{4}$, to 1 rozwiązanie; jeżeli $a < -\frac{1}{4}$, to rozwiązań nie posiada; 4) jeżeli $a < -\frac{17}{4}$ lub $a > 2$, to rozwiązań nie posiada; jeżeli $a = -\frac{17}{4}$ lub $-2 < a < 2$, to 2 rozwiązania; jeżeli $-\frac{17}{4} < a < -2,$ to 4 rozwiązania; jeżeli $a = -2$, to 3 rozwiązania; jeżeli $a = 2$, to 1 rozwiązanie. **13.25.** 1) Jeżeli $a < 1$, to rozwiązań nie posiada; jeżeli $a = 1$, to 2 rozwiązania; jeżeli $a > 1$, to 4 rozwiązania; 2) jeżeli $a > 3\sqrt{2}$ lub $a < -3$, to rozwiązań nie posiada; jeżeli $a = 3\sqrt{2}$ lub $-3 < a < 3$, to 2 rozwiązania; jeżeli $3 < a < 3\sqrt{2},$ to 4 rozwiązania; jeżeli $a = 3$, to 3 rozwiązania; jeżeli $a = -3$, to 1 rozwiązanie; 3) jeżeli $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2},$ to rozwiązań nie posiada; jeżeli $a = -2\sqrt{2}$ lub $a = 2\sqrt{2},$ to 2 rozwiązania; jeżeli $a < -2\sqrt{2}$ lub $a > 2\sqrt{2},$ to 4 rozwiązania. **13.26.** $a = -2$. *Wskazówka*. Oczywiście, że $a \neq 0$. Rozpatrzymy układ, który składa się z dwóch równań $ax^2 + x + 1 = 0$ i $ax^2 + a^2x + a = 0$. **13.28.** 5. **13.29.** $\left[0; \frac{6}{17}\right]$. **13.30.** 40. **13.33.** $7\frac{2}{17}$ dynary, $9\frac{14}{17}$ dynarów. **13.34.** 72 km/h., 10 km/h.

14. Układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi jako model matematyczny zadań stosowanych

14.1. 9 i 12. **14.2.** 6 i 4. **14.3.** 80 m, 30 m. **14.4.** 7 cm, 9 cm. **14.5.** 36. **14.6.** 62. **14.7.** 84. **14.8.** 12 i 24. **14.9.** 6 i 9. **14.10.** 5 cm, 12 cm. **14.11.** 15 cm, 17 cm. **14.12.** 15 cm i 12 cm lub 18 cm i 10 cm. **14.13.** 15 cm, 6 cm. **14.14.** 18 cm, 12 cm. **14.15.** 80 km/h, 60 km/h. **14.16.** 90 km/h, 45 km/h. **14.17.** 80 km/h, 60 km/h. **14.18.** 500 m/min, 400 m/min. **14.19.** 12 dni, 24 dni lub 40 dni, 10 dni. **14.20.** 10 godz., 15 godz. lub 12 godz., 12 godz. **14.21.** 16 godz., 48 godz. **14.22.** 10 godz., 15 godz. **14.23.** 60 Om, 90 Om. **14.24.** 4 Om, 6 Om lub 3,6 Om, 7,2 Om. **14.25.** 2 km/h. **14.26.** 27 km/h, 3 km/h. **14.27.** 24 km/h, 16 km/h. **14.28.** 12 km/h. **14.29.** 2 km/h, 12 km/h. **14.30.** 8,4 d/cm^3, 6,4 d/cm^3. **14.31.** 15 H, 20 H. **14.32.** 60 m, 80 m. **14.33.** 1) $-\frac{1}{a}$; 2) $\frac{1}{2-b}$. **14.35.** 1) $(-\infty; 2]$; 2) $(0{,}16; +\infty)$. **14.36.** 3. **14.37.** $-0{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}4$. **14.38.** 1) $(-\infty; -2{,}5]$; 2) $\left[\frac{5}{6}; +\infty\right)$. **14.39.** 13 i 6 lub 67 i 66.

§ 3. Ciągi liczbowe

15. Ciągi liczbowe

15.11. 8 wyrazów. **15.12.** 13. **15.13.** 1, 2, 3, 4, 5. **15.14.** 8. **15.15.** 1) $a_n = n^2$; 2) $a_n = 3n + 2$; 3) $a_n = \frac{n-1}{n}$; 4) $a_n = (-1)^n + 1$. **15.16.** 1) $a_n = n^3 + 1$; 2) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. **15.18.** 2) $[-6; 1)$. **15.20.** 32 detale. **15.21.** 60 kg. **15.22.** 400 stronic.

16. Ciąg arytmetyczny

16.13. 1) Tak, $n = 16$; 2) nie. **16.14.** 15. **16.17.** 23. **16.18.** –6. **16.20.** 18. **16.21.** 16. **16.22.** –0,6. **16.23.** –6; –4,5; –3; –1,5; 0; 1,5; 3. **16.24.** 2,2; 0,4; –1,4; –3,2. **16.25.** 1) $a_1 = 5$, $d = 2{,}5$; 2) $a_1 = -6$, $d = 4$ lub $a_1 = 15$, $d = \frac{1}{2}$. **16.26.** 1) $a_1 = -2$, $d = 3$; 2) $a_1 = 20$, $d = -8$ lub $a_1 = 51{,}5$, $d = -11{,}5$. **16.27.** Jeżeli pierwszy wyraz ciągu jest równy jej różnicy lub różnica ciągu jest równa zeru. **16.30.** 60°. **16.31.** 1) Tak, $a_1 = -3$, $d = -6$; 2) nie; 3) tak, $a_1 = -2{,}8$, $d = -2{,}8$; 4) nie. **16.32.** 1) Tak, $a_1 = 13$, $d = 7$; 2) tak, $a_1 = \frac{1}{5}$, $d = \frac{2}{5}$; 3) nie. **16.38.** Dla $x = -1$ mamy: $a_1 = -3$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$; Dla $x = 8$ mamy: $a_1 = 60$, $a_2 = 43$, $a_3 = 26$. **16.39.** $y = 3$; $a_1 = 10$, $a_2 = 12$, $a_3 = 14$. **16.40.** $y = 1$; $a_1 = -1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 17$, $a_4 = 26$. **16.41.** $x = -1$; $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$. **16.45.** 1) (7; –1), (11; –5); 2) (2; 2), (2; –2), (–2; 2), (–2; –2). **16.47.** –4. **16.48.** 1) $120\sqrt{2}$; 2) $150 - 30\sqrt{2}$. **16.50.** 24 detali. **16.51.** 40 pistony lub 60 pistonów. **16.52.** 120 %.

17. Suma *n* początkowych wyrazów ciągów arytmetycznych

17.9. 1) 204; 2) 570. **17.10.** –310. **17.11.** 156 uderzeń. **17.12.** 1400. **17.13.** 710. **17.14.** 1188. **17.15.** 8, 14, 20. **17.16.** –17. **17.17.** $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20, $29\frac{1}{6}$, $38\frac{1}{3}$. **17.18.** 1) $\frac{n(n+1)}{2}$; 2) n^2. **17.19.** $n(n+1)$. **17.20.** 3. **17.21.** –67,2. **17.22.** 63. **17.23.** 5880. **17.24.** 2112. **17.25.** 1632. **17.26.** 61 376. **17.27.** 70 336. **17.28.** 0,3. **17.29.** 10. **17.30.** 20. **17.31.** 16. **17.32.** Tak, 19, 23, 27, 31, 35. **17.33.** Nie. **17.34.** 10 s. **17.35.** 42 stronic. **17.36.** –1976. **17.37.** 348. **17.38.** $a_1 = 14$, $d = -3$. **17.39.** –10. **17.40.** 10.

17.41. 690. **17.42.** 250. **17.43.** 1) 12; 2) 26. **17.44.** 1) 10; 2) 69. **17.45.** $a_1 = 1$, $d = 2$. **17.47.** $a_1 = -2$, $d = 2$. *Wskazówka.* $a_n = S_n - S_{n-1}$. **17.48.** 2610. **17.52.** 1) $\frac{a - \sqrt{bc}}{\sqrt{abc}}$; 2) $\frac{4\sqrt{d} - 28}{3\sqrt{d} + 18}$. **17.53.** 24 km/h. **17.54.** 2 godz. **17.55.** 200 d, 600 d.

18. Ciąg geometryczny

18.17. 6298,56 hrn. **18.18.** 29 736 jednostek. **18.19.** 3600 hrn. **18.20.** 600 hrn. **18.21.** 5 %. **18.22.** O 15 %. **18.25.** 1) 2; 2) $\frac{3}{5}$ lub $-\frac{3}{5}$. **18.26.** 1) $\frac{7}{16}$; 2) 0,001. **18.27.** 6. **18.28.** 9. **18.29.** 30 i 150. **18.30.** 1; 2; 4; 8. **18.31.** Tak, $b_1 = \frac{5}{4}$, $q = 4$. **18.32.** $x_1 = 49$, $q = 7$. **18.33.** 1) 15 lub –15; 2) 6 lub –6; 3) $2\sqrt{5}$ lub $-2\sqrt{5}$. **18.34.** 2. **18.35.** $\sqrt{2}$ lub $-\sqrt{2}$. **18.36.** 216. **18.37.** 243. **18.39.** $P_n = \frac{3a}{2^{n-1}}$. **18.41.** 3) Ciąg jest ciągiem geometrycznym, jeżeli $q \neq -1$. **18.43.** 80, 40, 20, 10, 5 lub 80, –40, 20, –10, 5. **18.44.** 6, 18, 54, 162, 486 lub 6, –18, 54, –162, 486. **18.45.** 1) $b_1 = 2\sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$ lub $b_1 = -2\sqrt{3}$, $q = -\sqrt{3}$; 2) $b_1 = 162$, $q = \frac{1}{3}$; 3) $b_1 = 7$, $q = -2$ lub $b_1 = \frac{14}{9}$, $q = -3$. **18.46.** 1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 4$; 2) $b_1 = -1$, $q = 3$. **18.47.** Dla $x = 1$ mamy 3, 6, 12; Dla $x = -14$ mamy –27, –9, –3. **18.48.** Dla $x = 2$ mamy 8, 4, 2; Dla $x = -7$ mamy –1, –5, –25. **18.50.** 96, 48, 24, 12, 6, 3. **18.51.** 3, 7, 11. **18.52.** 8, 10, 12 lub 17, 10, 3. **18.53.** 5, 15, 45 lub 45, 15, 5. **18.54.** 2, 6, 18 lub 18, 6, 2. **18.59.** O 2 dnie. **18.60.** 6 kg, 18 kg lub 9 kg, 21 kg. **18.61.** 3 kg. **18.62.** 6 %. **18.63.** 10 %.

19. Suma *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego

19.5. 1) 1456; 2) $155\left(5 + \sqrt{5}\right)$. **19.6.** 762. **19.7.** 1210. **19.8.** –68,2. **19.9.** 27. **19.10.** –7 lub 6. **19.11.** 5. **19.12.** $(2^{72} - 1)$ bakterii. **19.13.** 72. **19.14.** $\frac{9}{8}$. **19.15.** 4368. **19.16.** –12 285. **19.19.** 5. **19.20.** 1) $\left[-\frac{18}{7}; 13\right]$; 2) $[-1; 4)$. **19.23.** 50 detali, 40 detali. **19.24.** 1) $b - 5a$; 2) $x + 2y$. **19.25.** O 10 % pierwszego razu i o 20 % drugiego. **19.26.** 20 %.

20. Ćwiczenia na powtórzenie kursu algebry klasy 9.

20.17. 6. **20.24.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $[2; 3)$; 3) $[-2; 16]$; 4) $(-4; 7]$. **20.25.** 1) –9; 2) –2. **20.27.** 2. **20.29.** 1) $a < 4$; 2) $a < 2$; 3) $a \leqslant -3$; 4) $a \geqslant 1$. **20.30.** 1) $a \geqslant 6$; 2) $a \geqslant 5$; 3) $a > -8$; 4) $a \leqslant 0$. **20.32.** $a < -1{,}5$ i $a \neq -2$. **20.33.** $a = 0$. **20.41.** 1) $b = 6$, $c = 9$; 2) $b = 0$, $c = 4$; 3) $b = -3$, $c = -10$. **20.44.** 3) $-2\sqrt{2}$ lub $2\sqrt{2}$. **20.46.** $a = \frac{1}{3}$, $b = -4$, $c = 10$. **20.47.** $a = 2$, $b = -1$, $c = -3$. **20.48.** 1) 1; 2) –8. **20.50.** 1. **20.51.** 10 Dla $a = 1$ i $b = 3$. **20.54.** Dla $c > 0{,}1$. **20.58.** 1) $a \neq 4$; 2) $a < \frac{1}{2}$, lub $\frac{1}{2} < a < 1$, lub $a > 13$; 3) $a < -1$, lub $-\frac{1}{5} < a < 0$, lub $a > 0$. **20.59.** 1) $a > \frac{1}{20}$; 2) $a < -5$; 3) $a \leqslant -1$; 4) $a > \frac{5}{3}$. **20.60.** 1) (1; 4), (–2; 7); 2) (3; –4), (4; –3); 3) (4; 0), (0; –4); 4) (0; –5), (3; 4), (–3; 4). **20.61.** 1) (–2; 1), (–0,4; 1,4); 2) (–2; 4), $\left(\frac{14}{9}; -\frac{20}{3}\right)$; 3) (3; 5), (10; 1,5); 4) (4; –3), (2; –6); 5) (–5; 2); 6) (3; 2), (–2; –3); 7) (3; –2), (0; 1); 8) (1; –2), (3; 0); 9) (8; 4), (4; 8); 10) (1; 5), (–5; –1). **20.62.** 1) (2; 1), (–2; –1), (1; 2), (–1; –2); 2) (5; 1), (1; 5), (2; 3), (3; 2); 3) (2; 1), (1; 2); 4) (6; 4), $\left(\frac{4}{5}; -\frac{6}{5}\right)$; 5) (4; 1), $\left(-\frac{1}{4}; 5\frac{1}{4}\right)$, (–4; –1), $\left(\frac{1}{4}; -5\frac{1}{4}\right)$; 6) (3; –2), (–3; 2); 7) (10; 5), (–5; –10); 8) (5; 3), (5; –3), (–5; 3), (–5; –3); 9) (3; 4), (4; 3), (–3; –4), (–4; –3); 10) (1; 2), $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, (–1; –2), $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **20.63.** 1) (3; 4), (4,5; 8,5); 2) (3; 1), (–1,5; –2); 3) (3; 2), (2; 3), (–3; –2), (–2; –3). **20.64.** 1) $a = \frac{1}{2}$; 2) $a = 2\sqrt{3}$ lub $a = -2\sqrt{3}$. **20.65.** 8 cm, 15 cm. **20.66.** 9 cm, 40 cm. **20.67.** 80 km/h, 60 km/h. **20.68.** 6 km/h, 4 km/h. **20.69.** 12 km/h, 4 km/h. **20.70.** 55 km/h, 75 km/h. **20.71.** 2 godz., 6 godz. **20.72.** 36 godz., 12 godz. **20.73.** 0,5 km/h. **20.74.** 15 km/h, 12 km/h. **20.75.** 72 km/h, 48 km/h. **20.78.** $\frac{11}{12}$. **20.80.** Z trzydziestego drugiego po sześćdziesiąty czwarty. **20.83.** 2,4 cm, 3,2 cm. **20.84.** 6) Tak, $2d$; 7) tak, $4d$. **20.85.** 0, 4, 8. **20.88.** 1) $\frac{n(a-n)}{a}$; 2) $\frac{n(na-b)}{a+b}$. **20.89.** 11. **20.90.** 1) $a_1 = -7$, $d = 3$; 2)

$a_1 = 5$, $d = -2$ lub $a_1 = 3$, $d = -2$; 3) $a_1 = d = 3$ lub $a_1 = -33$, $d = 15$; 4) $a_1 = -0{,}7$, $d = 0{,}3$; 5) $a_1 = 0$, $d = 1{,}5$. **20.91.** 10. **20.92.** 255. **20.93.** $\frac{2a^2}{3}$.
20.94. 1160. **20.95.** 2610. *Wskazówka.* Szukana suma $S = S_1 - S_2 - S_3 + S_4$, gdzie S_1 — suma wszystkich dwucyfrowych liczb; S_2 — suma dwucyfrowych liczb, które są wielokrotnością 3; S_3 — suma dwucyfrowych liczb, które są wielokrotnością 5; S_4 — suma dwucyfrowych liczb, które są wielokrotnością 15. **20.96.** Tak, $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$. **20.97.** 20 %. **20.99.** 2.
20.100. $2\frac{2}{3}$, 4, 6, 9. **20.101.** 3) Tak, q^2; 4) tak, q; 5) nie; 6) tak, $\frac{1}{q}$.

Dla tych, kto chce wiedzieć więcej

21. Podstawowe reguły kombinatoryki

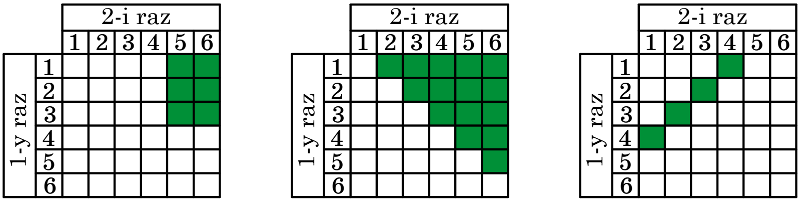
21.1. 9 kursów. **21.2.** 6 wariantów. **21.3.** 15 wariantów. **21.4.** 70. **21.5.** 1) 8; 2) 4. **21.6.** $4 \cdot 3$. **21.7.** $3 \cdot 6 \cdot 5$. **21.8.** 1) $4 \cdot 2$; 2) $4 \cdot 3$. **21.9.** 1) 6; 2) 2. **21.10.** 100. **21.11.** 20. **21.12.** 25. **21.13.** 8. **21.14.** 6^3. **21.15.** 16. **21.16.** $32 \cdot 24$. **21.17.** $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5$. **21.18.** $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$. **21.19.** $11 \cdot 9 + 8 \cdot 7$. **21.20.** $5^5 + 4 \cdot 5^4$.

22. Częstość oraz prawdopodobieństwo zdarzeń losowych

22.16. $a = 1$. **22.17.** 10 km/h. **22.18.** 3.

23. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

23.20. 1) $\frac{1}{25}$; 2) $\frac{1}{20}$. **23.23.** 10 kulek. **23.24.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{10}$; 3) $\frac{1}{9}$. **23.25.** $\frac{2}{3}$. **23.26.** $\frac{2}{3}$. **23.27.** 8 ołówków. **23.28.** 19 ołówków. **23.30.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $\frac{1}{9}$. *Wskazówka.* Zdarzenia prawdziwe oznaczono na rysunku kolorem zielonym. **23.31.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{5}{36}$; 3) $\frac{5}{12}$. *Wskazówka.* Rzut dwóch sześcianów — zatem skorzystamy z rysunku 24.2. **23.32.** U Piotra.



1) 2) 3)

Do zadania 23.30

23.33. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$. **23.34.** $\frac{1}{5}$. **23.35.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{7}{8}$. *Wskazówka.* Trzykrotny rzut monety — analogicznie, jak niezależnie jedno od drugiego rzucić trzy monety. Jeżeli prenumerować monety, to otrzymamy 8 równomożliwych wyników, jak wskazane na rysunku.

Pierwsza moneta	Druga moneta	Trzecia moneta
D	D	D
D	D	C
D	C	D
D	C	C
C	D	D
C	D	C
C	C	D
C	C	C

Do zadania 23.35

23.36. $\frac{2}{n-1}$. *Wskazówka.* Jeżeli jeden ze znajomych siedzi, to drugi może z jednakowym prawdopodobieństwem usiąść na jedno z pozostałych $n-1$ miejsc. **23.37.** $\frac{1}{2}$. *Wskazówka.* Każdemu wariantowi rozmieszczeń, w którym A stoi na przodzie od B, odpowiada wariant, gdzie one są zmienione miejscami A stoi po B. Wtedy ilość możliwych wariantów jest jednakowa ilość wszystkich wariantów. **23.38.** Wykresem jest parabola $y = x^2 + 1$, w które «wyrzucono» punkt z odciętą 2 i –2. **23.39.** $c = -11\frac{3}{4}$.

23.40. 50 km/h. **23.41.** $6\frac{1}{3}$.

Odpowiedzi i wskazówki do tematu «Sumowanie» z rubryki "Kiedy odrobione są lekcji"

1. $\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot 5^n}$. **2.** $n(n+1)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}$. **3.** 1) $\frac{10(10^n-1)}{9}-n$; 2) $\frac{50(10^n-1)}{81}-\frac{5n}{9}$. **5.** 1) $\frac{n-1}{4n-3}$; 2) $\frac{n(n+2)}{n+1}$; 3) $1-\frac{1}{(n+1)!}$. *Wskazówka.* $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$; 4) $1-\frac{1}{(n+1)^2}$. *Wskazówka.* $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$.
6. 1) $\frac{n}{2(5n+2)}$; 2) $\frac{n(n^2+2n+3)}{2(n+1)}$. *Wskazówka.* $\frac{n^3+n^2+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+n$.
7. $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$. *Wskazówka.* $\frac{1}{(n+1)^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$. **8.** $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.
Wskazówka. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

9. $S_n=\frac{na^n}{a-1}-\frac{a^n-1}{(a-1)^2}$.

Wskazówka. Rozpatrzymy równość $aS_n=a+2a^2+3a^3+4a^4+\ldots+n\cdot a^n$.

Odpowiedzi do zadań testowych „Sprawdź siebie”

Numer kolejny	Numer zadania																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	B	D	B	C	B	A	C	C	C	A	B	D	D	A	D	C	B	B
2	D	C	B	C	A	D	D	C	C	C	C	D	B	D	B	C	C	A
3	C	B	A	C	D	A	A	C	C	A	D	B	D	C	D	A	D	B
4	B	C	B	D	D	C	A	B	B	C	B	A	A	D	C	B	A	C

Skorowidz

Argument funkcji 59

Ciąg 151
– skończony 152
– nieskończony 152
– liczbowy 151

Ciąg arytmetyczny 160
– geometryczny 173

Dziedzina określenia wyrazów 42
– – funkcji 59
– zbiór wartości funkcji 60

Funkcja 59
– rosnąca 70
– – na przedziale 70
– kwadratowa 98
– malejąca 70

Granice wartości funkcji 19

Iloraz ciągu geometrycznego 173

Matematyczne modelowanie 138
Metoda dodawania 129
– zmiany zmiennych 130
– podstawienia 128
Metoda graficzna rozwiązywania nierówności 118
Model matematyczny 138

Nierówności kwadratowe 118
– jednakowego znaku 18
– przeciwnego znaku 18
– równoważne 29
– liczbowe 5
Nierówność liniowa z jedną zmienną 35
– nieostra 6
– ostra 6

Ocenianie wartości wyrażenia 19

Parabola 77
Początkowe wartości 153
Porównanie liczb 5
Połączenie przedziałów 118
Procentowe punkty 184
Prosta współrzędnych 34
Przecięcie przedziałów 43
Przedział liczbowy 32
Przedział stałego znaku funkcji 69
– przedział, w którym funkcja rośnie 70
– przedział, w którym funkcja maleje 70

Rozwiązanie nierówności z jedną zmienną 28
– układu nierówności z jedną zmienną 42
Różnica ciągu arytmetycznego 160

Sposoby podania ciągów opisowy 152
– – – rekurentcyjny 153
– – funkcji analitycznie 60
Sumowanie początkowych *n* wyrazów ciągu 190

Średnia geometryczna 7

Udowodnienie nierówności 6

Układ nierówności 42

Wartość funkcji 60
Wyrazy ciągu 151
Wzór rekurentcyjny 153
– odsetek składowych 178
– sumy n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego 167
– – – – – ciągu geometrycznego 186
– n-tego wyrazu ciągu arytmetycznego 161
– – – ciągu geometrycznego 175
– – – ciągów 152
Własności liczbowych nierówności 12

Zadanie stosowane 138
Zbiór pusty 28
Zbiór rozwiązań nierówności 28
– – układów nierówności 42
Zera funkcji 69
Znaki nierówności 6

SPIS TREŚCI

Od autorów 3

Znaki umowne 4

§ 1. Nierówności 5

1. Liczbowe nierówności 5
2. Podstawowe własności nierówności liczbowych 12
3. Dodawanie i mnożenie nierówności liczbowych. Ocena wartości wyrażenia 17

• O pewnych metodach udowodnienia nierówności 24

4. Nierówność z jedną zmienną 28
5. Rozwiązywanie nierówności liniowych z jedną zmienną. Przedziały liczbowe 31
6. Układ liniowych nierówności z jedną zmienną 42

Zadanie testowe № 1 “Sprawdź siebie” 54

Główne w paragrafie 1 57

§ 2. Funkcja kwadratowa 59

7. Powtórzenie i rozszerzenie wiadomości o funkcji 59

• Z historii rozwoju pojęcia funkcji 65

8. Własności funkcji 68
9. Jak sporządzić wykres funkcji $y = kf(x)$, według znanego wykresu funkcji $y = f(x)$ 77
10. Jak sporządzić wykres funkcji $y = f(x) + b$ i $y = f(x + a)$, według znanego wykresu funkcji $y = f(x)$ 85
11. Funkcja kwadratowa, jej wykres i własności 98

• Niektóre przekształcania wykresów funkcji 109

• Jak sporządzić wykres funkcji $y = f(-x)$,
według znanego wykresu funkcji $y = f(x)$ 109

• Jak sporządzić wykres funkcji $y = f(|x|)$,
według znanego wykresu funkcji $y = f(x)$ 110

• Jak sporządzić wykres funkcji $y = |f(x)|$,
według znanego wykresu funkcji $y = f(x)$ 111

Zadanie testowe № 2 "Sprawdź siebie" 115

12. Rozwiązywanie nierówności kwadratowych 118

13. Układ równań z dwiema zmiennymi 127

• Pierwsza ogólnoukraińska olimpiada
młodych matematyków 136

14. Układ równań z dwiema zmiennymi
jako model matematyczny zadań stosowanych 138

Zadanie testowe № 3 "Sprawdź siebie" 146

Główne w paragrafie 2 149

§ 3. Ciągi liczbowe 151

15. Ciągi liczbowe 151

• O królikach, słonecznikach, sosnowych szyszkach
i złotym przekroju 157

16. Ciąg arytmetyczny 159

17. Suma n-początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego . 166

18. Ciąg geometryczny 173

• Jak uniknąć niejednoznaczności
w obliczeniach odsetkowych 184

19. Suma *n* początkowych wyrazów ciągu geometrycznego . 185

• Sumowanie 190

Zadanie testowe № 4 "Sprawdź siebie" 194

Główne w paragrafie 3 196

20. Ćwiczenia powtórzeniowe z kursu algebry klasy 9. 198

Dla tych, kto chce wiedzieć więcej

21. Podstawowe reguły kombinatoryki 212
22. Częstość i prawdopodobieństwo zdarzenia losowego 216
23. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa 224
• Na początku była gra 233
24. Początkowe wiadomości o statystyce 235

Przyjaźnimy się z komputerem 248

Odpowiedzi i wskazówki do ćwiczeń 253

Odpowiedzi do zadań testowych ”Sprawdź siebie” 266

Skorowidz 267

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів
з навчанням польською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Переклад з української мови

Перекладач *Смірнова Богуслава-Галина Ізидорівна*

Польською мовою

Редактор *О. М. Бойцун*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*

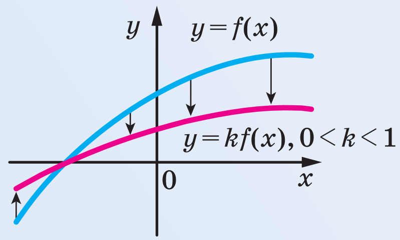
Формат 60×90/16.
Ум. друк. арк. 17,0. Обл.-вид. арк. 13,46.
Тираж 137 пр. Зам. № 64П

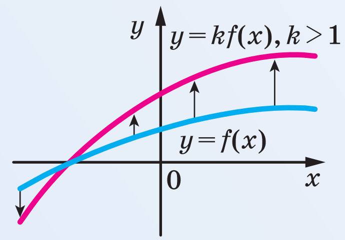
Державне підприємство
“Всеукраїнське спеціалізоване видавництво “Світ”
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб’єкта видавничої діяльності
ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua, e-mail: office@svit.gov.ua

Друк ТДВ “Патент”
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи ДК № 4078 від 31.05.2011

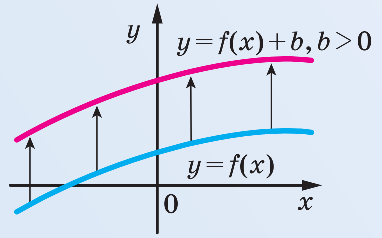
Przekształcenia wykresów funkcji

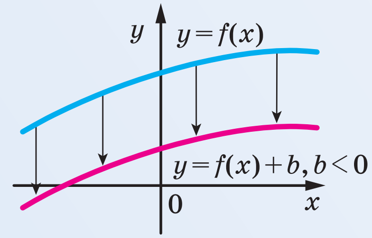
Rozciągnięcie od osi odciętych i ściśnięcie do osi odciętych

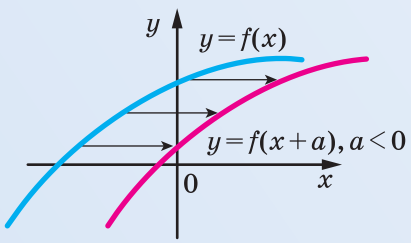


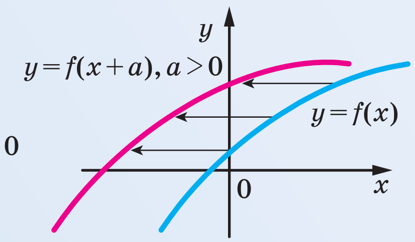


Przesunięcie równoległe wykresu funkcji

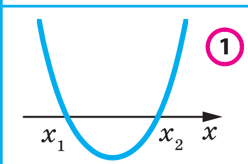
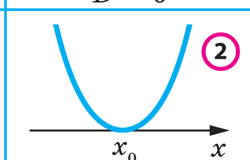
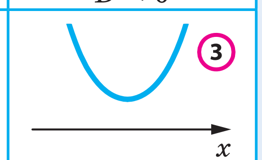
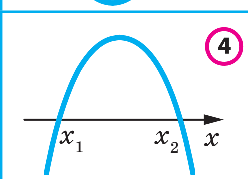
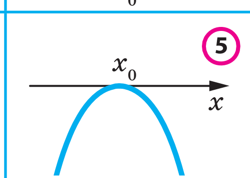
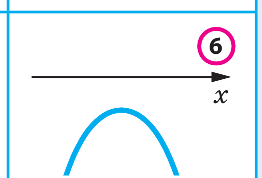








Położenie wykresu funkcji kwadratowej względem osi odciętych

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Ciągi

Ciąg arytmetyczny | **Ciąg geometryczny**

Wzór na *n*-ty wyraz ciągu

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1) \qquad b_n = b_1 q^{n-1}$$

Wzór na sumę *n* początkowych wyrazów ciągu

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\,n = \frac{2a_1 + d\,(n-1)}{2}\,n \qquad S_n = \frac{b_1\,(q^n - 1)}{q - 1},\ q \neq 1$$

Własności wyrazów ciągu

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+2}}{2} \qquad b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$$

Obliczenia odsetkowe

Obliczenie *p* % od liczby *a*:

$$b = \frac{ap}{100}$$

Obliczenie *p* % liczby, która wynosi *a*:

$$b = \frac{a \cdot 100}{p}$$

Obliczenie odsetkowego stosunku liczby *a* do liczby *b*:

$$c = \frac{a}{b} \cdot 100\ \%$$

Wzór odsetków składowych

$$a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$