

G.P. Bevz  
V.G. Bevz  
N.G. Vladimirova

# Geometrie



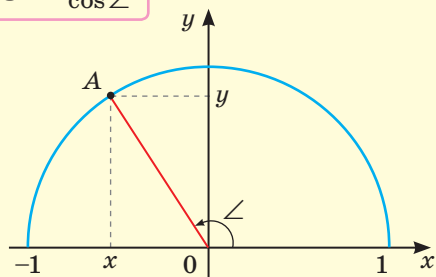
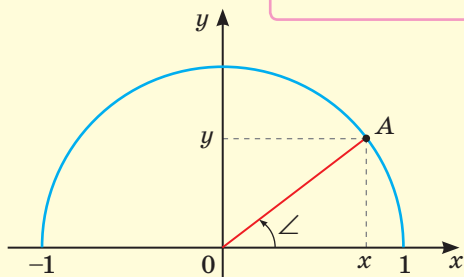
Geometrie



9

## Funcții trigonometrice

$$\sin \angle = y; \cos \angle = x; \operatorname{tg} \angle = \frac{\sin \angle}{\cos \angle}$$



## Valorile funcțiilor trigonometrice ale unor unghiuri

$\angle$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\sin \angle$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \angle$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \angle$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

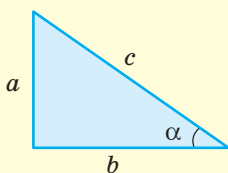
## Identități trigonometrice

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \text{ și } \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

## Corelațiile dintre laturile și unghiurile triunghiului

### dreptunghic



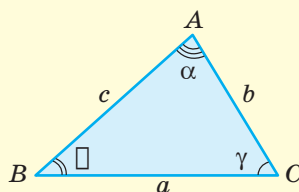
$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a = c \sin \angle$$

$$b = c \cos \angle$$

$$a = b \operatorname{tg} \angle$$

### arbitrar



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle \text{ — teorema cosinusurilor}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \text{ — teorema sinusurilor}$$

## Coordonatele carteziene în plan

### Formula distanței dintre două puncte

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

### Ecuția generală a dreptei

$$ax + by = c, \text{ unde } a^2 + b^2 \neq 0$$

### Coordonatele mijlocului segmentului

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

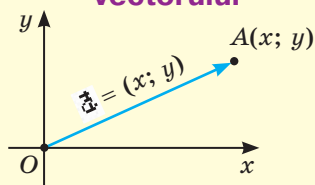
### Ecuția circumferinței

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

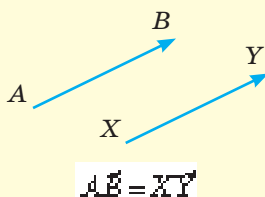
unde  $M(a; b)$  — centrul circumferinței,  
 $R$  — raza circumferinței

## Vectorii și operațiile cu ei

### Coordonatele vectorului



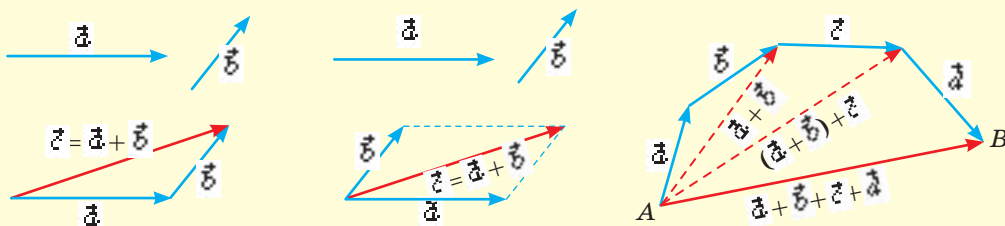
### Vectori egali



### Modulul Vectorului

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

### Adunarea vectorilor



Dacă  $\vec{a} = (x_1; y_1)$  și  $\vec{b} = (x_2; y_2)$ , atunci  $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$  și  $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$ ,  
 $k\vec{a} = (kx_1; ky_1)$ , unde  $k$  — număr arbitrar,  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi, \quad |\vec{a}| = \sqrt{a^2}$$

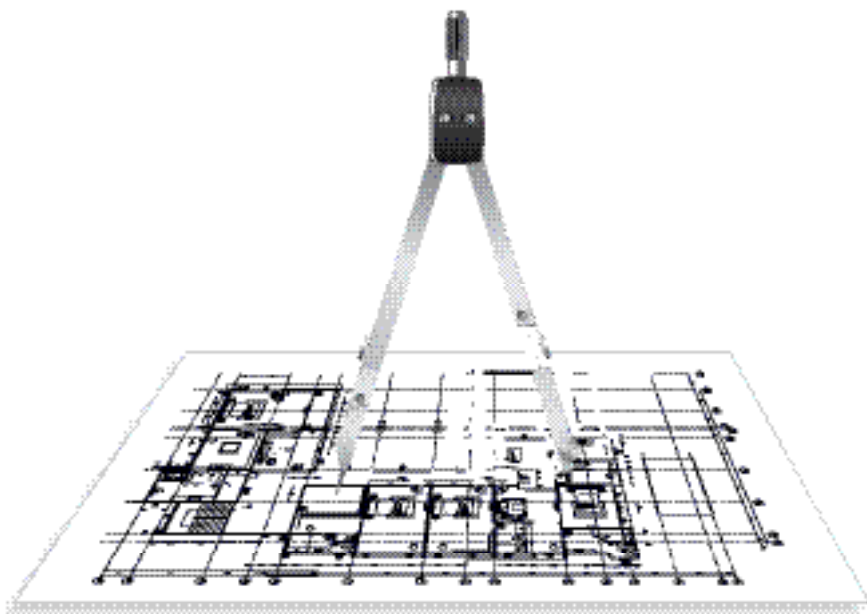
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}, \text{ sau } \vec{a} = k\vec{b} \text{ — condițiile coliniarității } \vec{a} \text{ și } \vec{b},$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \text{ sau } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ — condițiile perpendicularității } (\vec{a} \neq \vec{0}; \vec{b} \neq \vec{0}).$$

# Geometrie

**Manual pentru clasa a 9-a instituțiilor  
de învățământ general  
cu limba română de predare**

*Recomandat de Ministerul Învățământului și Științei al Ucrainei*



Львів  
Видавництво «Світ»  
2017

УДК 514(075.3)  
Б 36

**Перекладено за виданням:**

**Бевз Г.П.** Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. /  
Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – К. : Видавничий дім “Освіта”, 2017.

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
(наказ МОН України від 20.03.2017 № 417)*

**Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено**

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

*Романчук Н. О.*, кандидат педагогічних наук, доцент кафедри вищої математики Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова Миколаївської області;

*Ткаченко Л. Л.*, вчитель-методист, вчитель Комунального закладу «Загальноосвітня школа I-III ступенів №5» Бобринецької міської ради Кіровоградської області;

*Герасимович О. М.*, методист Інституту післядипломної педагогічної освіти Київського університету імені Бориса Грінченка.

**Науковий рецензент**

*Нелін Є. П.*, професор кафедри математики Харківського національного педагогічного університету імені Г. С. Сковороди

**Бевз Г.П.**

Б 36 Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. з навч. румунською мовою / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова ; пер. І.М. Грінчешин. – Львів : Світ, 2017. – 272 с. : іл.

ISBN 978-966-914-071-5

**УДК 514(075.3)**

ISBN 978-966-914-071-5 (рум.)  
ISBN 978-617-656-751-6 (укр.)

© Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г., 2017  
© Видавничий дім “Освіта”, 2017  
© Грінчешин І.М., переклад румунською мовою, 2017

# Stimați elevi și eleve ai clasei a 9-a!

**T**ăcest an veți continua să studiați geometria – parte interesantă și importantă a matematicii. Cunoștințele geometrice, ideile și metodele ei o să vă fie necesare pentru studiile de mai departe în clasele superioare, pentru studierea cu succes a matematicii și a altor discipline de studii, pentru cercetarea lumii înconjurătoare, pentru o viață deplină în societatea contemporană.

Valoarea geometriei pentru persoană a fost elucidată de matematicieni renumiți:

- *Geometria este cunoașterea a tot ce există (Platon).*
- *Printre acei cu aceleași minți-condițiile celelalte fiind aceleași – are avantaj acela care știe geometria (B. Pascal).*

Cu ajutorul acestui manual veți finaliza studierea geometriei în școala de bază.

Pentru a-și imagina cursul integral de geometrie al școlii de bază și a înțelege ce loc ocupă în el materialul clasei a 9-a, cercetați enumerarea temelor din lista, menționată mai jos. Cu culoare este evidențiat materialul pe care voi îl veți studia în anul curent.

## GEOMETRIE (clasele 7-9)

Figurile geometrice elementare și proprietățile lor.  
Amplasarea reciprocă a dreptelor pe plan.  
Triunghiuri. Criteriile de egalitate ale triunghiurilor.  
Asemănarea triunghiurilor. Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice. Circumferința și cercul.  
Patrulatere. Poligoane. Ariile poligoanelor.

**Metoda coordonatelor și vectorii în plan.  
Rezolvarea triunghiurilor.  
Poligoane regulate. Lungimea circumferinței. Aria cercului.  
Transformări geometrice.**

În imensa livadă Geometria fiecare își poate face un buchet după gustul său: demonstrațiile stricte și aplicațiile practice, citate ale matematicienilor iluștri și probleme originale, noțiuni ale matematicii contemporane și știri din istorie.

Geometria le trebuie la toți: inginerilor și arhitecților, constructorilor și desenatorilor, tâmplarilor, lăcătușilor, strungarilor, croitorilor, pictorilor și la mulți alți specialiști. Aplică în munca lor cunoștințele geometrice lucrătorii la construcții, navigatorii, militarii, oamenii de artă, astronomii și chiar cofetarii. Orice știință veți alege pentru studiere în viitor, în ce ramură a activității umane nu veți munci, ca să obțineți rezultate performante sunt necesare cunoștințe temeinice din geometrie. Vă invităm în lumea Geometriei. Această lume este miraculoasă: darnică, desăvârșită, strâns legată cu lumile Muncii, Intelectului, Artei.

Sperăm că manualul nostru va deveni pentru voi un ajutor bun în însușirea cunoștințelor geometrice, în formarea unor deprinderi noi, acumularea experienței noi, în dezvoltarea armonioasă a personalității voastre.

**Vă dorim succese în învățatură!**

*Autorii*

# Cum de lucrat cu manualul

**Dragi elevi și eleve ai clasei a 9-a! Stimați colegi!**

Voi țineți în mâini un manual nou de geometrie. Autorii speră că această carte va deveni pentru voi un ajutor și povățuitor de nădejde. Propunem o navigație originală prin paginile lui.

Un motiv ponderabil și stimul frumos pentru studierea materialului este informația despre creatorii geometriei și exemple de utilizare practică a materialului de învățatură. Afirmările matematicienilor iluștri pot deveni pentru voi călăuză nu numai în învățatură, ci și în viață.

La începutul fiecărui capitol se dă o scrută privire asupra conținutului lui în limbile română și engleză, de asemenea, exemple de obiecte materiale, ale căror modele sunt figurile geometrice!

- 1** Învățând materialul teoretic, atrageți atenția la cuvintele tipărite cu caractere **grase** – acestea sunt termeni noi geometrici. Voi trebuie să înțelegeți ce ei înseamnă, și să le memorizați.

## § 12 Aplicații ale vectorilor

Dacă se rezolvă o problemă, folosind proprietățile vectorilor, atunci aceasta-i metoda vectorială de rezolvare a problemei. Totodată, deseori se folosește următoarea afirmație.

**TEOREMA 5**

Dacă  $X$  – punct arbitrar, iar  $M$  – mijlocul segmentului  $AB$  sau punctul de intersecție al medianelor triunghiului  $ABC$ , atunci corespunzător:

$$\vec{XM} = \frac{1}{2}(\vec{XA} + \vec{XB}) \text{ sau } \vec{XM} = \frac{1}{3}(\vec{XA} + \vec{XB} + \vec{XC}).$$

**DEMONSTRAȚIE.**

Totdeauna sunt adevărate egalitățile:

$$\vec{XM} + \vec{MA} = \vec{XA}, \quad \vec{XM} + \vec{MB} = \vec{XB}, \quad \vec{XM} + \vec{MC} = \vec{XC}.$$

Adunând primele două din aceste egalități și luând în considerație, că  $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{0}$  (fig.119), obținem:  $2\vec{XM} = \vec{XA} + \vec{XB}$ , de unde  $\vec{XM} = \frac{1}{2}(\vec{XA} + \vec{XB})$ .




Fig.119

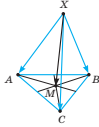


Fig.120

Dacă vom aduna toate trei egalități și vom considera, că  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$  (vezi fig.104 și problema de la pag.83), atunci obținem:  $3\vec{XM} = \vec{XA} + \vec{XB} + \vec{XC}$ , de unde  $\vec{XM} = \frac{1}{3}(\vec{XA} + \vec{XB} + \vec{XC})$  (fig.120). □

**TEOREMA 10**

(A sinusurilor). Laturile triunghiului sunt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse.

**DEMONSTRAȚIE.**

Din teorema anterioară reiese că

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad \frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

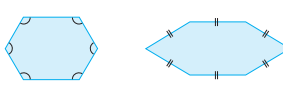
Deci,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Iar aceasta înseamnă că laturile triunghiului  $a, b, c$  sunt proporționale cu

**PENTRU CEI CURIOSI**

Oare se poate din definiția poligonului regulat de omis imbinarea de cuvinte „laturi egale” sau „unghiuri egale”? Nu, deoarece poligonul regulat, toate unghiurile căruia sunt egale sau toate laturile sunt egale, poate fi neregulat (fig.187).



575. Folosind o foaie de hârtie în pătrate (fig.181) desenați triunghiul cu baza  $AB$  și cu aria de două ori mai mare decât aria triunghiului  $ABC$ . Câte astfel de triunghiuri există? Care poate fi cel mai mare cosinus al unghiului, opus laturii  $AB$ ?

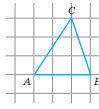


Fig.181

**PROBLEME PENTRU REPETARE**

576. Laturile triunghiului sunt egale cu 5 cm, 6 cm și 10 cm. Aflați unghiurile triunghiului.

577. Demonstrați că triunghiul cu laturile 7 cm, 24 cm și 25 cm este dreptunghic.

578. Aflați aria dreptunghiului, dacă perpendiculara, dusă din vârful unghiului

**Textul cu caractere grase, cuprins în paranteze pătrate** — acestea-s teoremele, ale căror demonstrație se dă mai jos.

Sfârșitul demonstrării teoremei se notează cu un **pătrățel roșu**. "Cu culoare verde" se notează demonstrațiile care nu sunt obligatorii pentru studiere.

În fiecare paragraf este rubrica «**Pentru cei curioși**». Ea conține material suplimentar, adresat elevilor cointeresați.



Manualul conține exerciții cu diferite niveluri de dificultate. Sunt probleme pentru rezolvarea orală și repetare, probleme de nivelurile **A** și **B** și de dificultate sporită. 6

Au să-i intereseze pe elevi și profesori **probleme deschise și însărcinările practice.**

În rubrica „**Efectuăm împreună**” sunt expuse modele de rezolvare a unor tipuri importante de probleme. Este util de-a face cunoștință cu ele înainte de-a îndeplini însărcinările pentru acasă, ale căror numere sunt evidențiate cu culoare albastră. 8

La sfârșitul fiecărui capitol este rubrica „**Probleme cu desene gata**”, 10

„**Lucrări independente**” ce conțin exerciții cu diferite niveluri. **Însărcinările teste** 11

**și Probleme tipice pentru lucrări de control** de trei niveluri de dificultate.

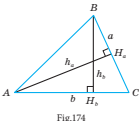
§ 16. Formule pentru aflarea ariei triunghiului 133

**EFFECTUĂM ÎMPREUNĂ**

1 Demonstrați că înălțimile triunghiului sunt **invers proporționale** cu laturile corespunzătoare.

• Fie  $a$  și  $b$  — două laturi ale triunghiului  $ABC$ , iar înălțimile, coborâte pe ele —  $h_a$ ,  $h_b$  (fig.174).Exprimăm aria triunghiului prin două procedee:  $S = \frac{1}{2} ah_a$ ,  $S = \frac{1}{2} bh_b$ .


Deci,  $ah_a = bh_b$ , de unde  $h_a : h_b = b : a$ .  
Iar aceasta și trebuia de demonstrat.  
Așa un procedeu de rezolvare a problemelor, când se egalează ariile figurilor egale, pe scurt este numită **metoda ariilor**.



**PROBLEME CU DESENE GATA**

**A**  $AB = 4$ ,  $AC = 6$ ,  $\angle A = 60^\circ$ .

**B**  $AC = 14$ ,  $AB : BC = 3 : 5$ .



**VARIANTA 1**

1. Aflați aria triunghiului, ale cărui laturi sunt egale cu 7 cm și 8 cm, iar unghiul format de ele este de  $45^\circ$ .

2. Aflați latura  $BC$  a triunghiului  $ABC$ , dacă  $AB = 6$  dm,  $AC = 14$  dm,  $\angle B = 120^\circ$ .

3. Latura laterală și baza triunghiului isoscel sunt respectiv proporționale cu numerele 5 și 8. Aflați raza circumferinței circumscrise, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 54 m.

140 Capitolul 3. Rezolvarea triunghiurilor

**ÎNSĂRCINĂRILE TESTE 3**

1 Care din următoarele egalități este neadevărată?

a)  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ; c)  $\frac{a}{\sin A} = \frac{\sin B}{b}$ ;  
b)  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ ; d)  $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ .

2 Stabiliți tipul triunghiului  $ABC$ , dacă  $\cos B < 0$ .

a) ascutitunghic;  
b) dreptunghic;  
c) obtuzunghic;  
d) echilateral.

3 Aflați raza circumferinței, circumscrise triunghiului  $ABC$ , dacă  $AC = 3$  cm,  $\angle B = 30^\circ$ .

a) 3 cm; c)  $\sqrt{3}$  cm;  
b) 6 cm; d) 12 cm.

**PROBLEME TIPICE PENTRU LUCRAREA DE CONTROL**

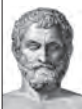
1. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 14 cm și 16 cm, iar unghiul format de ele este  $120^\circ$ . Aflați perimetrul și aria triunghiului.

2. În triunghiul  $ABC$   $AB = 8$  dm,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 105^\circ$ . Aflați  $BC$ .

3. Laturile paralelogramului sunt egale cu 6 cm și 10 cm, iar unghiul făcut de ele este  $60^\circ$ . Aflați diagonalele și aria paralelogramului.

Geometria este una din cele mai vechi științe. După cum mărturisește denumirea ei (geo - pământ, metreo - măsur), inițial ea era legată numai cu măsurarea loturilor de pământ. Cu timpul cunoștințele geometrice au început să se aplice la măsurarea înălțimilor, adâncimilor, diferitelor distanțe.

La început oamenii măsurau distanțele și unghiurile nemijlocit sau folosind proprietățile figurilor asemenea. **Fales din Millet** (sec. V î.H) cu așa un procedeu determina distanțele până la obiectele inaccesibile, a măsurat înălțimea uneia din piramidele egiptene. **Eratosfene Chirensikii** (sec. III î. H) a determinat dimensiunile aproximative ale Pământului. **Heron din Alexandria** (sec. I î. H) a scris cartea „Dioptrica”, care se poate considera ca prima lucrare din geometrie, de asemenea a construit un dispozitiv pentru măsurarea unghiurilor în diferite plane, care a devenit



În anexe sunt expuse „Proiecte de învățământ” pentru fiecare capitol, „Probleme de dificultate sporită”, „Probleme pentru repetare”, „Teste antrenament”, „**Știri istorice**” și altele. 12

**Vă dorim succese în studierea geometriei!**



**Gândesc, deci exist.  
Pentru a desăvârși intelectul trebuie  
mai mult de cugetat, decât de a memoriza.  
Folosiți corect cuvintele și veți  
elibera lumea de jumătate din neînțelegeri.**



## RENE DESCARTES

(1596–1650)

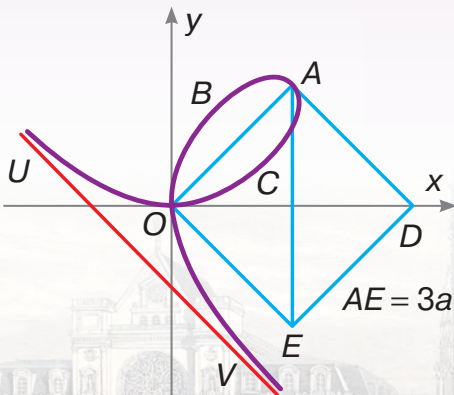
Ilustrul filozof, matematician, fizi-  
cian, fiziolog francez.

„Geometria” lui a avut o mare  
influență asupra dezvoltării matematicii –  
pe parcursul aproape a 150 de ani algebra  
și geometria analitică s-au dezvoltat în  
direcțiile, indicate de Descartes.

- A creat metoda coordonatelor
- A introdus noțiunea de mărime variabilă independentă și funcție
- A implementat simbolică matematică comodă

Foaia lui Descartes

$$x^3 + y^3 = 3axy$$



# Capitolul 1

## Metoda coordonatelor în plan

# Section 1

## Coordinates on the Plane Method

Metoda coordonatelor în geometrie a devenit într-atât de utilă și comodă că a pus începutul creării a unei părți mari aparte a matematicii – a geometriei analitice. Ea este studiată în toate instituțiile tehnice superioare și medii și în facultățile matematice ale universităților. Cu ajutorul geometriei analitice s-a reușit instalarea unui pod ce leagă algebra și geometria.

În acest capitol o să faceți cunoștință cu coordonatele carteziene și cu metoda coordonatelor, care permit rezolvarea problemelor algebrice cu ajutorul geometriei, iar cele geometrice – cu ajutorul algebrei. Veți putea compune ecuațiile a diferite linii și cerceta proprietățile lor.

**§ 1** | Sincusurile, cosinusurile și tangentele unghiurilor de la  $0^\circ$  până la  $180^\circ$  | Sines, Cosines and Tangents of Angles from  $0^\circ$  to  $180^\circ$

**§ 2** | Identitățile geometrice | Trigonometric Identities

**§ 3** | Coordonatele carteziene | Cartesian Coordinates

**§ 4** | Distanța dintre puncte | Distance Between the Points

**§ 5** | Ecuația circumferinței | Circle Equation

**§ 6** | Ecuația dreptei | Line Equation

**PROIECTUL DE ÎNVĂȚĂMÂNT** | **EDUCATIONAL PROJECT**  
**“Curbe interesante”** | **“Interesting Curves”**

# De ce trebuie de învățat coordonatele și metoda coordonatelor?

Comoditatea metodei coordonatelor și simplitatea algoritmilor, cu ajutorul cărora sunt descrise punctele curbilor de către ecuațiile algebrice, au servit ca pricină a răspândirii rapide și a folosirii lor în multiple ramuri ale științei și a activității vitale umane. Coordonatele geografice se utilizează în geografie, cartografie, geodezie, construcții, în arta militară. Cu ajutorul receptorilor de navigație sunt determinate coordonatele aflării **automobilelor**, navelor, **avionului** în timpul mișcării.



Nici un domeniu al științei contemporane nu se lipsește de prezentarea grafică a informației. Sistema invizibilă de coordonate se **conține pe ecranul calculatorului**.

Semnalele de ieșire ale **șoarecelui** pot fi considerate ca două mărimi independente și pot fi transformate în coordonatele poziției în planul bidimensional. În regimul grafic valorile lui  $x$  (numărătorea coloniților) se numără de la marginea stângă a ecranului spre dreapta, iar valorile lui  $y$  (numărătorea rândurilor) – de la marginea de sus a ecranului în jos.

Coordonatele sunt folosite în multe jocuri (lupta maritimă, dame, **șah**).

Sisteme de coordonate speciale sunt folosite în examinările medicale, de exemplu, în tomografia computerizată.

Coordonatele sunt folosite în algebră, fizică, chimie, biologie și alte științe și discipline școlare.

**Dar unde încă sunt folosite coordonatele? Aduceți exemplele dumneavoastră.**



Aparatele de zbor nepilotate sau **quadcopter** sunt utilizate la construcții de dimensiuni mari, în agricultură, la supravegherea pădurilor și a lacurilor de acumulare.



Efectiv sunt folosite în industrie mașinile – **unelte și mesele de coordonate**, mașinile unelte cu dirijare programată.



Învățând materialul capitolului veți afla despre legăturile dintre algebră, geometrie și trigonometrie, veți lărgi cunoștințele sale din trigonometrie, veți putea aplica materialul învățat la rezolvarea unor probleme practice interesante.

# § 1

## Sinusurile, cosinusurile și tangentele unghiurilor de la $0^\circ$ până la $180^\circ$

În fizică și mecanică funcțiile trigonometrice sunt folosite la cercetarea proceselor periodice și a mișcărilor de rotație. Deoarece roata (fig.1) sau arborele turbinei (fig.2) se poate întoarce cu orice unghi mare în o direcție sau în direcția opusă, de aceea sunt considerate funcțiile trigonometrice ale unghiului  $\alpha$ , unde  $\alpha$ , poate fi egal, de exemplu, cu  $500^\circ$ ,  $700^\circ$ ,  $-600^\circ$  și poate fi un număr pozitiv sau negativ foarte mare. Cu astfel de funcții trigonometrice veți face cunoștință în clasa a 10-a.



Fig. 1



Fig. 2

În geometrie pentru a rezolva triunghiurile este suficient de considerat funcțiile trigonometrice ale unghiurilor de la  $0^\circ$  până la  $180^\circ$ .

Voi deja știți ce este sinusul, cosinusul, tangenta unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic. Dacă în triunghiul dreptunghic  $ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $AB = c$ ,  $BC = a$ ,  $AC = b$  (fig. 3), atunci

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}.$$

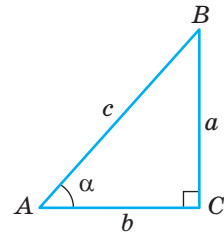


Fig. 3

Aplicând aceste formule se pot rezolva triunghiurile dreptunghice.

Pentru a rezolva nu numai triunghiurile dreptunghice, ci și triunghiurile arbitrare, trebuie de folosit funcții trigonometrice nu numai ale unghiurilor ascuțite, ci și a celor obtuze.

Să explicăm ce înseamnă expresiile  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  și  $\operatorname{tg} \alpha$ , unde,  $\alpha$  — este un astfel de unghi, că  $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ .

Să desenăm pe planul de coordonate o circumferință de rază  $r = 1$  și cu centrul în originea de coordonate (fig.4). Aceasta-i **circumferința unitară**. Notăm punctul de intersecție al semiaxei

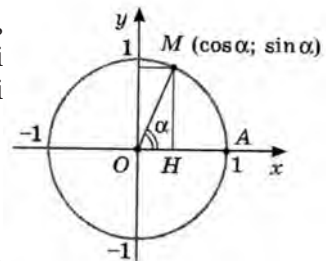


Fig.4

pozitivei  $OX$  cu circumferința unitate cu litera  $A$  și ne înțelegem că vom depune unghiurile de la semidreapta  $OA$  împotriva mișcării acului de ceasornic. Unghiurile și măsurile lor le vom nota cu litere grecești  $\alpha$  (alfa),  $\beta$  (beta),  $\gamma$  (gama) ș.a.

Dacă  $M$  — punct al circumferinței unitate astfel că  $\angle AOM = \alpha$ , atunci abscisa punctului  $M$  este numită **cosinusul unghiului**  $\alpha$ , iar ordonata - **sinusul unghiului**  $\alpha$ . În figura 4  $OH = \cos \alpha$ ,  $MH = \sin \alpha$ .

De exemplu, dacă  $\alpha = 30^\circ$  (fig 5), atunci ordonata punctului  $M$  este egală cu  $\frac{1}{2}$ , deoarece cateta opusă unghiului de  $30^\circ$ , este egală cu jumătatea ipotenuzei. De aceea, dacă  $OM = 1$ , atunci  $MH = \frac{1}{2}$ . Așadar,  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ . Conform teoremei Pitagora

$$OH = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Deci, } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

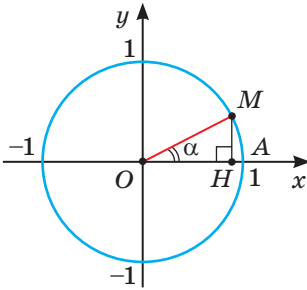


Fig. 5

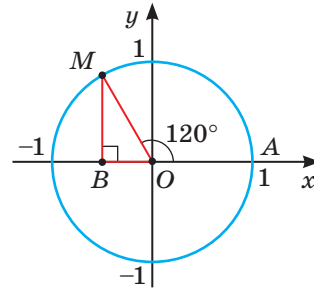


Fig. 6

Dacă  $\alpha = 120^\circ$  (fig 6), adică  $\angle AOM = 120^\circ$ , atunci  $\angle MOB = 60^\circ$ , iar  $\angle OMB = 30^\circ$ . Pe baza proprietății catetei, opuse unghiului de  $30^\circ$ ,  $OB = 0,5$ ,  $OM = 0,5$ . Deoarece punctul  $M$  este situat în al doilea cadran, rezultă că abscisa lui este număr negativ. În cazul dat ea este egală cu  $-0,5$ , de aceea  $\cos 120^\circ = -0,5$ .

În conformitate cu teorema Pitagora

$$MB = \sqrt{MO^2 - BO^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ordonata punctului  $M$  este egală cu  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ , de aceea  $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Tangentă a unghiului**  $\alpha$  se numește raportul sinusului acestui unghi către al lui cosinus:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ .

E clar că  $\operatorname{tg} \alpha$  are sens numai pentru acele valori ale lui  $\alpha$ , pentru care  $\cos \alpha \neq 0$ , deoarece la zero nu se poate împărți. Întrucât pentru unghiurile de la  $0^\circ$  până la  $180^\circ$   $\cos \alpha = 0$ , dacă  $\alpha = 90^\circ$ , atunci în cazul dat  $\operatorname{tg} \alpha$  este definită pentru toate unghiurile  $\alpha \neq 90^\circ$ .



Să cercetăm cum se calculează tangentele unghiurilor de la 0° până la 180°.

$$\text{De exemplu, } \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{tg} 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}.$$

Valorile exacte ale lui  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  și  $\operatorname{tg} \alpha$  pentru unele unghiuri  $\alpha$  sunt date în tabelul 1.



Variația lui  $\sin \alpha$  în dependență de variația lui  $\alpha$

**Tabelul 1**

$\alpha$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Funcțiile  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  și  $\operatorname{tg} \alpha$  sunt numite **funcții trigonometrice** de argumentul  $\alpha$ . Definițiile funcțiilor trigonometrice ale unghiului ascuțit al triunghiului dreptunghic, formulate în clasa a 8-a, nu contrazic pe definițiile noi.

**Atenție!**

1. Sinusurile, cosinusurile și tangentele unghiurilor ascuțite obțin numai valori pozitive, iar cosinusurile și tangentele unghiurilor obtuze - valori negative (fig. 7).

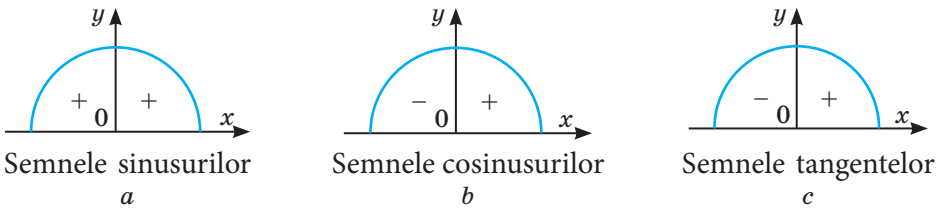


Fig. 7

2. Dacă vom mări unghiul  $\alpha$  de la 0° până la 90°, atunci sinusul lui se va mări de la 0 până la 1, iar cosinusul se va mișcarea de la 1 până la 0. Dacă vom continua să mărim unghiul  $\alpha$  de la 90° până la 180°, atunci sinusul lui se va micșora de la 1 până la 0, iar cosinusul — de la 0 până la -1.

3. Dacă vom mări unghiul  $\alpha$  de la 0° până la 90°, atunci tangenta lui se va mări de la 0 până la infinit;  $\operatorname{tg} 90^\circ$  nu există. Dacă vom mări unghiul  $\alpha$  de la 90° până la 180°, atunci  $\operatorname{tg} \alpha$  se va mări de la minus infinit până la 0.

\* Pentru a folosi codul QR este necesar de-a stabili asigurarea unui program special pe Smartfon planșetă. De exemplu, pentru dispozitivele cu sistemul operațional Android trebuie demarat utilizatorul Google Play market și de încărcat programul Powerful QR Code Scanner A+ .. sau oricare altul analogic. Încărcarea programelor pentru citire QR - codurilor pentru alte sisteme operaționale o să ajute respectivele utilizatele Windows Mobile -Windows Stare, și OY -App Stope.

## PENTRU CEI CURIOSI

Problemele, pe care noi le atribuim trigonometriei, au început să le rezolve încă grecii antici. Ei calculau lungimile coardelor unei circumferințe pe baza corelațiilor cunoscute dintre elementele poligoanelor regulate și raza circumferinței, circumscrise acestor poligoane.

Renumitul savant atunci grec Claudiu Ptolomeu (100-178) în lucrarea "Almagest" a compus tabelul lungimilor coardelor pentru fiecare peste jumătate de grad de la  $0^\circ$  până la  $180^\circ$ , care, din punctul de vedere actual, este tabelul valorilor sinusurilor pentru unghiurile de la  $0^\circ$  până la  $90^\circ$  peste fiecare un sfert de grad. Raza circumferinței la Ptolomeu era egală cu 60 de unități, ceea ce îngreuna radical calculele.

Savantul enciclopedist din Horezm Abu-Reihan Ali-Birumi (973-1048) a propus de folosit circumferința unitate pentru introducerea noțiunilor de sinus și cosinus. În lucrarea "Canon Masuda" el scria astfel: "Noi considerăm că este mai bine pentru numărul diametrului astfel, ca el să fie compus din două părți, adică unități, ca jumătatea din diametru, care se numește cel mai mare sinus, iar uneori - sinus deplin, să fie unitate. Atunci în acțiunile noastre va lipsi necesitatea de-a aminti înmulțirea cu el și împărțirea la el, și de asemenea transformarea lui în minute sau micșorarea cu un ordin, ceea ce era necesar, dacă el ar fi avut șasezeci de părți".

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Ce se numește circumferință unitate?
2. Ce se numește sinusul unghiului? Cu ce este egal  $\sin 30^\circ$ ;  $\sin 90^\circ$ ?
3. Ce se numește cosinusul unghiului? Cu ce este egal  $\cos 45^\circ$ ;  $\cos 60^\circ$ ?
4. Cum variază sinusul unghiului, dacă vom mări unghiul: a) de la  $0^\circ$  până la  $90^\circ$ ; b) de la  $90^\circ$  până la  $180^\circ$ ?
5. Cum se va schimba cosinusul unghiului, dacă vom mări unghiul: a) de la  $0^\circ$  până la  $90^\circ$ ; b) de la  $90^\circ$  până la  $180^\circ$ ?
6. Ce se numește tangentă a unghiului? Cu ce este egală  $\tan 30^\circ$ ;  $\tan 90^\circ$ ?
7. Cum va varia tangenta unghiului, dacă vom mări unghiul: a) de la  $0^\circ$  până la  $90^\circ$ ; b) de la  $90^\circ$  până la  $180^\circ$ ?
8. Ce semne au funcțiile trigonometrice ale unghiului ascuțit? Dar a celui obtuz?
9. Formulați definițiile sinusului, cosinusului și a tangentei a unghiului ascuțit al unui triunghi dreptunghic.

## EFFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1. Folosind circumferința unitate găsiți  $\sin 135^\circ$  și  $\cos 135^\circ$ .
  - În figura 8 este reprezentată circumferința unitate (circumferința de rază  $r = 1$  cu centrul în originea de coordonate). Dacă în această figură  $\angle POB = 135^\circ$  și  $\angle ONB = 90^\circ$ , atunci  $\angle NOB = 45^\circ$  și  $\angle NBO = 45^\circ$ . Atunci  $\triangle ONB$  — triunghi isoscel și  $NO = NB$ . Pe baza teoremei Pitagora:



$OB^2 = NO^2 + NB^2$ , sau  $1 = 2NO^2$ , de unde

$$NO^2 = \frac{1}{2}, \text{ iar } NO = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Deoarece  $NO = NB$ , rezultă că punctul B are coordonatele  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

Deci,  $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

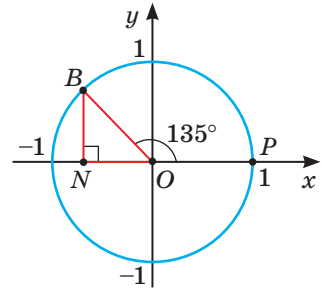


Fig.8

2) Construiți unghiul, al cărui cosinus este egal cu  $-0,25$ .

- Construim în sistemul de coordonate circumferința unitate (fig.9). Împărțim raza OK în patru părți egale. Atunci  $OH = \frac{1}{4}OK = 0,25$ . Ducem  $HM \perp OK$ . Punctul M aparține circumferinței unitate și este situat în cadranul doi, de aceea abscisa lui este egală cu  $-0,25$ . Așadar,  $\cos \angle AOM = -0,25$  și  $\angle AOM$  — acela ce trebuia construit.

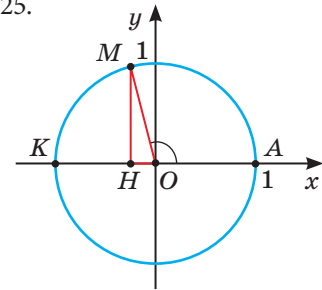


Fig. 9

3) Demonstrați că  $\sin 150^\circ = \cos 60^\circ$ .

- Fie că  $\angle MOA = 150^\circ$ , iar  $\angle TOA = 60^\circ$  (fig.10). Atunci  $\angle MOH = 30^\circ$ , iar  $\angle HMO = 60^\circ$ . După ipoteză și unghiul ascuțit  $\triangle MOH = \triangle OTP$ , de aceea  $PO = MH$ . Deoarece  $PO = \cos 60^\circ$ , iar  $MH = \sin 150^\circ$ , rezultă că  $\sin 150^\circ = \cos 60^\circ$ . Ceea ce trebuia de demonstrat.

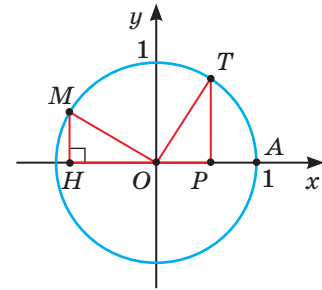


Fig. 10

Dacă problema are un număr insuficient de date, atunci ea se numește **deschisă**. Voi completați, conform părerii voastre, condiția ei și o rezolvați. Este de dorit de-a considera cât mai multe variante posibile ale problemei și ale rezolvării ei.

4) **Problemă deschisă** Determinați tipul triunghiului ABC, dacă  $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , iar  $\sin B = \dots$ .

- Completăm condiția cu câteva procedee diverse, de exemplu: 1)  $\sin B = 0$ , 2)  $\sin B = 1$ , 3)  $\sin B = \frac{1}{2}$ , 4)  $\sin B = a$ , unde  $0 < a < \frac{1}{2}$ . Clarificăm tipul triunghiului pentru fiecare din aceste cazuri.

- 1) Dacă  $\sin B = 0$ , atunci  $\angle B = 0^\circ$  sau  $\angle B = 180^\circ$ . Nu există triunghi cu așa unghiuri.
- 2) Dacă  $\sin B = 1$ , atunci  $\angle B = 90^\circ$ . Avem:  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 90^\circ$ ,  $\angle C = 60^\circ$ . Deci,  $\triangle ABC$  — dreptunghic, dar nu este isoscel.
- 3) Dacă  $\sin B = \frac{1}{2}$ , atunci  $\angle B = 30^\circ$  sau  $\angle B = 150^\circ$ . Să examinăm fiecare din aceste cazuri. În primul caz avem  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $\angle C = 120^\circ$ . Deci,  $\triangle ABC$  — obtuzunghic și isoscel. În al doilea caz avem  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 150^\circ$ ,  $\angle C = 0^\circ$ . Un astfel de triunghi nu există.
- 4) Dacă  $\sin B = a$ , unde  $0 < a < \frac{1}{2}$ , atunci  $0 < \angle B < 30^\circ$  sau  $150^\circ < \angle B < 180^\circ$ . În primul caz avem  $\angle A + \angle B < 60^\circ$ , și de aceea  $\angle C > 120^\circ$ . Așadar,  $\triangle ABC$  — obtuzunghic, însă nu este isoscel. În al doilea caz:  $\angle A + \angle B > 180^\circ$ . Triunghi cu așa unghiuri nu există.  
Alte cazuri cercetați-le de sine stătător.

## PROBLEME ȘI ÎNSĂRCINĂRI

### EFFECTUAȚI ORAL

1. Oare poate abscisa sau ordonata punctului, situat pe circumferința unitate, să fie egală cu 2?
2. Poate oare sinusul sau cosinusul unui unghi să fie egal cu 2? Dar cu  $-2$ ?
3. Oare poate sinusul unghiului, mai mic de  $180^\circ$ , să fie număr negativ? Dar cosinusul?
4. Tangenta căruia unghi este egală cu 1? Dar a căruia cu  $-1$ ?
5. Găsiți  $\sin \alpha$  și  $\cos \alpha$ , dacă: a)  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ ; b)  $\operatorname{tg} \alpha = -1$ .
6. Aflați  $\sin \alpha$  și  $\operatorname{tg} \alpha$ , dacă  $\cos \alpha = 0,5$ .
7. Care numere trebuie să fie în pătrățelele goale ale tabelului?

$\alpha$	$0^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$
$\sin \alpha$			
$\cos \alpha$			
$\operatorname{tg} \alpha$			

### A

8. Sunt date trei puncte:  $O(0; 0)$ ,  $A(1; 0)$ ,  $B(1; 1)$ . Găsiți sinusul și cosinusul unghiului  $AOB$ .
9. Aflați sinusul și cosinusul unghiului  $AOK$ , dacă  $A(1; 0)$ ,  $O(0; 0)$ ,  $K(0; 1)$ .

10. Aflați, folosindu-vă de circumferința unitate:  $\sin 60^\circ$ ,  $\cos 60^\circ$ ,  $\sin 150^\circ$ ,  $\cos 150^\circ$ .
11. Demonstrați, că  $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ .
12. Construiți unghiul, cosinusul căruia este egal cu: a)  $\frac{3}{4}$ ; б)  $-0,5$ .
13. Construiți unghiul, al cărui sinus este egal cu  $0,75$ . Câte soluții are problema?
14. Ce este mai mare: a)  $\sin 10^\circ$  sau  $\cos 10^\circ$ ; б)  $\cos 45^\circ$  sau  $\sin 45^\circ$ ?
15. Care din unghiurile  $\alpha$  sau  $\beta$  este mai mare, dacă:
- a)  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\cos \beta = \frac{2}{3}$ ;
- b)  $\sin \alpha = 0,75$ ,  $\sin \beta = 0,93$  (unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$  — ascuțite);
- c)  $\sin \alpha = 0,75$ ,  $\sin \beta = \frac{1}{2}$  (unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$  — obtuze).
16. Folosindu-se de figura 11 găsiți sinusul, cosinusul și tangenta unghiului  $B$  al triunghiului  $ABC$ .

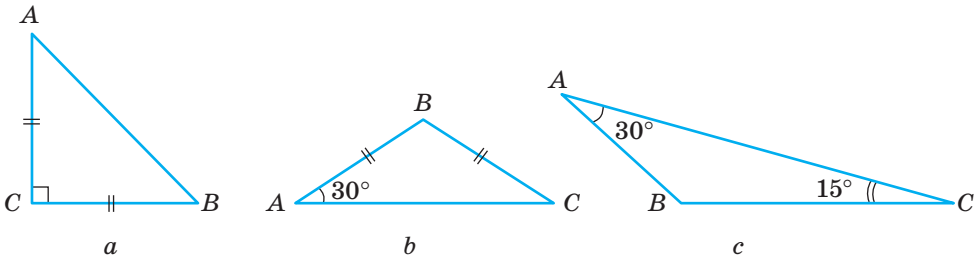


Fig. 11

17. Determinați semnul produsului:
- a)  $\cos 30^\circ * \sin 15^\circ * \cos 125^\circ * \operatorname{tg} 35^\circ$ ;
- b)  $\sin 137^\circ * \cos 150^\circ * \operatorname{tg} 22^\circ * \cos 35^\circ$ ;
- c)  $\operatorname{tg} 143^\circ * \sin 165^\circ * \operatorname{tg} 87^\circ * \cos 126^\circ$ ;
- d)  $\cos 32^\circ * \sin 132^\circ * \cos 135^\circ * \operatorname{tg} 92^\circ$ .
18. Scrieți în trei coloane următoarele unghiuri: I – unghiurile ascuțite; II – unghiurile obtuze; III – tipul unghiului este imposibil de stabilit:  $\sin A = 0,6$ ;  $\cos B = -0,8$ ;
- $\sin C = \frac{1}{3}$ ;  $\operatorname{tg} D = -2$ ;  $\cos E = \frac{1}{4}$ ;  $\cos L = \frac{11}{12}$ ;  $\operatorname{tg} R = \frac{12}{11}$ ;  $\sin O = \frac{7}{15}$ ;  $\cos Q = \frac{\sqrt{13}}{4}$ .
19. Înlocuiți \* cu semnele  $>$  sau  $<$ :
- a)  $\cos 5^\circ * \cos 7^\circ$ ; d)  $\cos 113^\circ * \cos 115^\circ$ ;
- b)  $\sin 82^\circ * \sin 79^\circ$ ; e)  $\sin 178^\circ * \sin 108^\circ$ ;
- c)  $\operatorname{tg} 29^\circ * \operatorname{tg} 32^\circ$ ; f)  $\operatorname{tg} 97^\circ * \operatorname{tg} 107^\circ$ .
20. Calculați valorile expresiilor:
- a)  $\sin 45^\circ - \cos 60^\circ \cdot \cos 90^\circ + \cos 135^\circ$ ;
- b)  $\sin 30^\circ \cdot \cos 150^\circ - \sin^2 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 120^\circ$ .

21. Calculați valorile expresiilor:

a)  $\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ - \cos^2 120^\circ + \sin 135^\circ \cdot \cos 90^\circ$ ;

b)  $\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg}^2 135^\circ + \cos 150^\circ$ .

22. Găsiți unghiurile  $\triangle ABC$ , dacă  $\sin A = 0,5$ , iar  $\cos B = -0,5$ .

23. Aflați unghiurile  $\triangle ABC$ , dacă  $\operatorname{tg} A = -1$ , iar  $\sin C = \frac{1}{2}$ .

24. Aflați unghiurile rombului  $ABCD$ , dacă  $\cos D = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

25. Stabiliți corespondența dintre valorile expresiilor (1–4) și valorile egale lor ale expresiilor (A–E).

1  $\sin 90^\circ$

A  $\cos 60^\circ$

2  $\cos 30^\circ$

B  $\sin 120^\circ$

3  $\sin 150^\circ$

C  $\cos 90^\circ$

4  $\cos 45^\circ$

D  $\cos 0^\circ$

E  $\sin 135^\circ$

26. Aflați, folosindu-se de calculator: a)  $\sin 3^\circ$ ,  $\sin 4,8^\circ$ ,  $\sin 56,7^\circ$ ; b)  $\cos 64,25^\circ$ ,  $\cos 25^\circ$ ,  $\cos 45,8^\circ$ ; c)  $\operatorname{tg} 15^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 23,5^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 81,1^\circ$ ; d)  $\sin 25^\circ 1'$ ,  $\cos 3^\circ 7'$ ,  $\operatorname{tg} 56^\circ 36'$ .

27. Folosindu-se de calculator sau tabele, aflați unghiul, dacă se știe:

a) cosinusul lui este egal cu:  $0,325$ ;  $0,78$ ;  $\frac{2}{3}$ ;  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

b) tangenta lui este egală cu:  $0,726$ ;  $2,605$ ;  $\frac{1}{5}$ ;  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .

28. Aflați unghiul ascuțit, al cărui sinus este egal cu:

a)  $0,26$ ;    b)  $\frac{3}{7}$ ;    c)  $0,685$ ;    d)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

## B

29. Folosind figura 12 aflați sinusurile, cosinusurile, tangentele unghiurilor  $A$ ,  $B$ ,  $C$  și  $D$  ale patrulaterului  $ABCD$ , dacă  $BC \parallel AD$ .

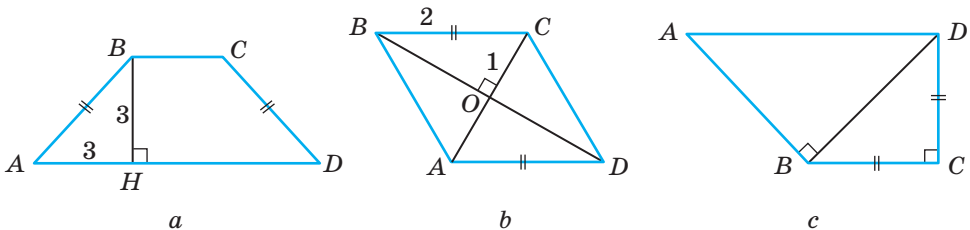


Fig.12

30. Cosinusul unuia din unghiurile triunghiului isoscel este egal cu  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Aflați unghiurile triunghiului.
31. Sinusul unuia din unghiurile triunghiului isoscel este egal cu 0,5. Aflați unghiurile triunghiului. Câte soluții are problema?
32. Aflați sinusurile, cosinusurile și tangentele trapezului isoscel, ale cărui baze sunt egale cu 10 cm și 16 cm, iar latura laterală are 6 cm.
33. Găsiți sinusurile, cosinusurile și tangentele unghiurilor ale unui romb, al cărui perimetru este egal cu 16 cm, iar aria cu  $8 \text{ cm}^2$ .
34. Aflați laturile laterale ale trapezului dreptunghic, dacă cosinusul al unuia din unghiurile lui este egal cu  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ , iar diferența bazelor este egală cu  $a$ .
35. **Problemă deschisă.** De stabilit tipul triunghiului  $ABC$ , dacă  $\cos B \dots$ .
36. Construiți unghiul al cărui cosinus este egal cu  $-\frac{3}{4}$ . Aflați sinusul și tangenta acestui unghi.
37. Construiți unghiul sinusul căruia este de două ori mai mare decât cosinusul lui.
38. Construiți unghiul al cărui cosinus este de trei ori mai mare decât sinusul.
39. Sinusul unghiului este de 5 ori mai mic decât cosinusul lui. Aflați tangenta acestui unghi.
40. Laturile triunghiului sunt egale cu 13 cm, 14 cm și 15 cm. Găsiți sinusurile, cosinusurile și tangentele unghiurilor celui mai mic și celui mai mare ale triunghiului.

### ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

41. Desenați pe hârtie milimetrică o semicircumferință de raza 100 mm și împărțiți-o cu ajutorul raportului în 18 părți egale. Folosindu-se de acest desen:
- arătați că în cazul majorării unghiului de la  $0^\circ$  până la  $90^\circ$  sinusul lui se va mări de la 0 până la 1, iar o dată cu mărirea unghiului de la  $90^\circ$  până la  $180^\circ$  sinusul lui se va micșora de la 1 până la 0;
  - arătați că în cazul măririi unghiului de la  $0^\circ$  până la  $90^\circ$  cosinusul lui se va micșora de la 1 până la 0, iar concomitent cu mărirea unghiului de la  $90^\circ$  până la  $180^\circ$  cosinusul lui se va micșora de la 0 până la -1;
  - alcătuiți tabelul valorilor aproximative ale sinusului și cosinusului pentru unghiurile  $0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, \dots, 180^\circ$ .

### PROBLEME PENTRU REPETARE

42. Aflați catetele triunghiului dreptunghic, dacă ele sunt proporționale cu numerele 2 și 3, iar ipotenuza este egală cu  $4\sqrt{13}$  cm.
43. Aria triunghiului echilateral este egală cu  $16\sqrt{3}$  cm. Aflați perimetrul lui.

44. Unul din unghiurile triunghiului isoscel este egal cu  $120^\circ$ . Găsiți perimetrul triunghiului, dacă înălțimea, coborâtă pe bază, este egală cu  $h$ .
45. Într-o circumferință sunt duse două diametre  $AB$  și  $CD$  reciproc perpendiculare. Aflați raza circumferinței, dacă  $AC=m$ .

## § 2

## Identități trigonometrice

Să examinăm cele mai importante formule care leagă sinusul, cosinusul și tangenta aceluiași unghi  $\alpha$ . Fie  $\alpha$  – unghi ascuțit. Pe circumferința unitate notăm punctul  $M$  astfel ca  $\angle MOA = \alpha$  (fig.13). Atunci  $MH = \sin \alpha$ ,  $OH = \cos \alpha$ ,  $OM = 1$ . Conform teoremei Pitagora  $MH^2 + OH^2 = OM^2$ , sau

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (*)$$

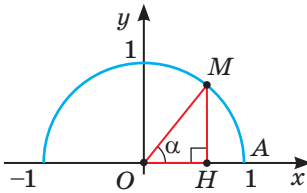


Fig.13

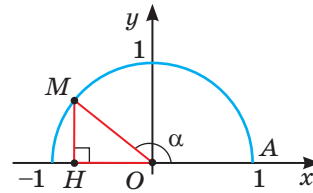


Fig.14

Dacă unghiul  $\alpha$  este obtuz (fig.14), atunci din triunghiul dreptunghic  $OMH$  ( $OM = 1$ ,  $MH = \sin \alpha$ ,  $OH = -\cos \alpha$ ) conform teoremei Pitagora avem:  $MH^2 + HO^2 = OM^2$ , sau  $\sin^2 \alpha + (-\cos \alpha)^2 = 1$ , de unde  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . Egalitatea (\*) este justă și în acest caz.

Dacă  $\alpha = 0^\circ$ , atunci  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = 1$ ; dacă  $\alpha = 90^\circ$ , atunci  $\sin \alpha = 1$ ,  $\cos \alpha = 0$ ; dacă  $\alpha = 180^\circ$ , atunci  $\sin \alpha = 0$ ,  $\cos \alpha = -1$ .

În fiecare din aceste cazuri egalitatea (\*) este justă.

Așadar, pentru fiecare  $\alpha$ , dacă  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ,

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Aceasta-i **identitatea trigonometrică fundamentală**. Ea leagă sinusul și cosinusul aceluiași unghi și oferă posibilitatea de-a exprima una din aceste funcții trigonometrice prin cealaltă:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

În cealaltă formulă înaintea radicalului se pune semnul „-”, dacă unghiul  $\alpha$  este obtuz. Unghiuri, mai mari decât cel desfășurat, noi nu le examinăm.

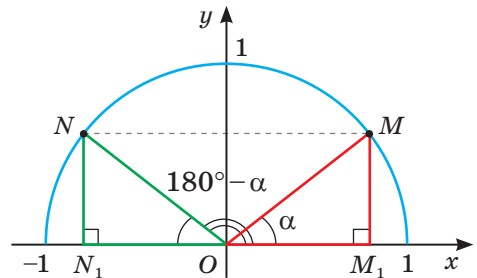


Fig.15

Să atragem atenția la punctele  $N$  și  $M$  ale circumferinței unitate, care corespund unghiurilor  $180^\circ - \alpha$  și  $\alpha$  (fig.15). Ordonatele lor  $NN_1$  și  $MM_1$  sunt egale, iar abscisele  $ON_1$  și  $OM_1$  se deosebesc numai cu semnele.

Așadar, totdeauna

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha.$$

Cu aceste formule se poate exprima sinusul și cosinusul unghiului obtuz  $180^\circ - \alpha$  prin sinusul și cosinusul unghiului ascuțit  $\alpha$ . De exemplu:

$$\sin 147^\circ = \sin(180^\circ - 33^\circ) = \sin 33^\circ,$$

$$\cos 105^\circ = \cos(180^\circ - 75^\circ) = -\cos 75^\circ.$$

Să demonstrăm următoarele formule:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha.$$

Admitem că  $\angle MOA = \alpha$ ,  $\angle TOA = 90^\circ - \alpha$  (fig.16). Atunci  $\angle POT = \alpha$ . După ipoteză și unghiul ascuțit  $\triangle MOH = \triangle TOP$ . De aici  $PT = MH$ ,  $OP = OH$ .

Deoarece  $PT = \cos(90^\circ - \alpha)$ ,  $MH = \sin \alpha$ , rezultă  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ . Deoarece  $OP = \sin(90^\circ - \alpha)$ ,  $OH = \cos \alpha$ , avem  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ .

Cele două formule demonstrate permit exprimarea sinusului și cosinusului a oricărui unghi ascuțit mai mare decât  $45^\circ$ , prin cosinusul și sinusul unghiului mai mic de  $45^\circ$ . Așadar, valorile sinusurilor ale unghiurilor de la  $0^\circ$  până la  $45^\circ$  sunt în același timp valorile cosinusurilor de la  $90^\circ$  până la  $45^\circ$  (vezi tabelul de pe forța).

**Exemplu.**

$$\sin 10^\circ = \cos 80^\circ \approx 0,174;$$

$$\cos 50^\circ = \sin 40^\circ \approx 0,643.$$

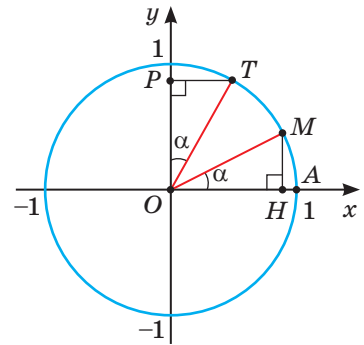


Fig.16

## PENTRU CEI CURIOSI

Deoarece,  $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$  și  $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ , avem

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{\sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

Deoarece  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$  și  $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ , avem

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

Toate aceste egalități sunt juste cu condiția că numitorii sunt diferiți de zero, adică dacă există tangentele și cotangentele. Atunci au loc egalitățile:

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$



## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Formulați identitatea trigonometrică fundamentală.
2. Care trebuie să fie părțile din dreapta ale identităților: a)  $\sin(90^\circ - \alpha) = \dots$ ; b)  $\cos(90^\circ - \alpha) = \dots$ ; c)  $\sin(180^\circ - \alpha) = \dots$ ; d)  $\cos(180^\circ - \alpha) = \dots$ ?
3. Cum se schimbă valorile  $\sin(90^\circ - \alpha)$ , dacă vom mări valorile lui  $\alpha$  de la  $0^\circ$  până la  $90^\circ$ ?
4. Cum variază valorile lui  $\cos(180^\circ - \alpha)$ , dacă valorile lui  $\alpha$  de le mărit de la  $0^\circ$  până la  $90^\circ$ ?

## EFFECTUĂM ÎMPREUNĂ

- 1 Se știe că  $\cos \alpha = 0,6$ , aflați  $\sin \alpha$  și  $\operatorname{tg} \alpha$ .
  - Se cunoaște că  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ . Deoarece sinusul fiecărui unghi  $\alpha$ , dacă  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ , este număr pozitiv, atunci  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ .  
 Dacă  $\cos \alpha = 0,6$ , atunci  $\sin \alpha = \sqrt{1 - 0,6^2} = \sqrt{0,64} = 0,8$ ,  
 dar  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{0,8}{0,6} = 1 \frac{1}{3}$ .  
 Deci,  $\sin \alpha = 0,8$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = 1 \frac{1}{3}$ .
- 2 Demonstrați că atunci, când  $\alpha \neq 0^\circ$ , avem  $\sin \alpha : \cos(90^\circ - \alpha) = 1$ .
  - $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ . De aceea  $\sin \alpha : \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha : \sin \alpha = 1$ .
- 3 Calculați valoarea expresiei  $\sin 77^\circ \cdot \cos 13^\circ - \sin 167^\circ \cdot \cos 77^\circ$ .
  - $\sin 77^\circ \cdot \cos 13^\circ - \sin 167^\circ \cdot \cos 77^\circ = \sin(90^\circ - 13^\circ) \cdot \cos 13^\circ + \sin(180^\circ - 13^\circ) \times \times \cos(90^\circ - 13^\circ) = \cos 13^\circ \cdot \cos 13^\circ + \sin 13^\circ \cdot \sin 13^\circ = \cos^2 13^\circ + \sin^2 13^\circ = 1$ .

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

46. Aflați  $\cos \alpha$  și  $\sin \alpha$ , dacă  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ .
47. Aflați  $\sin \alpha$ , dacă  $\cos \alpha = -0,5$ .
48. Știind că  $\cos \alpha = 0,7$ , găsiți:
  - a)  $\sin(90^\circ - \alpha)$ ; b)  $\cos(180^\circ - \alpha)$ ; c)  $\cos(90^\circ - \alpha)$ .
49. Simplificați: a)  $\sin(180^\circ - 35^\circ)$ ; b)  $\cos(180^\circ - 43^\circ)$ ; c)  $\operatorname{tg}(180^\circ - 20^\circ)$ ; d)  $\sin(90^\circ - 23^\circ)$ ; e)  $\cos(90^\circ - 27^\circ)$ ; f)  $\operatorname{tg}(90^\circ - 14^\circ)$ .

50. Terminați transformările: a)  $\sin 140^\circ = \sin (180^\circ - 40^\circ) = \dots$ ;  
 b)  $\cos 126^\circ = \cos (180^\circ - 54^\circ) = \dots$ ; c)  $\sin 85^\circ = \sin (90^\circ - 5^\circ) = \dots$ ;  
 d)  $\cos 62^\circ = \cos (90^\circ - 28^\circ) = \dots$ .
51. Care din afirmații este falsă? De ce?  
 a)  $\sin 136^\circ = \sin (180^\circ - 44^\circ) = \sin 44^\circ$ ;  
 b)  $\cos 147^\circ = \cos (180^\circ - 33^\circ) = \cos 33^\circ$ ;  
 c)  $\sin 75^\circ = \sin (90^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$ ;  
 d)  $\cos 153^\circ = \cos (180^\circ - 27^\circ) = -\sin 27^\circ$ .

## A

52. Aflați sinusul și tangenta unghiului  $\alpha$ , dacă:

a)  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ;      b)  $\cos \alpha = 0,2$ ;      c)  $\cos \alpha = -0,5$ .

53. Aflați cosinusul și tangenta unghiului ascuțit  $\alpha$ , dacă:

a)  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ ;      b)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;      c)  $\sin \alpha = 0,72$ .

54. Aflați cosinusul și tangenta unghiului obtuz  $\alpha$ , dacă:

a)  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ ;      b)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ;      c)  $\sin \alpha = 0,28$ .

55. Care numere trebuie să fie în pătrățelele goale ale tabelului?

$\sin \alpha$	0	0,5	0,6	0,8	1
$\sin(90^\circ - \alpha)$					
$\cos(90^\circ - \alpha)$					
$\sin(180^\circ - \alpha)$					
$\cos(180^\circ - \alpha)$					

56. Exprimați prin funcții trigonometrice de unghi ascuțit:

a)  $\sin 117^\circ$ ;      b)  $\cos 142^\circ$ ;      c)  $\operatorname{tg} 118^\circ$ ;      d)  $\sin 136^\circ$ .

57. Exprimați prin funcții trigonometrice de unghi mai mic decât  $45^\circ$ :

a)  $\cos 130^\circ$ ;      b)  $\sin 145^\circ$ ;      c)  $\operatorname{tg} 87^\circ$ ;      d)  $\cos 95^\circ$ .

58. Din egalitățile expuse scrieți-le numai pe cele juste:

a)  $\sin 130^\circ = \sin 50^\circ$ ;      d)  $\operatorname{tg} 117^\circ = \operatorname{tg} 27^\circ$ ;      g)  $\cos 126^\circ = -\cos 54^\circ$ ;  
 b)  $\sin 129^\circ = -\cos 39^\circ$ ;      e)  $\cos 87^\circ = \sin 3^\circ$ ;      h)  $\cos 149^\circ = -\sin 31^\circ$ ;  
 c)  $\operatorname{tg} 118^\circ = -\operatorname{tg} 62^\circ$ ;      f)  $\cos 113^\circ = \cos 67^\circ$ ;      i)  $\operatorname{tg} 29^\circ = -\operatorname{tg} 151^\circ$ .

59. Cosinusul unghiului ascuțit al unui paralelogram este egal cu 0,25. Cu ce este egal cosinusul unghiului obtuz al lui? Dar sinusul?

60. Cosinusul unghiului obtuz al rombului este egal cu -0,7. Cu ce este egal cosinusul unghiului ascuțit al lui? Dar sinusul?

61. Cu ajutorul tabelului de pe forțaș aflați:
- $\sin 12^\circ$ ,  $\sin 40^\circ$ ,  $\sin 145^\circ$ ,  $\sin 162^\circ$ ,  $\sin 155^\circ$ ;
  - $\cos 12^\circ$ ,  $\cos 50^\circ$ ,  $\cos 159^\circ$ ,  $\cos 183^\circ$ ,  $\cos 100^\circ$ ;
  - $\operatorname{tg} 12^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 18^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 142^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 148^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 170^\circ$ .
62. Stabiliți corespondența dintre valorile sinusului a unghiului  $\alpha$  (1-4) și valorile corespunzătoare ale cosinusului acestui unghi (A-E).
- |   |  |   |                        |
|---|--|---|------------------------|
| 1 | 0,5 (unghiul $\alpha$ - ascuțit)           | A | -0,8                   |
| 2 | 0,6 (unghiul $\alpha$ - obtuz)             | B | $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  |
| 3 | $\frac{4}{5}$ (unghiul $\alpha$ - ascuțit) | C | $\frac{\sqrt{3}}{2}$   |
| 4 | $\frac{1}{3}$ (unghiul $\alpha$ - obtuz)   | D | $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ |
|   |  | E | 0,6                    |
63. Stabiliți corespondența dintre valorile expresiilor (1-4) și valorile expresiilor (A-E).
- |   |                  |   |                  |
|---|------------------|---|------------------|
| 1 | $\sin 10^\circ$  | A | $\sin 44^\circ$  |
| 2 | $\cos 46^\circ$  | B | $\sin 57^\circ$  |
| 3 | $\sin 123^\circ$ | C | $\cos 134^\circ$ |
| 4 | $\cos 45^\circ$  | D | $\cos 80^\circ$  |
|   |                  | E | $\sin 45^\circ$  |

## B

64. Calculați:
- $\sin 29^\circ \cdot \cos 61^\circ - \cos 29^\circ \cdot \cos 151^\circ$ ;
  - $1 - \sin 37^\circ \cdot \sin 143^\circ - \cos^2 37^\circ$ ;
  - $\operatorname{tg} 43^\circ \cdot \cos 137^\circ \cdot \cos 47^\circ - \cos 43^\circ \cdot \sin 47^\circ$ .
65. Înlocuiți \* cu unul din semnele  $>$ ,  $<$  sau  $=$ :
- $\sin 12^\circ * \cos 80^\circ$ ;
  - $\cos 54^\circ * \sin 36^\circ$ ;
  - $\operatorname{tg} 36^\circ * \operatorname{tg} 112^\circ$ ;
  - $\cos 36^\circ * \sin 31^\circ$ ;
  - $\sin 115^\circ * \cos 27^\circ$ ;
  - $\cos 139^\circ * \sin 140^\circ$ .
66. Aflați măsurile unghiurilor obtuze  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$ , dacă se știe:
- $\sin \alpha = 0,156$ ;  $\sin \beta = 0,309$ ;  $\sin \gamma = 0,719$ ;
  - $\cos \alpha = -0,921$ ;  $\cos \beta = -0,998$ ;  $\cos \gamma = -0,777$ ;
  - $\operatorname{tg} \alpha = -0,111$ ;  $\operatorname{tg} \beta = -1,306$ ;  $\operatorname{tg} \gamma = -2,050$ .
67. Demonstrați că: a)  $\sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \cos 45^\circ$ ;
- b)  $\cos 140^\circ = -\cos 40^\circ = -\sin 50^\circ$ .
68. Demonstrați identitățile:
- $\sin^2 \alpha - \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ - \alpha) - 1 = 0$ ;
  - $1 + \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ - \alpha) \cdot \sin \alpha = \cos^2(180^\circ - \alpha)$ .

69. Demonstrați, că: a)  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ; b)  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ .

70. Aplicând formulele din nr. 69, aflați:

- a)  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  și  $\operatorname{ctg} \alpha$ , dacă  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ ;  
 b)  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  și  $\operatorname{tg} \alpha$ , dacă  $\operatorname{ctg} \alpha = 2$ .

71. Simplificați expresiile:

- a)  $\sin^2 \alpha + \sin^2 (90^\circ - \alpha) + \operatorname{tg}^2 (180^\circ - \alpha)$ ;  
 b)  $(1 - \cos^2 (90^\circ - \alpha)) \operatorname{tg}^2 \alpha + \sin^2 (90^\circ - \alpha)$ ;  
 c)  $\frac{\operatorname{tg}^2 (180^\circ - \alpha)}{\sin^2 \alpha} - 1$ ; d)  $\frac{\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{\sin^2 (180^\circ - \alpha)}{\sin^2 (90^\circ - \alpha)}$ .

72. Cosinusul unghiului ascuțit al unui trapez dreptunghic este egal cu  $\frac{5}{7}$ . Aflați sinusurile și cosinusurile ale unghiurilor trapezului.

73. Cosinusul unghiului ascuțit al paralelogramului este egal cu  $a$ . Aflați sinusul unghiului obtuz al lui.

74. Sinusul unghiului obtuz al rombului este egal cu  $a$ . Aflați cosinusurile ale unghiurilor lui. Pentru care valori ale lui  $a$  problema are soluții?

75. Demonstrați: a) sinusurile ale oricăror două unghiuri ale paralelogramului sau ale trapezului isoscel sunt egale; b) suma cosinusurilor a tuturor unghiurilor paralelogramului sau a trapezului este egală cu zero.

### ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

76. Desenați un paralelogram arbitrar  $ABCD$ . Măsurați cu ajutorul raportului unghiurile lui și aflați a lor sinusuri, cosinusuri și tangente. Datele obținute introduceți-le în tabel. Ce concluzie se poate face?

	$\alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$\angle A$				
$\angle B$				
$\angle C$				
$\angle D$				

### PROBLEME PENTRU REPETARE

77. Aflați unghiurile triunghiului isoscel, dacă tangenta unuia din ei este egală cu  $-1$ .

78. Un sportiv aleargă în direcția de sud 4 km, apoi cotește spre nord și mai aleargă 3 km. Aflați: a) la ce distanță de la punctul inițial a ajuns sportivul; b) cu ce unghi s-a mutat sportivul în raport cu mișcarea în direcția de sud?

79. Latura rombului este egală cu  $a$ , iar unghiul ascuțit este  $\alpha$ . Aflați diagonalele rombului.

80. Aflați semnul produsului: a)  $\sin 146^\circ \cdot \cos 108^\circ \cdot \cos 67^\circ \cdot \operatorname{tg} 145^\circ$ ;  
 b)  $\operatorname{tg} 78^\circ \cdot \sin 92^\circ \cdot \sin 167^\circ \cdot \operatorname{tg} 178^\circ \cdot \cos 83^\circ$ .

# § 3

## Координате картезиене

Amintim unele noțiuni deja cunoscute pentru voi. Dreapta pe care este aleasă direcția, originea și segmentul unitate se numește **dreaptă de coordonate**. Fiecărui punct al dreptei de coordonate îi corespunde un singur număr real.

Două drepte reciproc perpendiculare care se intersectează în originea lor comună și au segmente unitate egale se numește **sistem de coordonate rectangular**. Originea comună - punctul, în care se intersectează axele de coordonate, se numește **originea de coordonate**. Axa orizontală - axa  $OX$  este numită **axa absciselor**, iar axa verticală - axa  $OY$  - **axa ordonatelor**.

Planul, în care este definit sistemul de coordonate, se numește **plan de coordonate**.

Axele de coordonate împart planul de coordonate în patru cadrane, în fiecare din ele se păstrează semnele ambelor coordonate (fig.17).

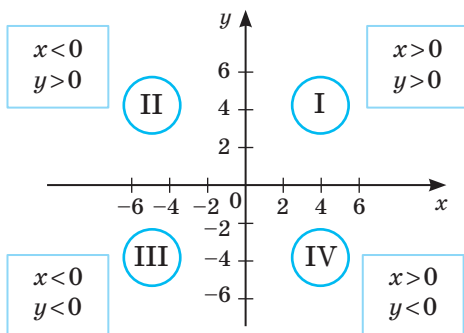


Fig.17

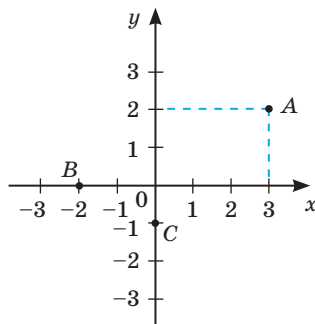


Fig.18

Poziția punctului pe planul de coordonate se dă cu două numere – cu coordonatele lui. De exemplu, punctul  $A$  are abscisa 3 și ordonata 2 (fig.18). Se scrie așa:  $A(3;2)$ . Punctul  $O$  – originea de coordonate are coordonatele 0 și 0. Punctele situate pe axa  $OX$ , au ordonatele egale cu zero ( $y=0$ ); punctele, care sunt situate pe axa  $OY$  au abscisele ce sunt egale cu zero ( $x=0$ ). În figura 18 acestea sunt punctele  $B(-2; 0)$  și  $C(0; -1)$ .

Scrierea  $X(m; n)$  înseamnă: punctul  $X$  are coordonatele  $m$  (abscisa) și  $n$  (ordonata).

Fiecărui punct al planului de coordonate îi corespunde o singură pereche de numere reale, iar fiecărei perechi de numere reale – un singur punct al planului de coordonate. Datorită corespondenței reciproc univoce dintre perechile de numere reale și punctele planului de coordonate dependența dintre punctele planului de coordonate poate fi exprimată prin corelații algebrice dintre coordonatele lor.

А это позволяет решать геометрические задачи *методом координат*. Для этого необходимо знать свойства координат.

### ТЕОРЕМА 1

**Каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.**

То есть, если точки  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$  — концы отрезка  $AB$ , а  $C(x; y)$  — его середина, то:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad \text{то есть } C\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

### ДЕМОНСТРАЦИЯ.

Пусть точки  $A$  и  $B$  расположены так, как показано на рис. 19. Проведем через них прямые, параллельные осям координат. Вместе с осями они образуют трапеции  $ABB_yA_y$  и  $ABB_xA_x$ , в которых

$$AA_y = x_1, \quad BB_y = x_2, \quad AA_x = y_1, \quad BB_x = y_2.$$

Поскольку  $C$  — середина отрезка  $AB$ , то  $CC_y$  и  $CC_x$  — средние линии этих трапеций. Согласно теореме о средней линии трапеции имеем:

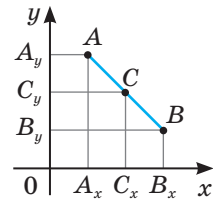


Fig.19

$$CC_y = \frac{AA_y + BB_y}{2}; \quad CC_x = \frac{AA_x + BB_x}{2}, \quad \text{или } CC_y = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad CC_x = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Получим:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда отрезок  $AB$  не параллелен ни одной из осей координат и не пересекает их. После рассмотрения возможных случаев (проделайте это самостоятельно) приходим к общему выводу: если  $C(x; y)$  — середина отрезка с концами  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$ , то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad \square$$

**Пример.** Середина отрезка с концами  $A(-3; 5)$  и  $B(3; 7)$  — точка  $C(0; 6)$ , потому что

$$\frac{-3 + 3}{2} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{5 + 7}{2} = 6.$$

## PENTRU CEI CURIOȘI

Rezolvând problema cu **metoda coordonatelor** figurile examinate sunt amplasate în planul de coordonate. Atribuind unor puncte aparte ale figurilor coordonate, iar liniilor-ecuații, sunt calculate coordonatele altor puncte, sunt deduse ecuațiile altor linii. Confruntând coordonatele inițiale și altele coordonate ale punctelor cu ecuațiile, este găsit răspunsul.

**Problemă.** Demonstrați că mijlocurile segmentelor, care unesc mijlocurile laturilor opuse ale unui patrulater, coincid.

**Rezolvare.** Admitem, că  $ABCD$  — patrulater arbitrar,  $E, K, F, P$  — mijlocurile laturilor lui,  $M$  și  $M_1$  — mijlocurile segmentelor  $EF$  și  $KP$  (fig.20). Să demonstrăm că punctele  $M$  și  $M_1$  coincid.

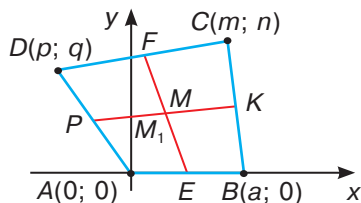


Fig.20

Introducem sistemul de coordonate în așa mod, ca originea lui să fie punctul  $A$ , iar latura  $AB$  să fie situată pe axa  $x$ . Notăm coordonatele vârfurilor ale patrulaterului dat:  $A(0; 0)$ ,  $B(a; 0)$ ,  $C(m; n)$ ,  $D(p; q)$ . Exprimăm prin ele coordonatele mijlocurilor ale segmentelor  $AB$ ,  $CD$ ,  $BC$ ,  $AD$ ,  $KP$ ,  $EF$ :  $E\left(\frac{a}{2}; 0\right)$ ,  $F\left(\frac{m+p}{2}; \frac{n+q}{2}\right)$ ,  $K\left(\frac{a+m}{2}; \frac{n}{2}\right)$ ,  $P\left(\frac{p}{2}; \frac{q}{2}\right)$ ,  $M\left(\frac{a+m+p}{4}; \frac{n+q}{4}\right)$ ,  $M_1\left(\frac{a+m+p}{4}; \frac{n+q}{4}\right)$ .

Coordonatele corespunzătoare ale punctelor  $M$  și  $M_1$  sunt egale. Deci, aceste puncte coincid.

Pentru a rezolva probleme mai complicate se utilizează teorema generală.

### Teorema 2

Dacă punctul  $C(x_C; y_C)$  împarte segmentul  $AB$  în raportul  $AC:CB = \lambda$ , atunci

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda} \quad \text{și} \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}.$$

Demonstrați-o independent.

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSCĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Ce se numește sistem de coordonate?
2. Ce se numește plan de coordonate?
3. Ce se numește origine a sistemului de coordonate?
4. Cum sunt numite axele de coordonate?
5. Ce sunt numite coordonate ale punctului?
6. Formulați și demonstrați teorema despre coordonatele mijlocului segmentului.



## EFACTUĂM ÎMPREUNĂ

- 1 Punctul  $C$  – mijlocul segmentului  $AB$ . Aflați coordonatele punctului  $B$ , dacă  $A(2; -7)$ ,  $C(4; 1)$ .

- Deoarece  $C$  — mijlocul segmentului  $AB$ , rezultă că:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ și } y_C = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Atunci  $4 = \frac{2 + x_B}{2}$ ;  $2 + x_B = 8$ ;  $x_B = 6$ . Analogic  $1 = \frac{-7 + y_B}{2}$ ;

$-7 + y_B = 2$ ;  $y_B = 9$ .

Deci,  $B(6; 9)$ .

- 2 Demonstrați că patrulaterul  $ABCD$  este paralelogram, dacă  $A(1; 2)$ ,  $B(6; -2)$ ,  $C(-3; -4)$ ,  $D(-8; 0)$  (fig.21).

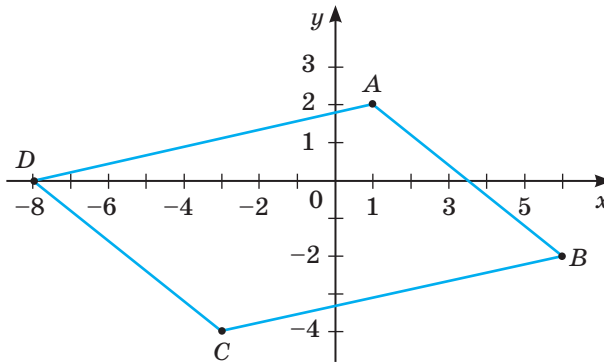


Fig.21

- Patrulaterul, în care diagonalele se intersectează și sunt împărțite în jumătăți de către punctul lor de intersecție, este paralelogram. Să demonstrăm că pentru patrulaterul dat acest criteriu se realizează. Admitem că  $M$  este mijlocul diagonalei  $AC$ , atunci:

$$x_M = \frac{1-3}{2} = -1, \quad y_M = \frac{2-4}{2} = -1. \text{ Deci, } M(-1; -1).$$

Dacă  $K$  – mijlocul diagonalei  $BD$ , atunci

$$x_K = \frac{6-8}{2} = -1, \quad y_K = \frac{-2+0}{2} = -1. \text{ Deci, } K(-1; -1).$$

Punctele  $M$  și  $K$  au aceleași coordonate. Aceasta înseamnă că punctele  $M$  și  $K$  coincid, adică diagonalele patrulaterului  $ABCD$  se intersectează în punctul cu coordonatele  $(-1; -1)$  și sunt împărțite în acest punct în jumătăți. Deci,  $ABCD$  - paralelogram.

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFACTUAȚI ORAL

81. Declinați îmbinările de cuvinte: *ordonata punctului*, *axele de coordonate*, *axa absciselor*.
82. Care din punctele  $A(0; 2)$ ,  $B(-3; 0)$ ,  $C(2; 7)$ ,  $D(0; 4)$ ,  $E(2; 0)$ ,  $F(-7; 0)$ ,  $O(0; 0)$  sunt situate pe: a) axa  $OX$ ; b) axa  $OY$ ; c) pe axele  $OX$  și  $OY$  în același timp?
83. Sunt date punctele:  $A(2; -3)$ ,  $B(4; 6)$ ,  $C(-5; 7)$ ,  $D(-1; -3)$ . Care din segmentele  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $AD$ ,  $AC$ ,  $BD$  intersectează: a) axa  $OX$ ; b) axa  $OY$ ; c) fiecare din axe? Care din aceste segmente sunt paralele cu axa  $OX$ ?
84. Sunt date punctele:  $O(0; 0)$ ,  $A(4; 6)$ ,  $B(-2; 8)$ ,  $M(m; n)$ . Aflați coordonatele mijlocului segmentelor: a)  $OA$ ; b)  $OB$ ; c)  $OM$ ; d)  $AB$ .
85. Oare este punctul  $K(-3; 7)$  mijlocul segmentului  $AB$ , dacă  $A(-9; 4)$ ,  $B(3; 10)$ ; punctul  $P(-6; 5)$  — mijlocul segmentului  $AK$ ? Găsiți coordonatele mijlocului al segmentului  $BK$ .

### A

86. Notați în planul de coordonate punctele  $A(4; 1)$ ,  $B(-2; -3)$ ,  $C(0; 3)$ ,  $D(-1; 2)$ ,  $E(4; 0)$ .
87. Construiți în planul de coordonate segmentul, ale cărui extremități sunt punctele  $A(3; -1)$  și  $B(-2; 4)$ . Aflați coordonatele punctelor de intersecție ale segmentului  $AB$  cu axele de coordonate.
88. Folosind figura 22 aflați coordonatele vârfurilor ale dreptunghiului  $ABCD$ , ale cărui laturi sunt paralele cu axele de coordonate.

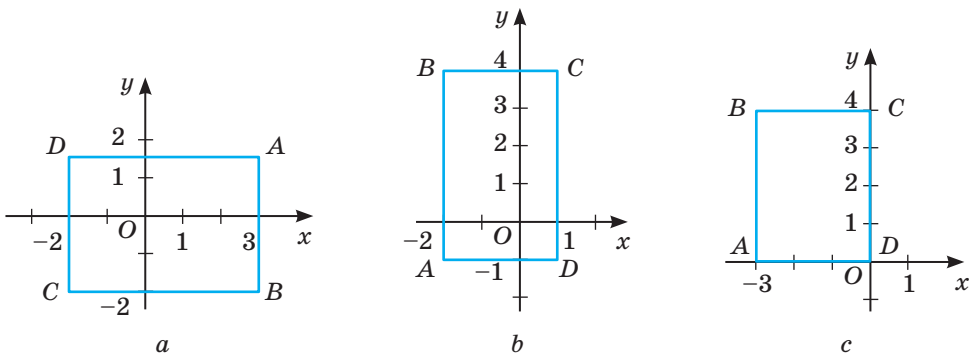


Fig. 22

89. Construiți dreptunghiul ale cărui trei vârfuri sunt situate în punctele  $(2; 5)$ ,  $(-1; 5)$ ,  $(-1; -3)$ . Aflați coordonatele celui de-al patrulea vârf.

90. Latura pătratului are lungimea de 5 unități. Unul din vârfurile lui este situat în originea de coordonate, iar celelalte două - pe axele de coordonate și au coordonate nenegative. Aflați coordonatele ale tuturor vârfurilor pătratului.
91. Punctul de intersecție al diagonalelor rombului coincide cu originea de coordonate, iar diagonalele lui sunt situate pe axele de coordonate. Aflați coordonatele vârfurilor ale rombului, dacă lungimile diagonalelor constituie 6 unități și 10 unități. Câte soluții are problema?
92. Găsiți coordonatele mijlocului al segmentului  $AB$ , dacă  $A(1; 3)$ ,  $B(4; 5)$ .
93. Copiați tabelul în caiet. În pătrățelele goale indicați coordonatele mijlocurilor ale segmentelor corespunzătoare.  
*Model:* mijlocul segmentului  $XB$  – punctul cu coordonatele  $(1; 4)$ .

	$A(0; 4)$	$B(2; 6)$	$C(-2; 5)$
$X(0; 2)$		$(1; 4)$	
$Y(-4; 6)$			
$Z(-6; 12)$			

94.  $BM$  — meridiană a  $\triangle ABC$ . Aflați coordonatele punctului  $M$ , dacă  $A(-1; 15)$ ,  $C(7; -9)$ .
95.  $M$  — mijlocul segmentului  $AB$ . Aflați coordonatele punctului  $B$ , dacă  $A(1; 4)$ ,  $M(2; -3)$ .
96.  $O(4; -1)$  — punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului  $ABCD$ . Găsiți coordonatele punctelor a)  $C$ , dacă  $A(-2; 3)$ ; b)  $B$ , dacă  $D(6; -4)$ .
97. Segmentele  $AB$  și  $CD$  se intersectează în punctul  $M$ , care este mijlocul fiecăruia din ei. Aflați coordonatele punctelor  $M$  și  $D$ , dacă  $A(-2; 5)$ ,  $B(4; 1)$ ,  $C(-1; -3)$ .
98. Sunt date punctele  $A(-1; 2)$ ,  $B(2; 7)$ ,  $C(4; 3)$ . Găsiți coordonatele extremităților ale liniilor medii a  $\triangle ABC$ .

## B

99.  $MN$  — linia medie a  $\triangle ABC$ ,  $MN \parallel AC$  (fig.23). Aflați coordonatele punctelor  $A$  și  $B$ , dacă  $C(2; 6)$ ,  $M(-4; 2)$ ,  $N(4; 0)$ .

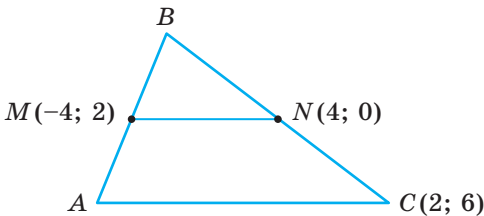


Fig.23

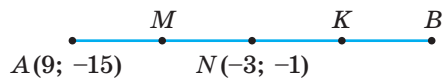


Fig.24

100. Punctele  $K, P, T$  împart segmentul  $AB$  în 4 părți egale. Aflați coordonatele punctelor  $K, P, T$ , dacă  $A(2; 3)$  și  $B(6; -4)$ .

- 101.** Segmentul  $AB$  este împărțit în patru părți egale:  $AM = MN = NK = KB$  (fig.24). Aflați coordonatele punctelor  $M, K, B$ , dacă  $A(9; -15)$ ,  $N(-3; -1)$ .
- 102.** Sunt date punctele  $A(-3; 4)$ ,  $B(a; 2)$ ,  $C(5; b)$ . Pentru care valori ale lui  $a$  și  $b$ : a)  $A$  — mijlocul lui  $BC$ ; b)  $B$  — mijlocul lui  $AC$ ; c)  $C$  — mijlocul lui  $AB$ ?
- 103.** Punctele  $M(1; 2)$ ,  $N(0; 4)$ ,  $P(3; 5)$  sunt mijlocurile laturilor ale  $\triangle ABC$ . Aflați coordonatele punctelor  $A, B, C$ .
- 104.** Demonstrați că patrulaterul cu vârfurile  $A(0; 3)$ ,  $B(3; 4)$ ,  $C(5; 2)$  și  $D(2; 1)$  este paralelogram.
- 105.** Sunt date punctele  $A(3; 7)$ ,  $B(-1; 3)$ ,  $C(-7; 4)$ ,  $D(-3; 8)$ . Demonstrați că:  
a)  $ABCD$  — paralelogram; b) patrulater ale cărui vârfuri sunt mijlocurile laturilor ale patrulaterului  $ABCD$ , - paralelogram.
- 106.** Sunt date trei vârfuri consecutive ale paralelogramului  $ABCD$ :  $A(3; 5)$ ,  $B(5; 1)$ ,  $C(-1; 3)$ . Aflați coordonatele punctului  $D$ .
- 107.** Sunt date trei vârfuri ale paralelogramului  $P(1; 3)$ ,  $H(3; 4)$ ,  $E(4; 2)$ . Aflați coordonatele celui de-al patrulea vârf. Câte soluții are problema?
- 108.** Segmentul  $AB$  este împărțit în trei părți egale de către punctele  $M$  și  $N$ . Aflați coordonatele punctelor  $M$  și  $N$ , dacă  $A(7; -2)$ ,  $B(4; 4)$ .
- 109.** Aflați coordonatele punctului de intersecție al medianelor  $\triangle ABC$ , dacă  $A(-1; 5)$ ,  $B(3; 7)$ ,  $C(1; -3)$ .
- 110.** Punctul de intersecție al medianelor  $\triangle ABC$  este  $M$ . Aflați coordonatele punctului  $C$ , dacă  $A(0; 8)$ ,  $B(1; -4)$ ,  $M(-2; 2)$ .

### ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

- 111.** În geografie pentru determinarea locului real al unui punct se aplică un sistem de coordonate original. Coordonatele geografice se dau în grade și minute. În tabel sunt aduse coordonatele geografice ale unor orașe din Ucraina. Găsiți pe hartă punctul ale cărui coordonate coincid cu coordonatele mijlocului a segmentului, care unește orașele. a) Luțk și Harkov; b) Lvov și Odesa. Oare aparțin aceste puncte teritoriului Ucrainei? Care localități se află în apropierea punctelor găsite?

Orașul	Latitudinea	Longitudinea
Kiev	$50^{\circ}27'$	$30^{\circ}30'$
Luțk	$50^{\circ}45'$	$25^{\circ}15'$
Harkov	$50^{\circ}00'$	$36^{\circ}13'$
Lvov	$49^{\circ}51'$	$24^{\circ}02'$
Odesa	$46^{\circ}28'$	$30^{\circ}44'$

### PROBLEME PENTRU REPETARE

112. Calculații:

a)  $\frac{\sin 35^\circ}{\sin 145^\circ} + \operatorname{tg} 135^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ$ ;

b)  $\frac{\sin 12^\circ}{\cos 78^\circ} + \frac{\cos 12^\circ}{\sin 78^\circ}$ .

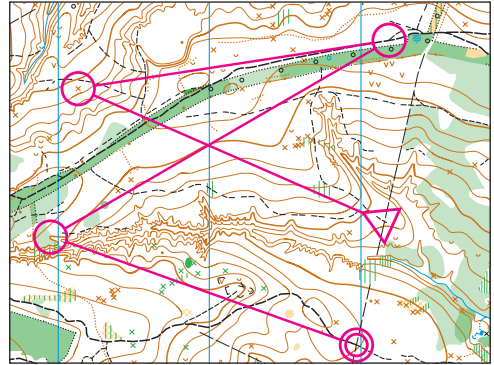
113. Unghiul la centru este egal cu  $30^\circ$ . Aflați măsura unghiului înscris corespunzător.

114. Aflați aria triunghiului dreptunghic, diferența catetelor ale căruia este egală cu 2 cm, iar ipotenuza cu 10 cm.

115. Aflați aria triunghiului dreptunghic cu unghiul ascuțit  $\alpha$ , dacă raza circumferinței, circumscrise lui, este egală cu  $R$ .

116. Diagonala trapezului isoscel este bisectoarea unghiului ascuțit. Aflați aria trapezului, dacă perimetrul lui este egal cu 52 cm, iar bazele sunt proporționale cu numerele 5 și 11.

### GEOMETRIA DIN JURUL NOSTRU



### Orientarea pe teren

# § 4

## Дистанța dintre puncte

Дacă sunt cunoscute coordonatele a două puncte din planul de coordonate atunci poate fi determinată distanța dintre aceste puncte.

### ТЕОРЕМА 3

**Пăтрatul distanței dintre două puncte este egal cu suma пăтрatelor diferenților coordonatelor corespunzătoare ale lor.**

Адică dacă sunt cunoscute coordonatele punctelor  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ , atunci

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

### ДЕМОНСТРАЦІЕ.

Сă cercетăm mai întâй cazul când  $x_1 \neq x_2$  și  $y_1 \neq y_2$  (fig. 25). Дуцем перпендикуляреле  $AA_x$ ,  $BB_x$  pe axa  $x$  și  $AA_y$ ,  $BB_y$  pe axa  $y$ . În triunghiul dreptunghic обținут  $ABD$  ( $D$  — punctul de intersecție al dreptelor  $BB_y$  și  $AA_x$ )  $AB$  — ipotenuză, iar catete sunt  $AD = |y_2 - y_1|$  și  $BD = |x_2 - x_1|$ . Conform teoremei a lui Pitagora:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \quad (*)$$

Дacă  $y_1 = y_2$  și  $x_1 \neq x_2$ , atunci  $AB = |x_2 - x_1|$ . Аcelași rezultat în acest caz îl обținем din formula (\*). Дacă,  $x_1 = x_2$  și  $y_1 \neq y_2$ , atunci  $AB = |y_2 - y_1|$ . Tot așa un rezultat îl обținем din formula (\*). În sfârșit, dacă  $x_1 = x_2$  și  $y_1 = y_2$ , адică dacă punctele  $A$  și  $B$  coincid, formula (\*) дă rezultatul trebuincios:  $AB=0$ .

Аșадар, cum n-ar fi repartizate în planul de coordonate punctele  $A(x_1; y_1)$  și  $B(x_2; y_2)$ , totdeauna

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \quad \square$$

Аceastă egalitate poate fi scrisă și astfel:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

**Exemplu.** Сă aflăm distanța dintre punctele  $A(6; -1)$  și  $B(2; -4)$ .

$$AB = \sqrt{(2-6)^2 + (-4+1)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

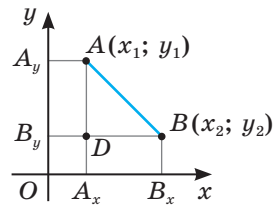


Fig. 25

## PENTRU CEI CURIOSI

Încă o dată atrageți atenția la figura 25.  $A_xB_x$  —asta-i proiecția segmentului  $AB$  pe axa  $x$ ,  $A_yB_y$  — proiecția segmentului  $AB$  pe axa  $y$ . Din raționamentele anterioare reiese că,

$$AB^2 = A_xB_x^2 + A_yB_y^2.$$

**Pătratul lungimii segmentului este egal cu suma pătratelor proiecțiilor lui pe două drepte reciproc perpendiculare.**

Această afirmație este generalizarea teoremei a lui Pitagora. Doar catetele fiecărui triunghi dreptunghic sunt proiecțiile ipotenuzei lui pe două drepte reciproc perpendiculare cărora le aparțin catetele lui (fig.26). Însă afirmația formulată este adevărată nu numai pentru dreptele cărora le aparțin catetele triunghiului, dar și pentru orice drepte reciproc perpendiculare și pentru un segment arbitrar  $AB$ , în particular și pentru astfel de segmente, ca cele din figura 27.

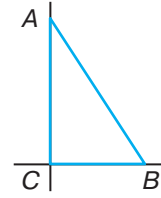


Fig.26

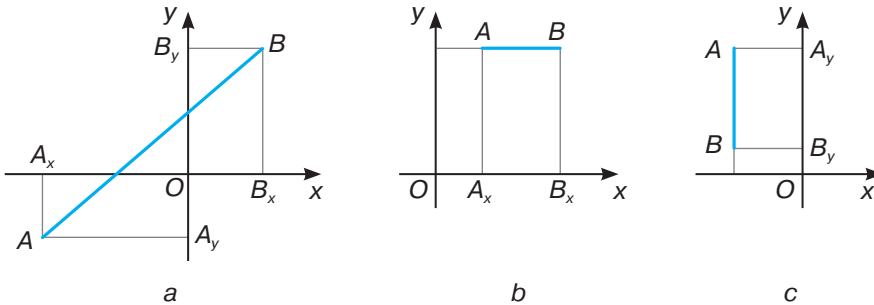


Fig.27

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Formulați teorema despre pătratul distanței dintre două puncte.
2. Demonstrați teorema despre pătratul distanței dintre două puncte.
3. Cum de aflat lungimea segmentului, dacă sunt cunoscute coordonatele extremităților lui?
4. Cum de aflat distanța de la originea sistemului de coordonate până la punctul  $A(x; y)$ ?



## EFFECTUĂM ÎMPREUNĂ

**1** Demonstrați că  $\triangle ABC$  este isoscel, și aflați lungimea medianei, duse la bază, dacă  $A(-5; 3)$ ,  $B(2; 7)$ ,  $C(3; -1)$ .

- Să aflăm lungimile laturilor triunghiului:

$$AB = \sqrt{(2+5)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{49+16} = \sqrt{65};$$

$$AC = \sqrt{(3+5)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5};$$

$$BC = \sqrt{(3-2)^2 + (-1-7)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}.$$

Deci,  $AB = BC$ . Aceasta înseamnă că  $\triangle ABC$  este isoscel cu baza  $AC$ . Pentru a afla lungimea medianei, duse la bază, aflăm coordonatele punctului  $M$  – a mijlocului segmentului  $AC$ :

$$x = \frac{-5+3}{2} = -1; \quad y = \frac{3-1}{2} = 1.$$

Deci,  $M(-1; 1)$ . Atunci  $BM = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ .

Așadar,  $\triangle ABC$  — isoscel și mediana lui  $BM = 3\sqrt{5}$ .

**2** Oare este adevărat că fiecare din punctele  $A(m; n)$ ,  $B(-m; n)$ ,  $C(-m; -n)$ ,  $K(n; m)$ ,  $P(-n; m)$ ,  $T(-n; -m)$  este situat la aceeași distanță de la originea de coordonate?

- Deoarece originea de coordonate este punctul  $O(0; 0)$ , avem:

$$OA = \sqrt{(m-0)^2 + (n-0)^2} = \sqrt{m^2 + n^2};$$

$$OB = \sqrt{(-m-0)^2 + (n-0)^2} = \sqrt{m^2 + n^2}.$$

Analogic aflăm că fiecare din distanțele  $OC$ ,  $OK$ ,  $OP$ ,  $OT$  de asemenea este egală cu  $\sqrt{m^2 + n^2}$ . Așadar, punctele  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $K$ ,  $P$ ,  $T$  se găsesc la aceeași distanță de la originea de coordonate.

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

- 117.** Aflați distanța de la originea de coordonate până la punctele:  $A(0; 3)$ ,  $B(3; 4)$ ,  $C(-4; 3)$ ,  $D(1; 1)$ ,  $E(3; 1)$ .
- 118.** Aflați distanța de la punctul  $M(4; -3)$  până la: a) axa  $OX$ ; b) axa  $OY$ ; c) originea de coordonate.
- 119.** Aflați distanța dintre punctele: a)  $A(4; 0)$  și  $B(7; 0)$ ; b)  $M(0; 3)$  și  $N(0; 5)$ ; c)  $P(3; 0)$  și  $K(0; 4)$ .
- 120.** Aflați  $x$ , dacă: a) punctul  $M(x; 4)$  este egal depărtat de la axele de coordonate; b) punctul  $P(-2; x)$  este depărtat de axa  $OX$  cu 5 unități; c) punctul  $K(x; -5)$  se află la distanța de 3 unități de la  $OY$ .

## A

121. Aflați lungimea segmentului  $AB$ , dacă  $A(-4; 4)$  și  $B(2; -4)$ .

122. Aflați distanța dintre punctele:

a)  $K(0; 5)$  și  $P(-2; 6)$ ;

b)  $A(-2; 6)$  și  $B(3; -2)$ ;

c)  $X\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right)$  și  $Y\left(\frac{1}{3}; \frac{3}{4}\right)$ ;

d)  $O(0; 0)$  și  $B(5; 5)$ .

123. Aflați distanțele de la originea de coordonate până la punctele  $A(2; 3)$ ,  $B(-2; 6)$ ,  $C(-3; 4)$ ,  $D(-12; 5)$ .

124. Aflați lungimile segmentelor, reprezentate în figura 28, dacă  $AB=2$ .

125. Folosind datele din tabel aflați lungimile segmentelor  $XA$ ,  $XB$  ș.a.m.d. Deplasați tabelul în caiet și completați-l.

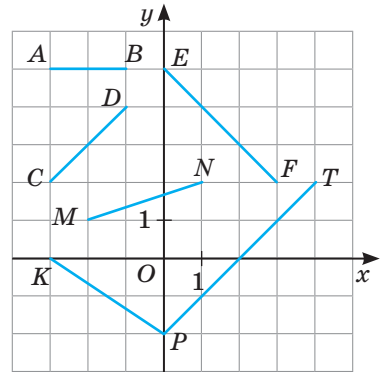


Fig.28

	$A(2; 4)$	$B(-1; 3)$	$C(1; -5)$	$D(6; 7)$
$X(-2; 4)$				
$Y(0; 3)$				

126. Aflați perimetrul  $\triangle ABC$ , dacă  $A(-2; 5)$ ,  $B(7; 8)$ ,  $C(2; -7)$ .

127. Se dă  $\triangle ABC$  cu vârfurile  $A(-2; 5)$ ,  $B(6; 3)$ ,  $C(4; -3)$ . Aflați lungimile liniilor medii ale triunghiului.

128. Aflați lungimea liniei medii a trapezului  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ), dacă  $A(-3; -1)$ ,  $B(3; 7)$ ,  $C(7; 3)$ ,  $D(4; -1)$ .

129. Aflați lungimile diagonalelor ale patrulaterului  $ABCD$ , dacă  $A(4; -3)$ ,  $B(7; 10)$ ,  $C(-8; 2)$ ,  $D(-1; -5)$ .

130. Aflați lungimile medianelor ale  $\triangle ABC$ , dacă: a)  $A(-4; -2)$ ,  $B(2; 6)$ ,  $C(4; 2)$ ; b)  $A(-5; 1)$ ,  $B(-3; 5)$ ,  $C(-1; -1)$ .

131. O mașină-unealtă este astfel programată că ea perforează în fiecare piesă 7 găuri fine. Centrul piesei este situat în originea de coordonate, iar găurile sunt perforate în punctele cu coordonatele  $(1; 2)$ ,  $(2; -3)$ ,  $(3; 0)$ ,  $(0; 0)$ ,  $(-1; 2)$ ,  $(-2; -3)$ ,  $(-3; 0)$ . Aflați cea mai mare distanță dintre găurile piesei.

132. Demonstrați că triunghiul cu vârfurile: a)  $A(-1; 1)$ ,  $B(2; -2)$ ,  $C(6; 2)$  — dreptunghic; b)  $M(-5; 2)$ ,  $N(3; 6)$ ,  $K(4; -6)$  este isoscel.

133. Demonstrați că triunghiul cu vârfurile  $A(2; 3)$ ,  $B(-2; 1)$ ,  $C(0; -3)$  este dreptunghic isoscel.

## B

134. Un drum de munte trece printr-un tunel, a cărui lungime este egală cu  $\sqrt{10}$  km (fig. 29). Punctul cel mai de sus al tunelului are coordonatele  $A(2; 4)$ . Aflați ordonata celui de mai jos punct al tunelului, dacă abscisa lui este egală cu 5 (coordonatele punctelor sunt date în kilometri). Cu ce este egal unghiul de înclinare al tunelului?

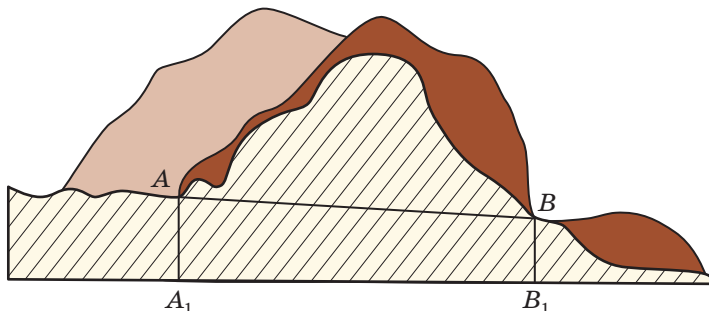


Fig.29

135. Aflați  $x$ , dacă: a)  $AB = 2$ ,  $A(2; 1)$ ,  $B(x; -1)$ ; b)  $AB = 10$ ,  $A(2x; 7)$ ,  $B(x; 1)$ ; c)  $AB = 5$ ,  $A(-1; x)$ ,  $B(2x; -3)$ .
136. Aflați coordonatele punctului, egal depărtat de la punctele  $A(-5; 1)$  și  $B(3; -1)$ , dacă el este situat pe: a) axa absciselor; b) axa ordonatei; c) dreapta  $y=x$ .
137. Găsiți pe dreapta  $y = 2x$  punctul, egal depărtat de la punctele  $M(5; 2)$  și  $N(-1; 4)$ .
138. Demonstrați că patrulaterul cu vârfurile în punctele  $A(-4; -2)$ ,  $B(-1; 2)$ ,  $C(11; -3)$ ,  $D(8; -7)$  este paralelogram. Aflați perimetrul lui.
139. Demonstrați că patrulaterul cu vârfurile în punctele  $A(-5; -2)$ ,  $B(-3; 2)$ ,  $C(3; -1)$ ,  $D(1; -5)$  este dreptunghi. Aflați perimetrul, aria lui și raza circumferinței circumscrise lui.
140. Demonstrați că patrulaterul cu vârfurile în punctele  $A(-5; -2)$ ,  $B(-4; 5)$ ,  $C(3; 6)$ ,  $D(2; -1)$  este romb. Aflați perimetrul și lungimile diagonalelor lui.
141. Demonstrați că patrulaterul cu vârfurile în punctele  $A(-2; 0)$ ,  $B(-4; 6)$ ,  $C(2; 8)$ ,  $D(4; 2)$  este pătrat. Aflați a lui perimetru și arie, de asemenea, razele circumferințelor înscrise și circumscrisele lui.
142. Fără a face construcția clarificați dacă punctele  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sunt situate pe o dreaptă, știind că  $A(-6; -5)$ ,  $B(2; 1)$ ,  $C(6; 4)$ .
143. Demonstrați că punctele  $M(-2; -1)$ ,  $N(2; 7)$ ,  $K(-1; 1)$  sunt situate pe o dreaptă. Aflați raportul lungimilor ale segmentelor  $MK$  și  $KN$ .

144. Oare sunt asemenea triunghiurile  $ABC$  și  $KBP$ , dacă:  
 a)  $A(-5; -3)$ ,  $B(-1; 5)$ ,  $C(3; 1)$ ,  $K(-4; -1)$ ,  $P(2; 2)$ ;  
 b)  $A(3; 1)$ ,  $B(-1; 5)$ ,  $C(-5; -3)$ ,  $K(2; 2)$ ,  $P(-2; 4)$ ?
145. Găsiți raza circumferinței, circumscrie  $\triangle ABC$ , dacă  $A(-2; 4)$ ,  $B(-6; 4)$ ,  $C(-4; 2)$ .
146. Aflați aria triunghiului  $ABC$ , dacă vârfurile lui sunt determinate de coordonatele  $A(-5; 5)$ ,  $B(2; 9)$ ,  $C(1, 1)$ .
147.  $AL$  — bisectoarea triunghiului  $ABC$ . Aflați lungimile segmentelor  $BL$  și  $CL$ , dacă  $A(-3; 1)$ ,  $B(1; 4)$ ,  $C(5; -5)$ .

### ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

148. Notați în planul de coordonate punctele  $A(3; 2)$  și  $C(7; 4)$ . Construiți pătratul  $ABCD$ . Aflați perimetrul și aria pătratului, de asemenea, distanțele de la centrul lui și a punctelor  $B, C$  până la originea de coordonate.

### PROBLEME PENTRU REPETARE

149. Un pătrat este amplasat în sistemul de coordonate astfel, că diagonalele lui sunt situate pe axele de coordonate. Aflați coordonatele vârfurilor pătratului, dacă diagonala lui este egală cu 4.
150. Aflați coordonatele mijloacurilor ale laturilor triunghiului  $ABC$ , dacă  $A(-4; 1)$ ,  $B(2; 5)$ ,  $C(4; 5)$ .
151. Aflați coordonatele vârfurilor  $A$  al paralelogramului  $ABCD$ , dacă  $B(11; -3)$ ,  $C(8; 7)$ ,  $D(-4; -2)$ .
152. În figura 30 este reprezentată circumferința și elementele ei. Stabiliți corespondența dintre elementele circumferinței (1-4) și însemnările lor în figură ( $A - E$ ).

- |            |        |
|------------|--------|
| 1 Coardă   | A $CE$ |
| 2 Tangentă | B $OM$ |
| 3 Diametru | C $CO$ |
| 4 Rază     | D $HC$ |
|            | E $AB$ |

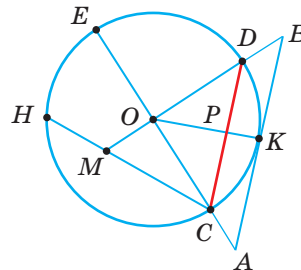


Fig. 30

# § 5

## Ecuția circumferinței

**Ecuția a figurii** în planul de coordonate este numită ecuația cu două variabile, care este satisfăcută de coordonatele fiecărui punct al figurii date, și numai de coordonatele punctelor ale figurii date.

Să examinăm ecuațiile a două figuri care cel mai frecvent sunt întâlnite în geometrie: a circumferinței și a dreptei (vezi § 6).

Fie că este dată circumferința de rază  $r$  cu centrul în punctul  $A(a; b)$  (fig.31). Dacă  $M(x; y)$  este un punct arbitrar al acestei circumferințe, atunci  $AM^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$ . Însă  $AM = r$ , de aceea  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ . (\*)

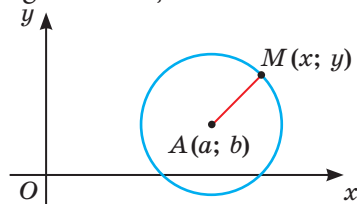


Fig. 31

Din ecuația (\*) rezultă că coordonatele  $x$  și  $y$  ale fiecărui punct  $M(x; y)$  al circumferinței date satisfac ecuația (\*). Invers, orice punct  $M(x; y)$ , ale cărui coordonate satisfac ecuația (\*), este situat pe circumferința dată, fiindcă distanța lui de la punctul  $A$  este egală cu  $r$ . Așadar, ecuația (\*) este ecuația circumferinței de rază  $r$  și cu centrul  $A(a; b)$ . Dacă centrul circumferinței este originea de coordonate, adică  $a=0$  și  $b=0$ , atunci ecuația a unei astfel de circumferințe de rază  $r$  va avea înfățișarea:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Știind ecuația circumferinței se poate rezolva și așa probleme geometrice, referitoare la circumferință, care cu alte metode sunt foarte greu de rezolvat.

**Problemă.** Se dă segmentul  $AB$  cu lungimea  $2a$  și circumferința de rază  $r$  cu centrul în mijlocul lui  $AB$ . Demonstrați că suma pătratelor distanțelor de la orice punct al circumferinței până la punctele  $A$  și  $B$  este constantă. Aflați această sumă.

**Rezolvare.** Repartizăm segmentul dat și circumferința în planul de coordonate așa cum se reprezintă în figura 32. Extremitățile segmentului au următoarele coordonate:  $A(a; 0)$ ,  $B(-a; 0)$ .

Dacă  $M(x; y)$  este un punct arbitrar al circumferinței, atunci  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $MA^2 = (x - a)^2 + y^2$ ,  $MB^2 = (x + a)^2 + y^2$ .

$$\begin{aligned} \text{Atunci } MA^2 + MB^2 &= (x - a)^2 + y^2 + (x + a)^2 + y^2 = \\ &= x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + x^2 + 2ax + y^2 = 2(x^2 + y^2 + a^2) = \\ &= 2(r^2 + a^2). \end{aligned}$$

Pentru  $a$  și  $r$  dați expresia  $2(r^2 + a^2)$  are valoare constantă.

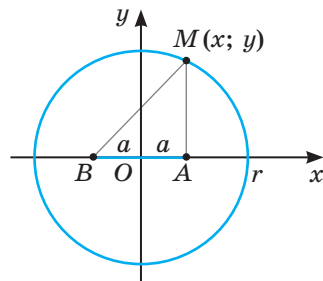


Fig.32

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Formulați definiția ecuației a unei figuri.
2. Formulați definiția circumferinței.
3. Ce ecuație are circumferința cu centrul în punctul  $A(a; b)$  de raza  $r$ ?
4. Deduceți ecuația circumferinței.
5. Care este ecuația circumferinței de raza  $r$  cu centrul în originea sistemului de coordonate?

### EFACTUĂM ÎMPREUNĂ

- 1 Scrieți ecuația circumferinței de raza 3, care este tangentă la ambele axe de coordonate.
  - Se vede în figura 33 că astfel de circumferințe sunt patru. Deoarece  $OAO_1B$  — este pătrat cu latura 3, rezultă că  $O_1(3; 3)$ . De aceea circumferința cu centrul în punctul  $O_1$  are înfățișarea:  $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ . Analogic putem deduce ecuațiile și a altor circumferințe. Deoarece  $O_2(3; -3)$ ,  $O_3(-3; -3)$ ,  $O_4(-3; 3)$ , avem că ecuațiile circumferințelor corespunzătoare sunt:  $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$ ,  $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$ ,  $(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ .

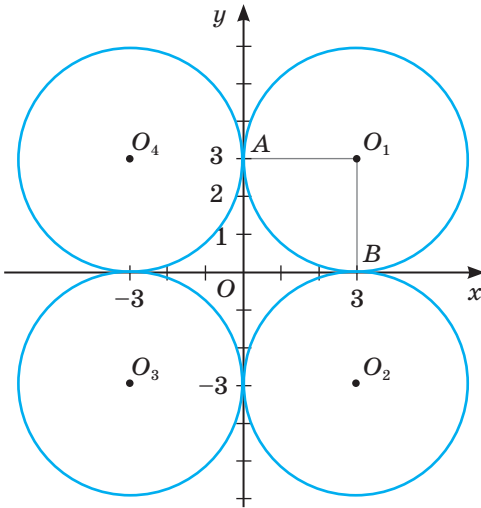


Fig.33

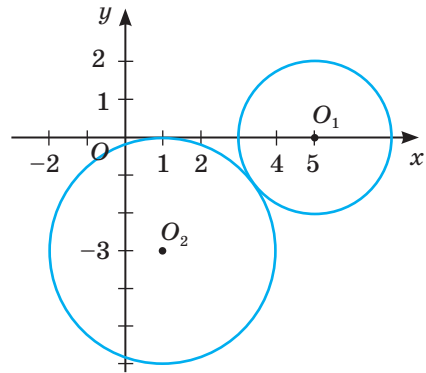


Fig.34

- 2 Pentru care valori ale parametrului  $a$  ( $a \neq 0$ ) au contact exterior (tangență exterioară) circumferințele ale căror ecuații sunt  $x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$  și  $x^2 + y^2 - 2x + 6y = a^2 - 10$ ?
  - Să aflăm coordonatele centrelor și razele circumferințelor date (fig.34). Transformăm prima ecuație:

$$(x^2 - 10x + 25) - 25 + y^2 + 21 = 0; (x - 5)^2 + y^2 = 4.$$

Deci prima ecuație – aceasta-i ecuația circumferinței cu centrul  $O_1(5; 0)$  de raza  $R_1 = 2$ .

Analogic pentru a doua ecuație obținem:  $(x^2 - 2x + 1) - 1 + (y^2 + 6y + 9) - 9 = a^2 - 10$ ;  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = a^2$ .

Așadar, a doua ecuație este ecuația circumferinței cu centrul  $O_2(1; -3)$  de raza  $|a|$ . Două circumferințe au tangență exterioară, dacă distanța dintre centrele lor este egală cu suma razelor lor. Deoarece  $O_1O_2 = \sqrt{(1-5)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{16+9} = 5$ , reiese că circumferințele sunt tangente dacă  $2+|a|=5$ , de unde  $|a|=3$ , adică  $a = \pm 3$ . Așadar circumferințele date sunt tangente exterior pentru  $a = \pm 3$ .

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFACTUAȚI ORAL

153. Indicați coordonatele centrului și raza circumferinței, dată de ecuația:

a)  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ ; b)  $x^2 + (y + 1)^2 = 16$ ;

c)  $x^2 + y^2 = 1$ ; d)  $(x + 5)^2 + y^2 = 7$ .

154. Care din ecuații sunt ecuații ale circumferinței:

a)  $x^2 + y^2 = 25$ ;

b)  $5x^2 + 5(y - 1) = 9$ ;

c)  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$ ;

d)  $3x^2 + y^2 = 27$ ;

e)  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = -4$ ;

f)  $4(x - 1)^2 + 4(y + 5)^2 = 16$ ?

155. Căreia din circumferințele, reprezentate în figura 35, corespunde ecuația circumferinței:

a)  $x^2 + y^2 = 1$ ;

b)  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$ ;

c)  $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ ;

d)  $(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 2$ ?

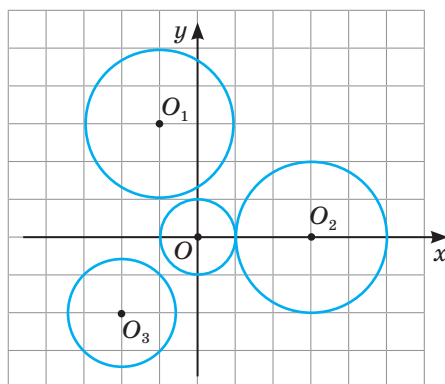


Fig.35

### A

156. De stabilit corespondența dintre locul aflării al centrelor circumferințelor (1-4) și ecuațiile corespunzătoare ale acestor circumferințe (A-E).

1 Este situat în originea de coordonate.

2 Este situat pe axa absciselor  $OX$

3 Este situat pe axa ordonatei  $OY$

4 Este egal depărtat de la axele de coordonate și nu este situat în originea de coordonate

A  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$

B  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$

C  $x^2 + (y + 5)^2 = 25$

D  $x^2 + y^2 = 5$

E  $(x + 3)^2 + y^2 = 9$



157. Scrieți ecuația circumferinței cu centrul în punctul  $A(x; y)$  de raza  $R$ , dacă: a)  $A(-1; 2)$ ,  $R = 5$ ; b)  $A(0; 0)$ ,  $R = 3$ ; c)  $A(3; -1)$ ,  $R = \sqrt{2}$ ; d)  $A(-3; -3)$ ,  $R = 6$ .
158. Scrieți ecuațiile circumferințelor, reprezentate în figura 36.
159. Construiți în sistemul de coordonate trei circumferințe de raze diferite și cu centre diferite. Scrieți ecuațiile acestor circumferințe.
160. Compuneți ecuația circumferinței de diametrul  $AB$ , dacă:  
a)  $A(1; 3)$ ,  $B(-5; -3)$ ;  
b)  $A(-2; 4)$ ,  $B(6; -2)$ ;  
c)  $A(5; -1)$ ,  $B(-3; 5)$ ;  
d)  $A(0; -3)$ ,  $B(1; 4)$ .
161. Scrieți ecuația circumferinței cu centrul în punctul  $A(-1; 4)$ , care:  
a) este tangentă la axa absciselor  $OX$ ; b) are contact cu axa  $OY$ .
162. Scrieți ecuația circumferinței de raza 5: a) cu centrul pe axa ordonatelor și care este tangentă la axa absciselor; b) cu centrul pe axa absciselor, care este tangentă la axa ordonatelor.
163. Scrieți ecuația circumferinței de raza 4 cu centrul în punctul  $A(-2; 3)$ . Oare aparțin acestei circumferințe punctele  $B(2; 4)$ ,  $C(-2; 7)$ ,  $D(1; -1)$ ,  $E(2; 3)$ ,  $F(-6; 3)$ ,  $K(17; 2)$ ,  $P(-4; 3)$ ,  $T(-4; 3 + 2\sqrt{3})$ ,  $M(-2 - 2\sqrt{3}; 1)$ ?
164. Scrieți ecuația circumferinței cu centrul în punctul  $M(-1; 4)$ , și care trece prin punctul  $P(3; 1)$ .
165. Scrieți ecuația circumferinței cu centrul în originea de coordonate și care trece prin punctul  $K(-3; -4)$ .
166. Scrieți ecuația circumferinței care este tangentă la axele de coordonate și trece prin punctul  $M(2; 0)$ .
167. Sunt date punctele  $A(1; -2)$  și  $B(5; 4)$ . Alcătuiți ecuația circumferinței: a) cu centrul în punctul  $A$  și care trece prin punctul  $B$ ; b) cu centrul în punctul  $B$  și care trece prin punctul  $A$ .
168. Scrieți ecuația circumferinței circumscrise triunghiului dreptunghic  $ABC$ , dacă  $A(3; 1)$ ,  $B(3; 7)$ ,  $C(-5; 1)$ . Faceți desenul.
169. Scrieți ecuația circumferinței circumscrise pătratului  $ABCD$  și înscrise în el, dacă  $A(-5; 2)$ ,  $B(-1; 6)$ ,  $C(3; 2)$ ,  $D(-1; -2)$ . Faceți desenul.

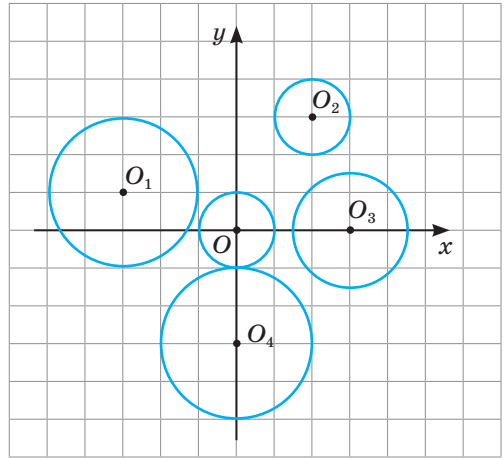


Fig.36

## B

170. Scrieți ecuația circumferinței cu centrul pe axa absciselor și care este tangentă la dreptele  $x = -2$  și  $x = 4$ . Faceți desenul.

171. Scrieți ecuația circumferinței cu centrul pe axa ordonatelor și care are contact cu dreptele  $y = -3$  și  $y = 5$ . Faceți desenul.

172. Scrieți ecuația circumferinței cu centrul pe axa absciselor și care trece prin punctul  $M(4; 2)$ , fiind tangentă la circumferința  $x^2 + y^2 = 9$ .

173. **Problemă deschisă**

Alcătuți și rezolvați o problemă după fig. 37.

174. Se dă ecuația circumferinței  $x^2 + y^2 = 25$ . Demonstrați că  $AB$  este coardă a circumferinței, și aflați distanța de la centrul circumferinței până la această coardă, dacă:

- a)  $A(-4; 3)$ ,  $B(-4; -3)$ ;
- b)  $A(4; 3)$ ,  $B(5; 0)$ ;
- c)  $A(3; 4)$ ,  $B(4; -3)$ .

175. Găsiți centrul și raza circumferinței, dată de ecuația:

- a)  $x^2 + y^2 + 2x = 0$ ;
- b)  $x^2 + y^2 - 4y = 5$ ;
- c)  $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$ ;
- d)  $x^2 + y^2 - 10x + 2y = -6$ .

176. Aflați distanța dintre centrele circumferințelor ale căror ecuații sunt:

- a)  $x^2 + y^2 + 6x = 1$  și  $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 6$ ;
- b)  $x^2 + y^2 + 4x - 10y = -4$  și  $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 7$ .

177. Cum sunt repartizate circumferințele (sunt tangente, se intersectează, nu au puncte comune), date de ecuațiile:

- a)  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$  și  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 14$ ;
- b)  $x^2 + y^2 + 6x = 0$  și  $x^2 + y^2 - 8y = -12$ ;
- c)  $x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$  și  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$ ;
- d)  $x^2 + y^2 - 4x - 8y = -12$  și  $x^2 + y^2 - 10x - 2y = -24$ ?

178. Scrieți ecuația circumferinței, circumscrise triunghiului  $ABC$ , dacă:

- a)  $A(3; 0)$ ,  $B(0; 0)$ ,  $C(0; -4)$ ;
- b)  $A(-2; -2)$ ,  $B(-2; 1)$ ,  $C(-6; -2)$ ;
- c)  $A(-3; -1)$ ,  $B(0; 3)$ ,  $C(3; -1)$ .

179.  $AH$  — înălțimea triunghiului echilateral  $ABC$ ,  $A(1; -2)$ ,  $H(4; 7)$ . Scrieți ecuația circumferinței: a) circumscrise triunghiului  $ABC$ ; b) înscrise în triunghiul  $ABC$ .

180. Scrieți ecuația circumferinței care trece prin punctele:

- a)  $(4; -1)$ ,  $(2; 7)$ ,  $(-1; 2)$ ; b)  $(5; 1)$ ,  $(-1; -3)$ ,  $(0; 2)$ ; c)  $(-6; -5)$ ,  $(-2; 1)$ ,  $(-1; -4)$ .

181. Se dă circumferința  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ . Aflați locul geometric al centrelor circumferințelor de rază 1, care au cu circumferința: a) contact exterior; b) contact interior.

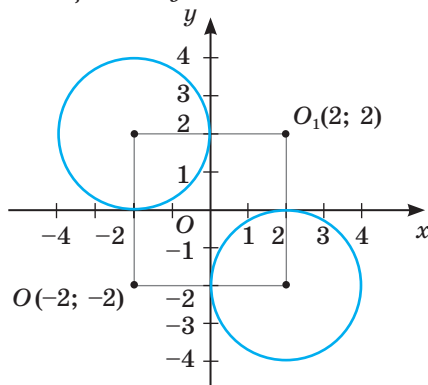


Fig.37

- 182.** În dependență de valorile parametrului  $a$  de examinat amplasarea reciprocă a circumferințelor:  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  și  $x^2 + y^2 + 4x = a^2 - 4$ .
- 183.** Pentru care valori ale parametrului  $a$  circumferințele  $x^2 + y^2 + 8y + 15 = 0$  și  $x^2 + y^2 - 6x - a^2 - 4a + 5 = 0$  au: a) tangență exterioară; b) tangență interioară?

### ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

- 184.** a) Reprezentați dreptunghiul ale cărui vârfuri sunt situate în punctele  $(0; -2)$ ,  $(0; 2)$ ,  $(6; 2)$ ,  $(6; -2)$ , luând drept segment unitate două pătrățele. Construiți în acest dreptunghi graficele ecuațiilor date mai jos, și voi veți vedea un fragment al rețelei de îngrădire.
- $(x - a)^2 + y^2 = 1; a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; 0 \leq x \leq 6; -2 \leq y \leq 2.$
- $(x - a)^2 + (y + 2)^2 = 1; a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; 0 \leq x \leq 6; -2 \leq y \leq 2;$
- $(x - a)^2 + (y - 2)^2 = 1; a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6; 0 \leq x \leq 6; -2 \leq y \leq 2.$
- б) În figura 38 este reprezentat un desen decorativ, format de intersecția circumferințelor unitate. Scrieți totalitatea ecuațiilor cu ajutorul cărora se poate obține așa un ornament.

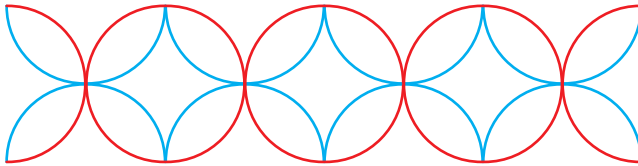
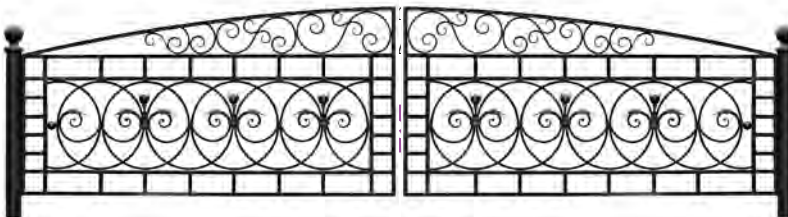


Fig.38

### PROBLEME PENTRU REPETARE

- 185.** Aflați perimetrul și aria trapezului  $ABCD$ , dacă  $A(-5; 2)$ ,  $B(-2; 6)$ ,  $C(1; 6)$ ,  $D(4; 2)$ .
- 186.** Aflați coordonatele vârfurilor pătratului cu perimetrul 16, dacă unul din vârfurile lui este  $(-1; 2)$ , iar laturile sunt paralele cu axele de coordonate. Câte soluții are problema?
- 187.** Aflați sinusul, cosinusul și tangenta unghiurilor ascuțite ale triunghiului dreptunghic cu vârfurile  $(4; -1)$ ,  $(2; 5)$ ,  $(6; 1)$ .

$3; -2), (-2; 5),$



Figuri geometrice în produsele forjate

# § 6

## Ecuția dreptei

Din cursul de algebră al clasei a 7-a voi deja știți că graficul fiecărei ecuații de gradul întâi cu două variabile este o dreaptă. Să arătăm că este adevărată și afirmația inversă: **fiecărei drepte a planului de coordonate îi corespunde ecuația liniară cu două variabile.**

Admitem că în planul de coordonate este dată dreaptă  $l$  (fig.39). Notăm două puncte  $A(m_1; n_1)$  și  $B(m_2; n_2)$  care sunt astfel, că dreapta  $l$  va fi mediatoarea segmentului  $AB$ . Pe baza proprietății mediatoarei fiecare punct  $M(x; y)$  al dreptei  $l$  este egal depărtat de la punctele  $A$  și  $B$ , adică  $MA = MB$ . Atunci  $(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = (x - m_2)^2 + (y - n_2)^2$ , de unde

$$x^2 - 2xm_1 + m_1^2 + y^2 - 2yn_1 + n_1^2 - x^2 + 2xm_2 - m_2^2 - y^2 + 2yn_2 - n_2^2 = 0;$$

$$2xm_2 - 2xm_1 + 2yn_2 - 2yn_1 + m_1^2 + n_1^2 - m_2^2 - n_2^2 = 0;$$

$$x(2m_2 - 2m_1) + y(2n_2 - 2n_1) + m_1^2 + n_1^2 - m_2^2 - n_2^2 = 0.$$

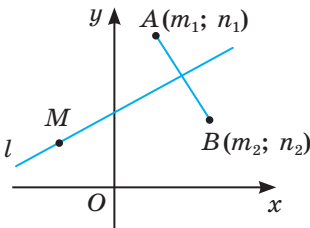


Fig.39

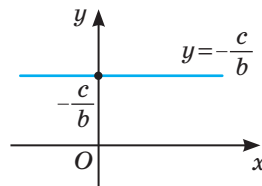


Fig.40

Notând  $2m_2 - 2m_1 = a$ ,  $2n_2 - 2n_1 = b$ ,  $m_1^2 + n_1^2 - m_2^2 - n_2^2 = c$ , obținem ecuația  $ax + by + c = 0$ , ceea ce trebuia de demonstrat.

Sunt demne de atenție cazuri particulare.

1. Dacă  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ , ecuația dreptei va avea aspectul  $by + c = 0$ , de unde  $y = -\frac{c}{b}$ . Aceasta este ecuația dreptei, paralele cu axa  $OX$  (fig.40).

2. Dacă  $b = 0$ ,  $a \neq 0$ , atunci ecuația dreptei va avea forma  $ax + c = 0$ , de unde  $x = -\frac{c}{a}$ . Aceasta este ecuația dreptei, paralele cu axa  $OY$  (fig. 41).

3. Dacă  $c = 0$ ,  $a \neq 0$  și  $b \neq 0$ , atunci ecuația dreptei va avea aspectul  $y = -\frac{a}{b}x$ .

Aceasta-i ecuația dreptei care trece prin originea de coordonate (fig.42).

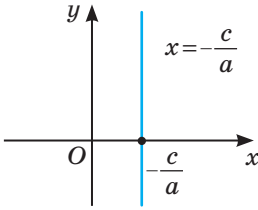


Fig.41

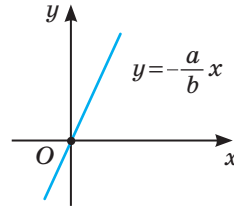


Fig.42

Еcuаția  $ax + by + c = 0$  se numește **ecuаția generală a dreptei**.

Să scriem această ecuаție în altă formă. Dacă  $b \neq 0$ , atunci împărțim părțile

stângă și dreaptă ale ecuаției la  $b$  și obținem  $\frac{a}{b}x + y = \frac{c}{b}$  sau  $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ . Notând

$-\frac{a}{b} = k$ ,  $\frac{c}{b} = p$ , obținem ecuаția  $y = kx + p$ . Amintiți-vă funcția liniarei și grafi-  
cul ei.

Să clarificăm sensul geometric al coeficientului  $k$ . Să luăm pe dreapta  $l$  două puncte arbitrare  $A(x_1; y_1)$  și  $B(x_2; y_2)$  (fig.43). Avem  $y_1 = kx_1 + p$  și  $y_2 = kx_2 + p$ . Scăzând din a doua ecuаție prima, obținem  $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$ , de unde pentru

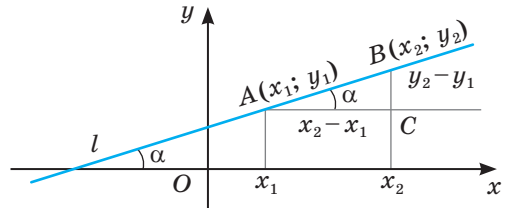


Fig.43

$x_1 \neq x_2$   $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ . Din figura 43 se

vede că  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{BC}{AC} = \text{tg } \alpha$ , unde  $\alpha$  —

unghiul, pe care îl face dreapta cu direcția pozitivă a axei absciselor  $OX$ .

Cazul, când  $90^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ , examinați-l de sine stătător.

Așadar, în ecuаția dreptei  $y = kx + p$  coeficientul  $k = \text{tg } \alpha$ , unde  $\alpha$  — unghiul, pe care îl face dreapta cu direcția pozitivă a axei  $OX$ . De aceea numărul  $k$  se numește **coeficient unghiular**, iar ecuаția dreptei, scrisă în forma  $y = kx + p$ , — **ecuаția dreptei cu coeficient unghiular**.

Se poate demonstra următoarea afirmație.

Dacă dreptele  $l_1$  și  $l_2$  sunt date cu ecuаțiile  $y = k_1x + p_1$  și  $y = k_2x + p_2$ , atunci:

- 1)  $l_1 \parallel l_2$  atunci și numai atunci, când  $k_1 = k_2$  și  $p_1 \neq p_2$ ;
- 2)  $l_1 \perp l_2$  atunci și numai atunci, când  $k_1 \cdot k_2 = -1$ .

De exemplu, dreptele  $y = 2x + 3$  și  $y = 2x$  sunt paralele, deoarece  $k_1 = k_2 = 2$ , iar

dreptele  $y = 2x + 3$  și  $y = -\frac{1}{2}x$  sunt perpendiculare, deoarece  $k_1 \cdot k_2 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ .

## PENTRU CEI CURIOSI

Afară de ecuația generală a dreptei și a ecuației cu coeficient unghiular există și alte tipuri de ecuații ale dreptelor. Să examinăm unele din ele.

Să scriem ecuația dreptei care trece prin două puncte  $A(x_1; y_1)$  și  $B(x_2; y_2)$  (fig.44). Luăm pe dreapta  $l$  un punct arbitrar  $M(x; y)$ . Triunghiurile dreptunghice  $AKB$  și  $APM$  sunt asemenea, deoarece unghiurile lor ascuțite de la vârful  $A$  sunt egale. Atunci  $AP : AK = MP : BK$  sau  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ . Am obținut ecuația dreptei, care trece prin punctele  $A$  și  $B$ .

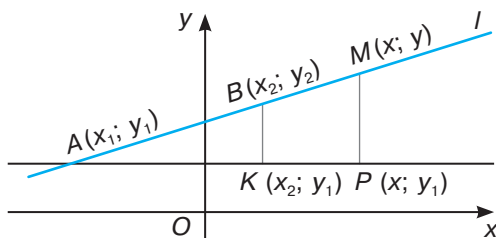


Fig.44

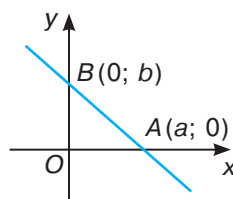


Fig.45

Și invers, dacă coordonatele  $x$  și  $y$  ale unui punct oarecare  $M(x; y)$  satisfac această ecuație, atunci  $AP:AK = MP:BK$ , din ceea ce urmează asemănarea triunghiurilor  $APM$  și  $AKB$ . Atunci  $\angle PAM = \angle KAB$ , iar aceasta înseamnă, că punctul  $M$  este situat pe dreapta  $l$ .

Așadar, ecuația  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$  — aceasta-i *ecuația dreptei care trece prin două puncte date*.

Dacă dreapta  $l$  intersectează axele de coordonate în punctele  $A(a; 0)$  și  $B(0; b)$  (fig.45), atunci, aplicând ecuația anterioară, obținem:  $\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}$ . Atunci  $-\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b}$  sau  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ . Aceasta este *ecuația dreptei prin segmentele de pe axe*, deoarece numerele  $a$  și  $b$  arată ce segmente taie dreapta  $l$  pe axele de coordonate.

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Ce figură este graficul ecuației de gradul întâi cu două variabile?  
Dar graficul funcției liniare?
2. Care este ecuația generală a dreptei?
3. Care este ecuația dreptei cu coeficient unghiular?
4. Care este sensul geometric al coeficientului unghiular?
5. Formulați condiția de paralelism a două drepte.
6. Formulați condiția de perpendicularitate a două drepte.

## EFFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Scrieți ecuația dreptei, care trece prin punctele  $A(2; 1)$  și  $B(4; -3)$ .

• *Primul procedeu.*

Să ne folosim de ecuația dreptei cu coeficient unghiular  $y = kx + p$ . Deoarece dreapta trece prin punctele  $A$  și  $B$ , coordonatele punctelor date satisfac ecuația, adică  $1 = 2k + p$  și  $-3 = 4k + p$ .

Am obținut sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 2k + p = 1; \\ 4k + p = -3. \end{cases}$$

Să scădem prima ecuație din a doua, obținem:  $2k = -4$ , de unde,  $k = -2$ .

Atunci din prima ecuație:  $p = 1 - 2k = 5$ . Așadar, ecuația dreptei va avea aspectul:  $y = -2x + 5$ .

*Al doilea procedeu.*

Deoarece,  $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , atunci în cazul dat  $k = \frac{-3 - 1}{4 - 2} = \frac{-4}{2} = -2$ . Atunci ecuația

va avea forma:  $y = -2x + p$ . Înlocuim în această ecuație coordonatele punctului  $A(2; 1)$ . Obținem:  $1 = -4 + p$ , de unde  $p = 5$ . Atunci ecuația dreptei va avea aspectul  $y = -2x + 5$ .

*Al treilea procedeu.*

Să folosim ecuația dreptei care trece prin două puncte date,  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ .

În cazul nostru  $\frac{x - 2}{4 - 2} = \frac{y - 1}{-3 - 1}$ , adică  $\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 1}{-4}$  sau  $\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{-2}$ , de unde

$-2(x - 2) = y - 1$ . Simplificând ecuația, obținem:  $y = -2x + 5$ .

2 Scrieți ecuația dreptei, care trece prin punctul  $M(3; 5\sqrt{3})$  și face unghiul de  $60^\circ$  cu direcția pozitivă a axei absciselor.  $OX$ .

• Scriem ecuația dreptei date în forma:  $y = kx + p$ . Deoarece  $k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ , reiese că ecuația dreptei poate fi scrisă sub aspectul  $y = \sqrt{3}x + p$ . Înlocuind în această ecuație coordonatele punctului  $M$ , obținem:  $5\sqrt{3} = 3\sqrt{3} + p$ , de unde  $p = 2\sqrt{3}$ . Deci, ecuația dreptei căutate este  $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ .



## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

189. Oare trece prin originea de coordonate dreapta, a cărei ecuație este  
a)  $x + y = 0$ ; b)  $2x + y = 3$ ; c)  $x - y = 0$ ; d)  $y = -3x$ ; e)  $y = 4x + 2$ ?
190. Care este ecuația dreptei, dusă paralel la axa ordonatelor prin punctul:  
a)  $M(5; -3)$ ; b)  $N(-2; 8)$ ; c)  $P(0; 3)$ ; d)  $K(4; 0)$ ?
191. Care este ecuația dreptei care este paralelă cu axa  $OX$  și trece prin punctul:  
a)  $E(2; -7)$ ; b)  $F(-1; 5)$ ; c)  $L(0; -2)$ ; d)  $K(3; 0)$ ?
192. Aflați distanța de la originea de coordonate până la dreapta, dată cu ecuația:  
a)  $y - 2 = 0$ ; b)  $x + 5 = 0$ ; c)  $y = 2x$ ; d)  $x + 3y = 0$ .
193. Indicați ecuațiile dreptelor, care sunt tangente la circumferința  $x^2 + y^2 = 16$  și paralele cu:  
a) axa absciselor  $OX$ ; b) axa  $OY$ .
194. Căreia din drepte, reprezentate în fig.46, îi corespunde ecuația:  
a)  $x = 2$ ; b)  $y = x + 3$ ; c)  $y = -3$ ; d)  $y = x$ ; e)  $y = -x - 2$ ?
195. Numiți coeficienții unghiulari ai dreptelor, date cu ecuațiile:  
 $y = 3x$ ;  $y = 2x + 5$ ;  $y = 8 - 4x$ ;  
 $x - y = 0$ ;  $5x + y = 2$ ;  $2x - 6y = 3$ .
196. Cu ce este egal coeficientul unghiular al dreptei, care taie pe axele de coordonate segmente egale?

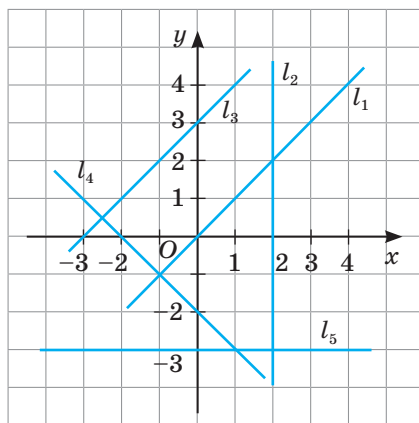


Fig.46

### A

197. Construiți dreptele și găsiți coordonatele punctelor de intersecție ale lor cu axele de coordonate: a)  $y = 2x + 3$ ; b)  $x + y = 5$ ; c)  $2x + 5y = 10$ .
198. Construiți dreptele care trec prin punctul  $M(2; -4)$  și sunt paralele cu axele de coordonate. Scrieți ecuațiile lor.
199. Oare trece dreapta dată de ecuația  $6x - 5y - 10 = 0$ , prin punctele  $A(-5; -8)$ ,  $B(1; -0,8)$ ,  $C(4; 4)$ ,  $D(0; -2)$ ,  $E(-3; -2)$ ?
200. Fără a face construcția aflați coordonatele punctelor de intersecție a dreptei  $2x + 3y = 6$  cu axele de coordonate.
201. Aflați coordonatele punctelor de intersecție ale dreptelor  $4x + 5y + 10 = 0$  și  $x + 4y - 3 = 0$ .
202. Scrieți ecuația dreptei care trece prin originea de coordonate și punctul:  
a)  $(3; 2)$ ; b)  $(-5; 5)$ ; c)  $(-1; 3)$ ; d)  $(-4; -2)$ .
203. Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctele: a)  $A(1; 3)$  și  $B(5; -1)$ ;  
b)  $C(-1; 2)$  și  $D(0; 3)$ ; c)  $M(0; 4)$  și  $N(5; 0)$ ; d)  $E(3; -5)$  și  $F(4; 1)$ .

**204.** Folosind datele tabelului, scrieți ecuațiile dreptelor  $AB$ ,  $AC$  ș.a.m.d.

	$B(1; 3)$	$C(-2; 5)$	$D(2; -2)$	$E(-3; -4)$
$A(0; 0)$				
$M(-1; 4)$				

- 205.** Ce unghi face dreapta cu direcția pozitivă a axei  $OX$ : a)  $x + y - 2 = 0$ ; b)  $x - y = 4$ ; c)  $x - \sqrt{3}y = 3$ ; d)  $3x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ ?
- 206.** Scrieți ecuația dreptei, care trece prin punctul  $A(2; -4)$  și are coeficientul unghiular  $k$ , dacă: a)  $k = 2$ ; b)  $k = 1$ ; c)  $k = -3$ ; d)  $k = -0,5$ .
- 207.** Scrieți ecuațiile dreptelor care trec prin punctul  $M(3; -2)$  și-s paralele cu dreapta: a)  $y = 2x + 5$ ; b)  $y = -x + 2$ ; c)  $x + 2y - 2 = 0$ ; d)  $2x + 3y - 4 = 0$ .
- 208.** Se știe că graficul funcției  $y = ax + 2$  trece prin punctul  $A(-2; 6)$ . Aflați valoarea parametrului  $a$ . Construiți această dreaptă.
- 209.** Pentru care valoare a lui  $b$  dreapta  $y = -3x + b$  trece prin punctul  $M(-1; 4)$ ?

## B

- 210.** Scrieți ecuațiile dreptelor, reprezentate în fig.47.
- 211.** Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul  $A(1; 4)$  și face cu direcția pozitivă a axei absciselor unghiul: a)  $30^\circ$ ; b)  $60^\circ$ ; c)  $45^\circ$ ; d)  $120^\circ$ ; e)  $135^\circ$ .
- 212.** Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul  $A(1; 4)$  și mărginește împreună cu axele de coordonate un triunghi isoscel. Aflați aria acestui triunghi.
- 213.** Demonstrați că segmentul cu extremitățile în punctele  $M(-3; 2)$  și  $N(6; -4)$  trece prin originea de coordonate.
- 214.** Alcătuiți ecuațiile dreptelor  $AB$ ,  $AC$  și  $BC$ , dacă  $A(-3; 3)$ ,  $B(3; 5)$ ,  $C(7; -5)$ .
- 215.** Punctele  $A(-2; 0)$  și  $C(4; 0)$  —sunt vârfurile triunghiului echilateral  $\triangle ABC$ . Scrieți ecuațiile dreptelor cărora le aparțin laturile și înălțimele triunghiului dat.
- 216.** Compuneți ecuațiile dreptelor cărora le aparțin medianele și înălțimile  $\triangle MNK$ , dacă  $M(-4; 2)$ ,  $N(2; 6)$ ,  $K(8; -4)$ .
- 217.** Deduceți ecuațiile dreptelor cărora le aparțin laturile pătratului cu perimetrul  $20\sqrt{2}$ , dacă diagonalele lui sunt situate pe axele de coordonate.
- 218.** Compuneți ecuațiile dreptelor cărora le aparțin laturile rombului cu unghiul ascuțit  $60^\circ$ , dacă diagonala mai mare a lui este egală cu 10 și aparține axei ordonatelor  $OY$ , iar cea mai mică — axei  $OX$ .

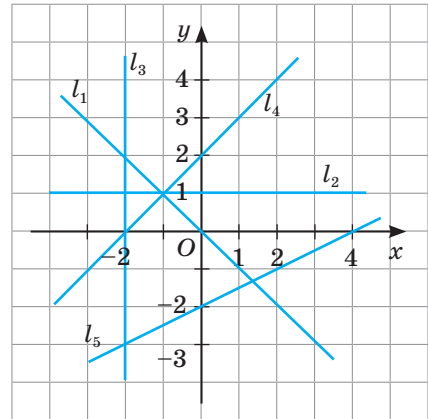


Fig.47

- 219.** Sunt date ecuațiile dreptelor cărora le aparțin laturile triunghiului:  $2x - y + 4 = 0$ ,  $y + x - 7 = 0$ ,  $x - 3y - 3 = 0$ . Aflați coordonatele vârfurilor lui.
- 220.** Oare pot laturile paralelogramului aparține dreptelor  $x - y + 3 = 0$ ;  $x + 6y - 25 = 0$ ;  $x - y - 4 = 0$ ;  $x + 6y - 3 = 0$ ? Dacă da, atunci aflați coordonatele vârfurilor lui.
- 221.** Stabiliți corespondența dintre dreptele (1-4) și lungimile coardelor (A-E), pe care aceste drepte le taie în circumferința  $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ .
- |               |                |
|---------------|----------------|
| 1 $y = x - 3$ | A $4\sqrt{5}$  |
| 2 $y = 3$     | B 8            |
| 3 $y = -2x$   | C $7\sqrt{2}$  |
| 4 $x = 6$     | D 6            |
|               | E $2\sqrt{17}$ |
- 222.** Stabiliți repartizarea reciprocă a circumferinței și a dreptei, date de ecuațiile:
- $x^2 + y^2 = 25$ ;  $3x + y - 15 = 0$ ;
  - $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 8$ ;  $2x + y = 6$ ;
  - $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 14 = 0$ ;  $x - y + 2 = 0$ ;
  - $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 17 = 0$ ;  $x - y + 3 = 0$ .
- 223.** În figura 48 sunt reprezentate trei antene  $M$ ,  $N$ ,  $P$ , coordonatele lor și domeniile de deservire. În matematică divizarea unei cantități finite de puncte ale planului, la care fiecare domeniu al divizării (celulă) formează o mulțime de puncte, cele mai apropiate de unul din elementele mulțimii, este numită diagrama Voronâi. Muchiile celulelor în diagrama Voronâi se construiesc ca mediatoarele segmentelor  $MN$ ,  $NP$  și  $MP$ . Scrieți ecuațiile muchiilor ale diagramei Voronâi și coordonatele punctului  $O$  – a vârfului diagramei Voronâi pentru domeniile de divizare ale antenelor  $M$ ,  $N$ ,  $P$ .

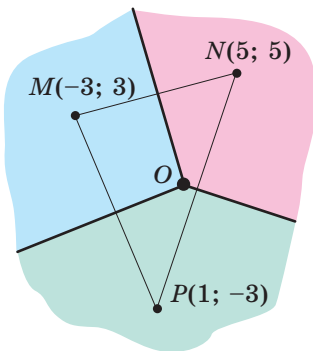


Fig.48



**Voronâi Gheorghii Feodorovici**  
(1868-1908)

- 224.** Cu ce sunt egali coeficienții  $a$  și  $b$  ai dreptei  $ax + by = 2$ , dacă ea trece prin punctele  $M(-2; -2)$ ,  $N(8; 3)$ ?
- 225.** Pentru care valori ale parametrului  $a$  dreapta  $y = x + 5$  și circumferința  $x^2 + y^2 = a^2$  sunt tangente?

## ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

- 226.** În figura 49 în sistemul rectangular de coordonate este reprezentată tabla de șah, care conține 64 de câmpuri:
- Care este cea mai mare cantitate de câmpuri care pot fi intersectate de o singură dreaptă? Câte există astfel de drepte? Scrieți ecuația unei astfel de drepte.
  - Scrieți ecuațiile dreptelor care dau câteva mutări posibile ale reginei, reprezentată în figură. Coordonatele reginei (2,5; 3,5).

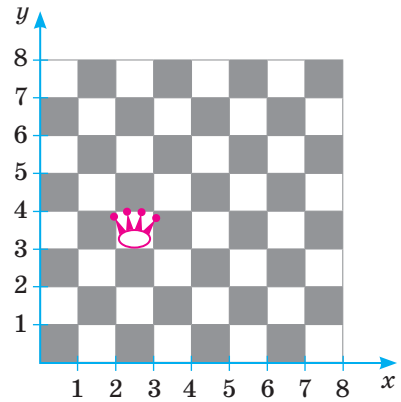


Fig.49

## PROBLEME PENTRU REPETARE

- 227.** Construiți circumferința  $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ .
- 228.** Oare sunt concentrice circumferințele  $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 4$  și  $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 1 = 0$ ?
- 229.** Stabiliți tipul  $\triangle ABC$ , dacă  $A(-2; 3)$ ,  $B(4; 6)$ ,  $C(8; -2)$ .
- 230.** Aflați perimetrul și aria triunghiului, două laturi ale căruia sunt egale cu 5 cm și 12 cm, iar unghiul dintre ele este de  $90^\circ$ .

## GEOMETRIA DIN JURUL NOSTRU

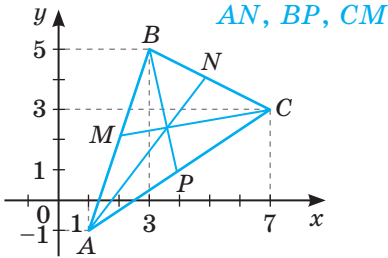


Paralelism în interiorul unei clădiri

## PROBLEME CU DESENE GATA

A

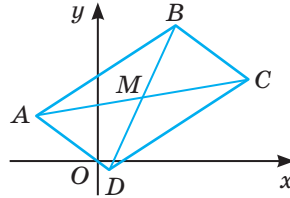
1  $AN, BP, CM$  — mediane



B

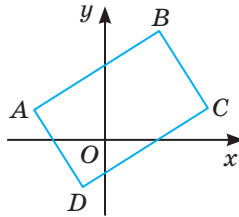
$ABCD$  — паралелограм,  
 $A(-4; 3), D(1; -1), M(5; 4)$ .

Coordonatele punctelor  $B$  și  $C$



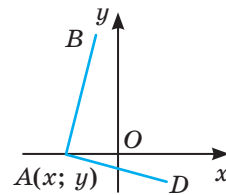
2  $A(-4; 3), B(4; 7), C(7; 1), D(-1; -3)$ .

De demonstrat:  
 $ABCD$  —  
dreptunghi



$B(-1; 6), D(3; -2), AB = AD$ .

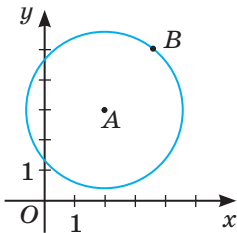
$A(x; y)$



Scrieți ecuațiile dreptelor și circumfeințelor

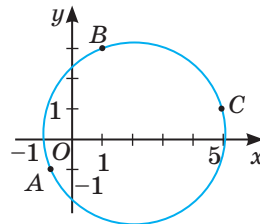
A

3  $A(2; 3), B(4; 5)$ .

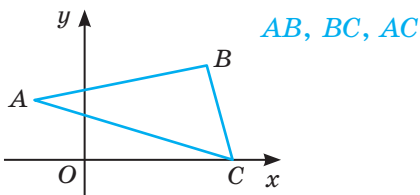


B

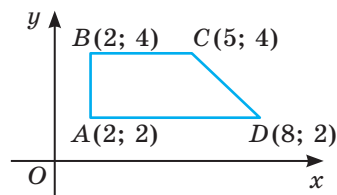
$A(-1; -1), B(1; 3), C(5; 1)$ .



4  $A(-2; 2), B(6; 4), C(8; 0)$ .



$AB, BC, CD, AD$



## LUCRAREA INDEPENDENTĂ 1

### VARIANTA 1

- 1°. Comparați cu zero valoarea expresiei  $\sin 130^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ \cdot \cos 150^\circ$ .
- 2°. Scrieți ecuația circumferinței cu centrul în punctul  $A(-2; 3)$ , care trece prin punctul  $B(1; -1)$ .
- 3°. Scrieți ecuația medianei  $AM$   $\triangle ABC$  și aflați lungimea ei, dacă  $A(-3; 2)$ ,  $B(4; 1)$ ,  $C(5; -4)$ .

### VARIANTA 2

- 1°. Comparați cu zero valoarea expresiei  $\cos 125^\circ \cdot \sin 135^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 130^\circ$ .
- 2°. Scrieți ecuația circumferinței cu centrul în punctul  $A(4; 3)$ , care este tangentă la axa absciselor  $OX$ .
- 3°. Scrieți ecuația liniei medii  $MN$   $\triangle ABC$  ( $MN \parallel AC$ ) și aflați lungimea ei, dacă  $A(-1; -3)$ ,  $B(3; 7)$ ,  $C(5; 1)$ .

### VARIANTA 3

- 1°. Comparați cu zero, valoarea expresiei  $\operatorname{tg} 123^\circ \cdot \sin 132^\circ \cdot \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ$ .
- 2°. Scrieți ecuația circumferinței cu centrul în punctul  $A(1; -3)$ , care trece prin originea de coordonate.
- 3°. Scrieți ecuația medianei  $AM$  a triunghiului  $ABC$  și aflați lungimea ei, dacă  $A(3; 5)$ ,  $B(-4; 2)$ ,  $C(2; -4)$ .

### VARIANTA 4

- 1°. Comparați cu zero valoarea expresiei  $\cos 20^\circ \cdot \sin 135^\circ \cdot \cos 120^\circ \cdot \operatorname{tg} 23^\circ$ .
- 2°. Scrieți ecuația circumferinței cu centrul în punctul  $A(4; 3)$ , care este tangentă la axa ordonatelor  $OY$ .
- 3°. Scrieți ecuația liniei medii  $MN$  a trapezului  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) și aflați lungimea ei, dacă  $A(3; -3)$ ,  $B(-1; 1)$ ,  $C(3; 3)$ ,  $D(5; 1)$ .

## ÎNSĂRCINĂRILE TESTE 1

<p><b>1</b> Aflați lungimea segmentului <math>AB</math>, dacă <math>A(1; 2)</math>, <math>B(1; 6)</math>.</p>	<p>a) <math>2\sqrt{17}</math>;                      c) <math>2\sqrt{5}</math>; b) 4;                                      d) 16.</p>
<p><b>2</b> Sunt date punctele <math>A(-1; 3)</math> și <math>B(5; 6)</math>. Aflați coordonatele punctului <math>M</math>, care împarte segmentul <math>AB</math> în jumătăți.</p>	<p>a) <math>M(4; 9)</math>;                      c) <math>M(3; 1,5)</math>; b) <math>M(6; 3)</math>;                      d) <math>M(2; 4,5)</math>.</p>
<p><b>3</b> Care dreaptă este paralelă cu dreapta <math>y = 3x + 5</math>?</p>	<p>a) <math>y = 5</math>;                              c) <math>y - 3x = 2</math>; b) <math>3x + y = 4</math>;                      d) <math>x + 3y = 6</math>.</p>
<p><b>4</b> Care semn trebuie pus în loc de *: <math>\sin 128^\circ * \cos 128^\circ</math>?</p>	<p>a) <math>&gt;</math>;                                      c) <math>=</math>; b) <math>&lt;</math>;                                      d) nu putem stabili.</p>
<p><b>5</b> Care dreaptă face unghiul <math>135^\circ</math> cu direcția pozitivă a axei absciselor <math>OX</math>?</p>	<p>a) <math>y - x = 3</math>;                      c) <math>x + y = 5</math>; b) <math>y = 2 - 0,5x</math>;                      d) <math>\sqrt{3}x - y = 7</math>.</p>
<p><b>6</b> Raza cărei circumferințe este egală cu 4?</p>	<p>a) <math>x^2 + y^2 = 4</math>; b) <math>(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16</math>; c) <math>(x + 2)^2 + y^2 = 2</math>; d) <math>x^2 + (y - 2)^2 - 8 = 0</math>.</p>
<p><b>7</b> <math>AB</math> — diametrul circumferinței. Care din ecuații este ecuația acestei circumferinței, dacă <math>A(1; 3)</math>, <math>B(-1; -3)</math>?</p>	<p>a) <math>x^2 + y^2 = 10</math>; b) <math>(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 10</math>; c) <math>x^2 + y^2 = \sqrt{10}</math>; d) <math>(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \sqrt{10}</math>.</p>
<p><b>8</b> Indicați egalitatea neadevărată.</p>	<p>a) <math>\sin^2 140^\circ + \cos^2 140^\circ = 1</math>; b) <math>\sin 23^\circ = -\sin 157^\circ</math>; c) <math>\cos 57^\circ = \sin 33^\circ</math>; d) <math>\cos 123^\circ = -\cos 57^\circ</math>.</p>
<p><b>9</b> Care din ecuații este ecuația diametrului circumferinței <math>x^2 + y^2 = 25</math>, dus prin punctul <math>A(3; 4)</math>?</p>	<p>a) <math>3x + 4y = 25</math>;                      c) <math>y = \frac{4}{3}x</math>; b) <math>y = \frac{3}{4}x</math>;                              d) <math>3x + 4y = 5</math>.</p>
<p><b>10</b> Care din drepte nu este tangentă la circumferința <math>x^2 + (y - 2)^2 = 9</math>?</p>	<p>a) <math>x = 3</math>;                              c) <math>x = -3</math>; b) <math>y = 3</math>;                              d) <math>y = -1</math>.</p>



## PROBLEME TIPICE PENTRU LUCRAREA DE CONTROL

- 1°. Aflați lungimea segmentului  $KP$  și coordonatele mijlocului lui, dacă  $K(1; -3)$ ,  $P(7; 5)$ .
- 2°. Aflați unghiurile trapezului dreptunghic dacă cosinusul a unuia din ei este egal cu  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- 3°. În figura 50 este reprezentată circumferința cu centrul  $A$  și diametrul ei  $BC$ . Scrieți coordonatele punctelor  $A$ ,  $B$  și  $C$ . Alcătuiți ecuația: a) circumferinței, reprezentată în figură; b) a dreptei  $BC$ .
- 4°.  $M$ —mijlocul segmentului  $AB$ . Aflați coordonatele punctului  $A$ , dacă  $M(1; 4)$ ,  $B(3; -5)$ .

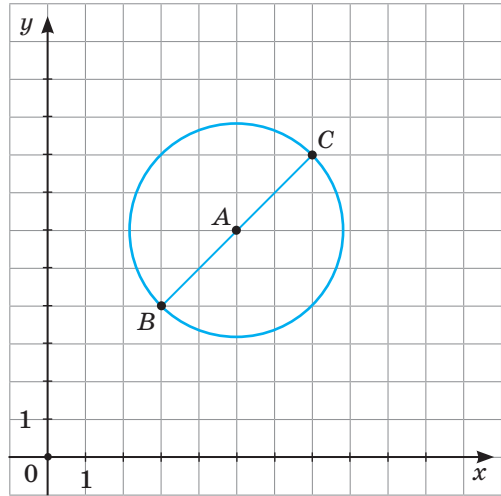


Fig.50

- 5°. Demonstrați că triunghiul cu vârfurile în punctele  $A(-3; -1)$ ,  $B(-1; 5)$ ,  $C(5; 3)$  este isoscel.
- 6°. Aflați coordonatele punctului  $M$ , care aparține axei absciselor și este egal depăratat de punctele  $A(5; 4)$  și  $B(-2; -3)$ .
- 7°. Sunt date trei vârfuri consecutive ale paralelogramului  $ABCD$ :  $A(-1; 1)$ ,  $B(3; 3)$ ,  $C(3; 0)$ . Aflați coordonatele vârfului  $D$ .
- 8°. Aflați lungimea coardei, obținute în urma intersecției circumferinței  $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$  cu dreapta  $y = x - 4$ .
- 9°. Determinați tipul patrulaterului cu vârfurile în punctele  $A(-5; 1)$ ,  $B(-3; 5)$ ,  $C(3; 2)$ ,  $D(1; -2)$ . Aflați perimetrul, aria lui și scrieți ecuația circumferinței circumscrie lui.
- 10°. Pentru care valori ale parametrului  $a$  circumferințele  $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$  și  $x^2 + y^2 - 6x + 2y = a^2 - 10$  au: a) contact exterior, b) contact interior?

*Măreața faptă a lui Descartes – crearea geometriei analitice – construirea podului între algebră și geometrie.*

*S.G.Vavilov*

# Principalul în capitolul 1

Sinusul și cosinusul unghiului  $\alpha$  — ordonata și abscisa punctului al circumferinței unitate, care corespunde unghiului dat (fig.51). Tangenta unghiului — raportul sinusului al acestui unghi către cosinusul lui.

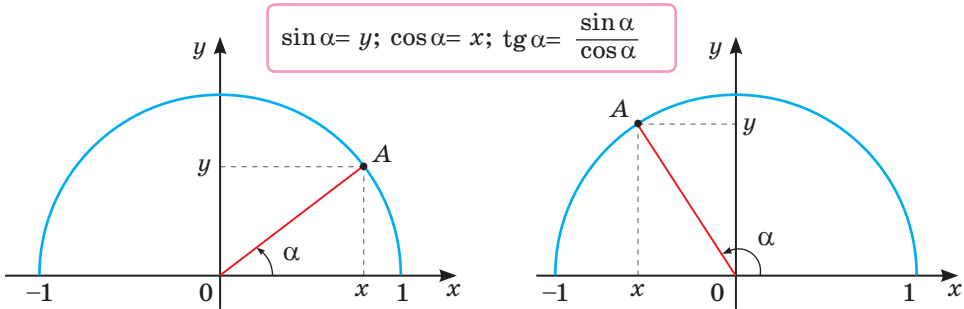


Fig.51

Sinusul, cosinusul și tangenta unghiului, luate împreună, se numesc **funcțiile trigonometrice ale acestui unghi**.

Pentru fiecare unghi  $\alpha$  sunt adevărate identitățile:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha; \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha;$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha \quad \text{și} \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

Pentru orice puncte  $A(x_1; y_1)$  și  $B(x_2; y_2)$  se pot calcula coordonatele mijlocului al segmentului  $AB$  și lungimea segmentului  $AB$ .

Fiecare coordonată a mijlocului segmentului este egală cu semisuma coordonatelor corespunzătoare ale extremităților lui (fig.52). Adică, dacă extremitățile segmentului sunt  $A(x_1; y_1)$  și  $B(x_2; y_2)$ , atunci mijlocul segmentului dat este punctul  $M$  cu coordonatele

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{și} \quad \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Distanța dintre punctele  $A(x_1; y_1)$  și  $B(x_2; y_2)$ :

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

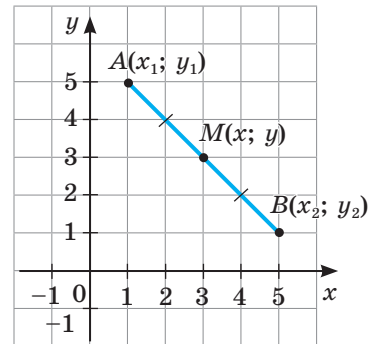


Fig. 52

**Ecuția a figurii în planul de coordonate** se numește ecuația cu două variabile care este satisfăcută de coordonatele fiecărui punct al figurii date și numai de coordonatele punctelor ei.

**Ecuția circumferinței** de rază  $r$  (fig.53) cu centrul în punctul  $A(a; b)$  are forma  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ .

Dacă centrul circumferinței de rază  $r$  este situat în originea sistemului de coordonate, atunci ecuația ei este  $x^2 + y^2 = r^2$  (fig.54).

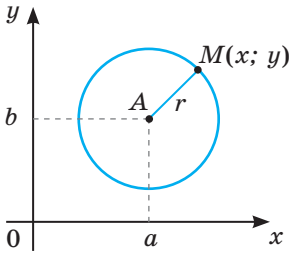


Fig.53

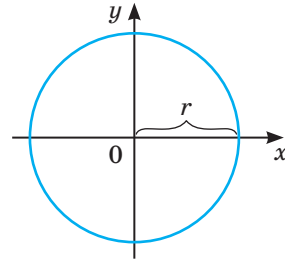


Fig.54

Fiecărei drepte din planul de coordonate îi corespunde o ecuație liniară cu două variabile  $ax + by + c = 0$ . Așa o ecuație este numită **ecuație generală a dreptei**. Dacă  $c = 0$ , iar coeficienții  $a$  și  $b$  sunt diferiți de zero, atunci acestei ecuații îi corespunde dreapta  $y = -\frac{a}{b}x$ , care trece prin originea de coordonate (fig.55).

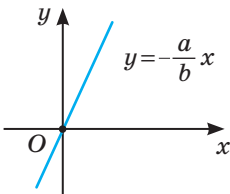


Fig.55

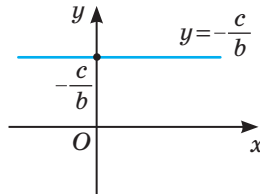


Fig.56

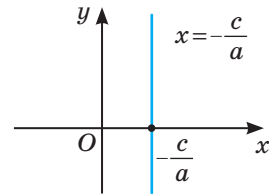


Fig.57

Dacă coeficientul  $a = 0$ , iar  $b \neq 0$ , atunci ecuației îi corespunde dreapta  $y = -\frac{c}{b}$ , care este paralelă cu axa absciselor (fig.56).

Dacă  $b = 0$  și  $a \neq 0$ , atunci acestei ecuații îi corespunde dreapta  $x = -\frac{c}{a}$ , care este paralelă cu axa ordonatei (fig.57).

Dacă  $a = 0$ ,  $b = 0$  și  $c = 0$ , atunci ecuația  $ax + by + c = 0$  este satisfăcută de orice punct al planului de coordonate.

Dacă însă  $a = 0$ ,  $b = 0$  și  $c \neq 0$ , atunci această ecuație nu este satisfăcută de coordonatele nici a unui punct.

Egalitatea  $y = kx + b$  — **ecuația dreptei cu coeficient unghiular**.

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{tg } \alpha \quad (x_1 \neq x_2), \text{ unde } \alpha \text{ — unghiul, făcut de dreaptă cu direcția}$$

pozitivă a axei absciselor.

Dacă dreptele  $l_1$  și  $l_2$  sunt date cu ecuațiile  $y = k_1x + b_1$  și  $y = k_2x + b_2$ , atunci:

- 1)  $l_1 \parallel l_2$  atunci și numai atunci, când  $k_1 = k_2$  și  $p_1 \neq p_2$ ;
- 2)  $l_1 \perp l_2$  atunci și numai atunci, când  $k_1 \cdot k_2 = -1$ .

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \text{ — aceasta-i } \textbf{ecuația dreptei}$$

care trece prin două puncte  $A(x_1; y_1)$  și  $B(x_2; y_2)$ .

*Există deosebire, însă nici o opoziție, între teorie și practică. Teoria depinde de practică, iar practica trebuie să precedă teoriei.*

*Pe pământ nu este nimic mai uimitor decât omul și nimic mai de seamă decât mintea oamenească.*

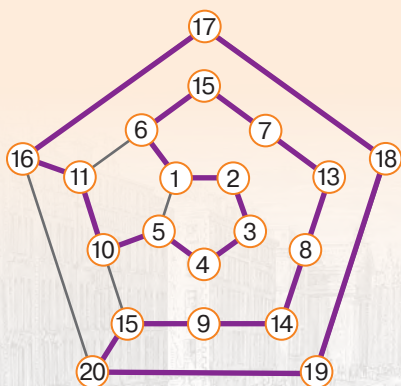


## WILLIAM ROYEN HAMILTON

(1805–1865)

- Ilustru matematician, fizician și astronom irlandez.
- Unul din cei mai remarcabili matematicieni mondiali ai secolului XIX.
- Lucrările lui se evidențiază prin adâncimea gândului și originalitatea metodelor cu pecetea de genialitate proprie lor.

În multiplele sale invenții el a fost predecesorul contemporanilor săi. Descoperirile lui fundamentale în matematică se referă la numerele complexe, cuaternioni, calcul vectorial și analiza vectorială, teoria ecuațiilor diferențiale ș.a.



Una din soluțiile șaradei Hamilton „În jurul lumii”



# Capitolul 2 | Section 2

## Vectors în plan | Vectors In The Plane

---

**Vectorul** – una din noțiunile fundamentale ale matematicii. Istoria apariției și a dezvoltării lui este complicată și interesantă. Cel puțin trei izvoare au creat baza și au dat puteri calcului vectorial. Acestea-s cel geometric (calculul segmentelor), mecanic (examinarea mărimilor vectoriale) și cel algebric (teoria cuaternionilor). Cea mai generală teorie vectorială a fost construită la începutul secolului XX pe bază axiomatică.

Metoda vectorială de rezolvare a problemelor este o metodă importantă și puternică a geometriei elementare.

Afirmațiile demonstrate cu ajutorul ei sunt adevărate nu numai pentru figurile din plan, dar și chiar pentru spațiile tri și  $n$  – dimensionale.

În acest capitol veți face cunoștință cu noțiunea de vector și interpretările diferite ale lui, o să vă învățați a efectua operații cu vectori și să folosiți proprietățile vectorilor la rezolvarea problemelor.

---

### § 7 | Vectori | Vectors

---

### § 8 | Coordonatele vectorului | Vectors Coordinates

---

### § 9 | Adunarea și scăderea vectorilor | Vectors Addition and Subtraction

---

### § 10 | Înmulțirea vectorilor cu un număr | Vector Multiplication by a Number

---

### § 11 | Produsul scalar al vectorilor | Vectors Scalar Product

---

### § 12 | Aplicarea vectorilor | Vectors Use

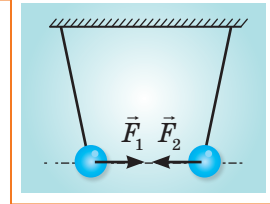
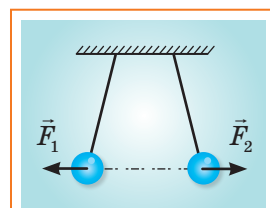
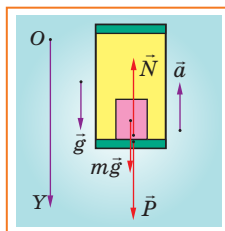
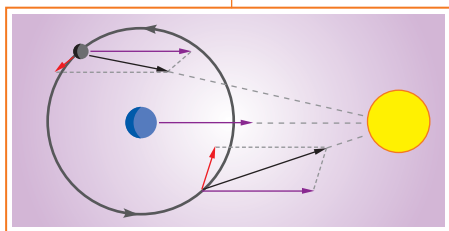
---

**PROIECT DE ÎNVĂȚĂMÂNT**  
"Metoda vectorială de rezolvare a problemelor"

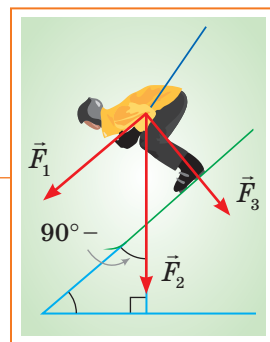
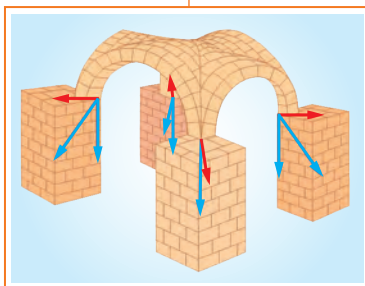
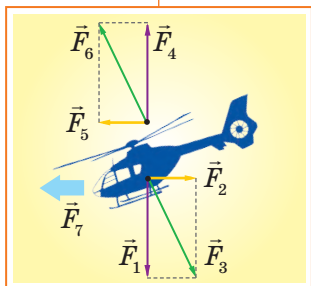
**EDUCATIONAL PROJECT**  
"Tasks Uniting Vectorial Method"

# Necesitatea studierii vectorilor

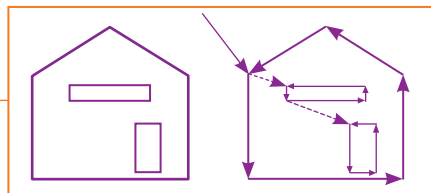
Cu ajutorul metodei vectoriale este comod de caracterizat obiectele geometrice și alte figuri, și corelațiile dintre ele. Anume de aceea vectorii se folosesc efectiv în matematică, fizică, chimie, astronomie și în alte științe ale naturii.



Sunt utilizați vectorii și proprietățile lor de asemenea în multe domenii ale activității umane (în sport, transport, în construcție ș.a.)



În edituri, agențiile de publicitate și oficiile design zilnic sunt create și afișate pe ecrane și în tipar multiple și diverse imagini. Astfel de lucrări se efectuează cu mijloacele tehnologiilor computerizate pe baza unor programe speciale, și anume - a grafiei computerizate. Unul din felurile grafiei computerizate este grafia vectorială, în care pentru descrierea imaginii sunt folosiți vectorii (spre deosebire de grafica de rastru care descrie imaginea ca un masiv de puncte).



Unde mai sunt folosiți vectorii? Aduceți exemple.



# § 7

## Vectorii

Multiple mărimi fizice așa ca forța, viteza, accelerația se caracterizează nu numai cu valorile numerice, ci și cu direcția. De exemplu, pentru a caracteriza mișcarea unui corp nu este suficient de-a spune că el se mișcă cu viteza de 10 minute pe secundă, trebuie de indicat și direcția mișcării lui. Pe drumuri direcțiile obligatorii a mișcării sunt determinate de semnele rutiere (fig.58).



Fig.58

Mărimile, care se caracterizează nu numai cu valorile numerice, dar și cu direcțiile, se numesc **vectoriale**, iar valorile mărimilor vectoriale – **vectori**.

**Segment orientat** – acesta-i segmentul, pe care este indicată direcția. Una din extremitățile lui se consideră *origine*, iar a doua – *extremitate, capăt*. Pe desen direcția se reprezintă cu o săgeată. Dacă  $A$  și  $B$  — originea și extremitatea segmentului orientat, atunci el este notat astfel:  $\overline{AB}$  (fig.59). Uneori segmentele orientate se notează și cu litere minuscule:  $\vec{a}$ ,  $\vec{x}$  ș.a.

Distanța dintre origine și extremitate – lungimea segmentului orientat. Ea este de asemenea numită modulul sau **lungimea vectorului**  $\overline{AB}$ , și se notează  $|\overline{AB}|$  sau  $|\vec{a}|$ . A reprezenta vectorii cu segmente orientate este comod, deoarece astfel de reprezentări sunt intuitive. În figura 60 patru segmente orientate reprezintă cele mai importante forțe care acționează asupra avionului ce se află în zbor:  $\vec{a}$  — forța de tracțiune,  $\vec{b}$  — forța de ridicare,  $\vec{c}$  — forța de rezistență a aerului,  $\vec{d}$  — forța de greutate.



Fig.59

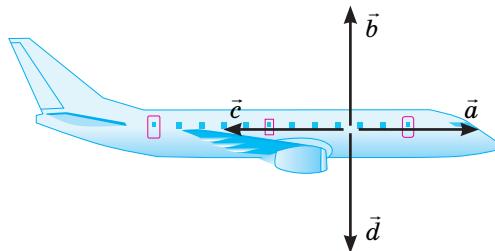


Fig.60

**Observație.** Vectorul și segmentul orientat, care reprezintă acest vector – nu este una și aceeași. Dar pentru simplificarea expunerii în cele ce urmează în loc de îmbinarea de cuvinte „vectorul, reprezentat de segmentul orientat  $\overline{AB}$ » și „segmentul orientat care reprezintă vectorul  $\overline{AB}$ » vom scrie pe scurt: „vectorul  $\overline{AB}$ ».

Doi vectori se numesc **coliniari**, dacă ei sunt amplasați pe aceeași dreaptă sau drepte paralele.

Vectorii coliniari pot fi coorientați, adică **orientați în același sens** (fig.61), sau **orientați în sens opus** (fig.62). Vectorii coorientați se notează cu semnul  $\uparrow\uparrow$ , iar orientați în sens opus – cu semnul  $\uparrow\downarrow$ . De exemplu, în figura 63:  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$ , iar  $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{c}$ .

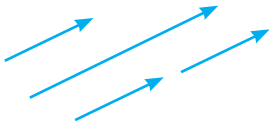


Fig.61



Fig.62

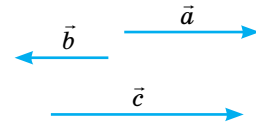


Fig.63

Vectorii orientați în sens opus cu moduli egali se numesc **vectori opuși** (fig.64).

Doi vectori se numesc **egali**, dacă ei sunt coorientați și au moduli egali (fig.65). Se scrie:  $\overline{AB} = \overline{XY}$ .

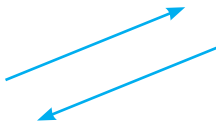


Fig.64

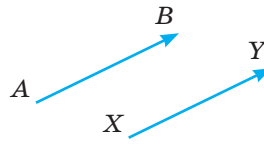


Fig.65

Dacă modulul vectorului este egal cu 1, el este numit **vector unitar**.

Segmentele orientate reprezintă numai vectori nenuli. Afară de ei există și **vectorul nul**, care nu are nici lungime, nici direcție. El se notează cu simbolul  $\vec{0}$  sau  $\overline{AA}$ ,  $\overline{BB}$  ș.a. Ne putem imagina vectorul nul ca vectorul extremitatea căruia coincide cu originea. Vectorul nul se consideră colinar cu orice vector. Modulul vectorului nul se consideră egal cu zero.

De la orice punct se poate depune un vector, care este egal cu vectorul dat, și numai unul. A depune vectorul  $\overline{AB}$  de la punctul  $X$  — aceasta înseamnă de desenat un astfel de segment orientat  $\overline{XY}$ , ca  $\overline{XY} = \overline{AB}$ . Fie că se dă vectorul  $\overline{AB}$  și punctul  $X$ . Să arătăm cum de la punctul  $X$  de depune vectorul  $\overline{XY}$ , care este egal cu vectorul  $\overline{AB}$ .



1. Dacă punctul  $X$  aparține dreptei  $a$ , care conține vectorul  $\overline{AB}$  (fig.66,  $a$ ), atunci de la punctul  $X$  trebuie de depus segmentul  $\overline{XY}$ , a cărui lungime este egală cu lungimea vectorului  $\overline{AB}$ . Direcția vectorului  $\overline{XY}$  coincide cu direcția vectorului  $\overline{AB}$  (fig.66,  $b$ )



Fig.66

2. Dacă punctul  $X$  nu este situat pe dreapta  $a$ , căreia îi aparține vectorul  $\overline{AB}$  (fig.67,  $a$ ), atunci prin punctul  $X$  trebuie de dus dreapta  $b$ , paralelă cu dreapta  $a$  și de depus de la punctul  $X$  segmentul  $\overline{XY}$ , lungimea căruia este egală cu lungimea vectorului  $\overline{AB}$ . Direcția vectorului  $\overline{XY}$  coincide cu direcția vectorului  $\overline{AB}$  (fig.67,  $b$ ).

3. Dacă  $\overline{AB} = \vec{0}$ , atunci vectorul căutat va fi vectorul  $\overline{XX}$ .

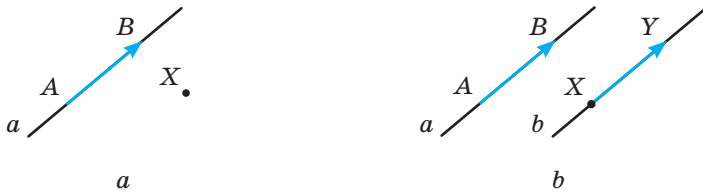


Fig.67

### PENTRU CEI CURIOSI

Cu unul și același cuvânt „vector” deseori sunt numite diferite noțiuni, deoarece vectorii sunt liberi, legați, alunecători. Vectorul liber se determină numai de lungime și direcție, iar cel legat - de lungime, direcție și de punctul de aplicare. Două segmente egale ca lungime și la fel orientate înseamnă unul și același vector liber (fig.68).



Fig.68

Doi vectori legați, notați cu segmente egale ca lungime și la fel orientate, nu totdeauna sunt egali (fig.69). Forța  $\vec{F}$  nu poate fi înlocuită cu forța  $\vec{F}_1$ , deoarece una din ele rotește scriptele în o direcție, iar a doua - în direcția opusă.

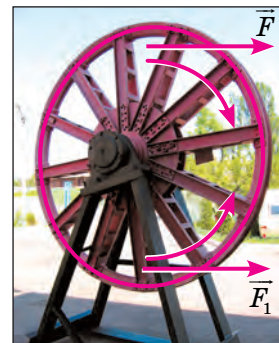


Fig.69

Fizicienii frecvent folosesc vectorii legați și le reprezintă cu săgeți rectilinii, deoarece așa reprezentări sunt intuitive. În matematică se examinează numai vectori liberi și sunt definiți ei nu numai cu săgeți, ci și cu perechi de puncte, perechi de numere ș.a.

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Care mărimi sunt numite vectoriale?
2. Aduceți exemple de mărimi vectoriale.
3. Cum sunt reprezentați și notați vectorii?
4. Care vectori se numesc coliniari?
5. Care vectori se numesc egali? Dar opuși?
6. Ce se numește modulul vectorului?
7. Care vector se numește unitar? Dar nul?

## EFFECTUĂM ÎMPREUNĂ

- 1 Demonstrați că dacă mijlocurile segmentelor  $AC$  și  $BD$  coincid, atunci  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .
- Admitem că  $M$  — este mijlocul comun al segmentelor  $AC$  și  $BD$ . Dacă segmentele date nu sunt situate pe aceeași dreaptă, atunci patrulaterul  $ABCD$  — paralelogram (fig.70). Laturile opuse ale paralelogramului sunt paralele și egale. De aceea  $\overline{AB} = \overline{DC}$ . Dacă segmentele date aparțin aceleiași drepte, atunci ele pot fi repartizate așa, cum se reprezintă în figura 71.

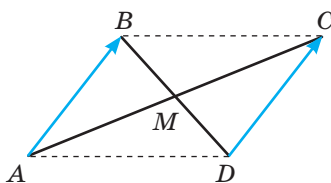


Fig.70

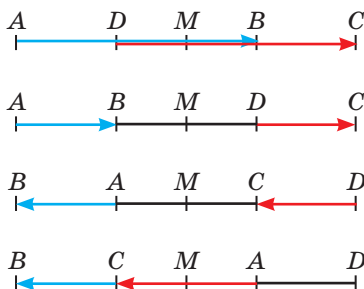


Fig.71

În fiecare din aceste cazuri segmentele orientate  $\overline{AB}$  și  $\overline{DC}$  au lungimi egale și aceleași direcții. Așadar, totdeauna  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .

- 2  $ABCD$  — pătrat (fig.72). Oare sunt egali vectorii  $\overline{AB}$  și  $\overline{BC}$ ? Dar vectorii  $\overline{MN}$  și  $\overline{AO}$  ( $M$  și  $N$  — mijlocurile laturilor  $AB$  și  $BC$ )?
- Vectorii  $\overline{AB}$  și  $\overline{BC}$  nu sunt egali. Măcar că ei au aceeași lungime, însă direcțiile lor sunt diferite.  $MN$  — linia medie  $\triangle ABC$ , de aceea  $MN \parallel AC$ , iar aceasta înseamnă, că  $MN \parallel AO$  și  $MN = 0,5 AC = AO$ . Deci, vectorii  $\overline{MN}$  și  $\overline{AO}$  sunt coorientați și au lungimi egale, de aceea  $\overline{MN} = \overline{AO}$ .

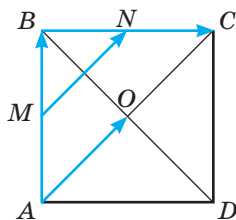


Fig.72

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

- 231.** Care din vectorii reprezentați în figura 73 sunt:  
 a) coliniari; b) coorientați; c) orientați în sens opus?
- 232.** Punctu  $O$  — mijlocul segmentului  $AB$ . Oare sunt coliniari vectorii  $\overline{AO}$  și  $\overline{OB}$ ? Dar vectorii  $\overline{AO}$  și  $\overline{BO}$ ? Oare sunt egali acești vectori?
- 233.** Triunghiul  $ABC$  — echilateral. Oare sunt egali vectorii  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  și  $\overline{AC}$ ?
- 234.**  $ABCD$  — pătrat. Oare sunt egali vectorii  $\overline{AB}$  și  $\overline{CD}$ ,  $\overline{CB}$  și  $\overline{DA}$ ,  $\overline{AC}$  și  $\overline{BD}$ ?
- 235.** Care din vectorii reprezentați în figura 74 sunt: coliniari; b) coorientați; c) orientați în sens opus? Determinați lungimile acestor vectori, luând drept unitate lungimea laturii pătrățelului. Oare sunt printre ei vectori egali? Dar opuși?
- 236.** În figura 75 sunt reprezentate două triunghiuri echilaterale egale  $AFB$  și  $BDC$ , în care punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  aparțin aceleași drepte. Se știe că  $\overline{AB} = \vec{p}$ ,  $\overline{AF} = \vec{q}$ ,  $\overline{DC} = \vec{r}$ . Care din afirmațiile, aduse mai jos, este adevărată?

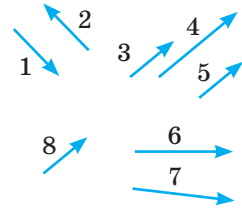


Fig.73

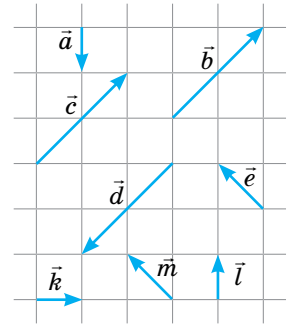


Fig.74

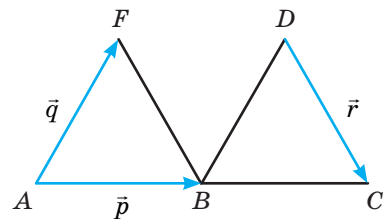


Fig.75

### A

- 237.** Desenați două segmente orientate, amplasate: a) pe aceeași dreaptă; b) pe drepte paralele, c) pe drepte perpendiculare.
- 238.** Desenați segmentele orientate  $AB$  și  $AC$  cu lungimile de 2 cm și 3 cm corespunzător, dacă vectorii  $\overline{AB}$  și  $\overline{AC}$  sunt: a) necoliniari; b) coorientați; c) orientați în sens opus.
- 239.** Desenați doi vectori, care au lungimi egale și sunt : a) necoliniari; b) coorientați; c) orientați în sens opus. În care caz vectorii sunt egali? Dar opuși?

240.  $ABCD$  — dreptunghi. Oare sunt vectori egali printre vectorii  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$ ? Care din vectorii dați au lungimi egale?
241. Sunt date punctele  $A(2; 5)$  și  $B(-2; 2)$ . Construiți vectorul  $\overline{AB}$ . Aflați lungimile vectorilor  $\overline{AB}$  și  $\overline{BA}$ . Oare sunt egali acești vectori?
242. Desenați vectorul nenul  $\vec{a}$  și punctele  $M, N, P$ . Depuneți de la aceste puncte vectori egali cu vectorul  $\vec{a}$ .
243.  $ABCD$  — romb. Depuneți vectorul, egal cu  $\overline{AB}$ , de la: a) punctul  $C$ ; b) mijlocul laturii  $BC$ ; c) mijlocul diagonalei  $AC$ .
244.  $ABCD$  — paralelogram. Demonstrați egalitatea vectorilor  $\overline{AB}$  și  $\overline{DC}$ .
245. Demonstrați că  $ABCD$  este paralelogram, dacă  $\overline{AB} = \overline{DC}$ .
246. Folosind figura 76, stabiliți corespondența dintre vectorii, dați de condițiile (1-4) și vectorii (A-E).

- 1 Vectorul egal cu  $\overline{MN}$
- 2 Vectorul opus  $\overline{NP}$
- 3 Vectorul coorientat cu  $\overline{AP}$
- 4 Vectorul colinar cu  $\overline{AN}$

- A  $\overline{KP}$
- B  $\overline{AM}$
- C  $\overline{MP}$
- D  $\overline{KM}$
- E  $\overline{NK}$

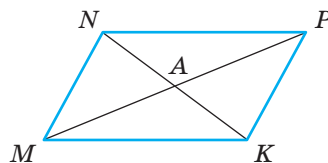


Fig.76

## B

247. Triunghiul  $ABC$  este isoscel,  $AB = BC$  (fig.77).  $M, N, K$  – mijlocurile laturilor lui. Scrieți toți vectorii reprezentați în figură. Care din acești vectori sunt: a) coliniari; b) egali; c) opuși?
248. Sunt date punctele  $A(2; 3)$  și  $B(-1; 6)$ . Construiți vectorul  $\overline{AB}$ . Depuneți din originea de coordonate vectorul, egal cu vectorul: a)  $\overline{AB}$ ; b)  $\overline{BA}$ . Depuneți tot acești vectori din punctul  $P(-3; 2)$ .
249. Sunt date punctele  $M(2; 2)$  și  $N(6; 5)$ . Construiți un vector arbitrar  $\vec{a}$ , care: a) este egal cu vectorul  $\overline{MN}$ ; b) egal cu vectorul  $\overline{NM}$ ; c) este coorientat cu vechiul  $\overline{NM}$  și  $|\vec{a}| = 2|\overline{MN}|$ ; d) nu este colinar cu vectorul  $\overline{MN}$  și  $|\vec{a}| = 0,5|\overline{MN}|$ .
250. Construiți dreptunghiul  $ABCD$ , a cărui arie este egală cu  $30 \text{ cm}^2$ , iar perimetrul cu  $22 \text{ cm}$ . De reprezentat și de scris patru perechi de vectori egali, notând punctul de intersecție al diagonalelor cu  $O$ . Care sunt lungimile lor?
251.  $O$  — punctul de intersecție al diagonalelor dreptunghiului  $EHPK$ ,  $EH = 6 \text{ cm}$ ,  $HP = 8 \text{ cm}$ . Aflați lungimile vectorilor  $\overline{OE}$ ,  $\overline{OH}$  și  $\overline{PO}$ . Oare sunt printre ei vectori egali?

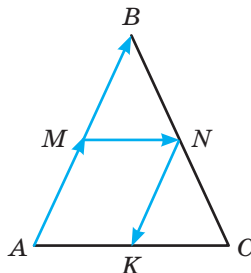


Fig.77

252. Determinați tipul patrulaterului  $ABCD$ , dacă  $\overline{BC} = \overline{AD}$  și  $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$ .
253. Stabiliți tipul patrulaterului  $ABCD$  și reprezentați-l, dacă:
- vectorii  $\overline{AD}$  și  $\overline{BC}$  sunt coliniari, iar  $\overline{AB}$  și  $\overline{CD}$  — nu;
  - vectorii  $\overline{AB}$  și  $\overline{CD}$  sunt opuși;
  - vectorii  $\overline{BC}$  și  $\overline{AD}$  sunt coorientați și  $|\overline{AC}| = |\overline{BD}|$ .

### ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

254. Alegând scara desenați vectorii care ilustrează zborul avionului mai întâi cu 300 km la sud de la orașul  $A$  până la  $B$ , iar apoi cu 500 km la răsărit de la orașul  $B$  până la  $C$ . Desenați vectorul  $\overline{AC}$  și aflați lungimea lui cu două procedee. Comparați valorile obținute. Cum se poate interpreta vectorul  $\overline{AC}$  și lungimea lui?

### PROBLEME PENTRU REPETARE

255. Scrieți ecuația circumferinței de rază 3 cm cu centrul în punctul  $A(-1; 3)$ .
256. Aflați perimetrul și aria triunghiului  $ABC$ , dat cu coordonatele vârfurilor lui  $A(-2; 5)$ ,  $B(5; 6)$ ,  $C(1; 2)$ .
257. Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu 14 cm și 48 cm. Aflați lungimea celei mai scurte mediane.
258. laturile paralelogramului sunt egale cu 8 cm și 12 cm, iar aria lui 48 cm<sup>2</sup>. Aflați distanța de la punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului până la laturile lui.

### GEOMETRIA DIN JURUL NOSTRU



Vectorii în sport și odihnă

# § 8

## Координате vectorului

Vectorii pot fi definiți cu procedee diferite. Să vedem cum se poate face aceasta cu ajutorul coordonatelor. **Coordonate ale vectorului**  $\overline{AB}$  cu originea  $A(x_1; y_1)$  și extremitatea  $B(x_2; y_2)$  se numesc numerele  $x = x_2 - x_1$  și  $y = y_2 - y_1$ . Se scrie așa un vector, indicând coordonatele lui:  $\overline{AB} = (x; y)$ , sau  $\vec{a} = (x; y)$ , sau  $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ . De exemplu, dacă sunt date punctele  $A(1; 3)$  și  $B(7; -2)$ , atunci  $\overline{AB} = (6; -5)$ . Numerele 6 și 5 sunt coordonatele vectorului  $\overline{AB}$  (fig.78). Vectorul  $\overline{OC}$ , a cărui origine este punctul  $O(0; 0)$ , iar extremitatea —  $C(6; -5)$ , are tot aceleași coordonate. Dacă  $O$  — originea de coordonate, iar numerele  $x$  și  $y$  — coordonatele punctului  $A$ , atunci tot aceste numere sunt de asemenea coordonatele vectorului  $OA$  (fig.79).

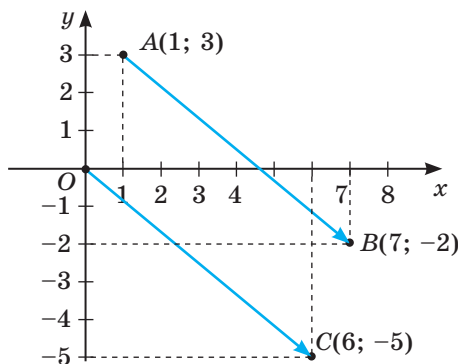


Fig.78

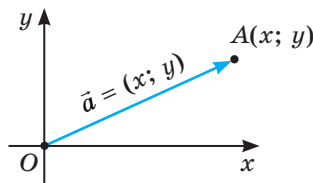


Fig.79

Coordonatele vectorului pot fi orice numere reale. Dacă ambele coordonate ale vectorului sunt zerouri, pe el îl numesc **vector nul** (se notează  $\vec{0}$ ). Amintim că acesta este unicul vector, care nu are o anumită direcție și căruia nu-i corespunde segment orientat.

Dacă doi vectori egali (coorientați și de aceeași lungimi) de le depus de la originea de coordonate, atunci extremitățile lor vor coincide. Deci, vectorii sunt **egali atunci și numai atunci, când ale lor coordonate corespunzătoare sunt egale**.

Coordonatele corespunzătoare ale vectorilor opuși sunt numere opuse.

*Modulul vectorului* cu coordonatele  $x$  și  $y$  este egal cu  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Aceasta rezultă din formula distanței dintre două puncte (§ 4). Deci, dacă vectorul  $\vec{a} = (x; y)$ , atunci modulul lui

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Dacă punctul  $A(x_1; y_1)$  este originea, iar  $B(x_2; y_2)$  — extremitatea vectorului, atunci modulul lui  $|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ .

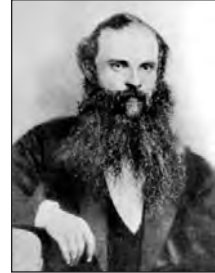
## PENTRU CEI CURIOSI

Perechea ordonată de numere, perechea ordonată de puncte, care determină începutul și sfârșitul mișcării, segmentul orientat toate acestea sunt modele a noțiunii „vectori”. O astfel de abordare a înțelegerii vectorului este condiționată istoricește. Dezvoltarea calculului vectorial avea loc pe căi diferite: geometrică (calculul segmentelor orientate), fizică (cercetarea mărimilor vectoriale) și algebrică (extinderea noțiunii de număr și operații). Calculul segmentelor orientate era dezvoltat de K. Wessel, L. Carno.

Dintre savanții naționali direcția geometrică în formarea teoriei calculului vectorial îl reprezintă profesul Universității din Kiev V. Ermakov. În anul 1887 în Kiev el a tipărit lucrarea „Teoria vectorilor în plan. Utilizarea la examinarea secțiunilor conice”.

Mărimile vectoriale referitoare la problemele mecanicii le-au cercetat D. Wallis, L. Poinsot, A de Senvenan. Direcția algebrică era dezvoltată de U. Hamilton, D. Maxurell. Unul din primii savanții autohtoni, care a construit teoria vectorială pe bază algebrică a fost profesorul Universității din Kiev P. Romer.

Folosind coordonatele se poate destul de ușor de cercetat proprietățile figurilor nu numai pe plan ( spațiul bidimensional), dar și în cel tridimensional, patrudimensional și în general a spațiului  $n$  – dimensional. Vectorii spațiului tridimensional, pe care îl veți studia în clasele superioare, sunt determinați de trei coordonate  $\vec{a} = (x; y; z)$ , vectorii spațiului patrudimensional – de patru coordonate  $\vec{m} = (a; b; c; d)$  ș.a.m.d.



Vasile Ermakov  
(1845–1922)

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Ce se numesc coordonate ale vectorului?
2. Cum de găsit coordonatele vectorului, dacă sunt cunoscute coordonatele originii și a extremității lui?
3. Ce este modulul vectorului? Cum de aflat modulul vectorului, dat cu coordonate?
4. Ce coordonate are vectorul nul?
5. Formulați condiția egalității vectorilor, dați în forma de coordonate.
6. Ce coordonate au vectorii opuși?

## EFACTUĂM ÎMPREUNĂ

- 1 Demonstrați că patrulaterul cu vârfurile în punctele  $A(-4; 1)$ ,  $B(-1; 2)$ ,  $C(5; 0)$ ,  $D(2; -1)$  este paralelogram. Aflați perimetrul lui.
- Aflăm coordonatele vectorilor  $\vec{AB}$  și  $\vec{DC}$ .  
 $\vec{AB} = (-1 + 4; 2 - 1) = (3; 1)$ ,  $\vec{DC} = (5 - 2; 0 + 1) = (3; 1)$ .

Coordonatele vectorilor sunt egale, deci, acești vectori sunt egali,  $\overline{AB} = \overline{DC}$ . Iar din aceasta rezultă, că  $AB \parallel DC$  și  $AB = DC$ . De aici, conform criteriului,  $ABCD$  — paralelogram. Să găsim perimetrul lui.  $|\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$  și  $|\overline{BC}| = \sqrt{(5+1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ . De aici  $P = 2(\sqrt{10} + 2\sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$ .

- 2 Se dau punctele  $K(2; 2)$ ,  $P(3; -1)$ ,  $T(2; 8)$ . Găsiți coordonatele a unui astfel de punct  $M(x; y)$ , că  $\overline{TM} = \overline{KP}$ .
- Admitem că  $M(x; y)$ . Aflăm coordonatele vectorilor:  $\overline{TM} = (x-2; y-8)$ ,  $\overline{KP} = (1; -3)$ . Vectorii sunt egali dacă coordonatele corespunzătoare ale lor sunt egale. De aceea: 
$$\begin{cases} 1 = x - 2, \\ -3 = y - 8, \end{cases} \text{ de unde: } \begin{cases} x = 3, \\ y = 5. \end{cases} \text{ Așadar, } M(3; 5).$$

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

259. Sunt date punctele  $A(1; 3)$ ,  $B(2; -4)$ ,  $C(-3; 5)$ ,  $D(-2; -7)$ ,  $O(0; 0)$ . Indicați coordonatele vectorilor  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ ,  $\overline{OD}$ .
260. Numiți vectorii reprezentați în figura 80. Care din ei are modulul cel mai mare? Dar cel mai mic?
261. Aflați coordonatele vectorilor, reprezentați în figura 80.

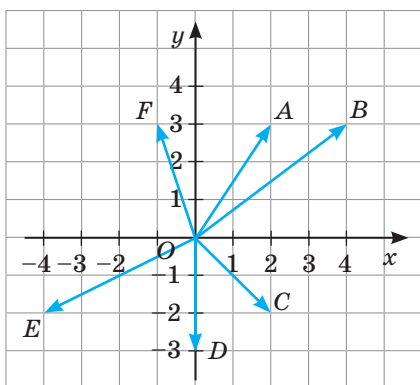


Fig.80

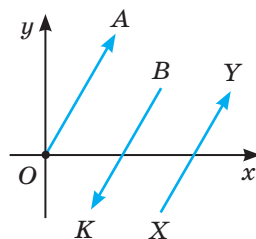


Fig.81

262. În figura 81 sunt reprezentați trei vectori coliniari de aceeași lungime. Știe că  $\overline{XY} = (2; 3)$ . Aflați:
- coordonatele vectorului  $\overline{BK}$ ;
  - coordonatele punctului A.



263. Aflați  $|\vec{a}|$ , dacă:

- a)  $\vec{a} = (1; 1)$ ; b)  $\vec{a} = (3; 4)$ ; c)  $\vec{a} = (-6; 8)$ ; d)  $\vec{a} = (2; 2)$ .

264. Indicați coordonatele vectorilor  $\overline{AB}$  și  $\overline{BA}$ , dacă:

- a)  $A(0; 0)$ ,  $B(-2; 2)$ ; c)  $A(1; 0)$ ,  $B(0; 2)$ ;  
b)  $A(0; 1)$ ,  $B(4; 1)$ ; d)  $A(1; 1)$ ,  $B(-2; 6)$ .

**A**

265. Sunt date punctele  $A(2; 4)$ ,  $B(-1; 0)$ ,  $C(8; -6)$ ,  $D(-3; -4)$ ,  $O(0; 0)$ . Construiți vectorii:  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ ,  $\overline{OD}$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{CD}$ . Aflați coordonatele și modulii lor.

266. Sunt date punctele  $A(-1; 3)$ ,  $B(4; 2)$ ,  $C(-3; -1)$ ,  $D(2; -2)$ . Aflați coordonatele vectorilor  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BD}$ . Oare printre ei sunt vectori egali?

267. Aflați coordonatele vectorilor, reprezentați în fig. 82 și modulii lor.

268. Depuneți din originea de coordonate vectorii  $\vec{a} = (1; 5)$ ,  $\vec{b} = (5; 1)$ ,  $\vec{c} = (3; -4)$ ,  $\vec{d} = (-2; -2)$ .

269. Depuneți vectorii  $\vec{m} = (2; 4)$  și  $\vec{n} = (3; -1)$  din punctele  $O(0; 0)$ ,  $A(-4; 2)$ ,  $B(-2; -3)$ ,  $C(5; 0)$ .

270. Aflați modulul vectorului, dacă coordonatele lui  $x$  și  $y$  sunt corespunzător egale cu:

- a) 5 și 12; c) 1 și 7;  
b) -3 și 4; d) -6 și -8.

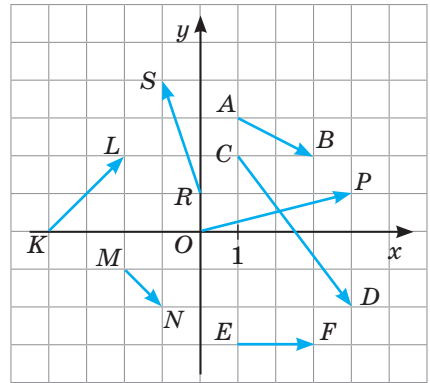


Fig.82

271. Sunt dați vectorii  $\overline{AB} = (5; 3)$ ,  $\overline{CD} = (-4; 6)$ ,  $\overline{MN} = (3; -2)$ . Găsiți coordonatele vectorilor  $\overline{BA}$ ,  $\overline{DC}$ ,  $\overline{NM}$ .

272. Sunt date punctele  $M(1; 3)$ ,  $N(7; 5)$ ,  $K(5; -1)$ . Găsiți coordonatele vectorilor  $\overline{MN}$ ,  $\overline{NK}$ ,  $\overline{MK}$  și modulii lor. Stabiliți tipul triunghiului  $MNK$ .

273. Oare va fi patrulaterul  $ABCD$  paralelogram, dacă :

- a)  $A(1; 3)$ ,  $B(4; -1)$ ,  $C(2; -3)$ ,  $D(-1; 1)$ ;  
b)  $A(-3; 0)$ ,  $B(-1; 2)$ ,  $C(2; 1)$ ,  $D(1; -1)$ ?

**B**

274.  $AD$  — mediana triunghiului cu vârfurile  $A(2; 3)$ ,  $B(4; 5)$ ,  $C(7; 3)$ . Aflați coordonatele vectorului  $\overline{AD}$ .

275. Sunt date punctele  $A(a_1; a_2)$ ,  $B(b_1; b_2)$ ,  $C(a_1 + k; a_2 + p)$ ,  $D(b_1 + k; b_2 + p)$ . Oare sunt egali vectorii  $\overline{AB}$  și  $\overline{CD}$ ? Dar vectorii  $\overline{AC}$  și  $\overline{BD}$ ?

**276.**  $ABCD$  — romb (fig.83). Aflați coordonatele vectorilor  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ , dacă  $AC = 8$ ,  $BD = 4$ .

**277.** *Problemă deschisă* Sunt date punctele  $A(2; 5)$ ,  $B(-1; 1)$ ,  $C(4; 1)$ ,  $D(1; 5)$ . Aflați coordonatele și lungimile vectorilor ...

**278.** Aflați coordonatele punctului  $B$ , dacă:

a)  $\overline{AB} = (1; 3)$  și  $A(2; 5)$ ; c)  $\overline{PB} = (-11; -4)$  și  $P(1; 5)$ ;

b)  $\overline{BM} = (-2; 7)$  și  $M(-5; 3)$ ; d)  $\overline{BD} = (1; -6)$  și  $D(-10; 2)$ .

**279.** Găsiți coordonatele celui de-al patrulea vârf al paralelogramului, reprezentat în figura 84.

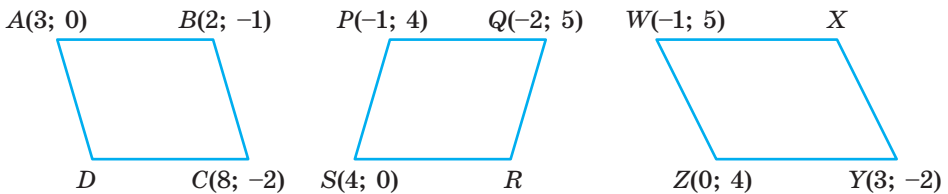
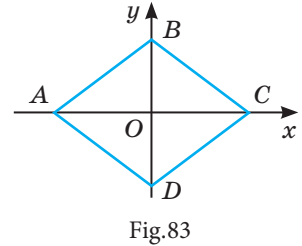


Fig.84

**280.** Pentru care valoare a lui  $x$  modulul vectorului  $\vec{a}$  este egal cu 10, dacă:

a)  $\vec{a} = (6; x)$ ; b)  $\vec{a} = (x-1; 6)$ ; c)  $\vec{a} = (x; x+2)$ ; d)  $\vec{a} = (x+2; 3x-4)$ ?

**281.** Pentru care valoare a lui  $m$  vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt egali, dacă:

a)  $\vec{a} = (4; m^2)$ ,  $\vec{b} = (4; m)$ ;

b)  $\vec{a} = (m-1; 16)$ ,  $\vec{b} = (3; m^2)$ ;

c)  $\vec{a} = (12; -4-2m)$ ,  $\vec{b} = (12; m^2-3)$ ?

### ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

**282.** *Cercetare de învățătură.*

1. Aflați coordonatele vectorilor  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AD}$ ,  $\overline{AC}$ , dacă:

a)  $A(-1; 3)$ ,  $B(2; 4)$ ,  $C(-2; -1)$ ,  $D(-5; -2)$ ;

b)  $A(5; 0)$ ,  $B(4; -3)$ ,  $C(-2; -1)$ ,  $D(-1; 2)$ ;

c)  $A(5; -2)$ ,  $B(1; 3)$ ,  $C(2; 5)$ ,  $D(6; 0)$ .

Rezultatele pentru fiecare din cazurile a) – c) scrieți-le în tabel. Ce dependență se poate vedea? Formulați ipoteza.

		$\overline{AB}$	$\overline{AD}$	$\overline{AC}$	$\overline{AB} + \overline{AD}$
a)	$x$				
	$y$				

2. Індепленіть о інсърцнаре аналогікър пентру алте пункте:

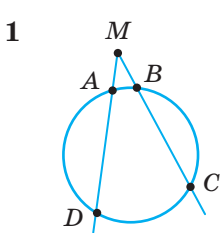
- a)  $A(4; 3), B(2; 4), C(-2; -1), D(5; -2)$ ;
- b)  $A(0; 5), B(-3; 4), C(-1; -2), D(2; -1)$ ;
- c)  $A(5; -2), B(1; 3), C(2; 5), D(6; 0)$ .

Оаре s-a confirmat ipoteza fърcutър de voi?

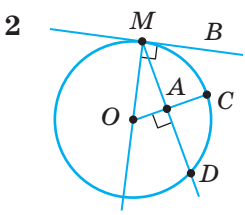
3. Reprerentър ін sistemul de coordonare pунктеle date ін інсърцнърле an-terioare. Determinър іпul fіecърui patrulater. Faceі concluzia.

**PROBLEME PENTRU REPETARE**

- 283. Se іtie, cър  $\overline{AB} = \overline{BC}$ . Demonstrър: a) pунктеle  $A, B$  і  $C$  sunt situate pe aceeaі dreaptър; b) pунctul  $B$  – mijlocul segmentului  $AC$ .
- 284.  $M, N, P$  – sunt mijlocurile laturilor  $AB, BC, AC$  ale triunghiului echilateral  $ABC$ . Demonstrър: a)  $\overline{MN} = \overline{AP}$ ; b)  $\overline{AM} = \overline{PN}$ .
- 285. Aflър aria triunghiului dreptunghic, dacър diferenа catetelor este egalър cu 2 cm, iar cea mai micър medianър este egalър cu 5 cm.
- 286. Stabiliі correspondenа dintre figurile (1-4) і formulele (A-E), care pot fi folosite pentru a determina unghiul  $AMB$ , reprerentat ін figura corespunzърtoare.



A  $\angle AMB = \frac{1}{2} (\widehat{DC} - \widehat{AB})$

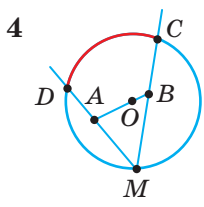
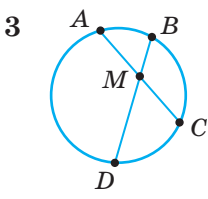


B  $\angle AMB = \frac{1}{2} \widehat{DM}$

C  $\angle AMB = \widehat{DC}$

D  $\angle AMB = \frac{1}{2} (\widehat{AB} + \widehat{DC})$

E  $\angle AMB = \frac{1}{2} \widehat{DC}$



# § 9

## Adunarea și scăderea vectorilor

Vectorii, ca și numerele se pot aduna și scădea. **Suma vectorilor**

$\vec{a} = (x_1; y_1)$  și  $\vec{b} = (x_2; y_2)$  este numit vectorul

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2).$$

De exemplu, dacă  $\vec{a} = (3; 2)$ ,  $\vec{b} = (-1; 4)$ , atunci  $\vec{a} + \vec{b} = (3 - 1; 2 + 4) = (2; 6)$ .

Pentru vectorii arbitrari  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  se îndeplinesc *proprietățile comutativă și asociativă ale adunării*:

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a}, \\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.\end{aligned}$$

Să demonstrăm proprietatea comutativă. Dacă  $\vec{a} = (x_1; y_1)$  și  $\vec{b} = (x_2; y_2)$ , atunci

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2) \text{ și } \vec{b} + \vec{a} = (x_2 + x_1; y_2 + y_1).$$

Fiind că  $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$  și  $y_1 + y_2 = y_2 + y_1$ , pentru că numerele reale realizează proprietatea comutativă a adunării, rezultă că și

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Proprietatea asociativă se poate demonstra analogic. Geometric suma a doi vectori poate fi găsită după regula triunghiului.

**Care n-ar fi vectorii  $\overline{AB}$  și  $\overline{BC}$ , totdeauna  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$**  (fig. 85).

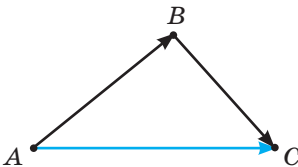


Fig.85

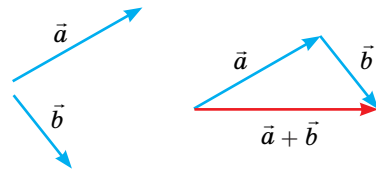


Fig.86

Într-adevăr, pentru oricare trei puncte  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ ,  $C(x_3; y_3)$

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1), \overline{BC} = (x_3 - x_2; y_3 - y_2), \overline{AC} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1).$$

De aceea  $\overline{AB} + \overline{BC} = (x_2 - x_1 + x_3 - x_2; y_2 - y_1 + y_3 - y_2) = (x_3 - x_1; y_3 - y_1) = \overline{AC}$ .

Pentru a aduna doi vectori conform regulii triunghiului, trebuie de repartizat acești vectori consecutiv, adică astfel ca originea celui de-al doilea vector să coincidă cu extremitatea primului. Suma vectorilor va fi vectorul, al cărui origine coincide cu originea primului vector, iar extremitatea – cu extremitatea celui de-al doilea vector.

De exemplu, pentru a aduna vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , reprezentați în figura 86, trebuie dintr-un punct arbitrar de deplasat vectorul  $\vec{a}$ , iar din extremitatea vectorului  $\vec{a}$  de deplasat vectorul  $\vec{b}$ . Sumă a acestor vectori va fi vectorul  $\vec{c}$ , originea căruia se suprapune cu originea lui  $\vec{a}$ , iar extremitatea – cu extremitatea lui  $\vec{b}$ .

Suma vectorilor poate fi găsită și conform *regulii paralelogramului*. În acest caz vectorii trebuie amplasați astfel, ca ei să aibă aceeași origine, și pe acești vectori, ca pe laturi de construit paralelogramul.

Dacă  $ABCD$  — paralelogram, atunci  $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$  (fig. 87).



Adunarea vectorilor

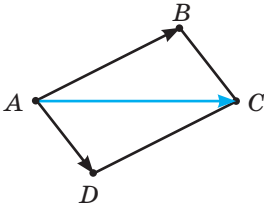


Fig.87

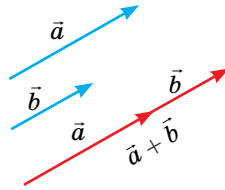


Fig.88

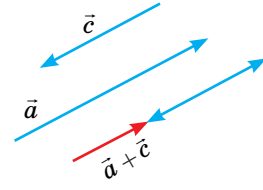


Fig.89

Doar în acest caz  $\overline{AD} = \overline{BC}$ , de aceea  $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ .

Pentru a aduna doi vectori coliniari ei sunt amplasați consecutiv. Sumă a vectorilor va fi vectorul, a cărui origine coincide cu originea primului, iar extremitatea - cu extremitatea celui de-al doilea. În figura 88 se arată cum de aflat suma vectorilor, dacă ei sunt coorientați, iar în figura 89 – dacă vectorii sunt orientați în sens opus.

Din regula adunării vectorilor coliniari rezultă că suma vectorilor opuși este egală cu  $\vec{0}$ , adică  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$  și  $\overline{AB} + \overline{BA} = \vec{0}$ .

**Diferența a vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$**  este numit un astfel de vector  $\vec{c}$ , care în sumă cu vectorul  $\vec{b}$  ne dă vectorul  $\vec{a}$ . Dacă  $\vec{a} = (x_1; y_1)$  și  $\vec{b} = (x_2; y_2)$ , atunci  $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$ .

Doar  $(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = (x_1 - x_2 + x_2; y_1 - y_2 + y_2) = (x_1; y_1) = \vec{a}$ .

Pentru oricare vectori  $\overline{AB}$  și  $\overline{AC}$ , totdeauna  $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$  (fig.90), deoarece pe baza regulii triunghiului  $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ .

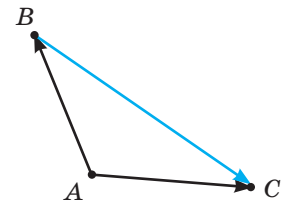


Fig.90

Pentru a afla diferența a doi vectori trebuie de repartizat vectorii astfel, ca ei să iasă din același punct. Diferența a vectorilor va fi vectorul, al cărui origine coincide cu extremitatea vectorului a doilea, iar extremitatea - cu extremitatea primului, adică vectorul care merge de la extremitatea celui de-al doilea vector spre extremitatea primului.

Se poate utiliza și altă regulă. Pentru a afla diferența vectorului  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , trebuie de adunat la vectorul  $\vec{a}$  vectorul  $-\vec{b}$ , opus vectorului dat  $\vec{b}$  (fig.91). Totdeauna sunt adevărate egalitățile:

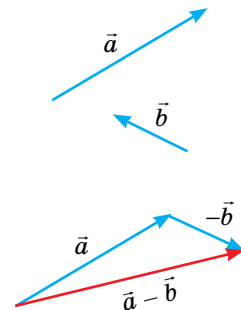


Fig.91

$$\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BA}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

## PENTRU CEI CURIOSI

Se pot aduna nu numai doi vectori, dar și trei, patru ș.a.m.d. Care nu ar fi punctele  $A, B, C, D$ , totdeauna  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}$ .

Se poate demonstra așa o egalitate, folosind proprietatea asociativă a adunării vectorilor:  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = (\overline{AB} + \overline{BC}) + \overline{CD} = \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD}$ .

Cu un procedeu asemănător se poate demonstra, că  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DK} = \overline{AK}$  ș.a.m.d. Cu alte cuvinte pentru oricare linie frântă  $ABC \dots KP$ ,  $\overline{AB} + \overline{BC} + \dots + \overline{KP} = \overline{AP}$ .

Astfel de egalități sunt adevărate nu numai pentru liniile frânte ale unui plan, dar și pentru spațiu. De exemplu, dacă vectorii sunt repartizați pe muchiile paralelipipedului (fig.92), atunci  $\overline{AB} + \overline{BB_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1D_1} = \overline{AD_1}$ .

Pentru a afla suma a câțiva vectori se utilizează regula poligonului.

Pentru a aduna vectorii după regula poligonului trebuie de repartizat acești vectori consecutiv. Sumă a vectorilor va fi vectorul a cărui origine coincide cu originea primului, iar extremitatea - cu extremitatea ultimului vector.

De exemplu, pentru a aduna vectorii, reprezentați în figura 93,  $a$  trebuie de le amplasat succesiv (fig.93,  $b$ ). Sumă a vectorilor va fi vectorul  $\vec{m}$ , care unește originea primului vector cu extremitate ultimului. Termenii vectoriali pot fi permutați.

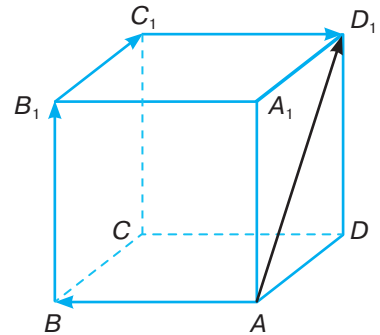


Fig.882

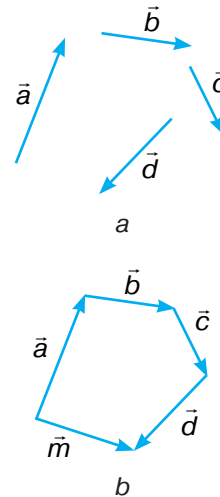


Fig.93

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Ce se numește sumă a doi vectori?
2. Cum de aflat suma a doi vectori, definiți în formă de coordonate?
3. Formulați regula triunghiului pentru adunarea vectorilor.
4. Formulați regula paralelogramului pentru adunarea vectorilor.
5. Cum de aflat suma vectorilor coliniari?
6. Cu ce este egală suma vectorilor opuși?
7. Cum de aflat diferența vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ ?

## EFACTUĂM ÎMPREUNĂ

- 1 Diagonalele paralelogramului  $ABCD$  se intersectează în punctul  $O$  (fig.94). Cu ce este egală suma vectorilor  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$  și  $\overrightarrow{OD}$ ?
- Vectorii  $\overrightarrow{OA}$  și  $\overrightarrow{OC}$  sunt opuși, de aceea suma lor este egală cu  $\vec{0}$ . Sunt opuși de asemenea vectorii  $\overrightarrow{OB}$  și  $\overrightarrow{OD}$ . De aceea  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ .

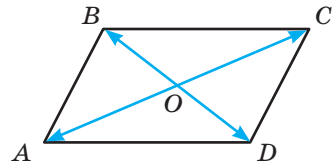


Fig.94

- 2 În figura 95,  $a$  se reprezintă vectorii  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $\vec{c}$ . Construiți vectorul  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ .
- *Primul procedeu.* Construim suma vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ . Obținem vectorul  $\vec{a} + \vec{b}$ , din care scădem vectorul  $\vec{c}$  (fig.95, b). Obținem vectorul  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ .  
*Al doilea procedeu.* Desenăm la început vectorul  $-\vec{c}$ , opus vectorului dat  $\vec{c}$ . Apoi construim suma vectorilor  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și  $-\vec{c}$  (fig.95, c). Vectorul căutat este  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$ .

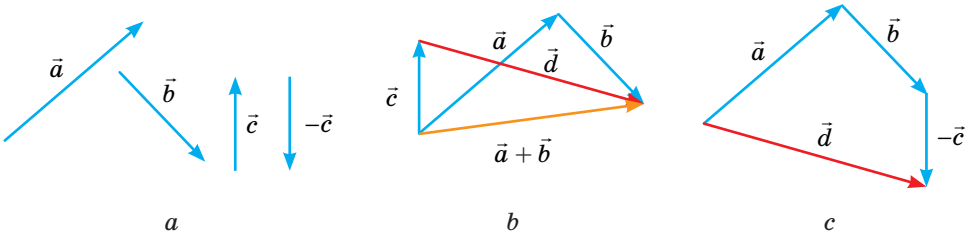


Fig.95

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFACTUAȚI ORAL

287. Aflați suma și diferența vectorilor:

- a)  $\vec{a} = (2; 3)$  și  $\vec{b} = (-1; 4)$ ;      c)  $\vec{a} = (1; 0)$  și  $\vec{b} = (-3; -5)$ ;  
 b)  $\vec{c} = (-2; 4)$  și  $\vec{d} = (3; -2)$ ;      d)  $\vec{c} = (3; -5)$  și  $\vec{d} = (0; 0)$ .

288. Sunt dați vectorii  $\vec{a} = (2; -3)$  și  $\vec{b} = (-4; 1)$ . Aflați coordonatele vectorilor  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\vec{b} - \vec{a}$ ,  $\vec{a} + \vec{a}$ ,  $\vec{b} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{a}$ .

289. Aflați suma vectorilor:

- a)  $\overline{AX} + \overline{XT}$ ;      b)  $\overline{MO} + \overline{OK}$ ;      c)  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CE}$ .

290. Găsiți diferența vectorilor:

a)  $\overline{XA} - \overline{XT}$ ; b)  $\overline{MA} - \overline{MD}$ ; c)  $\overline{KP} - \overline{KL}$ .

291.  $ABCD$  — paralelogram, în care  $\overline{AB} = \vec{a}$ ,  $\overline{AD} = \vec{b}$  (fig.96).

Exprimați prin vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  vectorii  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{DB}$ .

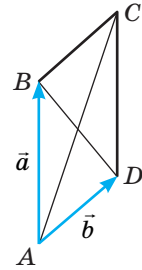


Fig.96

A

292. Aflați suma vectorilor:

a)  $\vec{a} = (4; 2)$  și  $\vec{b} = (1; 7)$ ;

c)  $\vec{n} = (-6; 8)$  și  $\vec{m} = (-2; -9)$ ;

b)  $\vec{c} = (8; -1)$  și  $\vec{0} = (0; 0)$ ;

d)  $\vec{p} = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$  și  $\vec{q} = (1; 7)$ .

293. Aflați suma vectorilor:

a)  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CT}$ ;

b)  $\overline{KP} + \overline{PT} + \overline{TX} + \overline{XK}$ .

294. Sunt date punctele  $O(0; 0)$ ,  $A(a_1; a_2)$  și  $B(b_1; b_2)$ . Exprimați prin ale lor coordonatele sumele:

a)  $\overline{OA} + \overline{AB}$ ;

b)  $\overline{OB} + \overline{BA}$ ;

c)  $\overline{AB} + \overline{BO}$ .

295. Aflați diferența vectorilor:

a)  $\vec{a} = (9; 5)$  și  $\vec{c} = (6; 2)$ ;

c)  $\vec{n} = (8; -6)$  și  $\vec{0}$ ;

b)  $\vec{k} = (1; 7)$  și  $\vec{p} = (4; -4)$ ;

d)  $\vec{0}$  și  $\vec{b} = (-2; 7)$ .

296. Aflați diferența vectorilor:

a)  $\overline{XM} - \overline{XK}$ ;

b)  $\overline{PT} - \overline{PK}$ ;

c)  $\vec{0} - \overline{AB}$ .

297.  $ABCD$  — paralelogram. Aflați diferența vectorilor:

a)  $\overline{AB} - \overline{AC}$ ;

b)  $\overline{BC} - \overline{CD}$ .

298. Aflați  $\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{a} - \vec{b}$ ,  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{b}|$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}|$ ,  $|\vec{a} - \vec{b}|$ , dacă:

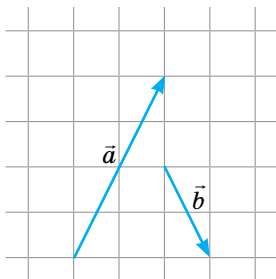
a)  $\vec{a} = (2; 3)$ ,  $\vec{b} = (4; 5)$ ;

c)  $\vec{a} = (6; -2)$ ,  $\vec{b} = (6; -3)$ ;

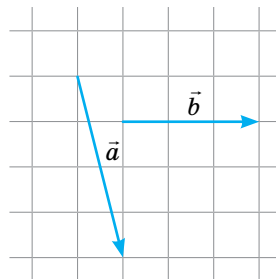
b)  $\vec{a} = (-1; 3)$ ,  $\vec{b} = (4; 1)$ ;

d)  $\vec{a} = (-4; 2)$ ,  $\vec{b} = (-2; 6)$ .

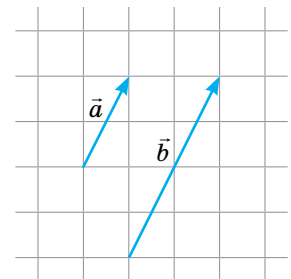
299. Aflați suma vectorilor, reprezentați în figura 97:



a



b



c

Fig.97



**300.** Găsiți diferența vectorilor, reprezentați în figura 98.

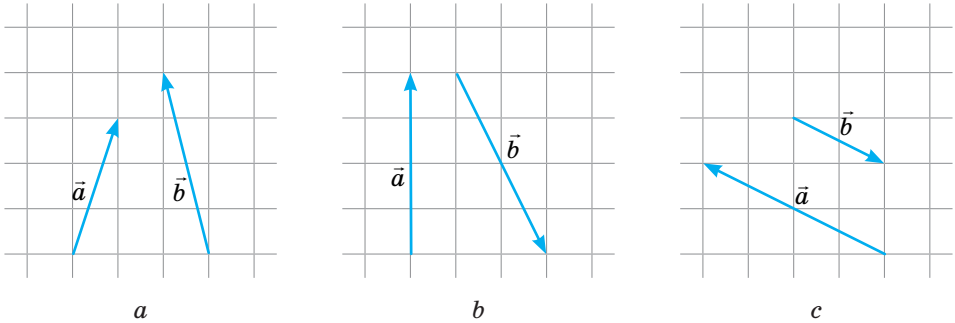


Fig.98

- 301.** Depuneți din originea de coordonate vectorii  $\overline{OA} = (3; 2)$  și  $\overline{OB} = (-4; 3)$ .  
 Construiți vectorii:  
 a)  $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB}$ ; b)  $\overline{OD} = \overline{OA} - \overline{OB}$ ; c)  $\overline{m} = \overline{OC} + \overline{OD}$ ; d)  $\overline{n} = \overline{OC} - \overline{OD}$ .
- 302.** Desenați doi vectori arbitrari și convingeți-vă în justetea proprietății comutative a adunării vectorilor, adunând acești vectori după regula: a) triunghiului; b) a paralelogramului.
- 303.** Desenați trei vectori arbitrari și , adunându-i, convingeți-vă în justetea proprietății asociative a adunării vectorilor.
- 304.** Aflați  $x$ , dacă suma vectorilor  $\vec{a} = (2; 7)$  și  $\vec{b} = (3; x)$  este egală cu vectorul:  
 a)  $\vec{m} = (5; 10)$ ; b)  $\vec{c} = (5; -4)$ .
- 305.** Aflați  $x$  și  $y$ , dacă suma vectorilor  $\vec{m} = (6; y)$  și  $\vec{n} = (x; 7)$  este egală cu vectorul: a)  $\vec{q} = (-1; 8)$ ; b)  $\vec{p} = (8; -1)$ .
- 306.** Demonstrați egalitatea vectorială:  
 a)  $\overline{AB} - \overline{KP} = \overline{AB} + \overline{PK}$ ; b)  $\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{MB} - \overline{MC}$ .

**B**

- 307.** Sunt dați vectorii  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  (fig.99).  
 Construiți vectorii:  
 a)  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ ; b)  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ ; c)  $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ ;  
 d)  $\vec{a} + \vec{c} - \vec{b} - \vec{d}$ ; e)  $\vec{a} - \vec{c} - \vec{d} + \vec{b}$ .

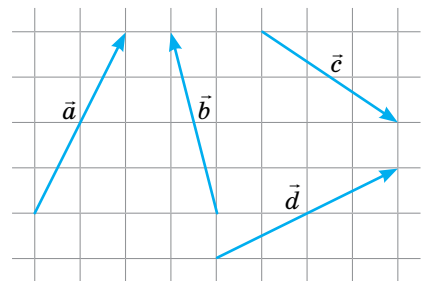


Fig.99

- 308.** Aduceți la o formă mai simplă expresiile:  
 a)  $\overline{AB} + \overline{BC} + (\overline{OD} - \overline{OC})$ ;  
 b)  $\overline{MN} - \overline{KN} + \overline{KP}$ ;  
 c)  $\overline{AB} + \overline{BK} - \overline{AP}$ ;  
 d)  $\overline{AB} + \overline{MN} + \overline{BC} + \overline{PM} - \overline{PC}$ ;  
 e)  $\overline{AC} - \overline{AD} + \overline{CD} - \overline{MN} + \overline{MK}$ .

- 309.** Diagonalele paralelogramului  $ABCD$  se intersectează în punctul  $O$ . Construiți vectorii:  
 a)  $\overline{AO} + \overline{OB}$ ; b)  $\overline{CO} + \overline{DO}$ ; c)  $\overline{AO} - \overline{AB}$ ; d)  $\overline{CO} - \overline{BO}$ .
- 310.** Oare este adevărat că totdeauna  $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| \geq |\overline{AC}|$ ?
- 311.** Sunt dați vectorii  $\vec{a} = (2; -3)$ ,  $\vec{b} = (-1; 4)$ ,  $\vec{c} = (6; -2)$ ,  $\vec{d} = (x; y)$ . Pentru care valori ale lui  $x$  și  $y$  se realizează egalitățile:  
 a)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} - \vec{d}$ ; c)  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d} = \vec{c} - \vec{d}$ ;  
 b)  $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$ ; d)  $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} - \vec{d} + \vec{c}$ ?
- 312.** Sunt date punctele  $A(2; 3)$ ,  $B(-1; 5)$ . Aflați coordonatele a unui astfel de punct  $C(x; y)$ , că: a)  $\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{CB}$ ; b)  $\overline{AB} - \overline{BC} = \overline{AC}$ .
- 313.** Sunt date punctele  $A(-4; -2)$ ,  $B(2; 6)$ ,  $C(x; y)$ . Găsiți locul geometric al punctelor planului pentru care sunt adevărate egalitățile:  
 a)  $|\overline{AB} + \overline{BC}| = |\overline{AB}|$ ;  
 b)  $|\overline{AB} - \overline{AC}| = |\overline{AB}|$ ;  
 c)  $|\overline{AC} - \overline{BC}| = |\overline{AC}|$ .

### ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

- 314.** În figura 100 se arată cum se poate afla pe cale geometrică suma a patru vectori  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$ . Convingeți-vă că de la permutarea termenilor suma nu se schimbă. Câte sume pot fi formate din diferite succesiuni a astfel de patru termeni?

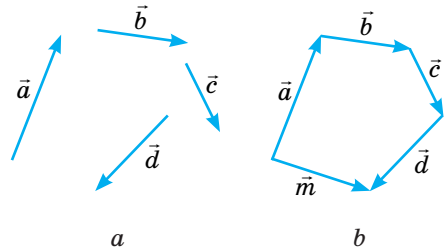


Fig.100

### PROBLEME PENTRU REPETARE

- 315.** Demonstrați că patrulateralul cu vârfurile în punctele  $M(-3; -2)$ ,  $N(-2; 1)$ ,  $P(4; -1)$ ,  $K(3; -4)$  este paralelogram.
- 316.** Sunt date punctele  $A(-2; 1)$ ,  $B(1; 3)$ ,  $C(5; 3)$ . Aflați coordonatele a unui astfel de punct  $D(x; y)$ , pentru care: a)  $\overline{AB} = \overline{DC}$ ; b)  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .
- 317.** Linia medie a trapezului isoscel este egală cu  $l$ . Aflați aria trapezului, dacă diagonalele lui sunt reciproc perpendiculare.
- 318.** Oare poate fi acoperit triunghiul dreptunghic cu catetele  $8$  cm și  $10\sqrt{2}$  cm de cercul cu raza  $7,5$  cm? Dar de raza  $8,5$  cm?

# § 10

## Înmulțirea vectorilor cu un număr

**Produsul al vectorului  $\vec{a} = (x; y)$  cu numărul  $n$**  se numește vectorul  $n\vec{a} = (nx; ny)$ . De exemplu, dacă  $\vec{a} = (4; 3)$ , atunci  $5\vec{a} = (20; 15)$ ,  $-2\vec{a} = (-8; -6)$ ,  $0\vec{a} = (0; 0)$ . Din definiția expusă decurge, că:

- 1) pentru oricare vectori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  și număr  $n$ :  $n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}$ ;
- 2) pentru oricare numere  $n, m$  și vector  $\vec{a}$ :  $(n + m)\vec{a} = n\vec{a} + m\vec{a}$ ;
- 3) pentru oricare numere  $n, m$  și vector  $\vec{a}$ :  $n(m\vec{a}) = (nm)\vec{a}$ .

Să demonstrăm prima afirmație. Fie  $\vec{a} = (x_1; y_1)$  și  $\vec{b} = (x_2; y_2)$ .

$$\text{Atunci } \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2); n(\vec{a} + \vec{b}) = (nx_1 + nx_2; ny_1 + ny_2); \quad (1)$$

$$n\vec{a} + n\vec{b} = (nx_1; ny_1) + (nx_2; ny_2) = (nx_1 + nx_2; ny_1 + ny_2). \quad (2)$$

Părțile drepte ale egalităților (1) și (2) sunt egale, de aceea sunt de asemenea egale și părțile stângi:

$$n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}.$$

Analogic se pot demonstra și alte afirmații. Dacă numărul  $n$  este natural, atunci

$$n\vec{a} = \underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \dots + \vec{a}}_{n \text{ разів}}$$

De exemplu,  $3\vec{a} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ . Lungimea vectorului  $3\vec{a}$  este de trei ori mai mare decât lungimea vectorului  $\vec{a}$  (dacă  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ). Direcțiile vectorilor  $3\vec{a}$  și  $-3\vec{a}$  sunt opuse (fig.101).

În general produsul  $n\vec{a}$  este vectorul, a cărui lungime este egală cu  $|n\vec{a}| = |n| \cdot |\vec{a}|$ , iar direcția coincide cu direcția vectorului  $\vec{a}$ , dacă  $n > 0$ , și este opusă direcției lui, dacă  $n < 0$ .

Dacă  $n = 0$  sau  $\vec{a} = \vec{0}$ , atunci  $n\vec{a} = \vec{0}$ . De aceea, pentru a construi vectorul  $n\vec{a}$ , trebuie:

- 1) de deplas vectorul, colinar cu vectorul  $\vec{a}$ , a cărui lungime este egală cu  $|n| \cdot |\vec{a}|$ ;
- 2) de ales aceeași direcție ca și a vectorului  $\vec{a}$ , dacă  $n > 0$ , și opusă ei, dacă  $n < 0$ .

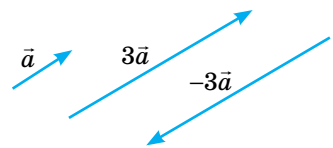


Fig.101

De exemplu, în figura 102 sunt reprezentați vectorii, obținuți în urma înmulțirii vectorului  $\vec{a}$  cu numerele  $2; -3; 0,5$ .

La înmulțirea vectorului  $\vec{a}$  cu un număr obținem un vector, coliniar cu cel dat. Adică, dacă  $\vec{b} = n\vec{a}$ , atunci  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  – coliniari. Și invers, dacă vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  coliniari, atunci, notând raportul lungimilor lor cu  $|n|$ , obținem că  $\vec{b} = n\vec{a}$ . De aceea este adevărată următoarea afirmație despre coliniaritatea a doi vectori nenuli.

**Vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt coliniari atunci și numai atunci, când există așa un număr  $n$ , că  $\vec{b} = n\vec{a}$ .**

Dacă vectorii sunt dați cu coordonate, adică  $\vec{a} = (x_1; y_1)$  și  $\vec{b} = (x_2; y_2)$ , atunci ei sunt coliniari atunci și numai atunci, când coordonatele corespunzătoare ale lor sunt proporționale:  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ .

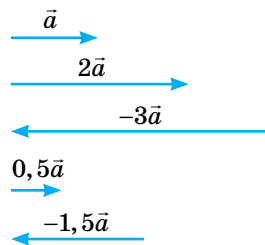


Fig.102

## PENTRU CEI CURIOSI

Vectorii  $\vec{e}_1 = (1; 0)$  și  $\vec{e}_2 = (0; 1)$  se numesc **orți (versori)** sau vectori de coordonate. Oricare vector  $\vec{a} = (x; y)$  poate fi dat în forma

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

Într-adevăr,  $\vec{a} = (x; y) = (x; 0) + (0; y) = x(1; 0) + y(0; 1) = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ .

O astfel de reprezentare a vectorului  $\vec{a}$  se numește dezvoltarea (descompunerea) vectorului după versori. Conținutul geometric al dezvoltării este clar din figura 103. Orice vector poate fi descompus după vectorii de coordonate, și numai într-un mod unic.

Deseori apare problema descompunerii a vectorului dat  $\vec{c}$  după doi vectori necoliniari dați  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , adică de găsit astfel de numere  $m$  și  $n$ , ca să aibă loc egalitatea  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ . Fie, de exemplu, că vectorul  $\vec{c} = (1; 4)$  trebuie descompus după vectorii  $\vec{a} = (2; -3)$  și  $\vec{b} = (-1; 2)$ .

Să găsim astfel de numere  $m$  și  $n$  ca să se îndeplinească egalitatea  $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ .

$$m\vec{a} = (2m; -3m); \quad n\vec{b} = (-n; 2n),$$

$$m\vec{a} + n\vec{b} = (2m - n; -3m + 2n).$$

Numerele căutate  $m$  și  $n$  le vom găsi din sistemele de ecuații:

$$\begin{cases} 2m - n = 1, \\ -3m + 2n = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 4m - 2n = 2, \\ -3m + 2n = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} m = 6, \\ n = 11. \end{cases}$$

Deci,  $\vec{c} = 6\vec{a} + 11\vec{b}$ .

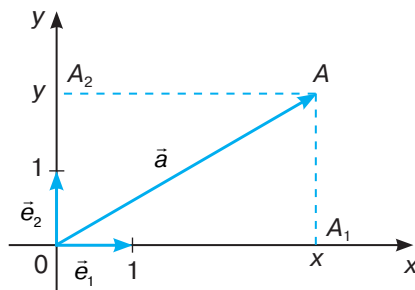


Fig.103

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Ce se numește produsul vectorului cu un număr?
2. Formulați proprietățile înmulțirii vectorului cu un număr.
3. Oare se va schimba direcția vectorului, dacă îl vom înmulți cu:
  - a) un număr pozitiv; b) un număr negativ; c) zero?
4. Formulați criteriul de coliniaritate a doi vectori nenuli.
5. Cum, știind vectorul  $\vec{a}$ , de construit vectorului  $n\vec{a}$ ?

## EFFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1. Sunt dați vectorii  $\vec{a} = (-2; 3)$  și  $\vec{b} = (4; 1)$ . Aflați  $|\vec{c}|$ , dacă  $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ .
  - Să aflăm coordonatele vectorilor  $3\vec{a}$  și  $2\vec{b}$ :  $3\vec{a} = 3(-2; 3) = (-6; 9)$ ;  $2\vec{b} = 2(4; 1) = (8; 2)$ . Atunci  $\vec{c} = (-6; 9) - (8; 2) = (-14; 7)$ , de unde  $|\vec{c}| = \sqrt{(-14)^2 + 7^2} = \sqrt{196 + 49} = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$ .  
De aici,  $|\vec{c}| = 7\sqrt{5}$ .
2.  $M$  — punctul de intersecție al medianelor triunghiului  $ABC$ . Demonstrați, că  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ .
  - Medianele  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  ale triunghiului  $ABC$  sunt împărțite de punctul de intersecție  $M$  în raportul 1:2. Depunem vectorul  $\vec{MK} = 2 \cdot \vec{MA}_1$  (fig.104). Vectorii  $\vec{MA}$  și  $\vec{MK}$  au lungimi egale și sunt orientați în sens opus, de aceea  $\vec{MA} + \vec{MK} = \vec{0}$ . Patrulaterul  $BMCK$  — paralelogram, de aceea conform regulii paralelogramului  $\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MK}$ . Deci,  $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MA} + \vec{MK} = \vec{0}$ .

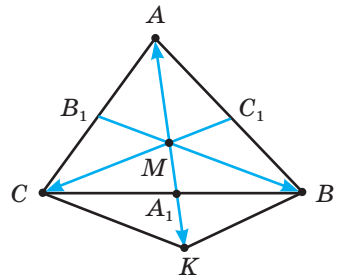


Fig.104

## PROBLEME ȘU EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

319. Simplificați expresia: a)  $\vec{c} + \vec{c} + \vec{c} + \vec{c}$ ; b)  $3\vec{a} + 5\vec{a}$ ; c)  $2(3\vec{a} + 4\vec{b}) - 6\vec{a}$ .
320. Înmulțiți vectorul  $\vec{a} = (-3; 5)$ : cu 2; cu 3; cu -7; cu 1,2; cu  $\frac{1}{3}$ .
321. Găsiți lungimile vectorilor  $2\vec{p}$  și  $-2\vec{p}$ , dacă  $\vec{p} = (3; 4)$ .

322. Vectorii, reprezentați în figura 105 au fost obținuți la înmulțirea vectorului  $\vec{m}$  cu un oarecare număr. Aflați acest număr.

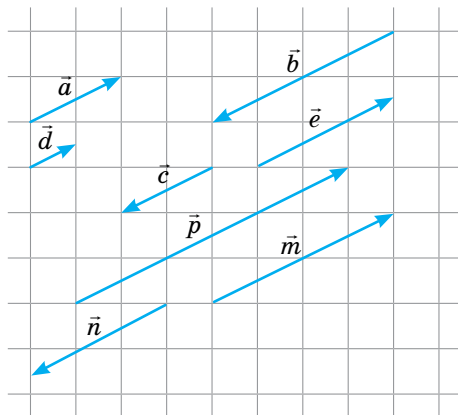


Fig.105

323. Oare sunt coliniari vectorii:

- $\vec{a} = (4; 6)$  și  $\vec{b} = (2; 3)$ ;
- $\vec{c} = (1; 5)$  și  $\vec{d} = (5; 1)$ ;
- $\vec{x} = (-1; 1)$  și  $\vec{y} = (-1; 1)$ ;
- $\vec{m} = (2; -5)$  și  $\vec{n} = (-1; 2, 5)$ ?

324.  $ABCD$  — paralelogram (fig.106). Găsiți un astfel de număr  $k$ , ca să se îndeplinească egalitatea:  
 $\vec{AB} = k\vec{CD}$ ;  $\vec{AD} = k\vec{BC}$ ;  $\vec{AO} = k\vec{OC}$ ;  $\vec{AO} = k\vec{AC}$ ;  
 $\vec{BD} = k\vec{BO}$ ;  $\vec{OD} = k\vec{OB}$ ;  $\vec{AO} = k\vec{AC}$ .

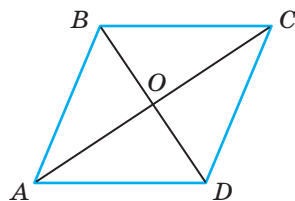


Fig.106

## A

325. Sunt dați vectorii  $\vec{a} = (2; -3)$  și  $\vec{b} = (-6; 1)$ . Aflați coordonatele vectorului  $\vec{c}$ , dacă:

- $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ ;
- $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ ;
- $\vec{c} = 5\vec{a} + 7\vec{b}$ ;
- $\vec{c} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$ .

326. Aduceți la cea mai simplă formă:

- $2\vec{a} + 3\vec{b} + 5\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{a}$ ;
- $2(\vec{m} - 3\vec{n}) - 3(2\vec{m} + \vec{n})$ ;
- $2(\vec{a} + 2\vec{b}) - 3(\vec{b} - 4\vec{c}) - (2\vec{a} + \vec{b} - 5\vec{c})$ ;
- $1, 2\vec{a} - 0, 3(4\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) - 0, 1\vec{c}$ .

327. Pentru vectorii, reprezentați în figura 107, construiți vectorii

$$2\vec{a}; -3\vec{a}; \frac{1}{2}\vec{a}; \frac{1}{4}\vec{a}; 2, 5\vec{a}; -1, 5\vec{a}; \frac{2}{3}\vec{a}.$$

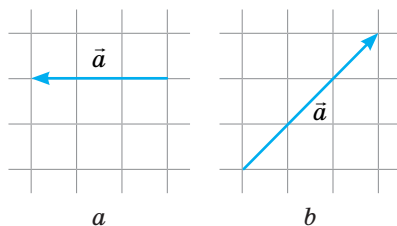


Fig.107

328. Aflați modulul vectorului  $\vec{c}$ , dacă:  
 $\vec{a} = (-4; 2)$ ,  $\vec{b} = (6; -6)$  și:

- $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ;
- $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ ;
- $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ ;
- $\vec{c} = 1, 5\vec{a} - \frac{5}{6}\vec{b}$ .

- 329.** Aflați numărul  $k$  și coordonatele vectorului  $\vec{p}$ , dacă:  $\vec{p} = k\vec{b}$ ,  $|\vec{p}| = 10$ ,  $\vec{b} = (3; 4)$ .
- 330.** Vectorul  $\vec{a} = (2; 0)$  dă viteza cursului unui râu. Viteza proprie a luntrei este de două ori mai mare. Reprezentați vectorii care dau: a) viteza luntrei în direcția curentului de apă; b) viteza luntrei împotriva curentului de apă. Aflați vitezele cu care luntrea se mișcă în direcția cursului și împotriva cursului de apă.
- 331.** Sunt date punctele  $A(-1; 3)$ ,  $B(-2; 7)$ ,  $C(2; 5)$ ,  $D(4; 1)$ . Oare sunt coliniari vectorii  $\vec{AB}$  și  $\vec{CD}$ ? Dar vectorii  $\vec{AC}$  și  $\vec{BD}$ ?
- 332.** Pentru care valoare a lui  $m$  vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt coliniari:  
 a)  $\vec{a} = (2; m)$ ,  $\vec{b} = (3; 12)$ ;      c)  $\vec{a} = (m; 12)$ ,  $\vec{b} = (3; m)$ ;  
 b)  $\vec{a} = (m; -4)$ ,  $\vec{b} = (1; 3)$ ;      d)  $\vec{a} = (m+1; 2)$ ,  $\vec{b} = (4; m-1)$ ?
- 333.** Punctele  $M, N, P$  împart segmentul  $AB$  în patru părți egale (fig.108).  $\vec{AN} = \vec{a}$ . Exprimați prin  $\vec{a}$  vectorii  $\vec{AM}$ ,  $\vec{NB}$ ,  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BP}$ ,  $\vec{MP}$ ,  $\vec{MA}$ .

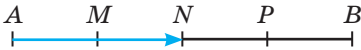


Fig.108

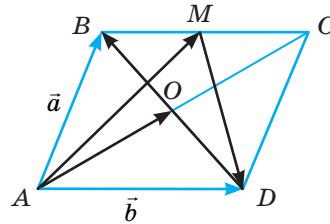


Fig.109

- 334.**  $ABCD$  — paralelogram (fig.109),  $M$  — mijlocul lui  $BC$ . Exprimați prin vectorii  $\vec{a} = \vec{AB}$  și  $\vec{b} = \vec{AD}$  vectorii  $\vec{AO}$ ,  $\vec{DB}$ ,  $\vec{AM}$ ,  $\vec{MD}$ .

**B**

- 335.** Se dă vectorul  $\vec{a} = (-2; 7)$  și punctul  $M(1; -4)$ . Aflați coordonatele punctului  $N$ , pentru care: a)  $\vec{MN} = 2\vec{a}$ ; b)  $\vec{NM} = \frac{1}{2}\vec{a}$ .
- 336.** Pentru vectorii, reprezentați în figura 110, construiți vectorii  $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$ ;  $\vec{d} = -\vec{a} + 3\vec{b}$ ;  $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$ ;  $\vec{n} = 2(\vec{a} - \vec{b})$ ;  $\vec{p} = \frac{1}{3}(3\vec{a} + 2\vec{b})$ .

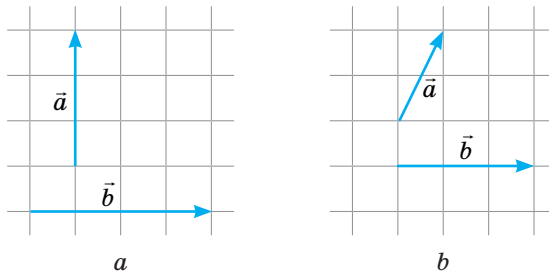


Fig.110

337. Aflați coordonatele vectorilor  $\overline{AK}$  și  $\overline{AB}$ , dacă  $\overline{KB} = (2; 3)$ .

338.  $ABCD$  — dreptunghi (fig.111),  $\vec{a} = \overline{AP} = \frac{1}{3}\overline{AB}$ ,  $\vec{b} = \overline{AK} = \frac{2}{3}\overline{AD}$ .

Exprimați prin vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  vectorii  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$ ,  $\overline{AO}$ ,  $\overline{AM}$ ,  $\overline{AN}$ , unde  $M$  și  $N$  — mijlocurile laturilor  $BC$  și  $CD$ .

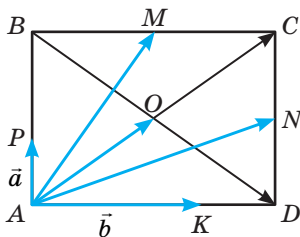


Fig.111

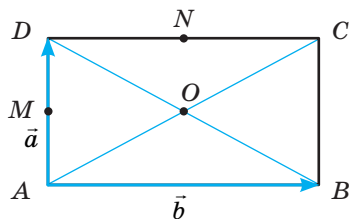


Fig.112

339. **Problemă deschisă.**  $ABCD$  — dreptunghi (fig.112).  $O$  — punctul de intersecție al diagonalelor lui. Punctele  $M$  și  $N$  — mijlocurile laturilor  $AD$  și  $CD$ .

Exprimați vectorii ... prin vectorii  $\vec{a} = \overline{AD}$  și  $\vec{b} = \overline{AB}$ .

340. Aflați coordonatele vectorului unitar, coliniar cu vectorul  $\vec{a} = (-5; 12)$ .

341. Găsiți coordonatele vectorului  $\vec{b}$ , coorientat cu vectorul  $\vec{a} = (6; -8)$ , dacă  $|\vec{b}| = 5$ .

342. Stabiliți corespondența dintre vectorii (1-4), reprezentați în fig. 113 și vectorii coliniari lor cu coordonatele (A-E).

- |             |              |
|-------------|--------------|
| 1 $\vec{a}$ | A $(-3; 3)$  |
| 2 $\vec{b}$ | B $(-3; -4)$ |
| 3 $\vec{c}$ | C $(0; 3)$   |
| 4 $\vec{d}$ | D $(3; 0)$   |
|             | E $(-3; -3)$ |

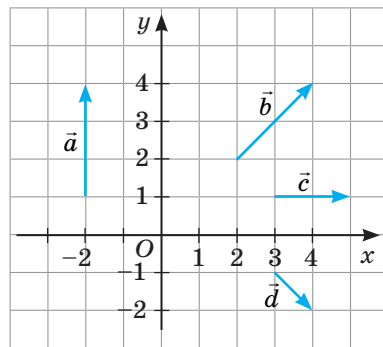


Fig.113

343. Aflați lungimile vectorilor:  $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$ ,

$$\vec{b} = 5\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2, \vec{c} = 2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2, \vec{d} = -2\sqrt{5}\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2.$$

344. Sunt dați vectori  $\vec{a} = (2; -3)$ ,  $\vec{b} = (5; 9)$  și

$$\vec{m} = (5; 7). \text{ Găsiți așa numere } \alpha \text{ și } \beta, \text{ ca să aibă loc egalitatea } \vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

345. Descompuneți vectorul  $\vec{m} = (2; 5)$  după vectorii:

a)  $\vec{a} = (1; -3)$  și  $\vec{b} = (-2; 5)$ ;      b)  $\vec{c} = (-2; 3)$  și  $\vec{d} = (3; -6)$ .



**ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ**

346. Copiați figura 114 în caiet și depuneți pe ea:

- a) punctul  $X$  astfel , că:  $\overline{MX} = \overline{MN} + \overline{MP}$ ;
- б) punctul  $Y$  astfel , că:  $\overline{MY} = \overline{MN} - \overline{MP}$ ;
- в) punctul  $Z$  astfel , că:  $\overline{PZ} = 2\overline{PM}$ .

Determinați tipul patrulaterilor  $MPNY$  și  $XYZM$ .

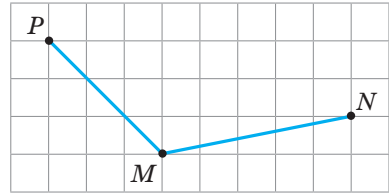


Fig.114

**PROBLEME PENTRU REPETARE**

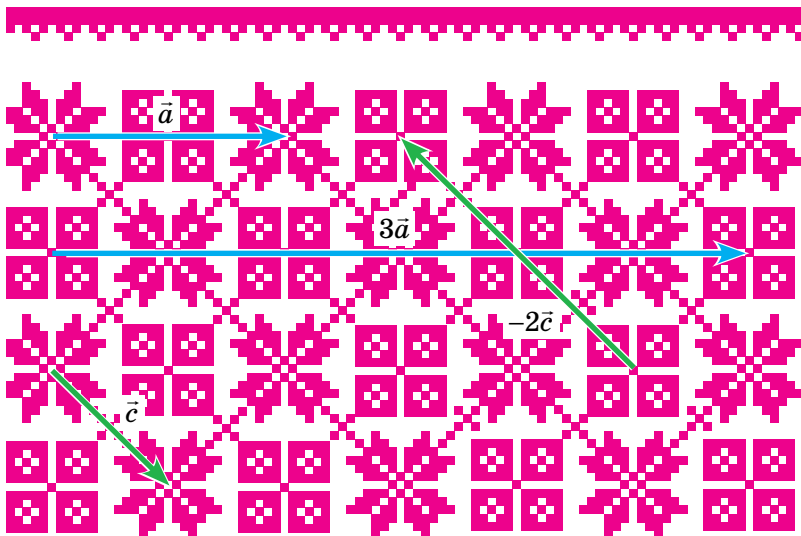
347. Oare sunt egali vectorii  $\overline{AB}$  și  $\overline{MN}$ , dacă  $A(2; -5)$ ,  $B(1; -3)$ ,  $M(-7,5; 1,2)$ ,  $N\left(-8\frac{1}{2}; 3\frac{1}{5}\right)$ ?

348. Simplificați expresia  $\overline{MN} + \overline{NK} - \overline{MP} + (\overline{OC} - \overline{OK}) + \overline{CP}$ .

349. Sunt dați vectorii  $\vec{a} = (-2; 4)$  și  $\vec{b} = (4; -4)$ . Cu cât modulul diferenței lor este mai mare decât modulul sumei acestor vectori?

350. **Problema lui Arhimede.** Dacă dintr-un punct, luat în afara circumferinței, de dus două secante astfel, că una din ele trece prin centrul circumferinței, iar segmentul exterior al celeilalte secante este egal cu raza circumferinței, atunci unghiul făcut de secante va fi egal cu o treime din arcul mai mare, ce se află între laturile lui. Demonstrați.

**GEOMETRIA DIN JURUL NOSTRU**



Ornamente și vectori

# § 11

## Produsul scalar al vectorilor

Până acum noi înmulțeam vectorii cu un număr. A ieșit la iveală că se poate înmulți vector cu vector. Deoarece se consideră așa o înmulțire, la care produsul a doi vectori este egal cu un număr (scalar), de aceea l-au numit produs scalar. Pentru a introduce această noțiune să explicăm mai întâi, ce se înțelege sub noțiunea de unghiul făcut de doi vectori nenuli.

**Unghi făcut de doi vectori nenuli** se numește unghiul, făcut de segmentele orientate corespunzătoare lor, care ies din același punct. Unghiul făcut de vectorii orientați în sens opus este egal cu  $180^\circ$ , iar de cei coorientați —  $0^\circ$ .

De exemplu, dacă  $ABC$  — triunghi echilateral (fig. 115), atunci unghiul făcut de vectorii  $AB$  și  $AC$  este egal cu  $60^\circ$ , iar cel făcut de  $AB$  și  $BC$  —  $120^\circ$ , deoarece unghiul făcut de vectorii  $AB$  și  $BC$  este egal cu unghiul făcut de vectorii  $BD$  și  $BC$ .

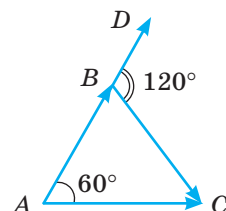


Fig.115

**Produs scalar a doi vectori nenuli** este numit produsul modulilor acestor vectori cu cosinusul unghiului făcut de ei.

Dacă unghiul făcut de vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este egal cu  $\varphi$ , atunci produsul lor scalar este  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$ .

Dacă măcar unul din vectori este nul, atunci produsul este egal cu zero.

### TEOREMA 4

**Produsul scalar al vectorilor  $\vec{a} = (x_1; y_1)$  și  $\vec{b} = (x_2; y_2)$  este egal cu  $x_1x_2 + y_1y_2$ .**

*Exemplu 1.* Dacă  $\vec{a} = (2; -1)$  și  $\vec{b} = (1; 0)$ , atunci  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 2$ .

Această teoremă este foarte importantă. Ea este folosită la rezolvarea a multe probleme abstracte și aplicative.

Să examinăm principalele proprietăți ale produsului scalar.

Pentru oricare vectori  $\vec{a} = (x_1; y_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2; y_2)$  și  $\vec{c} = (x_3; y_3)$ , totdeauna:

1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ;

2)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ ;

3)  $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ .

Justețea acestor proprietăți reiese din identitățile:

$$\begin{aligned}x_1x_2 + y_1y_2 &= x_2x_1 + y_2y_1; \\(x_1 + x_2)x_3 + (y_1 + y_2)y_3 &= (x_1x_3 + x_2x_3) + (y_1y_3 + y_2y_3) = \\&= (x_1x_3 + y_1y_3) + (x_2x_3 + y_2y_3); \\(kx_1)x_2 + (ky_1)y_2 &= k(x_1x_2 + y_1y_2).\end{aligned}$$

Proprietățile demonstrate permit comparativ ușor de făcut transformările expresiilor vectoriale – tot conform aceluiași reguli în virtutea cărora se execută transformările identice ale expresiilor algebrice.

Știind produsul scalar a doi vectori și lungimile lor, se poate ușor calcula cosinusul unghiului dintre ei.

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Dacă produsul scalar a doi vectori nenuli este egal cu zero, atunci  $\cos \varphi = 0$  și  $\varphi = 90^\circ$ , adică vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt perpendiculari. Și invers, dacă doi vectori nenuli sunt perpendiculari, adică  $\varphi = 90^\circ$ , atunci  $\cos \varphi = 0$ . În acest caz produsul scalar al acestor vectori este egal cu zero.

Așadar, avem condiția perpendicularității a doi vectori.

**Doi vectori nenuli sunt perpendiculari atunci și numai atunci, când produsul lor scalar este egal cu zero.**

Dacă vectorii sunt dați cu coordonate, atunci condiția perpendicularității a doi vectori se formulează astfel:

**Vectorii nenuli  $\vec{a} = (x_1; y_1)$  și  $\vec{b} = (x_2; y_2)$  sunt perpendiculari atunci și numai atunci, când  $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ .**

Produsul scalar  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  se notează  $\vec{a}^2$  și se numește pătratul scalar al vectorului  $\vec{a}$ . În virtutea definiției produsului scalar  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ . Deci,  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$ , adică pătratul scalar al vectorului este egal cu pătratul modulului lui. De aici deducem, că  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ .

Să cercetăm, exemplul.

**Exemplul 2.** Să aflăm  $|\vec{a} + \vec{b}|$ , dacă  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3\sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 30^\circ$ .

Deoarece  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ , reiese că

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos 30^\circ + \vec{b}^2} = \\ &= \sqrt{2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 18 + 27} = \sqrt{49} = 7. \text{ Deci, } |\vec{a} + \vec{b}| = 7. \end{aligned}$$

Exemplu de aplicare a produsului scalar al vectorilor este cunoscut din fizică. Lucrul mecanic  $A$ , pe care îl face forța constantă  $\vec{F}$  la deplasarea  $\vec{S}$  (fig.116) este egal cu produsul scalar al vectorilor dați:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos \varphi.$$

Produsul scalar al vectorilor se folosește și în algebră, în particular, pentru demonstrarea inegalităților, determinarea celei mai mari și a celei mai mici valori ale funcției (vezi pag.96).

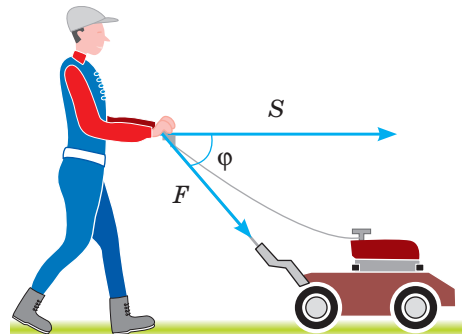


Fig.116

## PENTRU CEI CURIOSI

Unghiul format de vectorii nenuli  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  se notează cu simbolul  $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$ . De aceea definiția produsului scalar al astfel de vectori se scrie în formă de formulă

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}).$$

De ce se spune „produsul scalar al vectorilor”, dar nu „produsul vectorilor”? Fiindcă în matematica superioară se examinează produsele vectorial, vectorial mixt ș.a.

**Produs oblic** al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  se numește numărul care este egal cu produsul modulilor ai acestor vectori și sinusul unghiului orientat dintre primul și al doilea vectori. Produsul oblic al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  se notează cu simbolul  $\vec{a} \circ \vec{b}$ .

**Produs vectorial** al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , care formează unghiul  $\varphi$ , între ei, se numește un astfel de vector  $\vec{p}$ , că direcția lui este perpendiculară la direcțiile vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , orientarea tripletului de vectori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{p}$  coincide cu orientarea tripletului de vectori ai bazei și  $|\vec{p}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$ . De aceea, vorbind la general, pentru altfel de produse legea comutativă nu se îndeplinește. Produsul vectorial al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  se notează cu simbolul  $\vec{a} \times \vec{b}$ .

**Produs vectorial mixt**  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$  a trei vectori se numește produsul vector – scalar al lor:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTORONTROL

1. Formulați definiția produsului scalar a doi vectori.
2. Formulați definiția unghiului format de doi vectori.
3. Cu ce este egal produsul scalar al vectorilor  $\vec{a} = (x_1; y_1)$  și  $\vec{b} = (x_2; y_2)$ ?
4. Cu ce este egal produsul scalar al vectorilor, dacă cel puțin unul din ei este nul?
5. Care este condiția de perpendicularitate a doi vectori?
6. Cum de aflat lungimea vectorului  $\vec{a}$ ?

## EFFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Aflați cosinusul unghiului format de vectorii  $\vec{a} = (1; -2)$  și  $\vec{b} = (-4; 2)$ .

- Fie  $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = \varphi$ . Pe baza definiției  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$ . De aceea

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1 \cdot (-4) + (-2) \cdot 2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 2^2}} = \frac{-8}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-8}{10} = -\frac{4}{5}.$$

$$\text{Deci, } \cos \varphi = -\frac{4}{5}.$$

2) Афтаї  $(\vec{a} + 2\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b})$ , дака  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ ,  $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 60^\circ$ .

$$\bullet (\vec{a} + 2\vec{b})(3\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 5\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 + 5|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ - 2|\vec{b}|^2 = 4 + 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 4 = 4 + 10 - 8 = 6.$$

## ПРОБЛЕМЕ ШИ ЭКЕРЦИИ

### ЕФЕКТУАТИ ОРАЛ

351.  $ABCD$  — ромб ку латура  $l$  ш и унгиул  $A = 60^\circ$  (fig.117). Афтаї:

a) унгиуриле формате де вектории:  $\overline{AB}$  ш и  $\overline{AD}$ ;  $\overline{AO}$  ш и  $\overline{AD}$ ;  $\overline{BD}$  ш и  $\overline{BC}$ ;  $\overline{BC}$  ш и  $\overline{CD}$ ;  $\overline{AB}$  ш и  $\overline{DC}$ ;  $\overline{CB}$  ш и  $\overline{AD}$ ;  $\overline{AO}$  ш и  $\overline{OC}$ ;  $\overline{OB}$  ш и  $\overline{OD}$ ;  $\overline{AO}$  ш и  $\overline{CO}$ ;

b) продусле скаларе але векторилор  $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ ;  $\overline{BO} \cdot \overline{AO}$ ;  $\overline{DC} \cdot \overline{AB}$ ;  $\overline{AO} \cdot \overline{OD}$ ;  $\overline{CO} \cdot \overline{DO}$ .

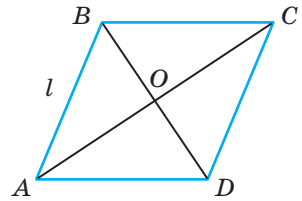


Fig.117

352. Афтаї унгиул факт де дои вектории унитарии, дака продуслор скалар есте егал ку:  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; 0; 1; -0,5;  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

353. Афтаї продусл скалар ал векторилор  $\vec{a}$  ш и  $\vec{b}$ , дака:

- a)  $\vec{a} = (0; 1)$ ,  $\vec{b} = (-3; 0)$ ;      c)  $\vec{a} = (6; 0)$ ,  $\vec{b} = (-2; -5)$ ;  
b)  $\vec{a} = (1; 1)$ ,  $\vec{b} = (2; 3)$ ;      d)  $\vec{a} = (4; 2)$ ,  $\vec{b} = (4; -2)$ .

### A

354. Ін триунгиуил  $ABC$   $\angle A = 50^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$ . Афтаї унгиуриле факте де вектории: a)  $\overline{BA}$  ш и  $\overline{BC}$ ; b)  $\overline{CA}$  ш и  $\overline{AB}$ ; c)  $\overline{AB}$  ш и  $\overline{BC}$ .

355. Афтаї продусл скалар ал векторилор:

- a)  $\vec{a} = (1; 2)$  ш и  $\vec{b} = (-8; 2)$ ;      c)  $\vec{p} = (-3; -7)$  ш и  $\vec{k} = (-2; -5)$ ;  
b)  $\vec{m} = (-3; -2)$  ш и  $\vec{n} = (2; 3)$ ;      d)  $\vec{c} = \left(4\frac{1}{2}; -2\frac{2}{3}\right)$  ш и  $\vec{d} = (2; 3)$ .

356. Сунт даї вектории  $\vec{p} = (1; -5)$  ш и  $\vec{q} = (3; 1)$ . Афтаї продусл скалар ал векторилор: a)  $\vec{a} = \vec{p} + \vec{q}$  ш и  $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$ ; b)  $\vec{m} = \vec{p} + 2\vec{q}$  ш и  $\vec{n} = 3\vec{p} - \vec{q}$ .

357. Афтаї косинусул унгиулу динте вектории  $\vec{a}$  ш и  $\vec{b}$ , дака

- a)  $\vec{a} = (1; 2)$ ,  $\vec{b} = (3; 1)$ ;      c)  $\vec{a} = (-4; -8)$ ,  $\vec{b} = (-3; 3)$ ;  
b)  $\vec{a} = (2; 6)$ ,  $\vec{b} = (3; 0)$ ;      d)  $\vec{a} = (-3; -4)$ ,  $\vec{b} = (3; -1)$ .

358. Aflați unghiul format de vectorii:

a)  $\vec{a} = (-2; 2)$  și  $\vec{b} = (0; 4)$ ;      c)  $\vec{c} = (3; -1)$  și  $\vec{d} = (2; 1)$ ;

b)  $\vec{x} = (1; 1)$  și  $\vec{y} = (0; -1)$ ;      d)  $\vec{p} = (0; 2)$  și  $\vec{k} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$ .

359. Demonstrați, că:

a) triunghiul cu vârfurile în punctele  $A(2; 1)$ ,  $B(0; 5)$ ,  $C(8; 4)$  este dreptunghic;

b) patrulaterul cu vârfurile în punctele  $A(-3; 1)$ ,  $B(-1; 4)$ ,  $C(5; 0)$ ,  $D(3; -3)$  este dreptunghi.

360. Aflați produsul scalar al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , dacă:

a)  $|\vec{a}| = 5$ ,  $|\vec{b}| = 12$ ,  $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 60^\circ$ ;      c)  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = 7$ ,  $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 120^\circ$ ;

b)  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 3\sqrt{2}$ ,  $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 45^\circ$ ;      d)  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$ ,  $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 150^\circ$ .

361. Triunghiul  $ABC$  — echilateral,  $AB = 12$ .

Aflați: a)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ ;      b)  $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$ .

362. Pentru care valoare a lui  $x$  vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt perpendiculari, dacă:

a)  $\vec{a} = (0; 1)$ ,  $\vec{b} = (-3; x)$ ;      c)  $\vec{a} = (6; x)$ ,  $\vec{b} = (-2; -5)$ ;

b)  $\vec{a} = (1; 1)$ ,  $\vec{b} = (x; 3)$ ;      d)  $\vec{a} = (x; 2)$ ,  $\vec{b} = (4; -2)$ ?

## B

363. Aflați cosinusurile unghiurilor ale triunghiului  $ABC$ , dacă:

a)  $A(-4; 1)$ ,  $B(4; 2)$ ,  $C(-2; -2)$ ; b)  $A(-1; 5)$ ,  $B(1; 1)$ ,  $C(5; 3)$ .

364. Sunt date punctele  $A(-4; 0)$  și  $B(3; 3)$ . Sub ce unghi se vede segmentul  $AB$  din originea de coordonate?

365. Sunt date punctele  $A(1; 1)$ ,  $B(1; 2)$ ,  $C(-2; 2)$ ,  $D(-3; 1)$ . De aflat unghiul dintre vectorii  $\overline{AB}$  și  $\overline{CD}$ .

366. Se dau trei puncte:  $A(-5; 2)$ ,  $B(1; 4)$ ,  $C(-1; 1)$ . Aflați coordonatele a unui astfel de punct  $D$  ca să se îndeplinească condiția  $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ , dacă punctul  $D$  aparține: a) axei absciselor;  $OX$ ; b) axei ordonatelor  $OY$ .

367. Sunt dați vectorii  $\vec{a} = (3; 4)$  și  $\vec{b} = (-1; 2)$ . Aflați numărul  $l$ , pentru care vectorul  $\vec{a} + l\vec{b}$  este perpendicular pe vectorul  $\vec{a}$ .

368. Pentru care valoare a lui  $m$  produsul scalar  $\vec{p} \cdot \vec{q}$  este egal cu 6, dacă:

a)  $\vec{p} = (2; 3)$ ,  $\vec{q} = (m; 4)$ ; b)  $\vec{p} = (m; 1)$ ,  $\vec{q} = (m; -3)$ ; c)  $\vec{p} = (2m; -11)$ ,  $\vec{q} = (m; m)$ .

369. Demonstrați: a) dacă lungimile vectorilor nenuli  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt egale, atunci vectorii  $\vec{a} + \vec{b}$  și  $\vec{a} - \vec{b}$  sunt perpendiculari; b) dacă vectorii  $\vec{a} + \vec{b}$  și  $\vec{a} - \vec{b}$  sunt perpendiculari, atunci lungimile vectorilor nenuli  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt egale.

370. Se da  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ,  $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 60^\circ$ . Aflați produsul scalar al vectorilor:

a)  $2\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ ;      c)  $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ ;

b)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$ ;      d)  $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b})$ .

- 371.** Calculați unghiul format de vectorii  $\vec{m} = \vec{a} - 2\vec{b}$  și  $\vec{n} = \vec{a} + 3\vec{b}$ , unde  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  — vectori unitari reciproc perpendicularari.
- 372.** Calculați  $|\vec{a} + \vec{b}|$  și  $|\vec{a} - \vec{b}|$ , dacă
- a)  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ,  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ;      c)  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ ,  $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 60^\circ$ ;
- b)  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 5$ ,  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ;      d)  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 120^\circ$ .
- 373.** Calculați  $|\vec{a} - \vec{b}|$ , dacă  $|\vec{a}| = 13$ ,  $|\vec{b}| = 19$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$ .

### ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

- 374.** Copiați în caiet figura 118. Aflați unghiul făcut de vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ ,  $\vec{a}$  și  $\vec{c}$ ,  $\vec{a}$  și  $\vec{d}$ ,  $\vec{c}$  și  $\vec{d}$  prin două metode:
- a) prin măsurarea nemijlocită, depunând în perechi acești vectori din originea de coordonate;
- b) cu ajutorul formulei, determinând în prealabil coordonatele fiecărui vector.

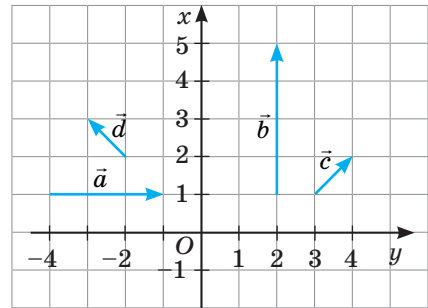


Fig.118

### PROBLEME PENTRU REPETARE

- 375.** Din punctul  $A(2; -5)$  sunt depuși vectorii  $\overline{AB} = \vec{a}$  și  $\overline{AC} = \vec{c}$ . Aflați coordonatele:
- a) ale punctului  $B$ , dacă  $\vec{a} = (1; 3)$ ;
- b) ale punctului  $C$ , dacă  $\vec{c} = (-3; 4)$ ;
- c) ale vectorului unitar, coorientat cu vectorul  $\overline{BC}$ .
- 376. Problemă germană străveche.** O scară cu lungimea de 13 picioare este sprijinită de perete astfel, că partea ei de jos este îndreptată de la perete cu 5 picioare. Cu cât va coborî ea pe perete, dacă vom deplasa baza ei încă cu 7 picioare? Cercetați cum se va schimba poziția capătului de sus al scării, dacă vom muta partea ei de jos din poziția dată cu  $a$  picioare.
- 377.** Bisectoarea unghiului de la baza triunghiului isoscel împarte mediana, dusă la bază, în segmentele de 8 cm și 10 cm. Calculați perimetrul și aria triunghiului.

# § 12

## Aplicații ale vectorilor

Dacă se rezolvă o problemă, folosind proprietățile vectorilor, atunci aceasta-i *metoda vectorială* de rezolvare a problemei. Totodată, deseori se folosește următoarea afirmație.

### TEOREMA 5

Dacă  $X$  – punct arbitrar, iar  $M$  – mijlocul segmentului  $AB$  sau punctul de intersecție al medianelor triunghiului  $ABC$ , atunci corespunzător:

$$\overline{XM} = \frac{1}{2}(\overline{XA} + \overline{XB}) \text{ sau } \overline{XM} = \frac{1}{3}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}).$$

### DEMONSTRAȚIE.

Totdeauna sunt adevărate egalitățile:

$$\overline{XM} + \overline{MA} = \overline{XA}, \quad \overline{XM} + \overline{MB} = \overline{XB}, \quad \overline{XM} + \overline{MC} = \overline{XC}.$$

Adunând primele două din aceste egalități și luând în considerație, că  $\overline{MA} + \overline{MB} = \vec{0}$  (fig.119), obținem:  $2\overline{XM} = \overline{XA} + \overline{XB}$ , de unde  $\overline{XM} = \frac{1}{2}(\overline{XA} + \overline{XB})$ .

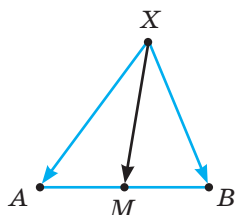


Fig.119

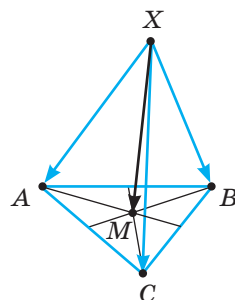


Fig.120

Dacă vom aduna toate cele trei egalități și vom considera, că  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0}$  (vezi fig.104 și problema de la pag.83), atunci obținem:  $3\overline{XM} = \overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}$ , de unde  $\overline{XM} = \frac{1}{3}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC})$  (fig.120).  $\square$



Ca exemplu să rezolvăm cu ajutorul metodei vectoriale problema care anterior a fost rezolvată cu metoda coordonatelor (vezi pag.26).

**Problema 1.** Demonstrați că mijlocurile segmentelor care unesc mijlocurile laturilor opuse ale unui patrulater, coincid.

**Rezolvare:** Dacă  $M$  și  $M_1$  sunt mijlocurile segmentelor  $EF$  și  $KP$  (fig.121), iar  $X$  – punct arbitrar (pe el numai îl imaginăm), atunci

$$\begin{aligned} \overline{XM} &= \frac{1}{2}(\overline{XE} + \overline{XF}) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}(\overline{XA} + \overline{XB}) + \frac{1}{2}(\overline{XC} + \overline{XD}) \right) = \\ &= \frac{1}{4}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC} + \overline{XD}); \\ \overline{XM}_1 &= \frac{1}{2}(\overline{XK} + \overline{XP}) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2}(\overline{XB} + \overline{XC}) + \frac{1}{2}(\overline{XA} + \overline{XD}) \right) = \\ &= \frac{1}{4}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC} + \overline{XD}). \end{aligned}$$

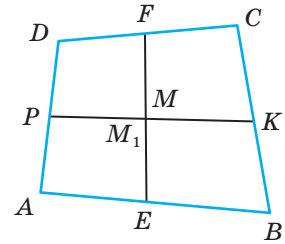


Fig.121

Părțile drepte ale acestor egalități sunt egale, de aceea

$\overline{XM} = \overline{XM}_1$ . Iar aceasta este posibil numai atunci, când punctele  $M$  și  $M_1$  coincid;

La multe proprietăți ale figurilor geometrice le corespund unele sau altele egalități vectoriale.

1.  $\overline{OA} = \overline{OB}$  — punctele  $A$  și  $B$  coincid;
2.  $\overline{AB} = k\overline{CD}$  — dreptele  $AB$  și  $CD$  sunt paralele.
3.  $\overline{AB} = k\overline{AC}$  — punctele  $A, B, C$  aparțin unei drepte;
4.  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$  — dreptele  $AB$  și  $CD$  sunt perpendiculare;
5.  $\overline{AM} = \frac{m}{n}\overline{MB}$ , iar numerele  $m$  și  $n$  sunt pozitive — punctul  $M$  împarte

segmentul  $AB$  în raportul  $AM : MB = m : n$ ;

6.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$  — unul din unghiurile, formate de dreptele, cărora le aparțin vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , este egal cu  $\varphi$ .

Folosind aceste corelații se pot rezolva multe probleme geometrice și demonstra multe teoreme.

Vectorii frecvent sunt folosiți în fizică. Însă în bună parte vectorii legați, care se definesc nu numai de lungime și direcție, ci și de punctul de aplicare.

**Problema 2.** O sarcină cu greutatea  $\vec{P}$  se află pe un plan înclinat. Înclinația față de orizont face unghiul  $\alpha$  (fig.122). Ce forță  $\vec{F}$ , orientată în direcția celui mai mare urcuș al planului, trebuie aplicată pentru ca sarcina să nu se rostogolească în jos?

**Rezolvare.** Forța de greutate  $\vec{P}$  o descompunem după două direcții reciproc perpendiculare:  $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{OB}$ . Forța  $\overline{OA}$  este perpendiculară pe planul înclinat și nu provoacă deplasarea sarcinii. Rostogolirea ei este provocată de forța  $\overline{OB}$ , al cărei modul este egal cu  $P \sin \alpha$ . Sarcina este reținută de forța  $\vec{F}$  opusă ei. Deci,  $\vec{F} = P \sin \alpha$ .

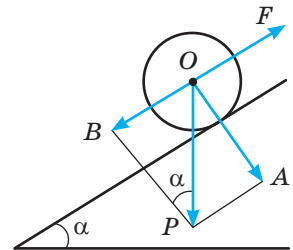


Fig.122

## PENTRU CEI CURIOSI

Prima parte a teoremei 5 poate fi generalizată (fig. 123).

### TEOREMA 6

Dacă punctul  $M$  împarte segmentul  $AB$  în raportul  $AM:MB=m:n$ , iar  $X$  - un punct arbitrar al planului, atunci

$$\overline{XM} = \frac{n}{m+n} \overline{XA} + \frac{m}{m+n} \overline{XB}.$$

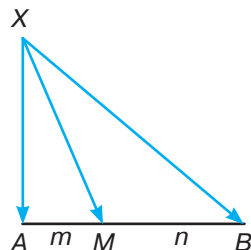


Fig.123

### DEMONSTRAȚIE.

Deoarece  $\overline{XM} + \overline{MA} = \overline{XA}$ ,  $\overline{XM} + \overline{MB} = \overline{XB}$ , reiese că

$$n\overline{XM} + n\overline{MA} = n\overline{XA}, \quad m\overline{XM} + m\overline{MB} = m\overline{XB}.$$

Dacă vom aduna termen cu termen aceste egalități vectoriale și vom lua în considerație că  $n\overline{MA} + m\overline{MB} = \vec{0}$ , atunci obținem  $(m+n)\overline{XM} = n\overline{XA} + m\overline{XB}$ , de unde

$$\overline{XM} = \frac{n}{m+n} \overline{XA} + \frac{m}{m+n} \overline{XB}.$$

Dacă  $m = n$ , atunci  $\overline{XM} = \frac{1}{2}(\overline{XA} + \overline{XB})$ .  $\square$

Vectorii pot fi folosiți nu numai în geometrie, dar și în rezolvarea problemelor algebrice. Mai ales este comod aceasta de făcut la demonstrarea inegalităților și aflarea valorilor cea mai mare și cea mai mică ale funcției sau expresiei.

De exemplu, să găsim cea mai mare valoare a funcției  $y = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$ . Domeniul ei de valori  $D(y) = [0; 2]$ .

Introducem vectorii  $\vec{a} = (1; 1)$  și  $\vec{b} = (\sqrt{x}; \sqrt{2-x})$ . Atunci funcția dată poate fi scrisă în forma  $y = \vec{a} \cdot \vec{b}$ , deoarece  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot \sqrt{x} + 1 \cdot \sqrt{2-x}$ . Așa cum  $|\vec{a}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{x+2-x} = \sqrt{2}$ , reiese că  $y = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos \varphi = 2 \cos \varphi$ .

Cea mai mare valoare a lui  $\cos \varphi$  este egală cu 1. De aceea cea mai mare valoare a funcției  $y = 2$ .

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Ce se numește metoda vectorială de rezolvare a problemelor?
2. Care formule vectoriale cunoașteți?
3. Cum în limbajul vectorilor de scris, că: a) dreptele sunt paralele; b) dreptele sunt perpendiculare; c) punctele coincid; d) punctele sunt situate pe aceeași dreaptă?
4. Oare se poate folosi metoda vectorială la rezolvarea problemelor, ale căror condiții nu conțin vectori? Aduceți exemple.

## EFFECTUĂM ÎMPREUNĂ

- 1 Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul  $M(-2; 3)$  și este perpendiculară pe dreapta  $AB$ , dacă  $A(1; 2)$ ,  $B(-4; 5)$  (fig.124).
- Fie  $N(x; y)$  — punct arbitrar al dreptei căutate  $MN$  și  $MN \perp AB$ . Atunci  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ . Deoarece  $\overrightarrow{AB} = (-5; 3)$ ,  $\overrightarrow{MN} = (x+2; y-3)$ , reiese că  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = -5(x+2) + 3(y-3) = 0$ , de unde  $-5(x+2) + 3(y-3) = 0$ , de unde  $-5x - 10 + 3y - 9 = 0$ , de unde  $-5x + 3y - 19 = 0$  sau  $5x - 3y + 19 = 0$ . Așadar, ecuația dreptei va avea aspectul:  $5x - 3y + 19 = 0$ .

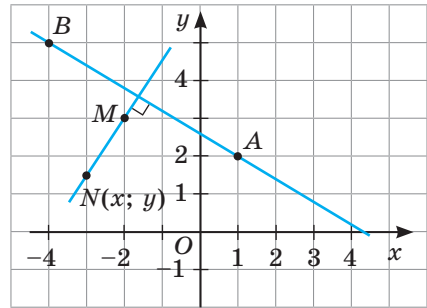


Fig.124

- 2 Aflați aria triunghiului  $ABC$ , якщо  $A(1; 2)$ ,  $B(4; 1)$ ,  $C(3; 3)$ .
- Aflăm  $|\overrightarrow{AB}|$ ,  $|\overrightarrow{AC}|$  și  $\cos A$ :  $\overrightarrow{AB} = (3; -1)$ , de aceea  $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ .  $\overrightarrow{AC} = (2; 1)$ , de aceea  $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ .  $\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{3 \cdot 2 - 1 \cdot 1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Dacă  $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , atunci  $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Aflăm aria triunghiului:
- $$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin A = \frac{1}{2} \sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2,5.$$

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

378. Ce se poate spune despre segmentele  $AB$  și  $CD$ , dacă  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{CD}$ ?
379. Stabiliți repartizarea reciprocă a punctelor  $A, B, C$ , dacă
- a)  $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ ;      b)  $\overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{BA}$ .
380. Oare sunt situate pe aceeași dreaptă punctele  $A, B, C$ , dacă
- a)  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$ ;      b)  $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BC}$ ;      c)  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ ?
381. Determinați tipul patrulaterului  $ABCD$ , dacă:
- a)  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ;      b)  $\overrightarrow{BC} = 0,3\overrightarrow{AD}$ .
382. Stabiliți tipul triunghiului  $ABC$ , dacă:  $\overrightarrow{CA} = (-2; 3)$ ,  $\overrightarrow{CB} = (3; 2)$ .

## A

- 383.** Demonstrați că patrulaterul cu vârfurile în punctele  $M(-4; -2)$ ,  $N(-6; 2)$ ,  $P(4; 7)$ ,  $K(6; 3)$  este dreptunghi.
- 384.** Demonstrați că patrulaterul cu vârfurile în punctele  $A(-1; -2)$ ,  $B(-8; 4)$ ,  $C(1; 6)$ ,  $D(8; 0)$  este romb.
- 385.** Demonstrați că punctele  $M(1; 3)$ ,  $N(-2; 7)$ ,  $K(-8; 15)$  sunt situate pe o dreaptă. Care din puncte se află între altele două? În ce raport împarte acest punct segmentul?
- 386.** În ce raport axa  $OX$  împarte segmentul  $AB$ , dacă  $A(1; 6)$ ,  $B(7; -12)$ ?
- 387.**  $AM$  — mediana triunghiului  $ABC$ . Aflați coordonatele vectorului  $\overline{AM}$  și modulul lui, dacă  $A(-3; 2)$ ,  $B(1; 1)$ ,  $C(3; 5)$ .
- 388.** Găsiți coordonatele punctului de intersecție al medianelor triunghiului  $ABC$ , dacă  $A(-7; 12)$ ,  $B(-3; -2)$ ,  $C(4; 5)$ .
- 389.** Scrieți ecuațiile înălțimilor ale triunghiului  $ABC$ , dacă  $A(-1; 2)$ ,  $B(3; 5)$ ,  $C(7; -3)$ .
- 390.** Scrieți ecuația dreptei, care este tangentă la cirmuferința cu centrul  $P(-4; 2)$  în punctul  $A(1; 4)$ .
- 391.** Aflați aria triunghiului  $ABC$ , dacă  $A(2; 1)$ ,  $B(8; 7)$ ,  $C(6; 2)$ .
- 392.** Diagonalele unui patrulater sunt perpendiculare. Demonstrați că sumele pătratelor ale laturilor opuse ale acestui patrulater sunt egale.
- 393.** Fie  $K$ ,  $P$ ,  $T$ ,  $L$  — mijlocurile laturilor  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  ale unui patrulater arbitrar. Demonstrați că punctele de intersecție ale medianelor ce aparțin triunghiurilor  $APT$  și  $CKL$  coincid.

## B

- 394.** Demonstrați teorema despre linia medie a trapezului.
- 395.** Demonstrați că medianele triunghiului se intersectează într-un punct.
- 396.** Demonstrați că atunci, când  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sunt laturile triunghiului, iar  $m_c$  — mediana, dusă la latura  $c$ , avem  $m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$ .
- 397.** Demonstrați că patrulaterul, la care diagonalele sunt împărțite în jumătate de punctul lor de intersecție, este paralelogram.
- 398.** **Problemă deschisă.** Demonstrați teorema ..., folosind metoda vectorială.
- 399.** În triunghiul  $ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $A(1; -3)$ ,  $B(-4; -8)$ . Aflați coordonatele punctului  $C$ , dacă se știe că ele sunt egale.
- 400.** Scrieți ecuațiile tangentelor, duse din punctul  $A(1; 1)$  la cirmuferința  $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 5$ .
- 401.** Aflați coordonatele vectorului unitar, colinar cu bisectoarea unghiului  $B$  a triunghiului  $ABC$ , dacă  $A(2; 7)$ ,  $B(4; 3)$ ,  $C(8; 1)$ .
- 402.** Se dă dreptunghiul  $ABCD$ . Demonstrați că pentru orice punct  $M$  are loc egalitatea:  $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$ .

- 403.** Demonstrați că dreapta care trece prin mijlocurile bazelor ale unui trapez, trece și prin punctul de intersecție al diagonalelor lui.
- 404.**  $ABCD$  și  $AB_1C_1D_1$  — sunt paralelograme, punctele  $K, P, T$  — sunt mijlocurile segmentelor  $BB_1, CC_1$  și  $DD_1$ . Demonstrați că  $AK = PT$  și  $AT = KP$  (fig.125).
- 405.** Pe laturile  $AB, BC, CA$  ale triunghiului  $ABC$  notați așa puncte  $A_1, B_1, C_1$ , că  $AA_1 = k \cdot AB, BB_1 = k \cdot BC, CC_1 = k \cdot CA$ . Demonstrați că punctele de intersecție ale medianelor triunghiurilor  $ABC$  și  $A_1B_1C_1$  coincid.

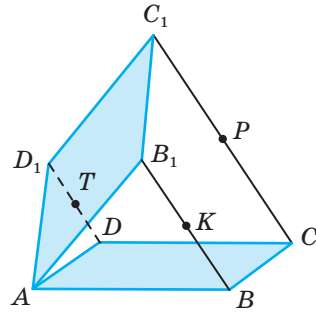


Fig.125

- 406.** Aflați cea mai mare valoare a expresiei  $3x + 4\sqrt{1-x^2}$  și indicați  $x$ , pentru care se obține această valoare.
- 407.** Demonstrați inegalitatea  $\sqrt{2a+1} + \sqrt{2b+1} \leq 2\sqrt{p+1}$ , unde  $p = a + b$ .

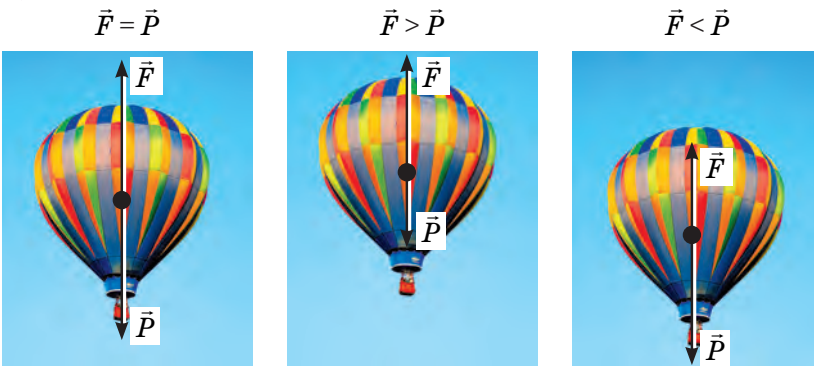
**ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ**

- 408.** Pentru punctele  $M(-3; 2)$  și  $N(5; 4)$  definiți printr-o formulă și reprezentați pe plan de coordonate mulțimea punctelor  $G(x; y)$ , care îndeplinesc condiția:  
 a)  $MG \cdot MN = 0$ ; b)  $GM \cdot GN = 0$ .

**PROBLEME PENTRU REPETARE**

- 409.** Aflați produsul scalar al vectorilor  $\vec{m} = 2\vec{a} - \vec{b}$  și  $\vec{n} = \vec{a} + 3\vec{b}$ , dacă  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  — sunt vectori unitari reciproc perpendiculari.
- 410.** Găsiți modulul vectorului  $\vec{a}$ , dacă  $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ , unde  $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 2$ , iar unghiul format de ei este de  $60^\circ$ .
- 411.** Diagonalele unui trapez sunt perpendiculare și una din ele este egală cu 15 cm. Aflați aria trapezului, dacă înălțimea lui este egală cu 12 cm.

**GEOMETRIA ÎN JURUL NOSTRU**

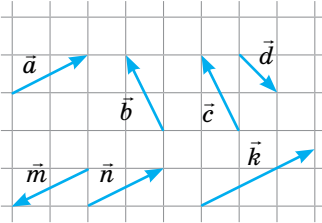


Vectori în fenomenele fizice

## PROBLEME CU DESENE GATA

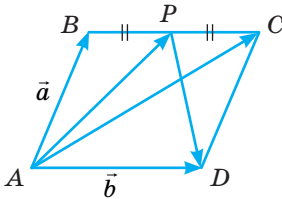
A

- 1 Indicați vectorii coliniari, egali, opuși.

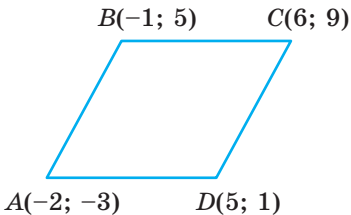


- 2  $ABCD$  — paralelogram.

Exprimați  $\overline{AP}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{PD}$  prin  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ .

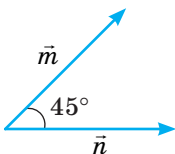


- 3 Demonstrați:  $ABCD$  — romb.



- 4  $|\vec{m}| = 2\sqrt{2}$ ;  $|\vec{n}| = 3$ .

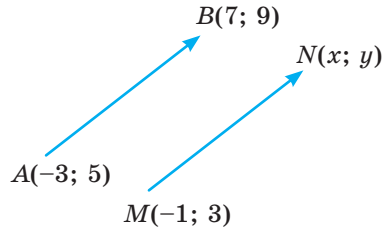
$|\vec{m} + \vec{n}|$ ;  $|\vec{m} - \vec{n}|$



B

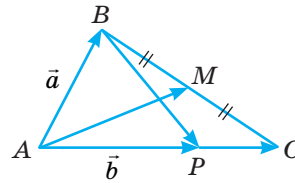
$$\overline{AB} = \overline{MN}$$

$N(x; y)$

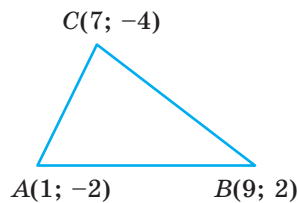


$$\overline{AB} = \vec{a}, \overline{AC} = \vec{b}, \overline{AP} : \overline{PC} = 3 : 1.$$

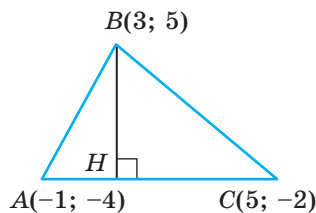
Exprimați prin  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$   $\overline{AM}$ ,  $\overline{BM}$ ,  $\overline{AP}$ ,  $\overline{BP}$ .



$\angle A$ ;  $\angle B$ ;  $\angle C$ .



Ecuția  $BH$ .



## LUCRAREA INDEPENDENTĂ 2

### VARIANTA 1

- 1°. Desenați doi vectori arbitrari  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  și construiți vectorul  $\vec{c} = 2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ .
- 2°. Aflați cosinusul unghiului  $A$  al triunghiului  $ABC$ , dacă  $A(-3; 1)$ ,  $B(1; 3)$ ,  $C(5; -5)$ .
- 3°. Aflați modulul vectorului  $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ , dacă  $|\vec{p}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{q}| = 1$ ,  $(\widehat{\vec{p}; \vec{q}}) = 45^\circ$ .

### VARIANTA 2

- 1°. Desenați doi vectori arbitrari  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  și construiți vectorul  $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}$ .
- 2°. Aflați cosinusul unghiului  $B$  al triunghiului  $ABC$ , dacă  $A(3; 7)$ ,  $B(-3; -1)$ ,  $C(5; 3)$ .
- 3°. Aflați modulul vectorului  $\vec{n} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ , dacă  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 60^\circ$ .

### VARIANTA 3

- 1°. Desenați doi vectori arbitrari  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  și construiți vectorul  $\vec{c} = -2\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ .
- 2°. Găsiți cosinusul unghiului  $C$  al triunghiului  $ABC$ , dacă  $A(-3; -3)$ ,  $B(5; 1)$ ,  $C(3; 5)$ .
- 3°. Aflați modulul vectorului  $\vec{n} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$ , dacă  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{3}$ ,  $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 30^\circ$ .

### VARIANTA 4

- 1°. Desenați doi vectori arbitrari  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  și construiți vectorul  $\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{b}$ .
- 2°. Aflați cosinusul unghiului  $B$  al triunghiului  $ABC$ , dacă  $A(-3; -5)$ ,  $B(3; 3)$ ,  $C(5; -1)$ .
- 3°. Aflați modulul vectorului  $\vec{p} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$ , dacă  $|\vec{m}| = 3$ ,  $|\vec{n}| = 1$ ,  $(\widehat{\vec{m}; \vec{n}}) = 60^\circ$ .

## ÎNSĂRCINĂRI TESTE 2

<p><b>1</b> Aflați coordonatele vectorului <math>\overline{AB}</math>, dacă <math>A(-1; -3)</math>, <math>B(-7; 12)</math>.</p>	<p>a) <math>(6; -15)</math>; b) <math>(-6; 15)</math>;</p>	<p>c) <math>(-8; 9)</math>; d) <math>(-6; 9)</math>.</p>
<p><b>2</b> Care este condiția perpendicularității vectorilor <math>\vec{a}</math> și <math>\vec{b}</math>?</p>	<p>a) <math>\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}</math>; b) <math>\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}</math>;</p>	<p>c) <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0}</math>; d) nu se poate stabili</p>
<p><b>3</b> Se da <math>\vec{p} = (-2; 1)</math>, <math>\vec{q} = (4; -3)</math>. Aflați coordonatele vectorului <math>\vec{m} = 2\vec{p} + 3\vec{q}</math>.</p>	<p>a) <math>(8; -7)</math>; b) <math>(-14; 0)</math>;</p>	<p>c) <math>(8; 11)</math>; d) <math>(-2; 3)</math>.</p>
<p><b>4</b> Aflați lungimea vectorului <math>\vec{a} = (-2; 4)</math>.</p>	<p>a) <math>2\sqrt{10}</math>; b) <math>\pm 2\sqrt{3}</math>;</p>	<p>c) <math>\pm 2\sqrt{5}</math>; d) <math>2\sqrt{5}</math>.</p>
<p><b>5</b> Care din următorii vectori este coliniar cu vectorul <math>\vec{a} = (-1; 4)</math>?</p>	<p>a) <math>(-2; -8)</math>; b) <math>(0,5; 2)</math>;</p>	<p>c) <math>(3; -3)</math>; d) <math>(4; -16)</math>.</p>
<p><b>6</b> Stabiliți tipul triunghiului <math>ABC</math>, dacă <math>\overline{AB} = (-1; 3)</math>, <math>\overline{AC} = (6; 2)</math>.</p>	<p>a) isoscel; b) ascuțitunghic; c) dreptunghic; d) obtuzunghic.</p>	
<p><b>7</b> Aflați unghiul făcut de vectorii unitari <math>\vec{a}</math> și <math>\vec{b}</math>, dacă <math>\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,5</math>.</p>	<p>a) <math>30^\circ</math>; b) <math>60^\circ</math>;</p>	<p>c) <math>120^\circ</math>; d) <math>45^\circ</math>.</p>
<p><b>8</b> Pentru care valoare a lui <math>m</math> vectorii <math>\vec{a} = (-2; 6)</math> și <math>\vec{b} = (9; m)</math> sunt perpendiculari?</p>	<p>a) <math>-3</math>; b) <math>27</math>;</p>	<p>c) <math>3</math>; d) <math>-27</math>.</p>
<p><b>9</b> Pentru care valoare a lui <math>x</math> vectorii <math>\vec{m} = (3; x)</math> și <math>\vec{n} = (-6; 7)</math> sunt coliniari?</p>	<p>a) <math>14</math>; b) <math>3,5</math>;</p>	<p>c) <math>-3,5</math>; d) <math>-14</math>.</p>
<p><b>10</b> În care cazuri punctele <math>M_1</math> și <math>M_2</math> coincid?</p>	<p>a) <math>\overline{AM_1} = \overline{BM_2}</math>; b) <math>\overline{OM_1} = \overline{OM_2}</math>;</p>	<p>c) <math>\overline{AM_1} = \overline{M_1M_2}</math>; d) <math>\overline{M_1M_2} \neq \vec{0}</math>.</p>



## PROBLEME TIPICE PENTRU LUCRAREA DE CONTROL

1°. Construiți doi vectori arbitrari  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ . Construiți vectorii:

a)  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ ;      б)  $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ ;      в)  $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ ;      г)  $\vec{n} = 0,5\vec{a} - 2\vec{b}$ .

2°. Sunt date punctele  $A(-1; 4)$ ,  $B(-3; 1)$ ,  $C(5; 0)$ ,  $D(3; -3)$ . Demonstrați că  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

3°. Se dă:  $\vec{a} = (-1; 3)$ ,  $\vec{b} = (-2; 4)$ . Aflați  $|\vec{c}|$ , dacă  $\vec{c} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$ .

4°. Pentru care valoare a lui  $m$  vectorii  $\vec{a} = (m; 2)$  și  $\vec{b} = (4; m + 2)$  sunt:  
a) perpendiculari;      б) coliniari?

5°. Sunt date punctele  $A(3; 1)$ ,  $B(5; -2)$ ,  $C(-4; 5)$ . Aflați coordonatele punctului  $D$ , dacă  $\overline{AB} = \overline{CD}$ .

6°. Aflați modulul vectorului  $\vec{c} = \vec{p} - 2\vec{q}$ , dacă  $|\vec{p}| = 5$ ,  $|\vec{q}| = 4$ ,  $(\widehat{\vec{p}; \vec{q}}) = 60^\circ$ .

7°.  $ABCD$  — dreptunghi,  $\overline{AB} = \vec{a}$ ,  $\overline{AD} = \vec{b}$ . Exprimați vectorii  $\overline{AM}$  și  $\overline{MD}$  prin vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , dacă  $M \in BC$  și  $BM : MC = 1 : 2$ .

8°. Demonstrați că patrulaterul cu vârfurile în punctele  $A(-7; -5)$ ,  $B(-5; 1)$ ,  $C(9; 3)$ ,  $D(7; -3)$  — paraleloram; aflați unghiul format de diagonalele lui.

9°. Aflați  $|\vec{a} - \vec{b}|$ , dacă  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}| = 5$ .

10°. Oare aparțin punctele  $M$ ,  $P$  și  $K$  aceleiași drepte, dacă  $M(-7; 8)$ ,  $P(4; 1)$ ,  $K(-40; 29)$ ?

La acele popoare, care știu geometria, chiar cele mai simple lucruri au o anumită frumusețe specifică.

*F. Procopovici*

# Principalul în capitolul 2

**Mărimile vectoriale** sunt acelea care sunt determinate nu numai de valorile numerice, dar și de direcții. Valorile mărimilor vectoriale sunt **vectori**. Geometric vectorii (nenuli) se reprezintă prin **segmente orientate**. Segmentul orientat are origine și extremitate. Distanța dintre ele – **modulul** (sau lungimea) **vectorului**.

Doi vectori se numesc **coliniari**, dacă segmentele orientate ce le corespund sunt situate pe aceeași dreaptă sau pe drepte paralele. Vectorii coliniari sunt coorientați sau orientați în sens opus. Doi vectori sunt **egali**, dacă ei sunt coorientați și au moduli egali. Doi vectori se numesc **opuși**, dacă ei au moduli egali și sunt orientați în sens opus.

**Coordonate ale vectorului** cu originea  $A(x_1; y_1)$  și extremitatea  $B(x_2; y_2)$  sunt numite numerele  $x = x_2 - x_1$  și  $y = y_2 - y_1$ . Se scrie acest vector în forma  $\overrightarrow{AB} = (x; y)$ , sau  $\vec{a} = (x; y)$ , sau  $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ .

**Modulul vectorului**  $\overrightarrow{AB} = (x; y)$  se notează cu simbolul  $|\overrightarrow{AB}|$ , și este egal cu  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Sumă a doi vectori**  $\vec{a} = (x_1; y_1)$  și  $\vec{b} = (x_2; y_2)$  este numit vectorul  $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$ . La adunarea vectorilor se îndeplinesc proprietățile comutativă și asociativă. Geometric se pot aduna vectorii după regula triunghiului (fig.126, a) sau a paralelogramului (fig. 126, b).

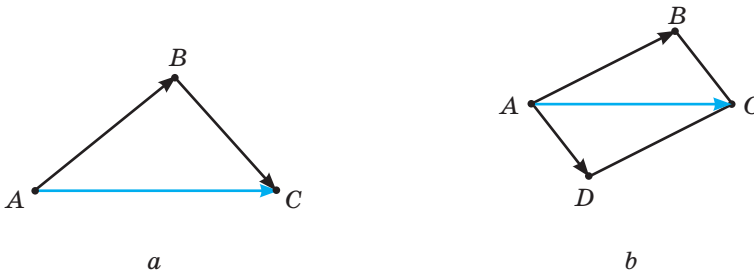


Fig.126

Totdeauna sunt adevărate egalitățile vectoriale

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}.$$

Dacă  $ABCD$  este paralelogram, atunci  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

**Diferență a vectorilor**  $\vec{a} = (x_1; y_1)$  și  $\vec{b} = (x_2; y_2)$  este numit vectorul  $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$ . Pentru a scădea un vector din altul trebuie de adunat la primul vector nul, opus celui de-al doilea, adică

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Pentru orice vectori  $\overrightarrow{AB}$  și  $\overrightarrow{AC}$ , totdeauna

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \quad (\text{fig.127}).$$

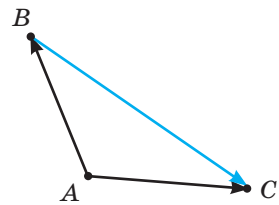


Fig.127

**Produsul vectorului**  $\vec{a} = (x; y)$  cu numărul  $n$  se numește vectoru  $n\vec{a} = (nx; ny)$ .  
Totdeauna sunt adevărate egalitățile:  $(n + m)\vec{a} = n\vec{a} + m\vec{a}$  și  $n(\vec{a} + \vec{b}) = n\vec{a} + n\vec{b}$ .

**Produsul scalar a doi vectori nenuli** este numit produsul modulilor acestor vectori cu cosinusul unghiului format de ei:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Cosinusul unghiului făcut de vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  este determinat după formula

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Pătratul scalar al vectorului este egal cu pătratul modulului lui  $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$  sau  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$ .

$\vec{a} = k\vec{b}$  — condiția coliniarității a vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ ;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  — condiția perpendicularității.

#### În formă de coordonate:

Dacă  $\vec{a} = (x_1; y_1)$  și  $\vec{b} = (x_2; y_2)$ , atunci  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ .

Vectorii nenuli  $\vec{a} = (x_1; y_1)$  și  $\vec{b} = (x_2; y_2)$  **sunt perpendiculari atunci și numai atunci, când  $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ .**

Vectorii  $\vec{a} = (x_1; y_1)$  și  $\vec{b} = (x_2; y_2)$  sunt coliniari atunci și numai atunci, când coordonatele corespunzătoare ale lor sunt proporționale:  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ .

Dacă  $X$  – punct arbitrar, iar  $M$  – mijlocul segmentului  $AB$  sau punctul de intersecție al medianelor triunghiului  $ABC$ , atunci avem corespunzător

$$\overline{XM} = \frac{1}{2}(\overline{XA} + \overline{XB}) \text{ sau } \overline{XM} = \frac{1}{3}(\overline{XA} + \overline{XB} + \overline{XC}).$$

La multe proprietăți ale figurilor geometrice le corespund unele sau altele egalități vectoriale.

1.  $\overline{OA} = \overline{OB}$  — punctele  $A$  și  $B$  coincid.

2.  $\overline{AB} = k\overline{CD}$  — dreptele  $AB$  și  $CD$  sunt paralele.

3.  $\overline{AB} = k\overline{AC}$  — punctele  $A, B, C$  sunt situate pe aceeași dreaptă.

4.  $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$  — dreptele  $AB$  și  $CD$  sunt perpendiculare.

5.  $\overline{AM} = \frac{m}{n}\overline{MB}$ , iar numerele  $m$  și  $n$  sunt pozitive – punctul  $M$  împarte segmentul  $AB$  în raportul  $AM : MB = m : n$ .

6.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi$  — unghiul format de dreptele, pe care sunt situați vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ , este egal cu  $\varphi$ .

*Anume matematica în primul rând ne apără de inducerea în eroare a simțămintelor și ne învață, că o treabă este cum de construit obiectele, care sunt percepute de simțăminte, alta – ce impresie ele fac.*



## LEONARD EULER

(1707–1783)

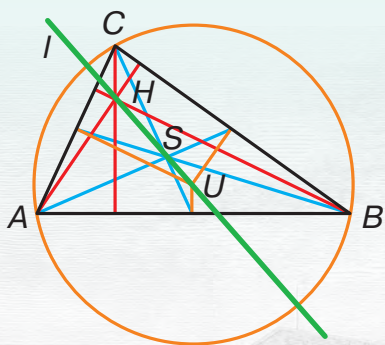
Ilustru matematician, fizician, astronom, inginer ș.a. elvețian, rus și german. Unul din cei mai remarcabili matematicieni ai secolului XVIII.

- În matematică descoperirile lui fundamentale se referă la matematica elementară, trigonometrie, teoria numerelor, analiza matematică, geometria diferențială, topologie.

- A elaborat partea considerabilă a terminologiei contemporane.
- Aproape în toate domeniile matematicii și ale aplicațiilor ei sunt termeni legați de numele lui.

Influența lui Euler asupra matematicii o descrie enunțul lui P. Laplace:

"Citiți-l pe Euler, citiți-l pe Euler el este învățător pentru noi toți".



Dreapta lui Euler



# Capitolul 3

## Rezolvarea triunghiurilor

# Section 3

## Triangels solving

A **rezolva triunghiul** – aceasta înseamnă că, știind câteva elemente ale triunghiului, trebuie de determinat celelalte elemente ale lui. Triunghiurile dreptunghice se rezolvă, folosind sinusul, cosinusul și tangenta unghiului ascuțit, iar triunghiurile arbitrare – cu ajutorul teoremelor a cosinusului și a sinusului. Astfel de probleme din vechime erau nevoiți mulți savanți să le rezolve, de aceea încă în antichitate a fost creată o știință matematică separată a celor mai importante știri din *trigonometrie*. Capitolul dat este expunerea prescurtată a celor mai importante știri din trigonometrie.

**§ 13** | Teorema cosinusurilor | Cosines theorem

**§ 14** | Teorema sinusurilor | Sines theorem

**§ 15** | Rezolvarea  
triunghiurilor | Triangels  
solving

**§ 16** | Formule pentru aflarea  
ariei triunghiului | Triangle area  
find formula

**PROIECT DE ÎNVĂȚĂMÂNT**  
"Trigonometria cunoscută  
și necunoscută"

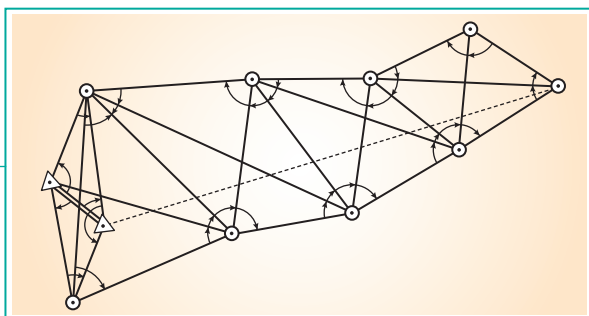
**EDUCATIONAL PROJECT**  
"Familiar and Unfamiliar  
Trigonometry"



# Pentru ce trebuie de învățat trigonometria

Trigonometria, în primul rând, trebuie pentru aceea ca să fie măsurate distanțele dintre obiecte și dimensiunile obiectelor acolo, unde este dificil sau imposibil de-a ajunge: în cosmos, în ocean, sub pământ ș.a.

Geodeziștii, determinând poziția obiectelor pe suprafața Pământului, utilizează rețeaua geodezică, metoda triangulației și dispozitivele electronice moderne: tahimetrul electronic și receptorul GPS.



Se stabilesc dimensiunile zăcămintelor de minerale și acumularea de ape subpământene, sunt construite tunele pentru transport ș.a. Până a construi o mină pentru extragerea cărbunelui trebuie de știut dimensiunile și unghiul de înclinare a stratului. Pentru a le determina sunt forate 3 sonde în trei locuri diferite și se clarifică la ce adâncime în fiecare loc se găsește stratul. Pe baza acestor date și a calculului speciale, legate cu funcțiile trigonometrice, sunt stabilite datele necesare.

Se fac calcule cu ajutorul funcțiilor trigonometrice în biologie (analiza rontghnostructurală, vizualizarea medicală (tomografia computerizată și cercetarea ultrasonoră)



**Încă unde se mai folosește trigonometria? Aduceți exemplele voastre.**

# § 13

## Teorema cosinusurilor

Pentru a rezolva nu numai triunghiurile dreptunghice, ci orice triunghiuri, trebuie de știut teoremele cosinusului și a sinusului. Pentru înțelegerea mai bună a lor să cădem de acord cu aceea, că laturile triunghiului – acesta-s lungimile lor, iar unghiurile sunt măsurile în grade ale lor.

Mai frecvent vom nota laturile cu literele latine  $a, b$  și  $c$ , iar unghiurile opuse lor (de la vârfurile  $A, B, C$ ) — cu literele grecești  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$ .

### TEOREMA 7

(A cosinusurilor). **Pătratul laturii triunghiului este egal cu suma pătratelor a celorlalte două laturi ale lui fără îndoitul produs al acestor laturi cu cosinusul unghiului format de ele.**

### DEMONSTRAȚIE.

Fie  $ABC$  — triunghi arbitrar (fig. 128),  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$  și  $\angle A = \alpha$ . Să demonstrăm că  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ .

Ducem  $BH$  în triunghiul dat și găsim pătratul laturii  $a$  după teorema lui Pitagora din  $\triangle BHC$ .

1) Dacă  $\alpha < 90^\circ$ , atunci  $BH = c \sin \alpha$ ,  
 $AH = c \cos \alpha$ ,  $CH = AC - AH = b - c \cos \alpha$ .

Atunci  $a^2 = BH^2 + CH^2 = (c \sin \alpha)^2 + (b - c \cos \alpha)^2 = c^2 \sin^2 \alpha + b^2 - 2bc \cos \alpha + c^2 \cos^2 \alpha = c^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + b^2 - 2bc \cos \alpha = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha$ . Cazul când,  $\angle C$  — obtuz, cercetați-l de sine stătător.

2) Dacă  $\alpha > 90^\circ$  (Fig. 129), atunci  $BH = c \sin (180^\circ - \alpha) = c \sin \alpha$ ,  
 $AH = c \cos (180^\circ - \alpha) = -c \cos \alpha$ ,  
 $HC = AC + AH = b + (-c \cos \alpha) = b - c \cos \alpha$ .

Ca și în primul caz:

$a^2 = BH^2 + CH^2 = (c \sin \alpha)^2 + (b - c \cos \alpha)^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cos \alpha$ .

3) Dacă  $\alpha = 90^\circ$  (fig. 130), atunci  $\triangle ABC$  este dreptunghic și  $\cos \alpha = 0$ . În virtutea teoremei lui Pitagora  $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ .

Așadar, care nu ar fi unghiul  $\alpha$  al triunghiului  $ABC$  totdeauna

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \quad \square$$

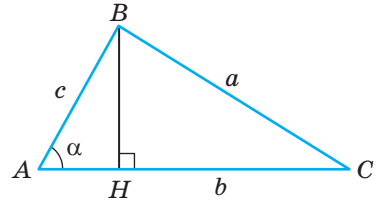


Fig.128

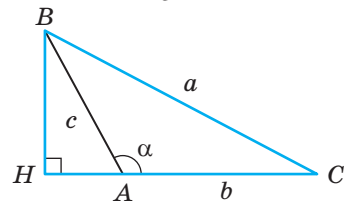


Fig.129

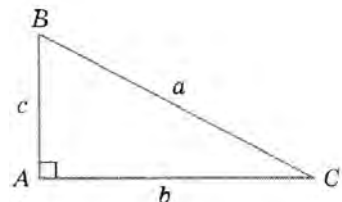


Fig.130

**Atrageți atenția!**

Teorema lui Patagora este un caz particular al teoremei cosinusurilor. Pe baza teoremei cosinusurilor  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ . Dacă însă  $\gamma = 90^\circ$ , atunci  $\cos \gamma = 0$  și  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Din formula  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$  reiese:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Această formulă permite de-a calcula unghiurile triunghiului, dacă sunt cunoscute laturile lui. În general teorema cosinusurilor leagă patru elemente ale triunghiului: trei laturi ale triunghiului și unghiul. De aceea cu ajutorul acestei teoreme totdeauna se poate afla unul din elementele necunoscute, dacă sunt cunoscute altele trei.

Folosind teorema cosinusurilor să demonstrăm următoarea teoremă.

**TEOREMA 8**

(Proprietatea diagonalelor paralelogramului). **Suma pătratelor diagonalelor paralelogramului este egală cu suma pătratelor laturilor lui.**

**DEMONSTRAȚIE.**

Fie că laturile paralelogramului sunt  $a, b, a, b$ , iar diagonalele —  $m$  și  $n$  (fig.131). Pe baza teoremei cosinusurilor din  $\triangle ABD$  și  $\triangle ABC$  respectiv avem:

$$m^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos A,$$

$$n^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B.$$

Deoarece  $\angle B = 180^\circ - \angle A$ , iar cosinusurile a astfel de unghiuri se deosebesc numai prin semne, reiese că  $\cos B = -\cos A$ . De aceea  $m^2 + n^2 = 2a^2 + 2b^2 - 2ab \cos A + 2ab \cos A = 2a^2 + 2b^2$ .

Aceasta și trebuia de demonstrat.

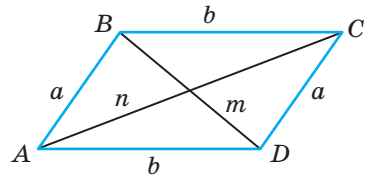


Fig.131

**PENTRU CEI CURIOSI**

Aplicând teorema cosinusurilor se poate determina tipul triunghiului (ascuțitunghic, dreptunghic sau obtuzunghic), fără a calcula unghiurile lui. Se știe că unghiul drept sau cel obtuz al triunghiului este opus laturii mai mari a lui. Fie în  $\triangle ABC$  laturile  $a, b, c$  și cea mai mare din ele este  $a$ . În acest caz unghiurile  $B$  și  $C$  sunt ascuțite, iar unghiul  $A$  poate fi ascuțit, drept sau obtuz. Pentru a clarifica aceasta să ne folosim de formula  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ .

Dacă  $b^2 + c^2 > a^2$ , atunci  $\cos A > 0$ , din aceasta reiese că unghiul  $\angle A$  — ascuțit. Dacă  $b^2 + c^2 = a^2$ , atunci  $\cos A = 0$  și unghiul  $\angle A$  — drept. Iar dacă  $b^2 + c^2 < a^2$ , atunci  $\cos A < 0$  și unghiul  $\angle A$  va fi obtuz. Deci, dacă:

$$b^2 + c^2 > a^2, \text{ atunci } \angle A \text{ — ascuțit;}$$

$$b^2 + c^2 = a^2, \text{ atunci } \angle A \text{ — drept;}$$

$$b^2 + c^2 < a^2, \text{ atunci } \angle A \text{ — obtuz.}$$



## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Formulați teorema cosinusurilor.
2. Arătați că teorema lui Pitagora este consecință din teorema cosinusurilor.
3. Cum de aflat unghiurile triunghiului după laturile cunoscute ale lui?
4. Cu este egală suma pătratelor diagonalelor ale unui paralelogram?

## EFFECTUĂM ÎMPREUNĂ

- 1 Aflați cosinusul celui mai mic unghi al triunghiului ale cărui laturi sunt 3,5 și 6. Indicați valoarea aproximativă a măsurii acestui unghi.

- Unghiul cel mai mic  $\alpha$  este opus laturii celei mai mici. Pe baza teoremei cosinusurilor  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$  avem:

$$3^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos \alpha, \text{ de unde}$$

$$60 \cos \alpha = 5^2 + 6^2 - 3^2 = 52, \quad \cos \alpha = \frac{52}{60} = \frac{13}{15} \approx 0,8667.$$

Conform tabelii de pe forțaș aflăm:  $\alpha \approx 30^\circ$ .

- 2 Aflați lungimea medianei triunghiului cu laturile 12 cm, 14 cm și 22 cm, dusă la cea mai mare latură.

- Fie că în  $\triangle ABC$   $AB = 12$  cm,  $BC = 14$  cm,  $AC = 22$  cm,  $BM$  — mediană (fig.132)

Prelungim mediana după punctul  $M$  la distanța  $MD = BM$  și unim punctul  $D$  cu punctele  $A$  și  $C$ . Patrulaterul  $ABCD$  este paralelogram, fiindcă diagonalele lui sunt împărțite în jumătate de punctul de intersecție al lor.

Atunci  $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$ , adică  $22^2 + BD^2 = 2(12^2 + 14^2)$ , avem:

$$484 + BD^2 = 2(144 + 196), \text{ de unde } BD^2 = 2 \cdot 340 - 484 = 196.$$

Așadar,  $BD = 14$  cm, atunci  $BM = 7$  cm.

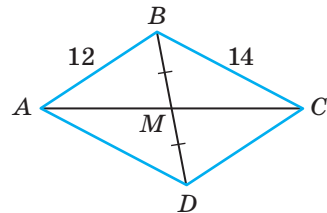


Fig.132

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

412. Care va fi egalitatea  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ , dacă  $\alpha = 90^\circ$ ?
413. Cu ce este egal unghiul  $\beta$  în triunghiul  $ABC$ , dacă: a)  $b^2 = a^2 + c^2$ ; b)  $a = b = c$ ?
414. Două laturi ale triunghiului sunt constante, iar unghiul format de ele se mărește. Demonstrați că totodată a treia latură se mărește.

415. Folosind figura 133 exprimați pe baza teoremei cosinusurilor fiecare latură a triunghiului  $MNK$ .
416. Exprimați cosinusul fiecărui unghi al triunghiului  $MNK$  (fig.133).
417. Aflați suma pătratelor diagonalelor ale unui romb cu latura  $a$ .
418. Aflați suma pătratelor diagonalelor ale dreptunghiului cu laturile  $a$  și  $b$ .

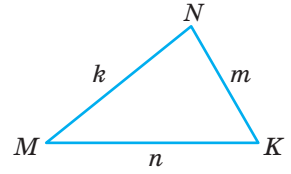


Fig.133

## A

419. Aflați latura necunoscută a triunghiului  $ABC$ , dacă:  
a)  $AB = 5$  cm,  $AC = 8$  cm,  $\angle A = 60^\circ$ ; b)  $AB = 4$  cm,  $BC = 10$  cm,  $\angle B = 120^\circ$ .
420. Aflați latura necunoscută a triunghiului  $MNK$ , dacă:  
a)  $MN = 4$  cm,  $NK = 2$  cm,  $\angle N = 60^\circ$ ;  
b)  $MN = 3$  cm,  $MK = 2\sqrt{2}$  cm,  $\angle M = 135^\circ$ ;  
c)  $NK = 2$  cm,  $MK = 2\sqrt{3}$  cm,  $\angle K = 30^\circ$ ;  
d)  $MK = 7$  cm,  $MN = 8$  cm,  $\angle M = 120^\circ$ .
421. Aflați  $\angle B$  al triunghiului  $ABC$ , dacă:  
a)  $AB = 5$  dm,  $BC = 8$  dm,  $AC = 7$  dm;  
b)  $AB = 8$  km,  $BC = 7$  km,  $AC = 13$  km.
422. Aflați cosinusurile unghiurilor ale triunghiului cu laturile:  
a) 5 cm, 6 cm și 7 cm; b) 2 cm, 4 cm și 5 cm.
423. Poarta de fotbal  $AB$  are lățimea de 8 iarzi (fig.134). Jucătorul  $X$  a marcat golul când se afla la distanța de 25 iarzi de la unul din stâlpii porții și la 28 de iarzi de la celălalt stâlp. Sub ce unghi jucătorul vede poarta din acest loc?
424. Ascutitunghic sau obtuzunghic este triunghiul cu laturile  
a) 3 cm, 5 cm și 7 cm;  
b) 5 cm, 7 cm și 8 cm?
425. Laturile triunghiului sunt egale cu 6 cm, 14 cm și 16 cm. Aflați unghiul cu măsura mijlocie.
426. Aflați cel mai mare unghi al triunghiului cu laturile 6 cm, 10 cm și 14 cm.
427. Aflați diagonalele paralelogramului, dacă laturile lui sunt egale cu 7 cm și  $3\sqrt{2}$  cm, iar unghiul ascuțit  $45^\circ$ .
428. Diagonalele paralelogramului sunt egale cu  $8\sqrt{3}$  cm și 16 cm, iar una din diagonale este egală cu  $30^\circ$ . Aflați lungimea celeilalte diagonale.
429. Laturile paralelogramului sunt egale cu 13 cm și 15 cm, iar una din diagonale este egală cu 14 cm. Aflați lungimea celeilalte diagonale.

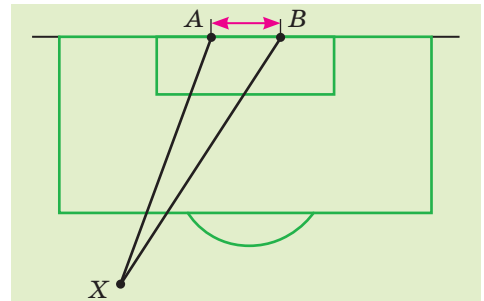


Fig.134

- 430. Diagonalele paralelogramului sunt egale cu 7 cm și 11 cm, iar perimetrul lui cu 26 cm. Aflați laturile paralelogramului.
- 431. Laturile paralelogramului sunt egale cu 6cm și 7 cm, iar diagonalele sunt proporționale cu numerele 11 și 7. Aflați lungimile diagonalelor.
- 432. Laturile triunghiului sunt egale cu 11cm, 12cm și 13cm. Aflați lungimea medianei, duse la cea mai mare latură.
- 433. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 6cm și 8 cm, iar mediana, dusă la a treia latură este, egală cu  $\sqrt{14}$  cm. Aflați a treia latură a triunghiului.

**B**

- 434. În  $\triangle ABC$   $AB = 6$  cm,  $AC = 14$  cm,  $\angle B = 120^\circ$ . Aflați  $BC$ .
- 435. Laturile  $AC$  și  $BC$  ale triunghiului  $ABC$  sunt corespunzător egale cu 9 cm și 21cm, iar unghiul  $\angle A = 60^\circ$ . Aflați  $AB$ .
- 436. Două laturi ale triunghiului sunt proporționale cu numerele 3 și 8 și formează unghi de  $60^\circ$ . Aflați perimetrul triunghiului, dacă a treia latură este egală cu 35 cm.
- 437. Suma a două laturi ale triunghiului este egală cu 32 cm, unghiul format de ele are  $120^\circ$ . Aflați aceste laturi, dacă a treia latură este egală cu 28 cm.
- 438. Lungimea acului minutar al ceasornicului este egală cu 6 cm, iar a celui orar — 5,2 cm. Ceasornicul arată amiaza (fig.135). Peste care cel mai mic număr de minute distanța dintre vârful acelor va fi egală cu 3,2 cm? Dar 11,2 cm?
- 439. În figura 135 este reprezentat un ceasornic care nu funcționează și indică amiaza. Lungimea acului minutar al acestui ceasornic este egală cu 20 cm, iar al celui orar – 17 cm. Un copil, jucându-se, rotește numai acul minutelor. Stabiliți corespondența dintre cantitatea de minute (1-4), indicată de minutar conform acestor condiții, și distanța dintre vârful acelor ceasornicului (A-E).

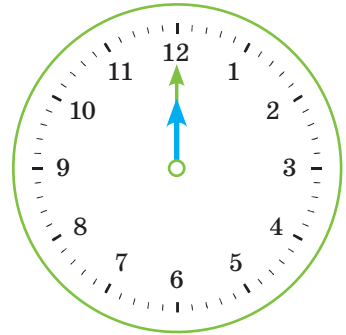


Fig.135

- |            |                   |
|------------|-------------------|
| 1 10 min.  | A $\approx$ 23 cm |
| 2 15 min.  | B $\approx$ 19 cm |
| 3 25 min.  | C $\approx$ 36 cm |
| 4 7,5 min. | D $\approx$ 26 cm |
|            | E $\approx$ 14 cm |

- 440. Unul din unghiurile triunghiului isoscel cu baza de  $2\sqrt{21}$  cm este egal cu  $120^\circ$ . Aflați medianele triunghiului.

441.  $BM$  — mediana triunghiului  $ABC$ . Aflați  $AB$ , dacă  $AC = 16$  cm,  $BC = 13$  cm  $\angle BMC = 120^\circ$ .
442. Mediana dusă la latura triunghiului de 32 cm, este egală cu 14 cm și face cu această latură unghiul de  $60^\circ$ . Aflați alte laturi ale triunghiului.
443. Într-un triunghi mediana și latura, la care ea este dusă, sunt corespunzător egale cu 10 cm și 30 cm. Aflați laturile triunghiului, dacă perimetrul lui este egal cu 64 cm.
444. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 6 cm și 10 cm, iar mediana, dusă la a treia latură, este egală cu  $\sqrt{19}$  cm. Aflați:  
a) a treia latură a triunghiului;  
b) cel mai mare unghi al triunghiului.
445. Laturile triunghiului sunt —  $a, b$  și  $c$ . Demonstrați că mediana, dusă la latura  $a$  este egală cu  $m = \frac{1}{2} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$ .
446. În paralelogramul  $ABCD$   $AD = 8$  cm,  $\angle A = 60^\circ$ , iar înălțimea  $BH = 2\sqrt{3}$ . Aflați diagonalele paralelogramului.
447. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 4 cm și 5 cm, iar sinusul unghiului format de ele este egal cu 0,6. Aflați a treia latură a triunghiului. Câte soluții are problema?
448. În trapezul  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ )  $AD = 11$  cm,  $BC = 3$  cm,  $AC = 6$  cm,  $BD = 10$  cm. Aflați:  
a) unghiul format de diagonalele trapezului;  
b) cosinusurile unghiurilor, pe care le formează diagonalele cu bazele trapezului.
449. **Problemă deschisă.** Ieșind din autobuz Cristina și Ionel se grăbeau spre casă. Fiecare din ei se mișca rectiliniu, însă sub un anumit unghi unul față de altul: Cristina cu viteza de 6 km/oră, iar Ionel cu viteza de 8 km/oră. Aflați distanța dintre casele lor, dacă ...
450. În paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $AB = 12$ ,  $BC = 18$ ,  $BB_1 = 6$ . Aflați cosinusul celui mai mare unghi al triunghiului  $A_1 B C_1$  (fig.136)
451. Demonstrați că într-un paralelogram unghiului mai mare  $i$  se opune diagonala mai mare. Oare este adevărată afirmația inversă?
452. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu  $a$  și  $b$ , iar unghiul format de ele este  $\alpha$ . Aflați lungimea bisectoarei, duse din vârful acestui unghi.
453.  $BL$  — bisectoarea triunghiului  $ABC$ . Aflați cosinusul  $\angle ABL$ , dacă  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $BL = l$ .

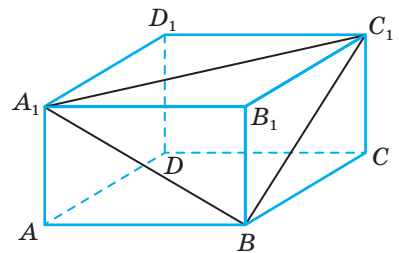


Fig.136

**ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ**

454. Aflați laturile și unghiurile necunoscute ale triunghiurilor, reprezentate în figura 137, folosind programa Excel și modelul adus în figura 138.

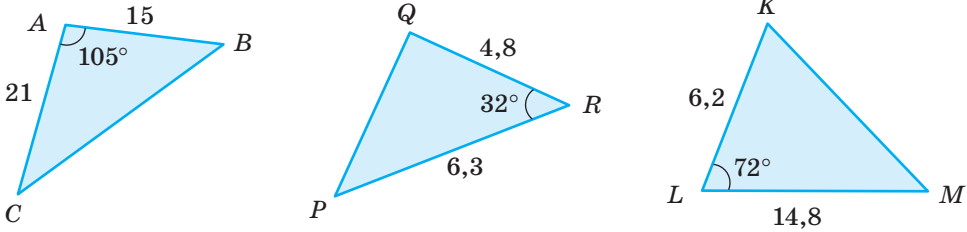


Fig.137

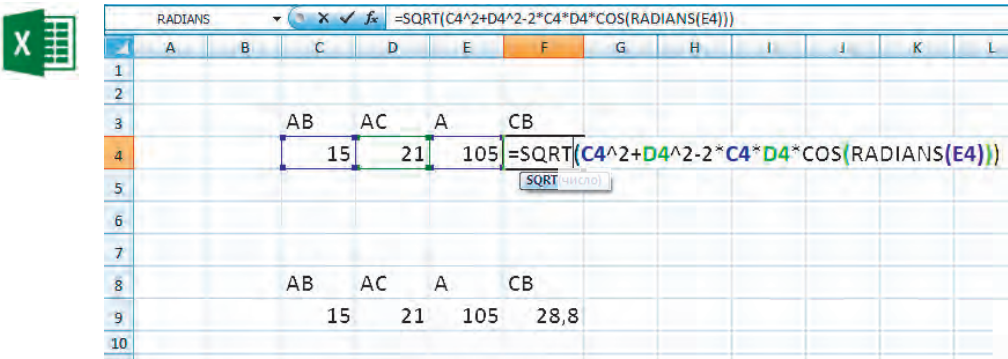


Fig.138

**PROBLEME PENTRU REPATRE**

455. Calculați:
- $2\sin 120^\circ + \cos 90^\circ \cdot \sin 135^\circ - \operatorname{tg} 60^\circ$ ;
  - $\cos 120^\circ - \operatorname{ctg} 60^\circ + \sin 90^\circ \cos 135^\circ$ .
456. Simplificați expresia:
- $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ ;
  - $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 1$ .
457. Se dau vectorii  $\vec{a}=(1; -3)$  și  $\vec{b}=(7; 2)$ . Aflați produsul scalar al vectorilor:
- $(\vec{a}+\vec{b})$  și  $(\vec{a}-\vec{b})$ ;
  - $(2\vec{a}-\vec{b})(\vec{b}+3\vec{a})$ .
458. Aflați aria triunghiului isoscel cu laturile și 25 cm, 25 cm și 14 cm.

# § 14

## Teorema sinusurilor

### TEOREMA 9

**Diametrul circumferinței circumscrise triunghiului este egal cu raportul laturii triunghiului către sinusul unghiului opus.**

#### DEMONSTRAȚIE.

1) Fie că se dă triunghiul ascuțitunghic  $ABC$ , în care este cunoscută latura  $BC = a$  și unghiul opus ei  $A$  (fig.139). Ducem diametrul  $BK$  al circumferinței circumscrise triunghiului și segmentul  $KC$ .

Unghiul  $BCK$  — drept, deoarece este înscris și se sprijină pe diametru; unghiurile  $K$  și  $A$  — egale, deoarece sunt înscrise și se sprijină pe unul și același arc  $BC$ . Triunghiul  $BCK$  este dreptunghic cu ipotenuza  $BK = 2R$ . De aceea  $BC : BK = \sin K$ , de unde  $BC = 2R \sin K = 2R \sin A$ , adică  $a = 2R \sin A$ .

2) Fie unghiul  $A$  obtuz (fig.140), atunci  $\angle K = 180^\circ - \angle A$ . Sinusurile a astfel de două unghiuri sunt egale:  $\sin(180^\circ - \angle A) = \sin A$ . De aceea și în acest caz  $BC = BK \sin K = BK \sin(180^\circ - \angle A) = BK \sin A$ ,  $a = 2R \sin A$ .

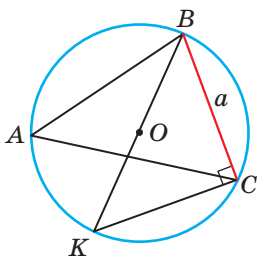


Fig.139

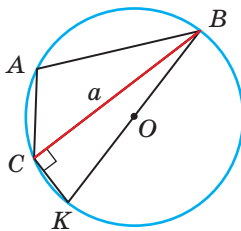


Fig.140

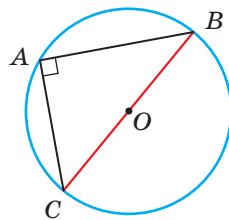


Fig.141

3) Dacă unghiul  $A$  este drept, atunci el se sprijină pe diametru (fig.141), adică  $a = 2R = 2R \sin A$ , fiindcă sinusul unghiului drept este egal cu 1.

Deci, totdeauna  $a = 2R \sin A$ , de unde  $2R = \frac{a}{\sin A}$ . Ceea ce trebuia de demonstrat  $\square$

**Atrageți atenția!** Folosind această teoremă se poate afla raza circumferinței circumscrise triunghiului arbitrar cu formula  $R = \frac{a}{2 \sin A}$ .

**TEOREMA 10**

(A sinusurilor). **Laturile triunghiului sunt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse.**

**DEMONSTRAȚIE.**

Din teorema anterioară reiese că

$$\frac{a}{\sin A} = 2R, \quad \frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Deci,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Iar aceasta înseamnă că laturile triunghiului  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sunt proporționale cu sinusurile unghiurilor opuse  $A$ ,  $B$ , și  $C$ .  $\square$

Teorema sinusurilor se folosește pentru a afla laturile necunoscute ale triunghiului dacă se știe o latură și două unghiuri, și de asemenea, pentru a afla unghiurile triunghiului, dacă se știe două laturi și unghiul care este opus uneia din ele.

**Exemplu.** Se știe latura triunghiului și două unghiuri:

$a = 27,3$  cm,  $\angle B = 43^\circ$ ,  $\angle C = 75^\circ$ . Aflați celelalte două laturi ale lui.

**Rezolvare.**  $\angle A = 180^\circ - 43^\circ - 75^\circ = 62^\circ$ .  $\frac{27,3}{\sin 62^\circ} = \frac{b}{\sin 43^\circ} = \frac{c}{\sin 75^\circ}$ , de unde

$$b = \frac{27,3 \cdot \sin 43^\circ}{\sin 62^\circ} \approx 21,1, \quad c = \frac{27,3 \cdot \sin 75^\circ}{\sin 62^\circ} \approx 29,9.$$

**PENTRU CEI CURIOSI**

Teorema sinusurilor poate fi demonstrată și altfel. De exemplu, de exprimat înălțimea  $CH$  a triunghiului  $ABC$  cu două procedee diferite (fig.142).

$CH = b \sin A$  și  $CH = a \sin B$ , de unde

$$b \sin A = a \sin B, \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{ ș.a. m.d.}$$

Acei care știu formula ariei triunghiului  $S = \frac{1}{2} ab \sin C$ , pot determina aria aceluiasi triunghi prin trei procedee diferite:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B,$$

i și fiecare parte a egalității de o împărțit la  $0,5abc$ . Încercați de sine stătător să terminați fiecare din aceste demonstrații.

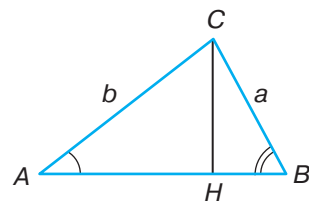


Fig.142

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Formulați teorema sinusurilor.
2. Care probleme se pot rezolva cu teorema sinusurilor?
3. Cu ce este egal raportul laturii triunghiului către sinusul unghiului opus?
4. Cu este egală raza circumferinței circumscrise triunghiului?
5. Cum de aflat latura triunghiului, știind raza circumferinței circumscrise și unghiul opus?

## EFFECTUĂM ÎMPREUNĂ

- 1 Aflați latura  $BC$  a triunghiului  $ABC$ , dacă  $AB = 12$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle C = \gamma$  (fig.143).
- Pe baza teoremei sinusurilor pentru triunghiul  $ABC$  avem:

$$\frac{AB}{\sin \gamma} = \frac{BC}{\sin \alpha}, \text{ de unde } BC = \frac{12 \sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

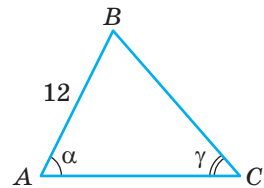


Fig.143

- 2 Aflați raza circumferinței circumscrise trapezului isoscel  $ABCD$ , a cărei înălțime  $BH$  este egală cu 24 cm și împarte baza mare în segmentele de 10 cm și 18 cm.
- Fie  $ABCD$  – trapezul isoscel, în care  $BH = 24$  cm,  $AH = 10$  cm și  $HD = 18$  cm (fig.144). Circumferința circumscrisă trapezului  $ABCD$  este circumscrisă și  $\triangle ABD$ . De aceea vom afla raza circumferinței, circumscrise triunghiului. Să ne folosim de formula:

$$R = \frac{BD}{2 \sin A}.$$

Pe baza teoremei lui Pitagora din  $\triangle ABH$ :

$$AB = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26 \text{ (cm)}.$$

$$\text{Deci, } \sin A = \frac{BH}{AB} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}.$$

Pe baza teoremei lui Pitagora din  $\triangle BHD$ :  $BD = \sqrt{24^2 + 18^2} = 30$  (cm).

$$\text{Atunci } R = \frac{BD}{2 \sin \alpha} = \frac{30 \cdot 13}{2 \cdot 12} = \frac{65}{4} = 16,25 \text{ (cm)}. \text{ Aici } \alpha = A.$$

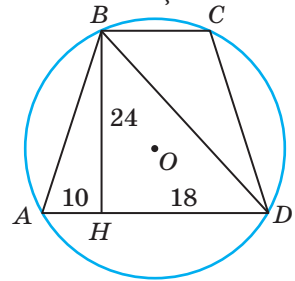


Fig.144



## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

### EFFECTUAȚI ORAL

459. Examinați fig. 145. Înlocuiți \* cu așa o expresie, ca să obținem o egalitate adevărată:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{m}{\sin \alpha} = \frac{n}{*}; & \text{c) } \frac{*}{\sin \gamma} = \frac{m}{\sin \alpha}; \\ \text{b) } \frac{k}{\sin \beta} = \frac{*}{\sin \alpha}; & \text{d) } \frac{m}{*} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}. \end{array}$$

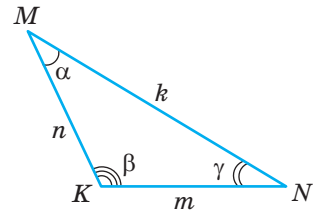


Fig.145

460. Folosind figura 145 indicați egalitatea neadevărată:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{n}{\sin \gamma} = \frac{m}{\sin \alpha}; & \text{c) } \frac{n}{\sin \gamma} = \frac{k}{\sin \alpha}; & \text{e) } \frac{\sin \gamma}{k} = \frac{\sin \beta}{n}; \\ \text{b) } \frac{k}{\sin \gamma} = \frac{m}{\sin \alpha}; & \text{d) } \frac{\sin \alpha}{m} = \frac{\sin \beta}{k}; & \text{f) } \frac{m}{n} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}. \end{array}$$

461. Oare există triunghi, în care:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \sin A = 0,4; \sin B = 0,8; \sin C = 0,3; \quad \text{b) } \sin A = \frac{1}{2}; \sin B = \frac{1}{3}; \sin C = \frac{1}{4}; \\ \text{c) } \sin A = 0,4; \sin B = 0,6; \sin C = 0,2? \end{array}$$

462. Cu ce este egală raza circumferinței, circumscrise triunghiului echilateral cu latura  $a$ ?

463. Cu ce este egală raza circumferinței circumscrise unui triunghi isoscel cu baza  $a$  și unghiul de la vârf  $120^\circ$ ?

464. Aflați raza circumferinței circumscrise unui trapez isoscel cu diagonala de 10 cm și unghiul ascuțit  $45^\circ$ .

### A

465. Pe baza teoremei sinusurilor exprimați fiecare latură a triunghiului  $EFK$  (fig.146).

466. Folosindu-vă de figura 146 și teorema sinusurilor exprimați sinușii unghiurilor  $E$ ,  $F$  și  $K$  ai triunghiului  $EFK$ .

467. Aflați latura  $AB$  a triunghiului  $ABC$ , dacă:

$$\begin{array}{l} \text{a) } BC = 8 \text{ cm}, \angle A = 30^\circ, \angle C = 45^\circ; \\ \text{b) } AC = 9 \text{ cm}, \angle B = 60^\circ, \angle C = 45^\circ; \\ \text{c) } BC = 16 \text{ cm}, \angle A = 45^\circ, \angle B = 105^\circ. \end{array}$$

468. Aflați latura  $AC$  a triunghiului  $ABC$ , dacă:

$$\begin{array}{l} \text{a) } AB = 20 \text{ cm}, \angle B = 30^\circ, \angle C = 45^\circ; \\ \text{b) } BC = 15 \text{ cm}, \angle A = 60^\circ, \angle B = 45^\circ; \\ \text{c) } AB = 18 \text{ cm}, \angle A = 105^\circ, \angle C = 30^\circ. \end{array}$$

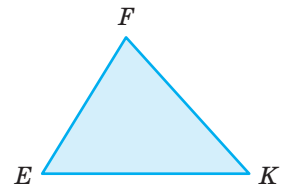


Fig.146

469. Aflați unghiul ascuțit  $C$  al triunghiului  $ABC$ , dacă:

- a)  $AB = 6\sqrt{2}$  cm,  $BC = 6$  cm,  $\angle A = 30^\circ$ ;  
 b)  $AC = 18$  cm,  $AB = 9\sqrt{6}$  cm,  $\angle B = 45^\circ$ ;  
 c)  $AC = 9$  cm,  $AB = 3\sqrt{6}$  cm,  $\angle B = 120^\circ$ .

470. Aflați unghiul ascuțit  $A$  al triunghiului  $ABC$ , dacă:

- a)  $AB = 6$  cm,  $BC = 3\sqrt{6}$  cm,  $\angle C = 45^\circ$ ;  
 b)  $AC = 12$  cm,  $BC = 4\sqrt{3}$  cm,  $\angle B = 60^\circ$ .

471. Pentru a determina distanța de la punctul  $A$  până la punctul inaccesibil  $B$  (fig.147) au măsurat distanța  $AC = 40$  m și unghiurile:  $\angle BAC = 57^\circ$ ,  $\angle ACB = 63^\circ$ . Aflați distanța  $AB$ .

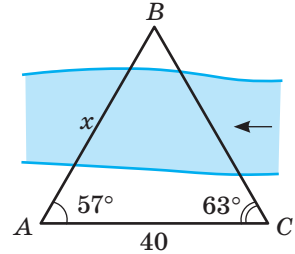


Fig.147

472. Diagonala paralelogramului este egală cu  $d$  și face cu laturile unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$ . Aflați laturile paralelogramului.

473. Pe baza datelor din figura 148 stabiliți corespondența dintre segmentele (1-4), reprezentate în această figură, și lungimile lor (A-E).

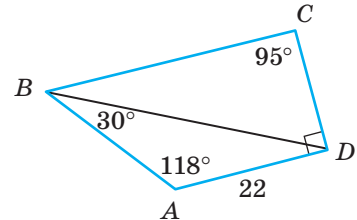


Fig.148

- |        |                |
|--------|----------------|
| 1 $AB$ | A $\approx 33$ |
| 2 $BD$ | B $\approx 18$ |
| 3 $CD$ | C $\approx 39$ |
| 4 $BC$ | D $\approx 23$ |
|        | E $\approx 41$ |

474. Baza unui triunghi isoscel este egală cu 6 cm, iar unghiul de la vârf este egal cu  $150^\circ$ . Aflați raza circumferinței circumscrise.

475. Baza unui triunghi isoscel este egală cu 12 cm, iar unghiul de la bază este egal cu  $30^\circ$ . Aflați raza circumferinței circumscrise.

476. Aflați raza circumferinței, circumscrise trapezului isoscel cu diagonala de 10 cm și unghiul ascuțit egal cu  $45^\circ$ .

## B

477. Aflați  $\angle A$  și  $\angle B$  ale triunghiului  $ABC$ , dacă  $AB = 12$  cm,  $BC = 6\sqrt{6}$  cm,  $\angle C = 45^\circ$ . Câte soluții are problema?

478. În triunghiul  $MNK$   $MN = 3$  cm,  $MK = \sqrt{3}$  cm,  $\angle N = 30^\circ$ . Aflați unghiurile necunoscute. Câte soluții are problema?

479. Oare există triunghiul  $ABC$ , în care  $AB = 15$  cm,  $BC = 8$  cm,  $\sin \angle A = 0,6$ ?

480. Pe baza figurii 149 calculați înălțimea jetului de apă a havuzului,  $CO$ , dacă  $AB = 0,5$  m,  $\angle A = 87^\circ$ ,  $\angle B = 84^\circ$ .



Fig.149

- 481.** Pe cateta  $BC$  a triunghiului  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) s-a luat punctul  $K$  astfel, că  $BK = a$ ,  $\angle KAB = \alpha$ ,  $\angle KCB = \beta$ . Aflați laturile triunghiului  $ABC$ .
- 482.** Pe prelungirea catetei  $AC$  după punctul  $A$  în triunghiul  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) este luat punctul  $M$  astfel, că  $AM = m$ ,  $\angle CAB = \alpha$ ,  $\angle CMB = \beta$ . Aflați laturile triunghiului  $ABC$ .
- 483.** Diagonala trapezului isoscel este egală cu  $d$  și formează cu baza mare unghiul  $\alpha$ , iar cu latura laterală — unghiul  $\beta$ . Aflați laturile trapezului.
- 484.** Unghiurile triunghiului sunt egale cu  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$ . Aflați laturile triunghiului, dacă perimetrul lui este egal cu  $P$ .
- 485.** În triunghiul isoscel  $ABC$  ( $AB = BC$ ) prin mijlocul înălțimii  $BH$  este dusă o dreaptă, care intersectează laturile  $AB$  și  $BC$  în punctele  $M$  și  $N$  corespunzător. Aflați  $BH$ , dacă  $MN = m$ ,  $\angle ABC = \alpha$ ,  $\angle BMN = \beta$ .
- 486.** Bazele trapezului sunt egale cu  $a$  și  $b$  ( $a > b$ ), iar unghiurile ascuțite de la bază —  $\alpha$  și  $\beta$ . Aflați laturile laterale ale trapezului.
- 487.** Latura laterală a triunghiului isoscel este egală cu  $b$ , iar unghiul de la vârf —  $\alpha$ . Aflați raza circumferinței circumscrise.
- 488.** Unghiurile unui triunghi sunt  $\alpha$  și  $\beta$ . Aflați înălțimea dusă din vârful unghiului al treilea, dacă raza circumferinței circumscrise este egală cu  $R$ .
- 489.** Aflați unghiurile triunghiului, două laturi ale căruia sunt egale cu  $6$  cm și  $2\sqrt{6}$  cm, dacă raza circumferinței circumscrise este egală cu  $2\sqrt{3}$ . Câte soluții are problema?
- 490.** Aflați raza circumferinței, circumscrise unui trapez cu bazele de  $5$  cm și  $13$  cm, iar înălțimea lui este egală cu  $12$  cm.
- 491.** Aflați raza circumferinței circumscrise unui trapez, latura laterală a căruia este egală cu  $15$  cm, iar raza circumferinței înscrise — cu  $6$  cm.
- 492.** Pentru a vedea vârful copacului, aflându-se la poalele unui bloc de apartamente trebuie de se uita în sus sub unghiul de  $22^\circ$ . Dar pentru a vedea vârful copacului de pe balconul care se află la distanța de  $50$  m de la suprafața pământului, trebuie de se uita în jos sub unghiul de  $50^\circ$  (fig.150). Aflați: a) înălțimea copacului, b) distanța de la copac până la clădire.
- 493.** Demonstrați teorema 9, folosind figura 151.

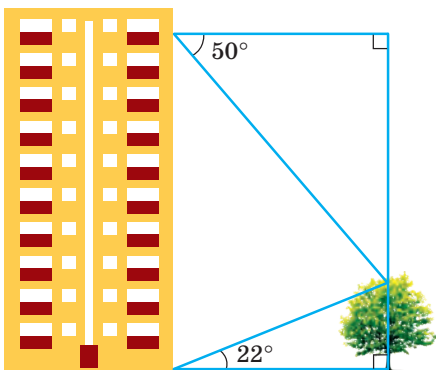


Fig.150

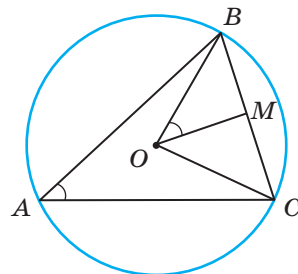


Fig.151

## ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

494. Un avion trebuie să zboare spre răsărit dintr-un oraș în altul cu viteza de 400 km/oră. Însă constant suflă vântul nord-estic cu viteza de 50 km/oră. În ce direcție trebuie să se miște avionul și cu ce viteză pentru a sosi la timp în punctul de destinație?
495. În figura 152 sunt reprezentate trei circumferințe și în fiecare din ele este înscris un triunghi. Măsurăți lungimile laturilor și măsurile unghiurilor ale fiecărui triunghi. Verificați justetea afirmației: raza circumferinței, circumscrise oricărui triunghi, se exprimă prin formula:

$$R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}.$$

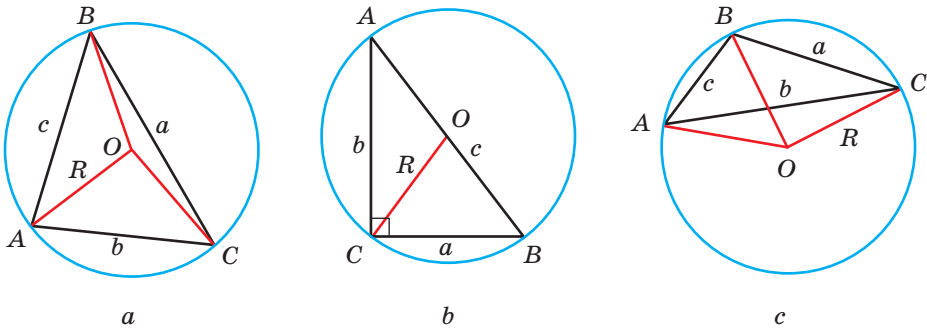


Fig.152

## PROBLEME PENTRU REPETARE

496. Aflați:
- cosinusul celui mai mare unghi al triunghiului cu laturile 3 cm, 5 cm și 6 cm. Indicați tipul acestui triunghi;
  - latura  $BC$  a triunghiului  $ABC$ , dacă  $AB = 10$  cm,  $AC = 14$  cm,  $\angle B = 60^\circ$ . Stabiliți tipul acestui triunghi.
497. **Problema lui Brahmaguptu.** Produsul lungimilor a două laturi ale triunghiului, împărțit la lungimea perpendiculei, coborâte pe a treia latură din vârful opus al triunghiului este egal cu lungimea diametrului circumferinței circumscrise. Demonstrați.
498. Aflați înălțimea paralelogramului, dacă laturile lui sunt egale cu 6 cm și 9 cm și fac unghiul  $30^\circ$ .

# § 15

## Rezolvarea triunghiurilor

A **rezolva triunghiul** – aceasta înseamnă a găsi laturile și unghiurile lui după câteva laturi și unghiuri cunoscute. Să ne amintim cum se rezolvă triunghiurile dreptunghice.

**Problemă.** Impotenuza triunghiului dreptunghic este egală cu 10, iar unul din unghiurile ascuțite este egal cu  $40^\circ$ . Aflați celelalte laturi și unghiuri ale triunghiului.

**Rezolvare.** Fie că în  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 40^\circ$ ,  $AB = 10$  (fig.153).

Atunci  $\angle B = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ ;  $BC = 10 \sin 40^\circ \approx 10 \cdot 0,643 \approx 6,43$ ;  $AC = 10 \cos 40^\circ \approx 10 \cdot 0,766 \approx 7,66$ .

**Răspuns:**  $\angle B = 50^\circ$ ,  $BC \approx 6,43$ ,  $AC \approx 7,66$ .

Teoremele ale sinusurilor și cosinusurilor permit rezolvarea oricărui triunghi (fig.154) după trei elemente date ale lui (afară de trei unghiuri). Există patru tipuri de probleme principale în rezolvarea triunghiurilor:

- 1) după două laturi și unghiul făcut de ele;
- 2) este dată o latură și două unghiuri alăturate ei;
- 3) sunt date trei laturi;
- 4) după două laturi și unghiul opus uneia din ele.

Să examinăm fiecare din aceste cazuri.

1. Dacă sunt date două laturi și unghiul format de ele, atunci în virtutea teoremei cosinusurilor se află a treia latură, iar cu ajutorul teoremei sinusurilor – unghiurile necunoscute.

Se dă:  $a, b, \gamma$ . Trebuie de aflat  $c, \alpha$  și  $\beta$  (fig.155).

**Rezolvare.** Latura  $c$  o aflăm pe baza teoremei cosinusurilor:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ .

Unul din unghiurile necunoscute (nu acel ce este opus laturii mai mari) este mai comod de-l determinat după teorema sinusurilor:

$$\sin \alpha = \frac{a \sin \gamma}{c}, \text{ atunci } \beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma).$$

Dacă însă trebuie mai întâi de determinat cel mai mare unghi al triunghiului, atunci e mai bine să ne folosim nu de teorema sinusurilor, ci de teorema cosinusurilor, fiindcă semnul cosinusului va indica imediat la aceea cum este unghiul ascuțit sau obtuz, pe când după valoarea lui sinus aceasta nu se poate face.

2. Dacă se dă latura și unghiurile alăturate ei, atunci la început se află al treilea unghi al triunghiului, apoi după teorema sinusurilor – laturile.

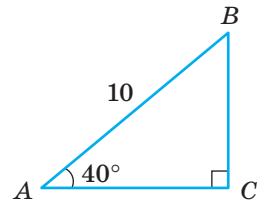


Fig.153

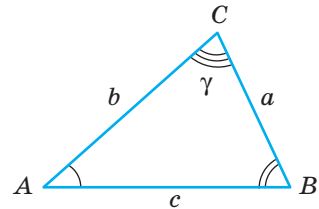


Fig.154

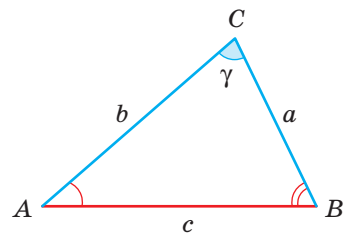


Fig.155

**Se dă:**  $c, \alpha$  și  $\beta$ . Trebuie de aflat  $\gamma, a, b$  (fig.156)

**Rezolvare:**  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ .

Laturile le aflăm pe baza teoremei sinusurilor:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}, \text{ de unde } a = \frac{c \sin \alpha}{\sin \gamma}.$$

$$\text{Analogic } b = \frac{c \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

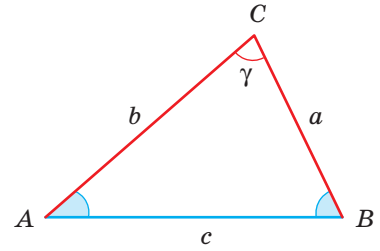


Fig.156

3. Dacă sunt date trei laturi, atunci unul din unghiuri (mai bine cel mai mare) se află după teorema cosinusurilor, al doilea – după teorema sinusurilor sau teorema cosinusurilor.

**Se dă:**  $a, b, c$  ( $a \leq b \leq c$ ). Trebuie de aflat  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  (fig.157).

**Rezolvare.** Unul din unghiuri îl determinăm pe baza teoremei cosinusurilor (e bine de-l determinat la început pe unghiul cel mai mare, ca să știm, este el obtuz sau ascuțit):

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Al doilea unghi îl determinăm după teorema sinusurilor sau a cosinusurilor:

$$\sin \alpha = \frac{a \sin \gamma}{c} \text{ sau } \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Atunci  $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$ .

4. Dacă sunt date două laturi și unghiul opus uneia din ele, atunci conform teoremei sinusurilor se află mai întâi unghiul opus celei de-a doua latură dată. Astfel de unghiuri pot fi două (dacă unul este  $\alpha$ , atunci al doilea e  $180^\circ - \alpha$ ).

**Se dă:**  $a, b, \alpha$ . Trebuie de aflat  $c, \beta$  și  $\gamma$  (fig. 158).

**Rezolvare.** Pe baza teoremei sinusurilor aflăm unghiul  $\beta$ :

$$\sin \beta = \frac{b \sin \alpha}{a}.$$

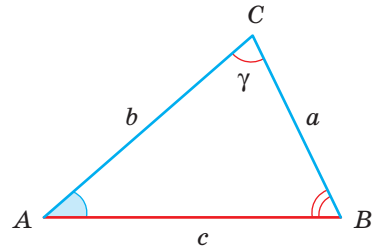


Fig.158

Trebuie de ținut minte că valorii date a lui  $\sin \beta$  au să-i corespundă două unghiuri:  $\beta$  și  $180^\circ - \beta$ . De aceea problema poate avea două soluții și trebuie de examinat două cazuri: când unghiul  $\beta$  — este ascuțit și când el este obtuz.

Apoi aflăm unghiul  $\gamma$ :  $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ .

Pe baza teoremei sinusurilor aflăm  $c$ :  $c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha}$ .

## PENTRU CEI CURIOSI

Uneori rezolvarea triunghiurilor este tălmăcită mai pe larg: printre date pot fi nu numai laturile și unghiurile triunghiului, dar și unele altele elemente ale lui – mediane, bisectoare, înălțimi ș.a.

**Problemă.** Două laturi și mediana triunghiului, care pornesc din același vârf sunt egale corespunzător cu 10,24 și 13. De aflat a treia latură și unghiurile triunghiului.

**Rezolvare.** Fie  $BM$  – mediana triunghiului  $ABC$  (fig. 159). Depunem pe dreapta  $BM$  segmentul  $MD$  astfel, ca  $MD = BM$ , și unim punctul  $D$  cu punctele  $C$  și  $A$ . Deoarece  $AM = MC$  (conform condiției) și  $BM = MD$  (conform construcției), reiese că  $ABCD$  este paralelogram. Atunci pe baza proprietății diagonalelor paralelogramului  $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$ . Putem afla  $AC$ .

$$AC^2 = 2(10^2 + 24^2) - 26^2 = 2 \cdot 676 - 676 = 676, \text{ de unde } AC = 26.$$

Pe baza teoremei cosinusurilor din triunghiului  $ABC$ :

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC \cdot AB \cos B, \text{ de unde}$$

$$\cos B = \frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2BC \cdot AB} = \frac{24^2 + 10^2 - 26^2}{2 \cdot 24 \cdot 10} = 0. \text{ Deci, } \angle B = 90^\circ.$$

$$\text{Atunci } \cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{10}{26} \approx 0,385. \angle A \approx 68^\circ. \angle C \approx 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ.$$

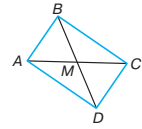


Fig.159

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Formulați teorema sinusurilor.
2. Formulați teorema cosinusurilor.
3. Cum se rezolvă triunghiurile când sunt date două laturi și unghiul format de ele?
4. Cum de rezolvat triunghiurile după o latură și două unghiuri?
5. Cum de rezolvat triunghiurile după trei laturi?
6. Cum se rezolvă triunghiurile după două laturi și unghiul opus uneia din ele? Câte soluții poate avea această problemă?

## EFACTUĂM ÎMPREUNĂ

- 1 Rezolvați triunghiul după două laturi  $a = 39,7$ ,  $b = 73,2$  și unghiul format de ele  $\gamma = 46,5^\circ$  (fig.160).

- Pe baza teoremei cosinusurilor

$$c = \sqrt{39,7^2 + 73,2^2 - 2 \cdot 39,7 \cdot 73,2 \cdot \cos 46,5^\circ} \approx 54,2.$$

$$\text{Conform teoremei sinusurilor } \frac{39,7}{\sin \alpha} = \frac{54,2}{\sin 46,5^\circ}, \text{ de unde}$$

$$\sin \alpha = \frac{39,7 \cdot \sin 46,5^\circ}{54,2} \approx 0,531.$$

$$\text{Atunci } \alpha \approx 32,1^\circ, \beta = 180^\circ - 46,5^\circ - 32,1^\circ \approx 101,4^\circ.$$

$$\text{Deci, } c \approx 54,2, \alpha \approx 32,1^\circ, \beta \approx 101,4^\circ.$$

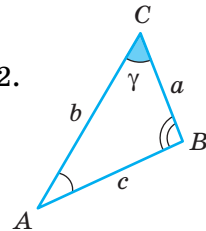


Fig.160

2 Diagonala paralelogramului este egală cu 10 și formează cu laturile unghiurile de  $26^\circ$  și  $34^\circ$ . Aflați laturile paralelogramului.

- Fie  $ABCD$  — paralelogram (fig. 161), în care  $AC = 10$ ,  $\angle BAC = 26^\circ$ ,  $\angle BCA = 34^\circ$ .

Atunci  $\angle B = 180^\circ - (26^\circ + 34^\circ) = 120^\circ$ . Conform teoremei sinusurilor din  $\triangle ABC$  aflăm laturile  $AB$  și  $BC$ .

$$\frac{AB}{\sin 34^\circ} = \frac{AC}{\sin 120^\circ}.$$

$$\text{De unde } AB = \frac{AC \cdot \sin 34^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{10 \cdot 0,559}{0,866} \approx 6,5.$$

$$\frac{BC}{\sin 26^\circ} = \frac{AC}{\sin 120^\circ}. \text{ De unde}$$

$$BC = \frac{AC \cdot \sin 26^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{10 \cdot 0,438}{0,866} \approx 5,1. \text{ Așadar, } AB = 6,5, BC = 5,1.$$

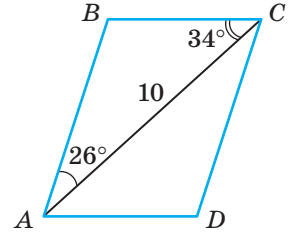


Fig.161

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

499. Folosindu-se de figura 162, povestiți cum de aflat elementele necunoscute ale triunghiului pentru fiecare caz: a), b) și c).

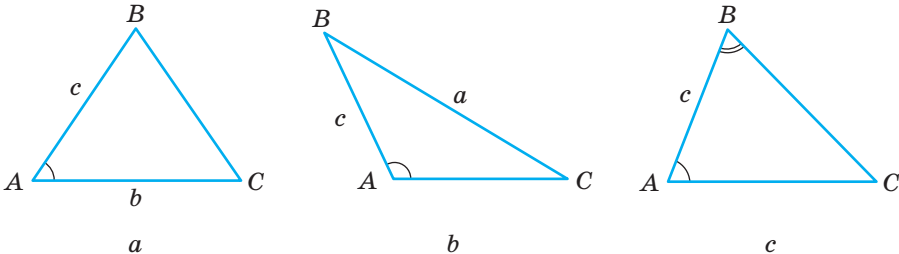


Fig.162

500. Cum de aflat unghiurile rombului, a cărui latură este egală cu  $a$ , iar diagonala mai mică  $d$ ?

### A

501. Rezolvați triunghiul după două laturi date și unghiul făcut de ele:  
 a)  $b = 22$ ,  $c = 26$ ,  $\alpha = 78^\circ$ ; c)  $a = 0,8$ ,  $c = 0,6$ ,  $\beta = 50^\circ$ ;  
 b)  $a = 10$ ,  $b = 5$ ,  $\gamma = 102^\circ$ ; d)  $a = 49,3$ ,  $b = 26,4$ ,  $\gamma = 47,3^\circ$ .
502. Rezolvați triunghiul după latura dată și unghiurile alăturate ei:  
 a)  $a = 32$ ,  $\beta = 36^\circ$ ,  $\gamma = 42^\circ$ ; c)  $c = 17,4$ ,  $\alpha = 64^\circ$ ,  $\beta = 44^\circ$ ;  
 b)  $b = 20$ ,  $\alpha = 31^\circ$ ,  $\gamma = 124^\circ$ ; d)  $a = 7,3$ ,  $\beta = 28^\circ$ ,  $\gamma = 109^\circ$ .



503. Rezolvați triunghiul după trei laturi:

a)  $a = 15$ ,  $b = 18$ ,  $c = 25$ ;      c)  $a = 3$ ,  $b = 6$ ,  $c = 3\sqrt{3}$ ;

b)  $a = 41$ ,  $b = 19$ ,  $c = 40$ ;      d)  $a = 91,2$ ,  $b = 125,3$ ,  $c = 176,2$ .

504. În paralelogramul  $ABCD$   $AB = 4$  cm,  $AD = 5$  cm,  $\angle A = 45^\circ$ .

Aflați lungimea diagonalei  $BD$ .

505. Latura rombului este egală cu 38 cm, iar unghiul lui are  $58^\circ$ . Aflați diagonalele.

506. În spațiu pe semidreptele  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ , fiecare din ele este perpendiculară pe celelalte două, la distanțele de 12, 13 și 15 unități de lungime de la punctul  $O$  sunt luate punctele  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (fig.163). Aflați cosinusul celui mai mare unghi al triunghiului  $ABC$ .

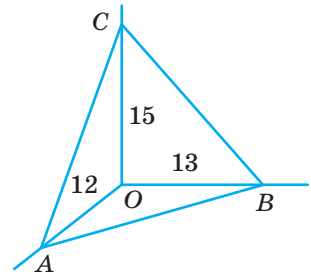


Fig.163

507. La ce înălțime s-a ridicat fundul nacelei a balonului, dacă într-un oarecare moment s-a reușit de fixat poziția lui față de punctele  $A$  și  $B$ , așa cum se reprezintă în figura 164?

Aflați distanța care era în acel moment dintre balon și fiecare din punctele  $A$  și  $B$ .

508. Rezolvați triunghiul după două laturi date și unghiul opus uneia din ele:

a)  $a = 4,2$ ,  $b = 3,5$ ,  $\alpha = 70^\circ$ ;

b)  $c = 1,5$ ,  $b = 2,4$ ,  $\gamma = 28,5^\circ$ ;

c)  $a = 4,5$ ,  $c = 3,2$ ,  $\gamma = 85^\circ$ .

509. Laturile paralelogramului sunt egale cu 12 cm și 8 cm, iar unghiul ascuțit —  $48^\circ$ . Aflați diagonala mai mare a paralelogramului și unghiurile ce le face ea cu laturile.

510. Diagonalele paralelogramului sunt egale cu 12 cm și 20 cm, iar unghiul făcut de ele este de  $37^\circ$ . Aflați laturile paralelogramului.

511. Aflați laturile paralelogramului, diagonala căruia este egală cu 9 cm și face cu laturile lui unghiurile de  $24^\circ$  și  $57^\circ$ .

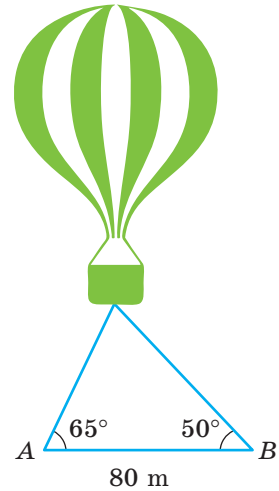


Fig.164

## B

512. Aflați laturile trapezului isoscel, dacă diagonala lui este egală cu 16 cm și formează cu latura laterală și baza corespunzător unghiurile  $53^\circ$  și  $48^\circ$ .

513. Bazele unui trapez sunt egale cu 14 m și 18 m, iar laturile — 7 m și 10 m. Aflați unghiurile trapezului.

514. În triunghiul  $ABC$  latura  $AC = 16$  m,  $\angle CAB = 122^\circ$ .  $AL = 10$  m — bisectoarea triunghiului dat. Aflați lungimile laturilor  $AB$  și  $BC$ .

515. Aplicând teorema sinusurilor, demonstrați că bisectoarea unghiului triunghiului împarte latura lui în segmente, proporționale laturilor alăturate.

516.  $BM$  — mediana triunghiului  $ABC$ . Aflați  $AB$  și  $BC$ , dacă  $BM = 5$  cm,  $AC = 12$  cm,  $\angle ABM = 56^\circ$ .
517. Medianele  $AM$  și  $CN$  ale triunghiului  $ABC$  se intersectează în punctul  $O$ . Aflați laturile triunghiului, dacă  $AM = 9$  cm,  $CN = 12$  cm,  $\angle AON = 35^\circ$ .
518. În triunghiul  $ABC$   $AB = 8$  cm,  $AC = 20$  cm,  $\angle A = 68^\circ$ . Aflați medianele triunghiului.
519. Baza triunghiului isoscel este egală cu 18 cm, iar unul din unghiuri — cu  $100^\circ$ . Aflați bisectoarele triunghiului.
520. Pentru a determina înălțimea turnului de televiziune (fig. 165), au măsurat distanța  $AB = 12$  m și unghiurile  $\alpha = 35^\circ$ ,  $\beta = 49^\circ$ . Aflați înălțimea turnului.
521. Pentru a afla distanța dintre punctele  $A$  și  $B$  (fig. 166) au măsurat distanța  $CD$  și unghiurile  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  (delta). Cum de găsit  $AB$ ?

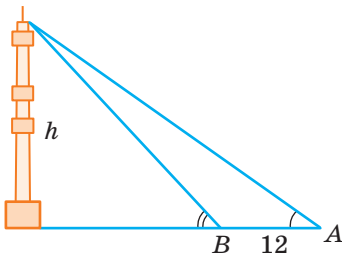


Fig.165

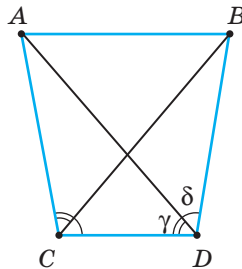


Fig.166

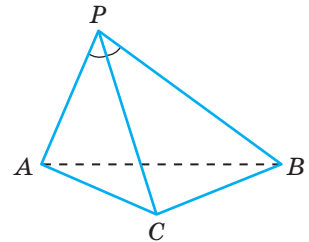


Fig.167

522. În ce mod, știind distanța  $AB = l$  și unghiurile  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , arătate în figura 166, de determinat distanța  $CD$ ?
523. Din două puncte  $A$  și  $B$  de pe malul mării este supravegheată o șalupe care se mișcă uniform și rectiliniu. La ora 10.00 șalupea era văzută din punctul  $A$  sub unghiul de  $100^\circ$  față de direcția  $AB$ , iar din punctul  $B$  — sub unghiul de  $51^\circ$  față de direcția  $BA$ . La ora 10.10 unghiurile s-au schimbat și deja erau egale corespunzător cu  $84^\circ$  și  $74^\circ$ . Aflați viteza șalupei, dacă  $AB = 2,5$  km.
524. În piramida triunghiulară  $PABC$  muchiile laterale sunt egale respectiv cu 3 dm, 4 dm și 5 dm, iar unghiul făcut de fiecare două din ele —  $60^\circ$ . Aflați perimetrul triunghiului  $ABC$  (fig. 167).

### ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

525. Pe baza figurii 168 confecționați eclimetrul (cel mai simplu dispozitiv pentru măsurarea unghiurilor în planul vertical). Argumentați principiul folosirii lui. Cu ajutorul lui încercați să măsurați unghiurile, sub care se vede clădirea înaltă (biserica, turnul de televiziune ș.a.) de la diferite distanțe.

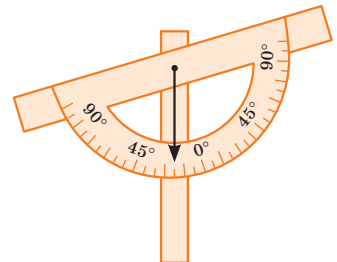
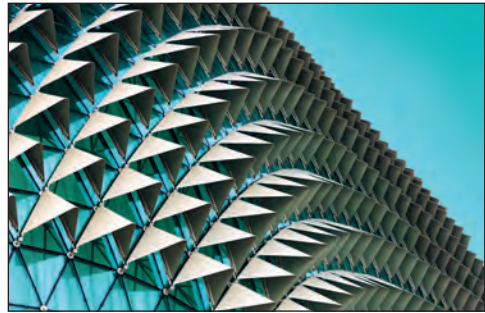


Fig.168

### PROBLEME PENTRU REPETARE

526. Aflați unghiul făcut de diagonalele paralelogramului  $ABCD$ , dacă  $AB = 7$  cm,  $AC = 16$  cm și  $BD = 6$  cm.
527. Unghiul de la baza triunghiului isoscel este egal cu  $30^\circ$ . Aflați raportul laturilor triunghiului.
528. Perimetrul rombului este egal cu 40 cm, iar una din diagonale — 10 cm. Aflați unghiurile rombului și a doua diagonală.
529. Diagonala dreptunghiului este egală cu  $d$  și formează cu latura mai mică unghiul  $\alpha$ . Aflați aria dreptunghiului.

### GEOMETRIA DIN JURUL NOSTRU



Triunghiurile și patrulaterele în arhitectură

# § 16

## Formule pentru aflarea ariei triunghiului

După cum știți aria  $S$  a triunghiului cu baza  $a$  și înălțimea  $h$  se află cu formula:

$$S = \frac{1}{2} ah.$$

Folosind funcțiile trigonometrice se pot deduce câteva alte formule pentru calcularea ariei triunghiului. Fie în triunghiul  $ABC$  baza  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $\angle C = \gamma$ ,  $AH = h$  — înălțimea (fig.169). Din triunghiul dreptunghic  $ACH$  avem:  $h = b \sin \gamma$ . Deci,

$$S = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

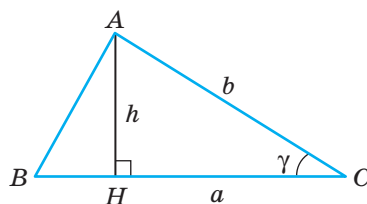


Fig.169

Formula ariei triunghiului  $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$  este adevărată și atunci, când unghiul  $\gamma$  este drept sau obtuz (demonstrăți aceasta de sine stătător). Deci, **aria triunghiului este egală cu semiproductul a oricăror două laturi ale lui cu sinusul unghiului format de ele.**

Pe baza teoremei sinusurilor  $2R = \frac{c}{\sin \gamma}$ , unde  $R$  — raza circumferinței circumscrise. De aceea  $\sin \gamma = \frac{c}{2R}$ . Așadar,  $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ab \cdot \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$ .

**Aria triunghiului este egală cu produsul a trei laturi ale lui, împărțit la împătrita rază a circumferinței circumscrise.**

Există încă o formulă pe care des o folosesc la determinarea ariei triunghiului. Dacă  $p$  — semiperimetrul triunghiului cu laturile  $a, b, c$ , atunci:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

**Aceasta-i formula lui Heron.** Să o demonstrăm:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ , de unde  $\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ . De aceea  $\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma = 1 - \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2 = \frac{(2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}{(2ab)^2} = \frac{1}{(2ab)^2} (c^2 - (a-b)^2)((a+b)^2 - c^2)$ .

De aceea  $\sin \gamma = \frac{1}{2ab} = \sqrt{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}$ .

Înlocuind această valoare a lui  $\sin \gamma$  în formula  $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$  și notând semiperimetrul triunghiului cu litera  $p$ , obținem:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Folosind figura 170, demonstrați de sine stătător următoarea afirmație.

**Aria triunghiului este egală cu produsul razei circumferinței, înscrise în triunghi, la semiperimetrul acestui triunghi, adică  $S = pr$ .**

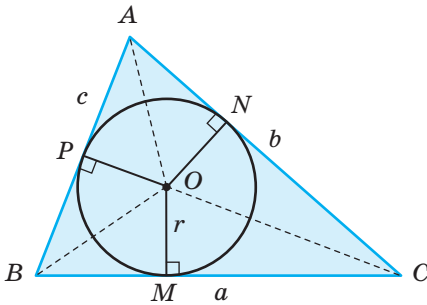


Fig.170

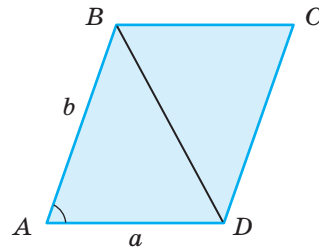


Fig.171

Așadar, aria triunghiului poate fi aflată, utilizând oricare din formulele:

$$S = \frac{1}{2} ah, \quad S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma, \quad S = pr, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Dacă sunt cunoscute laturile  $a$ ,  $b$  și  $c$  ale triunghiului  $ABC$ , atunci din formulele  $S = pr$  și  $S = \frac{abc}{4R}$  se pot găsi razele circumferințelor înscrise ( $r$ ) și circumscrise ( $R$ ):

$$r = \frac{S}{p}, \quad R = \frac{abc}{4S}.$$

Aplicând formula  $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$ , se poate demonstra că **formula ariei paralelogramului cu laturile  $a$  și  $b$  și unghiul  $\gamma$  făcut de ele are forma:**

$$S = ab \sin \gamma.$$

Doar dacă  $ABCD$  — paralelogram, atunci aria lui este de două ori mai mare decât aria triunghiului  $ABD$  (fig. 171). De aceea

$$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} ab \sin \gamma = ab \sin \gamma.$$

## PENTRU CEI CURIOSI

Să mai deducem formula ariei patrulaterului convex cu diagonalele  $d_1$  și  $d_2$  și unghiul  $\alpha$  format de ele.

Fie că diagonalele  $AC$  și  $BD$  ale patrulaterului conext se intersectează în punctul  $O$  (fig. 172). Dacă unul din patru unghiuri cu vârful  $O$  este egal cu  $\alpha$ , atunci și unghiul vertical, corespunzător lui tot va fi egal cu  $\alpha$ , iar altele două – câte  $(180^\circ - \alpha)$ . Deoarece  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ , reiese că sinusurile fiecăruia din unghiurile  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $AOD$  este egal cu  $\sin \alpha$ .

Notăm părțile diagonalelor patrulaterului cu literele  $x, y, z, t$  ca pe figura 172. Aria întregului patrulater este egală cu suma ariilor ale acelor patru triunghiuri obținute.

De aceea:

$$S_{ABCD} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCD} + S_{ODA} = \frac{1}{2}(xy \sin \alpha + yz \sin \alpha + zt \sin \alpha + xt \sin \alpha) = \\ = \frac{1}{2}(xy + yz + zt + xt) \sin \alpha = \frac{1}{2}(y(x+z) + t(z+x)) \sin \alpha = \frac{1}{2}(x+z) \cdot (y+t) \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha.$$

Așadar, **dacă diagonalele patrulaterului de lungimile  $d_1$  și  $d_2$  se intersectează, formând unghiul  $\alpha$ , atunci aria patrulaterului se calculează cu formula:**

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha.$$

Încercați să deduceți această formulă, circumscrind acestui patrulater un paralelogram, ale cărui laturi sunt paralele cu diagonalele patrulaterului (fig.173) Oare este adevărată această formulă pentru patrulaterul neconvex? Încercați să o demonstrați.

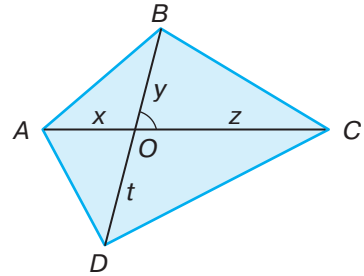


Fig.172

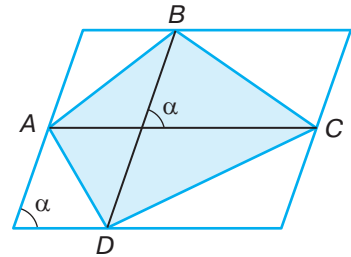


Fig.173

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Cum de aflat aria triunghiului, știind o latură și înălțimea coborâtă pe ea?
2. Cum de aflat aria triunghiului după două laturi și unghiul format de ele?
3. Cum de aflat aria triunghiului după laturi și raza circumferinței circumscrise?
4. Cum de aflat aria triunghiului știind perimetrul lui și raza circumferinței înscrise?
5. Formulați formula lui Heron.
6. Cum de aflat raza circumferinței circumscrise triunghiului?
7. Cum de aflat raza circumferinței, înscrise în triunghi?
8. Cum de aflat aria paralelogramului?



## EFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Demonstrați că înălțimile triunghiului sunt invers proporționale cu laturile corespunzătoare.

- Fie  $a$  și  $b$  — două laturi ale triunghiului  $ABC$ , iar înălțimile, coborâte pe ele —  $h_a$ ,  $h_b$  (fig.174).Exprimăm aria triunghiului prin

$$\text{două procedee: } S = \frac{1}{2} ah_a, S = \frac{1}{2} bh_b.$$

Deci,  $ah_a = bh_b$ , de unde  $h_a : h_b = b : a$ .

Iar aceasta și trebuia de demonstrat.

Așa un procedeu de rezolvare a problemelor, când se egalează ariile figurilor egale, pe scurt este numită **metoda ariilor**.

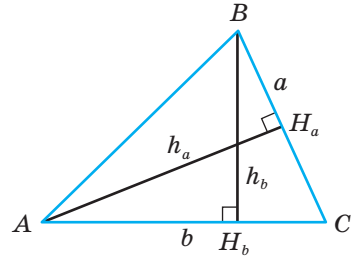


Fig.174

2 Demonstrați că mediana triunghiului îl împarte în două triunghiuri echivalente.

- Fie  $BM = m$ ,  $AM = MC = n$  (fig.175).

$$\text{Atunci } S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} m \cdot n \cdot \sin \alpha.$$

$$S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} m \cdot n \cdot \sin (180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} m \cdot n \cdot \sin \alpha.$$

$$\text{Deci, } S_{\triangle ABM} = S_{\triangle BMC}.$$

Rezolvați problema cu alt procedeu.

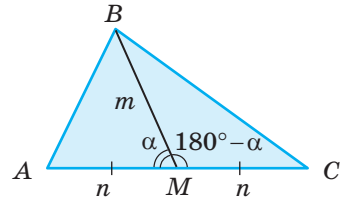


Fig.175

3 Deduceți formula ariei triunghiului după o latură și unghiurile alăturate ei.

- Fie că se da triunghiul  $ABC$ , în care  $CB = a$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $\angle C = \gamma$  (fig.176)  $\angle A = 180^\circ - (\beta + \gamma)$ , de aceea  $\sin \angle A = \sin (\beta + \gamma)$ . Pe baza teoremei sinusurilor  $\frac{a}{\sin (\beta + \gamma)} = \frac{b}{\sin \beta}$ , de unde  $b = \frac{a \sin \beta}{\sin (\beta + \gamma)}$ .

Aria triunghiului:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} a \frac{a \sin \beta}{\sin (\beta + \gamma)} \sin \gamma = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{\sin (\beta + \gamma)}.$$

$$\text{Așadar, aria căutată a triunghiului } S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin (\beta + \gamma)}.$$

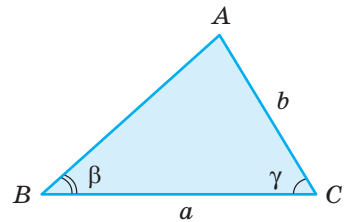


Fig.176

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

530. Aflați aria triunghiului, ale cărui două laturi sunt egale cu 2 și 3, iar unghiul format de ele este de  $30^\circ$ .
531. Aflați aria triunghiului isoscel, a cărui latură laterală  $b = 6$  cm, iar unghiul de la vârf: a)  $45^\circ$ ; b)  $60^\circ$ ; B)  $120^\circ$ .
532. Aflați aria triunghiului echilateral, a cărui latură este egală cu: a) 8 cm; b) 1 dm; c)  $\sqrt{3}$  m.
533. Cum se va schimba aria triunghiului, dacă lungimile a două laturi ale lui  $a$  și  $b$  vor rămâne neschimbate, iar unghiul  $\gamma$  format de ele îl vom mări de la  $0^\circ$  până la  $180^\circ$ ?
534. Care cea mai mare arie o poate avea triunghiul, două laturi ale căruia sunt egale cu 2 cm și 3 cm?
535. Aria triunghiului este de  $15 \text{ cm}^2$ , iar laturile lui au 10 cm și 6 cm. Aflați unghiul format de ele.
536. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 3 cm și 10 cm. Oare poate aria lui să fie egală cu  $12 \text{ cm}^2$ ,  $15 \text{ cm}^2$ ,  $18 \text{ cm}^2$ ?

### A

537. Folosind figura 177 aflați aria triunghiului  $ABC$ .

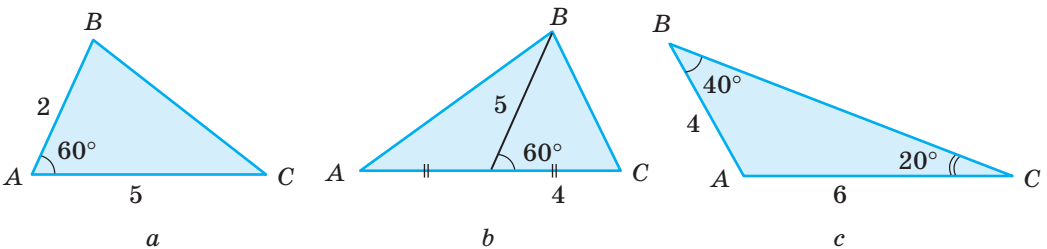


Fig.177

538. Aflați aria triunghiului  $ABC$ , dacă:  
 a)  $BC = 4$  cm,  $AC = 8$  cm,  $\angle C = 45^\circ$ ; b)  $AB = 12$  cm,  $BC = 7$  cm,  $\angle B = 150^\circ$ .
539. Demonstrați că aria triunghiului echilateral cu latura  $a$  se determină cu formula  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ .
540. Aflați aria, razele circumferințelor înscrisă și circumscrisă pentru triunghiul echilateral cu latura de 6 cm.
541. Aria triunghiului echilateral este egal cu  $16\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . Aflați perimetrul triunghiului.



542. Latura laterală a triunghiului isoscel este egală cu 8 cm, iar unghiul de la bază —  $15^\circ$ . Aflați aria triunghiului.
543. Aflați laturile triunghiului isoscel, a cărui arie este egală cu  $25\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>, iar unghiul de la vârf este de  $120^\circ$ .
544. Una din laturile triunghiului este cu 3 cm mai mare decât alta. Aflați aceste laturi, dacă unghiul făcut de ele este de  $30^\circ$ , iar aria triunghiului este egală cu 22 cm<sup>2</sup>.
545. Două laturi ale triunghiului sunt proporționale numerelor 7 și 8, iar unghiul format de ele este de  $120^\circ$ . Aflați perimetrul triunghiului, dacă aria lui este  $56\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.
546. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 16 cm și 18 cm, iar unghiul format de ele este de  $60^\circ$ . Aflați înălțimile, coborâte pe aceste laturi.
547. Mediana triunghiului și latura, la care ea este dusă, sunt egale respectiv cu 10 cm și 26 cm și fac unghi de  $60^\circ$ . Aflați aria triunghiului.
548. Mediana triunghiului și latura, la care ea este dusă, sunt corespunzător egale cu 6 cm și 16 cm. Aflați unghiul, făcut de ele, dacă aria triunghiului este de 24 cm<sup>2</sup>.
549. Laturile triunghiului sunt 10 cm, 10 cm și 12 cm. Aflați razele circumferințelor înscrisă și circumscrișă.
550. Laturile triunghiului sunt egale cu 6 cm, 25 cm și 29 cm. Aflați aria lui și razele circumferințelor înscrisă și circumscrișă lui.
551. Aflați cea mai mare înălțime a triunghiului cu laturile 6 cm, 10 cm și 14 cm.
552. Trei circumferințe de razele 8 cm, 9 cm și 17 cm sunt tangente exterior, două câte două (fig.178). Aflați aria triunghiului cu vârfurile în centrele acestor circumferințe.
553. Bisectoarea  $AM$  a paralelogramului  $ABCD$  împarte latura  $BC$  în segmentele  $BM = 10$  cm,  $MC = 8$  cm. Aflați aria paralelogramului dacă  $\angle A = 30^\circ$ .
554. Aflați aria romblui a cărui latură este de 8 cm, iar unghiurile sunt proporționale cu numerele 1 și 3.
555. Aflați unghiurile rombului, a cărui arie este de 8 cm<sup>2</sup>, iar perimetrul — 16 cm.
556. Aflați aria paralelogramului  $ABCD$ , dacă  $AB = a$ ,  $AC = d$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .

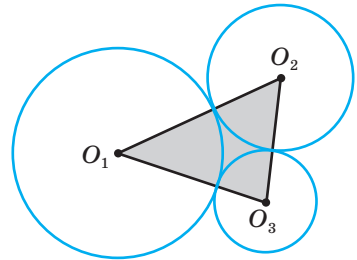


Fig.178

## B

557. Medianele  $AM$  și  $CN$  ale triunghiului  $ABC$  sunt egale cu 9 cm și 12 cm și se intersectează în punctul  $O$ . Aflați aria triunghiului  $AOC$  și a patrulaterului  $BMON$ , dacă  $\angle AOC = 120^\circ$ .
558.  $BL$  — bisectoarea triunghiului  $ABC$ . Aflați aria lui, dacă  $AL = 15$  cm,  $LC = 24$  cm,  $BC = 40$  cm.
559. Segmentele  $AB$  și  $CD$  se intersectează în punctul  $O$  astfel, că  $AO = 4$  cm,  $BO = 6$  cm,  $CO = 10$  cm,  $DO = 8$  cm. Aflați ariile  $\triangle AOC$  și  $\triangle BOD$ , dacă suma ariilor lor este egală cu 22 cm<sup>2</sup>.

560. Bazele trapezului  $ABCD$  sunt egale cu 7 cm și 14 cm, iar diagonalele cu 9 cm și 15 cm. Aflați ariile triunghiurilor  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $AOD$ , unde  $O$  — punctul de intersecție al diagonalelor.
561. Pe laturile  $AB$  și  $BC$  ale triunghiului  $ABC$  sunt luate punctele  $M$  și  $N$  astfel, că  $AM = 7$  cm,  $BM = 8$  cm,  $BN = 3$  cm,  $NC = 11$  cm. Aflați aria patrulaterului  $AMNC$ , dară aria triunghiului  $MBN$  este egală cu  $4$  cm<sup>2</sup>.
562. Demonstrați că **trei mediane ale triunghiului îl împart în 6 triunghiuri echivalente** (fig.179).
563. Centrul circumferinței, înscrise în triunghiul cu laturile 6 cm, 25 cm și 29 cm, este unit cu vârfurile triunghiului. Aflați ariile triunghiurilor create.
564. Înălțimea dusă la baza triunghiului isoscel este egală cu 16 cm, iar latura laterală cu — 20 cm. Aflați distanța dintre centrele circumferințelor înscrisă și circumscrisă.
565. Laturile triunghiului sunt egale cu 40 cm, 40 cm și 48 cm. Aflați distanțele de la centrul circumferinței circumscrise până la laturile triunghiului.
566. Laturile triunghiului sunt egale cu 15 cm, 15 cm și 24 cm. Aflați distanțele de la centrul circumferinței înscrise până la vârfurile triunghiului.
567. Aflați aria  $\triangle ABC$ , dacă  $AC = a$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ .
568. Trei circumferințe cu razele de 6 cm, 7 cm și 14 cm sunt tangente exterior două câte două. Aflați raza circumferinței pe care sunt situate centrele circumferințelor date.
569. În triunghiul cu laturile 13 cm, 14 cm și 15 cm este înscrisă o circumferință, la care este dusă tangenta, paralelă cu latura mijlocie. Aflați aria părților în care această tangentă împarte triunghiul.
570. Folosind figura 180 demonstrați că aria fiecărui triunghi poate fi calculată cu

$$\text{formula } S = r \left( a + r \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \right), \text{ unde } a = BC,$$

$r$  — raza circumferinței, înscrise în  $\triangle ABC$ .

571. Aflați aria paralelogramului, ale cărui diagonale sunt egale cu 8 cm și 11 cm, iar unghiul făcut de ele — cu  $30^\circ$ .
572. Aflați diagonalele paralelogramului de aria  $96\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup>, dacă una din ele este cu 8 cm mai lungă decât cealaltă, iar unghiul format de ele este egal cu  $45^\circ$ .
573. Diagonalele paralelogramului sunt egale cu 30 cm și 74 cm, iar una din latura cu — 26 cm. Aflați aria paralelogramului.
574. Aflați aria paralelogramului  $ABCD$ , dacă  $BD = d$ ,  $\angle ABD = \alpha$ ,  $\angle ADB = \beta$ .

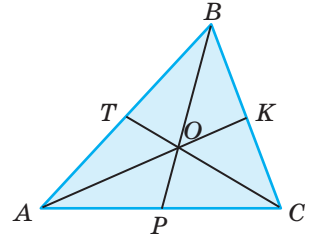


Fig.179

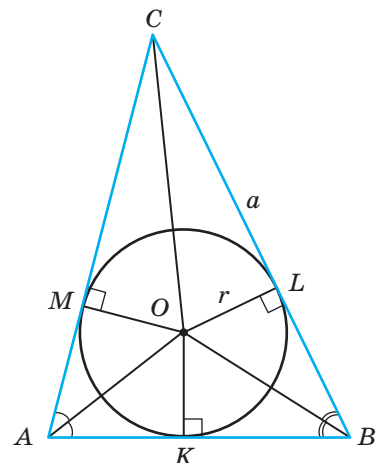


Fig.180

## ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

575. Folosind o foaie de hârtie în pătrățele (fig.181) desenați triunghiul cu baza  $AB$  și cu aria de două ori mai mare decât aria triunghiului  $ABC$ . Câte astfel de triunghiuri există? Care poate fi cel mai mare cosinus al unghiului, opus laturii  $AB$ ?

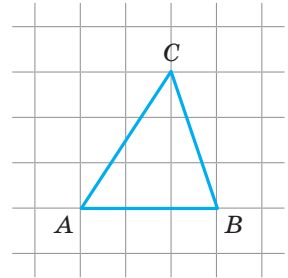


Fig.181

## PROBLEME PENTRU REPETARE

576. Laturile triunghiului sunt egale cu 5 cm, 6 cm și 10 cm. Aflați unghiurile triunghiului.
577. Demonstrați că triunghiul cu laturile 7 cm, 24 cm și 25 cm este dreptunghic.
578. Aflați aria dreptunghiului, dacă perpendiculara, dusă din vârful unghiului drept, împarte diagonala în segmentele 2 cm și 8 cm.
579. Scrieți ecuațiile circumferințelor circumscrisă și înscrisă în patrulaterul  $ABCD$  dacă:  $A(-3; -3)$ ,  $B(-5; 3)$ ,  $C(1; 5)$ ,  $D(3; -1)$ .

## GEOMETRIA DIN JURUL NOSTRU



Triunghiuri pe uscat și pe mare

## PROBLEME CU DESENE GATA

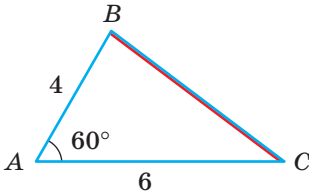
**A**

**B**

**1**

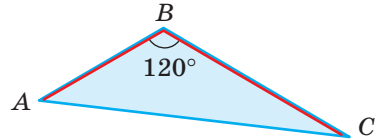
$$\underline{AB = 4, AC = 6, \angle A = 60^\circ.}$$

*BC*



$$\underline{AC = 14, AB : BC = 3 : 5.}$$

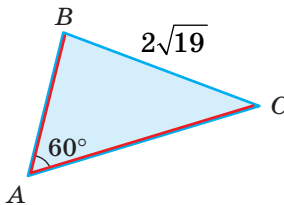
*AB, BC*



**2**

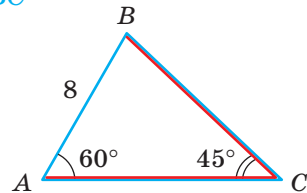
$$\underline{BC = 2\sqrt{19}, AC - AB = 6.}$$

*AC, AB*



$$\underline{\angle A = 60^\circ, \angle C = 45^\circ, AB = 8.}$$

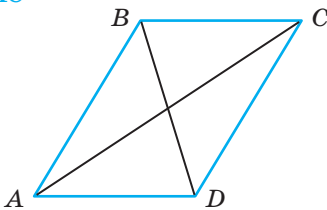
*AC, BC*



**3**

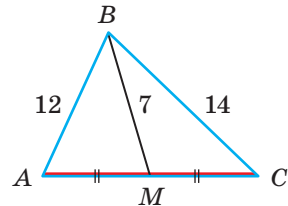
$$\underline{\square ABCD, AB = 9, BC = 7, BD = 8.}$$

*AC*



$$\underline{AM = MC.}$$

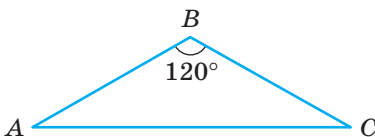
*AC*



**4**

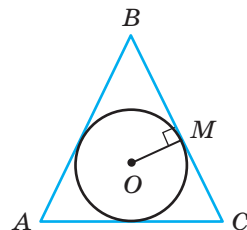
$$\underline{AB + BC = 18; S_{\triangle ABC} = 18\sqrt{3}.}$$

*AB, BC, AC*



$$\underline{BM : MC = 9 : 8, r = OM = 24.}$$

*R* — raza circumferinței circumscrise



## LUCRAREA INDEPENDENTĂ 3

### VARIANTA 1

- 1°. Aflați aria triunghiului, ale cărui laturi sunt egale cu 7 cm și 8 cm, iar unghiul format de ele este de  $45^\circ$ .
- 2°. Aflați latura  $BC$  a triunghiului  $ABC$ , dacă  $AB = 6$  dm,  $AC = 14$  dm,  $\angle B = 120^\circ$ .
- 3°. Latura laterală și baza triunghiului isoscel sunt respectiv proporționale cu numerele 5 și 8. Aflați raza circumferinței circumscrise, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 54 m.

### VARIANTA 2

- 1°. Aflați aria paralelogramului, ale cărui laturi sunt egale cu 6 cm și 9 cm, iar unghiul format de ele este egal cu  $120^\circ$ .
- 2°. Aflați latura  $AB$  a triunghiului  $ABC$ , dacă  $BC = 8$  m,  $AC = 7$  m,  $\angle B = 60^\circ$ .
- 3°. Latura laterală a triunghiului isoscel este cu 1 cm mai mare decât baza. Aflați raza circumferinței înscrise, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 50 cm.

### VARIANTA 3

- 1°. Aflați aria triunghiului, ale cărui două laturi sunt egale cu 9 m și 12 m, iar unghiul format de ele este egal cu  $150^\circ$ .
- 2°. Aflați latura  $AC$  a triunghiului  $ABC$ , dacă  $AB = 7$  cm,  $BC = 13$  cm,  $\angle A = 120^\circ$ .
- 3°. Baza și latura triunghiului isoscel se raportează ca 6:5. Aflați raza circumferinței circumscrise, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 64 dm.

### VARIANTA 4

- 1°. Aflați aria rombului cu latura 6 m și unghiul  $135^\circ$ .
- 2°. Aflați latura  $BC$  a triunghiului  $ABC$ , dacă  $AB = 14$  cm,  $AC = 10$  cm,  $\angle C = 60^\circ$ .
- 3°. Baza triunghiului isoscel este cu 6 dm mai mică decât latura laterală. Aflați raza circumferinței înscrise, dacă perimetrul triunghiului este egal cu 72 dm.

## ÎNSĂRCINĂRILE TESTE 3

<p><b>1</b> Care din următoarele egalități este neadevărată?</p>	<p>a) <math>\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}</math>; c) <math>\frac{a}{\sin A} = \frac{\sin B}{b}</math>;  b) <math>\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}</math>; d) <math>\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}</math>.</p>
<p><b>2</b> Stabiliți tipul triunghiului <math>ABC</math>, dacă <math>\cos B &lt; 0</math>.</p>	<p>a) ascuțitunghic;  b) dreptunghic;  c) obtuzunghic;  d) echilateral.</p>
<p><b>3</b> Aflați raza circumferinței, circumscrise triunghiulu <math>ABC</math>, dacă <math>AC = 3</math> cm, <math>\angle B = 30^\circ</math>.</p>	<p>a) 3 cm; c) <math>\sqrt{3}</math> cm;  b) 6 cm; d) 12 cm.</p>
<p><b>4</b> Aflați pătratul lungimii a diagonalei mai mici a paralelogramului, ale cărui laturi sunt egale cu 5 și 8, iar unghiul făcut de ele, este egal cu <math>60^\circ</math>.</p>	<p>a) 129; c) 49;  b) 39; d) 69.</p>
<p><b>5</b> Aflați aria triunghiului două laturi ale căruia sunt egale cu 6 cm și 14 cm, iar unghiul format de ele <math>30^\circ</math>.</p>	<p>a) <math>42 \text{ cm}^2</math>; c) <math>21\sqrt{2} \text{ cm}^2</math>;  b) <math>21\sqrt{3} \text{ cm}^2</math>; d) <math>21 \text{ cm}^2</math>.</p>
<p><b>6</b> Aflați aria triunghiului isoscel, a cărui latură laterală este egală cu 10 cm, iar unghiul de la bază este egal cu <math>45^\circ</math>.</p>	<p>a) <math>25\sqrt{3} \text{ cm}^2</math>; c) <math>25\sqrt{2} \text{ cm}^2</math>;  b) <math>50 \text{ cm}^2</math>; d) <math>50\sqrt{3} \text{ cm}^2</math>.</p>
<p><b>7</b> Două laturi ale triunghiului cu aria de <math>6\sqrt{3} \text{ cm}^2</math> sunt egale cu 4 cm și 6 cm. Găsiți unghiul făcut de aceste laturi.</p>	<p>a) <math>30^\circ</math>; c) <math>30^\circ</math> sau <math>60^\circ</math>;  b) <math>60^\circ</math>; d) <math>60^\circ</math> sau <math>120^\circ</math>.</p>
<p><b>8</b> Cu ce formulă se calculează raza circumferinței circumscrise triunghiului?</p>	<p>a) <math>\frac{abc}{4S}</math>; c) <math>\frac{S}{p}</math>;  b) <math>\frac{4S}{abc}</math>; d) <math>\frac{p}{S}</math>.</p>
<p><b>9</b> Aflați aria triunghiului, dacă perimetrul lui este egal cu 10 cm, iar raza cirmuferinței înscrise în el cu — 2 cm.</p>	<p>a) <math>20 \text{ cm}^2</math>; c) <math>5 \text{ cm}^2</math>;  b) <math>10 \text{ cm}^2</math>; d) <math>2,5 \text{ cm}^2</math>.</p>
<p><b>10</b> Indicați aria triunghiului echilateral cu latura de 2 dm.</p>	<p>a) <math>4 \text{ dm}^2</math>; c) <math>\sqrt{3} \text{ dm}^2</math>;  b) <math>2\sqrt{3} \text{ dm}^2</math>; d) <math>0,5\sqrt{3} \text{ dm}^2</math>.</p>

## PROBLEME TIPICE PENTRU LUCRAREA DE CONTROL

- 1°. Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 14 cm și 16 cm, iar unghiul format de ele este  $120^\circ$ . Aflați perimetrul și aria triunghiului.
- 2°. În triunghiul  $ABC$   $AB = 8$  dm,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 105^\circ$ . Aflați  $BC$ .
- 3°. Laturile paralelogramului sunt egale cu 6 cm și 10 cm, iar unghiul făcut de ele este  $60^\circ$ . Aflați diagonalele și aria paralelogramului.
- 4°. Aria triunghiului  $ABC$  este egală cu  $30 \text{ cm}^2$ ,  $AB = 10$  cm,  $BC = 12$  cm. Aflați  $\angle B$ . Câte soluții are problema?
- 5°. Diagonalele paralelogramului sunt egale cu 14 cm și 22 cm, iar laturile sunt proporționale cu numerele 6 și 7. Aflați perimetrul paralelogramului.
- 6°. Laturile triunghiului sunt egale cu 17 m, 25 m și 26m. Aflați cea mai mare înălțime a triunghiului.
- 7°. În triunghiul cu laturile 15 m, 15 m și 24 m este înscrisă o circumferință, centrul căreia este unit cu vârfurile triunghiului (fig.182). Aflați ariile triunghiurilor nou - formate.
- 8°. Perimetrul triunghiului este egal cu 36 cm, iar două laturi ale lui, care sunt proporționale cu numerele 8 și 3, fac unghiul de  $60^\circ$ . Aflați laturile triunghiului și razele circumferințelor înscrisă și circumscrișă.

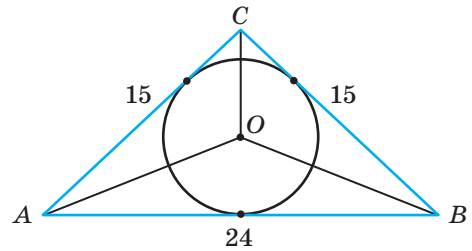


Fig.182

- 9°. Laturile laterale ale trapezului sunt egale cu 5 cm și  $5\sqrt{3}$  cm, iar bazele cu — 8 cm și 18 cm. Aflați unghiurile trapezului.
- 10°. Una din laturile triunghiului este egală cu  $c$ , iar unghiurile alăturate ei cu —  $\alpha$  și  $\beta$ . Aflați bisectoarele triunghiului, duse din vârfurile acestor unghiuri.

*Lumea din jur – asta-i lumea geometriei...  
Totul ce este de jur împrejur este geometrie.  
Le Corbiuzies*

# Principalul în capitolul 3

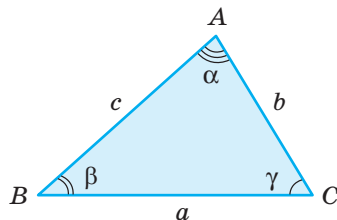
Dacă  $a, b, c$  sunt laturile triunghiului, iar  $\alpha, \beta, \gamma$  — unghiurile opuse lor ale triunghiului, atunci totdeauna

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$  — **teorema cosinusurilor**;

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} \text{ — teorema sinusurilor.}$$

Fiecare din ultimele trei fracții este egală cu  $2R$ , unde  $R$  — raza circumferinței circumscrise triunghiului dat:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$



Suma pătratelor diagonalelor paralelogramului este egală cu suma pătratelor laturilor lui.

**A rezolva triunghiul** — aceasta înseamnă a afla laturile și unghiurile lui necunoscute, știind câteva laturi și unghiuri ale lui.

Nr.d/r	Figură	Tipul problemei	Algoritmul rezolvării
1		Se știe două laturi și unghiul făcut de ele	1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ ; 2) $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ ; 3) $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$
2		Se știe o latură și două unghiuri	1) $\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$ ; 2) $a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin \beta}$ ; 3) $c = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \beta}$
3		Se știe trei laturi	1) $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ; 2) $\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ ; 3) $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$
4		Se știe două laturi și unghiul opus uneia din ele	1) $\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$ ; 2) $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ ; 3) $c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$



**Razele circumferințelor**, înscrisă ( $r$ ) în triunghiul  $ABC$  și circumscrisă lui ( $R$ ):

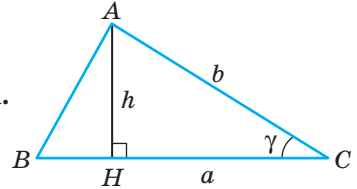
$$r = \frac{S}{p}, \quad R = \frac{abc}{4S} \text{ sau } R = \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

**Aria triunghiului** poate fi determinată conform următoarelor formule:

$$S = \frac{1}{2} ah, \quad S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma;$$

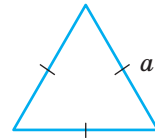
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ — Formula lui Heron.}$$

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad S = pr.$$

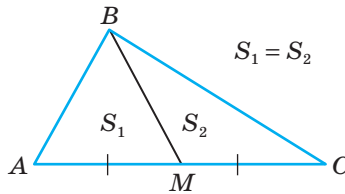


**Aria triunghiului echilateral** cu latura  $a$  se determină cu formula:

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

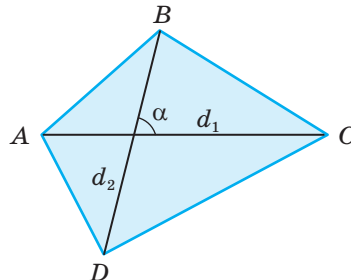
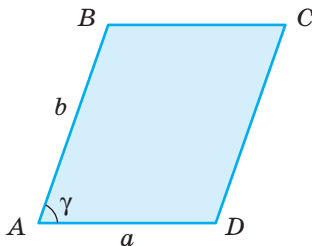


Mediana triunghiului îl împarte în două triunghiuri echivalente.



**Aria paralelogramului:**  $S = ab \sin \gamma$ , unde  $a, b$  — sunt laturile lui, iar  $\gamma$  — unghiul format de ele.

**Aria patrulaterului convex:**  $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$ , unde  $d_1$  și  $d_2$  — diagonalele patrulaterului, iar  $\alpha$  — unghiul făcut de ele.



*Nimic nu este făcut , dacă ceva a rămas  
nefinisat.  
Matematicienii stau unul pe umerii altuia*



## KARL FRIDRIH GAUSS

(1777–1855)

Ilustru matematician, astronom, fizician și geodezist german.

- Unul din cei mai mari și mai influenți matematicieni ai tuturor timpurilor. El este numit Rege al matematicii.
- Trăsăturile caracteristice ale cercetărilor lui Gauss sunt multilateralitatea extraordinară a lor și legătura organică dintre matematica teoretică și cea aplicată.
- În cinstea lui Uniunea internațională a matematicienilor și Societatea germană a matematicienilor au întemeiat premiul „Premiul Gauss” pentru realizări remarcabile în domeniul matematicii aplicate.



Poligon stelat regulat  
cu 17 vârfuri.

# Capitolul 4

## Poligoane regulate

# Section 4

## Regular Polygons

**Regulate** sunt numite astfel de poligoane convexe, în care toate laturile sunt egale și toate unghiurile sunt egale. Ele joacă un rol important nu numai în geometrie, dar și în cristalografie, chimie, mineralogie ș.a. Proprietățile lor frecvent sunt folosite de arhitecții, dizainerii. Se folosesc proprietățile poligoanelor regulate pentru a determina lungimea circumferinței și aria cercului.

§ 17

Poligoane regulate și proprietățile lor

Regular Polygons and Circles

§ 18

Poligoane regulate și circumferințe

Regular Polygons Drawing

§ 19

Lungimea circumferinței și a arcului de circumferință

Disk and Arc Circumference

§ 20

Aria cercului și a părților lui

Disk and Its Parts Area

PROIECT DE ÎNVĂȚĂMÂNT  
“Acoperirea planului”

EDUCATIONAL PROJECT  
“Plane Covering”

# Pentru ce trebuie de studiat poligoanele regulate?

**Poligoanele regulate** – acestea-s noțiuni abstracte, create de savanți. În natură poligoane absolut regulate nu există. Se întâlnesc obiecte în formă apropiată de poligoanele regulate. De exemplu, albinele fac faguri în formă apropiată de hexagoanele regulate. Florile a multor plante cresc astfel că capetele petalelor lor sunt amplasate în vârfurile unor poligoane regulate, iar capetele fulgilor de zăpadă sunt situate în vârfurile hexagoanelor regulate. Forme aproape de poligoane regulate au fețele unor cristale. De exemplu, fețele cristalelor sării de bucătărie sunt pătrate, fețele cristalelor de diamant – triunghiuri regulate. Poligoanele regulate se întâlnesc și în multe produse (capurile buloanelor și a piulițelor, dispozitivelor de preparare a colțunașilor cu carne).



În arhitectură deseori se pot vedea construcții, care au forme de poligoane regulate sau de părți ale lor. Mai ales foarte frecvent au de lucru cu poligoane regulate parchetarii, teracotiștii, arhitecții. În unele palate, săli se așterne parchet ce constă din câteva poligoane regulate diferite: triunghiuri și hexagoane regulate, pătrate și octoane regulate ș.a.

**Dar mai unde se folosesc poligoanele regulate? Aduceți exemplele voastre.**



# § 17

## Poligoane regulate și proprietățile lor

**Poligonul convex** se numește regulat, dacă toate laturile lui sunt egale și toate unghiurile sunt egale.

Triunghiul echilateral și pătratul – exemple de poligoane regulate. În figura 183 este reprezentat un pentagon regulat și un hexagon regulat.

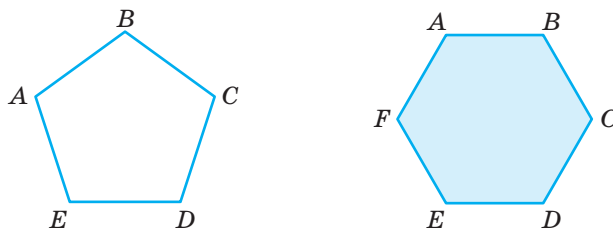


Fig. 183

Dacă poligonul regulat are  $n$  laturi, atunci suma tuturor unghiurilor interioare ale lui este egală cu  $180^\circ(n - 2)$ , iar unul din ei — de  $n$  ori mai mic, adică este egal cu

$$\frac{180^\circ(n - 2)}{n}.$$

Cu cât este mai mare numărul  $n$ , cu atât este mai mare unghiul poligonului regulat cu  $n$  laturi.

### TEOREMA 11

**Dacă poligonul este regulat, atunci lui i se poate circumscrie o circumferință și în el se poate înscrie o circumferință.**

### ДЕМОНСТРАЦІЄ.

Fie  $ABCDE\dots K$  — poligonul regulat cu  $n$  laturi (fig.184). Bisectoarele unghiurilor lui  $A$  și  $B$  se intersectează într-un oarecare punct  $O$ . Triunghiul  $AOB$  este isoscel, deoarece  $\angle OAB = \angle OBA = \frac{\alpha}{2}$ , unde  $\alpha$  — unghiul poligonului dat. Unim punctul  $O$  cu segmente cu toate vârfulurile poligonului. Triunghiurile  $OBC$  și  $OBA$  sunt egale, deoarece ele au latura comună  $OB$ ,  $BC = BA$  și  $\angle OBC = \angle OBA$ . Cu un procedeu asemănător ne convingem, că  $\triangle OAB = \triangle OBC = \triangle OCD = \triangle ODE \dots$

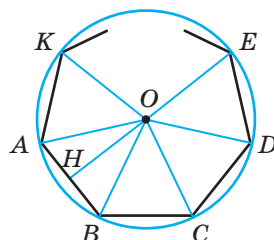


Fig.184

Deci,  $OA = OB = OC = OD = \dots = OK$ , adică toate vârfurile poligonului regulat dat  $ABCDE\dots K$  sunt egal depărtate de la punctul  $O$ . De aceea circumferința de raza  $OA$  este circumscrisă poligonului dat. Prima parte a teoremei este demonstrată.

Deoarece triunghiurile  $OAB, OBC, OCD, ODE, \dots, OKA$  sunt egale, reiese că sunt egale și înălțimile lor corespunzătoare, adică perpendicularele, coborâte din punctul  $O$  pe toate laturile poligonului regulat dat. Deci, circumferința cu centrul  $O$ , care are contact cu latura  $AB$ , este tangentă la toate laturile poligonului  $ABCDE\dots K$ . Această circumferință este înscrisă în poligonul dat. A doua parte a teoremei de asemenea este demonstrată.  $\square$

După cum rezultă din raționamentele anterioare, centrul circumferinței, înscrisă în poligonul regulat și a circumferinței circumscrise lui, este unul și același punct  $O$ . El este numit **centrul poligonului regulat**.

Unghiul sub care se vede latura poligonului regulat din centrul lui se numește unghi la centru al acestui poligon. Perpendiculara, coborâtă din centrul poligonului regulat pe latura lui – apotema poligonului regulat. În figura 184  $\angle AOB$  — unghiul la centru al poligonului regulat  $AB\dots K$ , iar  $OH$  — apotema lui. Măsura unghiului la centru al poligonului regulat cu  $n$  laturi este egală cu  $\frac{360^\circ}{n}$ . De ce?

În vârfurile poligoanelor regulate de regulă sunt situate centrele bilelor în rulmenți, centrele găurilor flanșelor, capetele dinților ferestraielor circulare (fig.115) ș.a.



Fig.185

Plăcuțele și plăcile pentru acoperirea podelei în case, piețelor și străzilor, aerodromurilor cel mai des sunt confecționate în formă de poligoane regulate.



Fig.186

**PENTRU CEI CURIOSI**

Oare se poate din definiția poligonului regulat de omis îmbinarea de cuvinte „laturi egale” sau „unghiuri egale”? Nu, deoarece poligonul regulat, toate unghiurile cărui sunt egale sau toate laturile sunt egale, poate fi neregulat (fig.187).

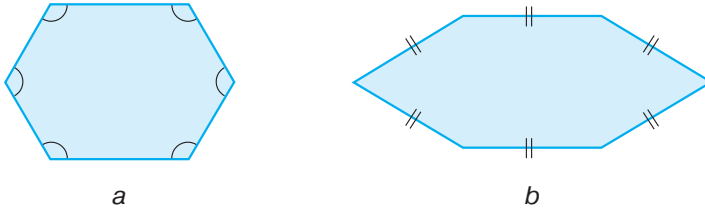


Fig.187

Exemple de poligoane neconvexe, ale cărora toate laturile sunt egale, sunt aduse în figura 188. Ele nu sunt considerate poligoane regulate.

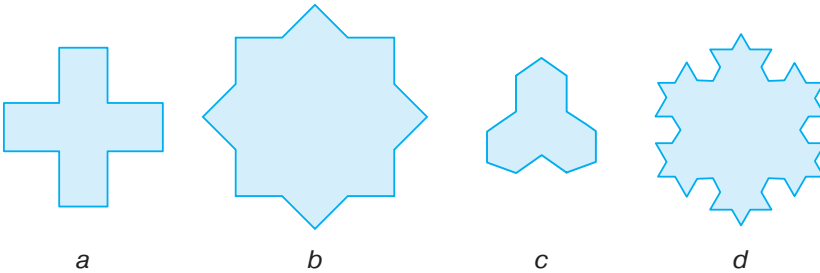


Fig.188

**ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL**

1. Formulați definiția poligonului regulat.
2. Cum altfel este numit triunghiul regulat? Dar patrulaterul regulat?
3. Cu ce este egală suma unghiurilor ale poligonului regulat?
4. Cu ce este egală măsura unghiului interior al poligonului regulat cu  $n$  laturi?
5. Cu ce este egală măsura unghiului la centru al poligonului regulat cu  $n$  laturi?
6. Oare se poate circumscrie o circumferință oricărui poligon regulat?
7. Oare se poate înscrie o circumferință în orice poligon regulat?
8. Ce se numește centrul poligonului regulat?
9. Ce se numește apotemă a poligonului regulat?
10. Aduceți exemple de obiecte din mediul înconjurător care au formă de poligoane regulate.

## EFFECTUĂM ÎMPREUNĂ

- 1** Câte diagonale are poligonul regulat cu  $n$  laturi?
- Din fiecare vârf al poligonului cu  $n$  laturi ies  $n-3$  diagonalele (fig.189). De tot sunt  $n$  vârfuri. Avem produsul  $n(n-3)$ . Însă fiecare diagonală iese din două vârfuri diferite. De aceea  $n(n-3)$  este cantitatea dublă de diagonale. Așadar, fiecare poligon regulat (ca și fiecare poligon convex) are  $0,5n(n-3)$  diagonale. Triunghiul diagonal nu are.
- 2** Demonstrați că latura hexagonului regulat, înscris într-o circumferință este egală cu raza acestei circumferințe.
- În figura 190 este reprezentat hexagonul regulat  $ABCDEF$ , înscris în circumferința cu centru în punctul  $O$ . Să demonstrăm că  $AB = OA$ . Hai să examinăm triunghiul  $AOB$ . Deoarece  $AO = BO$ , ca raze ale aceleiași circumferințe, reiese că triunghiul  $AOB$  — isoscel.  $\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$  ca unghi la centru al hexagonului regulat. Atunci  $\angle OAB = \angle OBA = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ = \angle AOB$ . Deci,  $\triangle AOB$  — echilateral și de aceea  $AB = OA$ .

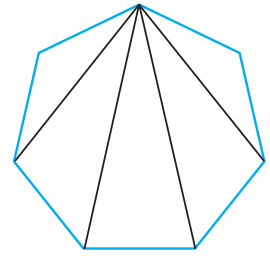


Fig.189

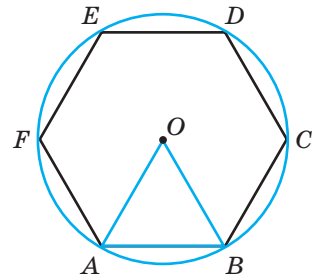


Fig.190

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

- 580.** Cum altfel sunt numiți triunghiul regulat și patrulaterul regulat?
- 581.** Latura poligonului cu  $n$  laturi este egală cu  $a$ . Aflați perimetrul lui.
- 582.** Perimetrul poligonului regulat cu  $n$  laturi este egal cu  $2p$ . Aflați lungimea laturii lui.
- 583.** Aflați latura pentagonului regulat, dacă ea este mai mică decât perimetrul cu 20 cm.
- 584.** Cu ce este egală suma unghiurilor a următoarelor poligoane regulate: a) triunghiului; b) patrulaterului; c) pentagonului; d) hexagonului.
- 585.** Câte diagonale are poligonul regulat: a) triunghiul; b) patrulaterul; c) pentagonul, d) hexagonul.
- 586.** Cu ce este egală suma unghiurilor exterioare ale pătratului, luați câte unul de la fiecare vârf al lui? Dar la triunghiul regulat?



## A

587. Ґате діагонале аре полігонул регулат ку  $n$  латурі, даґа:  
 а)  $n = 5$ ; б)  $n = 7$ ; в)  $n = 12$ ; д)  $n = 100$ ?
588. Аґлатї суму унґіурілу а полігонуллу регулат ку  $n$  латурі, даґа:  
 а)  $n = 5$ ; б)  $n = 8$ ; в)  $n = 10$ ; д)  $n = 18$ .
589. Аґлатї унґіул полігонуллу регулат ку  $n$  латурі, даґа:  
 а)  $n = 5$ ; б)  $n = 10$ ; в)  $n = 15$ ; д)  $n = 20$ .
590. Аґлатї унґіуріле де ла ценуру інуеріу ґи але полігонуллу регулат ку  $n$  латурі, даґа:  
 а)  $n = 3$ ; б)  $n = 6$ ; в)  $n = 12$ ; д)  $n = 100$ .
591. Сума унґіурілу ехуеріору але полігонуллу регулат ку  $n$  латурі луате ґате унул ла фекаре вурґ ал луі, есте еґалґа ку  $360^\circ$ . Демонструаґі.
592. Ґате латурі аре полігонул регулат, даґа фекаре унґі ал луі есте еґал ку  $108^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $140^\circ$ ,  $144^\circ$ ,  $150^\circ$ ?
593. Каре латурі аре полігонул регулат ку  $n$  латурі, фекаре унґі ехуеріу ал ґаруіа есте еґал ку: а)  $24^\circ$ ; б)  $30^\circ$ ; в)  $36^\circ$ ; д)  $18^\circ$ ?
594. Латура пәратулу есте еґалґа ку 10 см. Аґлатї разе ле ґіркумферінґелу інуеріу ґи ґіркумсґіу.
595. Дуґеґі іну ґіркумферінґа дууа діаметре реґіпроґ перпендіуларе ґи уніґі ехуерітаґіле лор. Демонструаґі ґа патрулатерул обуґінут есте регулат.
596. Стабілуґі ґореспондента дінуре мәсуріле унґіурілу ла ценуру але полігоанелу регулате (1-4) ґи мәсуріле унґіурілу інуеріору але лор (A-E).
- |              |               |
|--------------|---------------|
| 1 $36^\circ$ | A $150^\circ$ |
| 2 $45^\circ$ | B $135^\circ$ |
| 3 $30^\circ$ | C $145^\circ$ |
| 4 $24^\circ$ | D $144^\circ$ |
|              | E $156^\circ$ |
597. Латура унулу полігон регулат есте еґалґа ку  $a$ , іар разу ґіркумферінґеі ґіркумсґіуе луі есте  $R$ . Аґлатї разу ґіркумферінґеі інуеріуе.
598. Латура полігонуллу регулат есте еґалґа ку  $a$ , іар разу ґіркумферінґеі інуеріуе іну ел есте  $r$ . Аґлатї разу ґіркумферінґеі ґіркумсґіуе луі.
599.  $R$  ґи  $r$  – разе ле ґіркумферінґелу ґіркумсґіуе полігонуллу регулат ґи інуеріуе іну ел. Аґлатї латура полігонуллу.
600. Іну фігура 191 есте репрезентатґа ґеа ку ґаре се маніпулеазґа ла ґурубурі, піулуґе ґи 4 піулуґе. Каре діну піулуґе се пот десфаке ку аґеаґа ґеае?

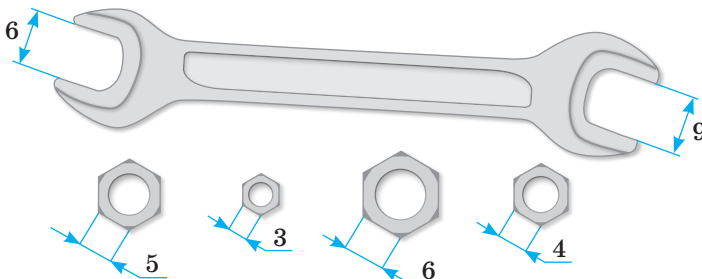


Fig.191

## B

- 601.** Demonstrați că în hexagonul regulat laturile opuse sunt paralele.
- 602.** Aflați diagonalele hexagonului regulat, a cărui latură este egală cu  $a$ .
- 603.** Distanța dintre laturile paralele ale hexagonului regulat este egală cu  $l$ . Aflați latura hexagonului.
- 604.** În octagonul regulat cu latura de 6 sunt unite mijlocurile a patru laturi, luate peste una. Demonstrați că patrulaterul obținut este pătrat și aflați latura lui.
- 605.** Într-un dodecagon regulat cu latura de 8 cm sunt unite mijlocurile laturilor, luate peste una. Demonstrați că hexagonul obținut este regulat și aflați perimetrul lui.
- 606.** Demonstrați că mijlocurile laturilor unui poligon regulat cu  $n$  laturi sunt vârful altui poligon regulat cu  $n$  laturi.
- 607.** Tăind unghiurile unui triunghi regulat cu latura  $m$ , am obținut un hexagon regulat (fig.192). Aflați latura lui.
- 608.** Tăind unghiurile pătratului au obținut un octagon regulat. Aflați latura lui, dacă latura pătratului este egală cu  $a$ .
- 609.** Demonstrați că în pentagonul regulat:
- toate diagonalele sunt egale;
  - fiecare diagonală este paralelă cu una din laturile lui.
  - două diagonale, care ies din același vârf, formează 3 triunghiuri isoscel.
- 610.** În ce raport diagonala pentagonului regulat împarte unghiul, din vârful căruia ea iese?
- 611.** Ce unghi formează două diagonale ale pentagonului regulat, duse din vârfuri diferite și care se intersectează?
- 612.** De ce plăcile pentru acoperirea piețelor, străzilor, aerodromurilor nu sunt confecționate în formă de pentagoane regulate?
- 613. Problema Catalană.** Divizați hexagonul regulat dat în 7 hexagoane regulate și 12 triunghiuri echilaterale.

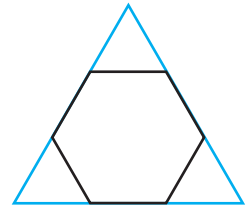


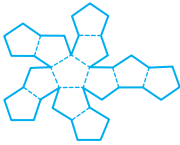
Fig.192

## ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

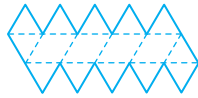
- 614.** 1) Tăiați din hârtie trainică trei romburi egale astfel, ca din ele să se poată monta un hexagon regulat. Aflați: a) unghiurile fiecărui romb și a hexagonului obținut; b) raportul perimetrelor a hexagonului și a rombului.
- 2) Decupați din hârtie durabilă zece triunghiuri regulate egale și alcătuiți din ele un triunghi regulat și un hexagon regulat. Aflați rapoartele: a) diametrelor ale figurilor obținute; b) ale ariilor figurilor obținute.

**PROBLEME PENTRU REPETARE**

**615.** Din poligoanele regulate (triunghiuri, patrulater și pentagoane) sunt alcătuite desfășuratele poliedrelor regulate. După desfășuratele aduse mai jos încercați să confecționați modelele poliedrelor regulate (de avut în vedere fâșiile pentru încheiat). De stabilit corespondența dintre desfășuratele poliedrelor regulate (1-5) și poliedrele corespunzătoare (A-E).



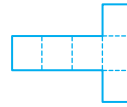
1



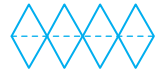
2



3



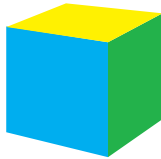
4



5



A



B



C



D



E

- 616.** Aflați aria triunghiului isoscel, a căruia latură laterală este cu 3 cm mai mică decât baza, iar înălțimea mai mică este egală cu 12 cm.
- 617.** Aflați înălțimile paralelogramului, dacă laturile lui sunt 5 cm și 12 cm, iar unghiul format de ele are  $60^\circ$ .
- 618.** Aflați raza circumferinței, dacă coarda cu lungimea de 24 cm este situată de la centru la distanța de 5 cm.
- 619.** Aflați unghiurile trapezului isoscel, al cărui perimetru este egal cu 48 cm, iar raza circumferinței înscrise este de 3 cm.

**GEOMETRIA ÎN JURUL NOSTRU**



Poligoanele în desghinul landşaftului

# § 18

## Poligoane regulate și circumferințe

Să stabilim corelațiile dintre latura poligonului regulat cu  $n$  laturi  $a_n$  și razele  $R_n$  și  $r_n$  ale circumferințelor circumscrisă și înscrisă lui.

Fie  $ABC\dots K$  — poligon regulat cu  $n$  laturi cu centrul  $O$  și latura  $AB = a_n$  (Fig. 193).

Atunci  $OA = OB = R$ ,  $OH = r$ . Unghiul la centru  $AOB$ , care se sprijină pe latura  $AB$  a poligonului regulat cu  $n$  laturi, este egal cu  $\frac{360^\circ}{n}$ . Atunci  $\angle AOH = \frac{180^\circ}{n}$ ,  $AH = \frac{1}{2}a_n$ , fiindcă înălțimea  $OH$  a triunghiului isoscel  $AOB$  este concomitent și bisectoare, și mediană.

Din triunghiul dreptunghic  $\triangle AOH$  avem:

$$1) \frac{AH}{AO} = \sin \frac{180^\circ}{n} \text{ sau } \frac{a_n}{2R_n} = \sin \frac{180^\circ}{n}, \text{ de unde } a_n = 2R_n \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$\text{și } R_n = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

$$2) \frac{AH}{HO} = \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \text{ sau } \frac{a_n}{2r_n} = \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}, \text{ de unde } a_n = 2r_n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} \text{ și } r_n = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$

Aceste formule permit exprimarea laturilor poligonului regulat cu  $n$  laturi prin razele circumferințelor circumscrisă sau înscrisă și, invers, se poate afla razele circumferințelor circumscrisă sau înscrisă, cunoscând latura poligonului regulat cu  $n$  laturi.

De exemplu, înlocuind în formulele  $a_n = 2R_n \sin \frac{180^\circ}{n}$  și  $a_n = 2r_n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$  pe  $n$  cu numerele 3, 4 și 6 obținem exprimările lungimilor laturilor triunghiurilor, patrulaterelor și hexagoanelor regulate prin raza  $R$  a circumferinței circumscrise și raza  $r$  a circumferinței înscrise.

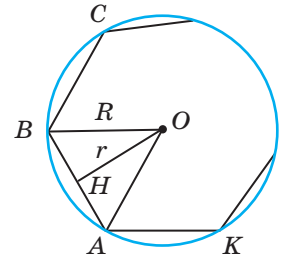


Fig.193

Cantitatea de laturi ale poligonului regulat cu $n$ laturi	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Latura poligonului regulat cu $n$ laturi	$a_3 = R\sqrt{3}$	$a_4 = R\sqrt{2}$	$a_6 = R$
	$a_3 = 2r\sqrt{3}$	$a_4 = 2r$	$a_6 = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$

Dacă în formulele  $R_n = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$  și  $r_n = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$  înlocuim  $n$  cu numerele 3,

4 și 6, atunci obținem exprimările razei  $R$  a circumferinței circumscrise și a razei  $r$  a circumferinței înscrise prin latura triunghiului, patrulaterului și hexagonului regulați cu latura  $a_n$ .

Cantitatea de laturi ale poligonului regulat cu $n$ laturi	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Raza circumferinței circumscrise	$R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Raza circumferinței înscrise	$r_3 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \frac{a}{2}$	$r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

**Atrageți atenția!**

**Latura hexagonului regulat este egală cu raza circumferinței circumscrise.** Deci pentru a diviza circumferința în 6 părți egale este suficient de depus succesiv 6 coarde, care sunt egale cu raza circumferinței (fig.194). Dacă punctele de divizare de le unit peste unul, atunci obținem un triunghi regulat (fig.195). Dacă însă fiecare din cele 6 arce obținute de le împărțit în jumătate și punctele de devizare de le unit succesiv, atunci se obține un dodecagon regulat (fig.196) ș.a.m.d. Așadar, dacă circumferința este împărțită în  $n$  părți egale, atunci această circumferință nu este greu de o împărțit în  $2n$  părți egale.

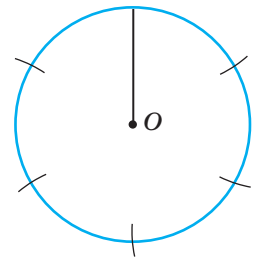


Fig.194

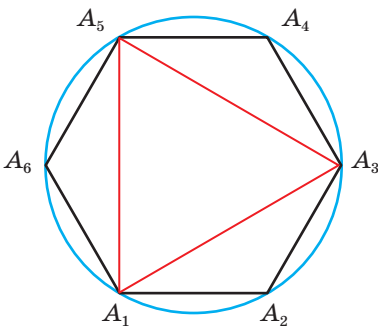


Fig.195

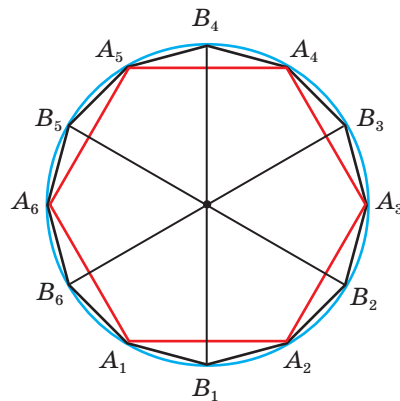


Fig.196

Pentru a construi un patrulater regulat (pătrat) în circumferință sunt duse două diametre perpendiculare, de exemplu  $AC$  și  $BD$  (fig.197) și se unesc consecutiv capetele lor. Patrulaterul astfel obținut  $ABCD$  – pătrat.

Folosind figura 197, încercați de sine stătător să construiți un octagon regulat.

Voi deja știți cum de construit triunghi, patrulater, hexagon regulați. Dar cum de construit un pentagon sau un poligon cu  $n$  laturi oarecare regulat?

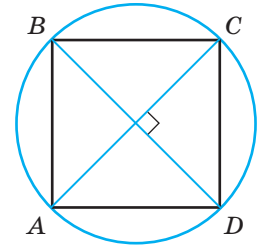


Fig.197

Dacă împărțim circumferința în  $n$  părți egale și punctele de divizare obținute de le unit succesiv cu segmente, atunci se va obține un poligon regulat cu  $n$  laturi. Așadar, problema construirii unui poligon regulat cu  $n$  laturi se reduce la împărțirea circumferinței în  $n$  părți egale. Unghiul la centru  $\angle AOB$ , care se sprijină pe latura poligonului regulat cu  $n$  laturi, înscris în circumferință, este egal cu  $\frac{360^\circ}{n}$ . De aceea dacă trebuie de împărțit circumferința în 9 părți egale, noi la început calculăm unghiul la centru corespunzător ( $360^\circ : 9 = 40^\circ$ ) și cu ajutorul raportului construim așa un unghi la centru —  $\angle AOB = 40^\circ$  (fig.198).

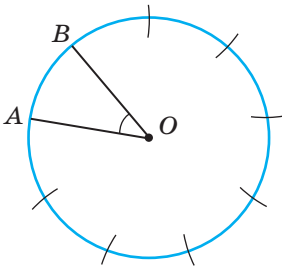


Fig.198

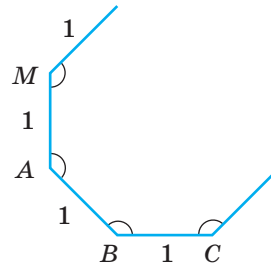


Fig.199

Iar mai departe cu deschizătura compasului ce este egală cu  $AB$ , facem ocolul întregii circumferințe. Dacă punctele de divizare de le unit succesiv cu segmente, atunci se obține nonegon regulat. El este regulat, fiindcă laturile lui sunt egale (ca coarde, care subîntind arce egale) și unghiurile sunt egale (ca unghiuri înscrise, care se sprijină pe arce egale).

Se pot construi poligoane regulate și fără a folosi circumferința. Să construim, de exemplu, un octagon regulat cu latura de 1 cm. Deoarece unghiul octagonului regulat este egal cu  $135^\circ$ , cu ajutorul raportului, construim la început  $\angle A = 135^\circ$  (fig.199) și pe laturile lui depunem segmentele  $AM = AB = 1$  cm. Iar mai departe continuăm să construim consecutiv unghiuri de  $135^\circ$  și depunem pe ele segmente cu lungimea de 1 cm. Octagonul obținut va fi regulat, deoarece unghiurile și laturile lui sunt egale conform construcției. Dar octagonul construit cu un așa procedeu practic se poate foarte deosebi de octagonul regulat, deoarece greșelile inevitabile ale desenării se adună și în final pot fi foarte mari. În construcțiile clasice se permite utilizarea numai a compasului și a riglei, iar nu și a raportorului.

Cum se poate afla aria unui poligon regulat cu  $n$  laturi? După cum se știe aria oricărui poligon cu perimetrul  $2p$ , circumscris circumferinței de rază  $r$  se poate afla cu formula  $S = pr$ . Această formulă este adevărată și pentru poligonul regulat cu  $n$  laturi.

Dacă latura lui este  $a$ , atunci  $p = \frac{1}{2}na$ , iar  $S = \frac{1}{2}nar$ .

### PENTRU CEI CURIOSI

Mai sus a fost vorba despre construirea unui poligon regulat cu  $n$  laturi. Dar cum de construit poligonul regulat cu  $n$  laturi a cărui latură are lungimea dată  $a$  (sau raza  $r$  sau  $R$  a circumferinței, înscrise în acest poligon regulat, sau a circumferinței circumscrise lui)? Astfel de construcții se fac, folosind metoda asemănării. De exemplu, pentru a construi un pentagon regulat cu latura  $a_5 = 2$  cm, mai întâi se construiește un pentagon regulat arbitrar  $ABCDE$  (fig. 200) și sunt duse semidreptele  $OA, OB, OC, OD, OE$ . Pe semidreapta  $AB$  se depune segmentul  $AK = a_5 = 2$  cm și se duce  $KM \parallel OA$ . Dacă  $KM$  intersectează semidreapta  $OB$  în punctul  $B_1$ , atunci mai departe se duce  $B_1A_1 \parallel BA, B_1C_1 \parallel BC, C_1D_1 \parallel CD$  și ș.a.m.d. Pentagonul  $A_1B_1C_1D_1E_1$  este acela care trebuia construit.

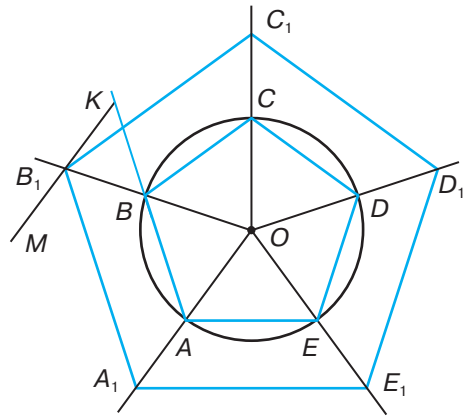


Fig.200

## ÎNSĂRCINĂRI ȘI ÎNTREBĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Cum se exprimă prin raza circumferinței circumscrise latura poligoanelor regulate: a) poligonului cu  $n$  laturi; b) triunghiului; c) patrulaterului; d) hexagonului?
2. Cum se exprimă prin raza circumferinței înscrise latura următoarelor poligoane regulate: a) poligonului cu  $n$  laturi; b) triunghiului; c) patrulaterului; d) hexagonului?
3. Cum se exprimă raza circumferinței circumscrise prin latura următoarelor poligoane regulate: a) poligonului cu  $n$  laturi; b) triunghiului; c) patrulaterului; d) hexagonului?
4. Cum se exprimă raza circumferinței înscrise prin latura următoarelor poligoane regulate: a) poligonului cu  $n$  laturi; b) triunghiului; c) patrulaterului; d) hexagonului?
5. Cum de aflat aria poligonului cu  $n$  laturi regulat?
6. Cum de construit poligonul cu  $n$  laturi regulat?
7. Cum de construit poligonul cu  $n$  laturi regulat, știind latura lui?

## EFACTUĂM ÎMPREUNĂ

- 1 Latura hexagonului regulat circumscris circumferinței este egală cu 4 cm. Aflați latura triunghiului regulat, înscris în această circumferință.
- Fie raza circumferinței  $r$  (fig.201). Atunci pentru hexagon aceasta va fi raza circumferinței înscrise, iar pentru triunghi – raza circumferinței circumscrise. Deci,

$$r_6 = \frac{a_6 \sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \text{ cm. Deoarece } r_6 = R_3,$$

$$\text{reiesă că } a_3 = R_3 \sqrt{3}, \quad a_3 = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6 \text{ cm.}$$

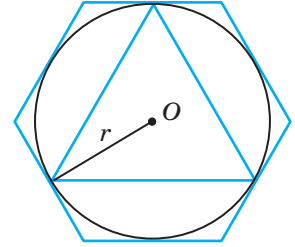


Fig.201

- 2 Demonstrați că aria poligonului regulat cu  $n$  laturi, înscris în circumferința de raza  $R$ , se poate determina cu formula

$$S = \frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

- În figura 202 este reprezentat poligonul regulat cu  $n$  laturi  $ABC\dots K$ , înscris în circumferința de raza  $R$ . Examinăm  $\triangle AOB$ :

$$AO = BO = R, \quad \angle AOB = \frac{360^\circ}{n},$$

$$\text{și de aceea } S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Deoarece  $ABC\dots K$  — poligon regulat cu  $n$  laturi, reiesă că aria lui  $S$  este de  $n$  ori mai mare decât aria triunghiului  $AOB$ .

Deci,

$$S = n \cdot S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Atrageți atenția la formulele cu ajutorul cărora se poate afla aria triunghiului, patrulaterului și hexagonului regulați cu latura  $a$ .

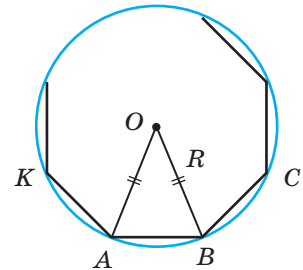


Fig.202

Cantitatea de laturi a poligonului cu $n$ laturi regulat.	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Aria poligonului regulat cu $n$ laturi	$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$	$S = a^2$	$S = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$



## ПРОБЛЕМЫ И УПРАЖНЕНИЯ

### ЭФЕКТИВНО УСТНО

- 620.** Сторона правильного четырехугольника равна  $a$ . С чем равно: а) периметр; б) длина диагонали; в) угол, образованный диагоналями; г) радиус описанной окружности; д) радиус вписанной окружности; е) площадь четырехугольника?
- 621.** Диагональ правильного четырехугольника равна  $d$ . С чем равно: а) сторона четырехугольника; б) периметр; в) радиус описанной окружности; г) радиус вписанной окружности; е) площадь четырехугольника?
- 622.** Сторона правильного шестиугольника равна  $a$  (рис. 203). Найдите: а) периметр; б) радиус описанной окружности; в) радиус вписанной окружности; г) расстояние между противоположными вершинами; е) площадь шестиугольника.
- 623.** Сторона квадрата, вписанного в окружность, равна  $a$ . Найдите сторону правильного шестиугольника, вписанного в эту окружность.

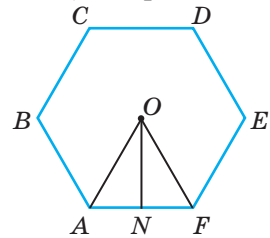


Fig.203

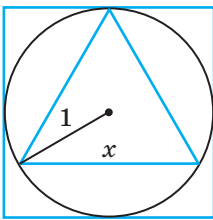
### A

- 624.** Постройте правильный  $n$ -угольник, если:
- а)  $n = 3$ ; б)  $n = 6$ ; в)  $n = 8$ ; г)  $n = 12$ .
- 625.** Постройте правильный  $n$ -угольник со стороной 2 см, если:
- а)  $n = 5$ ; б)  $n = 6$ ; в)  $n = 9$ ; г)  $n = 12$ .
- 626.** Постройте правильный треугольник по заданному радиусу  $R$  описанной окружности, если:  $h = 3$  см.
- 627.** Постройте правильный шестиугольник по а) заданному радиусу  $R$  описанной окружности; б) заданной стороне; в) заданному периметру.
- 628.** Радиус описанной окружности равен 8 см. Найдите сторону правильного  $n$ -угольника, вписанного в эту окружность, если:
- а)  $n = 3$ ; б)  $n = 4$ ; в)  $n = 6$ ; г)  $n = 12$ .
- 629.** Радиус описанной окружности равен  $8\sqrt{3}$  см. Найдите сторону правильного  $n$ -угольника, вписанного в эту окружность, если:
- а)  $n = 3$ ; б)  $n = 4$ ; в)  $n = 6$ ; г)  $n = 18$ .
- 630.** Сторона правильного  $n$ -угольника равна  $4\sqrt{3}$ . Найдите радиус описанной окружности, если:
- а)  $n = 3$ ; б)  $n = 4$ ; в)  $n = 6$ ; г)  $n = 12$ .
- 631.** Сторона правильного  $n$ -угольника равна  $3\sqrt{6}$  см. Найдите радиус описанной окружности, если:
- а)  $n = 3$ ; б)  $n = 4$ ; в)  $n = 6$ ; г)  $n = 18$ .

- 632.** Latura poligonului regulat înscris în circumferință este egală cu 12 cm. Aflați perimetrul și aria acestui poligon, dacă:  
a)  $n = 3$ ; b)  $n = 4$ ; c)  $n = 5$ ; d)  $n = 6$ .
- 633.** Aflați aria poligonului cu  $n$  laturi regulat, dacă raza circumferinței, circumscrie lui este egală cu 6 cm. Cercetați cazurile:  
a)  $n = 3$ ; b)  $n = 4$ ; c)  $n = 5$ ; d)  $n = 6$ ; e)  $n = 12$ .
- 634.** În circumferință este înscris un hexagon regulat, al cărui perimetru este 24 cm. Aflați perimetrul și aria următoarelor poligoane regulate, înscrise în această circumferință: a) triunghiului, b) patrulaterului.
- 635.** Aflați aria poligonului cu  $n$  laturi regulat, dacă raza circumferinței înscrise în el este egală cu 4 cm și:  
a)  $n = 3$ ; b)  $n = 4$ ; c)  $n = 6$ ; d)  $n = 12$ .
- 636.** De câte ori aria pătratului, circumscriș circumferinței este mai mare decât aria pătratului, înscris în această circumferință?
- 637.** Perimetrele pătratului, triunghiului echilateral și a hexagonului regulat sunt egale cu 36 cm. Care din aceste figuri are cea mai mică arie, și care – cea mai mare?

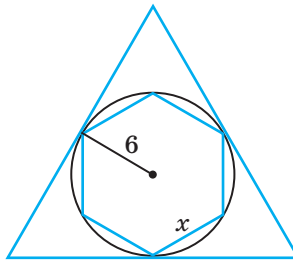
## B

- 638.** Se dă triunghiul regulat  $ABC$ . Construiți hexagonul regulat  $AKBPCT$ . Cum se raportă perimetrele și ariile lor?
- 639.** Se dă un pătrat. Construiți un octagon regulat, patru vârfuri ale căruia ar coincide cu vârfurile pătratului dat. Cum se raportă perimetrele și ariile lor?
- 640.** Folosindu-se de figurile 204-206 aflați laturile necunoscute  $x$  și  $y$  ale poligoanelor regulate.



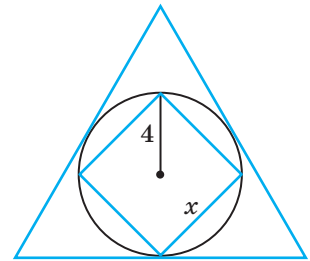
$y$

Fig.204



$y$

Fig.205



$y$

Fig.206

- 641.** Aflați lungimile diagonalelor octagonului regulat: a) știind raza  $R$  a circumferinței circumscrie; b) cunoscând latura egală cu  $a$ .
- 642.** Aflați lungimile diagonalelor dodecagonului regulat, dacă se știe: a) raza  $R$  a circumferinței circumscrie; b) latura  $a$ .
- 643.** În circumferința de raza 12 cm este înscris un poligon cu  $n$  laturi regulat și sunt unite succesiv mijlocurile laturilor lui. Determinați latura poligonului ce s-a format și raza circumferinței circumscrie lui, dacă: a)  $n = 4$ ; b)  $n = 6$ .

644. În circumferința de rază  $R$  este înscris un triunghi regulat, iar pe latura lui este construit un pătrat. Aflați raza circumferinței, circumscrise pătratului.
645. În circumferința de rază  $R$  este înscris un triunghi regulat, în triunghi este înscrisă o circumferință, în care este înscris un pătrat. Aflați latura pătratului.
646. Într-o circumferință este înscris un hexagon regulat cu latura  $a$ , iar circumferinței îi este circumscris un triunghi regulat. El de asemenea este înscris într-o oarecare circumferință. Aflați raportul razelor acestor circumferințe.
647. **Problemă deschisă.** În circumferința de rază  $R$  este înscris un triunghi regulat. În triunghi este înscrisă o  $\dots$ , iar în ea este înscris un  $\dots$ . Aflați latura  $\dots$ .
648. Coarda comună a două circumferințe, care se intersectează este egală cu  $l$  și servește pentru una din circumferințe ca latură a triunghiului regulat înscris, iar pentru a doua – ca latură a pătratului înscris în ea (fig. 207). Aflați distanța dintre centrele circumferințelor. Examinați alt caz.
649. Latura hexagonului regulat este egală cu 10 cm. Aflați aria triunghiului regulat echivalent cu el.
650. Aria hexagonului regulat, circumscris unei circumferințe este egală cu  $72\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>. Aflați aria triunghiului regulat circumscris acestei circumferințe.
651. Aria octagonului regulat înscris într-o circumferință, este egală cu  $162\sqrt{2}$  m<sup>2</sup>. Stabiliți corespondența dintre poligoanele regulate (1-4), înscrise în această circumferință și valorile ariilor acestor poligoane (A-E).

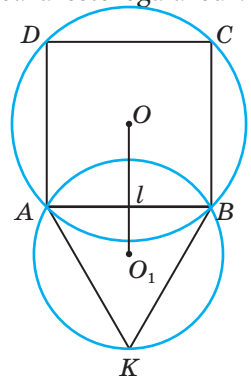


Fig.207

- |   |            |   |                         |
|---|------------|---|-------------------------|
| 1 | Triunghi   | A | $\frac{243\sqrt{3}}{2}$ |
| 2 | Patrulater | B | 243                     |
| 3 | Hexagon    | C | $\frac{243\sqrt{2}}{4}$ |
| 4 | Dodecagon  | D | 162                     |
|   |            | E | $\frac{243\sqrt{3}}{4}$ |

**ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ**

652. Un mare interes față de construcțiile geometrice au manifestat pictorii renumiți în toată lumea: Leonardo da Vinci, Alibrecht Diurer, Salvador Dali, Mauriți Eser. Cu ajutorul construcțiilor geometrice corecte ei au izbutit să reprezinte perfect spațiul.

Examinați schița lui Leonardo da Vinci la a lui „Cina cea de taină” (fig. 208), în care, printre altele, este reprezentată construcția octagonului regulat, înscris în circumferință, după latura lui.

- Demonstrați că așa o construcție asigură determinarea corectă a centrului circumferinței, circumscrise octagonului regulat cu latura dată.
- Construiți cu așa un procedeu un octagon regulat, a cărui latură este egală cu 2 cm.



Fig.208

### PROBLEME PENTRU REPETARE

- Câte diagonale are poligonul cu 75 de laturi regulat?
- Aflați unghiurile poligonului cu 30 de laturi regulat.
- În ce raport împart unghiul diagonalele hexagonului regulat, care ies din vârful acestui unghi?
- Diagonalele rombului sunt proporționale cu numerele 3 și 4, iar aria este egală cu  $12 \text{ cm}^2$ . Aflați perimetrul rombului.

# § 19

## Lungimea circumferinței și a arcului de circumferință

În clasele primare lungimea circumferinței se determină cu ajutorul firului de ață (amintiți-vă cum aceasta se face). Dar ața nu este noțiune geometrică, și pe lângă aceasta măsurarea lungimii circumferinței cu ața ne dă numai rezultate aproximative. De aceea vom examina această întrebare din punctul de vedere al geometriei.

Să ne imaginăm că în circumferință este înscris un decagon regulat, apoi un icosagon regulat, un poligon regulat cu 40 de laturi ș.a.m.d. Perimetrele lor  $P_{10}$ ,  $P_{20}$ ,  $P_{40}$ , ... tot mai puțin se deosebesc de lungimea a circumferinței date. Dacă cantitatea de laturi a poligonului ( $n$ ) de o mărit infinit de mult, atunci  $P_n$  – se apropie de  $C$ . Se poate spune astfel: **lungimea circumferinței** – acesta-i numărul de care se apropie valoarea numerică a perimetrului poligonului cu  $n$  laturi regulat, înscris în această circumferință, la creșterea nemărginită a cantității laturilor lui.

Să deducem formula care exprimă lungimea circumferinței prin raza ei. Fie că avem două circumferințe arbitrare (fig.209). Notăm razele lor cu literele  $R$  și  $R'$ , ar lungimile lor – cu literele  $C$  și  $C'$ . În fiecare din aceste circumferințe înscriem un poligon cu  $n$  laturi regulat cu același număr de laturi. Dacă  $a_n$  și  $a'_n$  – sunt laturile acestor poligoane, iar  $P_n$  și  $P'_n$  – perimetrele lor, atunci

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n} \text{ și } P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R' \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

De aici

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}.$$

Această proporție este adevărată pentru fiecare valoare a lui  $n$ . De aceea, dacă mărim nemărginit valoarea lui  $n$ , atunci perimetrele  $P_n$  și  $P'_n$  vor tinde către lungimile circumferințelor  $C$  și  $C'$ , iar raportul perimetrelor – către raportul  $\frac{C}{C'}$ . Deci,

$$\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'} \text{ sau } \frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}.$$

Deoarece  $2R$  — diametrul circumferinței de raza  $R$  reiesă că raportul lungimii circumferinței către diametrul ei este unul și același pentru fiecare circumferință.

Acest raport constant este primit de-l notat cu litera grecească  $\pi$  (se citește „pi”). Numărul  $\pi$  este irațional, valoarea lui aproximativă cu precizia de sutimi este  $\pi = 3,14$ . La sfârșitul secolului trecut cu ajutorul unei asigurări speciale de programare la computer au fost găsite un milion de cifre ale acestui număr.

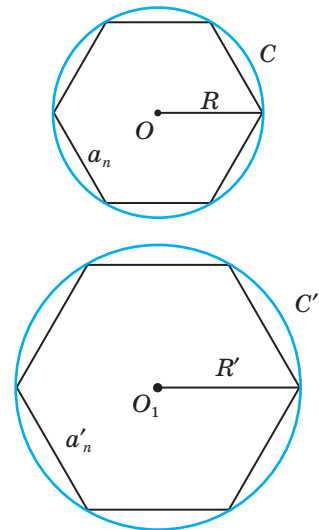


Fig.209

Așadar, dacă  $C$  este lungimea circumferinței de raza  $R$ , atunci  $\frac{C}{2R} = \pi$ , de unde  $C = 2\pi R$ .

**Aceasta este formula lungimii circumferinței.**

De exemplu, dacă raza circumferinței  $R=150$  cm, atunci lungimea ei

$$C \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 150 = 942 \text{ (cm)}.$$

Să deducem formula pentru calcularea lungimii unui arc de circumferință (a unei părți a ei).

Lungimea arcului este proporțională cu măsura unghiului la centru corespunzător. Arcul care corespunde unghiului la centru de  $1^\circ$ , are lungimea  $\frac{2\pi R}{360} = \frac{\pi R}{180}$ . Atunci unghiului

la centru de  $n^\circ$  îi corespunde arcul cu lungimea de  $\frac{\pi R n}{180}$  (fig.210).

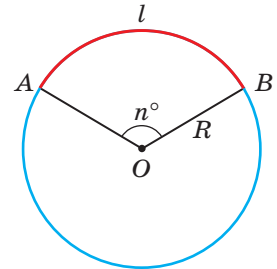


Fig.210

Așadar, lungimea  $l$  a arcului circumferinței de raza  $R$ , măsura în grade a căruia constituie  $n^\circ$ , se calculează cu formula:

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

## PENTRU CEI CURIOSI

Lungimea circumferinței și a părților ei (cu un anumit grad de aproximație) știau să o determine încă cu 2000 de ani în urmă în Egiptul și Babilonul Antic. Mai târziu în Grecia Antică Arhimede, luând diametrul circumferinței drept unitate, înscria în circumferință și circumscria circumferinței poligoane regulate. Aflând perimetrul poligonului cu 96 de laturi regulat înscris și circumscriș, el a stabilit că lungimea circumferinței cu diametrul 1 se află între limitele:

$$3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}.$$

Deoarece  $3 \frac{1}{7} \approx 3,142857$ , de aceea ca valoarea aproximativă a numărului  $\pi$  pentru rezolvarea a multe probleme practice se lua numărul 3,14.

Până acum noi am considerat lungimile circumferințelor și a părților lor. Afară de ele există o infinitate de alte linii curbe: parabole, elipse, spirale (fig.211) ș.a. Cum de determinat lungimile a astfel de curbe sau a părților lor? Din istoria matematicii se știe că aceasta a fost o problemă foarte complicată, care avea denumirea de „curbă rectificabilă”. A determina lungimea arcului curbei, afară de circumferință, s-a izbutit tocmai în secolul XVII. La ora actuală lungimile curbelor sunt determinate cu ajutorul metodelor analizei matematice.

În practică lungimile a astfel de linii sunt determinate aproximativ. Lungimea curbei, care nu este parte a circumferinței, se poate determina aproximativ, pășind pe ea cu compasul de o anumită deschizătură (fig.212).

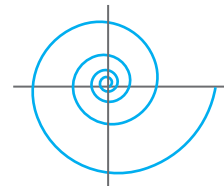


Fig.211

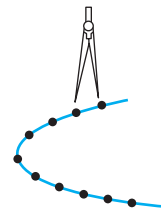


Fig.212

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Cum se notează raportul lungimii circumferinței către diametrul ei?
2. Cu ce este egală valoarea aproximativă a numărului  $\pi$  cu precizie de sutimi?
3. Cu care formulă se determină lungimea circumferinței?
4. Cu care formulă se află lungimea arcului de circumferință?

## EFFECTUĂM ORAL

- 1 Aflați diagonala pătratului, circumscris circumferinței, a cărei lungime este  $l$ .
- Notăm raza circumferinței examinate cu litera  $r$ . Atunci  $l = 2\pi r$ , de unde  $r = \frac{l}{2\pi}$ . Latura pătratului circumscris este egală cu diametrul circumferinței (fig.213).  $AB = KP = 2 \cdot r = \frac{l}{\pi}$ . Lungimea căutată a

$$\text{diagonalei } AC = AB\sqrt{2} = \frac{l\sqrt{2}}{\pi}.$$

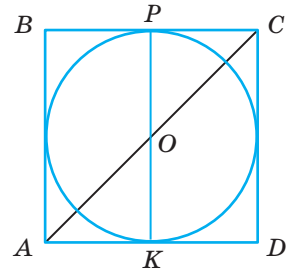


Fig.213

- 2 Aflați raza circumferinței, lungimea căreia este egală cu o treime din lungimea circumferinței de raza 30 cm.
- Lungimea circumferinței mai mici este egală cu  $\frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 30$  sau  $20\pi$ . Dacă raza căutată este  $r$ , atunci  $2\pi r = 20\pi$ , de unde  $r = 10$  (cm).

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

657. Aflați valoarea aproximativă a expresiilor  $10\pi$ ;  $2\pi$ ;  $\frac{\pi}{2}$ .
658. Cu ce este egală lungimea circumferinței de raza 1 cm; 1 m?
659. Diametrul circumferinței este egal cu 2 m. Cu ce este egală lungimea circumferinței?
660. Cu ce este egală raza circumferinței de lungimea  $2\pi$  cm;  $10\pi$  dm;  $2m\pi$  cm?
661. Mai mult sau mai puțin de 5 cm are lungimea circumferinței cu raza de 1m?
662. Aflați lungimea circumferinței, circumscrise triunghiului dreptunghic cu ipotenuza 10 cm.
663. Cu ce este egală lungimea arcului  $AB$  al circumferinței cu centrul în punctul  $O$  și raza 3 m, dacă  $\angle AOB = 120^\circ$ ?



## A

664. Aflați lungimea circumferinței de raza: a) 30 cm; b) 12 cm; c) 25 cm.
665. Aflați raza circumferinței, lungimea căreia este de: a)  $12\pi$  cm; b) 6,28 cm; c)  $40\pi$  cm.
666. Cum se va mări lungimea circumferinței, dacă vom mări raza ei de  $k$  ori?
667. Aflați lungimea circumferinței, circumscrise pătratului cu latura de 8 cm și lungimea circumferinței, înscrise în acest pătrat.
668. Diagonala pătratului este egală cu  $d$ . Aflați lungimea circumferinței înscrise.
669. Aflați lungimea circumferinței circumscrise dreptunghiului, ale cărui laturi sunt egale cu 33 cm și 56 cm.
670. Latura hexagonului regulat este egală cu 9 cm. Calculați lungimea circumferinței circumscrise acestui hexagon și a circumferinței înscrise în el.
671. Latura triunghiului regulat este egală cu 12 cm. Aflați lungimea circumferinței: a) înscrise în triunghi; b) circumscrise triunghiului.
672. Aflați lungimea arcului circumferinței a cărei rază este de 6 cm, iar unghiul la centru corespunzător este: a)  $30^\circ$ ; b)  $60^\circ$ ; c)  $90^\circ$ ; d)  $120^\circ$ .
673. Triunghiului echilateral  $ABC$  cu latura de 6 cm îi este circumscrisă o circumferință. Aflați lungimile arcelor  $AB$ ,  $BC$  și  $AC$ .
674. Punctele  $M$  și  $N$  împart circumferința cu diametrul de 20 cm în părți, proporționale cu numerele 2 și 3. Aflați lungimile arcelor obținute.
675. Punctele  $P$  și  $K$  împart circumferința de raza 4 cm în două arce astfel, că diferența lungimilor lor este egală cu  $1,4\pi$ . Aflați lungimea arcului mai mare.
676. Pe latura  $AC$ , egală cu 6 cm a triunghiului echilateral  $ABC$ , ca pe diametru este construită o semicircumferință. Aflați lungimile arcelor, în care laturile  $AB$  și  $BC$  împart această semicircumferință.
677. Coarda circumferinței este egală cu raza ei. Aflați lungimile arcelor în care această coardă împarte circumferința, dacă diametrul circumferinței este de 36 cm.
678. Se dă poligonul regulat  $ABC\dots K$  (fig.214), a cărui latură este egală cu 18 cm.  $BK$  – arcul circumferinței cu centrul în punctul  $A$  și raza  $AB$ . Stabiliți corespondența dintre măsura unghiului  $A$  (1-4) și lungimea arcului  $BK$  (A-E).

- |   |             |   |           |
|---|-------------|---|-----------|
| 1 | $60^\circ$  | A | $14\pi$   |
| 2 | $108^\circ$ | B | $10,8\pi$ |
| 3 | $140^\circ$ | C | $6\pi$    |
| 4 | $156^\circ$ | D | $15\pi$   |
|   |             | E | $15,6\pi$ |

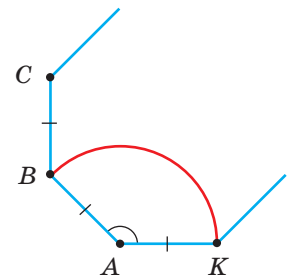


Fig.214

679. Pe o bobină cu diametrul de 0,6 m sunt 30 de spirale de sârmă. Aflați lungimea sârmei.
680. Aflați lungimea orbitei satelitului artificial al Pământului, dacă el se rotește pe o circumferință la distanța de 320 km de la suprafața Pământului. Raza Pământului este aproximativ egală cu 6370 km.



**Б**

- 681. Imaginați-vă că o sferă cu raza de 6370 km este încercuită pe ecuator cu un cerc. Dacă lungimea acestui cerc de o mărit cu 1 m, el se va depărta de la suprafața sferei (peste tot la fel) la o oarecare distanță. Aflați-o.
- 682. Locomotiva Diesel are roata cu diametrul de 0,8 m. Câte rotații pe minută face această roată când locomotiva se mișcă cu viteza de 60 km/oră?
- 683. Cateta triunghiului dreptunghic este egală cu  $a$ , iar unghiul ascuțit alăturat  $\beta$ . Aflați lungimea circumferinței circumscrise.
- 684. Cum se raportează lungimile a două circumferințe, dacă una din ele este circumscrisă unui triunghi regulat, iar cealaltă este înscrisă în el?
- 685. Aflați lungimile liniilor, care mărginesc figurile, reprezentate în figura 215.

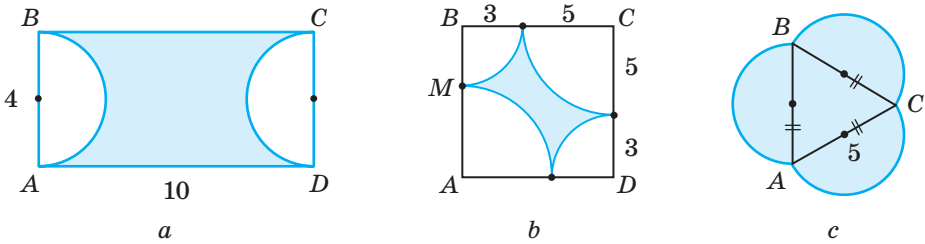


Fig.215

- 686. Latura rombului este egală cu 15 cm, iar unghiul cu  $30^\circ$ . Aflați lungimea circumferinței înscrise.
- 687. Aflați lungimea circumferinței circumscrise trapezului cu laturile  $a, a, a$  și  $2a$ .
- 688. Coarda comună a două circumferințe care se intersectează este egală cu  $l$  și servește pentru una din circumferințe drept latură a triunghiului regulat înscris, iar pentru cealaltă – ca latură a pătratului înscris. Aflați lungimile acestor circumferințe.
- 689. Aflați lungimea circumferinței, care este mai lungă decât diametrul ei cu 21,4 cm.
- 690. Circumferința de raza 3 cm este îndreptată într-un arc de raza 9 cm. Aflați măsura în grade a arcului obținut și măsura unghiului la centru corespunzător lui.
- 691. Unui triunghi, ale cărui unghiuri sunt proporționale cu numerele 3,4 și 5, îi este circumscrisă circumferința de raza 6 cm. Aflați lungimile arcelor ei  $AB, BC$  și  $CA$ .
- 692. Aflați lungimile arcelor, în care circumferința cu lungimea de  $20\pi$  este împărțită de coarda, dusă la distanța de  $5\sqrt{2}$  cm de la centrul circumferinței.
- 693. Lungimea circumferinței este egală cu  $24\pi$  cm. Aflați lungimile arcelor, în care această circumferință este împărțită de coarda cu lungimea de  $12\sqrt{3}$  cm.
- 694. Din punctul  $A$  al circumferinței cu centrul  $O$  sunt duse coardele  $AB$  și  $AC$  astfel, că  $AC = 6\sqrt{2}$  cm,  $\angle BOC = 120^\circ$ . Aflați lungimile arcelor  $AB, AC$  și  $BC$ , dacă lungimea circumferinței este de  $12\pi$  cm. Câte soluții are problema?

- 695.** Coarda întinde arcul circumferinței cu lungimea  $l$ , a căruia măsură în grade este de  $n^\circ$ . Aflați lungimea coardei.
- 696.** Aflați lungimea curelei de transmisie, care unește două roți de curea, dacă razele lor sunt egale cu 10 cm și 30 cm, iar distanța dintre centrele lor  $OO_1 = 1$  m (fig.216).

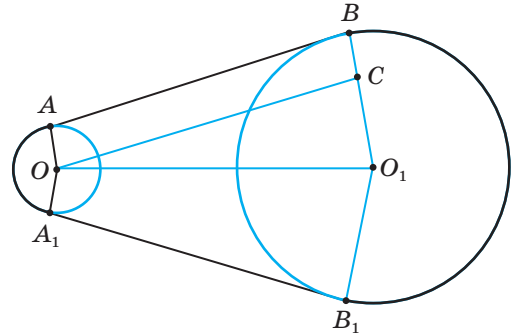


Fig.216

### ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

- 697.** a) În sistemul de coordonate rectangular, în care segmentul unitar are lungimea de 1 cm în intervalul  $[-2; 3]$  construiți graficul funcției  $y = x^2$ . Cu ajutorul compasului și riglei aflați lungimea aproximativă a acestui grafic.
- b) Analogic aflați lungimea aproximativă a unei părți a spiralei de aur, reprezentată în figura 217. Care deschizătură a compasului este rațional de-o luat în acest caz? Aflați mai mult despre această spirală. De ce ea este astfel numită?

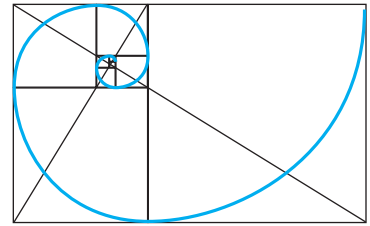
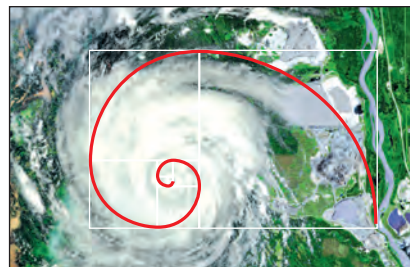


Fig.217

### PROBLEME PENTRU REPETARE

- 698.** Aflați suma distanțelor de la centrul circumferinței cu diametrul  $d$  până la laturile triunghiului regulat, înscris în această circumferință.
- 699.** Aflați perimetrul hexagonului, înscris în circumferința de raza  $R$ .
- 700.** În circumferința de raza 3 cm înscriteți un dodecagon regulat.
- 701.** Latura rombului este egală cu  $a$ , iar unghiul ascuțit – cu  $\alpha$ . Aflați diagonalele rombului, aria și raza circumferinței înscrise.

### GEOMETRIA DIN JURUL NOSTRU



Spirala de aur în natură

# § 20

## Aria cercului și a părților lui

**Cerc** se numește partea planului, mărginită de circumferință. **Centru, rază, diametru, coardă a cercului este numit** corespunzător centrul, raza, diametrul, coarda circumferinței, care mărginește cercul dat. **Poligon, înscris în cerc** este numit poligonul înscris în circumferința cercului dat.

Partea cercului mărginită de două raze ale lui, se numește **sector** (fig.218, b). Coarda cercului îl împarte în două **segmente** (fig.218, c). În figura 218 este reprezentat cercul, două sectoare de cerc și două segmente.

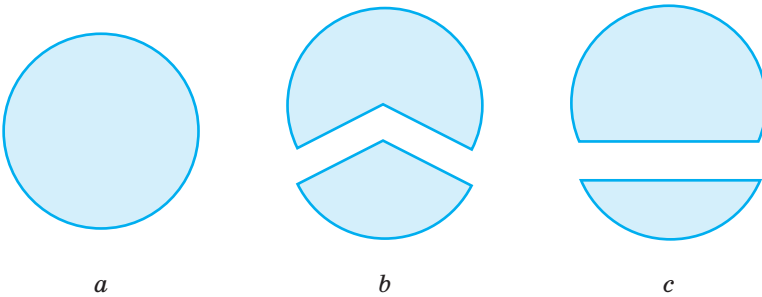


Fig.218

Ce este aria cercului? Nu este ușor de răspuns la această întrebare, deoarece teoria strictă a ariilor figurilor, mărginite de linii curbe, este destul de complicată; noi nu vom considera-o. Numai remarcăm, că fiecare cerc are arie și că aria poligonului cu  $n$  laturi regulat, înscris în cerc, când numărul  $n$  crește nemărginit, tinde spre aria cercului. Pe baza acestor afirmații deducem formula pentru calcularea ariei cercului.

Fie că este dat cercul de rază arbitrară  $R$ . Înscriem în el poligonul cu  $n$  laturi regulat  $ABCD...F$  (fig. 219).

Dacă  $OH$  — înălțimea triunghiului  $OAB$ , atunci

$$AH = \frac{1}{2} AB, \quad \angle AOH = \frac{180^\circ}{n} \quad \text{și} \quad OH = R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OH = \frac{1}{2} AB \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n}.$$
 Poligonul

cu  $n$  laturi  $ABCD...F$  este compus din  $n$  astfel de triunghiuri, de aceea aria lui

$$S_n = n \cdot \frac{1}{2} AB \cdot R \cos \frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2} PR \cos \frac{180^\circ}{n},$$

unde  $P$  — perimetrul poligonului dat.

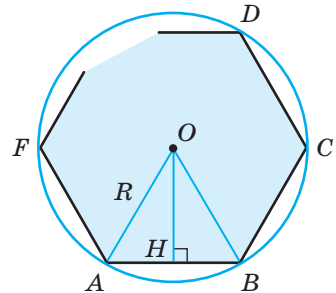


Fig.219

Dacă numărul  $n$  îl mărim nemărginit, atunci perimetrul  $P$  se va apropia de lungimea circumferinței  $2\pi R$ , unghiul  $\frac{180^\circ}{n}$  — до  $0^\circ$ , iar cosinusul lui — de 1. De aceea

$$S = \pi R \cdot R \cdot 1 = \pi R^2.$$

**Aria cercului de raza  $R$  se află cu formula**

$$S = \pi R^2.$$

Să deducem formulele pentru calcularea ariilor sectorului și segmentului.

Aria sectorului, care corespunde unghiului la centru de  $1^\circ$ , este egală cu  $\frac{\pi R^2}{360}$ . De aceea unghiului la centru de  $n^\circ$  îi corespunde sectorul, a cărui arie este egală cu  $\frac{\pi R^2 n}{360}$ .

Așadar, **aria sectorului** de cerc de raza  $R$ , a cărui măsură de grad constituie  $n^\circ$ , se calculează cu formula

$$S_{\text{sec}} = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$

De exemplu, dacă raza sectorului  $OA = 9$  cm, iar  $\angle AOB = 120^\circ$  (fig.220), atunci aria acestui sector

$$S_{\text{sec}} = \pi \cdot 9^2 \cdot \frac{120}{360} = 27\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Pentru a afla aria segmentului  $AMB$  (fig.221), trebuie de scăzut din aria sectorului corespunzător aria triunghiului  $OAB$ , dacă unghiul sectorului  $\alpha < 180^\circ$  (fig.221,a) sau de adunat aria triunghiului  $OAB$ , dacă unghiul sectorului  $\alpha > 180^\circ$  (fig. 221,b). Sectorul cu unghiul de  $180^\circ$  — **semicerc**, aria lui este egală cu jumătate din aria cercului corespunzător.

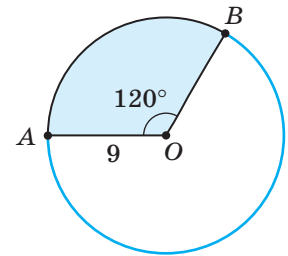


Fig.220

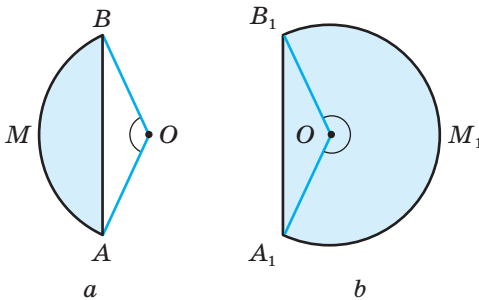


Fig.221

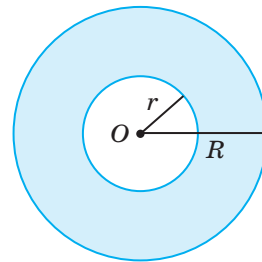


Fig.222

Parte a cercului este de asemenea inelul, mărginit de două circumferințe concentrice (fig.222). Dacă razele circumferințelor, care mărginesc inelul, sunt egale cu  $R$  și  $r$  atunci aria inelului

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2).$$

## PENTRU CEI CURIOSI

Din punctul de vedere al geometrie sunt interesante părțile cercului mărginite de arcurile a două circumferințe – **lentilele** (fig. 223) și **seceruicile** (fig. 224). Gândiți-vă cum se poate determina ariile acestor figuri, știind, de exemplu, razele circumferințelor, care le mărginesc, și distanța dintre centrele lor.

Drept exemplu să examinăm o astfel de seceruică, mărginită de semicircumferința de raza  $r$  și de un sfert de cerc de raza  $r\sqrt{2}$  (fig. 225). Aria ei

$$S = \frac{\pi r^2}{2} - \left( \frac{1}{4} \pi (r\sqrt{2})^2 - r^2 \right) = r^2.$$

Aria seceruicii  $AKBP$  este egală cu aria pătratului  $AOO_1H$ . Există seceruici, cvadratura cărora este posibilă! Aceasta a demonstrat în secolul V î.e.n. Hipocrat Hiosikii (nu confundați cu mediul antic grec, autorul "Jurământul lui Hipocrat", care a trăit în secolul III î.e.n.).

**Cvadratura figurii** – asta-i calcularea ariei ei. Înainte se spunea, că cvadratura figurii este posibilă dacă se poate construi (cu compasul și rigla!) pătratul, echivalent cu figura dată.



Fig.223



Fig.224

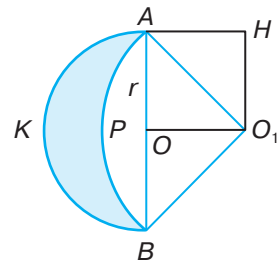


Fig.225

## ÎNTREBĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Ce se numește cerc?
2. Cu care formulă se calculează aria cercului?
3. Ce se numește sector?
4. Cu care formulă se află aria sectorului?
5. Ce se numește segment?
6. Cu care formulă se calculează aria segmentului?
7. Ce se numește inel? Cu care formulă se află aria inelului?

## EFACTUĂM ÎMPREUNĂ

1 În triunghiul regulat este înscrisă o circumferință de raza  $r$  și tot lui îi este circumscrisă o circumferință. Aflați aria inelului, mărginit de aceste circumferințe.

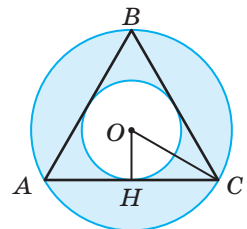


Fig.226

- Problemei îi corespunde figura 226, în care  $OH = r$ ,  $OC = R$ . Deoarece în triunghiul regulat  $R = 2r$ , reiesă că aria inelului  $S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2) = \pi(4r^2 - r^2) = 3\pi r^2$ .

2) Trei circumferințe de raza  $r$  au contact exterior două câte două. Calculați aria „triunghiului curb”, mărginit de arcele acestor circumferințe.

- Centrele circumferințelor date formează triunghiul regulat  $OO_1O_2$  cu latura  $2r$  (fig.227). Aria lui este

$$S = \frac{(2r)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{4r^2 \sqrt{3}}{4} = r^2 \sqrt{3}.$$

Deoarece  $\angle O_2OO_1 = 60^\circ$ , reiesă că aria fiecăruia din sectoarele obținute este egală cu  $\frac{1}{6} \pi r^2$ .

Atunci aria figurii căutate este

$$S = \sqrt{3}r^2 - 3 \cdot \frac{1}{6} \pi r^2 = r^2 \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right).$$

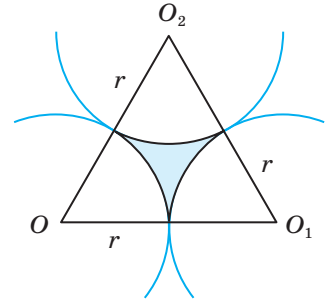


Fig.227

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

702. Aflați aria cercului de raza 1 m; 2 dm; 5 cm.  
 703. Aflați aria cercului cu diametrul de 2 dm; 6 cm; 3 m.  
 704. Aflați aria semicercului de raza 6 cm.  
 705. Aria cercului este egală cu  $3\pi$  m<sup>2</sup>. Cu ce este egală raza lui?  
 706. Aflați aria cercului, circumscris unui pătrat cu diagonala  $d$ .  
 707. Aflați aria cercului, înscris în pătratul cu latura  $a$ .  
 708. Cum se va schimba aria cercului, dacă raza lui de o mărit de 2 ori?  
 709. Cum se va schimba aria cercului, dacă vom micșora diametrul lui de 3 ori?  
 710. Rezolvați rebusul din figura 228.

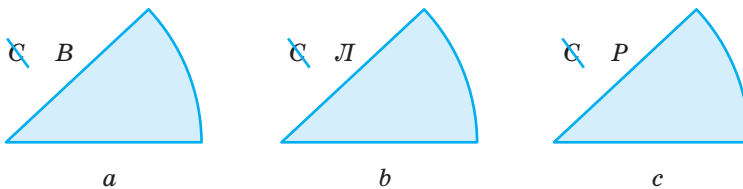


Fig.228

### A

711. Calculați aria cercului, a cărui rază este egală cu 8 cm; 10 cm; 5 cm.  
 712. Calculați aria cercului, a cărui diametru este egal cu 6 cm; 18 cm; 22 cm.  
 713. Aria cercului este egală cu  $S$ . Aflați lungimea circumferinței, care-l mărginește, dacă  $S$  este egal cu: a)  $12,56$  cm<sup>2</sup>; b)  $16\pi$  cm<sup>2</sup>; c)  $1,44\pi$  cm<sup>2</sup>.

- 714.** Aflați aria arenei cercului, lungimea circumferinței căreia este de 41 m.
- 715.** Construiți cercul a căruia aria este egală cu  $4\pi \text{ cm}^2$ , înscrieți în el un pătrat. Aflați aria cercului înscris în acest pătrat.
- 716.** Ariile a două cercuri se raportează ca 4:9. Aflați raportul lungimilor ale circumferințelor acestor cercuri.
- 717.** Aflați aria cercului, dacă laturile dreptunghiului înscris în el sunt egale cu 12 cm și 16 cm.
- 718.** Aflați raportul ariilor ale cercurilor: a) înscris în triunghiului regulat; b) circumscris aceluiași triunghi.
- 719.** Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu 6 cm și 8 cm. Aflați aria: a) cercului, înscris în triunghi; b) cercului, circumscris triunghiului.
- 720.** Aflați aria inelului, mărginit de circumferințele concentrice de razele 2 cm și 5 cm.
- 721.** Aria inelului, mărginit de două circumferințe concentrice este egală cu  $63\pi \text{ cm}^2$ . Aflați razele acestor circumferințe, dacă:  
a) una din ele este cu 3 cm mai mare decât cealaltă;  
b) ele sunt proporționale cu numerele 3 și 4;  
c) suma lor este egală cu 21 cm.
- 722.** Aflați aria sectorului de cerc de raza 12 cm, dacă unghiul la centru corespunzător este egal cu:  
a)  $40^\circ$ ; b)  $60^\circ$ ; c)  $120^\circ$ ; d)  $270^\circ$ .
- 723.** Aflați aria segmentului de cerc, dacă raza cercului este egală cu 6 cm, iar arcul conține:  
a)  $60^\circ$ ; b)  $90^\circ$ ; c)  $120^\circ$ ; d)  $150^\circ$ .
- 724.** Dintr-o foaie pătrată de tablă au decupat un cerc cu cea mai mare arie posibilă. Câte procente din foaie constituie deșeurile?

**B**

- 725.** Aflați ariile figurilor vopsite (fig.229-231).

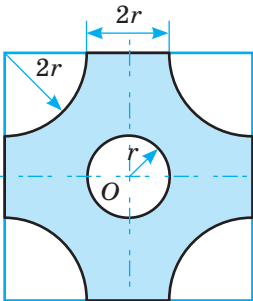


Fig.229

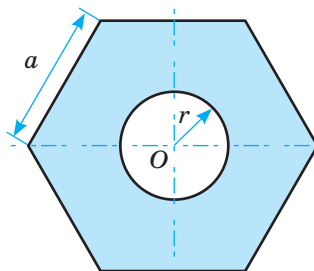


Fig.230

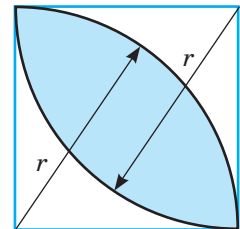


Fig.231

- 726.** Suma catetelor triunghiului dreptunghic este cu 10 cm mai mare decât ipotenuza. Aflați aria cercului, înscris în acest triunghi.

727. Pe laturile triunghiului dreptunghic, ca pe diametre, sunt construite trei semicercuri. Demonstrați că aria celui mai mare din ei este egală cu suma ariilor celorlalți doi.
728. Latura hexagonului regulat este egală cu 3 cm. Aflați ariile cercurilor: înscris în acest hexagon și circumscris lui.
729. Aria cercului circumscris triunghiului isoscel, este egală cu  $100\pi$  cm<sup>2</sup>. Aflați aria cercului, înscris în acest triunghi, dacă înălțimea, coborâtă pe bază este egală cu 18 cm.
730. Aria cercului, înscris într-un trapez dreptunghic, este egală cu  $144\pi$  cm<sup>2</sup>. Aflați aria trapezului, dacă baza mare a lui este de 36 cm.
731. Laturile unui triunghi sunt egale cu 13 cm, 14 cm și 15 cm. Aflați aria inelului format de circumferințele înscrisă și circumscrisă triunghiului.
732. Unui poligon regulat cu  $n$  laturi îi este circumscrisă o circumferință și tot lui îi e înscrisă o circumferință. Latura poligonului este  $a$ . Demonstrați că aria inelului, mărginit de aceste circumferințe nu depinde de numărul  $n$ .
733. Stabiliți corespondența dintre figurile vopsite (1-4), reprezentate în figura 232 și ariile lor (A-E).

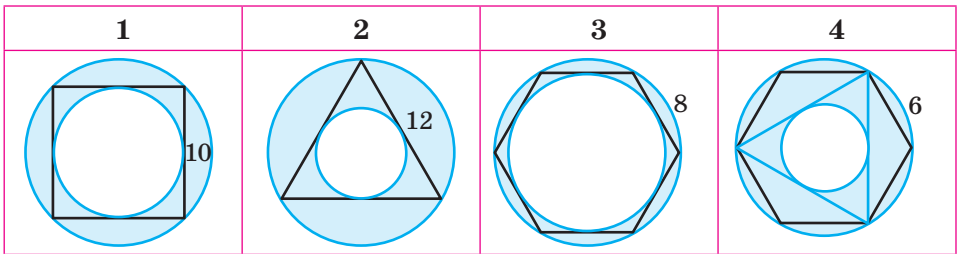


Fig. 232

A	B	C	D	E
$36\pi$	$27\pi$	$25\pi$	$16\pi$	$9\pi$

734. Într-un sector de cerc cu unghiul de  $60^\circ$  este înscris în cerc (fig. 233). Aflați raportul ariei sectorului către aria cercului înscris.
735. Aflați aria cercului, înscris într-un segment de cerc de raza  $R$ , a cărui arc are  $120^\circ$  (fig. 234).

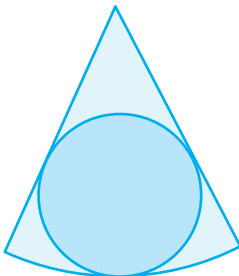


Fig.233

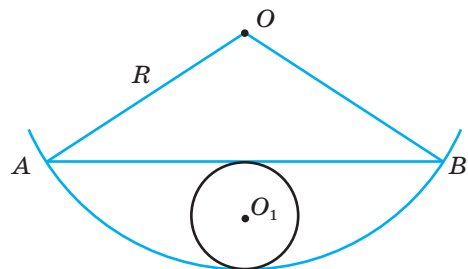


Fig.234



- 736.** Aflați raza cercului, dacă aria sectorului acestui cerc este egală cu  $20\pi \text{ cm}^2$ , iar unghiul la centru corespunzător este egal cu  $72^\circ$ .
- 737.** Coarda cu lungimea de  $9\sqrt{3}$  cm împarte cercul cu diametrul de 18 cm în două segmente. Aflați ariile acestor segmente.
- 738.** În cercul de raza  $R$  sunt duse două coarde paralele, fiecare din ele subîntinde un arc de  $60^\circ$ . Aflați aria acelei părți a cercului care este situată între coarde.
- 739.** Aflați aria părții comune a cercului cu diametrul  $AB$  și a triunghiului  $ABC$ , dacă:  $AB = BC = CA = a$ .

### ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

- 740.** Desenați două circumferințe concentrice de raze  $R$  și  $r$ , iar coarda  $AB$  a celei mai mari din ele să fie tangentă la cea mai mică (fig. 235). Comparați aria inelului, mărginit de aceste circumferințe cu aria cercului ce are diametrul  $AB$ . Cercetați dacă oare totdeauna aceste arii sunt egale.

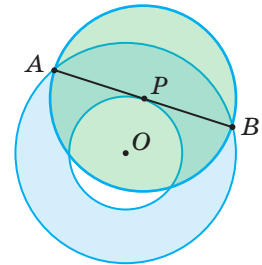


Fig.235

### PROBLEME PENTRU REPETARE

- 741.** Aflați lungimea circumferinței circumscrise triunghiului dreptunghic isoscel cu cateta  $a$ .
- 742.** Bisectoarea unghiului ascuțit a triunghiului dreptunghic împarte cateta în segmentele de 10 cm și 26 cm. Aflați lungimea circumferinței, înscrise în triunghi.
- 743.** Razele trapezului isoscel sunt proporționale cu numerele 4 și 9, iar perimetrul este egal cu 52 cm. Aflați lungimea circumferinței, înscrise în trapez.
- 744.** Aflați cel mai mare unghi al triunghiului cu laturile de 9 cm, 15 cm, 21 cm.

### GEOMETRIA DIN JURUL NOSTRU



Cercul în viața de toate zilele și în artă

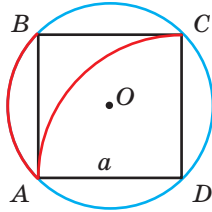
## PROBLEME CU DESENE GATA

**A**

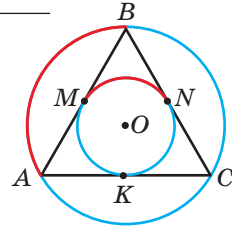
**B**

*Aflați lungimea arcului*

- 1  $ABCD$  — pătrat  
 $AD = a$   
 $AB; AC$

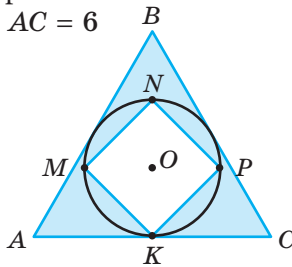


- $AB = BC = AC = a$   
 $AB; MN$

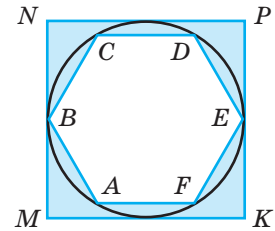


*Aflați ariile figurilor vopsite*

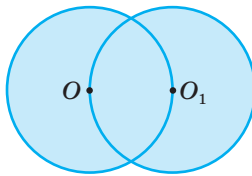
- 2  $MNP$  — pătrat  
 $AB = BC = AC = 6$



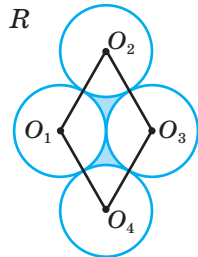
- $ABCDEF$  — hexagon regulat,  
 $MNP$  — pătrat,  
 $MN = 8$



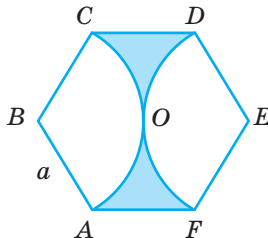
- 3  $OO_1 = 8$



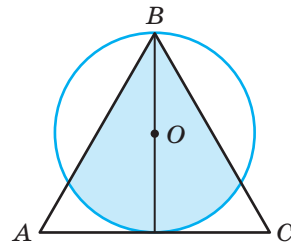
- $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R$



- 4  $ABCDEF$  — hexagon regulat  
 $AB = a$



- $AB = BC = AC = 12$



## LUCRAREA INDEPENDENTĂ 4

### VARIANTA 1

- 1°. Aflați măsura în grade a unghiurilor interior și de la centru ale dodecagonului regulat.
- 2°. Latura hexagonului regulat este egală cu 8 cm. Aflați lungimea circumferinței și aria cercului, înscris în hexagon.
- 3°. În circumferință este înscris un pătrat cu perimetrul de 24 cm. Aflați perimetrul triunghiului regulat, circumscris acestei circumferințe.

### VARIANTA 2

- 1°. Aflați măsura în grade a unghiurilor interior și de la centru ale nonadecagonului regulat.
- 2°. Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu 18 cm și 24 cm. Aflați lungimea circumferinței și aria cercului, circumscris triunghiului.
- 3°. Într-o circumferință este înscris un hexagon regulat cu perimetrul de 36 cm. Aflați perimetrul triunghiului regulat, circumscris acestei circumferințe.

### VARIANTA 3

- 1°. Aflați măsura în grade a unghiurilor interior și de la centru ale decagonului regulat.
- 2°. Diagonala și latura laterală ale unui trapez isoscel sunt perpendiculare și egale cu 24 cm și 10 cm. Aflați lungimea circumferinței și aria cercului, circumscrise acestui trapez.
- 3°. Într-o circumferință este înscris un triunghi echilateral cu perimetrul 12 cm. Aflați perimetrul pătratului, circumscris acestei circumferințe.

### VARIANTA 4

- 1°. Aflați măsura în grade a unghiurilor interior și de la centru ale unui octadecagon regulat.
- 2°. Laturile dreptunghiului sunt egale cu 7 cm și 24 cm. Aflați lungimea circumferinței și aria cercului, circumscrise dreptunghiului.
- 3°. Perimetrul triunghiului regulat, circumscris circumferinței, este egal cu 36 cm. Aflați perimetrul hexagonului regulat, înscris în această circumferință.

## ÎNSĂRCINĂRI TESTE 4

1	Lungimea circumferinței de raza 6 cm este egală cu:	a) $3\pi$ cm; b) $6\pi$ cm;	c) $12\pi$ cm; d) $36\pi$ cm.
2	Unghiul hexagonului regulat este egal cu:	a) $110^\circ$ ; b) $120^\circ$ ;	c) $135^\circ$ ; d) $150^\circ$ .
3	Unghiul la centru al octagonului regulat este egal cu:	a) $60^\circ$ ; b) $40^\circ$ ;	c) $45^\circ$ ; d) $72^\circ$ .
4	$R$ și $r$ – razele circumferințelor circumscrise și înscrise în un triunghi regulat. Ce semn trebuie de pus în loc de *: $R * 2r$ ?	a) $>$ ; b) $<$ ;	c) $=$ ; d) nu se poate stabili.
5	Aria semicercului cu diametrul de 10 cm este egală cu:	a) $25\pi$ cm <sup>2</sup> ; b) $100\pi$ cm <sup>2</sup> ;	c) $12,5\pi$ cm <sup>2</sup> ; d) $50\pi$ cm <sup>2</sup> .
6	Latura pătratului, circumscris circumferinței de lungimea $16\pi$ , este egală cu:	a) 16 cm; b) 8 cm;	c) 4 cm; d) $4\sqrt{2}$ cm.
7	Triunghiul regulat $ABC$ este înscris în circumferință. Aflați lungimea circumferinței, dacă lungimea arcului $BAC$ este egală cu 6 cm.	a) $12\pi$ cm; b) 12 cm;	c) 9 cm; d) $4\sqrt{3}\pi$ cm.
8	Aflați aria sectorului de cerc de raza 6 cu unghiul la centru de $60^\circ$ .	a) $6\pi$ cm <sup>2</sup> ; b) $36\pi$ cm <sup>2</sup> ;	c) $9\pi$ cm <sup>2</sup> ; d) $2\pi$ cm <sup>2</sup> .
9	Aria cercului este egală cu $100\pi$ cm <sup>2</sup> . Aflați lungimea circumferinței lui.	a) $100\pi$ cm; b) $50\pi$ cm;	c) $20\pi$ cm; d) $2500\pi$ cm.
10	Perimetrul hexagonului regulat este egal cu 48 cm. Aflați lungimea circumferinței circumscrise lui.	a) $16\pi$ cm; b) $96\pi$ cm;	c) 8 cm; d) $12\pi$ cm.

## PROBLEME TIPICE PENTRU LUCRAREA DE CONTROL

- 1°. Aflați unghiul interior al decagonului regulat.
- 2°. Aflați aria sectorului, a cărui rază este egală cu 9 cm, iar unghiul la centru —  $80^\circ$ .
- 3°. Raza circumferinței, înscrise în pătrat este egală cu 10 cm. Aflați raza circumferinței, circumscrise acestui pătrat.
- 4°. Aria inelului, format de două circumferințe concentrice, este egală cu  $32\pi \text{ cm}^2$ . Aflați razele acestor circumferințe, dacă una din ele este de 3 ori mai mare decât cealaltă.

- 5°. Aflați perimetrul poligonului regulat, a cărui latură este egală cu 5 cm, iar unghiul cu —  $156^\circ$ .
- 6°. Latura triunghiului regulat, înscris într-o circumferință este egală cu 12 cm. Aflați latura hexagonului regulat, circumscris acestei circumferințe.
- 7°. În triunghiul regulat  $ABC$  este înscrisă o semicircumferință cu centrul pe latura  $AC$  (fig.236), care este tangentă la laturile  $AC$  și  $BC$  în punctele  $M$  și  $N$  corespunzător. Aflați lungimile arcelor  $PM$ ,  $MN$ ,  $NK$ , dacă  $PK = 4 \text{ cm}$ .

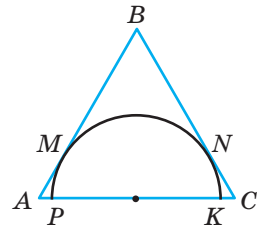


Fig.236

- 8°. Latura laterală și baza triunghiului isoscel sunt proporționale corespunzător cu numerele 13 și 10, iar înălțimea, coborâtă pe bază, este egală cu 24 cm. Aflați raportul ariei cercului, înscris în triunghi, către aria cercului, circumscris acestui triunghi.

- 9°. Demonstrați că mijlocurile laturilor decagonului regulat sunt vârfurile ale altui decagon regulat.
- 10°. În sectorul de cerc de rază  $R$  cu unghiul la centru de  $60^\circ$  sunt înscrise două circumferințe, care sunt tangente una cu alta, și au razele care mărginesc sectorul (fig. 237). Aflați raportul lungimilor acestor circumferințe, dacă raza uneia din ele este cu 4 cm mai mare decât raza celeilalte. Cu ce este egală  $R$ ?

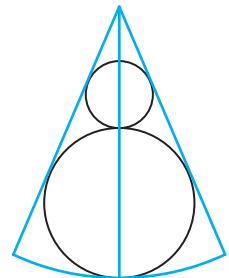


Fig.237

*Lumea reală – cea mai bună lume  
G. Leibniz*

# Principalul în capitolul 4

**Poligonul** se numește **regulat**, dacă el este convex, ale lui toate laturi sunt egale, toate unghiurile sunt egale. Dacă poligonul este regulat, atunci i se poate circumscrie o circumferință și i se poate înscrie o circumferință. Centrele acestor circumferințe este unul și același punct – **centrul poligonului regulat**. Perpendiculara, coborâtă din centrul poligonului regulat pe latura lui, – **apotema** poligonului dat.

Pentru a calcula unghiurile referitoare la poligonul regulat cu  $n$  laturi, se aplică formulele:

Unghiul interior	Unghiul exterior	Unghiul la centru
$\frac{180^\circ(n-2)}{n}$	$\frac{360^\circ}{n}$	$\frac{360^\circ}{n}$

Pentru a construi un poligon regulat cu  $n$  laturi, se poate diviza circumferința în  $n$  părți egale și punctele succesive de divizare de le unit cu segmente.

Latura  $a_n$  a poligonului regulat cu  $n$  laturi se exprimă prin raza  $R$  a circumferinței circumscrie și raza  $r$  a circumferinței înscrise prin formulele:

$$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n} \quad \text{și} \quad a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

În particular,

$$a_3 = R\sqrt{3}, \quad a_4 = R\sqrt{2}, \quad a_6 = R \quad \text{și} \quad a_3 = 2\sqrt{3}r, \quad a_4 = 2r, \quad a_6 = r.$$

Latura hexagonului regulat este egală cu raza circumferinței circumscrie.

Pentru poligonul regulat cu  $n$  laturi cu latura a raza circumferinței circumscrie ( $R$ ) și raza circumferinței înscrise ( $r$ ) se calculează conform formulelor.

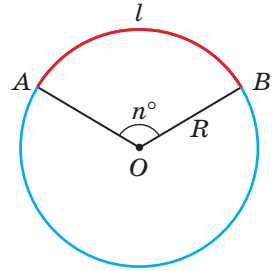
$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}} \quad \text{și} \quad r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}.$$

În particular pentru  $n = 3, 4, 6$  aceste și alte mărimi se calculează cu formulele:

	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
$R$	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$a$
$r$	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
$P$	$3a$	$4a$	$6a$
$S$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$a^2$	$\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$

Raportul lungimii circumferinței către diametrul ei este egal cu numărul constant  $\pi \approx 3,14$ . De aceea lungimea  $C$  a circumferinței de rază  $R$  se poate determina cu formula  $C = 2\pi R$ . Lungimea  $l$  a arcului unei circumferințe de rază  $R$ , care are  $n$  grade, se poate determina cu formula

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$



Porțiunea panului, mărginită de circumferință este **cerc**. **Centru, rază, diametru, coardă a cercului** sunt numite corespunzător centrul, raza, diametrul, coarda circumferinței, care mărginește cercul dat.

Aria  $S$  a cercului de rază  $R$  se calculează cu formula

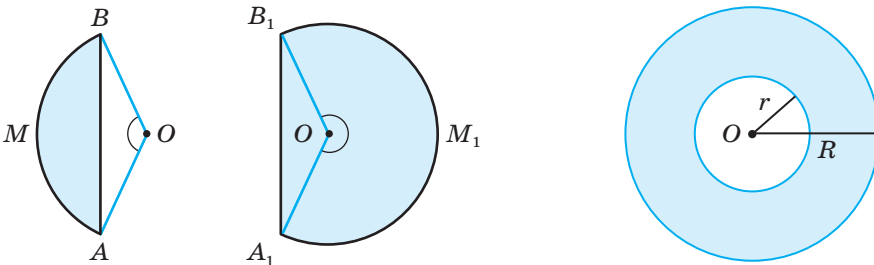
$$S = \pi R^2.$$

Porțiunea cercului mărginită de două raze ale lui se numește **sector**, iar partea cercului, mărginită de coarda și arc lui, – **segment**. Segmentul poate fi mai mic sau mai mare decât semicercul.

Dacă sectorul cercului de rază  $R$  are  $n$  grade, atunci aria lui se calculează cu formula

$$S_{\text{sec}} = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$

Pentru a afla **aria segmentului** de cerc  $AMB$  trebuie de scăzut din aria sectorului corespunzător aria triunghiului  $OAB$ , dacă unghiul sectorului  $\alpha < 180^\circ$ , și de adunat aria triunghiului  $OAB$ , dacă  $\alpha > 180^\circ$ . Sectorul cu unghiul de  $180^\circ$  este **semicerc**, aria lui este egală cu jumătate din aria cercului corespunzător.



Porțiune a cercului este de asemenea **inelul**, mărginit de două circumferințe concentrice. Dacă razele circumferințelor, care mărginesc inelul sunt egale cu  $R$  și  $r$ , atunci aria inelului

$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R^2 - r^2).$$



*Modelul geometric, din punctul de vedere intuitiv, este foarte instructiv și interesant.*

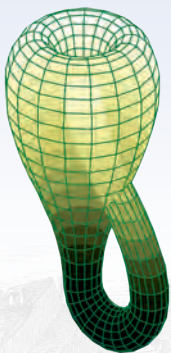
*Lucrul constructiv al matematicianului, care pentru prima dată a descoperit o teoremă, este cel puțin tot atât de valoros, ca și lucrul deductiv al celui, care primul a demonstrat-o.*



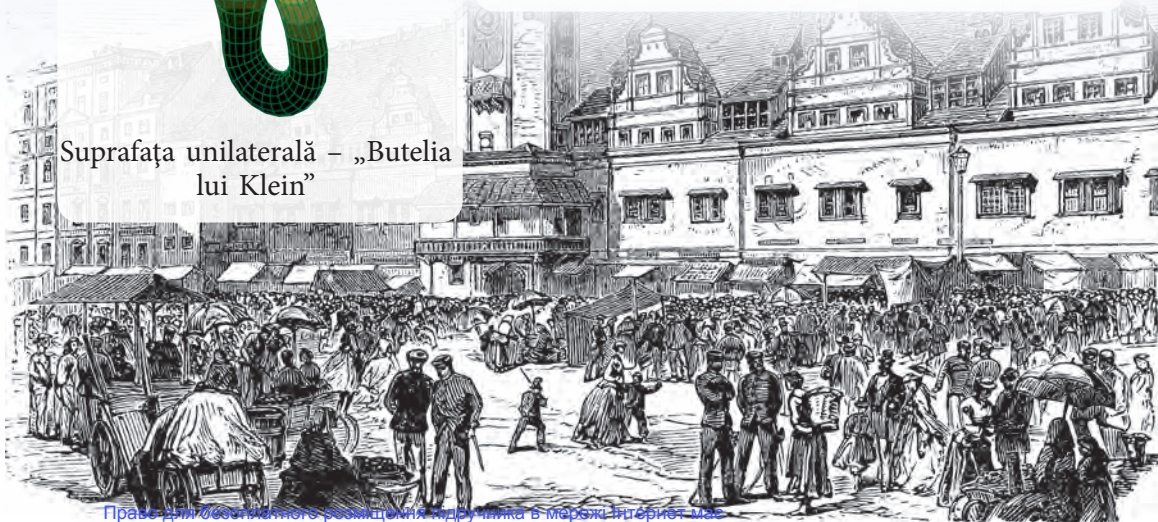
## FELIX CRESTIAN KLEIN

(1849–1925)

Ilustrul matematician, istoric al matematicii și pedagog german. Principalele lucrări ale lui se referă la geometrie, teoria ecuațiilor algebrice, teoria grupelor, teoria funcțiilor, topologie. Lucrarea lui „Examinarea comparativă a noilor cercetări geometrice”, cunoscută sub denumirea „Programa Erlanghen”, în care se dădea clasificarea diferitelor geometrii pe baza grupelor de transformări, a exercitat o mare înrâurire asupra matematicienilor, a schimbat esențial părerile lor despre geometrie și a dezvoltării ulterioare a matematicii. Primul președinte al Comisiei Internaționale în chestiunile învățământului matematic, reformator al învățământului matematic școlar.



Suprafața unilaterală – „Butelia lui Klein”





# Capitolul 5

## Transformări geometrice

# Section 5

## Geometric Transformations

**Transformările geometrice** – unul din cele mai importante capitole ale geometriei actuale. În geometrie ele joacă aproximativ tot așa un rol ca funcțiile în algebră. Pe baza transformărilor geometrice sunt demonstrate afirmații complicate din diferite compartimente ale matematicii și rezolvate probleme, care prin alte metode este foarte dificil de le rezolvat sau deloc este imposibilă rezolvarea lor.

Transformările geometrice sunt folosite nu numai de geometri, dar și de specialiștii altor ramuri: arhitecți, constructori, maeștrii artei aplicate.

<b>§ 21</b>	<b>Mișcarea și proprietățile ei</b>	<b>Movement and Its Properties</b>
-------------	-------------------------------------	------------------------------------

<b>§ 22</b>	<b>Simeria în raport cu un punct</b>	<b>Symmetry about Point</b>
-------------	--------------------------------------	-----------------------------

<b>§ 23</b>	<b>Simeria în raport cu o dreaptă</b>	<b>Symmetry about Line</b>
-------------	---------------------------------------	----------------------------

<b>§ 24</b>	<b>Rotația</b>	<b>Turn</b>
-------------	----------------	-------------

<b>§ 25</b>	<b>Transport paralel</b>	<b>Parallel Translation</b>
-------------	--------------------------	-----------------------------

<b>§ 26</b>	<b>Transformarea de asemănare</b>	<b>Similarity Transformation</b>
-------------	-----------------------------------	----------------------------------

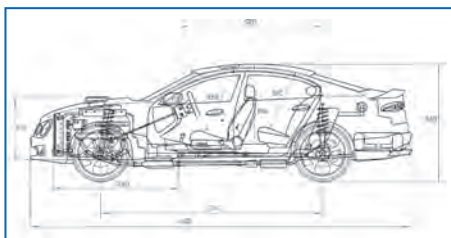
**PROIECT DE ÎNVĂȚĂMÂNT**  
**"Ornamente și transformările geometrice"**

**EDUCATIONAL PROJECT**  
**"Decorative Patterns and Geometrical Transformations"**

# Pentru ce se studiază transformările geometrice?

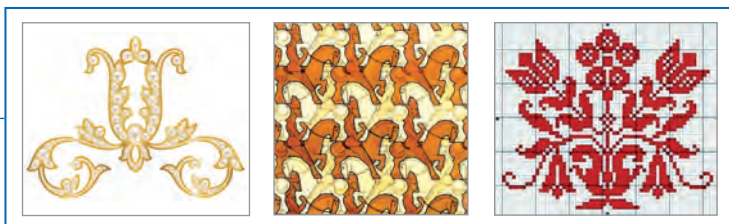
Geometria ajută mai bine de studiat mediul înconjurător să fie examinate nu numai stările (diferite tipuri de figuri, dimensiunile și formele lor), dar și procesele. Pentru aceasta cel mai bine se potrivesc transformările geometrice.

Cine are necesitatea folosirii transformărilor geometrice? Înainte de toate învățații, inginerii, **arhitectorii**, constructorii, pictorii și alții.



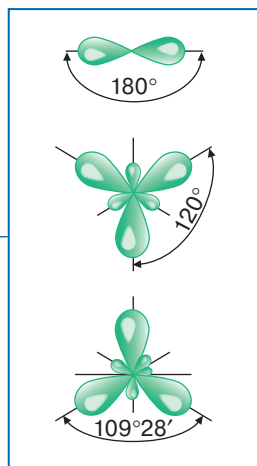
Transformările geometrice – o parte considerabilă a unui limbaj specific, pe care îl folosesc între ei creatorii de idei și muncitorii, inginerii. Înainte de a confecționa un oarecare mecanism **constructorii** elaborează desenul.

Fizicienii, **mecanicii**, **inginerii** și alți specialiști se îndeletnicesc cu figuri asemenea simetrice, în raport cu o dreaptă sau cu un punct. Chiar **bijutierii**, **pictorii** și **brodezele** au treabă cu transformările geometrice.



Transformările geometrice voi le folosiți pentru construirea graficelor și cercetarea proprietăților funcțiilor, pentru studierea diferitelor procese în fizică și **legăturilor de valență în chimie**, pentru caracterizarea organismelor vii în biologie, pentru înfrumusețarea și construirea îmbrăcăminte și altele.

Un rol important transformările geometrice îl joacă în computatoare. Rotirea figurilor cu diferite unghiuri, transportul paralel al lor – totul acestea-s mișcări. Mărirea sau micșorarea figurilor și a caracterelor – exemple de transformări de asemănare.



**Mai unde sunt folosite transformările geometrice?  
Aduceți exemplele voastre.**



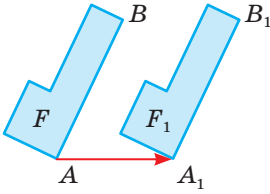


Fig.244

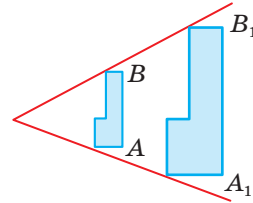


Fig.245

Transformările geometrice, la care se păstrează distanțele dintre puncte se numesc **deplasări** (sau **mișcări**).

În cele ce urmează noi vom considera tipuri separate de deplasări: simetria în raport cu un punct (fig. 241), simetria în raport cu o dreaptă (fig. 242), rotația (fig.243) și translația (transport paralel) (fig. 244). Inițial vom atrage atenția la proprietățile generale ale mișcărilor. Să ne amintim, că punctul  $B$  este situat între punctele  $A$  și  $C$  atunci și numai atunci, când  $B$  – punct interior al segmentului  $AC$ , adică când se îndeplinește egalitatea  $AB + BC = AC$ .

## TEOREMA 12

**Dacă punctul  $B$  este situat între punctele  $A$  și  $C$ , iar mișcarea le aplică pe ele corespunzător în punctele  $B_1, A_1$  și  $C_1$ , atunci  $B_1$  este situat între  $A_1$  și  $C_1$ .**

### DEMONSTRAȚIE.

Dacă punctul  $B$  este situat între punctele  $A$  și  $C$ , atunci  $AB + BC = AC$  (fig.246). La translație distanțele dintre puncte se păstrează:  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$ ,  $AC = A_1C_1$ . Înlocuind aceste valori în egalitatea  $AB + BC = AC$ , obținem:  $A_1B_1 + B_1C_1 = A_1C_1$ . Iar aceasta și înseamnă că punctul  $B_1$  se află între  $A_1$  și  $C_1$ .  $\square$

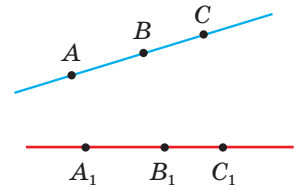


Fig.246

## TEOREMA 13

**Mișcarea aplică segmentul pe un segment egal cu el.**

### DEMONSTRAȚIE.

Fie  $AC$  — segment, iar  $B$  — a lui punct interior arbitrar (fig.247). Să considerăm o mișcare arbitrară. În virtutea teoremei 12 fiecare mișcare trece punctele  $A, C$  și  $B$  în astfel de puncte  $A_1, C_1$  și  $B_1$ , că punctul  $B_1$  este situat între punctele  $A_1$  și  $C_1$ . Așadar, această mișcare fiecare punct al segmentului  $AC$  îl transferă într-un oarecare punct al segmentului  $A_1C_1$ .

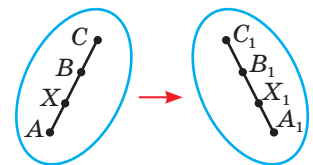


Fig.247

Să mai considerăm un punct arbitrar  $X_1$  al segmentului  $A_1C_1$ . Depunem pe  $AC$  segmentul  $AX$  egal cu  $A_1X_1$ . Deoarece la mișcare distanțele dintre puncte se păstrează, reiese că punctul  $X$  al segmentului  $AC$  se aplică pe punctul  $X_1$  al segmentului  $A_1C_1$ .

Așadar, fiecare punct al segmentului  $AC$  la mișcare se aplică pe un oarecare punct al segmentului  $A_1C_1$ , și totodată la această mișcare fiecare punct al segmentului  $A_1C_1$  este obținut dintr-un oarecare punct al segmentului  $AC$ . Aceasta și înseamnă că mișcarea aplică segmentul  $AC$  pe segmentul  $A_1C_1$ . Totodată  $A_1C_1 = AC$ .  $\square$

Din cele două teoreme anterioare rezultă, că mișcarea transferă: dreapta în dreaptă, semidreapta – în semidreaptă, unghiul – în unghiul egal lui, triunghiul – în triunghiul egal cu el.

Aplicând noțiunea de mișcare se poate introduce noțiunea generală de egalitate a figurilor geometrice arbitrare.

**Două figuri se numesc egale, dacă ele se aplică una în alta cu o mișcare.**

Din această definiție reiese:

1) **dacă figura  $F$  este egală cu figura  $F_1$ , atunci și  $F_1$  este egală cu  $F$ ;**

2) **dacă figura  $F$  este egală cu figura  $F_1$ , iar  $F_1$  este egală cu figura  $F_2$ , atunci  $F$  este egală cu  $F_2$ .**

Definițiile egalității segmentelor, unghiurilor și triunghiurilor, cunoscute vouă din clasele anterioare, nu contrazic definițiile generale noi ale egalității figurilor.

Din raționamentele premergătoare rezultă următoarele afirmații:

1) **orice mișcare transferă o figură oarecare într-o figură egală cu ea;**

2) **dacă două figuri geometrice sunt egale, atunci există o mișcare care aplică o figură în alta.**

## PENTRU CEI CURIOSI

Imaginați-vă că fiecare punct al circumferinței  $w$  a fost proiectat pe dreapta  $a$  (fig.248). În consecința s-a format segmentul  $AB$ . Oare poate fi considerată așa o aplicare a circumferinței pe segmentul  $AB$  transformare geometrică a circumferinței date? Nu, deoarece la o astfel de aplicare două puncte diferite  $K$  și  $P$  ale circumferinței s-au transferat într-un singur punct  $T$  al segmentului.

Transformare geometrică a figurii  $F$  în  $F_1$  se numește o astfel de aplicare, la care:

1) **fiecărui punct al figurii  $F$  îi corespunde un singur punct al figurii  $F_1$ ;**

2) **fiecare punct al figurii  $F_1$  este imaginea unui oarecare punct al figurii  $F$ ;**

3) **punctelor diferite ale figurii  $F$  le corespund diferite puncte ale figurii  $F_1$ .**

**Mișcarea figurii pe plan se poate imagina ca schimbarea poziției acestei figuri pe plan, dar mai bine – în formă de mișcare a întregului plan în același timp cu figura din el.**

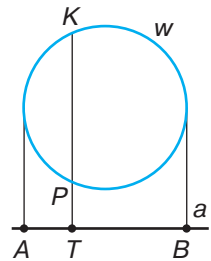


Fig.248

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Care transformări geometrice se numesc mișcări?
2. În ce figură trece mișcarea:
  - a) segmentul; b) dreapta; c) unghiul; d) triunghiul?
3. Formulați definiția generală a egalității a două figuri.
4. Ce proprietăți au figurile egale?

## EFFECTUĂM ÎMPREUNĂ

**1** Demonstrați că mișcarea trece unghiul într-un unghi, egal cu el.

- Fie că este dat unghiul  $ABC$  (fig. 249). Unim cu un segment două puncte arbitrare  $A$  și  $C$  ale laturilor lui, obținem  $\triangle ABC$ . Acest triunghi este aplicat la mișcare în  $\triangle A_1B_1C_1$ , care este egal cu  $\triangle ABC$  (deoarece  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$ ,  $BC = B_1C_1$ ), iar unghiul dat  $ABC$  — în unghiul  $A_1B_1C_1$ . Deoarece unghiurile corespunzătoare ale triunghiurilor egale sunt egale, rezultă că  $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$ . Dar aceasta și trebuia de demonstrat.

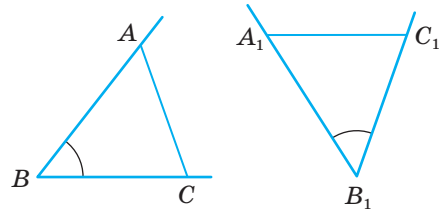


Fig.249

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

745. Oare corect exprimă corelația dintre mișcări și transformările geometrice diagrama, reprezentată în figura 250?
746. Câte există puncte care sunt situate între punctele  $A$  și  $B$ ?
747. Oare este adevărat că orice transformare geometrică aplică segment pe segment?
748. Oare este adevărată că orice mișcare aplică segmentul pe un segment?
749. Oare poate transformarea geometrică să aplice segmentul cu lungimea de 2 cm într-un segment cu lungimea de 3 cm?
750. Oare poate mișcarea aplica segmentul într-un segment neegal cu el?
751. Poate oare mișcarea aplica circumferința pe cerc? Dar cercul – pe circumferință?
752. Oare poate mișcarea aplica triunghiul isoscel în triunghiul echilateral?

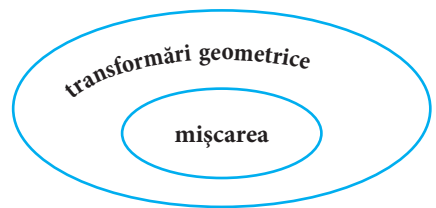


Fig.250

- 753.** Oare există mișcare care aplică triunghiul în patrulater? Dar patrulaterul – în triunghi?  
**754.** Oare sunt egale figurile reprezentate în figura 251?



Fig.251

**A**

- 755.** Sunt date segmentele  $AB = 3$  cm,  $CP = 5$  cm și  $KM = 5$  cm. Demonstrați că există mișcare care trece segmentul  $KM$  în  $CP$ , și nu există mișcare care trece  $CP$  în  $AB$ .
- 756.** Triunghiul  $ABC$  — echilateral. Oare există mișcare care aplică segmentul  $AB$  în segmentul  $AC$ , unghiul  $A$  în unghiul  $B$ ? Argumentați răspunsul.
- 757.** Demonstrați că mișcarea aplică triunghiul în triunghi egal cu el.
- 758.** Aflați unghiurile triunghiului, dacă există mișcare, care aplică triunghiul, unul din unghiurile căruia este egal cu  $30^\circ$ , într-un triunghi, unul din unghiurile căruia este egal cu  $50^\circ$ .
- 759.** Într-un triunghi este unghi de  $100^\circ$ , iar în altul – unghi de  $120^\circ$ . Oare există mișcare care aplică un triunghi în altul? Oare pot să fie egale aceste triunghiuri?
- 760.** Stabiliți tipul triunghiului, dacă există mișcare, care aplică fiecare latură a triunghiului pe altă latură a lui.
- 761.** Se dă un triunghi dreptunghic isoscel. Demonstrați că există mișcare care aplică o catetă în alta. Oare există mișcare care aplică cateta în ipotenuză?
- 762.** Stabiliți tipul patrulaterului, dacă există mișcare, care aplică fiecare latură a lui pe altă latură.
- 763.** Măsurile în grade a două arce sunt egale. Oare pot să nu fie egale lungimile lor? Oare există totdeauna mișcare, care aplică unul din aceste arce pe altul?
- 764.** Perimetrul pătratului este egal cu 28 cm. Oare există mișcare care aplică pătratului dat în:
- pătrat cu aria de  $49$  m<sup>2</sup>;
  - dreptunghi cu perimetrul de 28 cm;
  - pătrat, circumscris circumferinței de raza 3,5 cm;
  - romb cu diagonalele 4 cm și  $2\sqrt{3}$  cm?
- 765.** Mișcarea trece linia frântă  $ABC$  în linia frântă  $KPT$  (fig. 252). Construiți punctele, în care trec la această mișcare punctele  $X$  și  $Y$ .

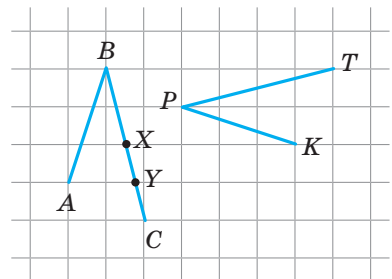


Fig.252

## B

- 766.** Demonstrați că mișcarea trece circumferința în circumferință.
- 767.** Demonstrați că mișcarea trece dreptele paralele în drepte paralele.
- 768.** Mișcarea trece  $\triangle ABC$  în  $\triangle KPT$ . Demonstrați că această mișcare trece:
- medianele primului triunghi în medianele celuiilalt;
  - bisectoarele primului triunghi în bisectoarea celuiilalt;
  - înălțimile primului triunghi în înălțimile triunghiului al doilea.
- 769.** La mișcare punctul  $O$  trece în punctul  $O_1(-4; 5)$ . Scrieți ecuația circumferinței cu centrul în punctul  $O_1$ , dacă  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 17$  este ecuația circumferinței cu centrul în  $O$ .
- 770. Problemă deschisă.** Mișcarea trece circumferința ... în circumferința cu centrul în punctul ... . Aflați ... .
- 771.** Sunt date punctele  $A(-3; 2)$ ,  $B(1; 4)$ ,  $C(-5; -1)$ ,  $D(-1; -3)$ . Demonstrați că:
- există mișcare care trece segmentul  $AB$  în segmentul  $CD$ ;
  - nu există mișcare care să treacă segmentul  $AC$  în segmentul  $BD$ .
- 772.** Rombul  $ABCD$  cu perimetrul 20 cm și unghiul  $60^\circ$  este trecut de o mișcare oarecare în patrulaterul  $MNPK$ . Aflați diagonalele și aria acestui patrulater.
- 773.** La mișcare  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) cu catetele 5 cm și 12 cm trece în  $\triangle KMN$ . Aflați sinusurile unghiurilor  $\triangle KMN$ .
- 774.** Dacă diagonalele unui romb sunt egale cu diagonalele altui romb, atunci astfel de romburile sunt egale. Demonstrați.
- 775.** Dacă diagonala și latura unui dreptunghi sunt egale corespunzător cu diagonala și latura altuia, atunci așa dreptunghiuri sunt egale. Demonstrați.
- 776.** Formulați și demonstrați un criteriu oarecare de egalitate a paralelogramelor.

## ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

- 777.** a) Copiați în caiet figura 253 și construiți figura în care trece circumferința dată în urma mișcării, care aplică  $\triangle ABC$  în  $\triangle KPT$ .
- b) Copiați în caiete figura 254. Reprezentați figura în care trece circumferința în urma mișcării, care aplică linia frântă  $ABC$  în linia frântă  $KPT$ .



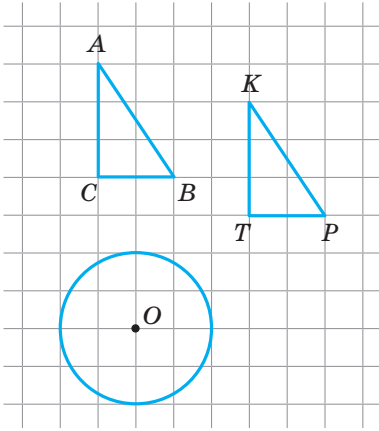


Fig.253

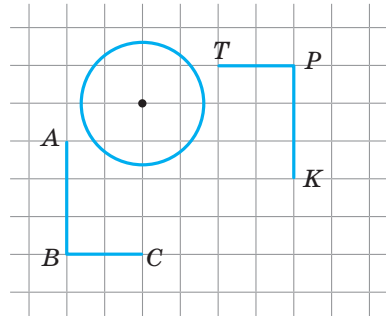


Fig.254

**PROBLEME PENTRU REPETARE**

- 778. Sinusul unuia din unghiurile triunghiului dreptunghic este egal cu 0,4. Aflați sinusurile altor două unghiuri ale triunghiului.
- 779. Prin extremitatea diametrului unei circumferințe este dusă coarda care este de două ori mai scurtă decât diametrul. Aflați unghiul format de coardă și diametru.
- 780. Dreptele  $a$  și  $c$  se intersectează și fac unghiul  $\alpha$ . Ce unghi formează dreptele  $x$  și  $y$  la intersecție, dacă:
  - a)  $a \parallel x$  și  $c \parallel y$ ; b)  $a \perp x$  și  $c \perp y$ ?
- 781. Aflați unghiurile triunghiului dacă două unghiuri exterioare ale lui sunt egale cu  $100^\circ$  și  $120^\circ$ .

**GEOMETRIA DIN JURUL NOSTRU**



Iată așa mișcări diferite

# § 22

## Симетрия в отношении точки

Точки  $X$  и  $X_1$  называются **симметричными относительно точки  $O$** , если  $O$  является серединой отрезка  $XX_1$  (рис. 225). Если в отношении точки  $O$  каждой точке фигуры  $F$  симметрична некоторая точка фигуры  $F_1$ , и наоборот, тогда фигуры  $F$  и  $F_1$  симметричны относительно точки  $O$  (рис. 226). Таким образом, отображение фигуры  $F$  в фигуру  $F_1$  называется **отображением симметрии относительно точки  $O$** .



Fig.255

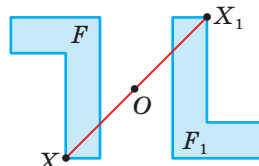


Fig.256

### ТЕОРЕМА 14

Симметрия относительно точки — движение.

### ДЕМОНСТРАЦИЯ.

Предположим, что симметрия относительно точки  $O$  переносит произвольные точки  $A$  и  $B$  фигуры  $F$  в точки  $A_1$  и  $B_1$  фигуры  $F_1$  (рис. 257). Мы докажем, что  $AB = A_1B_1$ .

Точка  $O$  — середина отрезков  $AA_1$  и  $BB_1$ , поэтому  $OA = OA_1$  и  $OB = OB_1$ .

Если точки  $A$ ,  $B$  и  $O$  не лежат на одной прямой, тогда углы  $AOB$  и  $A_1OB_1$  равны, поскольку они вертикальные. По двум сторонам и углу между ними равны треугольники  $ABO$  и  $A_1B_1O$ , поэтому  $AB = A_1B_1$ .

Если точка  $B$ , например, находится между  $A$  и  $O$  (рис. 258), тогда  $AB = OA - OB = OA_1 - OB_1 = A_1B_1$ .

Если точка  $O$  находится между  $A$  и  $B$  (рис. 259), тогда  $AB = OA + OB = OA_1 + OB_1 = A_1B_1$ .

Итак, если точки  $A$  и  $B$  симметричны относительно точки  $O$ , а точки  $A_1$  и  $B_1$  симметричны относительно точки  $O$ , то всегда  $AB = A_1B_1$ . Таким образом, симметрия относительно точки — движение.  $\square$

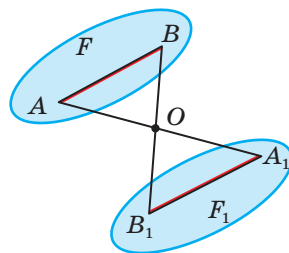


Fig.257



Fig.258



Fig.259

Поскольку симметрия относительно точки — движение, она отображает прямую в прямую, полупрямую — в полупрямую, отрезок — в отрезок равной длины, угол — в равный ему и в общем случае — фигуру в фигуру, равную ей.

Simetria în rapoart cu un punct (sau transformarea de simetrie în raport cu un punct) deseori este numită de asemenea **simetrie centrală**.

Se întâmplă uneori că simetria în raport cu un punct transferă figura  $F$  în sine însăși.

Dacă transformarea de simetrie în raport cu un punct oarecare o transferă figura  $F$  în sine însăși (adică tot în aceeași figură), atunci așa o figură se numește **central simetrică**, iar punctul  $O$  – **centrul ei de simetrie**. De exemplu, fiecare paralelogram este figură central simetrică. Centrul de simetrie al paralelogramului este punctul de intersecție al diagonalelor lui.

Fiecare punct  $X$  al paralelogramului este simetric în raport cu punctul  $O$  unui oarecare punct  $X_1$  al aceluiași paralelogram (fig. 260). De ce? Punctul  $O$  este numit de asemenea **centrul paralelogramului**. Figuri central simetrice sunt: circumferința, pătratul, hexagonul regulat ș.a.

Exemple de figuri central simetrice, care se întâlnesc în natură, tehnică, în viața zilnică, sport sunt reprezentate în figurile 261-263.

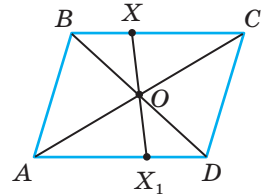


Fig.260



Fig.261



Fig.262



Fig.263

## PENTRU CEI CURIOSI

Să examinăm proprietățile importante ale poligoanelor central simetrice. Dacă poligonul cu  $n$  laturi are centrul de simetrie  $O$ , atunci numărul  $n$  este par, deoarece fiecărui vârf al lui îi corespunde vârful opus simetric în raport cu  $O$ .

### TEOREMA 15

**Laturile opuse ale poligonului central simetric sunt paralele și egale.**

#### DEMONSTRAȚIE.

Fie  $ABC...KPT... —$  poligon central simetric, iar  $O —$  centrul lui de simetrie (fig. 264). Ducem diagonalele  $AK$  și  $BP$ . După două laturi și unghiul făcut de ele rezultă că  $\triangle ABO = \triangle KPO$ . De aceea  $AB = KP$  și  $\angle BAO = \angle PKO$ . Aceste unghiuri sunt alterne interne față de secanta  $AK$  și dreptele  $AB$  și  $KP$ . De aceea  $AB \parallel KP$ .  $\square$

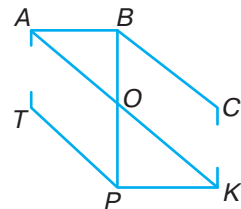


Fig.264



Teorema este adevărată nu numai pentru poligoanele convexe central simetrice, dar și pentru cele neconvexe (fig. 265).

Dacă figurile central simetrice sunt mărginite, atunci ele au numai un sigur centru de simetrie.

Figurile nemărginite pot avea infinit de multe centre de simetrie. De exemplu, curba nemărginită în ambele extremități, reprezentată în figura 266, are infinit de multe centre de simetrie. Unde ele sunt amplasate?

Rețeaua nemărginită din toate părțile constituită din pătrate egale de asemenea are infinit de multe centre de simetrie. Ele sunt: centrele tuturor pătratelor, toate vârfurile și mijlocurile tuturor laturilor ale acestor pătrate (fig. 267).

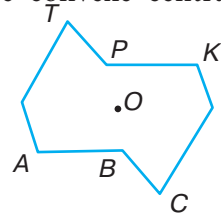


Fig.265



Fig.266

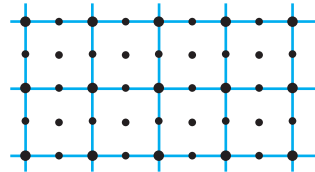


Fig.267

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Care puncte se numesc simetrice în raport cu un punct?
2. Oare este mișcare transformarea de simetrie în raport cu un punct? Demonstrați.
3. Formulați proprietățile simetriei în raport cu un punct.
4. Care figuri se numesc central simetrice?
5. Aduceți exemple de figuri central simetrice.

## EFFECTUĂM ÎMPREUNĂ

1. Construiți triunghiul, simetric  $\triangle ABC$  în raport cu punctul  $O$ , care este situat în afara triunghiului (fig. 268).
- Prin vârfurile  $\triangle ABC$  și punctul  $O$  ducem dreptele  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$  și depunem segmentele  $OA_1 = OA$ ,  $OB_1 = OB$ ,  $OC_1 = OC$ . Unind punctele  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ , obținem  $\triangle A_1B_1C_1$ , simetric  $\triangle ABC$  în raport cu punctul  $O$ .

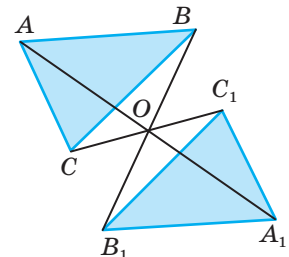


Fig.268

**2** Pe o dreaptă sunt date două segmente egale. Indicați centrul lor de simetrie.



Fig.269

- Fie segmentele egale  $AB$  și  $KP$  situate pe o dreaptă. Sunt posibile diferite cazuri de repartizare a lor (fig. 269), însă totdeauna centrul lor de simetrie punctul  $O$  – împarte în jumătate distanța dintre cele mai îndepărtate puncte ale segmentelor date.

**3** Este dat punctul  $A(a; b)$ . Aflați coordonatele punctului  $B$ , simetric punctului  $A$  în raport cu punctul  $M(m; n)$ .

- Dacă punctul  $B(x; y)$  este simetric cu punctul  $A(a, b)$  în raport cu punctul  $M$ , atunci punctul  $M(m; n)$  – mijlocul segmentului  $AB$ . Deci,

$$\frac{x+a}{2} = m, \quad \frac{b+y}{2} = n, \quad \text{de unde, } x = 2m - a, \quad y = 2n - b.$$

Așadar, avem punctul  $B(2m - a; 2n - b)$ .

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFACTUAȚI ORAL

- 782.** Punctele  $A$  și  $B$  sunt simetrice în raport cu punctul  $M$ . Aflați rapoartele:  
a)  $AM : AB$ ; b)  $AM : MB$ .
- 783.** Pe dreapta de coordonate sunt date punctele  $A(-2)$ ,  $B(-1)$ ,  $O(0)$ ,  $C(1)$ ,  $D(2)$ . Care din aceste puncte sunt simetrice în raport cu altele?
- 784.** Terminați formularea afirmației adevărate: „În raport cu punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului fiecare vârf al lui este simetric cu..., fiecare latură a lui este simetrică cu..., fiecare diagonală a lui este simetrică cu...».
- 785.** Numiți câteva figuri geometrice care au centre de simetrie.
- 786.** Oare există figuri care au infinit de multe centre de simetrie? Aduceți exemple.
- 787.** Câte centre de simetrie au două drepte paralele? Dar două drepte care se intersectează?
- 788.** Oare are centru de simetrie triunghiul sau pentagonul?
- 789.** Oare are centru de simetrie graficul funcției  $y = x^3$ ?

### A

- 790.** Reprezentați două figuri care au centru de simetrie.
- 791.** Sunt date punctele  $A$  și  $O$ . Construiți punctul  $A_1$ , simetric punctului  $A$  în raport cu punctul  $O$ .
- 792.** Se dă segmentul  $AB$  și punctul  $O$ . Construiți segmentul  $A_1B_1$ , simetric segmentului  $AB$  în raport cu punctul  $O$ , dacă: a)  $O \notin AB$ ; b)  $O \in AB$ ; c)  $O$  — mijlocul lui  $AB$ .

- 793.** Construiți figura simetrică cu dreapta  $a$  în raport cu punctul  $O$ , dacă:  
a)  $O \notin a$ ; b)  $O \in a$ .
- 794.** Construiți un triunghi arbitrar și triunghiul, simetric lui în raport cu punctul  $O$ , dacă:  
a)  $O$  e situat în afara triunghiului;  
b)  $O$  este situat pe latura triunghiului;  
c)  $O$  – vârful triunghiului;  
d)  $O$  – punctul de intersecție al medianelor triunghiului.
- 795.** Se dau punctele  $A(2; -3)$ ,  $B(4; 2)$ ,  $C(-3; -3)$ ,  $D(-5; 1)$ . Aflați coordonatele punctelor, simetrice celor date în raport cu:  
a) originea de coordonate;  
b) punctul  $M(1; 1)$ .
- 796.** În raport cu care punct sunt simetrice punctele:  
a)  $A(1; 2)$  și  $B(5; 6)$ ; c)  $E(2; 6)$  și  $C(-8; 3)$ ;  
b)  $M(-1; 0)$  și  $H(3; 6)$ ; d)  $P(9; 0)$  și  $K(6; 8)$ ?
- 797.** Demonstrați că punctele  $A(a; c)$  și  $B(-a; -c)$  sunt simetrice în raport cu originea de coordonate.
- 798.** Se dau două drepte paralele. Construiți locul geometric al centrelor de simetrie ale lor.
- 799.** Se dau două segmente egale și paralele. Construiți centrul lor de simetrie. Demonstrați că punctul construit este centrul de simetrie al segmentelor date.
- 800.** Desenați un pătrat, romb, dreptunghi și paralelogram. Notați cu altă culoare centrele lor de simetrie.
- 801.** Demonstrați că centrul de simetrie al rombului este punctul de intersecție al diagonalelor lui.
- 802.** Demonstrați că două drepte central simetrice sunt paralele.

## B

- 803.** Anexați la triunghiul dat figura simetrică acestui triunghi în raport cu mijlocul uneia din laturile lui.
- 804.** Anexați la trapezul dar figura simetrică acestui trapez în raport cu mijlocul uneia din laturile laterale.
- 805.** Construiți hexagonul central simetric: a) convex; b) neconvex.
- 806.** Două circumferințe de raze egale sunt tangente exterior în punctul  $M$ . Demonstrați că  $M$  – centrul de simetrie al acestor circumferințe.
- 807.** Demonstrați că patrulaterul care are centru de simetrie este paralelogram.
- 808.** Pentru care valori ale lui  $x$  și  $y$  punctele  $M(-1; y)$  și  $N(x; 3)$  sunt simetrice în raport cu punctul  $K(2; -1)$ ?
- 809.** Scrieți ecuația circumferinței care este simetrică circumferinței  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$  în raport cu:  
a) originea de coordonate; b) punctul  $M(3; -2)$ .

- 810.** Stabiliți în raport cu care punct sunt simetrice circumferințele  $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 6$  și  $(x + 7)^2 + (y - 9)^2 = 6$ .
- 811.** Scrieți ecuația dreptei care este simetrică cu dreapta  $2x + y - 6 = 0$  în raport cu:  
a) originea de coordonate; b) punctul  $K(1; 1)$ . Construiți dreptele date și demonstrați că ele sunt paralele.
- 812.**  $x + 2y + 11 = 0$  și  $2x - y + 7 = 0$  sunt ecuațiile dreptelor cărora le aparțin laturile pătratului,  $M(-2; -2)$  – centrul de simetrie al acestui pătrat. Scrieți ecuațiile ale celorlalte două laturi ale lui. Calculați perimetrul și aria pătratului.
- 813.** Se dă  $\angle ABC$  și punctul  $M$  în interiorul lui. Construiți un astfel de segment cu extremitățile pe laturile unghiului, ca punctul  $M$  să fie mijlocul lui.
- 814.** Stabiliți corespondența dintre figurile (1-4) și coordonatele centrului de simetrie al lor (dacă el există).
- |   |             |
|---|-------------|
| 1 Segmentul $AB$ , dacă $A(-1; 3)$ , $B(5; 7)$                              | A (0,5; 4)  |
| 2 Patrulaterul $ABCD$ , dacă $A(-2; 6)$ , $B(0; 4)$ , $C(3; 2)$ , $D(1; 4)$ | B (2; -4)   |
| 3 Triunghiul $ABC$ , dacă $A(-2; 2)$ , $B(3; 3)$ , $C(2; -2)$               | C (0; 0)    |
| 4 Circumferința $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 9$                                 | D nu există |
|   | E (2; 5)    |

- 815.** Copiați în caiet septagonul, reprezentat în figura 270. Isprăviți de construit la el septagonul simetric în raport cu mijlocul laturii:
- $AB$ ;
  - $BC$ ;
  - $CD$ ;
  - $AK$ .

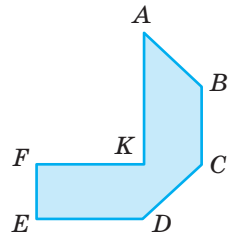


Fig.270

### ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

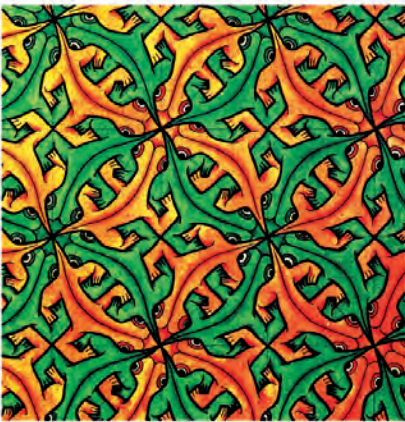
- 816.** 1. Decupați din hârtie colorată două trapeze dreptunghice egale de culori diferite și repartizați-le pe masă astfel, ca să iasă la iveală că ele sunt simetrice în raport cu:
- unul din vârfurile trapezului (4 cazuri);
  - mijlocul uneia din laturi (4 cazuri);
  - un punct arbitrar al celei mai mari laturi;
  - un punct arbitrar situat în afara trapezului;
  - punctul de intersecție al diagonalelor unuia din trapeze.
2. Pe baza rezultatelor a însărcinării 1 desenați un ornament, al cărui motiv este trapezul dreptunghiular.
- Fotografați ornamentul creat și faceți-l cunoscut apropiaților voștri, colegilor de clasă.



### PROBLEME PENTRU REPETARE

- 817.** Răzorul are forma octagonului regulat, înscris în cercul de raza 5 m. Se prevede că octagonul va fi plantat cu plante de flori multianuale, iar restul cercului – cu iarbă de gazon. Câtă iarbă pe gazon trebuie pregătire pentru acest strat de flori, dacă în mediu la un  $1 \text{ m}^2$  de sol se seamănă 9 g sămânță de iarbă?
- 818.** Oare există mișcare care aplică o latură a pătratului în latura opusă? Dar în latura vecină?
- 819.** Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu 7 cm și 24 cm. Aflați sinusul, cosinusul și tangenta celui mai mic unghi al lui.
- 820.** Aflați unghiurile rombului, dacă perimetrul lui este de 4 ori mai mare decât una din diagonalele lui.

### GEOMETRIA DIN JURUL NOSTRU



Simetria în raport cu un punct în lucrările lui Maurița Eșer



# § 23

## Simetria în raport cu o dreaptă

Punctele  $X$  și  $X_1$  se numesc **simetrice în raport cu dreapta  $l$** , dacă această dreaptă este mediatoarea segmentului  $XX_1$  (fig. 271). Dacă punctul  $X$  aparține dreptei  $l$ , atunci el se consideră simetric cu sine însuși în raport cu dreapta  $l$ .

Transformarea figurii  $F_1$  la care fiecare punct al ei se transferă în punctul simetric lui în raport cu dreapta  $l$ , se numește **transformare de simetrie în raport cu dreapta  $l$** . Dacă în această transformare figura  $F$  se aplică în  $F_1$ , atunci aceste două figuri se numesc **simetrice în raport cu dreapta  $l$** .

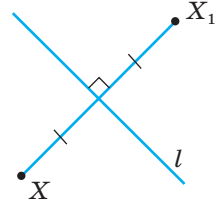


Fig.271

### TEOREMA 16

Transformarea de simetrie în raport cu o dreaptă este mișcare.

### DEMONSTRAȚIE.

Fie că punctele arbitrare  $X$  și  $Y$  ale figurii  $F$  se transferă la transformarea de simetrie în raport cu dreapta  $l$ , în punctele  $X_1$  și  $Y_1$  ale figurii  $F_1$  (fig.272, a). Să demonstrăm că  $XY = X_1Y_1$ .

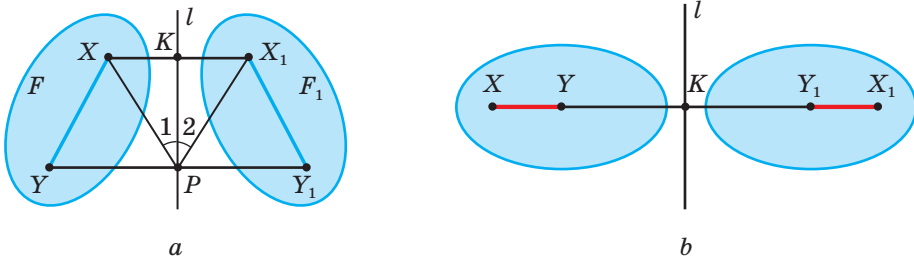


Fig.272

Dacă  $K$  și  $P$  — punctele de intersecție ale segmentelor  $XX_1$  și  $YY_1$  cu dreapta  $l$ , atunci  $\triangle XKP = \triangle X_1KP$  (după două catete). Deci,  $XP = X_1P$  și  $\angle 1 = \angle 2$ , de unde  $\angle XPY = \angle X_1PY_1$ . Deoarece  $PY = PY_1$ , reiese că  $\triangle XYP = \triangle X_1Y_1P$ , de aceea  $XY = X_1Y_1$ .

Dacă punctele  $X$ ,  $Y$ ,  $X_1$  și  $Y_1$  aparțin aceleiași drepte (fig.272,b), atunci

$$XY = |KX - KY| = |KX_1 - KY_1| = X_1Y_1.$$

Așadar, în ambele cazuri  $XY = X_1Y_1$ , adică transformarea de simetrie în raport cu o dreaptă păstrează distanțele dintre puncte. Această transformare este mișcare.  $\square$

Din teorema demonstrată reiese că transformarea de simetrie în raport cu o dreaptă transferă dreapta în dreapta, orice figură într-o figură egală ei.

Dacă la simetria în raport cu dreapta  $l$  figura  $F$  se transferă în sine însăși, atunci așa o figură se numește **simetrică în raport cu o dreaptă  $l$** , iar dreapta  $l$  – **axa de simetrie** a figurii  $F$ . De exemplu, trapezul isoscel este simetric în raport cu dreapta care trece prin mijlocurile bazelor lui (fig.273). Rombul, deosebit de pătrat, are două axe de simetrie (fig.274), pătratul – patru (fig.275), iar circumferința – o infinitate. Polygonul regulat cu  $n$  laturi are  $n$  axe de simetrie. Ele toate trec prin centrul lui. Figuri, simetrice în raport cu o dreaptă, deseori se întâlnesc în natură (fig.276), tehnică (fig.277) și artă (fig. 278).

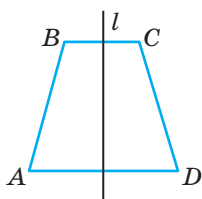


Fig.273

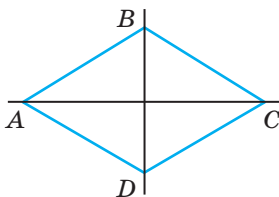


Fig.274

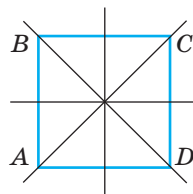


Fig.275



Fig.276



Fig.277



Fig.278

## PENTRU CEI CURIOSI

Două figuri simetrice în raport cu o dreaptă sunt egale și sunt situate în același plan. Oare totdeauna translându-le numai în acest plan putem face ca ele să coincidă prin suprapunere? Nu. De exemplu, două triunghiuri dreptunghice neisoscele  $ABC$  și  $A_1B_1C_1$ , simetrice în raport cu o dreaptă, sunt egale. Însă ca ele să coincidă prin suprapunere, trebuie ca pe unul din ei de-l întors cu altă parte, iar pentru aceasta de-l scos din plan în spațiu (fig.279).



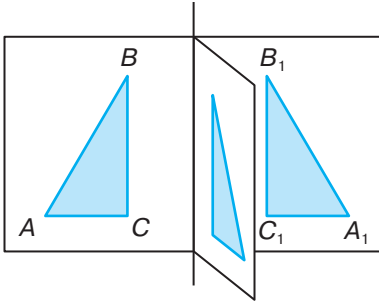


Fig.279

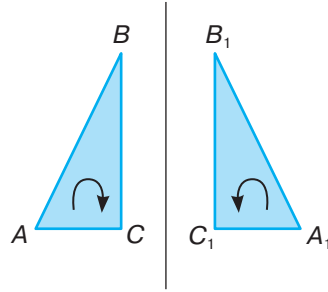


Fig.280

Se spune că astfel de triunghiuri sunt egale, însă orientate nu la fel. Dacă vârfurile  $A, B, C$  ale primului triunghi pot fi înconjurate unul după altul în direcția mișcării acului orar, apoi vârfurile corespunzătoare ale triunghiului  $A_1B_1C_1$  — în direcția opusă (fig.280).

**Аșadar, симетрия в отношении прямой schimbă orientarea figurilor.**

## ІНТРЕБĂРИ ШІ ЕХЕРСІТІИ ПЕНТРУ АУТОСНТРОЛ

1. Care puncte se numesc simetrice în raport cu o oarecare dreaptă?
2. Care transformare se numește simetrie în raport cu o dreaptă?
3. Demonstrați că simetria în raport cu o dreaptă este mișcare.
4. Care figuri se numesc simetrice în raport cu o dreaptă?
5. Câte axe de simetrie are: a) rombul; b) pătratul; c) circumferința?
6. Oare are axă de simetrie: a) triunghiul; b) trapezul; c) paralelogramul?

## ЕФЕТУĂМ ІМПРЕУĂ

1. Construiți triunghiul simetric triunghiului  $ABC$ , în raport cu dreapta  $l$ , situată în afara triunghiului (fig.281).
- Prin vârfurile  $\triangle ABC$  ducem dreptele  $AA_1, BB_1, CC_1$ , perpendiculare cu dreapta  $l$ , și punem pe ele segmentele  $A_1A_2 = AA_1, B_1B_2 = BB_1, C_1C_2 = CC_1$ . Unind punctele  $A_2, B_2, C_2$ , obținem  $\triangle A_2B_2C_2$ , simetric triunghiului  $ABC$  în raport cu dreapta  $l$ .

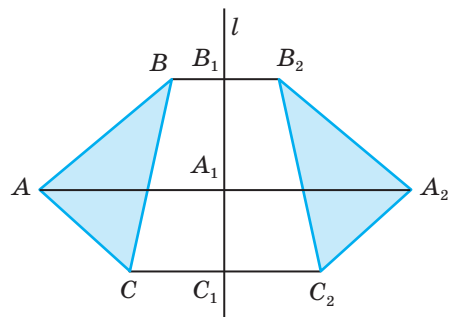


Fig.281

2 Punctele  $A$  și  $B$  sunt situate de aceeași parte a dreptei  $l$ . Găsiți pe această dreaptă așa un punct  $K$ , ca să fie suma  $AK+KB$  cea mai mică.

- Să notăm punctul  $B_1$ , simetric lui  $B$  în raport cu  $l$  (fig.282).

Punctul  $K$  de intersecție al dreptelor  $AB_1$  și  $l$  este cel căutat. Într-adevăr, dacă  $K_1$  este un oarecare alt punct al dreptei  $l$ , atunci

$$AK_1 + K_1B = AK_1 + K_1B_1 > AK + KB_1 = AK + KB.$$

Suma  $AK + KB$  este mai mică decât orice sumă  $AK_1 + K_1B$ .

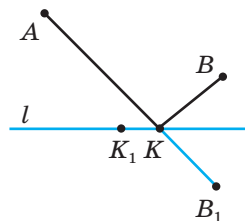


Fig.282

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

821. Care din figurile, reprezentate în figura 283, au axe de simetrie?

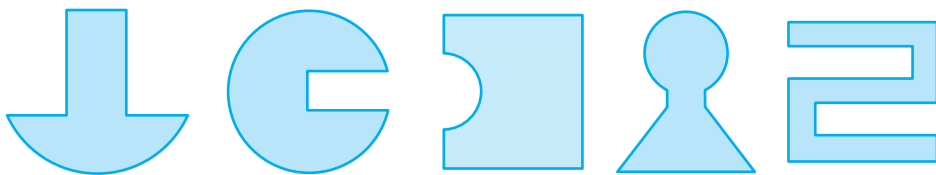


Fig.283

822. Care din literele aduse mai jos sunt simetrice în raport cu o dreaptă: A, Ă, Â, B, C, D, E, F, G, H, Y, M, N, O, P, Z, R, S, Ș, T, Ț, U, V, W, X?
823. Oare este adevărat că bisectoarea unghiului este axa lui de simetrie?
824. Câte axe de simetrie are: a) segmentul; b) dreapta; c) circumferința?
825. Oare poate să aibă axă de simetrie linia frântă, care are 4 laturi? Dar 5 laturi,  $n$  laturi?
826. Câte axe de simetrie poate avea: linia frântă deschisă; b) linia frântă închisă?
827. Figura constă din două circumferințe egale care se intersectează. Câte axe de simetrie are această figură?
828. O figură constă din trei circumferințe egale care sunt tangente două câte două. Câte axe de simetrie are această figură?
829. Care patrulatere au numai o singură axă de simetrie?

**A**

- 830.** Постройте точку, симметричную с данной точкой  $A$  в отношении прямой  $l$ .  
**831.** Даны две точки. Постройте прямую в отношении с которой они симметричны.  
**832.** Постройте фигуру симметричную с данным отрезком  $AB$  в отношении с данной прямой  $l$ .  
 Проверьте несколько случаев (рис.284).

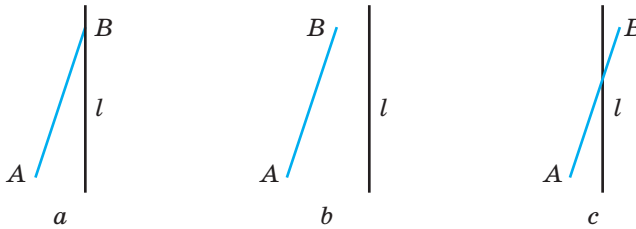


Fig.284

- 833.** Постройте симметричный с данным треугольником треугольник в отношении с данной прямой  $l$ .  
 Проверьте различные случаи (рис.285).

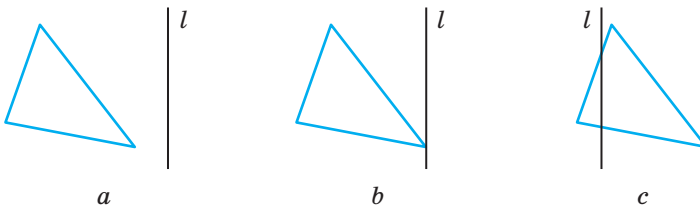


Fig.285

- 834.** Постройте фигуру симметричную с данной окружностью, в отношении с прямой, которая:  
 а) не имеет с окружностью общих точек;  
 б) является касательной к окружности;  
 в) пересекает окружность.  
**835.** Внутренней точке угла  $AOB$  дана точка  $M$ . Точки  $M_1$  и  $M_2$  симметричны с точкой  $M$  в отношении с прямыми  $OA$  и  $OB$ . Найдите величину угла  $M_1OM_2$ , если  $\angle AOB = \alpha$ .  
**836.** Окружности с центрами  $O$  и  $O_1$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что точки  $A$  и  $B$  симметричны в отношении с прямой  $OO_1$ .  
**837.** Докажите, что треугольник, который имеет ось симметрии, является равнобедренным.  
**838.** Докажите, что треугольник, который имеет две оси симметрии, является равносторонним. Сколько осей симметрии имеет равносторонний треугольник?  
**839.** Докажите, что биссектриса угла принадлежит его оси симметрии.  
**840.** Постройте точки  $A(-3; 1)$ ,  $B(4; 5)$ ,  $C(-2; -6)$ ,  $D(0; 3)$ ,  $E(2; 0)$ ,  $K(1; 1)$  и точки, которые им симметричны в отношении с: а) осью  $Ox$ ; б) осью  $Oy$ . Запишите координаты этих точек.  
**841.** Определите тип треугольника  $ABC$ , если  $A(-4; 2)$ ,  $B(3; 6)$ ,  $C(2; -2)$ . Сколько осей симметрии имеет этот треугольник?

## B

- 842.** În patrulaterul  $ABCD$   $AB = AD$  și  $CB = CD$ . Demonstrați că dreapta  $AC$  — axa lui de simetrie.
- 843.** Diagonalele patrulaterului sunt axele lui de simetrie. Demonstrați că acest patrulater este romb.
- 844.** Se dă dreapta  $l$ , a cărei ecuație este  $y = 2x + 3$ . Scrieți ecuațiile dreptelor, simetrice lui  $l$  în raport cu: a) axa  $x$ ; b) axa  $y$ .
- 845.** Scrieți ecuațiile axelor de simetrie ale patrulaterului  $ABCD$ , dacă  $A(-5; 1)$ ,  $B(-3; 5)$ ,  $C(1; 3)$ ,  $D(-1; -1)$ .
- 846.** Două segmente sunt simetrice în raport cu dreapta  $a$ . Demonstrați că mediatoarele acestor segmente tot sunt simetrice în raport cu dreapta  $a$ .
- 847.** Demonstrați că suma distanțelor de la orice punct al bazei unui triunghi isoscel ascuțitunghic până la laturile laterale ale lui este egală cu înălțimea triunghiului, coborâtă pe latura laterală.
- 848.** Segmentele  $AB$  și  $CD$  sunt simetrice în raport cu o oarecare dreaptă  $l$ . Scrieți ecuația acestei drepte, dacă  $A(-1; 4)$ ,  $B(2; 3)$ ,  $C(-3; 2)$ ,  $D(-2; -1)$ . Faceți desenul.
- 849.** Câte axe de simetrie are figura, care este reuniunea circumferințelor:  
 a)  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$  și  $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 16$ ;  
 b)  $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$  și  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ ;  
 c)  $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$  și  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$ ?  
 Faceți desenul.
- 850.** Determinați tipul patrulaterului  $ABCD$ , dacă  $A(-3; -1)$ ,  $B(-5; 3)$ ,  $C(-1; 5)$ ,  $D(1; 1)$ . Câte axe de simetrie are el? Scrieți ecuațiile lor.
- 851.** Printr-un punct interior al unghiului dat duceți o dreaptă care taie pe laturile lui segmente egale.
- 852.** Se dă un unghi, al cărui vârf este inaccesibil. Construiți un unghi de două ori mai mare decât cel dat.
- 853.** Vârfurile  $A, B$  și  $C$  ale triunghiului sunt inaccesibile. Construiți segmentele egale cu  $AB$ ,  $AC$  și  $BC$ .
- 854.** Punctele  $A$  și  $B$  sunt situate de părți diferite ale dreptei  $l$ . Găsiți pe dreapta  $l$  așa un punct, ca bisectoarea unghiului  $AMB$  să aparțină acestei drepte.
- 855.** Un patrulater convex, care are numai o singură axă de simetrie, care trece prin două vârfuri ale lui, se numește deltoid. Desenați un oarecare deltoid și examinați proprietățile lui.
- 856.** Fiecare din figurile  $(A-E)$  are axă de simetrie, care este dată de o oarecare dreaptă  $(1-4)$ . Stabiliți corespondența dintre dreptele  $(1-4)$  și figurile  $(A-E)$ .
- |                |   |
|----------------|---|
| 1 $y = x + 1$  | A Patrulaterul $ABCD$ , dacă $A(-1; 1)$ , $B(1; 4)$ , $C(4; 4)$ , |
| 2 $y = -x - 2$ | $D(4; 1)$   |
| 3 $y = 7 - x$  | B Triunghiul $ABC$ , dacă $A(2; -1)$ , $B(-1; 8)$ , $C(8; 5)$     |
| 4 $y = 0$      | C Circumferința $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16$                      |
|                | D Patrulaterul $ABCD$ , dacă $A(0; 1)$ , $B(1; 6)$ , $C(6; 7)$ ,  |
|                | $D(5; 2)$   |
|                | E Unghiul $AOB$ , dacă $A(5; 5)$ , $O(0; 0)$ , $B(3; -3)$         |

**ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ**

**857.** Faceți o prezentare pe tema „Geometria din jurul nostru”. Afară de altele (geometria în natură, viața de toate zilele, tehnică, sport, artă, militarie ș.a), arătați, unde, când voi personal utilizați simetria și proprietățile ei.

**PROBLEME PENTRU REPETARE**

- 858.** Construiți un pătrat cu latura de 3 cm și pătratul simetric lui în raport cu un oarecare punct  $O$ . Aflați perimetrul și aria pătratului construit.
- 859.** Perimetrul triunghiului este egal cu  $2p$ . Aflați laturile lui, dacă ele sunt proporționale cu numerele 3, 4 și 5.
- 860.** O parcelă care are formă de cerc cu diametrul 90 m, trebuie îngrădită cu plasă nervurată. Câți stâlpișori sunt necesari pentru această îngrădire, dacă distanța dintre stâlpișorii vecini (pe arcul de circumferință) trebuie să fie de 90 cm?
- 861.** Aflați raza circumferinței circumscrise unui triunghi dreptunghic ale cărui catete sunt egale cu  $a$  și  $b$ .

**GEOMETRIA DIN JURUL NOSTRU**

Palatul Mariinsk din Kiev

# § 24 | Rotația

Fie că se dă punctul  $O$  și figura arbitrară  $F$  (fig. 286). Rotim punctul  $X$  al acestei figuri în jurul punctului  $O$  cu unghiul  $\alpha$  în direcția mișcării acului de ceasornic. Totodată punctul  $X$  se aplică în așa un punct  $X_1$ , că măsura unghiulară a arcului  $XX_1$  cu centrul  $O$  este egală cu  $\alpha$  ( $OX$  și  $OX_1$  – raze egale). Dacă cu așa un procedeu de rotit în jurul punctului  $O$  cu unghiul  $\alpha$  fiecare punct al figurii  $F$ , atunci obținem figura  $F_1$ . Se spune că rotația în jurul punctului  $O$  cu unghiul  $\alpha$  transferă figura  $F$  în figura  $F_1$ .

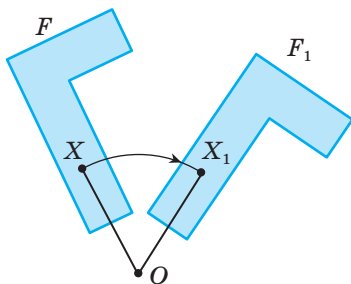


Fig.286

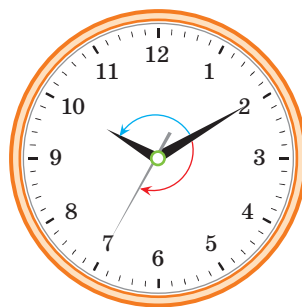


Fig.287

Punctul  $O$  se numește **centru de rotație**, iar unghiul  $XOX_1$  – **unghi de rotație**. Se poate efectua rotația atât în direcția mișcării acului de ceasornic, cât și împotriva mișcării lui (fig. 287).

## TEOREMA 17

**Rotația în jurul unui punct este mișcare.**

### DEMONSTRAȚIE.

Admitem că la rotația figurii  $F$  în jurul punctului  $O$  cu unghiul  $\alpha$  punctele  $A$  și  $B$  ale acestei figuri se transferă în punctele  $A_1$  și  $B_1$  ale figurii  $F_1$  (fig. 288). Atunci  $OA = OA_1$ ,  $OB = OB_1$  și  $\angle AOA_1 = \angle BOB_1$ . Dacă punctele  $A$ ,  $B$  și  $O$  nu aparțin unei drepte, atunci  $\triangle AOB = \triangle A_1OB_1$  (după două laturi și unghiul făcut de ele, deoarece  $\angle AOB = \angle A_1OB_1$ ). Deci, în acest caz  $AB = A_1B_1$ .

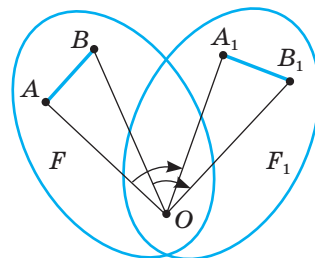


Fig.288



Dacă punctele  $A, B$  și  $O$  sunt situate pe aceeași dreaptă (fig.289), atunci

$$AB = |OA - OB| = |OA_1 - OB_1| = A_1B_1.$$



Fig.289

Cazul când punctul este situat între  $A$  și  $B$ , examinați-l de sine stătător.

Așadar, totdeauna  $AB = A_1B_1$ . □

După cum vedem, rotația este unul din felurile de mișcare. De aceea la rotație dreapta trece în dreaptă, orice figură – în figură egală însăși ei.

Există figuri, care la rotația în jurul unui punct se aplică în sine însăși. Din capitolul precedent voi deja știți că unghiul la centru al unui poligon regulat cu  $n$  laturi este egal cu  $\frac{360^\circ}{n}$ . De aceea orice poligon cu  $n$  laturi regulat

trece în sine însăși la rotația în jurul centrului său cu unghiul de  $\frac{360^\circ}{n}$ . De exemplu, trec în sine însuși triunghiul regulat, patrulaterul și octagonul regulați (fig. 290).

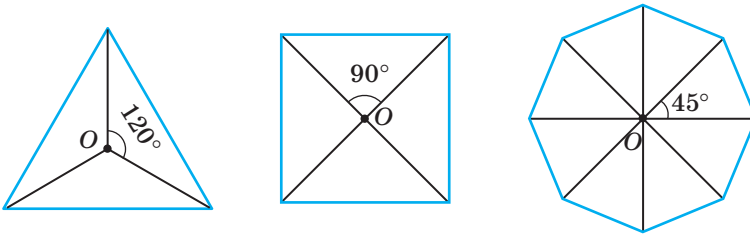


Fig.290

**Atrageți atenția!**

Rotația cu  $180^\circ$  în jurul punctului  $O$  – simetrie în raport cu acest punct (fig. 291).

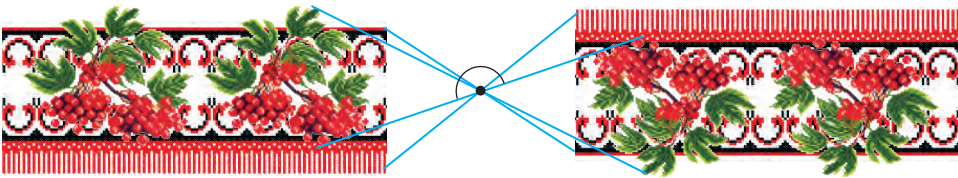


Fig.291

Este adevărată și așa o definiție. **Simetria în raport cu un punct este rotația cu  $180^\circ$  în jurul acestui punct.**

## PENTRU CEI CURIOSI

Noțiunea geometrică **rotația** trebuie deosebită de rotația fizică. **Rotația fizică** aceasta-i un proces care este determinat de timp, viteza unghiulară, accelerația unghiulară ș.a.

Rotația poate fi uniformă sau neuniformă, să se efectueze cu un unghi oricât de mare într-o direcție sau alta. De exemplu, dacă roata de curea (fig. 292) va executa două sau zece rotații complete, se spune că ea s-a rotit cu  $720^\circ$  sau  $3600^\circ$ . Rotația ca transformare geometrică nu este legată cu timpul sau viteza, da este transferarea unei figuri în alta, egală cu ea. Mai sus s-a spus despre rotația figurii. Însă învățații mai des examinează rotația întregului plan. Rotația planului se poate da univoc, indicând centrul ei  $O$  și unghiul  $\alpha$ , unde  $0 < \alpha \leq 180^\circ$ .

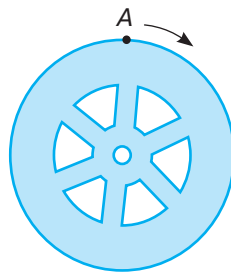


Fig.292

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Care transformare geometrică se numește rotație?
2. Oare este rotația mișcare? De ce?
3. Formulați proprietățile rotației în jurul unui punct.
4. Care rotație se numește simetrie în raport cu un punct?

## EFACTUĂM ÎMPREUNĂ

1 Sunt date două puncte diferite  $M$  și  $O$ . Construiți punctul  $M_1$ , în care trece punctul  $M$  la rotația în jurul punctului  $O$  cu  $90^\circ$ .

- Ducem semidreapta  $OM$  și construim semidreapta  $OX$  astfel, ca  $\angle MOX = 90^\circ$  în direcția mișcării acului de ceasornic. Pe semidreapta  $OX$  de la punctul  $O$  punem segmentul egal cu segmentul  $OM$ . Obținem punctul  $M_1$  (fig. 293).

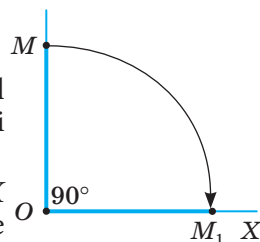


Fig. 293

2 Se dă dreapta  $a$  și punctul  $O \notin a$ . Rotiți dreapta  $a$  în jurul punctului  $O$  cu un oarecare unghi  $\alpha$  în direcția mișcării acului de ceasornic.

- *Primul procedeu.*

Coborâm perpendiculara  $OA$  pe dreapta  $a$  (fig.294). Rotim această perpendiculară în jurul punctului  $O$  cu unghiul  $\alpha$  în direcția mișcării acelor de ceasornic. Pentru aceasta construim unghiul  $AOB = \alpha$  și pe semidreapta  $OB$  punem segmentul  $OB=OA$ . Prin punctul  $B$  ducem dreapta  $b$ , perpendiculară pe  $OB$ . Dreapta  $b$  este aceea care trebuia construită.

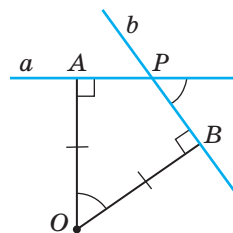


Fig. 294

*Al doilea procedeu.*

Notăm două puncte arbitrare  $A$  și  $B$  ale dreptei  $a$  și rotim fiecare din ele cu unghiul  $\alpha$  în direcția mișcării acelor de ceasornic. Dacă totodată ele vor trece în punctele  $A_1$  și  $B_1$ , atunci dreapta  $A_1B_1$  este aceea, care trebuia construită. Faceți desenul de sine stătător.

- 3** Rotația cu unghiul  $\alpha$  în jurul punctului  $O$  trece dreapta  $a$  în  $b$ . Aflați unghiul  $\beta$  format de aceste drepte.
- Dacă dreptele  $a$  și  $b$  se intersectează în punctul  $P$ , iar  $OA$  și  $OB$  sunt perpendiculare pe dreptele  $a$  și  $b$ , atunci  $\angle APB = 180^\circ - \alpha$ . Dacă unghiul  $\alpha$  este ascuțit sau drept, atunci  $\beta = \alpha$  (fig. 294). Dacă unghiul  $\alpha$  este obtuz, atunci  $\beta = 180^\circ - \alpha$  (fig. 295).

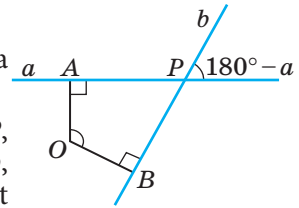


Fig. 295

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

- 862.**  $ABCD$  – pătrat (fig. 296). Cu ce unghi trebuie rotită dreapta  $AB$  în jurul punctului  $A$ , ca ea să treacă prin punctul: a)  $C$ ; b)  $D$ ; c)  $B$ ?
- 863.** Cu ce unghi trebuie rotită dreapta  $AB$  în jurul punctului  $C$ , ca nou-obținuta dreaptă să fie: a) perpendiculară pe  $AB$ ; b) paralelă cu  $AB$ ?
- 864.** Indicați coordonatele punctelor în care trec punctele  $A, B, C, D, E, F$  (fig. 297) la rotația în jurul originii de coordonate cu unghiul de  $90^\circ$ :  
 a) în direcția mișcării acului de ceasornic;  
 b) împotriva mișcării acului de ceasornic.
- 865.** În jurul cărui punct și cu ce unghi trebuie de rotit una din dreptele paralele, ca ea să coincidă cu cealaltă dreaptă?
- 866.** Două circumferințe egale sunt tangente în punctul  $A$ . Cu ce unghi trebuie rotită una din ele în jurul punctului  $A$  pentru ca ea să coincidă cu cealaltă circumferință?

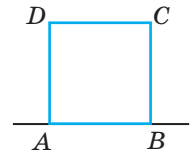


Fig. 296

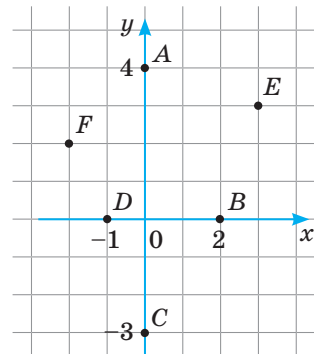


Fig. 297

### A

- 867.** Se dau punctele  $O$  și  $A$ . Executați rotația punctului  $A$  în jurul punctului  $O$  cu unghiul de  $60^\circ$  în direcția mișcării acului de ceasornic.
- 868.** Se dă segmentul  $AB$  și punctul  $O$ , ce nu aparține dreptei  $AB$ . Rotiți segmentul  $AB$  în jurul punctului  $O$  cu unghiul de  $45^\circ$  împotriva mișcării acului de ceasornic.

- 869.** Segmentul  $AB$  la rotația lui cu  $60^\circ$  în jurul punctului  $A$  s-a aplicat în segmentul  $AB_1$ . Aflați distanța  $BB_1$ , dacă  $AB = a$ .
- 870.** Rotiți triunghiul dat  $ABC$  în direcția mișcării acului de ceasornic cu  $90^\circ$  în jurul: a) vârfului  $A$ ; b) mijlocului laturii  $BC$ .
- 871.** Pătratul  $ABCD$  l-au rotit în jurul punctului  $A$  astfel, că vârful lui  $B$  a trecut în  $D$ , iar  $C$  – în  $C_1$ . Aflați distanța  $CC_1$ , dacă  $AB=a$ . Cu ce unghi s-a realizat rotația?
- 872.** Sunt date două drepte perpendiculare. Aflați locul geometric al punctelor în jurul cărora se poate roti una din drepte ca ea să se suprapună pe prima dreaptă.
- 873.** În jurul cărui punct și cu ce unghi trebuie de rotit triunghiul echilateral ca el să coincidă cu sine însuși?
- 874.** Care patrulater poate fi rotit în jurul unui oarecare punct  $O$  cu  $90^\circ$  astfel, ca el să coincidă cu sine însuși?
- 875.** Un poligon regulat cu  $n$  laturi la rotația în jurul centrului cu unghiul  $\beta$  în direcția mișcării acului de ceasornic trece în sine însuși. Aflați cel mai mic unghi  $\beta$  ( $\neq 0$ ) pentru: a)  $n = 5$ ; b)  $n = 6$ ; c)  $n = 9$ ; d)  $n = 10$ ; e)  $n = k$ .
- 876.** Se dau punctele  $A(-2; 5)$ ,  $B(3; 6)$ ,  $C(4; 1)$ . Construiți triunghiul  $A_1B_1C_1$ , în care va trece triunghiul  $ABC$  la rotația lui în jurul originii de coordonate cu unghiul de  $90^\circ$  în direcția mișcării acelor de ceasornic. Aflați perimetrul și aria triunghiului  $A_1B_1C_1$ .

## B

- 877.** Punctul  $A(2; 3)$  la rotația în jurul originii de coordonate a trecut în punctul  $B(3; -2)$ . Cu ce unghi s-a executat rotația?
- 878.** Aflați  $m$  și  $n$ , dacă:
- punctul  $M(m; 1)$  trece în punctul  $N(n; 4)$  la rotația în jurul punctului  $O(0; 0)$  cu  $90^\circ$  în direcția mișcării acului de ceasornic;
  - punctul  $E(-4; m)$  trece în punctul  $F(3; n)$  la rotația în jurul punctului  $P(1; 4)$  cu  $90^\circ$  împotriva mișcării acului de ceasornic.
- 879.** Sunt date două circumferințe egale. Aflați locul geometric al punctelor în jurul cărora se poate efectua rotația uneia din circumferințe ca ea să coincidă cu cealaltă.
- 880.** Triunghiul  $AB_1C_1$  — imaginea triunghiului regulat  $ABC$  la rotația lui în jurul punctului  $A$  cu unghiul de  $60^\circ$ : a) în direcția mișcării acelor de ceasornic; b) împotriva mișcării acelor de ceasornic. Aflați  $BC_1$ , dacă  $AB = a$ .
- 881.** La rotația hexagonului regulat  $ABCDEF$  în jurul centrului lui cu  $90^\circ$  în direcția mișcării acelor de ceasornic s-a obținut hexagonul  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ . Aflați  $AA_1$ ,  $AB_1$ ,  $AC_1$ ,  $AD_1$ .
- 882.** Pe laturile  $AB$  și  $BC$  ale triunghiului  $ABC$  sunt construite în exterior triunghiurile echilaterale  $ABP$  și  $BKC$ . Demonstrați, că  $AK=PC$ . Aflați unghiul format de dreptele  $AK$  și  $PC$ .

- 883.** Patrulaterul  $A_1B_1C_1D_1$  — imaginea pătratului  $ABCD$ , obținută la rotația în jurul punctului  $A$  cu  $45^\circ$ . Aflați  $BC_1$  și  $BD_1$ , dacă  $AB = a$ . Examinați două cazuri:  
 a) rotația în direcția mișcării acului de ceasornic;  
 b) rotația împotriva mișcării acului de ceasornic.
- 884.** Se dau două segmente egale (fig.298). Aflați punctul, rotația în jurul căruia transferă pe unul din aceste segmente în celălalt.

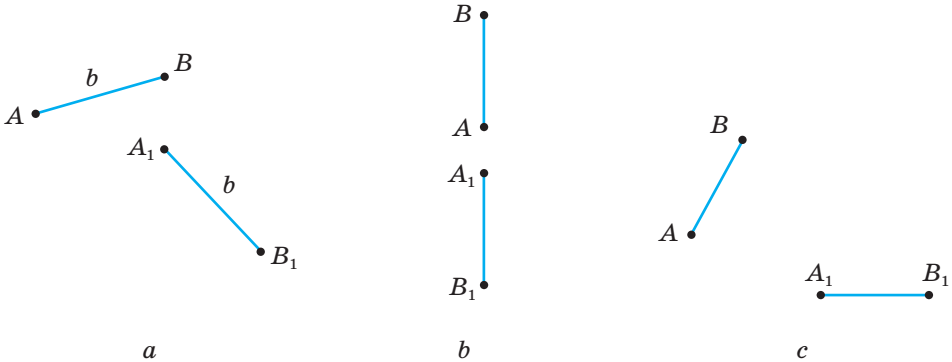


Fig.298

- 885.** Pe segmentele succesive  $AB$  și  $BC$  ale dreptei  $AC$  de aceeași parte a ei sunt construite triunghiurile regulate  $ABK$  și  $BCP$ . Punctele  $M$  și  $H$  — mijlocurile segmentelor  $AP$  și  $CK$ . Demonstrați că triunghiul  $BMH$  este regulat.
- 886.** Pe laturile  $AB$  și  $AC$  ale triunghiului  $ABC$  în exterior sunt construite pătratele  $ABMH$  și  $ACPK$ . Demonstrați că mediana  $AE$  a triunghiului  $ABC$  este perpendiculară pe segmentul  $HK$  și este egală cu jumătate din el.

**ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ**

- 887.** Tăieți din hârtie în pătrățele un pătrat și vopsiți-l așa cum se arată în figura 299. Cu ajutorul rotației cu unghiul de  $90^\circ$  și a simetriei axiale încercați să creați ornamentul, reprezentat în figura 300. Cu care transformare trebuie de început? Care alt motiv și altă transformare se poate utiliza pentru a obține un ornament asemănător?



Fig.299

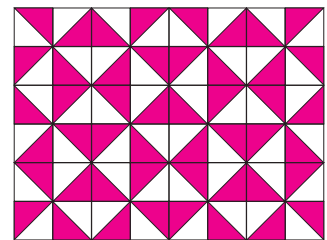
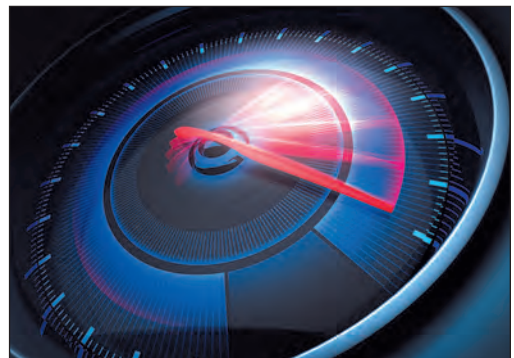


Fig.300

### PROBLEME PENTRU REPETARE

- 888.** Laturile unui triunghi sunt proporționale cu numerele 3, 5 și 7. Aflați laturile triunghiului asemenea lui, dacă perimetrul lui este egal cu 3 m.
- 889.** De pe o șalupă într-un oarecare moment se vede farul sub unghiul de  $30^\circ$  în direcția de mișcare a navei, iar când șalupa a parcurs cu același curs 20,4 km, farul deja se vedea sub unghiul de  $135^\circ$  în stânga cursului navei. De aflat distanța de la șalupă până la far în fiecare din momentele, când se măsoară unghiul.
- 890.** Catetele triunghiului dreptunghic se rapoartă ca 2:3. Calculați sinusurile, cosinusurile și tangentele unghiurilor ascuțite ale lui.
- 891.** Triunghiul dreptunghic, o catetă a cărui este egală cu  $n$ , este înscris în circumferința de rază  $r$ . Aflați perimetrul triunghiului.

### GEOMETRIA DIN JURUL NOSTRU



Rotația în diferite domenii de activitate umană

# § 25

## Transport paralel

Unul din exemplele de transformări geometrice este **transportul paralel (deplasarea de translație)**.

Admitem că se dă figura  $F$  (fig.301). Dacă fiecare punct al ei de-l mutat în una și aceeași direcție la una și aceeași distanță  $XX_1$  (sau cu vectorul  $\overline{XX_1}$ ), atunci obținem figura  $F_1$ . În acest caz se spune că transportul paralel (deplasarea de translație), care transferă punctul  $X$  în  $X_1$ , aplică figura  $F$  în  $F_1$ .

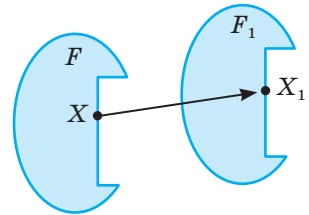


Fig.301

Aceleași desene, care periodic se repetă pe țesături, pânze, tapete, pe cămășile brodate (fig.302) pot fi executate cu ajutorul transportului paralel. Tot aceeași se poate spune despre etajele identice ale blocurilor de locuințe, secțiunile îngrădirii (fig.303), secțiunile parchetului de podea, plăcile la aeroporturi, piețe (fig. 304) ș.a.



Fig.302

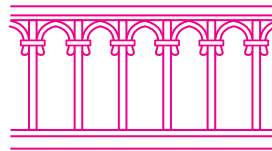


Fig.303

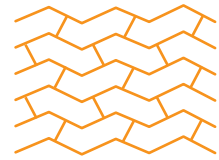


Fig.304

### TEOREMA 18

**Transportul paralel – mișcare.**

#### DEMONSTRAȚIE.

Dacă segmentul  $X_1Y_1$  — imaginea segmentului  $XY$  la transportul paralel cu vectorul  $\overline{XX_1}$ , atunci segmentele  $XX_1$  și  $YY_1$  sunt egale și paralele sau sunt situate pe aceeași dreaptă. Dacă aceste segmente sunt egale și paralele atunci patrulaterul  $XX_1Y_1Y$  — paralelogram. Deci,  $XY = X_1Y_1$  (fig.305,a).

Dacă segmentele egale  $XX_1$  și  $YY_1$  aparțin aceleiași drepte (fig.305,b), atunci

$$XY = |XX_1 - YX_1| = |YY_1 - YX_1| = X_1Y_1.$$

Așadar, în ambele cazuri  $XY = X_1Y_1$ . La transportul paralel se păstrează distanța dintre puncte. De aceea transportul paralel este mișcare.  $\square$



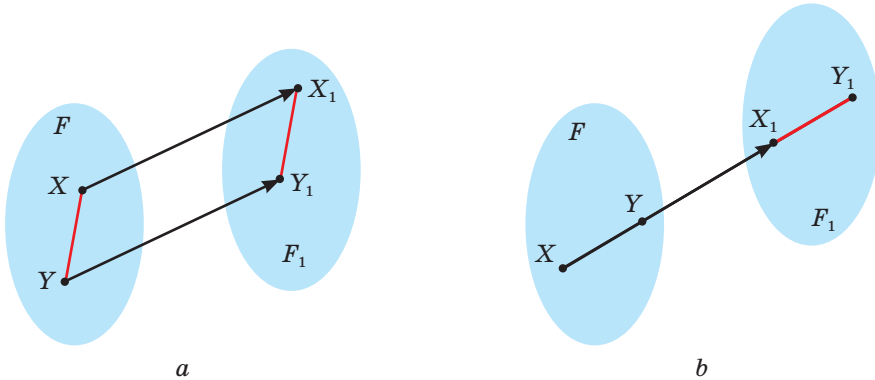


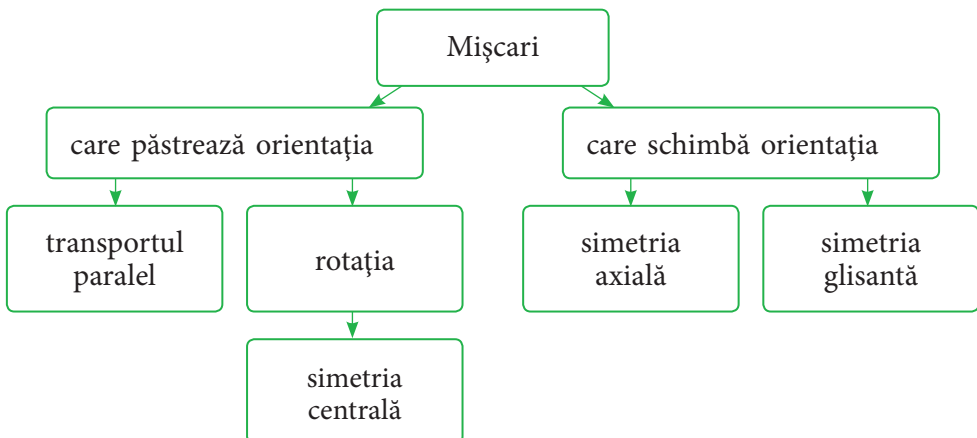
Fig.305

Transportul paralel transferă dreapta pe o dreaptă paralelă cu ea, orice figură – în figura egală ei. Rezolvând probleme geometrice sau demonstrând teoreme, uneori se efectuează transportul paralel separat al unor părți ale figurii. În acest caz se vorbește despre **metoda transportului paralel**.

### PENTRU CEI CURIOSI

Până acum noi am considerat tipuri aparte de mișcări: simetria în raport cu un punct, simetria în raport cu o dreaptă, rotația, transportul paralel. Merită atenția a lor compoziții – executarea succesivă a două sau a câtorva din ele. De exemplu, dacă transportul paralel transferă figura  $F$  în  $F_1$ , iar simetria în raport cu o dreaptă trece figura  $F_1$  în  $F_2$ , atunci se spune că figura  $F$  în  $F_2$  este transferată de compoziția transportului paralel și de simetria în raport cu o dreaptă. Compoziția transportului paralel în lungul dreptei  $l$  și a simetriei în raport cu dreapta  $l$  se numește **simetrie glisantă**. Deoarece simetria în raport cu o dreaptă schimbă orientația figurilor, iar transportul paralel nu o schimbă, reiese că simetria glisantă schimbă orientația figurilor.

Corelația dintre mișcările examinate poate fi reprezentată cu următoarea schemă





## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Care transformare se numește transport (deplasare) paralelă?
2. Aduceți exemple de transport paralel din mediul înconjurător.
3. Formulați și demonstrați teorema despre proprietatea transportului paralel.
4. Oare se păstrează egalitatea figurilor la transportul paralel?
5. Care figură este imaginea dreptei la transportul paralel cu un vector nenul?
6. Ce se numește metoda transportului paralel?

## EFACTUĂM ÎMPREUNĂ

1. Construiți triunghiul, în care trece triunghiul  $ABC$  la transportul paralel, care transferă punctul  $A$  în  $A_1$  (fig.306,a).

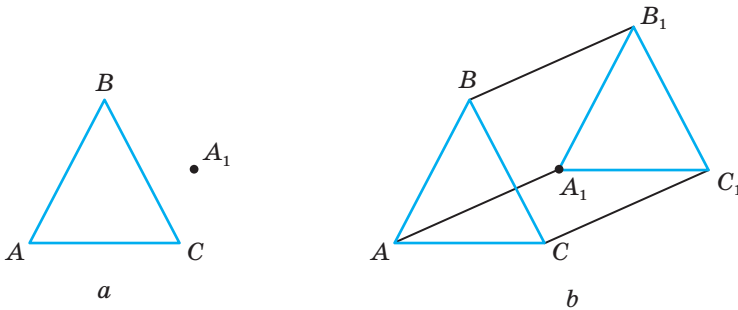


Fig.306

- Ducem segmentul  $AA_1$ . Prin punctele  $B$  și  $C$  ducem drepte, paralele cu  $AA_1$ , și punem pe ele segmentele  $BB_1 = AA_1$  și  $CC_1 = AA_1$ . Unim punctele  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  cu segmente. Triunghiul  $A_1B_1C_1$  este cel căutat (fig.306,b).
2. La transportul paralel cu vectorul  $\vec{a}$  punctul  $A(1; 3)$  se transferă în punctul  $A_1(-2; 5)$ . Aflați coordonatele imaginii punctului  $B(-4; 7)$  la acest transport paralel.
    - Să aflăm coordonatele  $\vec{a}$ , la care s-a executat transportul paralel.  
 $\vec{a} = \overline{AA_1} = (-3; 2)$ . Fie, că imaginea punctului  $B(-4; 7)$  va fi punctul  $B_1(x; y)$ .  
 Atunci  $\overline{BB_1} = (x+4; y-7)$ . Deoarece  $\overline{BB_1} = \vec{a}$ , reiese că  $x+4 = -3$ ,  $y-7 = 2$ , de unde  $x = -7$ ,  $y = 9$ .  
 Deci,  $B_1(-7; 9)$ .

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

- 892.** Arătați coordonatele punctelor, în care trec punctele, reprezentate în figura 307 la transportul paralel, care punctul  $O(0;0)$  îl trece în punctul: a)  $D(3; 0)$ ; b)  $K(-1; 0)$ ; c)  $A(2; 2)$ .
- 893.** Se dau două drepte paralele. Câte există deplasări paralele, la care una din ele trece în cealaltă?
- 894.** Două segmente egale sunt situate pe aceeași dreaptă. Cu care deplasare paralelă se poate trece unul din segmente în celălalt?
- 895.** Oare există deplasare paralelă care transferă una din laturile trapezului în celălaltă latură?

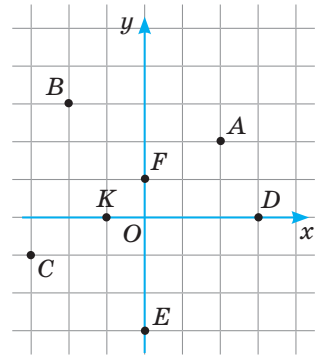


Fig.307

### A

- 896.** Notați punctele  $A$ ,  $A_1$  și  $B$ . Construiți punctul, în care trece punctul  $B$  la deplasarea paralelă cu vectorul  $\overline{AA_1}$ .
- 897.** Se dă segmentul  $AB$  și punctul  $K$ . Executați deplasarea paralelă a segmentului  $AB$  în așa un mod, ca mijlocul lui să treacă în punctul  $K$ .
- 898.** Construiți figura în care trece triunghiul dat  $ABC$  la deplasarea paralelă, care transferă punctul  $A$  în punctul  $C$ .
- 899.** Construiți figura, în care trece paralelogramul dat  $ABCD$  la deplasarea paralelă cu vectorul  $\overline{AC}$ .
- 900.** Executați deplasarea paralelă a dreptei date  $AB$  astfel, ca punctul ei  $A$  să treacă în punctul dat  $C$ . Examinați două cazuri: a)  $C \notin AB$ ; b)  $C \in AB$ .
- 901.** Executați deplasarea paralelă a circumferinței date (fig.308) astfel, ca centrul ei să treacă în punctul dat: a)  $O_1$ ; b)  $O_2$ ; c)  $O_3$ .
- 902.** Aflați punctele care sunt imaginile punctelor  $M(4; -2)$ ,  $P(6; 0)$ ,  $K(-7; 4)$  la deplasarea paralelă cu vectorul  $\vec{a} = (1; -3)$ .
- 903.** La deplasarea paralelă cu vectorul  $\vec{a}$  imaginea punctului  $A(1; -6)$  este punctul  $A_1(-7; 2)$ . Aflați coordonatele vectorului  $\vec{a}$ .
- 904.** Oare există transport paralel care transferă punctul  $A(1; 5)$  în punctul  $A_1(4; 2)$ , iar punctul  $B(-1; 3)$  în punctul: a)  $B_1(3; 1)$ ; b)  $B_2(2; 0)$ ; c)  $B_3(-4; 6)$ ?

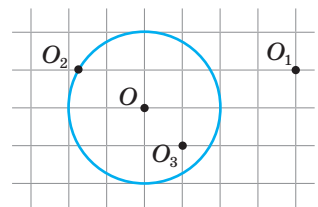


Fig. 308

- 905.** Se dau punctele  $M(-3; 7)$ ,  $N(-1; 1)$ ,  $P(1; 2)$ . La transportul paralel mijlocul segmentului  $MN$  trece în punctul  $P$ . Faceți desenul și indicați coordonatele punctelor, în care trec punctele  $M$  și  $N$ .
- 906.** Triunghiul  $KPT$  este obținut în rezultatul deplasării paralele a triunghiului  $ABC$ . Demonstrați că medianele corespunzătoare ale acestor triunghiuri sunt egale și paralele. Dar bisectoarele?

## B

- 907.** Executați transportul paralel al circumferinței a cărei ecuație este  $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$ , în așa un mod, ca centrul ei  $O$  să treacă în punctul  $O_1(3; -2)$ . Scrieți ecuația circumferinței obținute.
- 908.** La deplasarea paralelă dreapta  $a$ , a cărei ecuație este  $2x + y = 5$ , trece în dreapta  $l$ , care trece prin punctul: a)  $A(-1; -1)$ ; b)  $B(2; 5)$ . Scrieți ecuația dreptei  $l$ .
- 909.** La deplasarea paralelă imaginea punctului  $A(-1; 3)$  este punctul  $A_1(5; -2)$ , iar imaginea punctului  $B(x; -3)$  — punctul  $B_1(-2; y)$ . Aflați  $x$  și  $y$ .
- 910.** Punctele  $A_1(2; 9)$ ,  $O_1(2; 5)$ ,  $C_1(5; 5)$  sunt imaginile punctelor  $A(0; y)$ ,  $O(0; 0)$ ,  $C(x; 0)$  la transportul paralel. Aflați  $x$  și  $y$  și perimetrul triunghiului  $AOC$ .
- 911.** Demonstrați că unghiurile de la baza trapezului isoscel sunt egale.
- 912.** Demonstrați că diagonalele trapezului isoscel sunt egale.
- 913.** Demonstrați că deplasarea paralelă se poate realiza, utilizând două simetrii în raport cu axe paralele.
- 914.** Punctele  $A(-2; 1)$ ,  $B(2; 5)$ ,  $C(4; 3)$  — vârfuri ale paralelogramului  $ABCD$ . Aflați imaginile punctelor  $A$ ,  $B$ ,  $C$  și  $D$  la transportul paralel cu vectorul  $\overline{AC}$ .
- 915.** Pe laturile  $AB$  și  $CD$  ale paralelogramului  $ABCD$  sunt construite pătrate cu centrele  $O$  și  $O_1$ . Demonstrați, că mijlocul segmentului  $OO_1$  — centrul paralelogramului.
- 916.** De aceeași parte a unui segment rectiliniu de cale ferată se află două sate  $A$  și  $B$ . În ce loc trebuie de construit peronul  $KP$  ca suma distanțelor  $AK$ ,  $KP$  și  $PB$  să fie cea mai mică?
- 917.** Unde trebuie de construit podul  $KP$ , perpendicular la malurile râului, ca drumul  $AKPB$  între punctele  $A$  și  $B$  să fie cel mai scurt (fig.309)?

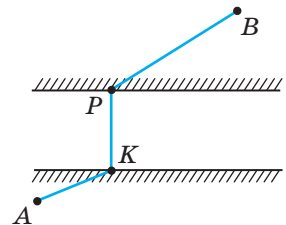


Fig.309

### ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

918. 1). Liniază o parte a foi din caiet în pătrățele mai mici și transferați pe ele figura 310 sau 311. Folosind deplasarea paralelă, faceți reprezentarea broderiei de două ori mai lungă.

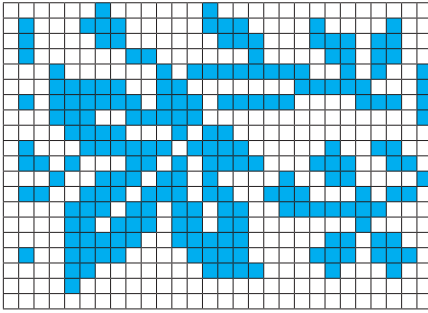


Fig.310

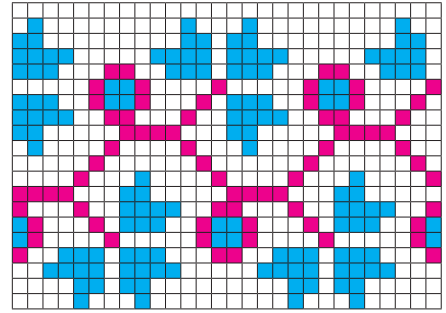


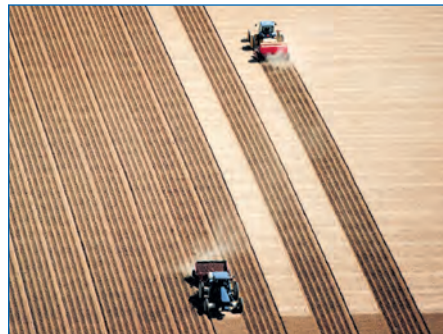
Fig.311

- 2) Elaborați o broderie sau ornament propriu.

### PROBLEME PENTRU REPETARE

919. Oare se deosebesc noțiunile „triunghi regulat” și „triunghi echilateral”?
920. Aflați laturile triunghiului dreptunghic, dacă cea mai mare din ele este egală cu 20 cm, iar sinusul a unuia din unghiuri este egal cu 0,2.
921. Aflați catetele triunghiului dreptunghic, dacă ipotenuza lui este egală cu  $c$ , iar aria cu  $S$ .
922. Se dă triunghiul cu laturile 2cm, 3cm și 4cm. Aflați triunghiul asemenea cu el, al cărui perimetru este de 27 cm.

### GEOMETRIADIN JURUL NOSTRU



### Deplasarea paralelă și agricultura

# § 26

## Transformarea de asemănare

În viața cotidiană noi deseori ne întâlnim cu obiecte care au aceeași formă, însă au dimensiuni diferite. În plan acesta-i tabloul și copia lui, planurile aceluiași obiect, făcute la diferite scări, literele și cifrele, culese la computer cu același caracter, însă de dimensiuni diferite.

Geometrie Coeficient Puncte Echivalent  
echivalent Geometrie Puncte  
Puncte Transformare Echivalent

Transformarea figurii  $F$  în figura  $F_1$ , la care distanțele dintre puncte se schimbă de unul și același număr de ori  $k$ ,  $k > 0$ , se numește **transformare de asemănare**. Aceasta înseamnă: dacă punctele arbitrare  $A$  și  $B$  ale figurii  $F$  la transformarea de asemănare trec în punctele  $A_1$  și  $B_1$  ale figurii  $F_1$ , atunci  $A_1B_1 = kAB$ . Numărul  $k$  se numește **coeficientul de asemănare**.

Coeficientul de asemănare totdeauna este pozitiv. Dacă  $k = 1$ , atunci transformarea de asemănare este mișcare.

### TEOREMA 19

**Transformarea de asemănare transferă trei puncte, care aparțin unei drepte, în puncte, care sunt situate pe aceeași dreaptă și păstrează ordinea repartizării reciproce a acestor puncte.**

### DEMONSTRAȚIE.

Fie că punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  aparțin unei drepte astfel, că punctul  $B$  este situat între punctele  $A$  și  $C$ . Atunci  $AC = AB + BC$ . Pe baza definiției a transformării de asemănare pentru punctele  $A_1$ ,  $B_1$  și  $C_1$ , care sunt imaginile punctelor  $A$ ,  $B$  și  $C$ , se realizează așa egalități:  $A_1B_1 = kAB$ ,  $B_1C_1 = kBC$ ,  $A_1C_1 = kAC$ . Din ultima egalitate avem:

$$A_1C_1 = kAC = k(AB + BC) = kAB + kBC = A_1B_1 + B_1C_1,$$

sau  $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$ .

Din ultima egalitate reiese că punctele  $A_1$ ,  $B_1$  și  $C_1$  sunt situate pe aceeași dreaptă și punctul  $B_1$  se află între punctele  $A_1$  și  $C_1$ .  $\square$

Se pot demonstra și mai așa proprietăți ale asemănării. Transformarea de asemănare transferă segmentul în segment, semidreapta – în semidreaptă, drepte paralele – în drepte paralele, unghiul – în unghi egal cu el (încercați să faceți aceasta independent).

Pentru orice transformare de asemănare cu coeficientul  $k$  există transformarea inversă care este transformare de asemănare cu coeficientul de asemănare  $\frac{1}{k}$ .

Două figuri se numesc **asemenea** dacă ele se transferă una în alta printr-o transformare de asemănare. Dacă figura  $F$  este asemenea cu figura  $F_1$ , atunci se scrie  $F \sim F_1$ .

Relația de asemănare a figurilor are următoarele proprietăți:

- 1) totdeauna  $F \sim F$ ;
- 2) dacă  $F \sim F_1$ , atunci și  $F_1 \sim F$ ;
- 3) dacă  $F \sim F_1$  și  $F_1 \sim F_2$  atunci  $F \sim F_2$ .

În clasa a 8-a ați făcut cunoștință cu asemănarea triunghiurilor. Acum relația de asemănare poate fi extinsă asupra oricăror figuri geometrice. De exemplu, se poate demonstra, că **două poligoane sunt asemenea, dacă laturile lor sunt proporționale, iar unghiurile corespunzătoare sunt egale**. De aceea două pătrate totdeauna sunt asemenea. Totdeauna vor fi asemenea și două segmente, două circumferințe, două cercuri.

Voi deja știți că raportul perimetrelor triunghiurilor asemenea este egal cu coeficientul de asemănare. Această proprietate este adevărată și pentru alte figuri geometrice.

## TEOREMA 20

**Raportul perimetrelor ale poligoanelor asemenea este egal cu coeficientul de asemănare.**

### DEMONSTRAȚIE.

Fie  $ABC\dots M$  și  $A_1B_1C_1\dots M_1$  — poligoane asemenea cu coeficientul de asemănare  $k$  (fig.312), adică  $A_1B_1 = kAB$ ,  $B_1C_1 = kBC$ , ...,  $M_1A_1 = kMA$ . Atunci  $P_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + \dots + M_1A_1 = kAB + kBC + \dots + kMA = k(AB + BC + \dots + MA) = kP$ , de unde  $P_1 : P = k$ .  $\square$

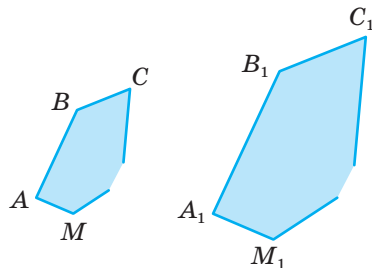


Fig.312

## TEOREMA 21

**Raportul ariilor ale poligoanelor asemenea este egal cu pătratul coeficientului de asemănare.**

### DEMONSTRAȚIE.

Să demonstrăm mai întâi această teoremă pentru triunghiuri (fig.313). Fie  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  cu coeficientul de asemănare  $k$ , adică  $A_1B_1 = kAB$ ,  $A_1C_1 = kAC$ ,  $\angle A_1 = \angle A$ .

Atunci  $S_{\triangle A_1 B_1 C_1} = \frac{1}{2} A_1 B_1 \cdot A_1 C_1 \cdot \sin A_1 = \frac{1}{2} kAB \cdot kAC \cdot \sin A =$   
 $= k^2 \left( \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A \right) = k^2 \cdot S_{\triangle ABC}$ , de unde  $S_{\triangle A_1 B_1 C_1} : S_{\triangle ABC} = k^2$ .

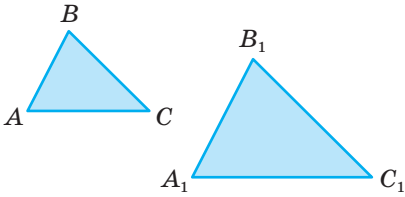


Fig.313

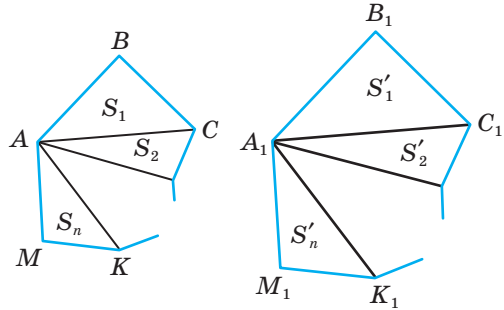


Fig.314

Să demonstrăm teorema pentru poligoane arbitrare. Fie că sunt date două poligoane asemenea, al căror coeficient de asemănare este  $k$ , iar ariile  $S$  și  $S'$ . Împărțim poligoanele date în triunghiuri cu diagonalele care pornesc din vârfurile corespunzătoare (fig.314). Atunci  $S' = S'_1 + S'_2 + \dots + S'_n = k^2 S_1 + k^2 S_2 + \dots + k^2 S_n = k^2 (S_1 + S_2 + \dots + S_n) = k^2 S$ .

Deci,  $S' : S = k^2$ . □

Se poate demonstra, că așa o proprietate au ariile oricăror figuri asemenea, dar nu numai poligoanele asemenea. De exemplu, figurile  $F$  și  $F_1$ , care sunt reuniuni ale pătratelor și semicercurilor sunt asemenea (fig.315). De aceea ariile lor se raportează ca pătratele elementelor liniare corespunzătoare:

$$S : S_1 = a^2 : c^2.$$

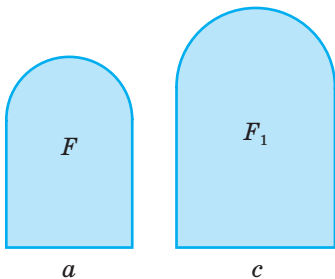


Fig.315

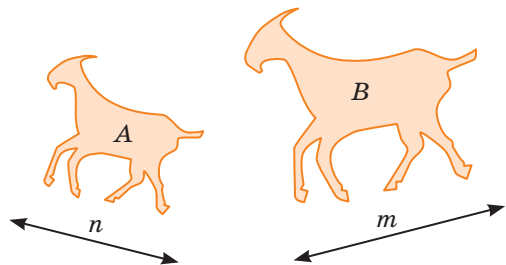


Fig.316

Figurile  $A$  și  $B$  reprezentate în figura 316 tot sunt asemenea, de aceea ariile lor se raportează ca pătratele distanțelor dintre punctele corespunzătoare ale acestor figuri  $n$  și  $m$ :

$$S_A : S_B = n^2 : m^2.$$

## PENTRU CEI CURIOSI

Fie că se dă punctul  $O$  și figura  $F$  (fig.317). Ducem printr-un punct arbitrar  $X$  al figurii  $F$  semidreapta  $OX$  și notăm pe ea un astfel de punct  $X_1$ , că  $OX_1 : OX = k$ . Dacă într-un astfel de mod de construit punctele corespunzătoare pentru fiecare punct al figurii  $F$ , atunci obținem figura nouă  $F_1$ .

Așa o transformare a figurii  $F$  în  $F_1$  se numește **omotetie** în raport cu punctul  $O$  și coeficientul  $k$ . Se spune de asemenea că figura  $F_1$  este omotetică figurii  $F$  în raport cu centrul  $O$  și coeficientul  $k$ .

Dacă  $k > 1$ , arunci omotetia transferă figura dată în una mai mare: fiecare distanță o mărește de  $k$  ori. Dacă  $0 < k < 1$ , atunci omotetia fiecare distanță o micșorează de  $k$  ori. Dacă  $k=1$ , atunci omotetia transferă fiecare figură în tot aceeași figură.

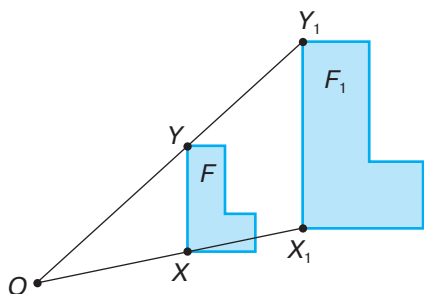


Fig.317

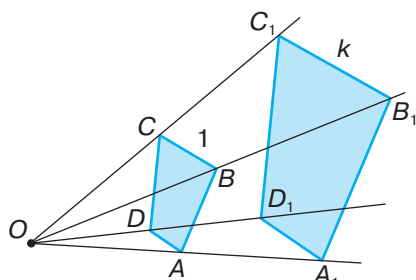


Fig.318

Pentru  $k \neq 1$  omotetia nu păstrează distanțele dintre puncte. De exemplu, dacă  $k=2$ , atunci punctele  $X$  și  $Y$  sunt transferate de omotetie în așa puncte  $X_1$  și  $Y_1$  că  $X_1Y_1 = 2XY$ . Deci,  $X_1Y_1 \neq XY$ , de aceea omotetia nu este mișcare. Dar la omotetie se păstrează raportul distanțelor dintre puncte. De exemplu, dacă la omotetia cu coeficientul  $k$  patrulaterul  $ABCD$  trece în  $A_1B_1C_1D_1$ , atunci fiecare din raporturile

$$\frac{A_1B_1}{AB}, \frac{B_1C_1}{BC}, \frac{C_1D_1}{CD}, \frac{D_1A_1}{DA}, \frac{A_1C_1}{AC}, \frac{B_1D_1}{BD}$$

este egal cu  $k$  (fig.318).

Din definiția transformării de asemănare rezultă, că fiecare două figuri egale sunt asemenea. Dar nu fiecare două figuri omotetice sunt egale. Analogic, fiecare două figuri omotetice sunt asemenea, însă nu fiecare figuri asemenea sunt omotetice. Cu ajutorul diagramei aceasta se poate reprezenta în felul următor (fig.319 și 320).



Fig.319

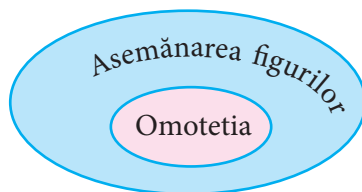


Fig.320





Oare există transformări geometrice, deosebite de mișcări și transformările de asemănare? Există. Așa sunt **comprimarea** și **extensiunea**. De exemplu, dacă fiecare punct  $a(x;y)$  al planului de coordonate se transferă în punctul  $A(x;ky)$ , atunci se spune despre comprimarea acestui plan către axa  $x$  cu coeficientul  $k$ . Dacă coeficientul  $k > 1$ , atunci astfel de comprimare se numește extindere. În figuri este reprezentată: rețeaua cu celule hexagonale regulate (fig.312,a) și rețeaua, care este comprimată către axa  $x$  (fig. 321, b).

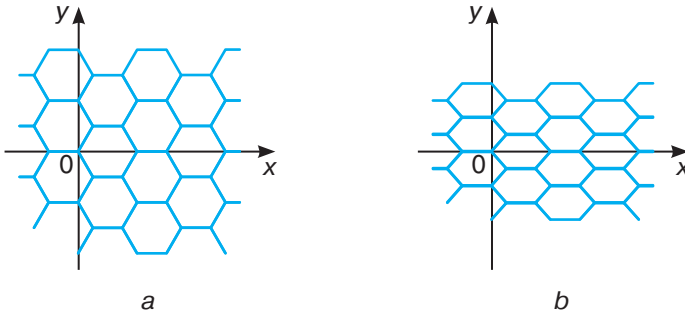


Fig.321

Transformarea geometrică interesantă este **inversia** – simetrie specifică în raport cu circumferința. Mulțimea punctelor, situate în domeniul interior al circumferinței, această transformare o transferă în punctele domeniului exterior al acestei circumferințe, și invers. Inversia este examinată în cursurile superioare de geometrie.

## ÎNTREBĂRI ȘI ÎNSĂRCINĂRI PENTRU AUTOCONTROL

1. Care transformare geometrică este numită transformare de asemănare?
2. Ce proprietăți are transformarea de asemănare?
3. Care figuri se numesc asemenea?
4. Numiți proprietățile figurilor asemenea.
5. Cum se raportează perimetrele figurilor asemenea?
6. Cum se raportează ariile figurilor asemenea?

## EFACTUĂM ÎMPREUNĂ

1. Perimetrele a două poligoane asemenea sunt proporționale cu numerele 2 și 5. Aflați ariile acestor poligoane, dacă diferența lor este egală cu  $42 \text{ cm}^2$ .
- Dacă perimetrele sunt proporționale cu numerele 2 și 5, atunci ariile  $S_1 : S_2 = 4 : 25$ . Fie că coeficientul de proporționalitate este  $x$ . Atunci  $S_1 = 4x$ ,  $S_2 = 25x$ . Conform condiției problemei  $25x - 4x = 42$ , de unde  $x = 2$ . Atunci  $S_1 = 8 \text{ cm}^2$ ,  $S_2 = 50 \text{ cm}^2$ .

2 Se dă pătratul  $ABCD$ . În triunghiul  $ABC$  este înscris pătratul  $MNPK$  (fig.322). Oare sunt asemenea aceste pătrate? Cu care coeficient de asemănare?

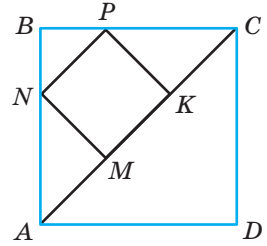


Fig.322

- Două pătrate totdeauna sunt asemenea. Să aflăm coeficientul de asemănare. Fie  $AB = a$ , atunci  $AC = a\sqrt{2}$ .  $\triangle AMN$  — isoscel dreptunghic, deoarece  $\angle AMN = 90^\circ$ ,  $\angle NAM = \angle ANM = 45^\circ$ . Atunci  $AM = MN$ . Analogic  $KC = PK$ .

$$\text{Așadar, } MK = \frac{1}{3} AC = \frac{a\sqrt{2}}{3}, \text{ de unde } k = \frac{MK}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{3a} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

## PROBLEME ȘI EXERCIȚII

### EFFECTUAȚI ORAL

923. În care din cazurile, reprezentate în figurile 323-326, pătratele sunt asemenea?

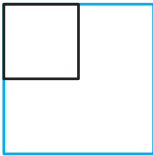


Fig.323

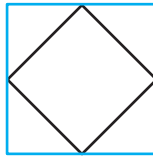


Fig.324

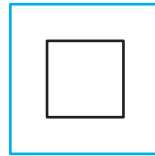


Fig.325

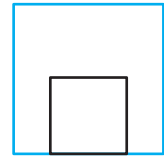


Fig.326

924. Oare totdeauna sunt asemenea două hexagoane regulate?
925. Numiți figurile care totdeauna sunt asemenea.
926. Oare totdeauna sunt asemenea două romburi? Oare sunt asemenea romburile, dacă unul din ele are unghi de  $55^\circ$ , iar altul — de  $125^\circ$ ?
927. Raza unei circumferințe este egală cu diametrul alteia. Aflați coeficientul de asemănare.
928. Ariile a două poligoane asemenea se raportează ca 9:16. Cum se raportează perimetrele lor?
929. Laturile dreptunghiului sunt de 2 cm și 6 cm. Aflați aria și perimetrul dreptunghiului asemenea, dacă a)  $k = 2$ ; b)  $k = 0,5$ .
930. Perimetrul poligonului este de 10 m. Aflați perimetrul poligonului asemenea, dacă  $k=0,2$ .
931. Două figuri sunt simetrice în raport cu o oarecare dreaptă. Oare sunt ele asemenea? Cu care coeficient de asemănare?

### A

932. Diagonala unuia din pătrate este latura altuia. Cu ce este egal coeficientul de asemănare al acestor pătrate?

- 933.** Segmentul paralel cu bazele trapezului, împarte acest trapez în două trapeze. Oare este măcar unul din ele asemenea cu cel dat??
- 934.** Linia medie a trapezului îl împarte în două trapeze. Oare sunt ele asemenea?
- 935.** Cum se raportează lungimile circumferințelor:  
a) înscrisă în pătrat și circumscrisă lui;  
b) înscrisă într-un triunghi echilateral și circumscrisă lui?
- 936.** Aflați raportul ariilor părților, în care este împărțit triunghiul de către linia lui medie.
- 937.** Copiați tabelul în caiet și completați-l, dacă  $P_1, P_2, S_1, S_2$  sunt perimetrele și ariile a două figuri asemenea,  $k$  – coeficientul lor de asemănare.

$k$	$P_1$	$P_2$	$S_1$	$S_2$
2	5			16
	12	3	48	
		5	90	10
0,6		10	72	

- 938.** Aflați laturile patrulaterului cu perimetrul de 88 cm, dacă el este asemenea cu patrulaterul care are laturile de 3 cm, 5 cm, 6 cm și 8 cm.
- 939.** Perimetrele a două poligoane asemenea se raportează ca 2:5, iar suma ariilor lor este egală cu 232 cm<sup>2</sup>. Aflați aria fiecăruia din ele.
- 940.** Laturile unui dreptunghi sunt egale cu 5 cm și 9 cm. Aflați laturile dreptunghiului asemenea, dacă aria lui este egală cu 180 cm<sup>2</sup>.
- 941.** Diagonalele rombului sunt egale cu 10 cm și 24 cm, iar latura rombului, asemenea cu el este egală cu 26 cm. Aflați aria celui alt romb.

## B

- 942.**  $M$  – mijlocul laturii  $BC$  a paralelogramului  $ABCD$ ,  $O$  – punctul de intersecție al dreptelor  $AC$  și  $MD$ . Aflați aria  $\triangle MOC$ , dacă  $S_{\triangle AOD} = 12$ .
- 943.** Prelungirile laturilor laterale  $AB$  și  $CD$  ale trapezului  $ABCD$  se intersectează în punctul  $M$ . Aflați aria trapezului, dacă  $AB : BM = 2 : 3$ , iar aria triunghiului  $BMC$  este egală cu 18 cm<sup>2</sup>.
- 944.** Aflați razele a două cercuri, care sunt tangente exterior, dacă ariile lor se raportează cu 4:25, iar distanța dintre centrele lor este egală cu 14 cm.
- 945.**  $AM$  și  $BN$  — medianele triunghiului  $ABC$ . Aflați aria patrulaterului  $ABMN$ , dacă aria triunghiului  $ABC$  este egală cu 48 cm<sup>2</sup>.
- 946.** Formulați și demonstrați criteriile de asemănare: a) a două romburi; b) a două dreptunghiuri.
- 947.** Demonstrați că patrulateralele sunt asemenea, dacă diagonalele împart unghiurile ascuțite în unghiuri egale corespunzător.
- 948.** Demonstrați că două trapeze isoscele sunt asemenea, dacă unghiurile ascuțite ale lor sunt egale, iar diagonalele sunt bisectoarele acestor unghiuri.

- 949.** Sunt date inele (fig.327). Razele unuia din ei sunt de 1 cm și 2 cm, iar ale celui de-al doilea – 2 cm și 3 cm. Oare sunt inelele asemenea? Cercetați și stabiliți pentru care condiție două inele, mărginite de circumferințe concentrice, sunt asemenea
- 950.**  $O$  – punctul de intersecție al diagonalelor trapezului  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ). Aflați aria trapezului, dacă ariile triunghiului  $AOD$  și  $BOC$  sunt egale respectiv cu  $90 \text{ cm}^2$  și  $40 \text{ cm}^2$ .
- 951.** Aflați raportul lungimilor a două circumferințe cu centrele  $O_1$  și  $O_2$ , dacă tangenta exterioară comună a lor intersectează linia centrelor în punctul  $P$  și  $PO_1 : O_1O_2 = 2 : 7$ .
- 952.** În interiorul pentagonului convex  $ABCDE$  a fost luat un punct arbitrar  $O$ .  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$  — puncte simetrice cu punctul  $O$  în raport cu vârfurile pentagonului. Aflați aria pentagonului  $ABCDE$ , dacă aria pentagonului  $A_1B_1C_1D_1E_1$  este egală cu  $100 \text{ cm}^2$ .
- 953.** În interiorul patrulaterului convex, a cărui arie este egală cu  $S$  este luat un punct arbitrar și el este transferat simetric în raport cu mijlocurile tuturor laturilor. Punctele obținute sunt consecutiv unite. Aflați aria patrulaterului obținut.
- 954.** În triunghiul  $ABC$ , a cărui arie este de  $45 \text{ cm}^2$ , sunt duse înălțimile  $AN$  și  $BM$ . Aflați aria patrulaterului  $ABNM$ , dacă  $\cos C = \frac{1}{3}$ .

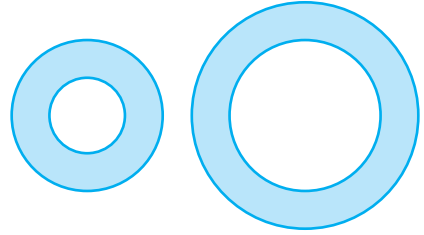


Fig.327

### ÎNSĂRCINARE PRACTICĂ

- 955.** Alegeți câteva citate despre matematică și cu ajutorul calculatorului faceți un nor de cuvinte, și ca pe el să fie imagini asemănătoare și neasemănătoare.

### PROBLEME PENTRU REPETARE

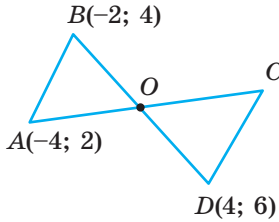
- 956.** Demonstrați că mijlocurile bazelor trapezului, punctul de intersecție al diagonalelor lui și punctul de intersecție al dreptelor, pe care sunt situate laturile laterale ale trapezului se află pe aceeași dreaptă.
- 957.** Cea mai scrută mediană a triunghiului dreptunghic este egală cu 5 dm, iar una din catete – cu 6 dm. Aflați aria triunghiului.
- 958.** Într-un triunghi mediana dusă la o latură face cu ea unghiul de  $60^\circ$ , iar celelalte două laturi sunt egale cu 7 cm și  $\sqrt{19}$  cm. Aflați latura necunoscută a triunghiului.

## PROBLEME CU DESENE GATA

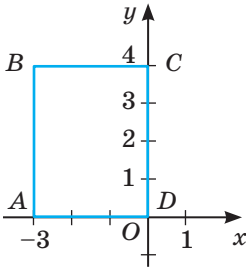
**A**

**1**  $AB$  este simetric cu  $CD$  în raport cu  $O$

$C(x; y)$

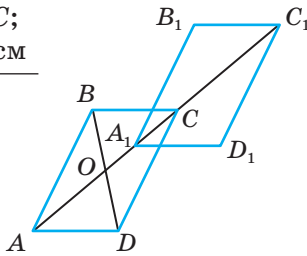


**2** Ecuțiile axelor de simetrie ale patrulatrului  $ABCD$



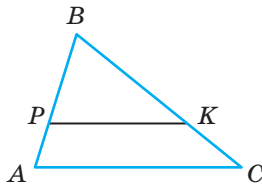
**3**  $OA_1 = A_1C$ ;  
 $AC = 10$  cm

$AC_1$ ;  $BB_1$



**4**  $PK \parallel AC$ ;  
 $S_{\triangle PBK} : S_{\triangle PKC} = 9 : 7$

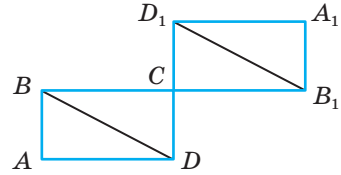
$AP : PB$



**B**

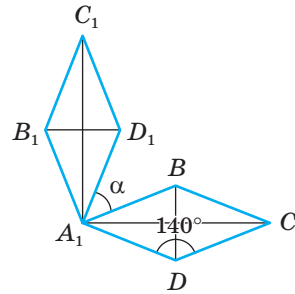
$A_1B_1C_1D_1$  este simetric cu  $ABCD$  în raport cu  $C$

Demonstrați:  $BD \parallel B_1D_1$ .

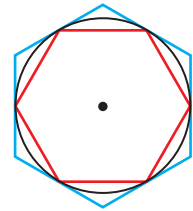


Este efectuată rotația cu  $90^\circ$

$\alpha$

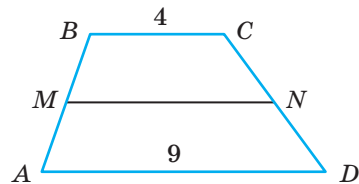


Raportul ariilor ale hexagoanelor regulate



$MBCN \sim AMND$

$MN$ ;  $S_{MBCN} : S_{AMND}$



## LUCRAREA INDEPENDENTĂ 5

### VARIANTA 1

- 1°. Construieți un triunghi arbitrar  $ABC$  și executați transportul paralel astfel, ca vârful  $A$  să se transfere în  $C$ .
- 2°. Construieți pătratul  $ABCD$  fiind dată latura lui  $AB=4$  cm și rotiți-l cu  $60^\circ$  în jurul mijlocului laturii  $AB$  împotriva mișcării acului de ceasornic.
- 3°. Paralelogramele  $ABCD$  și  $AB_1CD_1$  sunt simetrice în raport cu dreapta  $AC$ . Demonstrați că segmentele  $BD_1$  și  $B_1D$  sunt egale și paralele.

### VARIANTA 2

- 1°. Construieți paralelogramul arbitrar  $ABCD$  și efectuați deplasarea paralelă a lui astfel, ca vârful  $A$  să treacă în  $C$ .
- 2°. Construieți romb  $KPMT$  după latura  $KP = 3$  cm și unghiul  $K = 45^\circ$  și rotiți-l cu  $60^\circ$  în jurul mijlocului laturii  $KP$  în direcția mișcării acului de ceasornic.
- 3°. Dreptunghiurile  $ABCD$  și  $A_1BC_1D_1$  sunt simetrice în raport cu vârful  $B$ . Demonstrați că segmentele  $AC_1$  și  $A_1C$  sunt paralele și egale.

### VARIANTA 3

- 1°. Construieți dreptunghiul arbitrar  $ABCD$  și executați transportul paralel a lui astfel, ca vârful  $A$  să treacă în mijlocul lui  $BC$ .
- 2°. Construieți triunghiul dreptunghic cu catetele de 3 cm și 4 cm și rotiți-l cu  $45^\circ$  în jurul mijlocului ipotenuzei împotriva mișcării acului de ceasornic.
- 3°. Patrulaterul  $ABCD$  și  $A_1B_1CD$  sunt simetrice în raport cu dreapta  $CD$ . Demonstrați că segmentele  $AA_1$  și  $BB_1$  sunt paralele.

### VARIANTA 4

- 1°. Construieți paralelogramul arbitrar  $KPMT$  și efectuați deplasarea paralelă a lui astfel, ca vârful  $T$  să treacă în mijlocul lui  $PM$ .
- 2°. Construieți dreptunghiul  $ABCD$ , în care  $AB = 3$  cm,  $BC = 4$  cm și rotiți-l cu  $60^\circ$  în jurul mijlocului  $O$  al diagonalei  $AC$  în direcția mișcării acului de ceasornic.
- 3°. Rombii  $ABCD$  și  $A_1B_1CD_1$  sunt simetrici în raport cu vârful  $C$ . Demonstrați, că segmentele  $AB_1$  și  $A_1B$  sunt egale și paralele.

## ÎNSĂRCINĂRILE TESTE 5

<p><b>1</b> Care din transformări nu întotdeauna păstrează distanța dintre puncte?</p>	<p>a) rotația; b) simetria centrală; c) transformarea de asemănare; d) simetria axială</p>
<p><b>2</b> Punctele <math>A</math> și <math>B</math> sunt simetrice în raport cu punctul <math>O</math>. Care semn trebuie de pus în loc de <math>*</math>: <math>AB * 2 AO</math>?</p>	<p>a) <math>&gt;</math>;                      c) <math>=</math>; b) <math>&lt;</math>;                      d) <math>\neq</math>.</p>
<p><b>3</b> <math>\triangle ABC</math> la rotația în jurul punctului <math>A</math> cu unghiul de <math>60^\circ</math> a trecut în <math>\triangle AB_1C_1</math>. Aflați <math>\angle BAC</math>, dacă <math>\angle B_1AC_1 = 85^\circ</math>.</p>	<p>a) <math>85^\circ</math>;                      B) <math>95^\circ</math>; b) <math>145^\circ</math>;                      r) <math>35^\circ</math>.</p>
<p><b>4</b> Care din figuri are numai 4 axe de simetrie?</p>	<p>a) circumferința; c) rombul; b) pătratul;        d) dreptunghiul.</p>
<p><b>5</b> Punctele <math>A(-4; 6)</math> și <math>B(-2; 2)</math> sunt simetrice în raport cu punctul <math>M</math>. Aflați coordonatele lui.</p>	<p>a) <math>(-6; 8)</math>;                      c) <math>(-3; 4)</math>; b) <math>(-3; 2)</math>;                      d) <math>(-1; 2)</math>.</p>
<p><b>6</b> Punctele <math>P</math> și <math>K</math> sunt simetrice în raport cu dreapta <math>l</math>. Ce semn trebuie de pus în loc de <math>*</math>: <math>PK * l</math>?</p>	<p>a) <math>\parallel</math>;                      c) <math>\perp</math>; b) <math>\in</math>;                         d) <math>=</math>.</p>
<p><b>7</b> La deplasarea paralelă punctul <math>A(-3; 5)</math> a trecut în punctul <math>B(-1; 3)</math>. În care punct s-a transferat mijlocul segmentului <math>AB</math>?</p>	<p>a) <math>(-2; 4)</math>;                      c) <math>(1; 1)</math>; b) <math>(-4; -6)</math>;                      d) <math>(0; 2)</math>.</p>
<p><b>8</b> Care din figuri nu totdeauna sunt asemenea?</p>	<p>a) două circumferințe; b) două pătrate; c) două triunghiuri regulate; d) două romburi.</p>
<p><b>9</b> Ariile a două semicercuri se raportează ca 4:9. Cum se raportează razele lor?</p>	<p>a) <math>16 : 81</math>;                      c) <math>1 : 1,5</math>; b) <math>2 : 4,5</math>;                      d) <math>2 : 3</math>.</p>
<p><b>10</b> Care din poligoanele regulate sunt central simetrice?</p>	<p>a) triunghiul; b) pentagonul; c) hexagonul; d) septagonul.</p>

## PROBLEME TIPICE PENTRU LUCRAREA DE CONTROL

- 1°. Se dă segmentul  $AB$  și punctul  $O \notin AB$ . Construieți:
- segmentul simetric segmentului  $AB$  în raport cu punctul  $O$ ;
  - punctul  $O_1$ , simetric cu punctul  $O$  în raport cu dreapta  $AB$ ;
  - segmentul care se obține la rotația segmentului  $AB$  cu unghiul de  $60^\circ$  în jurul punctului  $O$  în direcția mișcării acului de ceasornic;
- 2°.  $\triangle ABC$  este simetric cu  $\triangle AMC$  în raport cu dreapta  $AC$ .  $\angle BCA = 20^\circ$ ,  $\angle MAC = 45^\circ$ . Aflați restul unghiurilor ale acestor triunghiuri.
- 3°. Paralelogramele  $A_1B_1C_1D_1$  și  $ABCD$  sunt simetrice în raport cu un oarecare punct  $O$ . Aflați laturile paralelogramelor, dacă perimetrul lui  $ABCD$  este egal cu 30 cm, iar  $B_1C_1 = 10$  cm.
- 4°. Aflați coeficientul de asemănare a două dreptunghiuri și ariile lor, dacă laturile unuia din ei sunt de 5 cm și 8 cm, iar perimetrul celui de-al doilea – 52 cm.
- 5°.  $O$  — punctul de intersecție al diagonalelor rombului  $ABCD$ . La deplasarea paralelă punctul  $A$  trece în punctul  $O$ , punctul  $C$  – în  $C_1$ . Aflați  $AC_1$ , dacă  $AC = 5$  cm.
- 6°. Pentru care valori ale lui  $a$  și  $b$  punctele  $A(a; 4)$  și  $B(3; 2b)$  sunt simetrice în raport cu punctul  $M(-1; 6)$ ?
- 7°.  $BM$  — mediana triunghiului  $ABC$  (fig.328). Pe laturile  $BC$  și  $AC$  sunt punctele  $P$  și  $K$  astfel, că  $BP : PC = MK : KC = 2 : 1$ . Aflați aria patrulaterului  $MBPK$ , dacă aria triunghiului  $ABC$  este egală cu  $54 \text{ cm}^2$ .

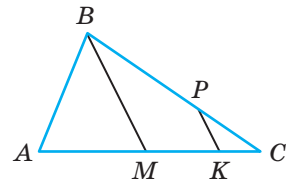


Fig.328

- 8°. Scrieți ecuația dreptei în care trece dreapta  $y=2$  la rotația în jurul punctului  $M(1; -1)$  cu unghiul de  $90^\circ$ :
- în direcția mișcării acului de ceasornic;
  - împotriva direcției de mișcare a acului de ceasornic.
- 9°. Găsiți pe axa  $OX$  punctul de la care suma distanțelor până la punctele  $M(-2; 5)$  și  $N(4; 4)$  să fie cea mai mică.
- 10°. Demonstrați că dacă latura și diagonala unui paralelogram sunt proporționale cu latura și diagonala altui paralelogram și unghiurile formate de ele, sunt egale, atunci paralelogramele sunt asemenea.



# Principalul în capitolul 5

Dacă punctele figurii  $F$  de le strămutat, deplasat cumva, atunci obținem o figură nouă  $F_1$ . Dacă totodată diferite puncte ale figurii  $F$  trec (se transferă) în diferite puncte ale figurii  $F_1$ , atunci se spune despre **transformarea geometrică** a figurii  $F$  în figura  $F_1$ . Totodată figura  $F_1$  se numește imaginea figurii  $F$ , iar figura  $F$  – preimaginea figurii  $F_1$ .

Cele mai importante transformări geometrice – mișcările și transformarea de asemănare.

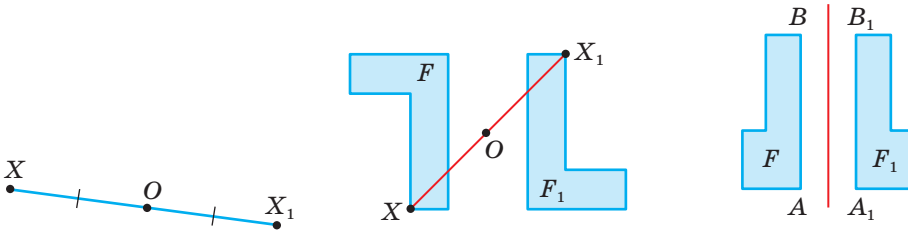
**Mișcarea** se numește așa o transformare geometrică, la care se păstrează distanțele dintre punctele corespunzătoare.

Mișcarea transferă: segmentul – în segmentul egal cu el, dreapta – în dreaptă, semidreaptă în semidreaptă, unghiul – în unghiul egal cu el, triunghiul în triunghiul egal cu el.

Două figuri se numesc **egale**, dacă există o mișcare, care trece o figură în cealaltă. Fiecare mișcare transferă orice figură în figura egală cu ea. Dacă două figuri geometrice sunt egale, atunci există o mișcare care transferă una din ele în cealaltă.

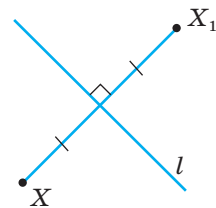
Cele mai importante mișcări ale figurilor în plan: **simetria în raport cu un punct, simetria în raport cu o dreaptă, rotația, deplasarea paralelă.**

Punctele  $X$  și  $X_1$  se numesc **simetrice în raport cu punctul  $O$** , dacă  $O$  – mijlocul segmentului  $XX_1$ . Dacă în raport cu  $O$  fiecare punct al figurii  $F$  este simetric unui oarecare punct al figurii  $F_1$  și invers, atunci figurile  $F$  și  $F_1$  sunt simetrice în raport cu punctul  $O$ . O astfel de transformare a figurii  $F$  în  $F_1$  se numește **transformarea de simetrie în raport cu punctul  $O$** .



Punctele  $X$  și  $X_1$  se numesc **simetrice în raport cu dreapta  $l$** , dacă această dreaptă este mediatoarea segmentului  $XX_1$ . Dacă punctul  $X$  aparține dreptei  $l$ , atunci el se consideră simetric cu sine însuși în raport cu dreapta  $l$ .

Transformarea figurii  $F$ , la care fiecare punct al ei se transferă în punctul simetric lui în raport cu dreapta  $l$  se numește **transformarea de simetrie în raport cu dreapta  $l$** . Dacă la această transformare figura  $F$  se transferă în  $F_1$ , atunci aceste două figuri se numesc **simetrie în raport cu dreapta  $l$** .



Fie că se dă punctul  $O$  și o figură oarecare  $F$ . Rotim punctul  $X$  al acestei figuri în jurul punctului  $O$  cu unghiul  $\alpha$  în direcția mișcării acului de ceasornic. Totodată punctul  $X$  va trece în așa un punct  $X_1$ , că măsura unghiulară a arcului  $XX_1$  cu centrul  $O$  este egală cu  $\alpha$  ( $OX$  și  $OX_1$  – raze egale). Dacă cu așa un procedeu de rotit în jurul punctului  $O$  cu unghiul  $\alpha$  fiecare punct al figurii  $F$ , atunci obținem figura  $F_1$ . Se spune că rotația în jurul punctului  $O$  cu unghiul  $\alpha$  transferă figura  $F$  în figura  $F_1$ . Punctul  $O$  se numește **centrul de rotație**, iar unghiul  $XOX_1$  – **unghiul de rotație**.

Dacă fiecare punct al figurii  $F$  de-l strămutat, deplasat în una și aceeași direcție la una și aceeași distanță  $XX_1$  (sau cu vectorul  $\overline{XX_1}$ ), obținem figura  $F_1$ . În acest caz se spune că **deplasarea paralelă, care transferă punctul  $X$  în  $X_1$ , transferă figura  $F$  în  $F_1$** .

Transformarea figurii  $F$  în figura  $F_1$  la care distanțele dintre puncte se schimbă de unul și același număr de ori  $k$ ,  $k > 0$ , se numește **transformare de asemănare**. Aceasta înseamnă că atunci, când punctele arbitrare  $A$  și  $B$  ale figurii  $F$  la transformarea de asemănare trec în punctele  $A_1$  și  $B_1$  ale figurii  $F_1$  este adevărată egalitatea  $A_1B_1 = kAB$ . Numărul  $k$  se numește **coeficientul de asemănare**. Coeficientul de asemănare totdeauna este pozitiv. Dacă  $k = 1$ , atunci asemănarea este mișcare.

Două figuri se numesc **asemenea**, dacă există transformarea de asemănare care transferă una din ele în cealaltă.

Transformarea de asemănare transferă fiecare figură în figură asemenea cu ea.

Raportul perimetrelor a două figuri asemenea este egal cu coeficientul de asemănare  $k$ :

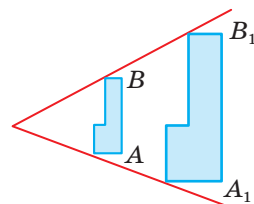
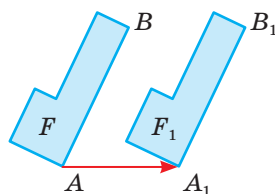
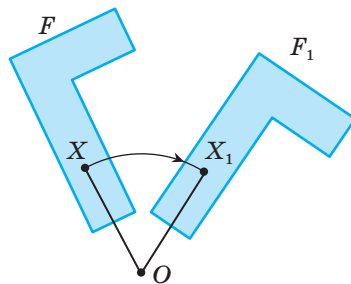
$$P_1 : P = k.$$

Raportul ariilor ale figurilor asemenea este egal cu pătratul coeficientului de asemănare:

$$S : S_1 = k^2.$$

Ariile figurilor asemenea se raportează ca pătratele elementelor liniare corespunzătoare:

$$S : S_1 = a^2 : c^2.$$



## Proiectul de învățământ 1 Curbe interesante

Clasa se împarte în trei grupe: „istoricii”, „matematicii”, „designii de calculator”. Fiecare elev poate participa la lucrul uneia sau a două grupe de proiect. Elevii se organizează în grupe și lucrează individual sau în perechi asupra uneia din temele propuse.

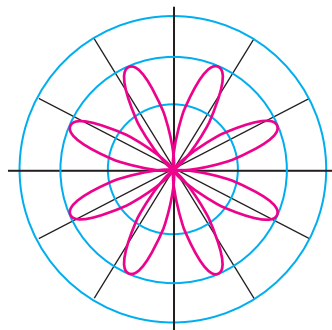
**1** „**Istoricii**” cercetează, care curbe au constituit obiectul studierii de către matematicieni în diferite timpuri, examinează particularitățile folosirii acestor curbe, clarifică proveniența denumirilor lor, fac cunoștință cu viața și activitatea matematicienilor care au examinat aceste curbe. Se poate propune elevilor să cerceteze istoria studierii, deja cunoscute lor, curbelor (a parabolei, hiperbolei, elipsei, circumferinței) sau a acelor, pe care le vor studia în clasele superioare (sinusoidele, tangenosoidelor). Afară de aceasta mai pot fi, de exemplu, și așa curbe:

- spirala lui Arhimede;;
- lăncișorul;
- bucla Aniezi;
- cicloida;
- Foaia Descartes.



**2** „**Matematicienii**” studiază diferite sisteme de coordonate și regulile de construire în ele. Află cu care formule sunt date curbele cunoscute lor de noile sisteme de coordonare. Clarifică prioritățile și neajunsurile acestor sisteme de coordonate și metodele de folosire. Construiesc curba sa și o definesc analitic și grafic în câteva sisteme de coordonate. Se poate de le propus elevilor să facă cunoștință amănunțită cu una din următoarele sisteme de coordonate:

- sistemul de coordonate rectangular în plan;
- sistemul de coordonate rectangular în spațiu;
- sistemul de coordonate polare;
- sistemul de coordonate sferice.

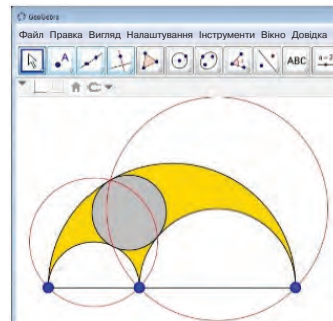


3 „Designii de calculator” studiază unul din procedeele de programare accesibile (Excel, GeoGebra, Gran ș.a.) pentru construirea comodă a curbelor. Cu ajutorul procedeeului de programare ales se construiesc curbe care sunt dificile de construit cu procedeul tradițional.

Temele pentru activitatea asupra proiectului se anunță elevilor la sfârșitul lui septembrie.

Rezultatele lucrului asupra proiectului este de dorit de perfectat în formă de portofoliu cu prezentare la calculator.

Apărarea proiectelor este rațional de o petrecut la o măsură extrașcolară, invitând elevii altor clase, profesori, părinți.



## PROIECTUL DE ÎNVĂȚĂMÂNT 2

### Metoda vectorială de rezolvare a problemelor

Acest proiect este rațional de-l îndeplinit individual. Elevilor li se propune să prelucreze materialul paragrafului 12 și să găsească informații suplimentare referitoare la utilizarea vectorilor.

Metoda vectorială de rezolvare a problemelor este bazată pe folosirea proprietăților vectorilor. Particularitatea acestei metode constă în aceea, că în procesul rezolvării problemelor nu apare necesitatea în examinarea configurațiilor geometrice complicate. Uneori cu ajutorul metodei vectoriale problema este foarte simplă de o redus la problemă algebrică, care este mai ușor de-o rezolvat decât problema geometrică inițială.

Problemele care se rezolvă cu ajutorul vectorilor se împart în afine și metrice. Primele se rezolvă cu utilizarea numai a operațiilor liniare: adunarea și scăderea vectorilor și înmulțirea vectorului cu un număr. Problemele metrice, afară de altele, se referă la aflarea lungimii segmentului și a măsurii unghiului, de aceea în procesul rezolvării lor se folosesc afară de operațiile liniare și produsul scalar al vectorilor.

Elevii trebuie să înțeleagă regula-reper de rezolvare a problemelor metrice cu metoda vectorială. Să ilustrăm regula-reper pentru determinarea lungimii segmentului cu metoda vectorială pe un exemplu concret.

Pentru calcularea lungimii segmentului este necesar:

- de ales în plan doi vectori necoliniari (de bază), ale căror lungimi și unghiul format de ei se consideră cunoscute.
- vectorul lungimea căruia este egală cu lungimea segmentului căutat, de-l descompus după vectorii de bază;

- de calculat lungimea segmentului căutat, ca modulul vectorului cu formula:  $|\vec{a}| = \sqrt{a^2}$ .

**Problemă.** Pe ipotenuza  $AB$  a triunghiului  $ABC$  este luat punctul  $D$ , care satisface condiția:  $BD:DA = 3:1$ . Exprimați lungimea segmentului  $CD$  prin lungimile catetelor:  $CB = a$ ,  $CA = b$ .

*Rezolvare.* Fie că de bază sunt vectorii  $CA$  și  $CB$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $|\vec{a}| = a$ ,  $|\vec{b}| = b$ . Exprimăm vectorul  $\overrightarrow{CD}$  prin  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  și aflăm lungimea lui.

Din triunghiul  $CAD$   $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \vec{b} + \overrightarrow{AD}$ ;  
 $AD \uparrow \uparrow AB$ ,  $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}$ ;

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} = \frac{\vec{a} - \vec{b}}{4}, \text{ iar } \overrightarrow{CD} = \vec{b} + \frac{\vec{a} - \vec{b}}{4} = \frac{3\vec{b} + \vec{a}}{4}.$$

$$\text{Deoarece } |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{CD^2}, \text{ reiaș } |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{\left(\frac{3\vec{b} + \vec{a}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{9b^2 + 6\vec{a}\vec{b} + a^2}}{4}.$$

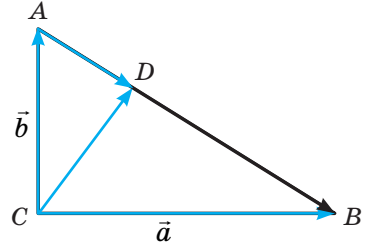
Conform condiției  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , de aceea  $\vec{a}\vec{b} = 0$ . Deoarece  $\vec{a}^2 = a^2$ ,  $\vec{b}^2 = b^2$ , avem că

$$|\overrightarrow{CD}| = \frac{\sqrt{9b^2 + a^2}}{4}.$$

$$\text{Deci, } CD = \frac{\sqrt{9b^2 + a^2}}{4}.$$

Cu metoda vectorială este rațional de rezolvat următoarele probleme geometrice:

- problemele la demonstrarea paralelismului dreptelor și segmentelor;
- problemele la demonstrarea a celui fapt, că un oarecare punct împarte segmentul într-un oarecare raport;
- problemele la demonstrarea apartenenței a trei puncte unei drepte;
- problemele la demonstrarea perpendicularității dreptelor și segmentelor;
- problemele la demonstrarea dependențelor dintre lungimile segmentelor;
- problemele la aflarea mărimii unghiului.



## PROIECTUL DE ÎNVĂȚĂMÂNT 3

### Trigonometria cunoscută și necunoscută

Clasa este împărțită în trei grupe: „istoricii”, „matematicienii”, „practicienii”. Fiecare elev poate participa în lucrul uneia sau a două grupe de proiect.

Elevii se organizează în grupe și lucrează individual sau în perechi asupra uneia din temele propuse.

1 „Istoricii” cercetează apariția trigonometriei și dezvoltarea ei în anumite perioade:

- apariția trigonometriei în Grecia Antică;
- dezvoltarea învățaturii despre mărimile trigonometrice în țările Orientului;
- dezvoltarea trigonometriei în Europa.



Ptolomei



Abuli-Bafa



Regiomontanus

Rezultatele lucrului asupra proiectului elevii din grupa „Istoricii” în perfectează în formă de gazete de perete și portfoliul de grupă cu prezentare computerizată.

2 „Matematicienii” însușesc material teoretic suplimentar, referitor la geometrie. Acest material poate cuprinde , de exemplu, așa întrebări:

- procese periodice și funcțiile trigonometrice;
- graficele funcțiilor trigonometrice;
- teoremele adunării și formulele unghiurilor multiple.

Rezultatele lucrului asupra proiectului elevii grupei „matematicienii” le definitivează în formă de portfoliu individual.

3 „Practicienii” cercetează unde și cum se utilizează cunoștințele din trigonometrie.

Trigonometria a apărut ca mijloc de a măsura distanțele și dimensiunile corpurilor. De aceea cel mai frecvent era folosită în astronomie, geografie și navigația maritimă. Inițial se foloseau de instrumente de măsurat primitive: distanțele erau măsurate cu sfoara, unghiurile – cu astrolabele, echerile, eclimetrul. Cu timpul instrumentariul este îmbunătățit și teoria îmbogățită, au introdus funcțiile trigonometrice.

Mai târziu au descoperit că funcțiile trigonometrice de minune descriu oscilațiile armonice și diverse procese periodice, de aceea mai ales des erau folosite în fizică, mai ales acolo unde are loc trecerea mișcărilor circulare în liniare și invers (diverse tipuri de bielă-manivele). La ora actuală trigonometria este folosită în astronomie, geodezie, topografia minieră, fizică, cristalografie, chimie și alte științe, în care se examinează dimensiuni liniare și unghiuri, de asemenea, în științele care studiază procesele periodice.

Rezultatele lucrului asupra proiectului elevii grupei "Practicienii" le definitivează în formă de prezentare.



## PROIECTE DE ÎNVĂȚĂMÂNT 4

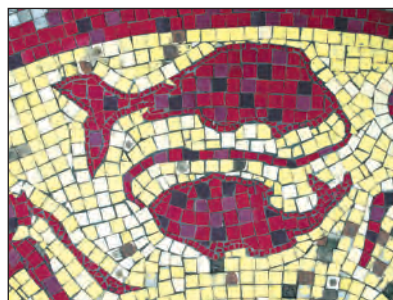
### Acoperirea planului

Tema pentru acoperirea planului este largă și multilaterală. Ea conține multe probleme simple, accesibile elevilor din clasele primare și suficient de complete, cu care nu toți studenții se pot isprăvi.

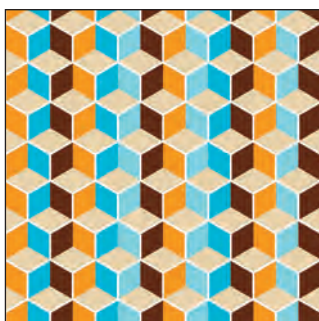
Elevilor din clasa a 9-a se poate de le propus așa teme:

1. Parchete și fâșii.
2. Pavarea planului cu poligoane regulate.
3. Acoperirea planului cu poligoane semiregulate.
4. Pavarea planului cu hexagoane egale.
5. Pavarea planului cu pentagoane egale.
6. Parchete pentru construcții.
7. Mozaicuri tematice.
8. Pavarea planului cu poligoane colorate.

Aducem câteva exemple de mozaicuri tematice.



Pavarea planului cu poligoane colorate imită reprezentarea volumică sau reprezentarea suprafeței reliefate.



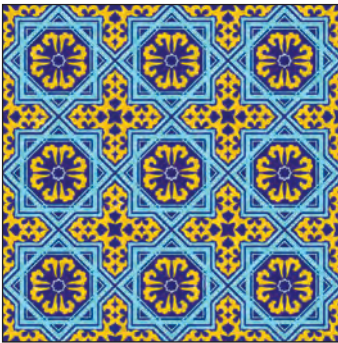
Este bine, dacă în procesul lucrului asupra proiectului elevii ar putea să creeze parchete sau mozaicuri interesante proprii. În acest caz este binevenită petrecerea concursului al lucrărilor de creație.

# PROIECTUL DE ÎNVĂȚĂMÂNT 5

## Ornamente și transformările geometrice

Elevii clasei se organizează în grupe mici a câte 2-3 persoane. După dorința elevilor se poate realiza activitatea individuală asupra proiectului. Fiecare grupă își alege pentru activitatea asupra proiectului una din temele propuse mai jos.

- Ce este ornamentul. Când și unde au apărut primele ornamente.
- Felurile de ornamente.
- Trăsăturile caracteristice ale ornamentelor la diferite popoare.



Ornament din Turkmenistan



Ornament norvegian

- Ornamentele culturii tripoliene.
- Ornamentele și broderiile ținutului meu.
- Felurile transformărilor geometrice în broderiile ucrainene.
- Felurile transformărilor geometrice în broderiile românești.
- Felurile transformărilor geometrice în ornamentele gravate pe lemn.
- Tehnologia creării ornamentelor.
- Crearea ornamentelor pe baza transportului paralel.
- Crearea ornamentelor pe baza simetriei centrale.
- Crearea ornamentelor pe baza simetriei axiale.
- Crearea ornamentelor pe baza rotației.
- Crearea ornamentelor pe baza asemănării.
- Crearea ornamentelor pe baza compoziției transformărilor geometrice.
- Ornamentele îndrăgite ale familiei mele.
- Crearea ornamentului cu ajutorul calculatorului.

Este de dorit ca însărcinările pentru activitatea asupra proiectului de le comunicat elevilor înaintea studierii temei "Transformări geometrice". În procesul studierii a unei transformări geometrice concrete la lecție sau în afara lecțiilor elevii ar putea arăta rezultatele activității lor asupra proiectului. După studierea temei este rațional de petrecut o expoziție-conferință.



## Probleme de dificultate sporită

959. Demonstrați că în triunghiul dreptunghic cu unghiul ascuțit de  $15^\circ$  produsul catetelor este egal cu jumătatea ipotenuzei la pătrat.
960. Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu  $a$  și  $b$ . Aflați lungimea bisectoarei, dusă la ipotenuză.
961. Cateta triunghiului dreptunghic este egală cu  $a$ , iar diametrul circumferinței înscrise cu  $d$ . Aflați ipotenuza.
962. Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu 5 cm și 12 cm. Aflați distanța dintre centrele circumferințelor înscrisă și circumscrisă lui.
963. Demonstrați că perimetrul triunghiului dreptunghic este egal cu diametrul circumferinței, care este tangentă la ipotenuză și la prelungirile catetelor lui.
964. Bazele trapezului sunt egale cu 3 și 7, iar laturile laterale – cu 2 și  $2\sqrt{3}$ . Aflați unghiurile trapezului.
965. Demonstrați că suma catetelor triunghiului dreptunghic este egală cu suma diametrelor circumferințelor circumscrisă și înscrisă.
966. Punctul de tangență al circumferinței înscrise în triunghiul dreptunghic împarte ipotenuza în părțile de 4 cm și 6 cm. Aflați raza circumferinței.
967. Construiți triunghiul, știind a lui mediană, bisectoare și înălțime, duse din același vârf.
968. **Problema lui Napoleon.** Folosindu-se numai de compas împărțiți circumferința dată cu centrul notat în patru părți egale.
969. Latura hexagonului regulat  $ABCDEF$  este egală cu  $a$ . Aflați raza circumferinței înscrise în triunghiul  $ACD$ .
970. Aflați coordonatele vârfurilor unui triunghi, dacă coordonatele mijlocurilor ale laturilor lui sunt:  $K(1; 2)$ ,  $P(3; 4)$ ,  $T(5; 1)$ .
971. Sunt date punctele  $A(a_1; a_2)$ ,  $B(b_1; b_2)$  și numărul  $n$ . Aflați coordonatele a unui astfel de punct  $P$  al segmentului  $AB$ ,  $\text{iar } AP : PB = 1 : n$ .
972. Demonstrați că aria triunghiului cu unghiurile  $\alpha, \beta, \gamma$  și raza  $R$  a circumferinței circumscrise este egală cu  $2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ .
973. Pe laturile  $AB, BC, CA$  ale triunghiului echilateral (fig.329) notăm punctele  $C_1, A_1, B_1$  astfel, că  $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 1 : 2$ . Cum se raportează ariile:  
 a) triunghiurilor  $ABC$  și  $A_1B_1C_1$ ;  
 b) triunghiului  $ABC$  și a triunghiului  $A_2B_2C_2$ , mărginit de dreptele  $AA_1, BB_1$  și  $CC_1$ ?

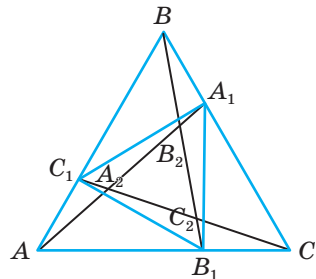


Fig.329

974. Un pătrat cu aria de  $64 \text{ cm}^2$  elevel l-a tăiat în patru părți și a format din ele dreptunghiul, ale cărui laturi sunt egale cu  $5 \text{ cm}$  și  $13 \text{ cm}$  (fig.330). De ce aria dreptunghiului nu este egală cu aria pătratului?

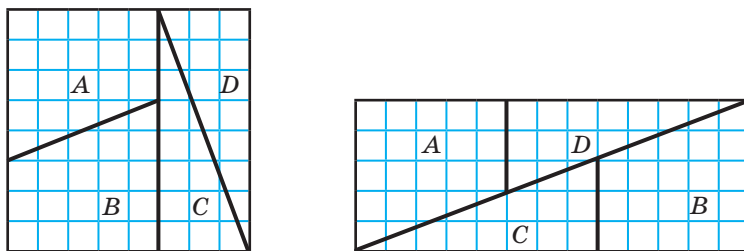


Fig.330

975. Punctu  $M$  este amplasat în interiorul pătratului  $ABCD$  astfel, că  $\angle MAB = 30^\circ$ ,  $\angle MCB = 15^\circ$ . Aflați unghiul  $AMB$ .
976. Aflați unghiurile patrulaterului convex  $ABCD$ , ale cărui laturi:  $AD = 4$ ,  $DC = 2$ ,  $CB = 5 - \sqrt{3}$ ,  $AB = 5\sqrt{2}$ , diagonala  $AC = 2\sqrt{7}$ .
977. În patrulaterul convex  $ABCD$  sunt cunoscute unghiurile:  $\angle BAC = 20^\circ$ ,  $\angle BCA = 35^\circ$ ,  $\angle BDC = 40^\circ$ ,  $\angle BDA = 70^\circ$ . Aflați unghiul format de diagonalele patrulaterului.
978. Aflați unghiul făcut de latura  $AD$  a patrulaterului convex  $ABCD$  și diagonala lui, dacă  $\angle CAB = 50^\circ$ ,  $\angle ABD = 60^\circ$ ,  $\angle DBC = 20^\circ$ ,  $\angle CDB = 30^\circ$ .
979. Pe laturile  $BC$  și  $CD$  ale pătratului sunt notate punctele  $M$  și  $K$  astfel, că perimetrul triunghiului  $MKC$  este egal cu jumătate din perimetrul pătratului. Aflați unghiul  $MAK$ .
980. Pe laturile opuse ale paralelogramului, ca pe laturi sunt construite în afara lui, pătrate. Demonstrați că dreapta care trece prin centrele pătratelor, de asemenea trece prin punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului.

#### Demonstrați afirmațiile 981-986.

981. Dacă circumferința înscrisă în triunghi este tangentă la laturile lui  $AB$ ,  $BC$  și  $CA$  în punctele  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ , atunci  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  se intersectează într-un punct.
982. Dacă circumferința, al cărui centru este situat pe latura  $AB$  a triunghiului, este tangentă la laturile lui  $AC$  și  $BC$  în punctele  $B_1$ ,  $A_1$ , iar dreptele  $AA_1$  și  $BB_1$  se intersectează în punctul  $P$ , atunci  $CP \perp AB$ .
983. Produsul lungimilor segmentelor, care unesc centrul circumferinței, înscrise în triunghi cu vârfurile triunghiului, este egal cu  $4Rr^2$ .
984. Dacă  $O$  este centrul circumferinței circumscrise triunghiului  $ABC$ , iar  $I$  — centrul circumferinței înscrise, atunci

$$\frac{AO}{AI} \cdot \frac{BO}{BI} \cdot \frac{CO}{CI} = \frac{R^2}{4r^2}.$$

985. Dacă patru drepte, intersectându-se două câte două, formează patru triunghiuri, atunci patru circumferințe, circumscrise acestor triunghiuri, trec prin același punct, iar centrele lor sunt situate pe aceeași circumferință, care de asemenea trece tot prin același punct.

- 986.** Laturile triunghiului sunt egale cu  $a, b, c$ , iar în vârfurile lui se află centrele circumferințelor, fiecare din ele este tangentă cu altele două. Aflați razele acestor circumferințe, și de asemenea raza circumferinței, care este tangentă cu fiecare din aceste trei circumferințe. Examinați toate cazurile.
- 987.** Laturile triunghiului înscris în circumferință sunt egale cu  $r, r\sqrt{3}, 2r$  și taie segmente, ale căror arii sunt egale cu  $S_1, S_2, S_3$ . Demonstrați că aria triunghiului  $S = S_3 - S_2 - S_1$ .
- 988.** Pe diametrul  $AB$  sunt luate punctele arbitrare  $C, D$  și pe segmentele  $AC, CD, DB$ , ca pe diametre, sunt construite circumferințe mai mici. Demonstrați că lungimile celor trei circumferințe mai mici în sumă sunt egale cu lungimea celei mai mari circumferințe.
- 989.** Prin punctul circumferinței de raza  $r$  trec două circumferințe mai mici, tangente la ea, și care împart cercul, mărginit de circumferința de raza  $r$  în trei figuri echivalente. Aflați razele circumferințelor mai mici.
- 990.** În circumferința de raza  $r$  sunt înscrise trei circumferințe egale într-un astfel de mod, că fiecare din ele este tangentă interior la circumferința dată și este tangentă exterior la cele două circumferințe egale cu ea. Aflați ariile a șapte figuri, în care circumferințele înscrise împart cercul dat de raza  $r$ .
- 991.** Pe raza  $OA$  a circumferinței, ca pe diametru, este construită o circumferință mică. Fie  $B$  și  $C$  – punctele, în care sunt intersectate circumferințele mică și cea mare de o semidreaptă arbitrară, dusă din punctul  $O$ . Demonstrați că lungimile arcelor  $AB$  și  $AC$  sunt egale.
- 992.** Dintr-un punct al circumferinței sunt duse două coarde egale  $AB$  și  $AC$ , care împart cercul, mărginit de această circumferință, în trei figuri echivalente. Aflați măsura unghiului  $BAC$ .
- 993.** Punctul  $P$  se află la distanța  $2r$  de la centrul cercului de raza  $r$ . Prin  $P$  sunt duse două semidrepte, care împart cercul în trei părți echivalente. Aflați măsura unghiului format de aceste semidrepte.
- 994.** În sectorul de cerc cu unghiul de  $60^\circ$  este înscris un cerc. Aflați raportul ariilor ale sectorului dat și a cercului înscris.
- 995.** Se dă  $\triangle ABC$ . Pe dreptele  $BC, CA$  și  $AB$  sunt date punctele  $A_1, B_1$  și  $C_1$  corespunzător astfel, că  $AC_1 = \alpha C_1B, BB_1 = \beta A_1C, CB_1 = \gamma B_1A$ . Demonstrați că dacă punctele  $A_1, B_1, C_1$  sunt situate pe aceeași dreaptă, atunci  $\alpha\beta\gamma = -1$ . Oare este adevărată afirmația inversă?
- 996.** Prin vârful  $C$  al paralelogramului  $ABCD$  este dusă dreapta  $l$ , care intersectează dreptele  $AB$  și  $AD$  corespunzător în punctele  $M$  și  $N$ . Demonstrați că dacă  $DC = kAM, BC = lAN$ , atunci  $k + l = 1$ .
- 997.** În care raport împarte latura  $AC$  semidreapta, care pornește din vârful  $B$  al triunghiului  $ABC$  și trece prin mijlocul medianei duse din vârful  $A$ ?
- 998.** Mediana  $AM_a$  de punctele  $K$  și  $M$  este împărțită în trei părți egale. În care părți este împărțită latura  $AB$  de semidreaptele  $CK$  și  $CM$ ?
- 999.** Aflați aria triunghiului  $S$ : a) după mediana lui  $m_a$  și unghiurile  $B, C$ ; b) dacă sunt date medianele lui  $m_a, m_b, m_c$ .
- 1000.** Cunoscând unghiurile triunghiului, exprimați unghiul format de mediana și înălțimea, ce pornesc din același vârf.

- 1001.** Mediana –media proporțională a laturilor, care pornesc din același vârf. Aflați unghiul triunghiului din acest vârf.
- 1002.** Aflați pe mediana triunghiului așa un punct prin care se poate duce numai o singură dreaptă, care împarte aria triunghiului dat în raportul 1:2.
- 1003.** Aflați ariile figurilor, în care cercul de rază  $r$  este divizat de coardele  $AC$  și  $BD$ , care se intersectează, când arcele  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  și  $DA$  au corespunzător  $150^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $90^\circ$  și  $90^\circ$ .
- 1004.**  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  — înălțimile triunghiului, iar  $r$  — raza circumferinței înscrise. Demonstrați, că  $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} = \frac{1}{r}$ .
- 1005.** Pe laturile unui triunghi dreptunghic, ca pe diametre, sunt construite semicercuri (fig.331). Demonstrați că suma ariilor  $S_1$  și  $S_2$  ale secerățelelor formate este egală cu aria  $S$  a triunghiului dat.
- 1006. Problema lui Arhimede.** De aceeași parte a dreptei  $AB$  sunt duce semicircumferințe cu diametrele de  $AC$ ,  $CB$  și  $AB$  (fig.332). Dreapta  $CM$ , perpendiculară pe  $AB$ , intersectează semicircumferința mai mare în punctul  $M$ . Demonstrați, că aria figurii mărginită de aceste semicircumferințe, este egală cu aria cercului cu diametrul  $CM$ .
- 1007. Problema lui Ptolomeu.** Demonstrați că în patrulaterul înscris în circumferință, suma produselor a laturilor opuse este egală cu produsul diagonalelor.

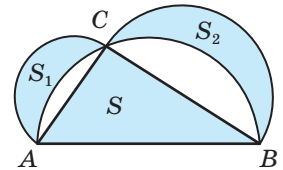


Fig.331

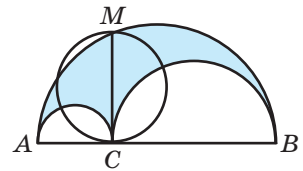


Fig.332

## Probleme pentru repetare

### La capitolul 1

- 1008.** Catetele triunghiului dreptunghic sunt egale cu 5 cm și 12 cm. Aflați sinusurile, cosinusurile și tangentele unghiurilor ale triunghiului.
- 1009.** Calculați unghiurile trapezului isoscel, dacă sinusul al unuia din ei este egal cu  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- 1010.** Calculați:
- $\sin^2 36^\circ + \cos^2 36^\circ - \operatorname{tg}^2 45^\circ$ ;
  - $\cos 60^\circ \sin 30^\circ - \sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 120^\circ \operatorname{tg} 135^\circ$ ;
  - $\operatorname{tg} 135^\circ \operatorname{tg} 45^\circ - \sin 30^\circ \cos 120^\circ$ ;
  - $2 \cos 45^\circ \sin 45^\circ - \sin^2 60^\circ - \cos^2 60^\circ$ .
- 1011.** Aflați  $\cos \alpha$  și  $\operatorname{tg} \alpha$ , dacă  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ,  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

1012. Aflați  $\sin \alpha$  și  $\operatorname{tg} \alpha$ , dacă  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ .

1013. Simplificați expresiile:

a)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$ ;

b)  $\sin \alpha \sin(180^\circ - \alpha) - \cos \alpha \cos(180^\circ - \alpha)$ ;

c)  $\sin^2(180^\circ - \alpha) + \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2(180^\circ - \alpha)}$ ;

d)  $\frac{\cos(180^\circ - \alpha)}{\cos(90^\circ - \alpha)} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha)}$ .

1014.  $O$  — centrul circumferinței, înscrise în triunghiul  $ABC$ . Aflați:

a)  $\angle B$ , dacă  $\angle AOC$  este egal cu  $-\frac{1}{2}$ ;

b)  $\angle AOC$ , dacă  $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

1015. Bazele trapezului isoscel, în care poate fi înscrisă o circumferință, sunt proporționale cu numerele 3 și 11. Aflați sinusurile unghiurilor ale trapezului.

1016. Construiți triunghiul isoscel cu latura laterală de 6 cm și unghiul de la bază, al cărui cosinus este egal cu  $\frac{1}{3}$ .

1017. Construiți triunghiul isoscel, dacă înălțimea dusă la latura laterală este egală cu 4 cm, iar tangenta unghiului de la bază este egală cu  $\frac{4}{3}$ .

1018. Cosinusurile unghiurilor ascuțite ale trapezului sunt egale cu 0,8 și 0,6. Cu ce sunt egale sinusurile, cosinusurile și tangentele unghiurilor obtuze ale lui?

1019.  $AK$ ,  $BL$ ,  $CM$  — medianele  $\triangle ABC$ . Aflați coordonatele punctului  $L$ , dacă  $A(-3; -1)$ ,  $B(-2; 1)$ ,  $K(1; -1)$ .

1020. Segmentul  $MN$  cu punctele  $K$  și  $P$  este împărțit în trei părți egale ( $MK = KP = PN$ ). Aflați coordonatele punctului  $N$ , dacă  $M(2; -4)$ ,  $P(-6; 2)$ .

1021. Aflați laturile și aria  $\triangle ABC$ , dacă  $A(a; b)$ ,  $B(-a; b)$ ,  $C(-a; -b)$  și punctul  $A$  este situat în cadranul III.

1022. Se dă  $\triangle ABC$ , în care  $A(7; 5)$ ,  $B(4; 1)$ ,  $C(-4; 7)$ . Aflați lungimile medianei, înălțimii și bisectoarei, duse din vârful  $B$ .

1023. Folosind condiția problemei anterioare, scrieți ecuațiile medianei, înălțimii și bisectoarei, duse din vârful  $B$ .

1024. Punctele  $A(2; -5)$  și  $C(2; -1)$  sunt vârfurile pătratului  $ABCD$ . Scrieți ecuația circumferinței înscrise în acest pătrat, și a circumferinței circumscrise lui. Aflați vârfurile necunoscute ale pătratului.

- 1025.** Pe axa absciselor aflați punctul  $M$ , care este echidistant de originea de coordonate și de punctul  $P(2;3)$ .
- 1026.** Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctele  $A(1; 4)$  și  $B(-2; 1)$ . Aflați aria triunghiului, pe care îl taie această dreaptă de la axele de coordonate.
- 1027.** Scrieți ecuația dreptei care trece prin centrele a două circumferințe:  $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$  și  $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 3$ .
- 1028.** Demonstrați că triunghiul cu vârfurile  $A(3; 4)$ ,  $B(6; -2)$ ,  $C(-3; 1)$  este isoscel. Aflați aria lui.
- 1029.** Stabiliți tipul patrulaterului  $ABCD$ , dacă  $A(3; 1)$ ,  $B(4; 6)$ ,  $C(9; 7)$ ,  $D(8; 2)$ . Aflați perimetrul și aria lui.
- 1030.** Scrieți ecuația circumferinței circumscrise triunghiului  $ABC$ , dacă  $A(1; 8)$ ,  $B(2; -4)$ ,  $C(-3; -2)$ .
- 1031.** Oare se poate circumscrie o circumferință patrulaterului  $ABCD$ , dacă  $A(-4; 3)$ ,  $B(-1; 6)$ ,  $C(4; 1)$ ,  $D(-1; -2)$ ? Oare există circumferință înscrisă în acest patrulater? Scrieți ecuația circumferinței dacă aceasta este posibil.
- 1032.** Construiți circumferința dată cu ecuația:
- $(x+2)^2 + y^2 = 9$ ;
  - $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 16$ ;
  - $x^2 + (y-3)^2 = 4$ .
- 1033.** Aflați aria triunghiului, care s-a obținut la intersecția dreptei  $AB$  cu axele de coordonate, dacă  $A(2; -3)$  și  $B(6; 3)$ . Scrieți ecuația circumferinței, circumscrise acestui triunghi.
- 1034.** Demonstrați că linia dată cu ecuația  $x^2 + 6x + y^2 = 0$ , este ecuație a circumferinței. Oare va fi segmentul  $AB$  diametrul acestei circumferințe, dacă  $A(-5; \sqrt{5})$ ,  $B(-1; -\sqrt{5})$ ?

## La capitolul 2

- 1035.** Construiți trei vectori arbitrari  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ . Construiți vectorul  $\vec{d}$  așa ca:
- $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ;
  - $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ ;
  - $\vec{d} = 0,5\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$ ;
  - $\vec{d} = \vec{a} + 0,5\vec{b} - 2\vec{c}$ .
- 1036.** Oare sunt egali vectorii  $\overline{AB}$  și  $\overline{CD}$ , dacă  $A(1; 6)$ ,  $B(3; 2)$ ,  $C(0; -1)$ ,  $D(2; -5)$ ?
- 1037.** Aflați modulul vectorului  $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ , dacă  $\vec{a} = (1; 3)$ ,  $\vec{b} = (-2; 0)$ .
- 1038.** Pentru care valori ale lui  $x$  vectorii  $\vec{a} = (x; -2)$  și  $\vec{b} = (-4; 2x)$  sunt coliniari?

- 1039.** Знайдіть координати вектора  $\overline{AB}$ , якщо:
- $A(1; 3), B(-2; 4)$ ;
  - $A(-6; 8), B(1; -3)$ ;
  - $A(0; a), B(a; 0)$ ;
  - $A(m; n), B(-m; n)$ .
- 1040.** Дано точки  $M(-1; 4), N(2; -3), A(-2; 1)$ . Знайдіть координати точки  $B$ , якщо  $\overline{AB} = \overline{MN}$ .
- 1041.** Знайдіть координати вектора  $\vec{a}$ , спрямованого в той самий бік, що і вектор  $\vec{p} = (3; -4)$ , якщо  $|\vec{a}| = 15$ .
- 1042.** Доведіть, що точки  $A(-1; 3), B(4; 5), C(19; 11)$  лежать на одній прямій.
- 1043.** Знайдіть скалярний добуток векторів  $(\vec{m} - 2\vec{n})$  і  $(2\vec{m} + \vec{n})$ , якщо  $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$ ,  $(\vec{m}, \vec{n}) = 60^\circ$ .
- 1044.** Для якого значення  $p$  скалярний добуток векторів  $\vec{a} = (3; p)$  і  $\vec{b} = (-4; 3)$  дорівнює 6?
- 1045.** Бічна сторона рівностороннього трикутника  $ABC$  дорівнює 2 см. Обчисліть  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ ,  $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$ ,  $\overline{AC} \cdot \overline{BC}$ .
- 1046.** Доведіть, що діагоналі паралелограма  $ABCD$  перпендикулярні, якщо  $A(-5; -4), B(-4; 2), C(1; 6), D(1; -1)$ .
- 1047.** Для якого значення  $x$  вектори  $\vec{p} = (2; x)$  і  $\vec{s} = (x; x+3)$  перпендикулярні?
- 1048.** Знайдіть модуль вектора  $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$ , якщо  $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1, (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ .
- 1049.** Знайдіть косинуси кутів трикутника  $ABC$ , якщо  $A(-1; 2), B(3; 5), C(2; -1)$ .
- 1050.** Для якого значення  $a$  кут між векторами  $\vec{m} = (6; a)$  і  $\vec{b} = (-5; a-1)$  є тупим?
- 1051.** Знайдіть кут між векторами  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$ , якщо вектор  $\vec{a} + 2\vec{b}$  перпендикулярний до вектора  $\vec{a} - 2\vec{b}$ .
- 1052.** Знайдіть координати вектора  $\vec{p}$ , якщо він перпендикулярний до вектора  $\vec{m}(1; -3)$  і  $|\vec{p}| = 3\sqrt{10}$ .
- 1053.** Дано точки  $A(4; -2)$  і  $B(2; -5)$ . Знайдіть рівняння прямої, яка є тангенсом до кола з діаметром  $AB$  у точці  $A$ .
- 1054.** Знайдіть рівняння тангент до кола з центром у початку координат і радіусом 3, проведені з точки  $A(5; 0)$ .
- 1055.** Нехай  $O$  — точка перетину медіан трикутника  $ABC$ . Виразіть вектор  $\overline{AO}$  через вектори  $\overline{AB} = \vec{a}$  і  $\overline{AC} = \vec{b}$ .
- 1056.** Нехай  $P$  і  $K$  — середини сторін  $BC$  і  $CD$  паралелограма  $ABCD$ . Виразіть вектори  $\overline{AP}, \overline{AK}, \overline{PK}$  через вектори  $\overline{AB} = \vec{a}$  і  $\overline{AD} = \vec{b}$ .



## La capitolul 3

- 1057.** Aflați laturile necunoscute ale  $\triangle ABC$ , dacă:
- $AB = 3$  cm,  $BC = 8$  cm,  $\angle B = 60^\circ$ ;
  - $AB = 6$  cm,  $AC = 4$  cm,  $\cos B = \frac{7}{9}$ ;
  - $AC - AB = 6$  cm,  $BC = 8$  cm,  $\angle B = 120^\circ$ ;
  - $AC = 6$  cm,  $BC = 14$  cm,  $\angle A = 60^\circ$ .
- 1058.** Laturile triunghiului sunt proporționale cu numerele 7, 8 și 13. Aflați cel mai mare unghi al triunghiului, dacă perimetrul lui este egal cu 56 cm.
- 1059.** Diagonalele paralelogramului sunt egale cu 12 cm și 32 cm, iar una din laturi 14 cm. Aflați perimetrul paralelogramului și unghiul făcut de diagonale lui.
- 1060.** Laturile triunghiului sunt egale cu 11 cm, 23 cm și 30 cm. Aflați lungimea medianei, duse la cea mai mare latură.
- 1061.** În  $\triangle MNP$   $MN = 12$  cm,  $\sin N = 0,4$ ,  $\sin P = 0,6$ . Aflați  $MP$ .
- 1062.** În  $\triangle ABC$   $AB = BC = 6$  cm,  $\sin A = 0,4$ . Aflați distanța de la punctul de intersecție al medianelor triunghiului până la centrul circumferinței circumscrise triunghiului.
- 1063.**  $AL$  — bisectoarea triunghiului isoscel  $\triangle ABC$  ( $AB = BC$ ),  $BL = a$ ,  $\angle A = 2\alpha$ . Aflați laturile triunghiului și lungimile bisectoarelor lui.
- 1064.**  $BM$  — mediana  $\triangle ABC$ ,  $BM = m$ ,  $\angle ABM = \alpha$ ,  $\angle CBM = \beta$ . Aflați  $AB$ .
- 1065.** Bazele trapezului sunt egale cu 6 cm și 24 cm. Aflați razele circumferințelor înscrisă și circumscrisă.
- 1066.** Pe laturile  $AB$  și  $BC$   $\triangle ABC$  sunt luate punctele  $K$  și  $T$  так, astfel, că  $AB = 10$  cm,  $AK = 2$  cm,  $BC = 14$  cm,  $TC = 9$  cm. Aflați aria patrulaterului  $AKTC$ , dacă  $S_{\triangle ABC} = 28$  cm<sup>2</sup>.
- 1067.** Perimetrul paralelogramului este egal cu 52 cm, iar aria lui 60 cm<sup>2</sup>. Aflați laturile și înălțimile paralelogramului, dacă unghiul lui ascuțit este de  $30^\circ$ .
- 1068.** Două laturi ale triunghiului sunt egale cu 6 cm și 8 cm, iar înălțimea dusă din acest vârf, — 4 cm. Aflați raza circumferinței circumscrise.
- 1069.** Bazele trapezului isoscel  $ABCD$  sunt egale cu 11 cm și 21 cm, iar latura laterală are 13 cm. Aflați razele circumferințelor:
- circumscrisă trapezului;
  - înscrisă în  $\triangle ABC$ ;
  - înscrisă  $\triangle ACD$ .
- 1070.** În trapezul  $ABCD$  bazele  $BC$  și  $AD$  sunt egale corespunzător cu 9 cm și 14 cm, iar  $AB = 8$  cm. Aflați  $CD$ , dacă  $\angle A = 60^\circ$ .
- 1071.** Aflați înălțimea trapezului, dacă diagonalele lui  $AC$  și  $BD$  se intersectează în punctul  $O$  și  $AC = 10$  cm,  $BD = 6$  cm,  $\angle AOC = 120^\circ$ .
- 1072.** Una din laturile triunghiului este cu 6 cm mai lungă decât alta, iar unghiul format de ele este de  $30^\circ$ . Aflați aceste laturi, dacă aria triunghiului este egală cu 40 cm<sup>2</sup>.
- 1073.** Aflați razele circumferințelor înscrisă și circumscrisă triunghiului cu laturile de 13 cm, 20 cm, 21 cm.



1074. Aflați înălțimile triunghiului, dacă laturile lui sunt egale cu 6 cm, 25 cm, 29 cm.
1075. Trei circumferințe de razele 6 cm, 7 cm, 8 cm sunt tangente două câte două. Aflați aria triunghiului ale cărui vârfuri coincid cu centrele acestor circumferințe.
1076. Centrul circumferinței înscrisă în triunghiul cu laturile 11 cm, 25 cm și 30 cm, este unit cu vârfurile triunghiului. Aflați ariile triunghiurilor, care totodată s-au format.
1077. Aflați aria trapezului dacă bazele lui sunt egale cu 4 cm și 25 cm, iar laturile laterale au 13 cm și 20 cm.

## La capitolul 4

1078. Aflați unghiurile pentagonului convex, dacă ele sunt proporționale cu numerele 3, 4, 5, 7, 8.
1079. Unghiul la centru al unui poligon regulat cu  $n$  laturi este de 4 ori mai mic decât unghiul interior al lui. Aflați  $n$ .
1080. Desenați circumferința de raza 6 cm. Înscrieți în circumferință și circumscrieți-i poligoane regulate cu  $n$  laturi și calculați perimetrele lor, dacă:
- a)  $n = 3$ ;                      c)  $n = 6$ ;  
b)  $n = 4$ ;                      d)  $n = 12$ .
1081. Aflați unghiurile poligonului regulat cu 12 laturi.
1082. Oare există poligon regulat, în care fiecare unghi este egal cu  $145^\circ$ ?
1083. Într-un triunghi regulat este înscrisă o circumferință, iar în circumferință este înscris un pătrat. Aflați latura triunghiului, dacă ea este cu 5 cm mai mare decât latura pătratului.
1084. Într-o circumferință sunt înscrise un pătrat și un hexagon regulat. Perimetrul pătratului este egal cu 24 cm. Aflați perimetrul și aria hexagonului.
1085. Unei circumferințe i s-a circumscrie un triunghi regulat, iar în circumferință este înscris un hexagon regulat al cărui perimetru este de 18 cm. Aflați perimetrul și aria triunghiului.
1086. Se dă un hexagon regulat cu latura de 4 cm. De aflat lățimea și aria inelului format de circumferințele înscrisă și circumscrie hexagonului.
1087. În sectorul de cerc  $AOB$ , cu raza  $OA = 10$  cm este înscrisă o circumferință. Aflați raportul ariilor sectorului și cercului, dacă  $S_{\triangle AOB} = 25\sqrt{3}$ .
1088. Într-o circumferință cu lungimea de  $24\pi$  cm este dusă coarda de  $12\sqrt{2}$  cm. Aflați lungimile arcelor, în care această coardă împarte circumferința.
1089. În circumferință, lungimea căreia este egală cu  $36\pi$  cm, la distanța de 9 cm de la centru este dusă o coardă. De aflat lungimea celui mai mic arc din arcele formate.
1090. Aflați aria sectorului de raza 6 cm, dacă măsura în grade a lui este egală cu  $150^\circ$ .

- 1091.** Într-un sector circular cu unghiul la centru de  $120^\circ$  este înscris un cerc. Aflați aria acestui cerc, dacă raza cercului dat este egală cu  $R$ .
- 1092.** Unui pătrat cu latura de 10 cm i s-a circumscris o circumferință. În unul din segmentele formate este înscris un pătrat. Aflați aria acestui pătrat.

## La capitolul 5

- 1093.** Aflați coordonatele punctului, care este simetric cu punctul  $A(3; -5)$  în raport cu punctul  $Q(-1; 4)$ .
- 1094.** Oare are  $\triangle ABC$ , la care  $A(-6; -1)$ ,  $B(-3; 5)$ ,  $C(3; 2)$ , axă de simetrie? Dacă are, atunci scrieți ecuația ei.
- 1095.**  $AC$  — diagonala pătratului ale cărui laturi sunt paralele cu axele de coordonate. Scrieți ecuațiile axelor de simetrie ale acestui pătrat, dacă  $A(1; 2)$ ,  $C(5; 6)$ .
- 1096.** Circumferința de raza 3 este tangentă la axele de coordonate în I cadran. Scrieți ecuația acestei circumferințe și a circumferinței simetrice acesteia în raport cu:  
 a) originea de coordonate;                      c) axa ordonatelor;  
 b) axa absciselor;                                      d) dreapta  $y = 2x$ .
- 1097.** Oare pot să fie triunghiurile  $ABC$  și  $MNP$  simetrice în raport cu un oarecare punct? În cazul răspunsului pozitiv aflați coordonatele acestui punct, dacă  $A(1; -3)$ ,  $B(5; -2)$ ,  $C(3; 1)$ ,  $M(-3; 1)$ ,  $N(-7; 0)$ ,  $P(-5; -3)$ .
- 1098.** Determinați tipul patrulaterului  $ABCD$  și scrieți ecuațiile axelor de simetrie ale lui, dacă  $A(-2; 2)$ ,  $B(6; 2)$ ,  $C(6; -4)$ ,  $D(-2; -4)$ .
- 1099.** Sunt date triunghiurile  $ABC$  și  $ADC$ . Demonstrați că punctele  $B$  și  $D$  sunt simetrice în raport cu dreapta  $AC$ , dacă  $AB = AD$  și  $BC = CD$ .
- 1100.** La deplasarea paralelă cu vectorul  $\vec{a}$  circumferință  $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 16$  trece în circumferința  $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 16$ . Aflați coordonatele vectorului  $\vec{a}$ .
- 1101.** Aflați cel mai mic unghi la rotația cu care pentagonul regulat trece în sine însuși.
- 1102.** Construiți pătratul cu latura de 4 cm și rotiți-l în jurul punctului de intersecție al diagonalelor cu unghiul de  $45^\circ$ . Câte vârfuri are poligonul cu  $n$  laturi care s-a obținut? Dar câte axe de simetrie?
- 1103.**  $O$  — punctul de intersecție al medianelor triunghiului echilateral  $ABC$ . La transportul paralel punctul  $A$  a trecut în punctul  $O$ . Executați deplasarea paralelă a  $\triangle ABC$ . Aflați perimetrul triunghiului construit, dacă  $S_{\triangle AOB} = S\sqrt{3}$ .
- 1104.** Se dau romburile  $ABCD$  și  $MNPK$ .  $\angle A = 50^\circ$ ,  $\angle N = 130^\circ$ ,  $AC : BD = 4 : 5$ . Aflați diagonalele rombului  $MNPK$ , dacă aria lui este egală cu  $40 \text{ cm}^2$ .
- 1105.** Dreapta  $MN$ , este paralelă cu baza  $AC$   $\triangle ABC$ , și îl împarte în două părți — într-un triunghi și un trapez. Ariile acestor figuri sunt proporționale cu numerele 1 și 3. Aflați perimetrul  $\triangle ABC$ , dacă perimetrul  $\triangle MBN$  este egal cu 7 cm.
- 1106.** Prelungirile laturilor laterale  $AB$  și  $CD$  ale trapezului  $ABCD$  se intersectează în punctul  $P$ . Aflați aria trapezului, dacă  $AD : BC = 5 : 3$  și  $S_{\triangle BPC} = 27 \text{ cm}^2$ .

# Testul pentru antrenament nr.1

**1** Aflați coordonatele punctului  $A'$ , simetric cu punctul  $A(-1; 3)$  în raport cu originea de coordonate.

A	B	C	D
$(1; -3)$	$(1; 3)$	$(-1; -3)$	$(3; -1)$

**2** Aflați aria hexagonului regulat înscris în circumferința de raza 6 cm.

A	B	C	D
$108\sqrt{3} \text{ cm}^2$	$9\sqrt{3} \text{ cm}^2$	$54\sqrt{3} \text{ cm}^2$	$36 \text{ cm}^2$

**3** Aflați aria cercului, circumscris  $\triangle ABC$ , dacă  $AB = 10 \text{ cm}$ , iar  $\angle ACB = 45^\circ$ .

A	B	C	D
$200\pi \text{ cm}^2$	$50\pi \text{ cm}^2$	$10\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$	$100\pi \text{ cm}^2$

**4** Scrieți ecuația circumferinței cu centrul în punctul  $O(-3; 2)$ , care este tangentă la axa ordonatelor.

A	B	C	D
$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 3$	$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 2$	$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$	$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

**5** Pentru care cea mai mică valoare a lui  $a$  lui vectorii  $\vec{m}(a; 3)$  și  $\vec{n}(-2a; 6)$  sunt perpendiculari?

A	B	C	D
3	9	-3	$-3\sqrt{2}$

**6** Determinați tipul triunghiului, dacă laturile lui sunt egale cu 2 cm, 5 cm, 6 cm.

A	B	C	D
ascuțitunghic	obtuz	dretpunghiular	nu se poate afla

- 7** Se dă punctul  $M(-3; 5)$ . Determinați corespondența dintre transformările geometrice (1-4) și coordonatele imaginii punctului  $M$  (A-E) la această transformare.
- |  |              |
|--|--------------|
| 1 Deplasarea paralelă cu vectorul $\vec{a} = (1; 3)$ | A $(-3; -5)$ |
| 2 Simetria în raport cu axa absciselor               | B $(1; 1)$   |
| 3 Simetria în raport cu punctul $P(-1; 3)$           | C $(-2; 8)$  |
| 4 Simetria în raport cu dreapta $y = x$              | D $(3; 5)$   |
|  | E $(5; -3)$  |
- 8** Sunt date punctele  $A(-2; 0)$  și  $B(4; 0)$ .
- 1) Scrieți ecuația locului geometric al centrelor circumferințelor, care trece prin punctele  $A$  și  $B$ .
  - 2) Scrieți ecuația circumferinței, care trece prin punctele  $A$  și  $B$ , dacă raza ei este egală cu 5.
- 9** Aflați unghiul format de vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b} + \vec{c}$ , dacă  $\vec{a} = (3; 3)$ ,  $\vec{b} = (3; 5)$ ,  $\vec{c} = (-3; 7)$ .
- 10** Aflați imaginile punctelor  $A(-2; 3)$  și  $B(4; 7)$ , dacă la transportul paralel al segmentului  $AB$  imaginea mijlocului lui este punctul  $M(3; 1)$ .
- 11** Aflați ipotenuza unui triunghi dreptunghic, dacă centrul circumferinței înscrise este îndepărtat de la extremitățile ei cu 4 cm și  $2\sqrt{2}$  cm.
- 12** În triunghiul regulat  $\triangle ABC$ , a cărui arie este  $S$ , este înscris rombul  $AMPK$  ( $M \in AB$ ,  $P \in BC$ ,  $K \in AC$ ). Aflați aria patrulaterului  $AMPC$ .

## Testul pentru antrenament nr. 2

- 1** Punctele  $A(2; -3)$  și  $A'(-4; 5)$  sunt simetrice în raport cu punctul  $M$ . Aflați coordonatele punctului  $M$ .

A	B	C	D
$M(-2; 2)$	$M(-1; 1)$	$M(-10; 13)$	$M(8; -11)$

- 2** Aflați raza circumferinței circumscrise trapezului, dacă latura laterală a lui este egală cu 10 cm, iar diagonala face cu baza mai mare unghiul egal cu  $30^\circ$ .

A	B	C	D
10 cm	20 cm	5 cm	nu se stabilește

- 3** Care din ecuații este ecuația medianei  $BM$  a triunghiului  $ABC$ , dacă  $A(1; -3)$ ,  $B(3; 4)$ ,  $C(7; 1)$ ?

A	B	C	D
$y = -2x + 10$	$y = -3x + 13$	$y = -6x + 14$	$y = -5x + 19$

- 4** Câte laturi are poligonul regulat cu  $n$  laturi, dacă unghiul de la centru al lui este egal cu  $30^\circ$ ?

A	B	C	D
$n = 6$	$n = 10$	$n = 12$	$n = 15$

- 5** Care este cea mai mică valoare a lui  $a$  pentru care modulul vectorului  $\vec{p} = (a; 5)$  este egal cu 13?

A	B	C	D
-9	-12	12	13

- 6** Un pătrat și un hexagon regulat sunt înscrise în aceeași circumferință. Aflați raportul perimetrului hexagonului către perimetrul pătratului.

A	B	C	D
$6\sqrt{2} : 1$	$2\sqrt{2} : 3$	$3\sqrt{3} : 8$	$3 : 2\sqrt{2}$

- 7**  $M$  și  $N$  – mijlocurile laturilor  $AB$  și  $AD$  ale paralelogramului  $ABCD$ . Stabiliți corespondența dintre figurile (1-4) și ariile lor ( $A-E$ ), dacă aria paralelogramului este egală cu  $120 \text{ cm}^2$ .

1 $\triangle AMN$	A $45 \text{ cm}^2$
2 $\triangle NDC$	B $30 \text{ cm}^2$
3 Patrulaterul $MBDN$	C $15 \text{ cm}^2$
4 Patrulaterul $ABCN$	D $60 \text{ cm}^2$
	E $90 \text{ cm}^2$

- 8** Sunt date punctele  $A(-3; 5)$ ,  $O(0; -1)$  și  $B(4; 1)$ .

1) Stabiliți tipul triunghiului  $AOB$ .

2) Aflați aria paralelogramului  $ABCD$ , dacă  $O$  – punctul de intersecție al diagonalelor lui.

- 9** Perimetrul triunghiului regulat  $ABC$  este de 6 cm. Aflați produsul scalar al vectorilor  $\vec{AB}$  și  $\vec{BC}$ .

- 10** Două laturi ale triunghiului, care fac unghiul egal cu  $60^\circ$ , se raportează ca 5:8. Aflați perimetrul triunghiului, dacă a treia latură a lui este egală cu 14 cm.

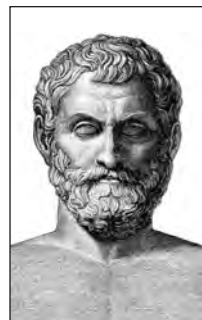
- 11** Circumferința cu centrul  $O$  de rază  $R$  este circumscrisă  $\triangle ABC$ . Aflați raza circumferinței circumscrise  $\triangle AOC$ , dacă  $\angle B = 60^\circ$ .

- 12** Într-un cerc este înscris un hexagon regulat cu latura  $a$ . Aflați aria celui mai mic din segmentele, a cărui bază este latura hexagonului.

## Fragmente din istoria geometriei

Geometria este una din cele mai vechi științe. După cum mărturisește denumirea ei (*geo* - pământ, *metreo* - măsuror), inițial ea era legată numai cu măsurarea loturilor de pământ. Cu timpul cunoștințele geometrice au început să se aplice la măsurarea înălțimilor, adâncimilor, diferitelor distanțe.

La început oamenii măsurau distanțele și unghiurile nemijlocit sau folosind proprietățile figurilor asemenea. **Fales din Milet** (sec. V î.H) cu așa un procedeu determina distanțele până la obiectele inaccesibile, a măsurat înălțimea uneia din piramidele egiptene. **Eratosfene Chirensikii** (sec. II î. H) a determinat dimensiunile aproximative ale Pământului. **Heron din Alexandria** (sec. I. î. H) a scris cartea „Dioptrica”, care se poate considera ca prima lucrare din geometrie., de asemenea a construit un dispozitiv pentru măsurarea unghiurilor în diferite plane, care a devenit prototipul teodoliților contemporani.



Fales

Cu rezolvarea triumfiurilor înainte vreme se ocupa o știință matematică aparte – *trigonometria* (grecescul  $\tau\rho\upsilon\omega\nu\nu\omicron\nu$  — triunghi,  $\mu\epsilon\rho\epsilon\prime\omega$  — măsuror). Matematicianul și astronomul grec antic Ghipparh încă în sec. II î.H a elaborat tabelele coardelor cu ajutorul cărora a determinat distanța de la Pământ până la Lună și a rezolvat multiple alte probleme aplicate. El primul a introdus coordonatele geografice – lungitudinea și latitudinea.

Un mare aport în dezvoltarea trigonometriei l-a făcut matematicianul, astronomul, geograful **Ptolomei Clavdir** (aproximativ aa 100-178) – creatorul teoriei heliocentrale a lumii. Lucrarea lui, tradusă în limba arabă sub denumirea „Alimaghest”, un timp îndelungat a servit ca manual de trigonometrie. Ptolomei a inventat astrolabul, a compus de asemenea tabelul sinusurilor ai unghiurilor ascuțite. Pentru dezvoltarea trigonometriei ca știință nu puțin a făcut mai târziu astronomul indian **Bhaskara Bramagupta** (sec. VII), și de asemenea învățații arabi, în particular **Alibattani** (sec. IX). Indienii au introdus termenii *sinus*, *cosinus*, iar arabii – *tangenta*.

*Teorema sinusurilor* primul care a demonstrat-o încă în sec. XI a fost savantul și poetul din Asia Mjlocie **al Biruni** (973-1048), iar *teorema cosinusurilor* – matematicianul francez **Francois Viète** (1540-1603). În sec. XVI **Iogan Miller din Kenigsberg** (sau cum îl mai numeau *Regiomontanus*) a alcătuit tabelele precizate pentru toate funcțiile trigonometrice ale unghiurilor ascuțite.

Notarea simbolică  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  și sistemul strict de studiere a funcțiilor trigonometrice le-a elaborat academicianul din Sanct-Petersburg **Leonard Euler** (1707-1783).

Poligoanele regulate le studia încă Pitagora și elevii lui. Ei au demonstrat că se poate acoperi planul cu poligoane cu  $n$  laturi regulate și egale, de parcă ar fi parchet, numai cu condiția, când  $n$  este egal cu 3, 4 sau 6. Au examinat elevii lui Pitagora și poligoane stelate regulate (neconvexe), mai ales *pentagrama*, care poate fi formată prelungind toate laturile pentagonului regulat. Se consideră că așa un semn aduce

fericirea, de aceea, salutându-se pitagoreicii desenau pe nisip pentagrama. Din punctul de vedere al geometriei pentagrama într-adevăr este destul de interesantă figură (fig.333). Punctul K realizează „secțiunea de aur” a segmentului AC, L – a segmentului AK ș.a.m.d.

Construcția poligoanelor regulate este strâns legată cu împărțirea circumferinței în părți egale.

În câte părți egale poate fi împărțită circumferința, folosindu-se numai de compas și riglă? Încă matematicienii Greciei Antice analizau așa o problemă. Ei știau să împartă circumferința în 2, 3 și 5 părți egale, și de asemenea, fiecare arc puteau să-l împartă în jumătate. De asemenea știau cum, folosindu-se numai de compas și riglă, de împărțit circumferința în  $2^n$ ,  $3 \cdot 2^n$ ,  $5 \cdot 2^n$  și  $3 \cdot 5 \cdot 2^n$  părți egale, unde  $n$  - număr natural arbitrar.

În decursul următorilor aproape 2000 de ani matematicienii ai multor țări au cercetat în câte încă părți egale se poate împărți circumferința, folosindu-se numai de compas și riglă, însă nimic nou așa și n-au inventat. Nu știau chiar dacă se poate, folosindu-se numai de compas și riglă de împărțit circumferința în 7 și 9 părți egale.

Numai marele matematician german **Carl Gauss (1777-1855)**, fiind încă student a demonstrat, că cu ajutorul numai a compasului și riglei se poate împărți circumferința în 17 părți egale, însă nu se poate – în 7. Mai târziu dânsul a demonstrat teorema generală. **Folosindu-se numai de compas și riglă, se poate împărți circumferința într-un număr impar  $m$  de părți egale, atunci și numai atunci, când  $m$  este prim și este egal cu  $2^{2^n} + 1$  sau cu produsul a câtorva numere prime de așa tip.** Numerele de tipul  $2^{2^n} + 1$  se numesc numerele lui Fermat, ele sunt rădăcinile ecuațiilor de un anumit tip și joacă un rol important în teoria numerelor. În așa fel problema geometrică despre constituirea poligoanelor regulate și împărțirea circumferinței în părți egale se leagă cu algebra și teoria numerelor.

Din vechime cu poligoanele regulate erau legate problemele la determinarea lungimii circumferinței și a ariei cercului. Savanții babilonieni și egipteni considerau că raportul lungimii circumferinței către diametrul ei, care acum se notează cu litera  $\pi$ , este egal cu 3.

Arhimede a dat o apreciere mai exactă a acestui număr:  $3 \frac{10}{71} < \pi < 3 \frac{1}{7}$ . Matematicianul chinez **Ţu Ciuncigi (428-499)** a arătat că  $3,1415926 < \pi < 3,1415927$ . Matematicianul și astronomul din secolul XV iranian al-Cași a calculat că  $\pi \approx 3,1415926535897932$ . La ora actuală se știu peste un miliard, începând cu primele semne zecimale, ale numărului  $\pi$ . La sfârșitul sec. XIX s-a determinat că numărul  $\pi$  este irațional.

Sistemul coordonatelor geografice pentru prima dată l-a propus în sec. I î.H savantul grec din vechime Ghipparh din Nichei (180-125 î.H).În sec. XIV matematicianul francez Nicola Oresme (1323-1382) a construit un sistem de

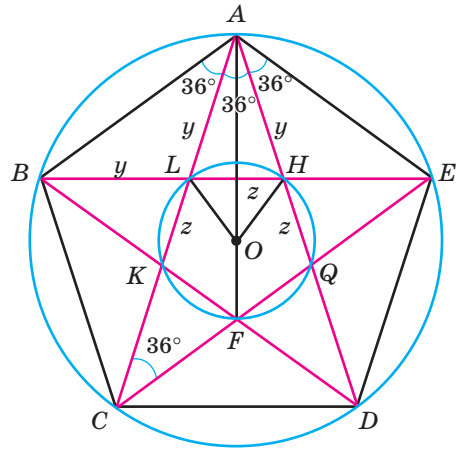


Fig.333



coordonate analogic în plan, folosindu-l pentru cercetarea unor dependențe dintre mărimi. Însă în loc de actualele abscise și ordonate el a folosit termenii geografici longitudinea și latitudinea.

Mai târziu ideile lui N. Oresme le-au dezvoltat și îmbogățit matematicienii francezi **Pierre Fermat (1601-1665)** și **Rene Descartes (1596-1650)**. Fermat mai devreme de Descartes a introdus coordonatele, a introdus noțiunea de ecuație a dreptei, circumferinței, elipsei, parabolei, hiperbolei și a publicat cercetările sale în lucrarea „Introducerea în teoria locurilor plane și spațiale” (1636) Descartes metoda de coordonate a sa a descris-o în lucrarea „Geometria” (1637). Însă el aici, examinând variabilele independente și dependente a pus baza teoriei despre funcții. Mai târziu cel mai simplu sistem de coordonate l-au numit cu numele lui Descartes.

Pe lângă aceea ca Descartes este matematician el mai este și filozof, întemeietorul cartezianiei, recunoscut în toată lumea.

Descartes și Fermat au considerat sistemul de coordonate numai în plan. În sec. XVIII **Iohan Bernoulli (1667-1748)** și **Alexi Clairaut (1713-1865)** au extins sistemul de coordonate și asupra spațiului tridimensional: fiecărui punct al spațiului tridimensional i se pune în corespondență un triplet ordonat de numere reale. Sistemul de coordonate în spațiu se studiază în clasele superioare.

Transformările geometrice intrau în geometrie și mai lent, decât coordonatele. Unele tipuri de simetrii în raport cu o dreaptă și în raport cu un punct la mulți oameni le erau demult cunoscute: pe ele ei le-au văzut pe diferite plante, ființe vii, de aceea pictorii creau reprezentări simetrice. De exemplu, șumerii cu aproape 5 mii de anii în urmă reprezentau pe vase desene simetrice. Pe frescele palatului lui Darii din Suza înfățișarea arcașilor persani este realizată parcă cu ajutorul deplasării paralele. Sciții, care au trăit pe plaiurile Ucrainei actuale, încă cu peste 2 mii de ani în urmă făceau roți, simetrice în raport cu un punct și în raport cu axa, confecționau bijuterii simetrice. Nu puține astfel de reprezentări au ajuns la noi încă din timpurile antice. E clar că creatorii acestor reprezentări știau multe despre simetrie și deplasarea paralelă, măcar că nu foloseau termenii geometrii corespunzători.

Elemente ale învățaturii despre simetria figurilor pentru prima dată au apărut în cartea „Începuturile geometriei” a matematicianului francez Andrien Legendre (1752-1833). În geometrie transformările geometrice (ca analogie a funcției) au intrat tocmai în sec. XX. Matematicianul german **Felix Klein (1849-1925)** accentua: „Transformările geometrice sunt nu altceva decât generalizarea noțiunii funcției”. Funcția numerică trece o mulțime numerică în alta, iar transformarea geometrică – o mulțime de puncte în alta.

A introdus vectorii în matematică tocmai în sec. XIX matematicianul scoțian **Uliam Hamelton (1805-1865)**. El a introdus termenul „vector”, ceea ce înseamnă în traducere din latină „acel ce duce”. Notarea " $\Delta$ " a propus-o în anul 1853 **O. Cauchy (1789-1857)**. Prima lucrare „Teoria calculului vectorial” a tipărit-o în anul 1887 profesorul Universității din Kiev U.P. Ermakov (1845-1922).



**Vasili Petrovici Ermakov (1845-1922)** – doctor în matematica pură, profesor emerit al Universității din Kiev (1890), membru corespondent al Academiei de Științe din Petersburg (1884).

După ce în anul 1868 a terminat Universitatea din Kiev pe Vasili Petrovici l-au lăsat ca stendiat pentru a fi pregătit să activeze ca profesor. După ce a apărut disertația de magistru în anul 1873 a lucrat la Universitatea din Kiev (docent, profesor extraordinar, profesor ordinar, profesor emerit). Din anul 1899 este profesorul și primul administrator al catedrei de matematică superioară a Institutului Politehnic din Kiev. A publicat un șir de cursuri și manuale la disciplinele pe care le citea, printre care: „Teoria vectorilor în plan” (1887), „Geometria analitică” (1899,1900,1918,1920) și altele.

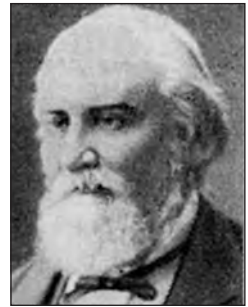
Vasili Petrovici Ermakov a fost un savant foarte cunoscut și a avut o mare autoritate în mediul învățaților. A fondat și editat „Jurnalul matematicii elementare”. A fost unul din organizatorii Asociației fizico-matematice din Kiev. A adus un aport ponderabil în dezvoltarea învățământului matematic.

În Ucraina au făcut cercetări în domeniul geometriei de asemenea M.E. Vașcenko-Zaharcenko, B. Ia. Bubreev, O. S. Smogorjevsikii, M.J. Kovačov, Pogorelov ș.a.

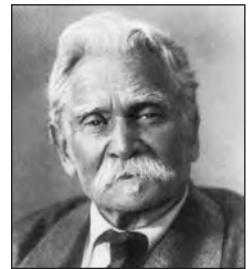
**Mihailo Egorovici Vașcenko-Zaharcenko (1825-1912)** s-a născut în satul Makiivka, ținutul Poltava. Și-a făcut studiile în Kiev și Paris, a fost profesor al Universității din Kiev. A cercetat întrebările istoriei dezvoltării geometriei, a tipărit câteva manuale de geometrie, a tradus în limba rusă „Începuturile” lui Euclid.

**Boris Iakovici Bukreev (1859-1962).** S-a născut în Lvov. A terminat Universitatea din Kiev din anul 1885 a lucrat în ea, un timp îndeplungat a condus catedra de geometrie. Unul din fondatorii Asociației fizico-matematice din Kiev. Principalele cercetări se referă la geometrie, analiză și teoria funcțiilor. A scos de sub tipar lucrările „Geometria diferențială”, „Geometria neeuclidiană în expunere analitică”.

**Olexandr Stepanovici Smogorjevsikii (1896-1969)** s-a născut în satul Lisove în ținutul Vinnița. A făcut studii în Nemirov și Kiev, a fost profesor la Institutul politehnic din Kiev. A examinat chestiunile legate cu construcțiile geometrice, a publicat câteva manuale și lucrări metodice, în particular, manualul referitor la bazele geometriei pentru studenții universității. Lucrările lui sunt traduse în limbile engleză, bulgară, japoneză și în altele.



**Mihailo Egorovici  
Vașcenko-  
Zaharcenko**



**Boris Iakovici  
Bukreev**



**Olexandr  
Stepanovici  
Smogorjevsikii**

**Mykola Ivanovyci Kavančov (1924-1988)** s-a născut în regiunea Saratov, și-a făcut studiile în Kazahstan. Din anul 1950 a trăit și lucrat în Institutul pedagogic din Zaporojie, adminsta catedra de geometrie a Universității din Kiev T.G.Șevcenko. A creat școala științifică în teoria politipurilor liniare. A fost președintele comisiei disciplinei de studiere a matematicii pe lângă Ministerul de Învățământ. A tipărit multe manuale de geometrie pentru așezămintele superioare de învățământ: „Geometria proiectivă”, „Geometria diferențială”. Este interesantă lucrarea lui „Matematica și romantica”, în care M.I. Kovančov scria:

*„Dragi prieteni! Din copilărie fiecare din voi studiază matematica. Cineva – cu interes, iar cineva – fără tragere de inimă”.*

*Se poate îndrăgi știința pentru concordanța strictă a adevărilor ei, pentru puterea și multilateralitatea ei, se poate, invers, de-a nutui nu dragostea de ea pentru a ei pedantism și complexitate. Însă această dragoste și această lipsă de dragoste are să fie ceva superficial și nedurabil, ceva întâmplător și neobligatoriu, dacă de la voi va aluneca aceea, ce se putea numi sufletul științei, mintea ei și al ei intelect, frumusețea ei dihovnicească și a ei subtilitate armonioasă. Noi anume ne-am folosit de termenii caracteristici pentru aprecierea personalității umane, deoarece anume așa o personalitate, integră și înfinit de interesantă, ar trebui să apară înaintea voastră știința, ca voi să simțiți cu adevărat ce ea cu sine reprezintă..”*

**Olexei Vasilievici Pogorelov (1919-2002)** – cunoscut specialist în domeniul geometriei, academician al AȘ a RSSU (1961), academician al AȘ a URSS, lider emerit în știință și tehnică a Ucrainei. Și-a făcut studiile la Universitatea din Harkov (1937-1941) și Academia Militaro-Aeriană M.S. Jukovskii (Moscova, 1941-1945). În anul 1947 după apărarea disertațiilor de candidat și doctor obilitat a revenit în Harkov și mai târziu a condus catedra de geometrie a Universității de Stat din Harkov.

O.V. Pogorelov este autorul a peste 200 lucrări, dintre care 60 de monografii și manuale pentru așezămintele de învățământ superioare și medii, editate în limbile ucraineană, rusă, engleză, germană și spaniolă. Lui Olexei Vasilievici Pogorelov i s-au decernat multe decorații și titluri. Dumnealui a primit premiul internațional M.I. Lobacevski, câteva premii de stat și premii de vază ale Academiei Naționale de Știință a Ucrainei.

Lider emerit în știință și cavalier al decorațiilor de stat.

Se dezvoltă știința geomerică și acuma. Geometria continuă să servească oamenii. Iată ce a scris unul din cei mai cunoscuți arhitecitori ai sec. XX Le Korbiuzie: „Niciodată până în timpurile noastre noi n-am trăit într-o astfel de perioadă geometrică... Lumea înconjurătoare - asta-i lumea geometriei, curată, adevărată, impecabilă în ochii noștri. Totul împrejur – asta-i geometrie”.



**Mykola Ivanovyci  
Kavančov**

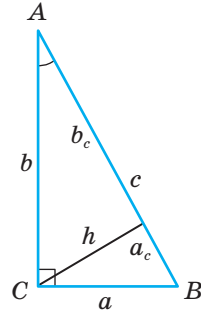


**Olexei Vasilievici  
Pogorelov**

# Cunoștințe din cursul școlii de bază

## Triunghiul dreptunghic

$\frac{a}{c} = \sin \alpha;$ $\frac{b}{c} = \cos \alpha;$ $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha;$ $\frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha.$	$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (teorema Pitagora);}$ $a^2 = a_c \cdot c;$ $b^2 = b_c \cdot c;$ $h^2 = a_c \cdot b_c; \quad h = \frac{ab}{c}.$
--	--

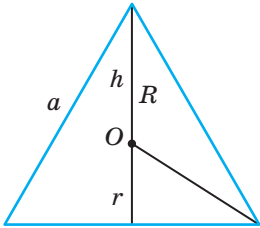


$$S = \frac{1}{2} ab; \quad S = \frac{1}{2} ch; \quad S = \frac{1}{2} bc \sin \alpha;$$

$$R = \frac{c}{2}; \quad r = \frac{a+b-c}{2}.$$

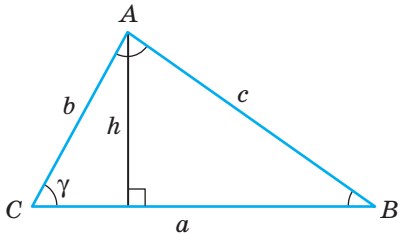
## Triunghiul echilateral

$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad r = \frac{1}{3} h;$ $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$ $h = R + r.$	$r = \frac{a\sqrt{3}}{6};$ $R = \frac{2}{3} h; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3};$ $R = 2r.$
---	--



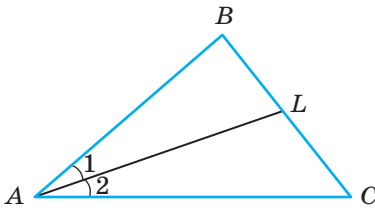
## Triunghiul arbitrar

$S = \frac{1}{2} ah; \quad S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma;$ <p>Formula lui Heron:</p> $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}.$
---



$$r = \frac{S}{p}; \quad R = \frac{abc}{4S}; \quad R = \frac{a}{2 \sin \alpha}.$$

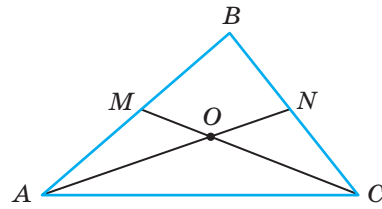
<p>Teorema cosinusurilor</p> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$	<p>Teorema sinusurilor</p> $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$
---	--



$AL$  — bisectoare

1)  $\angle 1 = \angle 2$ ;

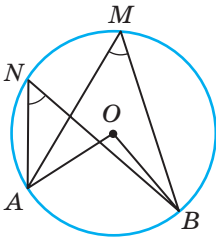
2)  $\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC}$ .



$AN, CM$  — mediane

$AO : ON = 2 : 1$ .

## Circumferință

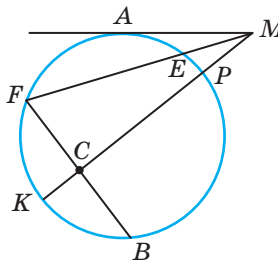


$C = 2\pi r$ ;  $S = \pi r^2$ .

$\angle AMB = \frac{1}{2} \angle AOB =$

$= \frac{1}{2} \overset{\frown}{AB}$ ;

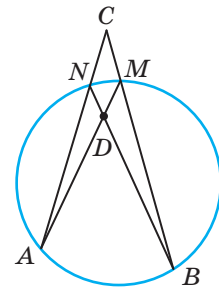
$\angle AMB = \angle ANB$ .



$AM^2 = ME \cdot MF$ ;

$ME \cdot MF = MP \cdot MK$ ;

$FC \cdot CB = KC \cdot CP$ .



$\angle ADB = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{MN})$ ;

$\angle ACB = \frac{1}{2} (\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{MN})$ .

## Pătratul

$d = a\sqrt{2}$ ;

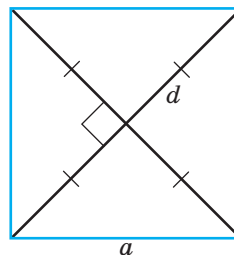
$P = 4a$ ;

$S = a^2$ .

$r = \frac{a}{2}$ ;

$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ;

$S = \frac{1}{2} d^2$ .



## Paralelogramul

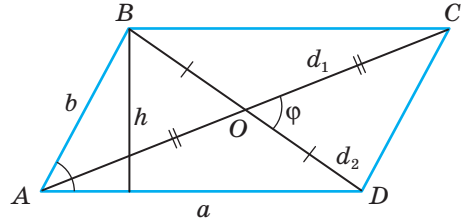
$$\angle A + \angle B = 180^\circ;$$

$$P = 2(a + b);$$

$$S = ah; S = ab \sin \alpha;$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin \varphi;$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2).$$



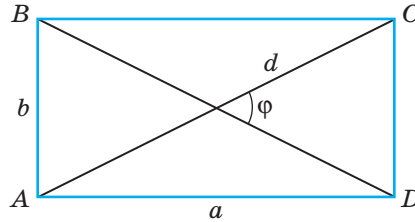
## Dreptunghiul

$$AC = BD;$$

$$P = 2(a + b);$$

$$S = ab;$$

$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi; R = \frac{1}{2} d.$$



## Rombul

$$P = 4a;$$

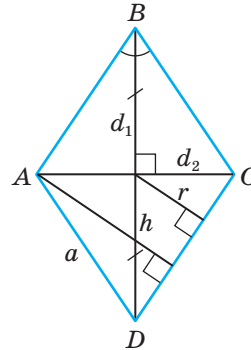
$$S = ah;$$

$$S = a^2 \sin \alpha;$$

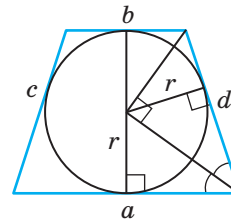
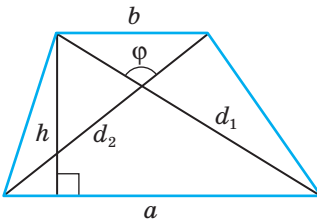
$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2.$$

$$r = \frac{1}{2} h;$$

$$r = \frac{d_1 d_2}{4a}.$$



## Trapezul



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h;$$

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin \varphi.$$

$$a + b = c + d;$$

$$h = 2r.$$

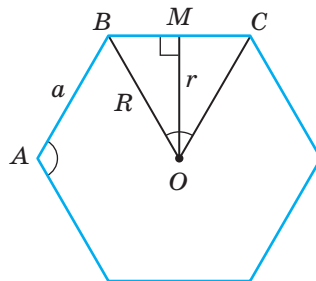
## Poligonul regulat

Suma unghiurilor:  $180(n - 2)$ ;  $P = na$ ;

$$\angle A = \frac{180(n-2)}{n}; \quad \angle BOC = \frac{360^\circ}{n};$$

$$S = \frac{1}{2}arn; \quad S = \frac{1}{2}R^2n \sin \frac{360^\circ}{n};$$

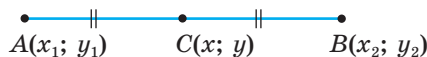
$$a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}; \quad a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}.$$



## Coodronate în plan

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$



$x^2 + y^2 = R^2$  — ecuația circumferinței cu centrul  $O(0; 0)$  de raza  $R$ .

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  — ecuația circumferinței cu centrul  $O(a; b)$  de raza  $R$ .

## Ecuația dreptei

$ax + by + c = 0$  — ecuația generală a dreptei;

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$  — ecuația dreptei care trece prin punctele  $A(x_1; y_1)$  și  $B(x_2; y_2)$ ;

$y = kx + b$  — ecuația dreptei cu coeficient unghiular.

Pentru dreptele  $y_1 = k_1x + b_1$  și  $y_2 = k_2x + b_2$ :

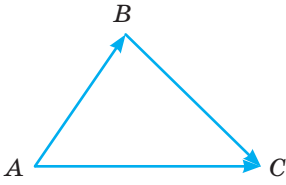
$k_1 = k_2$  — condiția paralelismului;

$k_1 \cdot k_2 = -1$  — condiția perpendicularității;

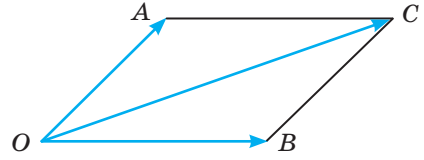
$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$  — distanța de la punctul  $M(x_0; y_0)$  până la dreapta

$$ax + by + c = 0.$$

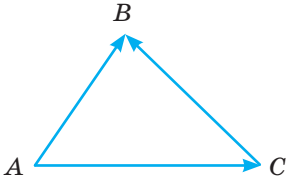
## Vectori



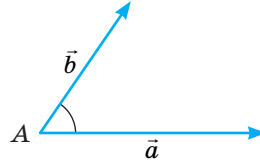
$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$  — adunarea vectorilor conform regulii triunghiului



$\overline{OA} + \overline{OB} = \overline{OC}$  — adunarea vectorilor conform regulii paralelogramului



$\overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$  — diferența vectorilor



$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$  — produsul scalar al vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ ,  $\vec{a} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ .

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

În formă de coordonate:

Dacă punctul  $A(x_1; y_1)$  — originea, iar  $B(x_2; y_2)$  — extremitatea vectorului, atunci  $\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$  — coordonatele vectorului  $\overline{AB}$ ;

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ — modulul vectorului } \overline{AB}.$$

Dacă  $\vec{a} = (x_1; y_1)$  și  $\vec{b} = (x_2; y_2)$ , atunci  $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$  — suma vectorilor  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$ ;

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2) \text{ — diferența vectorilor } \vec{a} \text{ și } \vec{b};$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 \text{ — produsul scalar al vectorilor;}$$

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \text{ — condiția de perpendicularitate a vectorilor nenuli } \vec{a} \text{ și } \vec{b};$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \text{ — condiția de paralelism a vectorilor nenuli } \vec{a} \text{ și } \vec{b};$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a^2}.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ — condiția de perpendicularitate a vectorilor } \vec{a} \text{ și } \vec{b}.$$

$$\vec{a} = \lambda \vec{b} \text{ — condiția de coliniaritate a vectorilor } \vec{a} \text{ și } \vec{b}.$$

## Indice la materie

- Adunarea vectorilor 94  
Apotema poligonului regulat 148, 180  
Aria cercului 170  
Aria sectorului 170  
Aria segmentului 170  
Aria triunghiului 170  
Asemănarea figurilor 220, 232  
Axa absciselor 24  
Axa de simetrie 200  
Axa ordonatelor 24  
Centrul cercului 24  
Centrul de simetrie 193  
Centrul poligonului regulat 148, 180  
Cercul 169, 181  
Coarda cercului 169  
Coeficientul de asemănare 219, 232  
Coeficientul de omotetie 222  
Coeficientul unghiular 45  
Coordonatele mijlocului segmentului 25  
Coordonatele punctului 24  
Coordonatele vectorului 68  
Criteriile de coliniaritate ale vectorilor 62  
Criteriile de egalitate ale vectorilor 62  
Criteriile de perpendicularitate ale vectorilor 89  
Cosinusul unghiului 10, 105  
Cvadratura figurii 171  
Descompunerea vectorului 82  
Diametrul cercului 169  
Diferența vectorilor 75, 104  
Distanța dintre puncte 33  
Dreapta de coordonate 24  
Ecuația circumferinței 38  
Ecuația dreptei 44  
Ecuația dreptei cu coeficient unghiular 45  
Egalitatea figurilor 222  
Egalitatea vectorilor 62  
Extremitatea vectorului 68  
Figură central simetrică 193  
Figuri asemenea 222  
Figuri nu la fel orientate 201  
Figuri omotetice 222  
Figuri simetrice în raport cu o axă 200  
Formula ariei triunghiului 180  
Formula lui Heron 257  
Formula lungimii circumferinței 164  
Funcții trigonometrice 9  
Identitatea trigonometrică fundamentală 18  
Identități trigonometrice 18  
Înmulțirea vectorului cu un număr 105  
Lungimea circumferinței 164  
Lungimea vectorului 61  
Măsura unghiulară a arcului 232  
Metoda coordonatelor 26  
Metoda deplasării paralele 36, 213  
Mișcarea 185, 61  
Modulul vectorului 68, 104  
Omotetia 222  
Originea de coordonate 24  
Originea vectorului 61  
Ortul 82  
Planul de coordonate 24  
Poligonul regulat 147, 180



- Produsul numărului cu vectorul 105  
 Produsul scalar al vectorilor 105, 88  
 Proprietățile mișcării 185, 213  
 Proprietățile omotitiei 222  
 Proprietățile operațiilor cu vectorii 74,75  
 Proprietățile poligonului regulat 154  
 Proprietățile produsului scalar al vectorilor 88  
 Proprietățile rotației 206  
 Proprietățile simetriei în raport cu o dreaptă 199  
 Proprietățile simetriei în raport cu un punct 192  
 Proprietățile transformării de asemănare 219  
 Proprietățile transportului paralel 213  
   Raza circumferinței 142, 155  
 Regula triunghiului 74  
 Regula paralelogramului 75  
 Reolvarea triunghiurilor 9  
 Rotația în jurul unui punct  
 Scăderea vectorilor 75  
 Secerățică 171  
 Segment de cerc 169  
 Segment orientat 61  
 Semicercul 170  
 Simeria în raport cu o dreaptă 199, 231  
 Simetria în raport cu un punct 192, 231  
 Simetria glisantă 214  
 Sinsul unghiului 10  
 Sistemul de coordonate 24  
 Suma vectorilor 74, 75, 104  
 Tangenta unghiului 10  
 Teorema cosinusurilor 109  
 Teorema despre coordonatele mijlocului unui segment 25  
 Teorema produsul scalar al vectorilor 88  
 Teorema despre suma pătratelor diagonalelor paralelogramului 110  
 Teorema despre raportul ariilor poligoanelor asemenea 220  
 Teorema despre raportul perimetrelor poli-goanelor asemenea 220  
 Teorema distanței dintre două puncte 37  
 Teorema sinusurilor 117  
 Transformarea de asemănare 219  
 Transformări geometrice 185  
 Transportul paralel 213  
 Trigonometria 108  
 Unghiul de rotație 206  
 Unghiul făcut de vectori 88  
 Utilizarea vectorilor 94  
 Vârful poligonului 147  
 Vectori coliniari 75  
 Vectori coorientați 62  
 Vectori egali 62  
 Vectori liberi 63  
 Vectori opuși 62  
 Vectori orientați în sens opus 62  
 Vectorul aplicat 63  
 Vectorul nul 62, 68  
 Vectorul unitar 62

## Răspunsuri

20. a) 0; b)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ . 21. a) 0; b)  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 23.  $\angle A = 135^\circ$ ;  $\angle B = 15^\circ$ ;  $\angle C = 30^\circ$ .
25. 1D; 2B; 3A; 4E. 30.  $15^\circ$ ;  $15^\circ$ ;  $150^\circ$ . 31.  $30^\circ$ ;  $30^\circ$ ;  $120^\circ$  sau  $15^\circ$ ;  $15^\circ$ ;  $150^\circ$ .
34.  $a$  și  $a\sqrt{2}$ . 39. 0,2. 40.  $\frac{4}{5}$ ;  $\frac{3}{5}$ ;  $\frac{4}{3}$  și  $\frac{12}{13}$ ;  $\frac{5}{13}$ ;  $\frac{12}{5}$ . 53. a)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ;  
 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$ ; b)  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ . 54. a)  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ;  
 b)  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{4}$ . 59. -0,25;  $\frac{\sqrt{15}}{4}$ . 60. 0,7;  $\sqrt{0,51}$ . 62. 1C; 2A; 3E; 4D.
63. 1D; 2A; 3B; 4E. 64. a) 1; b) 0; c) -1. 70. a)  $\frac{3}{5}$ ;  $\frac{4}{5}$ ;  $\frac{4}{3}$ ; b)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ;  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ;  $\frac{1}{2}$ .
74. a)  $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ; b) 1; c)  $\operatorname{tg}^2 \alpha$ ; d)  $-\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ . 89. (2; -3). 90. (0; 0); (0; 5); (5; 5); (5; 0).
91. (-3; 0); (0; 5); (3; 0); (0; -5) sau (-5; 0); (0; 3); (5; 0); (0; -3). 92. (2,5; 4).  
 94.  $M(3; 3)$ . 95.  $B(3; -10)$ . 96.  $C(10; -5)$ ;  $B(2; 2)$ . 97.  $M(1; 3)$ ;  $D(3; 9)$ .  
 98. (0,5; 4,5); (3; 5); (1,5; 2,5). 99.  $A(-14; 10)$ ;  $B(6; -6)$ . 100.  $K(3; 1,25)$ ;  
 $P(4; -0,5)$ ;  $T(5; -2,25)$ . 101.  $M(3; -8)$ ;  $K(-9; 6)$ ;  $B(-15; 13)$ . 102. a)  $a = -11$ ;  
 $b = 6$ ; b)  $a = 1$ ;  $b = 0$ ; c)  $a = 13$ ;  $b = 3$ . 103. (4; 3); (-2; 1); (2; 7). 106.  $D(-3; 7)$ .  
 107. (2; 1) sau (6; 3), sau (0; 5). 108.  $M(6; 0)$ ;  $N(5; 2)$ . 109. (1; 3). 110. (-7; 2).  
 114.  $24 \text{ cm}^2$ . 115.  $2R^2 \sin \alpha \cos \alpha$ . 116.  $125 \text{ cm}^2$ . 126.  $12\sqrt{10}$ . 127. 5;  $\sqrt{17}$ ;  $\sqrt{10}$ .  
 128. 7,5. 129. 13 și 17. 134.  $B(5; 3)$ ;  $\alpha \approx 18^\circ$ . 135. a)  $x = 2$ ; b)  $x = \pm 8$ ;  
 c)  $x = -3$  або  $x = 1$ . 136. a) (-1; 0); b) (0; 4); c)  $\left(-1\frac{1}{3}; -1\frac{1}{4}\right)$ . 137. (3; 6).
142. Da. 143. 1 : 3. 145. 2. 146. 26. 147.  $BL = \frac{\sqrt{97}}{3}$ ;  $CL = \frac{2\sqrt{97}}{3}$ . 151.  $A(-7; -12)$ .
152. 1D; 2E; 3A; 4C. 160. a)  $(x + 2)^2 + y^2 = 18$ . 161. a)  $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 16$ ;  
 b)  $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 1$ . 162. a)  $x^2 + (y - 5)^2 = 25$  sau  $x^2 + (y + 5)^2 = 25$ .  
 164.  $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$ . 165.  $x^2 + y^2 = 25$ . 166.  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$  sau  
 $(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$ . 168.  $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 25$ . 169.  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$ ;  
 $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$ . 170.  $(x - 1)^2 + y^2 = 9$ . 172.  $(x - 5,5)^2 + y^2 = 6,25$  sau  
 $\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 + y^2 = \frac{2809}{196}$ . 175. a) (-1; 0),  $R = 1$ ; d) (5; -1),  $R = 2\sqrt{5}$ . 176. a) 5; б) 10.
177. a) Se intersectează; b) sunt tangente. 178. a)  $(x - 1,5)^2 + (y + 2)^2 = 6,25$ ;  
 b)  $(x + 4)^2 + (y + 0,5)^2 = 6,25$ ; c)  $x^2 + \left(y + \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{625}{64}$ . 179. a)  $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 40$ ;  
 b)  $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 10$ . 181. a)  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$ ; b)  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$ .

- 182.** Pentru  $a \in (-\infty; -4) \cup (-2; 2) \cup (4; +\infty)$  — puncte comune nu sunt; pentru  $a = \pm 2$  — tangență exterioară; pentru  $a = \pm 4$  — tangență interioară; pentru  $a \in (-4; -2) \cup (2; 4)$  — se intersectează. **183.** a)  $a = 2$  sau  $a = -6$ ; b)  $a = 4$  sau  $a = -8$ . **198.**  $x = 2$ ;  $y = -4$ . **200.** (0; 2); (3; 0). **201.** (-5; 2). **202.** a)  $3y - 2x = 0$ ; b)  $y = -x$ ; c)  $y = -3x$ ; d)  $y = 0,5x$ . **203.** a)  $y = 4 - x$ ; b)  $y = x + 3$ ; c)  $5y - 4x = 20$ ; d)  $y - 6x = -23$ . **205.** a)  $135^\circ$ ; b)  $45^\circ$ ; c)  $30^\circ$ ; d)  $150^\circ$ . **206.** a)  $y = 2x - 8$ ; b)  $y = x - 6$ ; c)  $y = -3x + 2$ ; d)  $y = -0,5x - 3$ . **207.** a)  $y = 2x - 8$ ; b)  $y = -x + 1$ ; c)  $x + 2y + 1 = 0$ ; d)  $2x + 3y = 0$ . **208.**  $a = -2$ . **209.**  $b = 1$ . **210.**  $l_1: y = -x$ ;  $l_2: y = 1$ ;  $l_3: x = -2$ ;  $l_4: y = x + 2$ ;  $l_5: y = 0,5x - 2$ . **212.**  $y = -x + 5$ ;  $S = 12,5$  sau  $y = x + 3$ ;  $S = 4,5$ . **214.** (AB):  $3y - x = 12$ ; (AC):  $5y + 4x = 3$ ; (BC):  $2y + 5x = 25$ . **215.**  $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ ;  $y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$ ;  $y = 0$ ;  $x = 1$ ;  $3y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ ;  $3y = -\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$  sau  $y = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ ;  $y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$ ;  $y = 0$ ;  $x = 1$ ;  $3y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}$ ;  $3y = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ . **216.**  $x = 2$ ;  $x + 9y - 14 = 0$ ;  $8x + 9y - 28 = 0$ ;  $2x - y + 2 = 0$ ;  $3x - 5y + 22 = 0$ ;  $3y + 2y - 16 = 0$ . **217.**  $y = x + 5$ ;  $y = x - 5$ ;  $y = -x - 5$ . **218.**  $y = \sqrt{3}x + 5$ ;  $y = -\sqrt{3}x + 5$ ;  $y = \sqrt{3}x - 5$ ;  $y = -\sqrt{3}x - 5$ . **219.** (1; 6); (-3; -2); (6; 1). **220.** (1; 4); (7; 3);  $\left(\frac{27}{7}; -\frac{1}{7}\right)$ ;  $\left(-\frac{15}{7}; \frac{6}{7}\right)$ . **221.** 1C; 2D; 3A; 4B. **222.** a), b), d) — se intersectează, b) nu au puncte comune. **223.**  $4x + y - 8 = 0$ ;  $x + 2y - 5 = 0$ ;  $2x - 3y + 2 = 0$ ;  $O\left(\frac{11}{7}; \frac{12}{7}\right)$ . **224.**  $a = 1$ ;  $b = -2$ . **225.**  $a = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$ . **246.** 1A; 2D; 3C; 4E. **257.** 25 cm. **258.** 2 cm și 3 cm. **271.**  $\overline{BA} = (-5; -3)$ ;  $\overline{DC} = (4; -6)$ ;  $\overline{NM} = (-3; 2)$ . **272.**  $\overline{MN} = (6; 2)$ ;  $\overline{NK} = (-2; -6)$ ;  $\overline{MK} = (4; -4)$ ;  $|\overline{MN}| = 2\sqrt{10}$ ;  $|\overline{NK}| = 2\sqrt{10}$ ;  $|\overline{MK}| = 4\sqrt{2}$ .  $\triangle MNK$  — isoscel. **273.** a) Da; b) nu. **274.** (3, 5; 1). **275.** Da. **276.**  $\overline{AB} = (4; 2)$ ;  $\overline{AD} = (4; -2)$ ;  $\overline{BC} = (4; -2)$ ;  $\overline{CD} = (-4; -2)$ . **278.** a)  $B(3; 8)$ ; b)  $B(-3; -4)$ ; c)  $B(-10; 1)$ ; d)  $B(-11; 8)$ . **279.**  $D(9; -1)$ ;  $R(3; 1)$ ;  $X(2; -1)$ . **280.** a)  $x = \pm 8$ ; b)  $x = 9$  sau  $x = -7$ ; c)  $x = -8$  sau  $x = 6$ ; d)  $x = 4$  sau  $x = -2$ . **281.** a)  $m = 0$  sau  $m = 1$ ; b)  $m = 4$ ; c)  $m = -1$ . **286.** 1A; 2B; 3D; 4E. **304.** a)  $x = 3$ ; b)  $x = -11$ . **305.** a)  $x = -7$ ;  $y = 1$ ; b)  $x = 2$ ;  $y = -8$ . **308.** a)  $\overline{AD}$ ; b)  $\overline{MP}$ ; c)  $\overline{PK}$ ; d)  $\overline{AN}$ ; e)  $\overline{NK}$ . **311.** a)  $\vec{d} = (5; -3)$ ; b)  $\vec{d} = (3; 5)$ ; d)  $\vec{d} = (1, 5; 2, 5)$ . **312.** a)  $C(2; 3)$ ; b)  $C(-1; 5)$ . **313.** a), c) circumferința cu raza de 10 cu centrul  $A(-4; -2)$ ; b) circumferința cu raza de 10 cu centrul  $B(2; 6)$ . **326.** a)  $8\bar{a} - \bar{b}$ ; b)  $-4\bar{m} - 9\bar{n}$ ; c)  $17\bar{c}$ ; d)  $0,6\bar{b} - \bar{c}$ . **328.** a)  $2\sqrt{2}$ ; b) 1; c) 30; d)  $\sqrt{185}$ . **329.**  $x = 2$ ;  $\bar{p} = (6; 8)$  sau  $x = -2$ ,  $\bar{p} = (-6; -8)$ . **332.** a)  $m = 8$ ; b)  $m = -\frac{4}{3}$ ; c)  $m = \pm 6$ ; d)  $m = \pm 3$ . **333.**  $\overline{AM} = \frac{1}{2}\bar{a}$ ;  $\overline{NB} = \bar{a}$ ;  $\overline{AB} = 2\bar{a}$ ;  $\overline{BP} = -\frac{1}{2}\bar{a}$ ;  $\overline{MP} = \bar{a}$ ;  $\overline{MA} = -\frac{1}{2}\bar{a}$ . **334.**  $\overline{AO} = \frac{1}{2}(\bar{a} + \bar{b})$ ;  $\overline{DB} = \bar{b} - \bar{a}$ ;  $\overline{AM} = \bar{a} + \frac{1}{2}\bar{b}$ ;  $\overline{MD} = \frac{2}{2}\bar{b} - \bar{a}$ . **335.** a)  $N(-3; 10)$ ; b)  $N(0; -0,5)$ . **337.**  $\overline{AK} = \left(\frac{4}{3}; 2\right)$ ;  $\overline{AB} = \left(\frac{2}{3}; 5\right)$ . **338.**  $\overline{AB} = 3\bar{a}$ ;  $\overline{BC} = \frac{3}{2}\bar{b}$ ;  $\overline{AC} = 3\bar{a} + \frac{3}{2}\bar{b}$ ;  $\overline{BD} = \frac{3}{2}\bar{b} - 3\bar{a}$ ;  $\overline{AD} = \frac{1}{2}\left(3\bar{a} + \frac{3}{2}\bar{b}\right)$ ;  $\overline{AM} = 3\bar{a} + \frac{3}{4}\bar{b}$ ;  $\overline{AN} = \frac{2}{2}\bar{a} + \frac{3}{2}\bar{b}$ . **340.**  $\left(-\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right)$ . **341.**  $\bar{b} = (3; -4)$ . **342.** 1C; 2E; 3D; 4A.

343.  $|\bar{a}|=5$ ;  $|\bar{b}|=5\sqrt{2}$ ;  $|\bar{c}|=2\sqrt{5}$ ;  $|\bar{d}|=6$ . 344.  $\alpha=\frac{10}{33}$ ;  $\beta=\frac{29}{33}$ .
345. a)  $\bar{m}=-20\bar{a}-11\bar{b}$ ; b)  $\bar{m}=-9\bar{c}-\frac{16}{3}\bar{d}$ . 354. a)  $40^\circ$ ; b)  $130^\circ$ ; c)  $140^\circ$ .
356. a) 16; b) 48. 357. a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; b)  $\frac{1}{\sqrt{10}}$ ; c)  $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ ; d)  $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ . 358. a)  $45^\circ$ ; b)  $135^\circ$ ; c)  $45^\circ$ ; d)  $30^\circ$ . 361. a) 72; b) -72. 362. a)  $x=0$ ; b)  $x=-3$ ; c)  $x=-2,4$ ; d)  $x=1$ .
363. a)  $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ;  $\cos B=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ;  $\cos C=0$ . 364.  $135^\circ$ . 365.  $135^\circ$ . 366. a)  $D(-2; 0)$ ; b)  $D\left(0; -\frac{4}{3}\right)$ . 367.  $l=-5$ . 368. a)  $m=-3$ ; b)  $m=\pm 3$ ; c)  $m=6$  sau  $m=-0,5$ .
370. a) 3; b) -1,5; c) -1; d) 5,5. 371.  $135^\circ$ . 372. a)  $\sqrt{2}$  și  $\sqrt{2}$ ; b)  $\sqrt{29}$  și  $\sqrt{29}$ ; c)  $\sqrt{3}$  și 1; d)  $\sqrt{13}$  și  $\sqrt{37}$ . 373. 22. 377. 108 cm; 432 cm<sup>2</sup>. 386. 1 : 2. 387.  $\overline{AM}=(5; 1)$ ;  $|\overline{AM}|=\sqrt{26}$ . 388. (-2; 5). 389.  $x-2y+5=0$ ;  $8x-5y+1=0$ ;  $4x+3y-19=0$ . 390.  $5x+2y-13=0$ . 391. 9 un. p. 399.  $C(-2; -2)$  sau  $C(-5; -5)$ . 400.  $2x-y-1=0$ ;  $x+2y-3=0$ . 401.  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .
419. a) 7 cm; b)  $2\sqrt{39}$  cm. 420. a)  $2\sqrt{3}$  cm; b)  $\sqrt{29}$  cm; c) 2 cm; d) 13 cm. 421. a)  $60^\circ$ ; b)  $120^\circ$ . 423.  $16^\circ$ . 425.  $60^\circ$ . 426.  $120^\circ$ . 427. 5 cm și  $\sqrt{109}$  cm. 428. 4 cm și  $4\sqrt{13}$  cm. 429.  $4\sqrt{37}$  cm. 430. 6 cm și 7 cm. 431. 11 cm și 7 cm. 432. 9,5 cm. 433. 12 cm. 434. 10 cm. 435. 24 cm. 436. 90 cm. 437. 20 cm și 12 cm. 438.  $\approx 5,3$  min. 439. 1B; 2D; 3C; 4E. 440. 7 cm; 7 cm și  $\sqrt{7}$  cm. 441.  $\sqrt{57}$  cm. 443. 11 cm; 23 cm; 30 cm. 444.  $120^\circ$ . 446.  $4\sqrt{3}$  cm și  $4\sqrt{7}$  cm. 447. 3 cm sau  $\sqrt{73}$  cm. 448.  $60^\circ$ . 450.  $\frac{\sqrt{2}}{10}$ .
452.  $\frac{2ab \cos \frac{\alpha}{2}}{a+b}$ . 453.  $\frac{l(a+b)}{2ab}$ . 467. a)  $8\sqrt{2}$  cm; b)  $3\sqrt{6}$  cm; c)  $8\sqrt{2}$  cm.
468. a)  $10\sqrt{2}$  cm; b)  $5\sqrt{6}$  cm; c)  $18\sqrt{2}$  cm. 469. c)  $45^\circ$ . 470. a)  $60^\circ$ ; b)  $30^\circ$ .
472.  $\frac{d \sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ ;  $\frac{d \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ . 473. 1D; 2C; 3B; 4A. 474. 6 cm. 475.  $4\sqrt{3}$  cm.
476.  $5\sqrt{2}$  cm. 477.  $60^\circ$  și  $75^\circ$  sau  $15^\circ$  și  $120^\circ$ . 478.  $60^\circ$  și  $90^\circ$  sau  $120^\circ$  și  $30^\circ$ .
479. Nu. 481.  $\frac{a \sin \beta \sin(\alpha+\beta)}{\sin \alpha}$ ;  $-\frac{a \sin \beta \cos(\alpha+\beta)}{\sin \alpha}$ ;  $\frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$ . 482.  $\frac{m \sin \beta \sin \alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$ ;
- $\frac{m \sin \beta \cos \alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$ ;  $\frac{m \sin \beta}{\sin(\alpha-\beta)}$ . 483.  $\frac{d \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ ;  $\frac{d \sin(2\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ ;  $\frac{d \sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ .
484.  $\frac{p \sin \alpha}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$ ;  $\frac{p \sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$ ;  $\frac{p \sin \alpha \sin \gamma}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}$ .
485.  $\frac{2m \sin \beta \sin(\alpha+\beta)}{\sin \alpha \sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)}$ . 486.  $\frac{(a-b) \sin \beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ ;  $\frac{(a-b) \sin \alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$ . 487.  $\frac{b}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$ .

488.  $2R \sin \alpha \sin \beta$ . 489.  $45^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $75^\circ$  sau  $45^\circ$ ;  $15^\circ$ ;  $120^\circ$ . 490.  $2,5\sqrt{10}$  cm.
491.  $\frac{15\sqrt{41}}{8}$ . 492. a)  $\approx 13$  m; b)  $\approx 32$  m. 504.  $\sqrt{41-20\sqrt{2}} \approx 3,6$  cm. 505.  $\approx 37$  cm;  
 $\approx 66$  cm. 506.  $65^\circ$ . 507.  $\approx 61,3$  m; 80 m;  $\approx 67,6$  m. 509. 18,3 cm;  $19^\circ$ ;  $29^\circ$ .  
 510.  $\approx 6,3$  cm;  $\approx 15,2$  cm. 511.  $\approx 3,7$  cm;  $\approx 7,6$  cm. 512.  $\approx 12$  cm;  $\approx 13$  cm;  $\approx 8$  cm.  
 513.  $51^\circ$ ;  $129^\circ$ ;  $147^\circ$ ;  $33^\circ$ . 514.  $\approx 29$  m;  $\approx 40$  m. 516.  $AB \approx 7$  cm,  $BC \approx 8,5$  cm.  
 517.  $AB \approx 7,1$  cm;  $BC \approx 11,6$  cm;  $AC \approx 13,4$  cm. 518.  $\approx 10,2$  cm;  $\approx 18,9$  cm;  
 $\approx 19$  cm. 519.  $\approx 7,6$  cm;  $\approx 13,4$  cm;  $\approx 13,4$  cm. 520.  $\approx 21,5$  m. 523.  $\approx 16,8$  km/orä.  
 524.  $\approx 12,6$  dm. 540.  $S = 9\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>;  $r = \sqrt{3}$  cm;  $R = 2\sqrt{3}$  cm. 541. 24 cm. 542. 16cm.  
 543. 10 cm; 10 cm;  $10\sqrt{3}$  cm. 544. 8 cm; 8 cm; 11 cm. 545. 56 cm. 546.  $9\sqrt{3}$  cm;  
 $8\sqrt{3}$  cm. 547.  $65\sqrt{3}$  cm. 549. 3 cm; 6,25 cm. 551.  $5\sqrt{3}$  cm. 552.  $68\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.  
 553. 45 cm<sup>2</sup>. 555.  $30^\circ$ ;  $150^\circ$ . 556.  $ad \sin \alpha$ . 557.  $12\sqrt{3}$  cm;  $12\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>. 558. 468 cm<sup>2</sup>.  
 559. 10 cm<sup>2</sup>; 12 cm<sup>2</sup>. 560.  $\frac{15\sqrt{3}}{2}$  cm<sup>2</sup>;  $\frac{15\sqrt{3}}{4}$  cm<sup>2</sup>;  $\frac{15\sqrt{3}}{2}$  cm<sup>2</sup>;  $15\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.  
 561. 31 cm<sup>2</sup>. 563. 6 cm<sup>2</sup>; 25 cm<sup>2</sup>; 29 cm<sup>2</sup>. 564. 2,5 cm. 565. 15 cm; 15 cm; 7 cm.  
 566.  $4\sqrt{10}$  cm;  $4\sqrt{10}$  cm; 5 cm. 567.  $\frac{a^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$ . 569. 21 cm<sup>2</sup>; 63 cm<sup>2</sup>.  
 571. 22 cm<sup>2</sup>. 572. 16 cm; 24 cm. 573. 624 cm<sup>2</sup>. 574.  $\frac{d^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ . 592. 5; 6;  
 8; 9; 10; 12. 593. a) 15; b) 12. 594. 5 cm;  $5\sqrt{2}$  cm. 596. 1D; 2B; 3A; 4E.  
 597.  $\frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2}$ . 598.  $\frac{\sqrt{4r^2 + a^2}}{2}$ . 599.  $2\sqrt{R^2 - r^2}$ . 601.  $a\sqrt{3}$ ;  $2a$ ;  $a\sqrt{3}$ .  
 602.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ . 607.  $\frac{1}{3}m$ . 608.  $a(\sqrt{2} - 1)$ . 610. 1 : 2. 611.  $72^\circ$ . 628. a)  $8\sqrt{3}$  cm;  
 d)  $8\sqrt{2 - \sqrt{3}}$  cm. 629. a) 48 cm. 634. a)  $12\sqrt{3}$  cm;  $12\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>; b)  $16\sqrt{2}$  cm; 32cm<sup>2</sup>.  
 636. 2. 643. a) 12 cm;  $6\sqrt{2}$  cm; b)  $6\sqrt{3}$  cm;  $6\sqrt{3}$  cm. 644.  $\frac{R\sqrt{6}}{2}$ . 645.  $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ .  
 646. 1 : 2. 648.  $\frac{l(3 + \sqrt{3})}{6}$  sau  $\frac{l(3 - \sqrt{3})}{6}$ . 649.  $10\sqrt{6}$  cm. 650.  $108\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.  
 651. 1E; 2D; 3A; 4B. 667.  $8\sqrt{2}\pi$  cm;  $8\pi$  cm. 668.  $\frac{\pi d\sqrt{2}}{2}$ . 669.  $65\pi$  cm.  
 670.  $18\pi$  cm;  $8\pi$  cm. 671.  $4\sqrt{3}\pi$  cm;  $8\sqrt{3}\pi$  cm. 672. a)  $\pi$  cm; b)  $2\pi$  cm; c)  $3\pi$  cm;  
 d)  $4\pi$  cm. 673.  $\frac{4\pi\sqrt{3}}{3}$  cm. 674.  $8\pi$  cm;  $12\pi$  cm. 675. 4,7 $\pi$  cm. 677.  $6\pi$  cm;  $30\pi$  cm.  
 678. 1C; 2B; 3A; 4E. 679.  $\approx 56,5$  m. 683.  $\frac{\pi a}{\cos \beta}$ . 684. 2 : 1. 685. a)  $4\pi + 20$ ;  
 b)  $8\pi$ ; c)  $7,3\pi$ . 686.  $7,5\pi$  cm. 687.  $2\pi a$ . 690.  $120^\circ$ . 691.  $3\pi$ ;  $4\pi$ ;  $5\pi$ . 692.  $5\pi$  cm;  
 $15\pi$  cm. 693.  $8\pi$  cm;  $16\pi$  cm. 694.  $\pi$  cm;  $3\pi$  cm;  $8\pi$  cm sau  $5\pi$  cm;  $3\pi$  cm;  $4\pi$  cm.  
 716. 2 : 3. 717.  $100\pi$  cm<sup>2</sup>. 718. 1 : 4. 719.  $4\pi$  cm<sup>2</sup>;  $25\pi$  cm<sup>2</sup>. 720.  $21\pi$  cm<sup>2</sup>.  
 721. 9 cm și 12 cm. 722. a)  $16\pi$  cm<sup>2</sup>; b)  $24\pi$  cm<sup>2</sup>; c)  $48\pi$  cm<sup>2</sup>; d)  $108\pi$  cm<sup>2</sup>.  
 723. a)  $3(2\pi - 3\sqrt{3})$  cm<sup>2</sup>; b)  $9(\pi - 2)$  cm<sup>2</sup>. 724. 21,5 %. 726.  $25\pi$  cm<sup>2</sup>. 728.  $9\pi$  cm<sup>2</sup>;

- $\frac{27}{4}\pi$  cm<sup>2</sup>. **729.**  $4\pi(11-2\sqrt{10})$  cm<sup>2</sup>. **730.** 648 cm<sup>2</sup>. **731.**  $\frac{3201}{64}\pi$  cm<sup>2</sup>. **733.** 1C; 2A; 3D; 4B. **734.** 3 : 2. **735.**  $\frac{\pi R^2}{16}$ . **736.**  $\sqrt{5}$  cm. **737.**  $\frac{27(4\pi-3\sqrt{3})}{4}$  cm<sup>2</sup>;  $\frac{27(8\pi+3\sqrt{3})}{4}$  cm<sup>2</sup>. **738.**  $\frac{1}{6}R^2(4\pi+3\sqrt{3})$ . **739.**  $\frac{a^2(\pi+3\sqrt{3})}{24}$ . **758.** 30°; 50°; 100°.
- 759.** Nu. **764.** a) Da; b) nu; c) da; d) nu. **769.**  $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 17$ . **772.** 5 cm;  $5\sqrt{3}$  cm;  $12,5\sqrt{3}$  cm. **773.**  $\frac{5}{13}$ ;  $\frac{12}{13}$ ; 1. **795.** a)  $A_1(-2; 3)$ ;  $B_1(-4; -2)$ ;  $C_1(3; 3)$ ;  $D(5; -1)$ ; b)  $A'(0; 5)$ ;  $B'(-2; 0)$ ;  $C'(5; 5)$ ;  $D'(7; 1)$ . **796.** a) (3; 4); b) (1; 3); c) (-3; 4,5); d) (7,5; 4). **808.**  $x = 5$ ;  $y = -5$ . **809.** a)  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 20$ ; b)  $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 20$ . **810.** (-3; 7). **811.** a)  $y = -2x - 6$ ; b)  $y = -2x$ .
- 812.**  $y = 2x - 3$ ;  $2y + x + 1 = 0$ ;  $P = 8\sqrt{5}$ ;  $S = 20$  un.p. **814.** 1E; 2A; 3D; 4B. **835.** 22. **844.**  $y = -2x - 3$ ;  $y = -2x + 3$ . **845.**  $x - 3y + 8 = 0$ ;  $y + 3x + 4 = 0$ ;  $y - 2x - 6 = 0$ ;  $x + 2y - 2 = 0$ . **848.**  $y = -x + 1$ . **849.** a) 2; b) 1; c) 2.
- 851.** Duceți prin punctul dat dreapta, perpendiculară pe bisectoarea unghiului dat. **852.**  $y = -x + 1$ . **854.** Construiți punctul  $B_1$ , simetric punctului  $C$  în raport cu dreapta  $l$ , și duceți dreapta  $AB_1$ . Dacă  $AB_1 \parallel l$ , atunci problema nu are soluții. **856.** 1D; 2C; 3B; 4E. **869.** a. **871.** 2a; 90°. **872.** Două drepte, cărora le aparțin bisectoarele unghiurilor formate de dreptele date. **873.** Cu 120° în jurul centrului triunghiului.
- 875.** a) 72°; b) 60°; c) 40°; d) 36°; e)  $\frac{360^\circ}{k}$ . **876.**  $P = \sqrt{26}(2 + \sqrt{2})$ ;  $S = 13$ . **877.** 90°. **879.** Mediatoarea segmentului care unește centrele circumferințelor date. **880.** a)  $a\sqrt{3}$ ; b)  $a$ . **881.**  $AA_1 = AD_1 = a\sqrt{2}$ ;  $AC_1 = AB_1 = a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ . **882.** 60°. **883.** a)  $BC_1 = a\sqrt{3}$ ;  $BD_1 = a\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ; b)  $BC_1 = a(\sqrt{2} - 1)$ ;  $BD_1 = a\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ . **902.**  $M_1(5; -5)$ ;  $P_1(7; -3)$ ;  $K_1(-6; 1)$ . **903.**  $\bar{a} = (-8; 8)$ . **904.** a) Nu; b) da; c) nu. **905.**  $M_1(0; 5)$ ,  $N_1(2; -1)$ . **907.**  $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 9$ . **908.** a)  $y = -2x - 3$ ; b)  $y = -2x + 9$ . **909.**  $x = -8$ ;  $y = -8$ . **910.**  $x = 3$ ;  $y = 4$ . **914.**  $A_1(4; 3)$ ;  $B_1(8; 7)$ ;  $C_1(10; 5)$ ;  $D_1(6; 1)$ . **917.** Realizați așa o deplasare paralelă a punctului  $A$ , la care punctul  $K$  se transferă în  $P$ . Punctul obținut uniți-l cu  $B$ . **933.** Nu. **934.** Nu. **938.** 12 cm; 20 cm; 24 cm; 32 cm. **939.** 32 cm<sup>2</sup>; 200 cm<sup>2</sup>. **940.** 10 cm; 18 cm. **941.** 480 cm<sup>2</sup>. **942.** 3. **943.** 32 cm<sup>2</sup>. **944.** 4 cm și 10 cm. **945.** 36 cm<sup>2</sup>. **950.** 250 cm<sup>2</sup>. **951.** 2 : 9 sau 2 : 5. **952.** 25 cm<sup>2</sup>. **953.** 4S. **954.** 40 cm<sup>2</sup>. **959.** Arătați că cea mai mică înălțime a triunghiului este egală cu jumătate din ipotenuză. **960.**  $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$ . **961.**  $\frac{a^2 - ad + d^2}{a-d}$ . **962.**  $\sqrt{16,25}$  cm. **964.** 30°; 60°; 120°; 150°.
- 966.** 2 cm. **967.** Inițial construiți triunghiul dreptunghic ale cărui ipotenuză și catetă sunt egale corespunzător cu mediana și înălțimea dată, și puneți în el segmentul care este egal cu bisectoarea dată. **968.** Divizați circumferința în 6 părți egale și considerați că  $(\sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 - 1$ . **969.**  $\frac{\alpha}{2}(\sqrt{3} - 1)$ . **970.** (3; -1); (-1; 5); (7; 3).
- 971.**  $x = \frac{b_1 + na_1}{1+n}$ ,  $y = \frac{b_2 + na_2}{1+n}$ . **972.** Considerați că  $a = 2R \sin \alpha$ ,  $b = 2R \sin \beta$ ,

$S = 0,5ab \sin C$ . **975.**  $75^\circ$ . Construiți triunghiul echilateral  $M_1AD$  și arătați că punctul  $M_1$  coincide cu punctul  $M$ . **976.**  $45^\circ, 45^\circ, 150^\circ$  și  $120^\circ$ . Cu ajutorul teoremei cosinusurilor aflați unghiurile  $B$  și  $D$ , examinați triunghiul dreptunghic isoscel cu ipotenuza  $AB$ . **977.**  $75^\circ$ . Prin punctele  $A, B, C$  duceți o circumferință și arătați că punctul  $D$  - centrul acestei circumferințe. **978.**  $30^\circ$ . Construiți pe  $AB$  triunghiul echilateral  $ABM$ . Dacă dreptele  $AM$  și  $BC$  se intersectează în punctul  $K$ , atunci triunghiul  $DMK$  - tot este echilateral. **979.**  $45^\circ$ . **987.** Arătați că triunghiul dat este dreptunghic, iar una din laturile lui - diametrul circumferinței.

**988.** Dacă  $2r_1 + 2r_2 + 2r_3 = 2R$ , atunci  $2\pi r_1 + 2\pi r_2 + 2\pi r_3 = 2\pi R$ . **989.**  $r_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} r$ ,

$r_2 = \frac{\sqrt{6}}{3} r$ . **990.**  $3r^2(7+4\sqrt{3})\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$ , trei cercuri, aria fiecăruia din ei este  $r^2\sqrt{3}$

și trei figuri curbilinii egale, ale cărora arie este a câte  $\frac{r^2}{6(7+4\sqrt{3})}(8\sqrt{3\pi}-\pi-6\sqrt{3})$ .

**991.** Fie  $OA = r$ , atunci raza circumferinței mai mici  $O_1A = \frac{r}{2}$ . Dacă  $\angle AOC = \alpha$ ,  $\angle AO_1B = 2\alpha$ .  $\widehat{AC} = \frac{2\pi r\alpha}{360} = \frac{\pi r\alpha}{180}$ .  $\widehat{AB} = 2\pi \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{2\alpha}{360} = \frac{\pi r\alpha}{180}$ ; lungimile acestor arce sunt egale. **994.** 1,5. **997.** 1 : 2. **998.** Sunt proporționale cu numerele 2, 3 și 5.

**999.**  $m_a^2 \sin(B+C) : (\sin^2 B + \sin^2 C - 0,5 \sin^2(B+C))$ . **1001.**  $\cos A = (4cb - b^2 - c^2) : 2bc$ .

**1003.**  $\frac{r^2}{12}(3\pi + 2\sqrt{3})$ ,  $\frac{r^2}{12}(3\pi - 2\sqrt{3})$ ,  $\frac{r^2}{12}(5\pi + \sqrt{3})$ ,  $\frac{r^2}{12}(\pi - \sqrt{3})$ . **1004.**

Arătați că laturile triunghiului sunt egalee cu  $2S : h_1$ ,  $2S : h_2$ ,  $2S : h_3$ , iar semiperimetrul  $p = S : r$ . **1006.** Fie  $r$  și  $R$  — razele celor două semicircumferințe mici.

Atunci  $CM = 2Rr$ . **1009.**  $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ$  și  $120^\circ$ . **1010.** a) 0; b) 0. **1013.** a)  $\sin^2\beta$ ; b) 1. **1014.** a)  $60^\circ$ . **1020.**  $(-10; 5)$ . **1022.**  $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ ;  $2\sqrt{5}$ ;  $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ . **1027.**  $y = 1 - x$ .

**1038.**  $x = \pm 2$ . **1047.**  $x = 0$ ;  $x = -5$ . **1048.**  $2\sqrt{3}$ . **1050.**  $a \in (-5; 6)$ . **1052.**  $(9; 3)$ ;  $(-9; -3)$ . **1054.**  $3x + 4y - 15 = 0$ ;  $3x - 4y - 15 = 0$ . **1057.** a) 7 cm; b) 6 cm sau

$3\frac{1}{3}$  cm. **1058.**  $120^\circ$ . **1060.** 10 cm. **1062.** 5,9 cm. **1064.**  $\frac{2m \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ . **1066.**  $20 \text{ cm}^2$ .

**1067.** 20 cm și 6 cm; 3 cm și 10 cm. **1068.**  $24 \text{ cm}^2$ . **1069.**  $10\frac{5}{6} \text{ cm}^2$ . **1070.** 7 cm.

**1078.**  $60^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 140^\circ, 160^\circ$ . **1079.** 10. **1085.**  $18\sqrt{3} \text{ cm}^3$ ;  $27\sqrt{3} \text{ cm}$ .

**1094.**  $y = -3x - 4$ . **1096.**  $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ ; a)  $(x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 9$ ;

d)  $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 9$ . **1103.**  $6\sqrt{3}S$ . **1104.** 8 cm și 10 cm. **1105.** 14 cm.



# CUPRINS

Cum de lucrat cu manualul ..... 4

## Capitolul 1. Metoda coordonatelor în plan

Pentru ce trebuie de studiat coordonatele și metoda coordonatelor? ..... 8

§ 1 Sinusurile, cosinusurile și tangentele unghiurilor de la  $0^\circ$  până la  $180^\circ$  .. 9

§ 2 Identități trigonometrice..... 18

§ 3 Coordonatele carteziene..... 24

§ 4 Distanța dintre puncte..... 32

§ 5 Ecuația circumferinței ..... 38

§ 6 Ecuația dreptei ..... 44

Probleme cu desene gata..... 52

Lucrarea independentă 1..... 53

Însărcinările teste ..... 54

Probleme tipice pentru lucrarea de control ..... 55

Principalul în capitolul 1 ..... 56

## Capitolul 2. Vectori în plan

Pentru ce trebuie de studiat vectorii?..... 60

§ 7 Vectori ..... 61

§ 8 Coordonatele vectorului..... 68

§ 9 Adunarea și scăderea vectorilor..... 74

§ 10 Înmulțirea vectorului cu un număr..... 81

§ 11 Produsul scalar al vectorilor..... 88

§ 12 Aplicații ale vectorilor..... 94

Probleme cu desene gata..... 100

Lucrarea independentă 2..... 101

Însărcinările teste 2..... 102

Probleme tipice pentru lucrarea de control ..... 103

Principalul în capitolul 2 ..... 104

## Capitolul 3. Rezolvarea triunghiurilor

Pentru ce trebuie de studiat trigonometria?..... 108

§ 13 Teorema cosinusurilor ..... 109

§ 14 Teorema sinusurilor ..... 116

§ 15 Rezolvarea triunghiurilor ..... 123

§ 16 Formule pentru aflarea ariei triunghiului..... 130

Probleme cu desene gata ..... 138

Lucrarea independentă 3..... 139

Însărcinările teste 3 ..... 140

Probleme tipice pentru lucrarea de control ..... 141

Principalul în capitolul 3 ..... 142



## Capitolul 4. Poligoane regulate

<b>Pentru ce trebuie de studiat poligoanele regulate?</b> .....	146
§17 Poligoane regulate și proprietățile lor.....	147
§18 Poligoane regulate și circumferințe.....	154
§19 Lungimea circumferinței și a arcului de circumferință.....	163
§20 Aria cercului și a părților lui.....	169
Probleme cu desene gata.....	176
Lucrarea independentă 4.....	177
Însărcinările teste 4.....	178
Probleme tipice pentru lucrarea de control.....	179
<b>Principalul în capitolul 4</b> .....	180

## Capitolul 5. Transformări geometrice

<b>Pentru ce trebuie de studiat transformările geometrice?</b> .....	184
§21 Mișcarea și proprietățile ei.....	185
§22 Simetria în raport cu un punct.....	192
§23 Simetria în raport cu o dreaptă.....	199
§24 Rotația.....	206
§25 Transport paralel (Deplasare paralelă).....	213
§26 Transformarea de asemănare.....	219
Probleme cu desene gata.....	227
Lucrarea independentă 5.....	228
Însărcinările teste 5.....	229
Probleme tipice pentru lucrarea de control.....	230
<b>Principalul în capitolul 5</b> .....	231

## ANEXE

Proiecte de învățământ	
Proiectul 1. Curbe interesante.....	233
Proiectul 2. Metoda vectorială de rezolvare a problemelor.....	234
Proiectul 3. Trigonometria cunoscută și necunoscută.....	235
Proiectul 4. Acoperirea (pavarea) planului.....	237
Proiectul 5. Ornamente și transformările geometrice.....	238
Probleme de dificultate sporită.....	239
Probleme pentru repetare.....	242
Teste pentru antrenament	
Testul pentru antrenament nr.1.....	249
Testul pentru antrenament nr.2.....	250
Fragmente din istoria geometriei.....	252
Cunoștințe din cursul școlii de bază.....	257
Indice de materie.....	262
Răspunsuri.....	264

## Інформації про стан підручника

№	Ім'я та прізвище учня	Рік навчання	Стан підручника		Оцінка
			на початку року	наприкінці року	
1					
2					
3					
4					
5					

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович  
БЕВЗ Валентина Григорівна  
ВЛАДІМІРОВА Наталія Григорівна

### ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 9 класу  
загальноосвітніх навчальних закладів  
з навчанням румунською мовою

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України*

**Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено**

Переклад з української мови

Перекладач *Грінчешин Іван Миколайович*

Румунською мовою

Редактор К.В. Даскалюк  
Коректор М.Г. Кирчул

Автори ілюстрацій, використаних у підручнику:

Africa Studio, Andrey Bayda, Andrey Bayda, apiwut sookkasame, art\_of\_sun, B Brown, Bildagentur Zoonar GmbH, Bilyk Kateryna, Blaz Kure, Christian Mueller, Dmitri1ch, HDshooter, irmairma, jaret kantepar, Konstantin Gushcha, ktsdesign, LittlePigy, Marzolino, Mikadun, Morphart Creation, Morphart Creation, NadyaJema, Nicku, Pawel Szczepanski, robbylokamp, runzelkorn, s74, Serhii Kalaba, Shevchenko Andrey, Stockr, Strahil Dimitrov, Unconventional, vagnergamba, Valentina Proskurina, Valerii Iavtushenko, vichie81, Vitalliy, WDG Photo, Will Thomass

Формат 70x100/16.

Ум. друк. арк. 22,032 форзац. Обл.-вид. арк. 21,37 + 0,55 форзац.

Тираж 1956 пр. Зам. № 65П

Державне підприємство „Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ”

79008 м. Львів, вул. Галицька, 21

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4826 від 31.12.2014

www.svit.gov.ua, e-mail: office@svit.gov.ua,


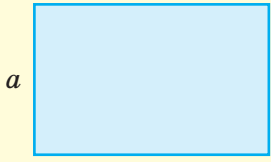
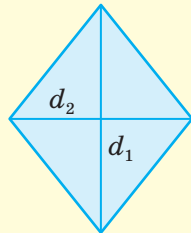
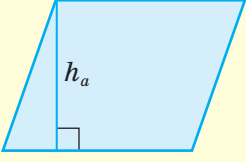

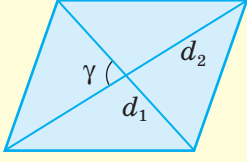
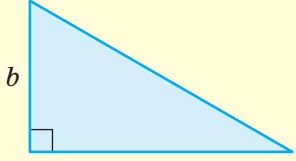
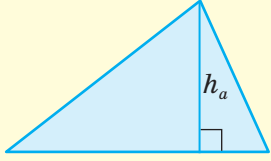
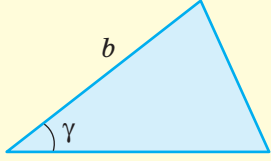
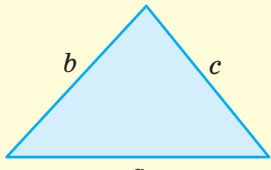
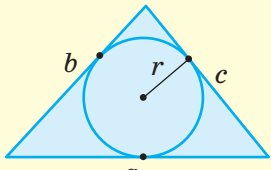
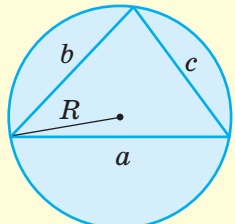
svit\_vydav@ukr.net

Друк ТДВ „Патент”

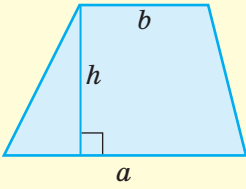
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 4078 від 31.05.2011

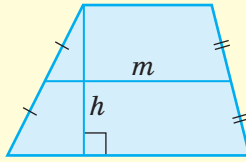
## Ariile figurilor plane

Patrat	Dreptunghi	Romb
 <p style="text-align: center;"><math>a</math></p> <p style="text-align: center;"><math>S = a^2</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>a</math></p> <p style="text-align: center;"><math>b</math></p> <p style="text-align: center;"><math>S = ab</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>S = \frac{1}{2} d_1 d_2</math></p>
Paralelogram		
 <p style="text-align: center;"><math>a</math></p> <p style="text-align: center;"><math>S = ah_a</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>a</math></p> <p style="text-align: center;"><math>S = ab \sin \angle</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \gamma</math></p>
Triunghi		
 <p style="text-align: center;"><math>a</math></p> <p style="text-align: center;"><math>S = \frac{1}{2} ab</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>a</math></p> <p style="text-align: center;"><math>S = \frac{1}{2} ah_a</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>a</math></p> <p style="text-align: center;"><math>S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma</math></p>
 <p style="text-align: center;"><math>a</math></p> <p style="text-align: center;"><math>S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},</math></p> <p style="text-align: center;"><math>p = \frac{a+b+c}{2}</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>a</math></p> <p style="text-align: center;"><math>S = pr,</math></p> <p style="text-align: center;"><math>p = \frac{a+b+c}{2}</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>a</math></p> <p style="text-align: center;"><math>S = \frac{abc}{4R}</math></p>

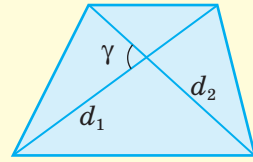
## Траpez



$$S = \frac{1}{2}(a+b)h$$



$$S = mh$$



$$S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \gamma$$

## Pentru poligoanele regulate

Unghi interior	Unghi exterior	Unghi la centru
$\frac{180^\circ(n-2)}{n}$	$\frac{360^\circ}{n}$	$\frac{360^\circ}{n}$

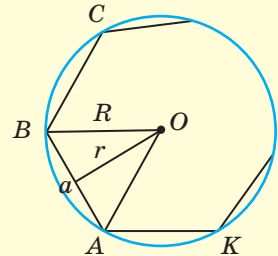
Latura  $a_n$  a poligonului n-laturi regulat  $a_n = 2R_n \sin \frac{180^\circ}{n}$  și  $a_n = 2r_n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$

**Raza circumferinței  
circumscrie**

$$R_n = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

**Raza circumferinței  
înscise**

$$r_n = \frac{a_n}{2 \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}}$$



	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
$R$	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$a$
$r$	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$
$P$	$3a$	$4a$	$6a$
$S$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$a^2$	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$