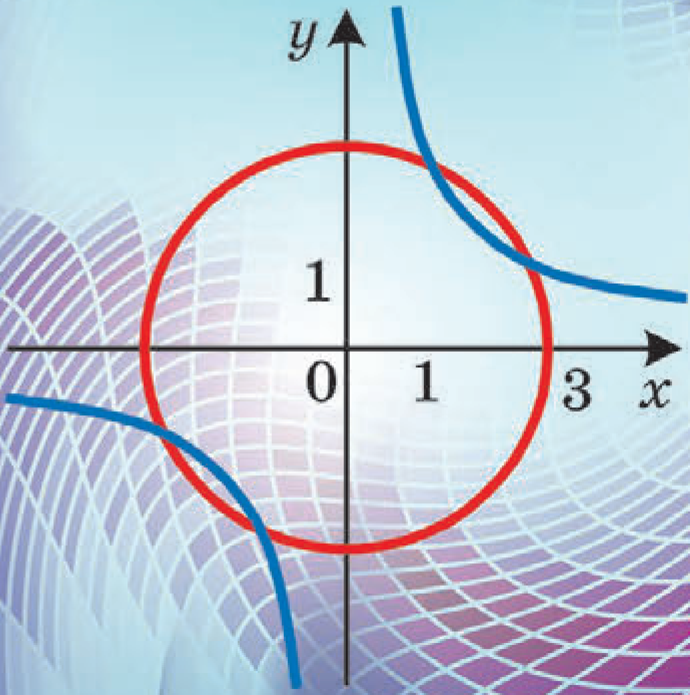
A. H. Merzljak
V. B. Polonszkij
M. Sz. Jakir

9

ALGEBRA



„A szerelmem – Ukrajna és a matematika” – olvasható márványba vésve Mihajlo Pilipovics Kravcsuk (1892–1942) tudós szobrának posztamensén.

Reméljük, hogy a kiváló ukrán matematikus hazafias kijelentése megbízható útmutatóul szolgál számotokra a hivatáshoz vezető úton.

Az egyenlőtlenségek tulajdonságai

Ha $a > b$ és $b > c$, akkor $a > c$.

Ha $a > b$ és c – tetszőleges szám, akkor $a + c > b + c$.

Ha $a > b$ és c – pozitív szám, akkor $ac > bc$.

Ha $a > b$ és c – negatív szám, akkor $ac < bc$.

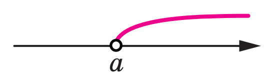
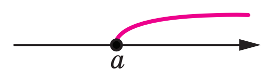
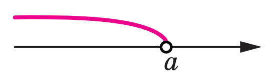
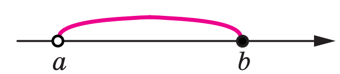
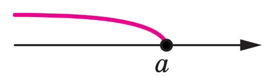
Ha $ab > 0$ és $a > b$, akkor $1/a < 1/b$.

Ha $a > b$ és $c > d$, akkor $a + c > b + d$.

Ha $a > b$, $c > d$ és a, b, c, d – pozitív számok, akkor $ac > bd$.

Ha $a > b$ és a, b – pozitív számok, akkor $a^n > b^n$, ahol n – természetes szám.

Számintervallumok

 $(a;\ +\infty)$	 $(a;\ b)$
 $[a;\ +\infty)$	 $[a;\ b)$
 $(-\infty;\ a)$	 $(a;\ b]$
 $(-\infty;\ a]$	 $[a;\ b]$

A. H. Merzljak
V. B. Polonszkij
M. Sz. Jakir

ALGEBRA

Tankönyv az általános oktatási rendszerű tanintézetek
9. osztálya számára

Ajánlotta Ukrajna Oktatási és Tudományos Minisztériuma

Львів
Видавництво „Світ”
2017

УДК 373.167.1:512
М 52

Перекладено за виданням:
Мерзляк А. Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х : Гімназія, 2017

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 20.03.2017 № 417)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

Я. П. Сисак, провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології Інституту математики НАН України, доктор фізико-математичних наук;

Н. В. Кравченко, методист РМЦ відділу освіти Красноградської районної державної адміністрації Харківської області, старший учитель;

Ю. О. Андрух, учитель математики Чернівецького багатопрофільного ліцею № 4, учитель-методист

Мерзляк А. Г.
М 52 Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. з навчанням угорською мовою / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір ; пер. Ю. І. Кулін. – Львів : Світ, 2017. – 272 с. : іл.
ISBN 978-966-914-068-5

УДК 373.167.1:512

ISBN 978-966-914-068-5 (угор.)
ISBN 978-966-474-293-8 (укр.)

A szerzőktől

KEDVES GYEREKEK!

Ebben a tanévben folytatjátok az algebra tanulását. Reméljük, sikerült megszeretnetek a tudománynak ezt a fontos és szép ágát, így érdeklődéssel sajátítjátok majd el az új ismereteket. Bízunk benne, hogy ebben nagy segítségetekre lesz az a tankönyv, amit most a kezetekben tartotok.

Ismerkedjetek meg a felépítésével!

A tankönyv három paragrafusból áll, a paragrafusok pedig fejezetekből. A fejezetekben található az elméleti anyag. A legfontosabb tudnivalókat **félkövér** vagy *dőlt **betűvel*** emeltük ki.

Általában az elméleti részt példafeladatok megoldásával zárjuk. Egy-egy feladatnak több megoldása is lehet.

A fejezetekben olyan feladatokat is találtok, amelyeket önállóan kell megoldanotok, ezért azt ajánljuk, hogy csak az elméleti rész elsajátítása után fogjatok hozzájuk. A feladatok között van könnyű és közepesen nehéz, de találhattok nehezeket is, ezeket csillaggal (*) jelöltük. A tudásotokat le is ellenőrizhetitek, ha elvégzitek a *Tudáspróba* rovatban található tesztfeladatokat.

A tankönyv tíz fejezetét a *Nem hagyományos módszerek alkalmazása* rovat zárja. Ebben olyan feladatokat gyűjtöttünk össze, amelyek megoldásához nincs szükség különleges algebrai tudásra, csupán egészséges gondolkodásra, leleményességre és rátermettségre. Ezek annyira hasznos feladatok, mint a szervezetnek a vitamin. Segítségükkel megtanulhattok váratlan, a szokványostól eltérő döntéseket hozni nemcsak a matematikában, hanem az életben is.

Ha a házi feladat elvégzése után marad még egy kis szabad időtök, javasoljuk, hogy nézzetek bele *A házi feladat elvégzése után* és a *Tudj meg többet!* rovatba. Az itt található anyag bonyolult, de annál nagyobb kihívás lesz megbirkózni vele!

Hajrá! Sok sikert!

KEDVES KOLLÉGÁK!

Bízunk benne, hogy tankönyvünk megbízható segítséget fog nyújtani Önöknek a nem könnyű, ugyanakkor nemes munkájukban, és örömünkre fog szolgálni, ha hasznosnak találják ezt a segédeszközt.

A könyv hatalmas és szerteágazó didaktikus anyagot tartalmaz. Ezért egyetlen tanév alatt lehetetlen megoldani valamennyi feladatot, de erre nincs is szükség. Viszont <u>sokkal könnyebb úgy dolgozni, ha tudunk válogatni a feladatok sokaságából.</u> Így lehetővé válik, hogy az oktatás folyamán a tudásszintnek megfelelően, egyénileg is foglalkozhassanak a tanulókkal.

A házi feladat elvégzése után rovat anyagait fel lehet használni a matematika-szakkörökön és a fakultatív foglalkozásokon.

Munkájukhoz szakmai sikereket és türelmet kívánunk!

Egyezményes jelek

n° elégséges és közepes szintű ismereteket igénylő feladatok;

$n^{\bullet}$ megfelelő szintű ismereteket igénylő feladatok;

$n^{\bullet\bullet}$ magas szintű ismereteket igénylő feladatok;

n^{*} feladatok matematika-szakkörök és fakultatív foglalkozások számára;

◀ a tétel bizonyítása, példafeladat megoldása;

 komputer segítségével megoldható feladatok;

 *A házi feladati elvégzése után* rovat.

Zöld színnel jelöljük azoknak a feladatoknak a sorszámát, amelyeket házi feladatra ajánlunk, **kékkel** pedig azokat, amelyeket az egyéni képességeknek megfelelően a tanár javaslatára szóban is meg lehet oldani.

1. §. EGYENLŐTLENSÉGEK

- Ebben a fejezetben megtudhatod, hogy mikor tekinthető az *a* szám nagyobbnak (kisebbnek) a *b* számtól; megtanulod az egyenlőtlenségek tulajdonságait; megtudod, mi az egy ismeretlenes egyenlőtlenség, illetve az egy ismeretlenes egyenlőtlenség-rendszer megoldása.
- Megtanulod felbecsülni a számkifejezések értékét, igazolni az egyenlőtlenségeket, megoldani az egy ismeretlenes lineáris egyenlőtlenségeket, egyenlőtlenség-rendszereket.

1. Egyenlőtlenségek

A gyakorlatban gyakran kell mennyiségeket összehasonlítani. Például a tornaterem területe nagyobb az osztályterem területénél, Ukrajna területe (603,5 ezer km^2) nagyobb Franciaország területénél (551,5 ezer km^2), A Roman-Kos hegy (1545 m) alacsonyabb a Hoverlánál (2061 m), a Kijev–Harkov távolság (450 m) az egyenlítő 0,011 részével egyenlő.

Ezen összehasonlításokat egyenlőtlenséggel tudjuk leírni, a <, > jelek segítségével.

Ha az *a* szám nagyobb a *b* számnál, akkor ezt így írjuk: $a > b$, ha viszont a *b* nagyobb az *a* számnál, akkor pedig így: $a < b$.

Magától értetődő, hogy $12 > 7$, $-17 < 3$, $\frac{15}{23} > \frac{11}{23}$, $\sqrt{2} > 1$. Ezen egyenlőtlenségek igazságtartalma a valós számok összehasonlítására vonatkozó szabályokból következik, melyeket az előző osztályokban tanultál.

Viszont két számot nemcsak az eddig ismert szabályok alapján lehet összehasonlítani. Egy másik módszer, vagy inkább általános eljárás, azon a könnyen belátható okfejtésen alapszik, hogyha két szám különbsége pozitív, akkor a kisebbítendő nagyobb a kivonandónál, ha pedig negatív, akkor a kisebbítendő kisebb a kivonandónál.

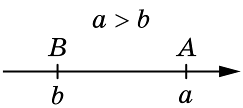
Ezen okfejtés alapján célszerű elfogadni az alábbi meghatározást.

Meghatározás. Az *a* szám nagyobb a *b* számnál, ha az $a - b$ különbség pozitív, és az *a* szám kisebb a *b* számnál, ha az $a - b$ különbség negatív.

Ez a meghatározás lehetőséget ad arra, hogy két szám összehasonlításakor a számok különbségét vizsgáljuk. Például, ahhoz, hogy összehasonlítsuk a $\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$ és $2-\sqrt{3}$ kifejezések értékét, vizsgáljuk meg a különbségüket:

$$\frac{2}{2+\sqrt{3}}-\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{2-\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-(4-3)}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}.$$

Mivel $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}>0,$ ezért $\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}>2-\sqrt{3}.$



1.1. ábra

Megjegyezzük, hogy két szám különbsége lehet pozitív, negatív, de lehet nulla is. Ezért *bármely két a és b számra csak az egyik reláció teljesülhet: $a > b$, $a < b$, $a = b$.*

Ha $a > b$, akkor a számegyenesen az a számot jelölő pont a b számot jelölő ponttól jobbra van (1.1. ábra).

A mindennapi életben gyakran használjuk a „nem több, mint”, „nem kevesebb, mint” kifejezéseket. Például az egészségügyi szabványoknak megfelelően egy osztályban nem lehet 30-nál több tanuló. Az 1.2. ábrán látható közúti jelzőtábla azt jelenti, hogy a személygépkocsik sebessége nem lehet kevesebb, mint 30 km/h.

1.2. ábra

A matematikában a „nem több, mint” kifejezés jele $\leqslant$ (olv.: kisebb vagy egyenlő), a „nem kevesebb, mint” kifejezés jele $\geqslant$ (olv.: nagyobb vagy egyenlő).

Ha $a < b$ vagy $a = b$, akkor teljesül az $a \leqslant b$ egyenlőtlenség.

Ha $a > b$ vagy $a = b$, akkor teljesül az $a \geqslant b$ egyenlőtlenség.

Például a $7 \leqslant 7$, $7 \leqslant 15$, $-3 \geqslant -5$ egyenlőtlenségek igazak. Viszont a $7 \leqslant 5$ egyenlőtlenség nem igaz.

A $<$ és $>$ jelek a **szigorú** egyenlőtlenség jelei, a $\leqslant$ és $\geqslant$ jelek pedig **nem szigorúak**.

1. PÉLDA Bizonyítsuk be, hogy az a bármely értékére igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$(a+1)(a+2) > a(a+3).$$

Megoldás. A megoldáshoz elegendő igazolni, hogy az a bármely értékére a jobb és a bal oldal különbsége pozitív. Így:

$$(a+1)(a+2)-a(a+3)=a^2+2a+a+2-a^2-3a=2. ◄$$

Ebben az esetben úgy fogalmazunk, hogy **bebizonyítottuk az egyenlőtlenséget:**

$$(a+1)(a+2) > a(a+3).$$

2. PÉLDA Bizonyítsuk be az $(a-3)^2 < 2a^2 - 6a + 10$ egyenlőtlenséget, ahol a bármely valós szám.

Megoldás. Vizsgáljuk meg az adott egyenlőtlenség jobb és bal oldalának különbségét:

$$(a-3)^2 - (2a^2 - 6a + 10) = a^2 - 6a + 9 - 2a^2 + 6a - 10 =$$
$$= -a^2 - 1 = -a^2 + (-1).$$

Az a bármely értékére $-a^2 \leqslant 0$. Egy nemnegatív szám és egy negatív és pozitív szám összege mindig negatív. Ezért $-a^2 + (-1) < 0$.

Ebből következik, hogy $(a-3)^2 < 2a^2 - 6a + 10$ az a bármely értékére. ◄

3. PÉLDA Bizonyítsuk be az $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ egyenlőtlenséget, ahol $a \geqslant 0$ és $b \geqslant 0$.

Megoldás. Vizsgáljuk meg az adott egyenlőtlenség jobb és bal oldalának különbségét. Így:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}.$$

A $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}$ kifejezés értéke bármely nemnegatív a és b értékekre mindig nemnegatív. Tehát a bizonyítandó egyenlőtlenség igaz. ◄

Itt jegyezzük meg, hogy a $\sqrt{ab}$ kifejezést **mértani középnek** nevezzük.

Tehát bebizonyítottuk, hogy *két nemnegatív szám számtani közepe nem kisebb ezen számok mértani középénél.*

4. PÉLDA Bizonyítsuk be, hogy bármely a és b értékekre $a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$.

*Megoldás***.** Végezzünk algebrai átalakítást:

$$a^2 - ab + b^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{4}b^2 = \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2.$$

Mivel a és b bármely értékeire $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 \geqslant 0$ és $\frac{3}{4}b^2 \geqslant 0$, ezért $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geqslant 0$.

Tehát $a^2 - ab + b^2 \geqslant 0$ az a és b bármely értékeire. ◄

1. Mikor mondhatjuk, azt hogy az a szám nagyobb a b számnál?

2. Mikor mondhatjuk azt, hogy az a szám kisebb a b számnál?

3. Hogyan helyezkedik el a számegyenesen az a számot jelölő pont a b számot jelelölő ponthoz viszonyítva, ha $a > b$?

4. Milyen jelet használunk a „nem nagyobb, mint” kifejezésre, és hogyan olvassuk?

5. Milyen jelet használunk a „nem kisebb, mint” kifejezésre, és hogyan olvassuk?

6. Mikor igaz az $a \leqslant b$ egyenlőtlenség?

7. Mikor igaz az $a \geqslant b$ egyenlőtlenség?

8. Magyarázd meg, mikor beszélünk szigorú, és mikor nem szigorú egyenlőtlenségről?

GYAKORLATOK

1.1.° Hasonlítsd össze az a és b számokat, ha:

1) $a - b = 0{,}4$; 2) $a - b = -3$; 3) $a - b = 0$!

1.2.° Tudjuk, hogy $m < n$. Lehetséges-e, hogy az $m - n$ különbség

1) 4,6; 2) –5,2; 3) 0?

1.3.° Az x és y számok közül melyik nagyobb, ha

1) $x - y = -8$; 2) $y - x = 10$?

1.4.° Hogyan helyezkedik el a számegyenesen az A (a) pont a B (b) ponthoz, ha

1) $a - b = 2$; 3) $a - b = 0$;

2) $a - b = -6$; 4) $b - a = \sqrt{2}$?

1.5.° Egyszerre teljesülhetnek-e az alábbi egyenlőtlenségek:

1) $a > b$ és $a < b$; 2) $a \geqslant b$ és $a \leqslant b$?

1.6.° Hasonlítsd össze az $(a - 2)^2$ és az $a(a - 4)$ kifejezések helyettesítési értékét, ha az a értéke 1) 6; 2) –3; 3) 2! Megállapítható-e a kapott eredmények alapján, hogy az első kifejezés helyettesítési értéke mindig nagyobb a második kifejezés megfelelő értékénél? Bizonyítsd be, hogy az a bármely értékére az első kifejezés helyettesítési értéke nagyobb a második kifejezés megfelelő értékénél!

1.7.° Hasonlítsd össze a $4(b + 1)$ és a $b - 2$ kifejezések helyettesítési értékét, ha b értéke 1) –1; 2) 0; 3) 3! Megállapítható-e, hogy az első kifejezés helyettesítési értéke a b bármely értékére mindig nagyobb a második kifejezés megfelelő helyettesítési értékénél?

1.8.° Bizonyítsd be, hogy az alábbi egyenlőtlenségek a változó bármely értéke esetén igazak:

1) $(a + 3)(a + 1) > a(a + 4)$;
2) $3(b - 4) + 2b < 5b - 10$;
3) $(c - 4)(c + 4) > c^2 - 20$;
4) $x(x + 6) - x^2 < 2(3x + 1)$;
5) $(y + 5)(y - 2) \geqslant 3y - 10$;
6) $8m^2 - 6m + 1 \leqslant (3m - 1)^2$;
7) $a(a - 2) \geqslant -1$;
8) $(b + 7)^2 > 14b + 40$!

1.9.° Bizonyítsd be, hogy az alábbi egyenlőtlenségek a változó bármely értékei esetén igazak:

1) $(p - 3)(p + 4) < p(p + 1)$;
2) $(x + 1)^2 > x(x + 2)$;
3) $(a - 5)(a + 2) > (a + 5)(a - 8)$;
4) $y(y + 8) < (y + 4)^2$;
5) $(2a - 5)2 \leqslant 6a^2 - 20a + 25$;
6) $a^2 + 4 \geqslant 4a$!

1.10.˙ Igazak-e az alábbi állítások:

1) ha $a > b$, akkor $\frac{a}{b} > 1$;
2) ha $a > 1$, akkor $\frac{2}{a} < 2$;
3) ha $a < 1$, akkor $\frac{2}{a} > 2$;
4) ha $\frac{a}{b} > 1$, akkor $a > b$;
5) ha $a^2 > 1$, akkor $a > 1$?

1.11.˙ Bizonyítsd be a következő egyenlőtlenségeket:

1) $2a^2 - 8a + 16 > 0$;
2) $4b^2 + 4b + 3 > 0$;
3) $a^2 + ab + b^2 \geqslant 0$;
4) $(3a + 2)(2a - 4) - (2a - 5)^2 > 3(4a - 12)$;
5) $a(a - 3) > 5(a - 4)$;
6) $(a - b)(a + 5b) \leqslant (2a + b)(a + 4b) + ab$!

1.12.˙ Bizonyítsd be az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $28a - 32 \leqslant 7a^2 - 4$;
2) $9x^2 - 6xy + 4y^2 \geqslant 0$;
3) $3(b - 1) < b(b + 1)$;
4) $(4p - 1)(p + 1) - (p - 3)(p + 3) > 3(p^2 + p)$!

1.13.˙ Bizonyítsd be, hogy:

1) $a^3 - 6a^2 + a - 6 \geqslant 0$, ha $a \geqslant 6$;

2) $ab + 1 > a + b$, ha $a > 1$ és $b > 1$;

3) $\frac{a+3}{3} + \frac{3a-2}{4} < a$, ha $a < -6$!

1.14.˙ Bizonyítsd be, hogy:

1) $ab(b-a) \leqslant a^3 - b^3$, ha $a \geqslant b$;

2) $\frac{a-1}{2} - \frac{a-2}{3} > \frac{1}{2}$, ha $a > 2$!

1.15.˙ Hasonlítsd össze két tetszőleges szám négyzeteinek összegét ezen számok kétszeres szorzatával!

1.16.˙ Adott három egymást követő természetes szám. Hasonlítsd össze:

1) a középső szám négyzetét a két szomszédos szám szorzatával;

2) a középső szám négyzetének kétszeresét a másik két szám négyzeteinek összegével!.

1.17.˙ Hasonlítsd össze két tetszőleges szám négyzeteinek összegét összegük négyzetével!

1.18.˙ Hogyan változik – nő vagy csökken – az $\frac{a}{b}$ valódi tört értéke, ahol $a > 0$, $b > 0$, ha a számlálóját és a nevezőjét is növeljük ugyanazzal a számmal?

1.19.˙ Hogyan változik – nő vagy csökken – az $\frac{a}{b}$ áltört értéke, ahol $a > 0$, $b > 0$, ha a számlálóját és a nevezőjét is növeljük ugyanazzal a számmal?

1.20.˙ Bizonyítsd be, hogy bármely pozitív számnak és reciprokának összege nem kisebb, mint 2!

1.21.˙ Bizonyítsd be, hogy bármely negatív számnak és reciprokának összege nem nagyobb, mint –2!

1.22.˙ Az a és b szám bármely értéke esetén igazak-e az alábbi egyenlőtlenségek:

1) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 1} > 1$; 2) $\frac{a^2 - b^2}{b^2 + 1} > -1$?

1.23.˙ Bizonyítsd be, hogy a változók bármely értékére igazak az alábbi egyenlőtlenségek:

1) $\frac{a^2}{a^4 + 1} \leqslant \frac{1}{2}$; 2) $\frac{(5a+1)^2}{5} \geqslant 4a$!

1.24.˙ Bizonyítsd be, hogyha $a < b$, akkor $a < \frac{a+b}{2} < b$!

1.25.˙˙ Bizonyítsd be, hogyha $a < b < c$, akkor $a < \frac{a+b+c}{3} < c$!

1.26.˙˙ Igaz-e az $\frac{a^2+4}{2} \geqslant \sqrt{a^2+3}$ egyenlőtlenség az a változó bármely értékére?

1.27.˙˙ Bizonyítsd be, hogy a változó bármely értékére igaz az $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geqslant 2$ egyenlőtlenség!

1.28.˙˙ Bizonyítsd be, az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 \geqslant 0$;
2) $x^2 - 2x + y^2 + 10y + 28 > 0$;
3) $2m - 6mn + 9n^2 - 6m + 9 \geqslant 0$;
4) $a^2 + b^2 + c^2 + 12 \geqslant 4(a + b + c)$;
5) $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geqslant 4ab$!

1.29.˙˙ Igazold, a következő egyenlőtlenségeket:

1) $a^2 + b^2 - 16a + 14b + 114 > 0$;
2) $x^2 + y^2 + 10 \geqslant 6x - 2y$;
3) $c^2 + 5d^2 + 4cd - 4d + 4 \geqslant 0$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

1.30. Ismeretes, hogy $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$ és $d < 0$. Hasonlítsd össze az alábbiki fejezések értékét a nullával:

1) bc; 3) $\frac{a}{b}$; 5) $\frac{ac}{d}$; 7) $abcd$;

2) cd; 4) $\frac{ab}{c}$; 6) $\frac{a}{bc}$; 8) $\frac{b}{acd}$!

1.31. Mit állíthatunk az a és b szám előjeléről, ha:

1) $ab > 0$; 3) $\frac{a}{b} > 0$; 5) $a^2b > 0$;

2) $ab < 0$; 4) $\frac{a}{b} < 0$; 6) $a^2b < 0$?

1.32. Indokold meg, miért igazak az alábbi egyenlőtlenségek bármely valós számra:

1) $a^2 \geqslant 0$;
2) $a^2 + 1 > 0$;
3) $(a+1)^2 \geqslant 0$;
4) $a^2 - 4a + 4 \geqslant 0$;
5) $a^2 + b^2 \geqslant 0$;
6) $a^2 + b^2 + 2 > 0$;
7) $(a - 2)^2 + (b + 1)^2 \geqslant 0$;
8) $\sqrt{a^2+3} > 0$!

1.33. Hasonlítsd össze az alábbi kifejezések helyettesítési értékeit a nullával, ha a bármely szám:

1) $4 + a^2$;
2) $(4 - a)^2$;
3) $-4 - a^2$;
4) $-4 - (a - 4)^2$;
5) $(-4)^8 + (a - 8)^4$;
6) $(4 - a)^2 + (4a - 1000)^2$!

1.34. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $2a\,(5a - 7) - 5a\,(3 - 2a)$;
2) $(2b - 3)\,(4b + 9)$;
3) $(2c - 6)\,(8c + 5) - (5c + 2)\,(5c - 2)$;
4) $16m^2 - (3 - 4m)\,(3 + 4m)$;
5) $(2x - 1)^2 + (2x + 1)^2$;
6) $(x - 4)\,(x + 4) - (x - 8)^2$!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA

1.35. 1-től 1000-ig (beleszámítva az 1000-t is) az összes természetes számot két csoportra osztottuk: páros és páratlan számokra. Melyik csoportban lesz a számok felírásához szükséges számjegyek összege több, és mennyivel?

2. Az egyenlőtlenségek alaptulajdonságai

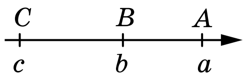
Ebben a fejezetben az egyenlőtlenségek tulajdonságaival foglalkozunk, melyekre gyakran van szükség különböző feladatok megoldásánál. Ezeket az **egyenlőtlenségek főbb tulajdonságainak** is nevezzük.

2.1. tétel. ***Ha a > b és b > c, akkor a > c.***

Bizonyítás. Mivel $a > b$ és $b > c$, ezért az $a - b$ és $b - c$ különbség is pozitív. Így pozitív lesz az összegük is: $(a - b) + (b - c)$. Viszont $(a - b) + (b - c) = a - c$. Tehát az $a - c$ különbség is pozitív, ezért $a > c$. ◄

Hasonlóan igazolható, **ha $a < b$ és $b < c$, akkor $a < c$**.

A 2.1. tételt számegyenesen is szemléltethetjük (2.1. ábra): ha az $A(a)$ pont a $B(b)$ ponttól jobbra helyezkedik el a számegyenesen és a $B(b)$ pont a $C(c)$ ponttól van jobbra, akkor az $A(a)$ jobbra lesz a $C(c)$ ponttól.



2.1. ábra

2.2. tétel. ***Ha $a > b$ és c bármely szám, akkor $a + c > b + c$.***

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az $(a + c) – (b + c)$ különbséget! $(a + c) – (b + c) = = a – b$. Mivel $a > b$, ezért az $a – b$ különbség pozitív. Tehát $a + c > b + c$. ◀

Hasonlóképpen bizonyítható, ha **$a < b$ és c bármely szám, akkor $a + c < b + c$.**

Mivel a kivonás helyettesíthető az ellentettjének hozzáadásával ($a – c = = a + (–c)$), ezért a 2.2. tétel így is megfogalmazható:

ha egy igaz egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadjuk, vagy mindkét oldalából kivonjuk ugyanazt a számot, igaz egyenlőtlenséget kapunk.

Következmény. ***Ha egy igaz egyenlőtlenség egyik oldaláról átviszünk egy összeadandót ellenkező előjellel a másik oldalra, igaz egyenlőtlenséget kapunk.***

Bizonyítás. Legyen az $a > b + c$ egyenlőtlenség igaz. Vonjuk ki az egyenlőtlenség mindkét oldalából c-t. Így azt kapjuk, hogy $a – c > b + c – c$, vagyis $a – c > b$. ◀

2.3. tétel. ***Ha $a > b$ és c pozitív szám, akkor $ac > bc$. Ha $a > b$ és c negatív szám, akkor $ac < bc$.***

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az $ac – bc$ különbséget! Azt kapjuk, hogy:

$$ac – bc = c\,(a – b).$$

A megadott feltétel alapján $a > b$, ezért az $a – b$ különbség pozitív.

Ha $c > 0$, akkor a $c(a – b)$ szorzat is pozitív, így az $ac – bc$ különbség is pozitív, vagyis $ac > bc$.

Ha $c < 0$, akkor a $c(a – b)$ szorzat negatív, így az $ac – bc$ különbség is negatív, tehát $ac < bc$. ◀

Hasonlóképpen bizonyítható, ***ha $a < b$ és c pozitív szám, akkor $ac < bc$. Ha $a < b$ és c negatív szám, akkor $ac > bc$.***

Mivel az osztás úgy is értelmezhető, mint a reciprokkal való szorzás $\left(\frac{a}{c} = a \cdot \frac{1}{c}\right)$, ezért a 2.3. tétel így is megfogalmazható:

ha egy igaz egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk vagy mindkét oldalát elosztjuk ugyanazzal a pozitív számmal, igaz egyenlőtlenséget kapunk;

ha egy igaz egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk vagy mindkét oldalát elosztjuk ugyanazzal a negatív számmal és megfordítjuk az egyenlőtlenség jel irányát, igaz egyenlőtlenséget kapunk.

Következmény. ***Ha $ab > 0$ és $a > b$, akkor $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.***

Bizonyítás. Osszuk el az $a > b$ igaz egyenlőtlenséget az ab pozitív számmal! Az $\frac{a}{ab} > \frac{b}{ab}$ igaz egyenlőtlenséget kapjuk, azaz $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ vagyis $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. ◀

Felhívjuk a figyelmet arra, ha a következmény feltételei közül kihagyjuk, hogy az ab szorzat pozitív, vagyis hogy a és b azonos előjelű, akkor az $a > b$ egyenlőtlenségből nem következik $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. Valóban, az $5 > -3$ egyenlőtlenség igaz, viszont az $\frac{1}{5} < -\frac{1}{3}$ egyenlőtlenség nem igaz.

Ebben a fejezetben csak a szigorú egyenlőtlenségekkel foglalkoztunk. Hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek a nem szigorú egyenlőtlenségek is. Például, ha $a \geqslant b$ és c bármely szám, akkor $a + c \geqslant b + c$.

?

1. Melyik nagyobb az a és a c szám közül, ha tudjuk, hogy $a > b$ és $b > c$?
2. Mondd ki azt a tételt, amelyben az egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadható ugyanaz a szám!
3. Mondd ki annak a tételnek a következményét, amelyben az egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadható ugyanaz a szám!
4. Mondd ki azt a tételt, amelyben az egyenlőtlenség mindkét oldala megszorozható ugyanazzal a számmal!
5. Mondd ki annak a tételnek a következményét, amelyben az egyenlőtlenség mindkét oldala megszorozható ugyanazzal a számmal!

GYAKORLATOK

2.1.° Ismeretes, hogy $a > 6$. Igazak-e az alábbi egyenlőtlenségek:

1) $a > 4$;   2) $a \geqslant 5{,}9$;   3) $a > 7$?

2.2.° Ismeretes, hogy $a < b$ és $b < c$. Melyik igaz az alábbi egyenlőtlenségek közül:

1) $a > c$;   2) $a = c$;   3) $c > a$?

2.3.° Írd le azt az egyenlőtlenséget, melyet akkor kapunk, ha:
1) a $-3 < 4$ egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadunk 5-öt; –2-t;
2) a $-10 < -6$ egyenlőtlenség mindkét oldalából kivonunk 3-at; –4-et;
3) a $7 > -2$ egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk 5-tel; –1-gyel;
4) $12 < 18$ egyenlőtlenség mindkét oldalát elosszuk 6-tal; –2-vel!

2.4.° Ismeretes, hogy $a > b$. Írd le azt az egyenlőtlenséget, melyet akkor kapunk, ha:
1) az egyenlőtlenség mindkét oldalához hozzáadunk 8-at;
2) az egyenlőtlenség mindkét oldalából kivonunk –6-ot;
3) az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk 12-vel;
4) az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk $-\frac{1}{3}$-dal;
5) az egyenlőtlenség mindkét oldalát elosztjuk $\frac{2}{7}$-del;
6) az egyenlőtlenség mindkét oldalát elosztjuk –4-gyel!

2.5.˙ Ismeretes, hogy $a > b$, $c < a$ és $d > b$. Hasonlítsd össze:
1) az a és a d számot; 2) a b és a c számot!

2.6.˙ Rendezd növekvő sorrendbe az a, b, c és 0 számokat, ha $a > b$, $0 < b$ és $0 > c$!

2.7.˙ Adott, hogy $a > 4$. Hasonlítsd össze az alábbi kifejezések helyettesítési értékeit és a nullát:
1) $a - 3$; 3) $(a - 3)(a - 2)$; 5) $(1 - a)^2 (4 - a)$!
2) $2 - a$; 4) $\frac{(a-4)(a-2)}{3-a}$;

2.8.˙ Tudjuk, hogy $-2 < b < 1$. Hasonlítsd össze az alábbi kifejezések helyettesítési értékeit és a nullát:
1) $b + 2$; 3) $b - 2$; 5) $(b + 2)(b - 4)^2$;
2) $1 - b$; 4) $(b - 1)(b - 3)$; 6) $(b - 3)(b + 3)(b - 2)^2$!

2.9.˙ Adott, hogy $a > b$. Tedd ki a megfelelő relációs jelet:
1) $a + 9$ és $b + 9$; 5) $-40b$ és $-40a$;
2) $b - 6$ és $a - 6$; 6) $\frac{a}{20}$ és $\frac{b}{20}$;
3) $1{,}8a$ és $1{,}8b$; 7) $2a - 3$ és $2b - 3$;
4) $-a$ és $-b$; 8) $5 - 8a$ és $5 - 8b$!

2.10.˙ Ismeretes, hogy $1 \leqslant m < 2$. Melyik igaz az alábbi egyenlőtlenségek közül:
1) $-1 \leqslant -m < -2$; 3) $-1 \geqslant -m > -2$;
2) $-2 < -m \leqslant -1$; 4) $-2 > -m \geqslant -1$?

2.11.$^{\bullet}$ Adott, hogy $-3a > -3b$. Hasonlítsd össze az alábbi kifejezéseket:

1) a és b;
2) $\frac{2}{7}a$ és $\frac{2}{7}b$;
3) $b - 4$ és $a - 4$;
4) $-\frac{5}{9}b$ és $-\frac{5}{9}a$;
5) $3a + 2$ és $3b + 2$;
6) $-5a + 10$ és $-5b + 10$!

2.12.$^{\bullet}$ Tudjuk, hogy $a > b$. Rendezd csökkenő sorrendbe az $a + 7$, $b - 3$, $a + 4$, $b - 2$ és b számokat!

2.13.$^{\bullet}$ Adott, hogy $a < b$. Hasonlítsd össze az alábbi kifejezéseket:
1) $a - 5$ és b; 2) a és $b + 6$; 3) $a + 3$ és $b - 2$!

2.14.$^{\bullet}$ Hasonlítsd össze az a és a b számot, ha tudjuk, hogy:
1) $a > c$ és $c > b + 3$; 2) $a > c$ és $c - 1 > b + d^2$, ahol c és d tetszőleges szám!

2.15.$^{\bullet}$ Hasonlítsd össze az a számot és a nullát, ha:
1) $7a < 8a$;
2) $\frac{a}{2} < \frac{a}{3}$;
3) $-6a > -8a$;
4) $-0{,}02a > -0{,}2a$!

2.16.$^{\bullet}$ Adott, hogy $a > -2$. Bizonyítsd be, hogy:
1) $7a + 10 > -4$; 2) $-6a - 3 < 10$!

2.17.$^{\bullet}$ Adott, hogy $b \leqslant 10$. Bizonyítsd be, hogy:
1) $5b - 9 \leqslant 41$; 2) $1 - 2b > -21$!

2.18.$^{\bullet}$ Igazak-e az alábbi egyenlőtlenségek:
1) ha $a > b$, akkor $a > -b$;
2) ha $a > b$, akkor $2a > b$;
3) ha $a > b$, akkor $2a + 1 > 2b$;
4) ha $a > b + 2$ és $b - 3 > 4$, akkor $a > 9$;
5) ha $a > b$, akkor $ab > b^2$;
6) mivel $5 > 3$, ezért $5a^2 > 3a^2$;
7) mivel $5 > 3$, ezért $5(a^2 + 1) > 3(a^2 + 1)$?

2.19.$^{\bullet\bullet}$ Írd le azt az egyenlőtlenséget, melyet úgy kapunk, hogy:
1) az $a > 2$ igaz egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk a-val;
2) a $b < -1$ igaz egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk b-vel;
3) az $m < -3$ igaz egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk $-m$-mel;
4) a $c > -4$ igaz egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk c-vel!

2.20.$^{\bullet\bullet}$ Írd le azt az egyenlőtlenséget, melyet úgy kapunk, hogy:
1) az $a < -a^2$ igaz egyenlőtlenség mindkét oldalát elosztjuk a-val;
2) az $a > 2a^2$ igaz egyenlőtlenség mindkét oldalát elosztjuk a-val;
3) az $a^3 > a^2$ igaz egyenlőtlenség mindkét oldalát elosztjuk $-a$-val!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

2.21. Tudjuk, hogy $a^2 + b^2 = 18$ és $(a + b)^2 = 20$. Mennyi az ab szorzat értéke?

2.22. Demeternek 2-szer több bélyege van, mint Natinak, Natinak viszont kétszer annyi van, mint Misinek. Az alábbi számok közül melyik lehet Demeter bélyegeinek a száma?

1) 18; 2) 22; 3) 24; 4) 30.

2.23. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $\frac{a^2+b^2}{2a^2+2ab}+\frac{b}{a+b}$;

2) $\frac{a^2+9}{a^2-9}-\frac{a}{a+3}$;

3) $\frac{c+1}{3c}:\frac{c^2-1}{6c^2}$;

4) $\frac{m^2+2mn+n^2}{m^2-n^2}:(m+n)$!

2.24. Egy motorcsónak ugyanakkora idő alatt tesz meg 48 km-t a folyón lefelé, mint 36 km-t a folyón felfelé. Mekkora a motorcsónak sebessége álló vízben, ha a folyó sebessége 2 km/h?

3. Egyenlőtlenségek összeadása és szorzása. A kifejezések helyettesítési értékének becslése

Nézzünk meg néhány példát!

1) Ha az egyik földrészlegről nem kevesebb, mint 40 t búzát takarítottak be, a másikról pedig nem kevesebb, mint 45 t-át, akkor a két részlegről összesen nem kevesebb, mint 85 t-át arattak le.

2) Ha egy téglalap hossza nem több, mint 70 cm, a szélessége pedig nem több, mint 40 cm, akkor a területe nem lehet nagyobb 2800 cm^2-nél.

Ezekben a példákban a következtetéseink alapvetően nyilvánvalóak. A helyességüket az alábbi tételek támasztják alá.

3.1 tétel (az egyenlőtlenségek összeadásáról). **Ha $a > b$ és $c > d$, akkor $a + c > b + d$.**

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az $(a + c) - (b + d)$ különbséget. Azt kapjuk, hogy:

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d).$$

Mivel $a > b$ és $c > d$, ezért az $a - b$ és $c - d$ különbségek pozitívak. Tehát a vizsgált különbség is pozitív, vagyis $a + c > b + d$. ◄

Hasonlóképpen igazolható az a tulajdonság is, **hogyha $a < b$ és $c < d$, akkor $a + c < b + d$.**

Az $a > b$ és $c > d$ (vagy $a < b$ és $c < d$) egyenlőtlenségeket **megegyező értelmű egyenlőtlenségeknek** nevezzük, viszont az $a > b$ és $c < d$ (vagy $a < b$ és $c < d$) **egyenlőtlenségek ellentétes értelműek**.

Úgy is szoktunk fogalmazni, hogy az $a + c > b + d$ egyenlőtlenség az $a > b$ és a $c > d$ egyenlőtlenségek összege.

A 3.1 tétel azt jelenti, hogy **két megegyező értelmű igaz egyenlőtlenség összege is ugyanolyan irányú igaz egyenlőtlenség**.

Megjegyezzük, hogy a 3.1 tétel akkor is helytálló, ha három vagy annál több egyenlőtlenséget adunk össze. Például, ha $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$ és $a_3 > b_3$, akkor $a_1 + a_2 + a_3 > b_1 + b_2 + b_3$.

3.2. tétel (az egyenlőtlenségek szorzásáról). ***Ha $a > b$ és $c > d$ és a, b c és d pozitív szám, akkor $ac > bd$.***

Bizonyítás. Vizsgáljuk meg az $ac - bd$ különbséget! Azt kapjuk, hogy:

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c\,(a - b) + b\,(c - d).$$

A kikötések alapján $a - b > 0$, $c - d > 0$, $c > 0$, $b > 0$. Tehát a vizsgált különbség is pozitív. Ez viszont azt jelenti, hogy $ac > bd$. ◄

Hasonlóképpen igazolható, hogyha ***$a < b$ és $c < d$ és a, b, c és d pozitív szám, akkor $ac < bd$.***

Azt mondjuk, hogy az $ac > bd$ egyenlőtlenség az $a > b$ és $c > d$ egyenlőtlenségek szorzata.

A 3.2. tétel azt jelenti, hogy **két megegyező értelmű igaz egyenlőtlenség szorzata a pozitív számok halmazán is ugyanolyan irányú igaz egyenlőtlenség**.

Megjegyezzük, ha a 3.2. tétel feltételei közül kihagyjuk, hogy a, b, c és d számok pozitívak, akkor $a > b$ és $c > d$ igaz egyenlőtlenségekből nem következik az $ac > bd$ igaz egyenlőtlenség. Vegyünk két igaz egyenlőtlenséget: $-2 > -3$ és $4 > 1$. Összeszorozva ezt a két egyenlőtlenséget, a $-8 > -3$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami nem igaz.

Megjegyezzük, hogy a 3.2. tétel akkor is helytálló, ha három vagy annál több egyenlőtlenséget szorzunk össze. Például, ha $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$ és $a_3 > b_3$, akkor $a_1 a_2 a_3 > b_1 b_2 b_3$.

Következtetés. **Ha *$a > b$ és az a és b pozitív számok, akkor $a^n > b^n$,* ahol *n* természetes szám.**

Bizonyítás. Írjuk le n-szer az $a > b$ igaz egyenlőtlenséget:

$$\left.\begin{array}{l} a > b \\ a > b \\ \dots \\ a > b \end{array}\right\} n \text{ számú egyenlőtlenség}$$

Mivel a és b is pozitív szám, így az egyenlőtlenségeket n-szer összeszorozhatjuk. Azt kapjuk, hogy $a^n > b^n$. ◀

Megjegyezzük, hogy az eddig igazolt tulajdonságok akkor is érvényesek, ha az egyenlőtlenségek nem szigorúak:

ha $a \geqslant b$ és $c \geqslant d$, akkor $a + c \geqslant b + d$;

ha $a \geqslant b$, $c \geqslant d$ *és a, b, c, d pozitív szám*, akkor $ac \geqslant bd$;

ha a ⩾ b és a és b pozitív szám, akkor $a^n > b^n$, ahol n természetes szám.

Már tudjátok, hogy a mérési eredmények nem pontosak. A mérőeszközök csak abban segítenek, hogy meghatározzuk, milyen számok közé esik a pontos érték. Ezeket a számokat a **mennyiségek hibahatárainak** nevezzük.

Tételezzük fel, hogy lemértük egy téglalap x hosszát és y szélességét. A mérési eredményeink $2{,}5 \text{ cm} < x < 2{,}7 \text{ cm}$, $4{,}1 \text{ cm} < y < 4{,}3 \text{ cm}$. Akkor a 3.2. tétel alapján meg tudjuk becsülni a téglalap területét:

$$\times \begin{array}{c} 2{,}5 \text{ cm} < x < 2{,}7 \text{ cm} \\ 4{,}1 \text{ cm} < y < 4{,}3 \text{ cm} \\ \hline 10{,}25 \text{ cm}^2 < xy < 11{,}61 \text{ cm}^2. \end{array}$$

Általában, ha ismerjük egy mennyiség hibahatárait, akkor meg tudjuk **becsülni** azoknak a kifejezéseknek az értékét is, melyekben szerepel az adott mennyiség.

1. PÉLDA Adott: $6 < a < 8$ és $10 < b < 12$. Becsüljük meg a következő kifejezések helyettesítési értékeit:

1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) ab; 4) $\frac{a}{b}$; 5) $3a - \frac{1}{2}b$!

Megoldás. 1) Alkalmazzuk az egyenlőtlenségek összeadásának tételét. Azt kapjuk, hogy:

$$+ \begin{array}{c} 6 < a < 8 \\ 10 < b < 12 \\ \hline 16 < a + b < 20. \end{array}$$

2) Ha megszorozzuk a $10 < b < 12$ egyenlőtlenség mindkét oldalát –1-gyel, azt kapjuk, hogy $-10 > -b > -12$, vagyis $-12 < -b < -10$. Figyelembe véve, hogy $a - b = a + (-b)$, azt kapjuk, hogy:

$$+\begin{array}{c} 6 < a < 8 \\ -12 < -b < -10 \\ \hline -6 < a - b < -2. \end{array}$$

3) Mivel $a > 6$ és $b > 10$, ezért a és b is csak pozitív értéket vehet fel. Alkalmazzuk az egyenlőtlenségek szorzásának tételét:

$$\times\begin{array}{c} 6 < a < 8 \\ 10 < b < 12 \\ \hline 60 < ab < 96. \end{array}$$

4) Mivel $10 < b < 12$, ezért $\frac{1}{10} > \frac{1}{b} > \frac{1}{12}$, vagyis $\frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10}$. Figyelembe véve, hogy $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, azt kapjuk, hogy:

$$\times\begin{array}{c} 6 < a < 8 \\ \frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10} \\ \hline \frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}. \end{array}$$

5) Szorozzuk meg az $6 < a < 8$ egyenlőtlenséget 3-mal, a $10 < b < 12$ egyenlőtlenséget pedig $-\frac{1}{2}$-del!

Két igaz egyenlőtlenséget kapunk:

$$18 < 3a < 24 \text{ és } -5 > -\frac{1}{2}b > -6.$$

Adjuk össze a kapott egyenlőtlenségeket:

$$+\begin{array}{c} 18 < 3a < 24 \\ -6 < -\frac{1}{2}b < -5 \\ \hline 12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19. \end{array}$$

Megoldás. 1) $16 < a + b < 20$; 2) $-6 < a - b < -2$; 3) $60 < ab < 96$; 4) $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}$; 5) $12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19$. ◄

2. PÉLDA Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{24}+\sqrt{47}<12$.

Megoldás. Mivel $\sqrt{24}<5$ és $\sqrt{47}<7$, ezért

$$\sqrt{24}+\sqrt{47}<5+7=12.$$ ◄

?

1. Mondd ki az egyenlőtlenségek összeadásának tételét!
2. Magyarázd meg, mikor beszélünk azonos irányú egyenlőtlenségekről és mikor ellentétes irányú egyenlőtlenségekről!
3. Mondd ki az egyenlőtlenségek szorzásának tételét!
4. Mondd ki az egyenlőtlenségek szorzásáról szóló tétel következményét!

GYAKORLATOK

3.1.° Írd le azt az egyenlőtlenséget, melyet úgy kapunk, ha:

1) a $10>-6$ és $8>5$ egyenlőtlenségeket összeadjuk;

2) a $2<7$ és $3<4$ egyenlőtlenségeket összeszorozzuk;

3) az $1{,}2>0{,}9$ és $5>\frac{1}{3}$ egyenlőtlenségeket összeszorozzuk!

3.2.° Írd le azt az egyenlőtlenséget, amelyet úgy kapunk, hogy:

1) a $-9<-4$ és $-6<4$ egyenlőtlenségeket összeadjuk;

2) az $\frac{1}{6}<\frac{1}{3}$ és $24<27$ egyenlőtlenségeket összeszorozzuk!

3.3.° Adott a $-3<a<4$ egyenlőtlenség. Becsüljük meg a következő kifejezések helyettesítési értékeit:

1) $2a$; 3) $a+2$; 5) $3a+1$; 7) $-4a$;

2) $\frac{a}{3}$; 4) $a-1$; 6) $-a$; 8) $-5a+3$!

3.4.° Adott a $2<b<6$ egyenlőtlenség. Becsüljük meg a következő kifejezések helyettesítési értékeit:

1) $\frac{1}{2}b$; 2) $b-6$; 3) $2b+5$; 4) $4-b$!

3.5.° Tudjuk, hogy $2{,}6<\sqrt{7}<2{,}7$. Becsüld meg az alábbi kifejezéseket:

1) $3\sqrt{7}$; 2) $-2\sqrt{7}$; 3) $\sqrt{7}+1{,}3$; 4) $0{,}1\sqrt{7}+0{,}3$!

3.6.° Adottak az $5<a<6$ és $4<b<7$ egyenlőtlenségek. Becsüld meg az alábbi kifejezések helyettesítési értékeit:

1) $a+b$; 2) ab; 3) $a-b$!

3.7.° Tudjuk, hogy $2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$ és $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8.$ Becsüld meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\sqrt{5} + \sqrt{3};$ 2) $\sqrt{5} - \sqrt{3};$ 3) $\sqrt{15}!$

3.8.° Adott a $2 < x < 4$ egyenlőtlenség. Becsüld meg az $\dfrac{1}{x}$ kifejezés értékét!

3.9.° Becsüld meg az a és b szám számtani közepét, ha $2{,}5 < a < 2{,}6$ és $3{,}1 < b < 3{,}2$!

3.10.° Becsüld meg az a cm alapú és b cm szárú egyenlőszárú háromszög kerületét, ha $10 < a < 14$ és $12 < b < 18$!

3.11.° Becsüld meg az a cm hosszúságú és b cm szélességű paralelogramma kerületét, ha $15 \leqslant a \leqslant 19$ és $6 \leqslant b \leqslant 11.$

3.12.˙ Igazak-e a következő állítások:

1) ha $a > 2$ és $b > 7$, akkor $a + b > 9$;
2) ha $a > 2$ és $b > 7$, akkor $a + b > 8$;
3) ha $a > 2$ és $b > 7$, akkor $a + b > 9{,}2$;
4) ha $a > 2$ és $b > 7$, akkor $a - b > -5$;
5) ha $a > 2$ és $b > 7$, akkor $b - a > 5$;
6) ha $a > 2$ és $b > 7$, akkor $ab > 13$;
7) ha $a > 2$ és $b > 7$, akkor $3a + 2b > 20$;
8) ha $a > 2$ és $b < -7$, akkor $a - b > 9$;
9) ha $a < 2$ és $b < 7$, akkor $ab < 14$;
10) ha $a > 2$, akkor $a^2 > 4$;
11) ha $a < 2$, akkor $a^2 < 4$;
12) ha $a > 2$, akkor $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{2}$;
13) ha $a > 2$, akkor $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{2}$;
14) ha $-3 < a < 3$, akkor $-\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{3}$?

3.13.˙ Adva van az $a > 2{,}4$ és $b > 1{,}6$ egyenlőtlenség. Hasonlítsd össze az alábbi kifejezéseket:

1) $a + \dfrac{3}{4}b$ és 3,6;
2) $(a + b)^2$ és 16;
3) $(a - 0{,}4)\,(b + 1{,}4)$ és 6!

3.14.˙ Ismeretes, hogy $a > 3$ és $b > -2$. Bizonyítsd be, hogy $5a + 4b > 7$!

3.15.˙ Ismeretes, hogy $a > 5$ és $b < 2$. Bizonyítsd be, hogy $6a - 7b > 16$!

3.16.˙ Adva van az $5 < a < 8$ és $3 < b < 6$ egyenlőtlenség. Becsüld meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $4a + 3b$; 2) $3a - 6b$; 3) $\dfrac{a}{b}$; 4) $\dfrac{2b}{3a}$!

3.17.˙ Adott az $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ és az $\frac{1}{7} < y < \frac{1}{4}$ egyenlőtlenség. Becsüld meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $6x + 14y$; 2) $28y - 12x$; 3) $\frac{y}{x}$!

3.18.˙ Hasonlítsd össze az alábbi kifejezések értékeit:

1) 2^{24} és 9^8; 2) $0{,}3^{20}$ és $0{,}1^{10}$; 3) $0{,}0015^{10}$ és $0{,}2^{40}$!

3.19.˙ Bizonyítsd be, hogy a téglalap kerülete nagyobb az átlók összegénél!

3.20.˙ Bizonyítsd be, hogy a konkáv négyszög átlója kisebb a félkerületénél!

3.21.˙ Bizonyítsd be, hogy a konkáv négyszög szemben fekvő oldalainak összege kisebb az átlók összegénél!

3.22.˙ Bizonyítsd be az alábbi állításokat:

1) ha $a < b < 0$, akkor $a^2 > b^2$;

2) ha $a > 0$, $b > 0$ és $a^2 > b^2$ akkor $a > b$!

3.23.˙ Bizonyítsd be, ha $a < b < 0$, akkor $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$!

3.24.˙ Tudjuk, hogy $b > 0$ és $a > b$. Igazak-e az alábbi egyenlőtlenségek az a és b változók bármely értékére:

1) $a^2 + a > b^2 + b$; 3) $2 - a^2 < 2 - b^2$;

2) $a^2 - a > b^2 - b$; 4) $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$?

3.25.˙˙ Bizonyítsd be, hogy:

1) $\sqrt{27} + \sqrt{65} > 13$; 3) $\sqrt{65} - \sqrt{35} > 2$;

2) $\sqrt{14} + \sqrt{15} < 8$; 4) $\sqrt{99} - \sqrt{82} < 1$!

3.26.˙˙ Bizonyítsd be, hogy:

1) $\sqrt{55} + \sqrt{35} > \sqrt{120}$; 2) $\sqrt{119} - \sqrt{67} < 3$!

3.27.˙˙ Hasonlítsd össze:

1) $\sqrt{10} + \sqrt{6}$ és $\sqrt{11} + \sqrt{5}$; 3) $\sqrt{15} - \sqrt{5}$ és $\sqrt{2}$;

2) $2 + \sqrt{11}$ és $\sqrt{5} + \sqrt{10}$; 4) $\sqrt{21} + \sqrt{20}$ és 9!

3.28.˙˙ Hasonlítsd össze:

1) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$ és $\sqrt{7} + \sqrt{2}$; 2) $\sqrt{26} - \sqrt{2}$ és $\sqrt{14}$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

3.29. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $\frac{x-3}{x+3} \cdot \left(x + \frac{x^2}{3-x}\right)$; 2) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) : \frac{ab}{a^2 - b^2}$!

3.30. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $6\sqrt{3}+\sqrt{27}-3\sqrt{75}$;
3) $\left(2-\sqrt{3}\right)^2$!
2) $\left(\sqrt{50}-3\sqrt{2}\right)\sqrt{2}$;

3.31. Az x mely értékeire értelmezhetők az alábbi kifejezések:

1) $\dfrac{x^2}{x+4}$; 2) $\dfrac{x-4}{x^2-4}$; 3) $\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$; 4) $\dfrac{4}{x-4}+\dfrac{1}{x}$?

3.32. Egy kertben almafák és meggyfák vannak. A meggyfák adják az összes fa 20%-át. Hány százaléka az almafák a meggyfáknak?

ISMÉTLŐ FELADATOK

3.33. Az alábbi egyenletek közül melyek egyenértékűek (ekvivalensek):

1) $4x + 6 = 2x - 3$ és $4x + 3 = 2x - 6$;
2) $8x - 4 = 0$ és $2x - 1 = 0$;
3) $x^2 + 2x - 3 = 0$ és $x^2 + x = 3 - x$;
4) $\dfrac{x^2-1}{x+1}=0$ és $x^2 - 1 = 0$;
5) $\dfrac{x^2-1}{x+1}=0$ és $x - 1 = 0$;
6) $x^2 + 1 = 0$ és $0x = 5$?

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA

3.34. Bizonyítsd be, hogyha a, b, c, d, e és f számok páratlanok, akkor nem teljesülhet az $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{e}+\dfrac{1}{f}=1$ egyenlőség!

Az egyenlőtlenségek bizonyításának néhány módszeréről

Az 1. fejezetben igazoltunk néhány egyenlőtlenséget. Az általunk alkalmazott módszer: megvizsgáltuk a két oldal különbségét, majd összehasonlítottuk a nullával.

Ezenkívül még sok másik módszer is létezik egyenlőtlenségek bizonyítására. Tekintsünk át néhány ilyen módszert.

Indirekt bizonyítás

Ennek a módszernek a lényege az, hogy feltételezzük az állítás tagadását.

1. PÉLDA Bármely a_1, a_2, b_1 és b_2 számra igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right). \qquad (*)$$

Megoldás. Tételezzük fel, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség nem igaz. Ebben az esetben léteznek olyan a_1, a_2, b_1 és b_2 számok, amelyekre igaz a következő:

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 > \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right).$$

Innen

$$a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 > a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2;$$
$$2a_1b_1a_2b_2 > a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2;$$
$$a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2 < 0;$$
$$(a_1b_2 - a_2b_1)^2 < 0.$$

Az utolsó egyenlőtlenség nem igaz. A kapott ellentmondás azt jelenti, hogy (*) feltételezésünk igaz. ◀

Az (*) egyenlőtlenség részesete egy általánosabb egyenlőtlenségnek:

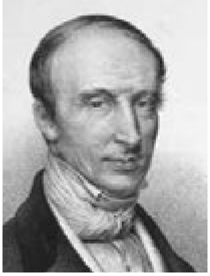
$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2\right). \qquad (**)$$

Az (**) egyenlőtlenséget *Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenségnek* nevezzük. A bizonyításával szakköri foglalkozáson ismerkedhetsz meg.

Az egyszerű egyenlőtlenségek alkalmazásának módszere

2. PÉLDA Az egyszerű egyenlőtlenségek alkalmazásának módszere

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac.$$



Cauchy Augustin Louis
(1789–1857)

Francia matematikus,
több mint 800 tudományos munka szerzője.

Megoldás. Könnyen belátható, hogy az a, b és c bármely értékére igaz az alábbi egyenlőtlenség:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0.$$

Innen kapjuk, hogy $a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2 \geqslant 0;$

$$2a^2+2b^2+2c^2 \geqslant 2ab+2bc+2ac;$$

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac. \blacktriangleleft$$

A már bizonyított egyenlőtlenségek alkalmazása

Az 1. fejezetben bebizonyítottuk, hogy bármely $a \geqslant 0$ és $b \geqslant 0$ számra igaz, hogy

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

Ezt az egyenlőtlenséget *Cauchy egyenlőtlenségnek nevezzük* (a számtani és mértani közép közötti összefüggést írja le).

3. PÉLDA Bizonyítsd be, hogy pozitív a és b számokra igaz, hogy

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right) \geqslant 4!$$

Megoldás. Alkalmazzuk az a és $\frac{1}{b}$ számokra a Cauchy egyenlőtlenséget (számtani és mértani közép közötti összefüggést). Azt kapjuk, hogy:

$$\frac{a+\frac{1}{b}}{2} \geqslant \sqrt{a\square\frac{1}{b}}.$$

Innen $a+\frac{1}{b} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$

Hasonlóképpen igazolható, hogy $b+\frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{b}{a}}.$

Viktor Jakovics Bunyakovszkij
(1804–1889)

Híres XIX. századi matematikus. Vinnica megyében született. Több éven át a Szentpétervári Tudományos Akadémia alelnöke.

Szorozzuk össze a kapott egyenlőtlenségeket:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geqslant 4\sqrt{\frac{a}{b}}\square\sqrt{\frac{b}{a}}!$$

Innen $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geqslant 4.$ ◄

Mértani szemléltetés módszere

4. PÉLDA Bizonyítsd be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{99\cdot101}+\sqrt{98\cdot102}+\ldots+\sqrt{2\cdot198}+\sqrt{1\cdot199}<\frac{100^2\pi}{4}.$$

Megoldás. Vizsgáljuk meg egy O középpontú egy egység sugarú körvonal negyedét. Rajzoljunk ebbe a negyed körlapba olyan lépcsőzetes sokszöget, amely 99 téglalapból áll, ahogy ezt a 3.1. ábra mutatja. Így

$$OA_1=A_1A_2=\ldots=A_{98}A_{99}=\frac{1}{100}.$$

Az első téglalap területe

$$S_1=OA_1\cdot AA_1=OA_1\cdot\sqrt{1-OA_1^2}=\frac{1}{100}\sqrt{1-\frac{1}{100^2}}=\frac{\sqrt{99\cdot101}}{100^2}.$$

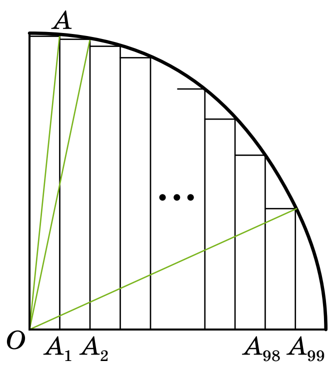
A második téglalap területe:

$$S_2=\frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{2}{100}\right)^2}=\frac{\sqrt{98\cdot102}}{100^2}$$ és így tovább.

A 99 téglalap területe:

$$S_{99}=\frac{1}{100}\sqrt{1-\left(\frac{99}{100}\right)^2}=\frac{\sqrt{1\cdot199}}{100^2}.$$

Tehát a lépcsőzetes sokszög területe kisebb az egy egység sugarú körvonal negyedénél, vagyis:



3.1. ábra

$$\frac{\sqrt{99\cdot101}}{100^2}+\frac{\sqrt{98\cdot102}}{100^2}+\ldots+\frac{\sqrt{1\cdot199}}{100^2}<\frac{\pi}{4}.$$

Innen következik a bizonyítandó egyenlőtlenség. ◄

GYAKORLATOK

1. Bizonyítsd be, hogy:

1) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4,$ ha $a>0$ és $b>0$;

2) $(a+b)(b+c)(a+c) \geqslant 8abc$, ha $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ és $c \geqslant 0$;

3) $(a^3+b)(a+b^3) \geqslant 4a^2b^2$, ha $a \geqslant 0$ és $b \geqslant 0$;

4) $(ab+1)(a+b) \geqslant 4ab$, ha $a \geqslant 0$ és $b \geqslant 0$;

5) $(a+2)(b+5)(c+10) \geqslant 80\sqrt{abc}$, ha $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ és $c \geqslant 0$;

6) $a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant 4$, ha $a > 0$ és $b > 0$;

7) $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geqslant 2^n$, ahol $a_1, a_2, \dots a_n$ olyan pozitív számok, melyek összege 1!

4. Egyismeretlenes egyenlőtlenségek

Nézzük meg a következő feladatot! A paralelogramma egyik oldala 7 cm. Mekkora kell, hogy legyen ennek a paralelogrammának a másik oldala, hogy a kerülete nagyobb legyen 44 cm-nél?

Jelöljük a keresett oldal hosszát x-szel. Ekkor a paralelogramma kerülete $(14 + 2x)$ cm. A $14 + 2x > 44$ egyenlőtlenség a feladat matematikai modellje.

Ha ebbe az egyenlőtlenségbe az x helyére például 16-ot helyettesítünk, igaz egyenlőtlenséget kapunk: $14 + 32 > 44$. Ebben az esetben azt mondják, hogy 16 az **egyenlőtlenség megoldása**.

Meghatározás. Az egyismeretlenes egyenlőtlenség megoldásának nevezzük a változó azon értékét, amely az egyenlőtlenséget igazzá teszi.

Így a 15,1; 20; $10\sqrt{3}$ számok mindegyike megoldása a $14 + 2x > 44$ egyenlőtlenségnek, míg a 10 nem.

Megjegyezzük, az egyenlőtlenség megoldásának meghatározása analóg az egyenlet gyökének definíciójával. Az „egyenlőtlenség gyöke” kifejezést viszont nem szoktuk használni.

Meghatározás. Megoldani egy egyenlőtlenséget annyit jelent, mint meghatározni az összes megoldását, vagy igazolni, hogy nem létezik ilyen megoldás.

Az egyenlőtlenség összes megoldása alkotja a **megoldáshalmazt**. Ha egy egyenlőtlenségnek nincs megoldása, akkor azt mondjuk, hogy az egyenlőtlenség megoldása **üres halmaz.** Az üres halmaz jele $\varnothing$.

Fogalmazhatunk úgy is, hogy ***megoldani egy egyenlőtlenséget annyit jelent, mint meghatározni az egyenlőtlenség megoldáshalmazát.***

Például, ha a feladat az, hogy „oldd meg az $x^2 > 0$ egyenlőtlenséget”, akkor a válasz: „bármely szám, kivéve a nullát”.

Könnyen belátható, hogy $x < 0$ egyenlőtlenségnek nincs megoldása, vagyis a megoldáshalmaza üres halmaz.

Meghatározás. Két egyenlőtlenség egyenértékű (ekvivalens), ha megoldáshalmazaik egyenlők.

Tekintsünk meg néhány példát!

Az $x^2 \leqslant 0$ és az $|x| \leqslant 0$ egyenlőtlenségek ekvivalensek. Valóban, mind a két egyenlőtlenségnek csak egy megoldása van, az $x = 0$.

Az $x^2 > -1$ és az $|x| > -2$ egyenlőtlenségek is ekvivalensek, mivel mindkét egyenlőtlenség megoldása a valós számok halmaza.

Mivel az $\sqrt{x} < -1$ és $0x < -3$ egyenlőtlenségeknek nincs megoldásuk, ezért ezek az egyenlőtlenségek is egyenértékűek, ekvivalensek.

?

1. Mi az egyismeretlenes egyenlőtlenség megoldása?
2. Mit jelent megoldani egy egyenlőtlenséget?
3. Mit alkot az egyenlőtlenség összes megoldása?
4. Mikor lesz egy egyenlőtlenség megoldáshalmaza üres halmaz?
5. Mely egyenlőtlenségek egyenértékűek, ekvivalensek?

GYAKORLATOK

4.1.° A –4; –0,5; 0; $\frac{1}{3}$; 2 számok közül melyek megoldásai az alábbi egyenlőtlenségeknek:

1) $x > \frac{1}{6}$; 3) $3x > x - 1$; 5) $\sqrt{x-1} > 1$;

2) $x \leqslant 5$; 4) $x^2 - 9 \leqslant 0$; 6) $\frac{1}{x} > 1$?

4.2.° Az alábbi számok közül melyek megoldásai az $(x-2)^2(x-5) > 0$ egyenlőtlenségnek:

1) 3; 2) 2; 3) 6; 4) –1?

4.3.° Megoldásai-e az alábbi számok a $6x + 1 \leqslant 2 + 7x$ egyenlőtlenségnek:

1) –0,1; 2) –2; 3) 0; 4) –1; 5) 2?

4.4.° Nevezz meg az $x + 5 > 2x + 3$ egyenlőtlenség megoldásai közül kettőt!

4.5.° Megoldása-e 1,99 az $x < 2$ egyenlőtlenségnek? Létezik-e ennek az egyenlőtlenségnek 1,99-tól nagyobb megoldása? Ha igen, hozz fel rá példát!

4.6.° Megoldása-e 4,001 az $x > 4$ egyenlőtlenségnek? Létezik-e ennek az egyenlőtlenségnek 4,001-től kisebb megoldása? Ha igen, hozz fel rá példát!

4.7.° Az alábbi egyenlőtlenségek közül melyik egyenlőtlenség megoldása üres halmaz:

1) $(x-3)^2 > 0$; 2) $(x-3)^2 \geqslant 0$; 3) $(x-3)^2 < 0$; 4) $(x-3)^2 \leqslant 0$?

4.8.° A következő egyenlőtlenségek közül melyiknek nincs megoldása:

1) $0x > -2$; 2) $0x < 2$; 3) $0x < -2$; 4) $0x > 2$?

4.9.° Az alábbi egyenlőtlenségek közül melyik igaz bármely valós számra:

1) $0x > 1$; 2) $0x > 0$; 3) $0x > -1$; 4) $x + 1 > 0$?

4.10.° Az alábbi egyenlőtlenségek közül melyik igaz bármely valós számra:

1) $x^2 > 0$; 2) $x > -x$; 3) $-x^2 \leqslant 0$; 4) $\sqrt{x} \geqslant 0$?

4.11.˙ Az alábbi egyenlőtlenségek közül válaszd ki azt, amelyik teljesül bármely valós számra és azt, amelyiknek nincs megoldása:

1) $\dfrac{x^2+1}{x^2} \geqslant 0$; 2) $\dfrac{x^2+1}{x^2+1} < 1$; 3) $\dfrac{x^2-1}{x^2-1} \geqslant 1$; 4) $\dfrac{x^2}{x^2+1} \geqslant 0$!

4.12.˙ Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket:

1) $\dfrac{2}{x^2} + 2 > 0$;

2) $(x+2)^2 > 0$;

3) $(x+2)^2 \leqslant 0$;

4) $\dfrac{x+2}{x+2} > 0$;

5) $\dfrac{x+2}{x+2} > \dfrac{2}{3}$;

6) $\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2 > 0$;

7) $\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^2 \geqslant 0$;

8) $x + \dfrac{1}{x^2} < \dfrac{1}{x^2} + 2$;

9) $|x| \geqslant -x^2$;

10) $|x| > -x^2$;

11) $|x| > x$;

12) $|x| \geqslant -x$!

4.13.˙ Határozd meg az alábbi egyenlőtlenségek megoldáshalmazát:

1) $|x| > 0$;
2) $|x| \leqslant 0$;
3) $|x| < 0$;
4) $|x| \leqslant -1$;
5) $|x| > -3$;
6) $\left|\frac{1}{x}\right| > -3$!

4.14.˙ Ekvivalensek-e az alábbi egyenlőtlenségek:

1) $\frac{1}{x} < 1$ és $x > 1$;
2) $x^2 \geqslant x$ és $x \geqslant 1$;
3) $(x + 5)^2 < 0$ és $|x - 4| < 0$;
4) $\sqrt{x} \leqslant 0$ és $x^4 \leqslant 0$?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

4.15. Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $9 - 7(x + 3) = 5 - 6x$;
2) $\frac{x+3}{2} - \frac{x-4}{7} = 1$;
3) $(x + 7)^2 - (x - 2)^2 = 15$;
4) $5x - 2 = 3(3x - 1) - 4x - 4$;
5) $6x + (x - 2)(x + 2) = (x + 3)^2 - 13$;
6) $(x + 6)(x - 1) - (x + 3)(x - 4) = 5x$!

4.16. Egy kerékpáros a falu és a tó közötti utat oda-vissza 1 óra alatt tette meg. A faluból a tóig 15 km/h sebességgel haladt, visszafelé 10 km/h sebességgel. Határozd meg a falu és a tó közötti távolságot!

5. Egyismeretlenes lineáris egyenlőtlenségek megoldása. Számintervallumok

A számegyenlőségek tulajdonságai segítenek megoldani az egyenleteket. Hasonlóképpen az egyenlőtlenségek tulajdonságai is segítenek megoldani az egyismeretlenes egyenlőtlenségeket.

Az egyenletek megoldása során az egyenleteket velük ekvivalens, de egyszerűbb egyenletekkel helyettesítettük. Hasonlóképpen oldjuk meg az egyenlőtlenségeket is.

Az egyenletek velük egyenértékű egyenletekkel való helyettesítésénél a mérlegelvet alkalmazzuk, azaz a tagok átvihetők az egyik oldalról a másikra, az egyenlet mindkét oldala szorozható ugyanazzal a nullától különböző számmal.

Hasonló szabályokat alkalmazunk az egyenlőtlenségek megoldásakor is.

Ha az egyenlőtlenség egyik oldaláról átviszünk egy tagot a másik oldalra úgy, hogy megváltoztatjuk az előjelét, akkor ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk.

Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk (vagy elosztjuk) ugyanazzal a pozitív számmal, akkor ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk.

Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk (vagy elosztjuk) ugyanazzal a negatív számmal és megváltoztatjuk az irányát, akkor ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk.

Ezen szabályok alkalmazásával oldjuk meg a paralelogramma kerületéről szóló feladatot (4. pont)!

Tudjuk, hogy $14 + 2x > 44$.

Vigyük át a 14-et a másik oldalra:

$$2x > 44 - 14.$$

Innen $2x > 44$.

Osszuk el az egyenlőtlenség mindkét oldalát 2-vel:

$$x > 15.$$

Megjegyezzük, hogy a kapott egyenlőtlenség ekvivalens az eredeti egyenlőtlenséggel. A megoldáshalmaz tartalmazza az összes 15-nél nagyobb számot. Ezt a halmazt **számintervallumnak** nevezzük és így jelöljük: $(15; +\infty)$ (így olvassuk: 15-től plusz végtelenig intervallum).

Ebben a feladatban a válasz vagy $(15; +\infty)$, vagy $x > 15$ alakban is megadható.

Az $x > 15$ megoldást szemléltető pontok a számegyenesen a 15-öt jelölő ponttól jobbra vannak és egy félegyenest alkotnak, melynek kezdőpontja „lyukas" (5.1. ábra).

5.1. ábra

Megjegyezzük, hogy a számintervallumokat kétféleképpen is jelölhetjük: satírozással (5.1. *a* ábra) vagy ívvel (5.1. *b* ábra). Mi a második jelölést fogjuk alkalmazni.

1. PÉLDA Oldjuk meg a $3+\frac{x}{2}\leqslant 7+x$ egyenlőtlenséget!

Megoldás. Vigyük át az x összeadandót a jobb oldalról a bal oldalra, a 3-t pedig a balról a jobbra, majd vonjuk össze az egynemű tagokat:

$$-x+\frac{x}{2}\leqslant 7-3;$$

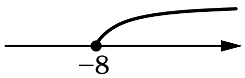
$$-\frac{x}{2}\leqslant 4.$$

Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát –2-vel. Így

$$x\geqslant -8.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldáshalmaza [–8; +∞) intervallum (így olvassuk: –8-tól plusz végtelenig balról zárt intervallum).

Az $x \geqslant -8$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza a számegyenesen egy félegyenes (5.2. ábra).



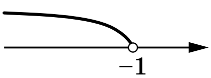
5.2. ábra

A *választ* kétféleképpen adhatjuk meg: [–8; +∞) vagy $x \geqslant 8$.

2. PÉLDA Oldjuk meg a $2(2-3x) > 3(x+6)-5$ egyenlőtlenséget!

Megoldás. Írjuk fel az adott egyenlőtlenséggel ekvivalens egyenlőtlenségek sorozatát:

$$4-6x > 3x+18-5;$$
$$4-6x > 3x+13;$$
$$-3x-6x > -4+13;$$
$$-9x > 9;$$
$$x < -1.$$



5.3. ábra

Az utolsó egyenlőtlenség megoldáshalmaza a (–∞; –1) intervallum (így olvassuk: mínusz végtelentől mínusz egyig intervallum). Az $x < -1$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát jelölő pontok a számegyenesen –1-től balra helyezkednek el (5.3. ábra) és egy félegyenest alkotnak, melynek a kezdőpontja „lyukas”.

Felelet: (–∞;–1) vagy $x < -1$ alakban adható meg.

3. PÉLDA Oldjuk meg az $\frac{x-1}{2}+\frac{x}{3}\leqslant\frac{1}{6}$ egyenlőtlenséget!

Megoldás. Végezzünk ekvivalens átalakításokat:

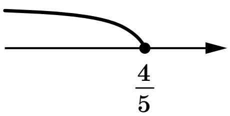
$$6\cdot\frac{x-1}{2}+6\cdot\frac{x}{3}\leqslant 6\cdot\frac{1}{6};$$

$$3x-3+2x\leqslant 1;$$

$$5x\leqslant 4;$$

$$x\leqslant\frac{4}{5}.$$

Az utolsó egyenlőtlenség megoldása $\left(-\infty;\ \frac{4}{5}\right]$ intervallum (így olvassuk: mínusz végtelentől $\frac{4}{5}$-ig jobbról zárt intervallum). A számegyenesen a megoldást szemléltető pontok egy félegyenest alkotnak (5.4. ábra).



5.4. ábra

A *felelet:* megadható vagy $\left(-\infty;\ \frac{4}{5}\right]$, vagy $x\leqslant\frac{4}{5}$ alakban. ◀

4. PÉLDA Oldjuk meg a $3(2x-1)+7\geqslant 2(3x+1)$ egyenlőtlenséget!

Megoldás. Azt kapjuk, hogy $6x-3+7\geqslant 6x+2;$

$$6x-6x\geqslant 2-4;$$

$$0x\geqslant -2.$$

Az utolsó egyenlőtlenség x bármely értékére teljesül, $0\geqslant -2$. Tehát az egyenlőtlenség megoldáshalmaza a valós számok halmaza.

Felelet: x – bármely szám. ◀

Ez a megoldás másképpen is felírható: $(-\infty;\ +\infty)$ (így olvassuk: mínusz végtelentől plusz végtelenig intervallum). Ez az intervallum a **számegyenes**.

5. PÉLDA Oldjuk meg a $4(x-2)-1<2(2x-9)$ egyenlőtlenséget!

Megoldás. Azt kapjuk, hogy

$$4x-8-1<4x-18;$$

$$4x-4x<9-18;$$

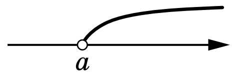
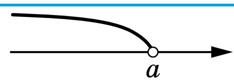
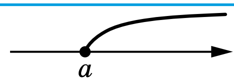
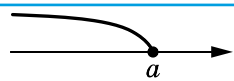
$$0x<-9.$$

A kapott egyenlőtlenség x bármely értékére nem igaz, $0 < -9$.

Ebben az esetben a feleletet kétféleképpen írhatjuk le: vagy nincs megoldás vagy üres halmaz ($\varnothing$). ◀

Az 1–5. példákban megoldott egyenlőtlenségek mindegyike ekvivalens az $ax > b$, $ax < b$, $ax \geqslant b$, $ax \leqslant b$ valamelyikével, ahol x az ismeretlen, a és b bármely szám. Az ilyen alakú egyenlőtlenségeket **egyismeretlenes lineáris egyenlőtlenségeknek** nevezzük.

Az alábbi táblázatban a megvizsgált jelöléseket és ábrázolásokat foglaltuk össze:

Egyenlőtlenség	Intervallum	Ábrázolás
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$	
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$	

?

1. Sorold fel az egyenlőtlenségek egyenértékű, ekvivalens átalakításait!
2. Mely egyenlőtlenségeket nevezzük egyismeretlenes lineáris egyenlőtlenségeknek?
3. Hogyan írjuk le és olvassuk az $x > b$, $x < b$, $x \geqslant b$, $x \leqslant a$ egyenlőtlenségek megoldáshalmazait?
4. Az egyenlőtlenség az ismeretlen bármely értékére igaz. Ebben az esetben, hogyan kell megadni és olvasni a megoldáshalmazt intervallummal?

GYAKORLATOK

5.1.° Ábrázold számegyenesen az alábbi intervallumokat:
1) $[-5; +\infty)$; 2) $(-5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -5)$; 4) $(-\infty; -5]$!

5.2.° Ábrázold számegyenesen, és add meg intervallummal az alábbi egyenlőtlenségek megoldáshalmazait:
1) $x < 8$; 2) $x \leqslant -4$; 3) $x \geqslant -1$; 4) $x > 0$!

5.3.° Ábrázold számegyenesen, és add meg intervallummal az alábbi egyenlőtlenségek megoldáshalmazait:

1) $x \leqslant 0$; 2) $x \geqslant \frac{1}{3}$; 3) $x > -1{,}4$; 4) $x < 16$!

5.4.° Nevezd meg az alábbi intervallumokhoz tartozó legkisebb egész számot:

1) $(6; +\infty)$; 2) $[6; +\infty)$; 3) $(-3{,}4; +\infty)$; 4) $[-0{,}9; +\infty)$!

5.5.° Nevezd meg az alábbi intervallumokhoz tartozó legnagyobb egész számot:

1) $(-\infty; -4)$; 2) $(-\infty; -6{,}2]$; 3) $(-\infty; 1]$; 4) $(-\infty; -1{,}8)$!

5.6.° A következő intervallumok közül melyiknek eleme a -7:

1) $(-\infty; -7)$; 2) $[-7; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $(-\infty; -6)$?

5.7.° A következő intervallumok közül melyiknek eleme a 9:

1) $(8{,}99; +\infty)$; 2) $(-\infty; 10)$; 3) $(-\infty; 8{,}99]$; 4) $[9; +\infty)$?

5.8.° Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $6x > 18$;
2) $-2x \geqslant 10$;
3) $\frac{1}{3}x < 9$;
4) $0{,}1x \geqslant 0$;
5) $\frac{3}{4}x > 24$;
6) $-10x < 0$;
7) $2\frac{1}{4}x \leqslant -1\frac{4}{5}$;
8) $-7x > \frac{14}{15}$;
9) $7x - 2 > 19$;
10) $5x + 16 \leqslant 6$;
11) $4 - x < 5$;
12) $5 - 8x \geqslant 6$;
13) $12 + 4x \geqslant 6x$;
14) $36 - 2x < 4x$;
15) $\frac{x+2}{5} < 2$!

5.9.° Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $5x < 30$;
2) $-4x \leqslant -16$;
3) $\frac{2}{3}x \leqslant 6$;
4) $-12x \geqslant 0$;
5) $-3x < \frac{6}{7}$;
6) $-2\frac{1}{3}x > 1\frac{5}{9}$;
7) $4x + 5 > -7$;
8) $9 - x \geqslant 2x$;
9) $13 - 6x \geqslant -23$;
10) $5 - 9x > 16$;
11) $3x + 2 \leqslant -7x$;
12) $\frac{x-3}{4} > -1$!

5.10.° Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket:

1) $0x > 10$;
2) $0x < 15$;
3) $0x > -8$;
4) $0x < -3$;
5) $0x \geqslant 1$;
6) $0x \leqslant 2$;
7) $0x \leqslant 0$;
8) $0x > 0$!

5.11.° Határozd meg az alábbi egyenlőtlenségek legkisebb egész megoldását:
1) $5x \geqslant 40$; 2) $5x > 40$; 3) $-2x < -3$; 4) $-7x < 15$!

5.12.° Határozd meg az alábbi egyenlőtlenségek legnagyobb egész megoldását:

1) $8x \leqslant -16$; 2) $8x < -16$; 3) $3x < 10$; 4) $-6x > -25$!

5.13.° Az a mely értékeire lesz a $6a + 1$ kifejezés helyettesítési értéke negatív?

5.14.° A b mely értékeire lesz a $7 - 2b$ kifejezés helyettesítési értéke pozitív?

5.15.° Az m mely értékeire lesz a $2 - 4m$ kifejezés helyettesítési értéke nem kevesebb, mint -22?

5.16.° Az n mely értékeire lesz a $12n - 5$ kifejezés helyettesítési értéke nem több, mint -53?

5.17.° Mely x értékekre értelmezhetők az alábbi kifejezések:
1) $\sqrt{4x+20}$; 2) $\sqrt{5-14x}$; 3) $\dfrac{10}{\sqrt{4x+10}}$?

5.18.° Határozd meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:
1) $f(x) = \sqrt{13-2x}$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{-x-1}}$!

5.19.° Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:
1) $8x + 2 < 9x - 3$; 4) $3 - 11y \geqslant -3y + 6$;
2) $6 - 6x > 10 - 4x$; 5) $-8p - 2 < 3 - 10p$;
3) $6y + 8 \leqslant 10y - 8$; 6) $3m - 1 \leqslant 1{,}5m + 5$!

5.20.° Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:
1) $4 + 11x > 7 + 12x$; 3) $3x - 10 < 6x + 2$;
2) $35x - 28 \leqslant 32x + 2$; 4) $6x - 3 \geqslant 2x - 25$!

5.21.° Mely c értékekre lesz a $9c - 2$ kifejezés helyettesítési értéke nem több a $4c + 4$ kifejezés megfelelő értékénél?

5.22.° Mely k értékekre lesz a $11k - 3$ kifejezés helyettesítési értéke nem kevesebb a $15k - 13$ kifejezés megfelelő értékénél?

5.23.° Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket:
1) $\dfrac{4x}{3} + \dfrac{x}{2} < 11$; 3) $\dfrac{5x}{7} - x > -4$;
2) $\dfrac{2x}{3} - \dfrac{3x}{4} \geqslant \dfrac{1}{6}$; 4) $\dfrac{x}{8} - \dfrac{1}{4} \leqslant x$!

5.24.° Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket:
1) $\dfrac{y}{6} - \dfrac{5y}{4} < 1$; 2) $\dfrac{x}{10} - \dfrac{x}{5} > -2$!

5.25.˙ Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $3-5(2x+4)\geqslant 7-2x$;
2) $6x-3(x-1)\leqslant 2+5x$;
3) $x-2(x-1)\geqslant 10+3(x+4)$;
4) $2(2x-3{,}5)-3(2-3x)<6(1-x)$;
5) $(x+1)(x-2)\leqslant (x-3)(x+3)$;
6) $(4x-3)^2+(3x+2)^2\geqslant (5x+1)^2$;
7) $\frac{2x-1}{4}\geqslant \frac{3x-5}{5}$;
8) $\frac{3x+7}{4}-\frac{5x-2}{2}<x$;
9) $(x-5)(x+1)\leqslant 3+(x-2)^2$;
10) $\frac{x+1}{2}-\frac{x-3}{3}>2+\frac{x}{6}$;
11) $(6x-1)^2-4x(9x-3)\leqslant 1$;
12) $\frac{x-3}{9}-\frac{x+4}{4}>\frac{x-8}{6}$!

5.26.˙ Add meg az alábbi egyenlőtlenségek megoldáshalmazát:

1) $3(4x+9)+5>7(8-x)$;
2) $(2-y)(3+y)\leqslant (4+y)(6-y)$;
3) $(y+3)(y-5)-(y-1)^2>-16$;
4) $\frac{3x-7}{5}-1\geqslant \frac{2x-6}{3}$;
5) $\frac{2x}{3}-\frac{x-1}{6}-\frac{x+2}{2}<0$;
6) $\frac{y-1}{2}-\frac{2y+1}{8}-y<2$!

5.27.˙ Határozd meg a következő egyenlőtlenségek legnagyobb egész megoldását:

1) $7(x+2)-3(x-8)<10$;
2) $(x-4)(x+4)-5x>(x-1)^2-17$!

5.28.˙ Határozd meg a következő egyenlőtlenségek legkisebb egész megoldását:

1) $\frac{4x+13}{10}-\frac{5+2x}{4}>\frac{6-7x}{20}-2$;
2) $(x-1)(x+1)-(x-4)(x+2)\geqslant 0$!

5.29.˙ Hány egész negatív megoldása van az $x-\frac{x+7}{4}-\frac{11x+30}{12}<\frac{x-5}{3}$ egyenlőtlenségnek?

5.30.˙ Hány természetes megoldása van a $\dfrac{2-3x}{4} \geqslant \dfrac{1}{5} - \dfrac{5x+6}{8}$ egyenlőtlenségnek?

5.31.˙ Az x mely értékeire teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

1) $|x-5| = x-5$; 2) $|2x+14| = -2x-14$?

5.32.˙ Az y mely értékeire kapunk igaz egyenlőségeket:

1) $\dfrac{|y+7|}{y+7} = 1$; 2) $\dfrac{|6-y|}{y-6} = 1$?

5.33.˙ Az a mely értékeire

1) nincs gyöke az $x^2 + 3x - a = 0$ egyenletnek;

2) legalább egy gyöke van a $2x^2 - 8x + 5a = 0$ egyenletnek?

5.34.˙ A b mely értékeire

1) van két különböző gyöke a $3x^2 - 6x + b = 0$ egyenletnek;

2) nincs gyöke az $x^2 - x - 2b = 0$ egyenletnek?

5.35.˙ Egy csónak bizonyos távolságot tett meg a folyón lefelé, majd nem több, mint 5 óra múlva visszatért a kiinduló pontba. A csónak sebessége álló vízben 5 km/h, a folyó sebessége 1 km/h. Mekkora az legnagyobb távolság, amit a csónak megtehetett a folyón lefelé?

5.36.˙ Vegyünk négy egymást követő egész számot, majd vizsgáljuk meg a két szélső szám és a két középső szám szorzatainak különbségét. Létezik-e olyan négy egymást követő szám, melyekre ez a különbség több, mint nulla?

5.37.˙ Egy dobozban sárga és kék golyók vannak. A kék golyók aránya a sárgákhoz 3 : 4. Mennyi lehet a kék golyók maximális száma, ha a dobozban nem több, mint 44 golyó van?

5.38.˙ Egy kertben az almafák, meggyfák és szilvafák aránya 5 : 4 : 2. Legkevesebb hány meggyfa van a kertben, ha a fák száma összesen nem kevesebb, mint 120?

5.39.˙ Egy háromszög oldalai 8 cm, 14 cm és a cm, ahol a természetes szám. Mekkora lehet az a legnagyobb értéke?

5.40.˙ Három egymást követő páros természetes szám összege nem több, mint 85. Melyik az a három legnagyobb szám, amelyekre teljesül ez a feltétel?

5.41.˙ Három természetes számnak, melyek 5 egymást követő többszörösei, az összege nem több, mint 100. Melyik az a három legnagyobb szám, amelyekre teljesül ez a feltétel?

5.42.$^{\bullet}$ Az x mely értékeire vannak értelmezve az alábbi függvények:

1) $f(x)=\sqrt{x+4}+\frac{1}{x-2}$;

2) $f(x)=\sqrt{24-8x}+\frac{6}{x^2-16}$;

3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3x+9}}-\frac{8}{|x|-2}$;

4) $f(x)=\sqrt{x+1}+\frac{4}{x^2-1}$?

5.43.$^{\bullet}$ A változók mely értékeire értelmezhetők az alábbi kifejezések:

1) $\sqrt{9-x}+\frac{10}{x+3}$;

2) $\frac{6}{\sqrt{3x-21}}+\frac{9}{x^2-64}$?

5.44.$^{\bullet\bullet}$ Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $|x-3|+x=15$;

2) $|x+1|-4x=14$;

3) $|3x-12|-2x=1$;

4) $|x+2|-x=1$!

5.45.$^{\bullet\bullet}$ Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $|x+5|+2x=7$;

2) $|3-2x|-x=9$!

5.46.$^{\bullet\bullet}$ Ábrázold az alábbi függvényeket:

1) $y=|x-2|$;

2) $y=|x+3|-1$;

3) $y=|x-1|+x$!

5.47.$^{\bullet\bullet}$ Ábrázold az alábbi függvényeket:

1) $y=|x+4|$;

2) $y=|x-5|+2$;

3) $y=|2x-6|-x$!

5.48.$^{\bullet\bullet}$ Az a mely értékeinél lesz

1) a $4x+a=2$ egyenletnek pozitív gyöke;

2) az $(a+6)x=3$ egyenletnek nemnegatív gyöke;

3) az $(a-1)x=a^2-1$ egyenletnek egyetlen gyöke?

5.49.$^{\bullet\bullet}$ Az m mely értékeinél lesz

1) a $2+4x=m-6$ egyenletnek nemnegatív gyöke;

2) az $mx=m^2-7m$ egyenletnek egyetlen nemnegatív gyöke?

5.50.* Az a mely értékeire lesz az alábbi egyenleteknek két különböző valós gyöke:

1) $ax^2+2x-1=0$;

2) $(a+1)x^2-(2a-3)x+a=0$;

3) $(a-3)x^2-2(a-5)x+a-2=0$?

5.51.* Határozd meg az a összes olyan értékét, melyre az alábbi egyenletnek nincs gyöke:

$(a-2)x^2+(2a+1)x+a=0$!

5.52.* Létezik-e olyan értéke az a-nak, melyre az alábbi egyenlőtlenségnek nincs gyöke (szigorú egyenlőtlenségnél add meg ezt az értéket):

1) $ax>3x+4$;

2) $(a^2-a-2)x\leqslant a-2$?

5.53.* Létezik-e az a-nak olyan értéke, melyre az alábbi egyenlőtlenségnek bármely szám lehet a gyöke (szigorú egyenlőtlenségnél add meg ezt az értéket):

1) $ax > -1 - 7x$;
2) $(a^2 - 16)x \leqslant a + 4$?

5.54.* Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket az a paraméter minden értékére:

1) $ax > 0$;
2) $ax < 1$;
3) $ax \geqslant a$;
4) $2(x - a) < ax - 4$;
5) $(a - 2)x > a^2 - 4$;
6) $(a + 3)x \leqslant a^2 - 9$!

5.55.* Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket az a paraméter minden értékére:

1) $a^2x \leqslant 0$;
2) $a + x < 2 - ax$;
3) $(a + 4)x > 1$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

5.56. Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $6x - 5x^2 = 0$;
2) $25x^2 = 81$;
3) $4x^2 - 7x - 2 = 0$;
4) $3x^2 + 8x - 3 = 0$;
5) $x^2 + x - 12 = 0$;
6) $2x^2 + 6x + 7 = 0$!

5.57. Ismeretes, hogy m és n egymást követő egész számok. Az alábbi állítások közül melyik igaz:

1) az mn szorzat nagyobb m-nél;
2) az mn szorzat nagyobb n-nél;
3) az mn szorzat páros;
4) az mn szorzat páratlan?

5.58. Hasonlítsd össze a kifejezések értékeit:

1) $3\sqrt{98}$ és $4\sqrt{72}$;
2) $\frac{1}{2}\sqrt{68}$ és $\frac{4}{3}\sqrt{45}$;
3) $\frac{1}{6}\sqrt{108}$ és $6\sqrt{\frac{1}{12}}$!

5.59. Ahhoz, hogy feltöltsünk egy medencét vízzel, az egyik csapon keresztül 1,5-szer több időre van szükség, mint a másik csap esetében. Ha mind a két csapot kinyitjuk, akkor a medence 6 óra alatt telik meg vízzel. Mennyi idő alatt telik meg a medence külön-külön mindegyik csapon keresztül?

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA

5.60. Egy háromjegyű n szám olyan, hogy $n - 6$, $n - 7$ és $n - 8$ rendre 7, 8 és 9 többszöröse. Határozd meg ezt az n számot!

6. Egyismeretlenes lineáris egyenlőtlenség-rendszerek

Vizsgáljuk meg a $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$ kifejezést! Határozzuk meg az x változó megengedett értékeit, tehát az x összes olyan értékét, melyre a kifejezés értelmezhető. Ezt a halmazt a kifejezés **értelmezési tartományának** nevezzük.

Mivel a gyök alatt csak nemnegatív szám állhat, ezért egyszerre két egyenlőtlenségnek kell teljesülnie: $2x - 1 \geqslant 0$ és $5 - x \geqslant 0$. Tehát az x keresett értékei a két egyenlőtlenség közös megoldásai.

Ha két vagy több egyenlőtlenség közös megoldásait kell meghatározni, akkor úgy fogalmazunk, hogy **meg kell oldani az egyenlőtlenség-rendszert**.

Ahogy az egyenletrendszereknél is, ugyanúgy az egyenlőtlenség-rendszereknél is az egyenlőtlenségeket kapcsos zárójelbe írjuk. Tehát ahhoz, hogy meghatározzuk a $\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$ kifejezés értelmezési tartományát, meg kell oldani a

$$\begin{cases} 2x-1\geqslant 0, \\ 5-x\geqslant 0 \end{cases}$$ egyenlőtlenség-rendszert. (*)

Meghatározás. Az egyismeretlenes egyenlőtlenség-rendszer megoldása az ismeretlen összes olyan értéke, melyre mindegyik egyenlőtlenség igaz.

Például a 2, 3, 4 és 5 is megoldása az (*) egyenlőtlenség-rendszernek, míg 7 nem megoldása.

Meghatározás. Megoldani az egyenlőtlenség-rendszert annyit jelent, mint meghatározni az összes megoldást vagy igazolni, hogy nincs megoldás.

Az egyenlőtlenség-rendszer összes megoldása alkotja **az egyenlőtlenség-rendszert megoldáshalmazát.** Ha az egyenletrendszernek nincs megoldása, akkor azt mondjuk, hogy a megoldások halmaza üres halmaz.

Ezért úgy is fogalmazhatunk, hogy ***megoldani az egyenlőtlenség-rendszert annyit jelent, mint meghatározni az egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazát.***

Például abban a feladatban, hogy „oldd meg a $\begin{cases} 0x\geqslant -1, \\ |\,x\,|\geqslant 0 \end{cases}$ egyenlőtlenséget”, a válasz a „valós számok halmaza”.

Könnyen belátható, hogy az $\begin{cases} x\leqslant 5, \\ x\geqslant 5 \end{cases}$ egyenlőtlenség megoldása egyetlen szám, az 5.

Az $\begin{cases} x > 5, \\ x < 5 \end{cases}$ egyenletrendszernek nincs megoldása, tehát a megoldáshalmaz üres halmaz.

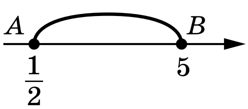
Oldjuk meg az (*) egyenlőtlenség-rendszert! Helyettesítve a rendszer egyenlőtlenségeit velük ekvivalens egyenlőtlenségekkel, azt kapjuk, hogy:

$$\begin{cases} 2x \geqslant 1, \\ -x \geqslant -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x \leqslant 5. \end{cases}$$

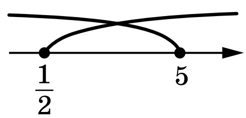
Az utolsó egyenlőtlenség-rendszer megoldása azon számok halmaza, melyek nem kisebbek $\frac{1}{2}$-nél és nem nagyobbak 5-nél, tehát az összes olyan szám, melyre igaz az $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5$ kettős egyenlőtlenség. Ennek az egyenlőtlenségnek a megoldása egy számintervallum, melyet így írunk: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ (így olvassuk: $\frac{1}{2}$-től 5-ig zárt intervallum).

Tehát a kitűzött feladat feleletét, a $\sqrt{2x-1} + \sqrt{5-x}$ kifejezés megengedett értékeit kétféleképpen írhatjuk fel: $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ vagy $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 5$.

Az (*) egyenlőtlenség-rendszer megoldásait jelölő pontok a számegyenesen az $A\left(\frac{1}{2}\right)$ és $B(5)$ koordinátájú pontok között vannak, beleszámítva az A és B pontot is (6.1. ábra). Ezek a pontok egy szakaszt alkotnak.



6.1. ábra



6.2. ábra

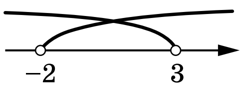
Figyeljük meg, hogy az $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ és $(-\infty; 5]$ intervallumok közös pontjainak halmaza az $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ intervallum (6.1. ábra). Ebben azt mondjuk, hogy az $\left[\frac{1}{2}; 5\right]$ intervallum az $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ és $(-\infty; 5]$ intervallumok **metszete**. Így írjuk: $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \cap (-\infty; 5] = \left[\frac{1}{2}; 5\right]$.

Az $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$ és $(-\infty; 5]$ intervallumok az $x \geqslant \frac{1}{2}$ és az $x \leqslant 5$ egyenlőtlenségek megoldáshalmazai. Így elmondhatjuk, hogy az $\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{2}, \\ x \leqslant 5 \end{cases}$ *egyenlőtlenség-rendszer megoldása a megoldáshalmazok metszete lesz.*

Tehát ahhoz, ***hogy megoldjunk egy egyenlőtlenség-rendszert, meg kell határozni a rendszerbe foglalt egyenlőtlenségek megoldáshalmazainak metszetét.***

1. PÉLDA Oldjuk meg a $\begin{cases} 3x-1>-7, \\ 3-4x>-9 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszert!

Megoldás. Azt kapjuk, hogy $\begin{cases} 3x>-6, \\ -4x>-12; \end{cases}$ $\begin{cases} x>-2, \\ x<3. \end{cases}$



6.3. ábra

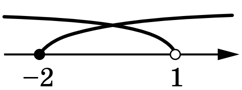
Számegyenes segítségével határozzuk meg a megoldáshalmazok metszetét, vagyis a $(-\infty; 3)$ és a $(-2; +\infty)$ intervallumok metszetét (6.3. ábra). A keresett metszet azon számok halmaza, melyekre teljesül, hogy $-2 < x < 3$. Ez a halmaz $(-2; 3)$ intervallum (így olvassuk: –2-től 3-ig nyílt intervallum).

A *felele t* kétféleképpen adható meg: $(-2; 3)$ vagy $-2 < x < 3$. ◀

2. PÉLDA Oldjuk meg a $\begin{cases} 4x-3<1, \\ 3-x \leqslant 5 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszert!

Megoldás. Azt kapjuk, hogy $\begin{cases} 4x<4, \\ -x \leqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x<1, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$

Számegyenes segítségével határozzuk meg a megoldáshalmazok metszetét, vagyis a $(-\infty; 1)$ és a $[-2; +\infty)$ intervallumok metszetét (6.4. ábra)! A keresett metszet azon számok halmaza, melyekre teljesül, hogy $-2 \leqslant x < 1$. Ez a halmaz $[-2; 1)$ intervallum (így olvassuk –2-től 1-ig nyílt intervallum).



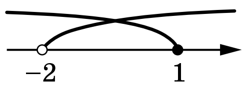
6.4. ábra

A *felelet* kétféleképpen adható meg: $[-2; 1)$ vagy $-2 \leqslant x < 3$. ◀

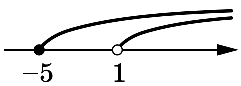
3. PÉLDA Oldjuk meg az $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x > -2 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszert!

Az adott egyenlőtlenség-rendszer megoldása a (–∞; 1] és a (–2; +∞) intervallumok metszete (6.5. ábra). Ez a metszet a (–2; 1] intervallum (így olvassuk: –2-től 1-ig balról nyílt, jobbról zárt intervallum).

Felelet: (–2; 1]. ◀



6.5. ábra



6.6. ábra

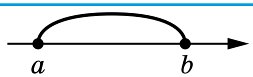
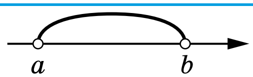
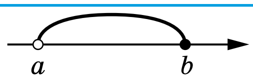
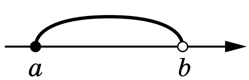
4. PÉLDA Határozzuk meg az $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5}$ függvény értelmezési tartományát!

Megoldás. A keresett értelmezési tartomány az $\begin{cases} x-1 > 0, \\ x+5 \geqslant 0 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmaza. Azt kapjuk, hogy $\begin{cases} x > 1, \\ x \geqslant -5. \end{cases}$

Ábrázoljuk számegyenesen az (1; +∞) és a [–5; +∞) intervallumok metszetét (6.6. ábra). Ez a metszet az (1; +∞) intervallum.

Felelet: (1; +∞). ◀

Az alábbi táblázatban a megvizsgált jelöléseket és ábrázolásokat foglaltuk össze:

Egyenlőtlenség	Intervallum	Ábrázolás
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$	

1. Mit nevezzünk egy kifejezés értelmezési tartományának?
2. Milyen esetben kell egyenlőtlenség-rendszert megoldani?
3. Milyen jelet használunk az egyenlőtlenség-rendszer esetében?
4. Mit nevezünk az egyismeretlenes egyenlőtlenség-rendszer megoldásának?
5. Mit jelent megoldani az egyenlőtlenség-rendszert?
6. Hogyan írjuk, olvassuk és ábrázoljuk az $a \leqslant x \leqslant b$ alakú egyenlőtlenséget? az $a < x < b$ alakú egyenlőtlenséget? az $a < x \leqslant b$ alakú egyenlőtlenséget? az $a \leqslant x < b$ alakú egyenlőtlenséget?

GYAKORLATOK

6.1.° A –6; –5; 0; 2; 4 számok közül melyek megoldásai az $\begin{cases} x-2<0, \\ -2x \leqslant 10 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszernek?

6.2.° Melyik egyenlőtlenség-rendszernek gyöke –3?

1) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \geqslant 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < -4, \\ x < 8; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > -4, \\ x < 8; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+1 > -1, \\ x-2 < 0? \end{cases}$

6.3.° Ábrázold számegyenesen az alábbi intervallumokat:
1) (–3; 4); 2) [–3; 4]; 3) [–3; 4); 4) (–3; 4]!

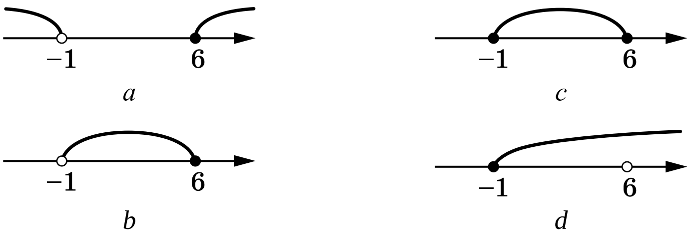
6.4.° Ábrázold számegyenesen az alábbi egyenlőtlenségeket és add meg intervallummal:
1) $0 < x < 5$;
2) $\frac{1}{6} < x \leqslant 2\frac{1}{7}$;
3) $0{,}2 \leqslant x < 102$;
4) $-2{,}4 \leqslant x \leqslant -1$!

6.5.° Írd le az alábbi intervallumhoz tartozó összes egész számot:
1) [3; 7]; 2) (2,9; 6]; 3) [–5,2; 1); 4) (–2; 2)!

6.6.° Add meg az adott intervallum legnagyobb és legkisebb egész számait:
1) [–12; –6];
2) (5; 11];
3) (–10,8; 1,6];
4) [–7,8; –2,9]!

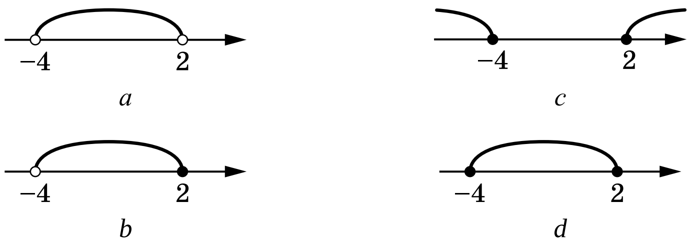
6.7.° Ábrázold számegyenesen, és írd le az alábbi intervallumok metszetét:
1) [–1; 7] és [4; 9];
2) [3; 6] és (3; 8);
3) (–∞; 3,4) és (2,5; +∞);
4) (–∞; 2,6) és (2,8; +∞);
5) [9; +∞) és [11,5; +∞);
6) (–∞; –4,2] és (–∞; –1,3)!

6.8.° Válaszd ki a 6.7. ábrán az $\begin{cases} x > -1, \\ x \leqslant 6 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazát!



6.7. ábra

6.9.° Válaszd ki a 6.8. ábrán a $-4 \leqslant x \leqslant 2$ kettős egyenlőtlenség megoldáshalmazát!



6.8. ábra

6.10.° Az alábbi intervallumok közül melyik az $\begin{cases} x > -1, \\ x > 2 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszer megoldása:

1) $(-\infty; -1)$; 2) $(-1; 2)$; 3) $(2; +\infty)$; 4) $(-1; +\infty)$?

6.11.° Tudjuk, hogy $a < b < c < d$. Az alábbi intervallumok közül melyik lesz az $(a; c)$ és $(b; d)$ intervallumok metszete:

1) $(a; d)$; 2) $(b; c)$; 3) $(c; d)$; 4) $(a; b)$?

6.12.° Tudjuk, hogy $m < n < k < p$. Az alábbi intervallumok közül melyik lesz az $(m; p)$ és $(n; k)$ intervallumok metszete:

1) $(m; n)$; 2) $(k; p)$; 3) $(n; k)$; 4) $(m; p)$?

6.13.° Ábrázold az alábbi egyenlőtlenség-rendszerek megoldáshalmazait számegyenesen és add meg intervallummal:

1) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x \leqslant -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 2, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x > 2, \\ x \geqslant -1; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x \leqslant 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x < -1; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x > 2, \\ x \leqslant -1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 2! \end{cases}$

6.14.° Oldd meg a következő egyenlőtlenség-rendszereket:

1) $\begin{cases} x - 4 < 0, \\ 2x \geqslant -6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 2 > 3, \\ -3x < -12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 6 > 2, \\ \dfrac{x}{4} < 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 6x + 3 \geqslant 0, \\ 7 - 4x < 7; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 10x - 1 \geqslant 3, \\ 7 - 3x \geqslant 2x - 3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x - 2 < 1 + 3x, \\ 5x - 7 \leqslant x + 9; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x - 6 \leqslant x - 1, \\ 11x + 13 < x + 3; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 5x + 14 \geqslant 18 - x, \\ 1{,}5x + 1 < 3x - 2; \end{cases}$

9) $\begin{cases} 4x + 19 \leqslant 5x - 1, \\ 10x < 3x + 21! \end{cases}$

6.15.° Oldd meg a következő egyenlőtlenség-rendszereket:

1) $\begin{cases} -4x \leqslant -12, \\ x + 2 > 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 8 - x \geqslant 5, \\ x - 7 \leqslant 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 3 < 5x, \\ 7x - 10 < 5x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2 - 3x < 4x - 12, \\ 7 + 3x \geqslant 2x + 10; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + 3 \geqslant 8, \\ \dfrac{x+1}{3} < 6; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x - 2 \geqslant 2x + 1, \\ 2x + 3 \leqslant 33 - 3x! \end{cases}$

6.16.° Határozd meg az alábbi kettős egyenlőtlenségek megoldáshalmazát:

1) $-3 < x - 4 < 7;$

2) $-2{,}4 \leqslant 3x + 0{,}6 \leqslant 3;$

3) $0{,}8 \leqslant 6 - 2x < 1{,}4;$

4) $4 < \dfrac{x}{5} - 2 \leqslant 5!$

6.17.° Oldd meg az alábbi kettős egyenlőtlenségeket:

1) $2 < x + 10 \leqslant 14;$

2) $10 < 4x - 2 < 18;$

3) $-1{,}8 \leqslant 1 - 7x \leqslant 36;$

4) $1 \leqslant \dfrac{x+1}{4} < 1{,}5!$

6.18.° Hány egész megoldása van a $\begin{cases} -2x \geqslant -15, \\ 3x > -10 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszernek?

6.19.° Határozd meg az $\begin{cases} x+8 \geqslant 4, \\ 5x+1 \leqslant 9 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszer egész megoldásainak összegét!

6.20.° Hány egész megoldása van a $-3 \leqslant 7x - 5 < 16$ egyenlőtlenségnek?

6.21.° Határozd meg az $\begin{cases} x+8 \geqslant 17, \\ \dfrac{x}{2} > 4{,}5 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszer legkisebb egész megoldását!

6.22.° Határozd meg a $\begin{cases} 2x+1 < -4, \\ 3x-6 \leqslant -12 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszer legnagyobb egész megoldását!

6.23.$^{\bullet}$ Oldd meg az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket:

1) $\begin{cases} 8(2-x)-2x > 3, \\ -3(6x-1)-x < 2x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{4} - \dfrac{2x+3}{3} > 1, \\ 6(2x-1) < 5(x-4)-7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2(x-3) \leqslant 3x+4(x+1), \\ (x-3)(x+3) \leqslant (x-4)^2 - 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x+11) \geqslant 3(6-x), \\ (x-3)(x+6) \geqslant (x+5)(x-4); \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x - \dfrac{x+1}{2} \leqslant \dfrac{x+1}{3}, \\ (x+5)(x-3)+41 \geqslant (x-6)^2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x+4 \leqslant 2x-8, \\ (x+2)(x-1) \geqslant (x+3)(x-2); \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{7} < \dfrac{x+1}{4}, \\ (x-6)(x+2)+4x < (x-7)(x+7); \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{6x+1}{6} - \dfrac{5x-1}{5} > -1, \\ 2(x+8)-3(x+2) < 5-x! \end{cases}$

6.24. Határozd meg a következő egyenlőtlenség-rendszerek megoldáshalmazát:

1) $\begin{cases} \dfrac{2x-3}{5} - \dfrac{4x-9}{6} > 1, \\ 5(x-1) + 7(x+2) > 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} - \dfrac{x+2}{3} < \dfrac{x+12}{6}, \\ 0{,}3x - 19 \leqslant 1{,}7x - 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x-6)^2 < (x-2)^2 - 8, \\ 3(2x-1) - 8 < 34 - 3(5x-9); \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{3x-2}{3} - \dfrac{4x+1}{4} \leqslant 1, \\ (x-1)(x-2) > (x+4)(x-7)! \end{cases}$

6.25. Határozd meg az alábbi egyenlőtlenség-rendszerek egész megoldásait:

1) $\begin{cases} 2x - 1 < 1{,}7 - x, \\ 3x - 2 \geqslant x - 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{3} - \dfrac{x}{4} < 1, \\ 2x - \dfrac{x}{2} \geqslant 10! \end{cases}$

6.26. Hány egész megoldása van az alábbi egyenlőtlenség-rendszereknek:

1) $\begin{cases} 4x + 3 \geqslant 6x - 7, \\ 3(x+8) \geqslant 4(8-x); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x-2}{6} < 2, \\ \dfrac{2x-5}{3} \geqslant -3? \end{cases}$

6.27. Határozd meg az alábbi kifejezések értelmezési tartományát:

1) $\sqrt{6x-9} + \sqrt{2x-5}$; 3) $\sqrt{2x-4} + \sqrt{1-x}$;

2) $\sqrt{3x+5} - \dfrac{1}{\sqrt{15-5x}}$; 4) $\sqrt{12-3x} - \dfrac{5}{x-4}$!

6.28. A változó mely értékeire értelmezhetők az alábbi kifejezések:

1) $\sqrt{8-x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; 2) $\sqrt{7x-35} + \dfrac{1}{x^2-5x}$?

6.29. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket:

1) $-3 < \dfrac{2x-5}{2} < 4$; 2) $-4 \leqslant 1 - \dfrac{x-2}{3} \leqslant -3$!

6.30. Oldd meg a következő egyenlőtlenségeket:

1) $-2 \leqslant \dfrac{6x+1}{4} < 4$; 2) $1{,}2 < \dfrac{7-3x}{5} \leqslant 1{,}4$!

6.31.˙ Oldd meg az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket:

1) $\begin{cases} x < 4, \\ x > 2, \\ x < 3{,}6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - 6 < 8, \\ 4 - 4x < 10, \\ 8x - 9 > 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 0{,}4 - 8x \geqslant 3{,}6, \\ 1{,}5x - 2 < 4, \\ 4{,}1x + 10 < 1{,}6x + 5! \end{cases}$

6.32.˙ Oldd meg az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket:

1) $\begin{cases} -x < 2, \\ 2x > 7, \\ x < -4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 1 < 2x + 2, \\ 2x + 1 > 8 - 5x, \\ 5x - 25 \leqslant 0! \end{cases}$

6.33.˙ Egy háromszög egyik oldala 4 cm, a másik két oldal összege pedig 8 cm. Mekkora a harmadik oldal, ha mindegyik oldal mérőszáma természetes szám?

6.34.¨ Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $(x - 3)(x + 4) \leqslant 0;$

2) $(x + 1)(2x - 7) > 0;$

3) $\dfrac{x - 8}{x - 1} > 0;$

4) $\dfrac{3x + 6}{x - 9} < 0;$

5) $\dfrac{2x - 1}{x + 2} \leqslant 0;$

6) $\dfrac{5x + 4}{x - 6} \geqslant 0!$

6.35.¨ Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $(14 - 7x)(x + 3) > 0;$

2) $\dfrac{x - 8}{3x - 12} > 0;$

3) $\dfrac{5x - 6}{x + 9} \geqslant 0;$

4) $\dfrac{4x + 1}{x - 10} \leqslant 0!$

6.36.¨ Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $|x - 2| \leqslant 3{,}6;$

2) $|2x + 3| < 5;$

3) $|x + 3| > 9;$

4) $|7 - 3x| \geqslant 1;$

5) $|x + 3| + 2x \geqslant 6;$

6) $|x - 4| - 6x < 15!$

637.¨ Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $|x - 6| \geqslant 2{,}4;$

2) $|5x + 8| \leqslant 2;$

3) $|x + 5| - 3x > 4;$

4) $|x - 1| + x \leqslant 3!$

6.38.* Az a mely értékeire lesz legalább egy megoldása az alábbi egyenlőtlenség-rendszereknek:

1) $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

6.39.* Az a mely értékeire nem lesz megoldása az alábbi egyenlőtlenség-rendszereknek:

1) $\begin{cases} x > 4, \\ x < a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x \geqslant a? \end{cases}$

6.40.* Az a mely értékeire lesz az alábbi intervallum az $\begin{cases} x > -1, \\ x \geqslant a \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszer megoldása:
1) $(-1; +\infty)$; 2) $[1; +\infty)$?

6.41.* Oldd meg az a lehetséges értékeire az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\begin{cases} x < 2, \\ x \leqslant a! \end{cases}$$

6.42.* Oldd meg az a lehetséges értékeire az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\begin{cases} x < -3, \\ x > a! \end{cases}$$

6.43.* Az a mely értékére lesz az $\begin{cases} x \geqslant 7, \\ x < a \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszernek pontosan 4 egész megoldása?

6.44.* Az a mely értékére lesz az $\begin{cases} x < 5, \\ x \geqslant b \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszernek pontosan 3 egész megoldása?

6.45.* Az a mely értékére lesz az $\begin{cases} x \geqslant 6, \\ x > a \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszer legkisebb egész megoldása 9?

6.46.* A b mely értékére lesz az $\begin{cases} x \leqslant b, \\ x < -2 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszernek legnagyobb egész megoldása –6?

6.47.* Az a mely értékeire lesznek az $x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0$ egyenlet gyökei 5-nél kisebbek?

6.48.* Az a mely értékeire lesznek az $x^2 - (4a - 2)x + 3a^2 - 4a + 1 = 0$ egyenlet gyökei a $[-2; 8]$intervallum elemei?

6.49.* Az a mely értékeire lesz a $3x^2 - (2a + 5)x + 2 + a - a^2 = 0$ egyenlet egyik gyöke kisebb, mint –2, a másik pedig nagyobb, mint 3?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

6.50. Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $\frac{x^2}{x^2-16} = \frac{3x+4}{x^2-16}$; 2) $\frac{5}{x-3} - \frac{8}{x} = 3$!

6.51. Egyszerűsítsd a következő számkifejezéseket:

1) $0{,}5\sqrt{24} - 4\sqrt{40} - \sqrt{150} + \sqrt{54} + \sqrt{1000}$;

2) $\sqrt{8b} + 0{,}3\sqrt{50b} - 3\sqrt{2b}$;

3) $1{,}5\sqrt{72} - \sqrt{216} - 0{,}6\sqrt{450} + 0{,}5\sqrt{96}$!

6.52. Fejezd ki az x változót az alábbi egyenlőségekből a többi változón keresztül:

1) $2x - \frac{m}{n} = 2$; 2) $\frac{1}{m} - \frac{1}{x} = \frac{1}{n}$!

6.53. Tudjuk, hogy a páros szám, b pedig páratlan és $a > b$. Az alábbi kifejezések közül melyik értéke lehet egész szám:

1) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$; 2) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$; 3) $\frac{a}{b}$; 4) $\frac{b}{a}$?

6.54. Mennyi só van 40 kg 9%-os sóoldatban?

6.55. Az érc 8% ónt tartalmaz. Mennyi ércből lehet 72 kg ónt kinyerni?

6.56. Hány százalékos a sóoldat, ha 350 g oldatban 21 g só van?

TUDÁSPRÓBA
1. TESZTFELADAT

1. Hasonlítsd össze az a és b számot, ha $a - b = -3{,}6$!
A) $a > b$;
B) $a < b$;
C) $a = b$;
D) nem lehet összehasonlítani.

2. Adott, hogy $m > n$. Az alábbi állítások közül, melyik hibás?
A) $m - 2 > n - 2$;
B) $2m > 2n$;
C) $m + 2 > n + 2$;
D) $-2m > -2n$.

3. Becsüld meg az a oldalhosszúságú egyenlő oldalú háromszög P kerületét, ha $0{,}8 < a < 1{,}2$!
A) 1,6 cm $< P <$ 2,4 cm;
B) 2,4 cm $< P <$ 3,6 cm;
C) 3,2 cm $< P <$ 4,8 cm;
D) 1,2 cm $< P <$ 1,8 cm.

4. Becsüld meg az xy szorzatot, ha $2 < x < 3$ és $1 < y < 4$!
A) $4 < xy < 8$;
B) $3 < xy < 7$;
C) $2 < xy < 12$;
D) $6 < xy < 14$.

5. Becsüld meg az $\frac{1}{6}y + 2$ kifejezés értékét, ha $-18 < y < 12$!
A) $-3 < \frac{1}{6}y + 2 < 4$;
B) $-1 < \frac{1}{6}y + 2 < 4$;
C) $-1 < \frac{1}{6}y + 2 < 2$;
D) $-3 < \frac{1}{6}y + 2 < 2$.

6. Adva van: $a > 0$ és $b > 0$. Az alábbi egyenlőtlenségek közül melyik teljesülhet?
A) $a^2 < b^2$; C) $a - b < 0$;
B) $\frac{a}{b} > 1$; D) $a^2b^3 > 0$.

7. Az alábbi egyenlőtlenségek közül melyik megoldáshalmaza a valós számok halmaza?

A) $2x > -2$; C) $0x > -2$;
B) $2x > 0$; D) $0x > 0$.

8. Az alábbi egyenlőtlenségek közül melyik megoldáshalmaza a $(3; +\infty)$ intervallum?

A) $x \geqslant 3$; C) $x > 3$;
B) $x \leqslant 3$; D) $x < 3$.

9. Oldd meg az $\frac{x}{4} \leqslant \frac{1}{5}$ egyenlőtlenséget!

A) $x \geqslant \frac{4}{5}$; C) $x \leqslant \frac{4}{5}$;
B) $x \geqslant \frac{1}{20}$; D) $x \leqslant \frac{1}{20}$.

10. Oldd meg a $-3x + 8 \geqslant 5$ egyenlőtlenséget!

A) $x \leqslant 1$; C) $x \leqslant -1$;
B) $x \geqslant 1$; D) $x \geqslant -1$.

11. Határozd meg a $\frac{3x-5}{2} > \frac{8-x}{3}$ egyenlőtlenség legkisebb egész megoldását!

A) 2; C) 4;
B) 3; D) nem lehet meghatározni.

12. Mennyi a $\sqrt{14-3x}$ kifejezés értelmezési tartományához tartozó természetes számok szorzata?

A) 4; C) 18;
B) 10; D) 24.

13. Az alábbi egyenlőtlenség-rendszerek közül melyiknek nincs megoldása?

A) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \leqslant -2; \end{cases}$ C) $\begin{cases} x \geqslant -3, \\ x \leqslant -3; \end{cases}$

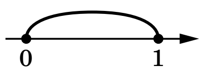
B) $\begin{cases} x > -3, \\ x > -2; \end{cases}$ D) $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x \leqslant -3. \end{cases}$

14. Add meg az $\begin{cases} x-1 > 2x-3, \\ 4x+5 > x+17 \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazát!

A) $\varnothing$; C) $(-\infty; 4)$;
B) $(2; +\infty)$; D) $(2; 4)$.

15. Melyik ábra szemlélteti a $\begin{cases} 8-7x>3x-2, \\ -2(3x-2{,}6)\leqslant -2(-2{,}6) \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmazát?

A)



C)

B)

D)

16. Hány egész megoldása van az $\begin{cases} x-\dfrac{x-2}{3}\geqslant\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{x-1}{2}, \\ 1-0{,}5x>x-4? \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszernek?

A) 3; C) 5;
B) 4; D) 6.

17. Oldd meg a $-3<\dfrac{1-2x}{5}-2<1$ egyenlőtlenséget!

A) (–3; 7); C) (–7; –3);
B) (–7; 3); D) (3; 7).

18. Az a mely értékeire nincs megoldása a $2x^2+6x+a=0$ egyenletnek?

A) $a<4{,}5$; C) $a>-4{,}5$;
B) $a>4{,}5$; D) $a<-4{,}5$.

AZ 1. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Számok összehasonlítása

Az a szám nagyobb a b számnál, ha az $a - b$ különbség pozitív.
Az a szám kisebb a b számnál, ha az $a - b$ különbség negatív.

Az egyenlőtlenségek tulajdonságai

Ha $a > b$ és $b > c$, akkor $a > c$.

Ha $a > b$ és c tetszőleges szám, akkor $a + c > b + c$.

Ha $a > b$ és c tetszőleges pozitív szám, akkor $ac > bc$.

Ha $a > b$ és c tetszőleges negatív szám, akkor $ac < bc$.

Ha $a > b$ és $ab > 0$, akkor $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Egyenlőtlenségek összeadása és szorzása

Ha $a > b$ és $c > d$, akkor $a + c > b + d$.
Ha $a > b$, $c > d$ és a, b, c, d pozitív számok, akkor $ac > bd$.

Egyismeretlenes egyenlőtlenségek megoldása

Az egyismeretlenes egyenlőtlenség megoldása az ismeretlen azon értéke, melyre az egyenlőtlenség teljesül.

Egyenértékű, ekvivalens egyenlőtlenségek

Ekvivalens egyenlőtlenségek azok az egyenlőtlenségek, melyeknek egyenlőek a megoldáshalmazaik.

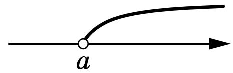
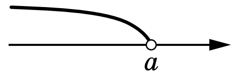
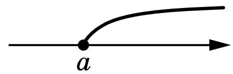
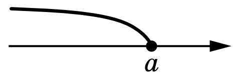
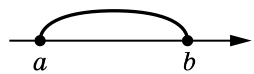
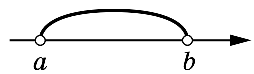
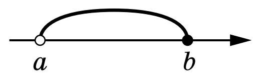
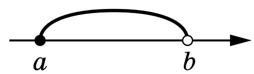
Az egyismeretlenes egyenlőtlenségek megoldásának szabályai (ekvivalens átalakítások)

- Ha az egyenlőtlenség egyik oldaláról átviszünk egy tagok a másik oldalra úgy, hogy megváltoztatjuk az előjelét, akkor ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk.
- Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk (vagy elosztjuk) ugyanazzal a pozitív számmal, akkor ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk.
- Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát megszorozzuk (vagy elosztjuk) ugyanazzal a negatív számmal és megváltoztatjuk az irányát, akkor ekvivalens egyenlőtlenséget kapunk.

Az egyismeretlenes egyenlőtlenség-rendszer megoldása

Az egyismeretlenes egyenlőtlenség-rendszer megoldása az ismeretlen összes olyan értéke, melyre mindegyik egyenlőtlenség igaz.
Megoldani az egyenlőtlenség-rendszert annyit jelent, mint meghatározni az összes megoldást vagy igazolni, hogy nincs megoldás.

Számintervallumok

Egyenlőtlenség	Intervallum	Ábrázolás
$x > a$	$(a; +\infty)$	
$x < a$	$(-\infty; a)$	
$x \geqslant a$	$[a; +\infty)$	
$x \leqslant a$	$(-\infty; a]$	
$a \leqslant x \leqslant b$	$[a; b]$	
$a < x < b$	$(a; b)$	
$a < x \leqslant b$	$(a; b]$	
$a \leqslant x < b$	$[a; b)$	

2. §. MÁSODFOKÚ FÜGGVÉNY

- Ebben a paragrafusban megismételjük és kibővítjük a függvényekről tanultakat.
- Megtanuljuk, hogyan kell az $y = f(x)$ függvény grafikonja segítségével ábrázolni az $y = kf(x)$, $y = f(x) + b$, $y = f(x + a)$ függvényeket.
- Megtudjátok, melyik függvényt nevezzük másodfokúnak, mi a grafikonja, milyen tulajdonságai vannak.
- Megtanuljuk alkalmazni a másodfokú függvények tulajdonságait.
- Kibővítjük a kétismeretlenes egyenletrendszerekről tanultakat, megoldási módjaikat, újabb tapasztalatokra tesztek szert az egyenletrendszerek megoldásában.

7. A függvényekről tanultak ismétlése, bővítése

A mindennapi életben gyakran megfigyelhetjük, hogy az egyik mennyiség (a független változó) változása milyen változást eredményez a másik mennyiség változásában (függő változó). Ezen folyamatok megfigyelése eredményezte matematikai modelljük megalkotását. Az egyik ilyen modell a **függvény**.

Ezzel a fogalommal már a 7. osztályban találkoztatok. Ismételjük meg, és pontosítsuk az eddig ismert tulajdonságaikat.

Jelöljük a független változó értékeinek halmazát X-szel, a függő változó értékeinek halmazát pedig Y-nal. **A függvény az a hozzárendelési szabály, amely a független változó minden értékéhez az X halmazból megfeleltet egyetlen értéket a függő változó értékeinek Y halmazából.**

Általában a független változót x-szel, a függő változót y-nal, magát a függvényt pedig f-fel jelöljük. Azt mondjuk, hogy az y változó az x **függvénye**. Írásban ezt így jelöljük: $y = f(x)$.

A független változót **argumentumnak** is nevezzük.

Az argumentum összes értékeinek halmazát a függvény **értelmezési tartományának** nevezzük és $D(f)$-fel vagy $D(y)$-nal jelöljük.

Tehát az $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ függvény értelmezési tartománya a $(0; +\infty)$ intervallum, vagyis $D(y) = (0; +\infty)$.

A függvény egyértelmű hozzárendelés, tehát az x argumentum minden értékéhez csak egy függő y érték tartozik. A függő változó értékét a **függvény helyettesítési értékének** nevezzük és $f(x)$-szel jelöljük. A függő változó összes értékének halmaza a **függvény értékkészlete**. Jelölése $E\ (f)$ vagy $E\ (y)$. Így az $y = \sqrt{x}$ függvény értékkészlete $[0; +\infty)$ intervallum, tehát $E\ (y) = [0; +\infty)$.

Egy függvény akkor van megadva, ha adott az értelmezési tartománya és a hozzárendelési szabály.

A függvényt az alábbi módokon lehet megadni:

- szövegesen;
- képlettel;
- értéktáblázattal;
- grafikusan.

Leggyakrabban a függvényt képlettel adjuk meg. Ezt a megadási módot **explicit** megadási módnak nevezzük. Abban az esetben, ha nincs megadva az értelmezési tartomány, akkor a függvény értelmezési tartománya a képletben szereplő kifejezés értelmezési tartománya. Például, ha a függvény az $f\ (x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ képlettel van megadva, akkor az értelmezési tartományt az $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ kifejezés értelmezési tartománya adja, vagyis ez az $(1; +\infty)$ intervallum.

Az alábbi táblázat a 7.–8. osztályban tanult függvényeket foglalja össze.

Függvény	Értelmezési tartomány	Értékkészlet	Grafikon
$y = kx + b$	$(-\infty; +\infty)$	Ha $k \neq 0$, akkor $(-\infty; +\infty)$; ha $k = 0$, akkor az értelmezési tartomány egyetlen számból, a b-ből áll	Egyenes
$y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$	$(-\infty; 0)$ és $(0; +\infty)$ intervallumokból álló halmaz	$(-\infty; 0)$ és $(0; +\infty)$ intervallumokból álló halmaz	Hiperbola
$y = x^2$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	Parabola
$y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	A parabola ága

1. Mi a függvény?

2. Mit jelent az az állítás, hogy az y változó az x változó függvénye?

3. Mi a függvény argumentuma?

4. Mi a függvény értelmezési tartománya?

5. Mi a függvény helyettesítési értéke?

6. Mi a függvény értékkészlete?

7. Mikor van egy függvény megadva?

8. Milyen megadási módja van egy függvénynek?

9. Mit tekintünk az explicit megadású függvény értelmezési tartományának, ha az nincs megadva?

GYAKORLATOK

7.1.° Egy függvény az $f(x) = -2x^2 + 5x$ képlettel van megadva.

1) Számítsd ki: $f(1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(-5)$!

2) Határozd meg az argumentum azon értékét, melyre a függvényérték: 0; 2; –3!

3) Igaz-e, hogy: $f(-1) = 7$; $f(4) = -12$!

7.2.° Egy függvény az $f(x) = 3x - 2$ képlettel van megadva.

1) Számítsd ki a függvény helyettesítési értékét: $f(3)$; $f(0)$; $f(-0{,}2)$; $f(1{,}6)$!

2) Határozd meg x azon értékét, melyre: $f(x) = 10$; $f(x) = -6$; $f(x) = 0$!

7.3.° Minden 10-nél nagyobb, de 20-nál kisebb természetes számhoz hozzárendelték az 5-tel való osztási maradékát.

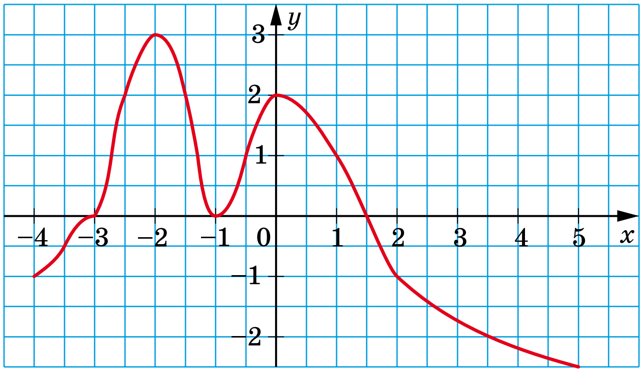
1) Milyen módon van megadva ez a függvény?

2) Mi a függvény értékkészlete?

3) Add meg ezt a függvényt értéktáblázattal!

7.4.° Adott az $y = 0{,}4x - 2$ függvény. Töltsd ki az alábbi táblázatot!

x	2		–2,5	
y		–2		0,8



7.1. ábra

7.5.° Adott az $y = -\frac{16}{x}$ függvény. Töltsd ki az alábbi táblázatot!

x	2		–0,4	
y		0,8		–32

7.6.° A 7.1. ábrán a [–4; 5] intervallumon értelmezett $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Határozd meg a grafikon alapján:

1) $f(-3{,}5)$; $f(-2{,}5)$; $f(-1)$; $f(2)$;

2) az x azon értékét, melyre $f(x) = -2{,}5$; $f(x) = -2$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;

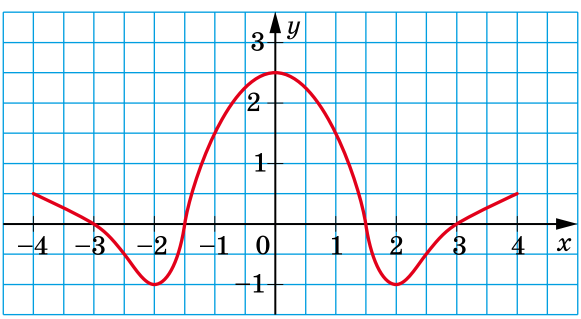
3) a függvény értékkészletét!

7.7.° A 7.2. ábrán a [–4; 4] intervallumon értelmezett $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Határozd meg a grafikon alapján:

1) $f(-4)$; $f(-1)$; $f(1)$; $f(2{,}5)$;

2) az x azon értékét, melyre $f(x) = -1$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$;

3) a függvény értékkészletét!



7.2. ábra

7.8.° Határozd meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

1) $f(x) = 7x - 15$;

2) $f(x) = \dfrac{8}{x+5}$;

3) $f(x) = \dfrac{x-10}{6}$;

4) $f(x) = \sqrt{x-9}$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$;

6) $f(x) = \dfrac{10}{x^2-4}$;

7) $f(x) = \dfrac{6x+11}{x^2-2x}$;

8) $f(x) = \sqrt{x+6} + \sqrt{4-x}$!

7.9.° Határozd meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

1) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-4}$;

2) $f(x) = \dfrac{9}{x^2+16}$;

3) $f(x) = \dfrac{5x+1}{x^2-6x+8}$;

4) $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x-3}$;

5) $f(x) = \sqrt{x-5} + \sqrt{5-x}$;

6) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$!

7.10.° Ábrázold a következő függvényeket:

1) $f(x) = -2x + 3$;

2) $f(x) = -\dfrac{1}{4}x$;

3) $f(x) = 3$;

4) $f(x) = -\dfrac{6}{x}$!

7.11.° Ábrázold a következő függvényeket:

1) $f(x) = 4 - \dfrac{1}{3}x$;

2) $f(x) = \dfrac{8}{x}$!

7.12.° Ábrázolás nélkül határozd meg az alábbi függvények grafikonjainak és koordináta-tengelyeknek a metszéspontjait:

1) $f(x) = \dfrac{1}{6}x - 7$;

2) $f(x) = \dfrac{20+4x}{3x-5}$;

3) $g(x) = 9 - x^2$;

4) $j(x) = x^2 + 2x - 3$!

7.13.° Ábrázolás nélkül határozd meg az alábbi függvények grafikonjainak és koordináta-tengelyeknek a metszéspontjait:

1) $h(x) = 9 - 10x$;

2) $p(x) = 4x^2 + x - 3$;

3) $s(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2+2}$!

7.14.˙ Adott az $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & \text{ha } x \leqslant -1, \\ x^2-5, & \text{ha } -1 < x < 4 \\ 11, & \text{ha } x \geqslant 4 \end{cases}$, függvény.

Számítsd ki: 1) $f(-3)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(2)$; 4) $f(6{,}4)$!

7.15.˙ Ábrázold az $f(x)=\begin{cases}6, & \text{ha } x\leqslant -3,\\ x^2, & \text{ha } -3<x<1,\\ x, & \text{ha } x\geqslant 1\end{cases}$ függvényt!

7.16.˙ Ábrázold az $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{4}{x}, & \text{ha } x<-2,\\ -x, & \text{ha } -2\leqslant x\leqslant 0,\\ \sqrt{x}, & \text{ha } x>0\end{cases}$ függvényt!

7.17.˙ Határozd meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

1) $f(x)=\sqrt{x-2}+\dfrac{x+2}{x-5}$;

2) $f(x)=\dfrac{x}{|x|-7}$;

3) $f(x)=\sqrt{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}$;

4) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{4x-3}{x^2-7x+6}$!

7.18.˙ Határozd meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

1) $f(x)=\sqrt{x+4}+\dfrac{2}{x+1}$;

2) $f(x)=\sqrt{8-x}+\dfrac{4}{x^2-8x}$!

7.19.˙ Határozd meg az alábbi függvények értékkészletét:

1) $f(x)=\sqrt{x}-1$;

2) $f(x)=5-x^2$;

3) $f(x)=-7$;

4) $f(x)=|x|+2$;

5) $f(x)=\sqrt{-x^2}$;

6) $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$!

7.20.˙ Határozd meg az alábbi függvények értékkészletét:

1) $f(x)=x^2+3$;

2) $f(x)=6-\sqrt{x}$;

3) $f(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}$!

7.21.˙ Adj meg képlettel egy olyan függvényt, melynek értelmezési tartománya:

1) a valós számok halmaza, kivéve az 1-et és a 2-t;
2) 5-nél nem kisebb számok halmaza;
3) 10-nél nem nagyobb számok halmaza, kivéve a –1-et;
4) a –4 egyelemű halmaz!

7.22.¨ Határozd meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, és ábrázold a grafikonjukat:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x+4}$;

2) $f(x)=\dfrac{12x-72}{x^2-6x}$;

3) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-9}$!

7.23.¨ Határozd meg az alábbi függvények értelmezési tartományát, majd ábrázold őket:

1) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}$;

2) $f(x)=\dfrac{x^3}{x}$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

7.24. Bontsd elsőfokú tényezők szorzatára az alábbi másodfokú polinomokat:

1) $x^2 - x - 12$;
2) $-x^2 + 2x + 35$;
3) $6x^2 + 11x - 2$;
4) $\frac{2}{3}x^2 + 3x - 6$!

7.25. Számítsd ki az alábbi kifejezések értékét:

1) $(10^3)^2 \cdot 10^{-8}$;
2) $\frac{25^{-3} \cdot 5^3}{5^{-5}}$;
3) $\frac{81^{-2} \cdot 3^5}{9^{-2}}$;
4) $\frac{0{,}125^3 \cdot 32^2}{0{,}5^{-2}}$!

7.26. Két szekrény ára azonos volt. Az egyik szekrény árát előbb 20%-kal emelték, majd 10%-kal leszállították. A másik szekrény árát éppen fordítva, előbb 10%-kal leszállították, majd 20%-kal emelték. Melyik szekrény lett drágább?

7.27. Az *A* és *B* városok távolsága 120 km. Az *A* városból elindult egy teherautó. 2 óra múlva egy vasúti átjárónál 6 percet kellett várakoznia. Ahhoz, hogy a tervezett időben megérkezzen *B* városba, 12 km/h-val növelte a sebességét. Mekkora sebességgel haladt a teherautó a várakozás után?

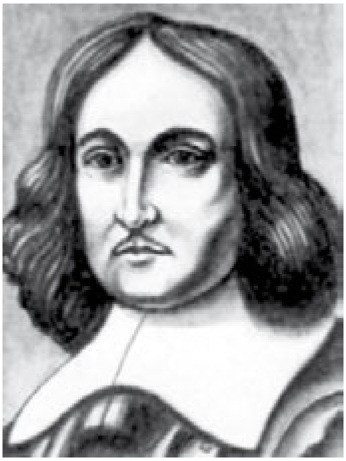
NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA

7.28. Egy természetes *n* számnak pontosan 100 osztója van (beleszámítva az 1-et és az *n*-t is). Határozd meg az osztók szorzatát!

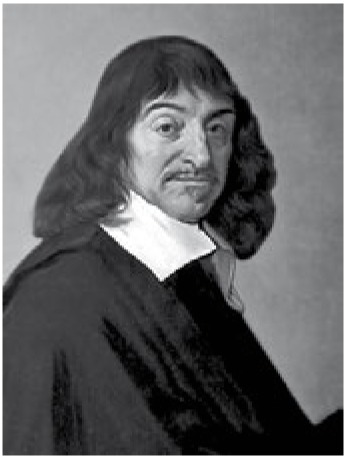
A függvény fogalmának fejlődési történetéből

A függvény azon meghatározása, amelyet a mostani matematikai ismereteid alapján használsz nem olyan régi, a XIX. század első felében jelent meg. Több mint 200 éven át formálódott híres matematikusok több nemzedékének szenvedélyes vitájában.

Mennyiségek közötti összefüggéseket már az ókorban is vizsgáltak. Ezek eredményeképpen fogalmazták meg néhány síkidom területképletét és egyes testek térfogatképletét. Az ókori babilóniaiak, görögök és arabok csillagászati táblázatait a táblázattal megadott függvények elődeinek tekinthetjük.



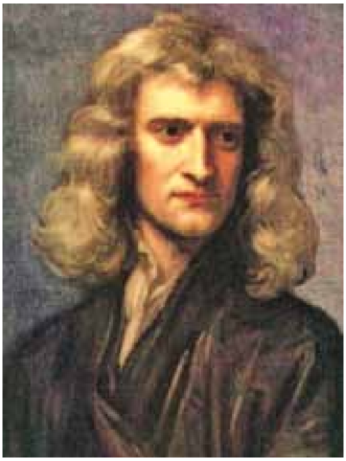
Pierre de Fermat
(1601–1665)



René Descartesт
(1596–1650)

Viszont csak a XVII. század első felében Pierre de Fermat és René Descartes felfedezése, a koordinátarendszer nyitott utat a függvény fogalmának meghatározásához. Munkáikban azt vizsgálták, hogyan változik a pont ordinátája, ha változtatjuk az abszcisszáját.

Fontos szerepet játszottak a függvény fogalmának pontos meghatározásában a híres angol matematikus, Isaac Newton munkái. A függvényen ő olyan mennyiséget értett, amely az idő múlásával változik.



Isaac Newton
(1643–1727)

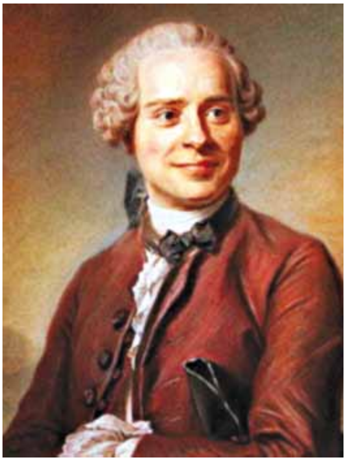
A *függvény* szakkifejezést (latin eredetű, *functio*, jelentése: eljárás, végrehajtás) először Gottfried Wilhelm Leibniz német matematikus használta. Ő és tanítványa, a svájci Johann Bernoulli a függvényen azt a képletet értették, amely összekötötte a két változó mennyiséget, a függvényt azonossá tették egyik megadási módjával.

A *függvény* fogalom további fejlődését sokban elősegítette Leonhard Euler és Jean le Rond d'Alamber többéves vitája a fogalom lényegéről. A polémia a fogalom egy általánosabb definícióját eredményezte mint két változó mennyiség összefüggését, ami szervesen nem kötődött a megadási módhoz.

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646–1716)

Johann Bernoulli
(1667–1748)

Leonhard Euler
(1707–1783)



Jean le Rond d'Alambert
(1717–1783)

A XIX. század 30-as éveiben Euler elméletét több híres tudós is továbbfejlesztette: Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij orosz matematikus, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet német matematikus. Pontosan ekkor jelent meg az a meghatározás, hogy az *y* mennyiség az *x* változó mennyiség függvénye, ha minden *x* értéknek pontosan egy *y* érték felel meg.

Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij
(1792–1856)

Peter Gustav Lejeune-Dirichlet
(1805–1859)

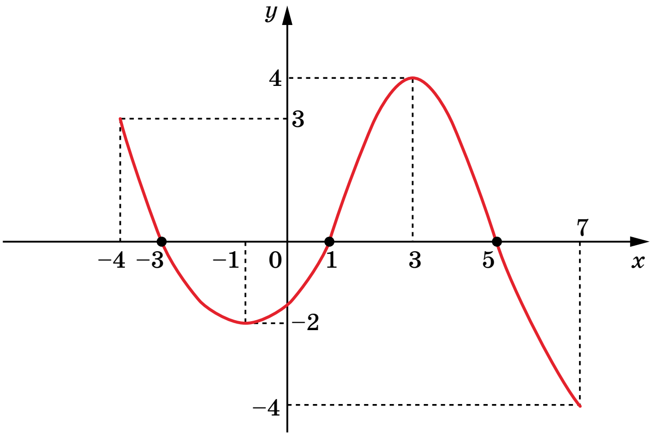
Ezzel a meghatározással még most is találkozhatunk néhány tankönyvben. Ugyanakkor korszerűbb értelmezés az, hogy *a függvény az a szabály, amellyel a független változó minden értékéhez meghatározható a függő változó egyetlen értéke.*

Amikor a XIX.–XX. század fordulóján megalkották a halmazelméletet, nyilvánvaló lett, hogy a függvény értelmezési tartománya és értékkészlete nem feltétlenül csak számokkal adható meg, ezért a függvényen azt a *leképezést kezdték érteni, amely az X halmaz miden eleméhez hozzárendeli az Y halmaz egyetlen elemét.*

8. Függvénytulajdonságok

Gyakran egy objektumot az ábrázolása alapján, fénykép, röntgenfelvétel, rajz, stb. tudunk elemezni.

A függvény „ábrázolása” lehet a függvény grafikonja. Megmutatjuk, hogyan lehet a grafikonról leolvasni a függvény néhány tulajdonságát.



8.1. ábra

A 8.1. ábrán az $y = f(x)$ függvény grafikonja látható.

Értelmezési tartománya [–4; 7] intervallum, értékkészlete [–4; 4] intervallum.

Az $x = –3$, $x = 1$ és $x = 5$ helyeken a függvényérték nulla.

Meghatározás. Az argumentum azon értékét, amelynél a függvényérték nulla, a függvény zérushelyének nevezzük.

Így a –3, 1 és 5 számok az adott függvény zérushelyei.

Megjegyezzük, hogy a [–4; –3) és (1; 5) intervallumon a függvény grafikonja az abszcisszatengely felett, míg a (–3; 1) és (5; 7] intervallumon az abszcisszatengely alatt helyezkedik el. Ez azt jelenti, hogy a [–4; –3) és (1; 5) intervallumon a függvény értéke pozitív szám, a (–3; 1) és (5; 7] intervallumon pedig negatív.

A megnevezett intervallumokon a függvényértékek ***előjele nem változik, a függvény előjeltartó***.

Meghatározás. Azt az intervallumot, amelyen a függvényérték előjele nem változik, állandó előjelű intervallumnak nevezzük.

Figyeljük meg, hogy az adott függvény a (0; 5) intervallumon nem állandó előjelű.

Meg kell jegyezni, hogy abban az esetben, ha azokat az intervallumokat vizsgáljuk, ahol a függvény állandó előjelű, akkor a leghosszabb ilyen intervallumot kell meghatározni. Például a 8.1. ábrán látható *f* függvény állandó előjelű a (–2; –1) intervallumon is, viszont a válaszban a (–3; 1) intervallumot kell megadni, aminek részhalmaza a (–2; –1) intervallum.

Ha –4-től haladunk az abszcisszatengely mentén –1-ig, akkor észrevehetjük, hogy a függvény grafikonja „lefelé halad”, vagyis a függvényértékek csökkennek.

Úgy szoktunk fogalmazni, hogy a [–4; –1] intervallumon a ***függvény csökkenő***. Ha az x-et –1-től 3-ig növeljük, akkor a függvény grafikonja „felfelé tart”, azaz a függvényértékek növekednek. Ebben az esetben úgy fogalmazunk, hogy a [–1; 3] intervallumon a függvény növekvő.

Meghatározás. **Az f függvény növekvő egy adott intervallumon, ha bármely, az adott intervallumhoz tartozó x_1 és x_2 esetében $x_1 > x_2$ argumentum értékekre igaz az $f(x_1) > f(x_2)$ egyenlőtlenség.**

Meghatározás. **Az f függvény csökkenő egy adott intervallumon, ha bármely, az adott intervallumhoz tartozó x_1 és x_2 esetében $x_1 > x_2$ argumentum értékekre igaz az $f(x_1) < f(x_2)$ egyenlőtlenség.**

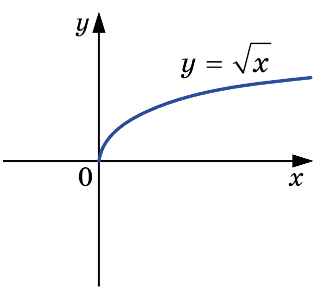
Gyakran használjuk az alábbi meghatározást is.

Meghatározás. **A függvény növekvő egy adott intervallumon, ha bármely, az adott intervallumhoz tartozó argumentum értékekre teljesül, hogy nagyobb argumentumhoz nagyobb függvényérték tartozik.**

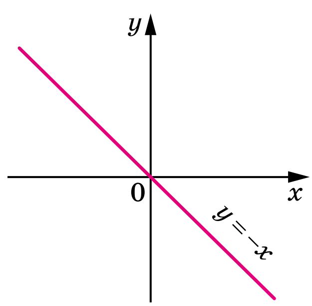
Meghatározás. **A függvény csökkenő egy adott intervallumon, ha bármely, az adott intervallumhoz tartozó argumentum értékekre teljesül, hogy nagyobb argumentumnak kisebb függvényérték felel meg.**

Ha egy függvény egész értelmezési tartományán nő, akkor a függvényt **növekvőnek** nevezzük. Ha egy függvény egész értelmezési tartományán csökken, akkor a függvényt **csökkenőnek** nevezzük.

A 8.2. ábrán például az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonja látható. Ez a függvény növekvő. A 8.3. ábrán az $y = -x$ csökkenő függvény grafikonja látható. A 8.1. ábra grafikonja se nem csökkenő, se nem növekvő.



8.2. ábra



8.3. ábra

1. PÉLDA Bizonyítsuk be, hogy az $y = x^2$ függvény a $(-\infty;\ 0]$ intervallumon csökkenő!

Megoldás. Legyen x_1 és x_2 a $(-\infty;\ 0]$ intervallum két tetszőleges eleme és $x_2 > x_1$. Igazoljuk, hogy $x_2^2 < x_1^2$, vagyis nagyobb argumentumnak kisebb függvényérték felel meg.

Mivel $x_2 > x_1$, ezért $-x_2 < -x_1$. Az utolsó egyenlőtlenség mindkét oldala nem negatív, ezért $(-x_2^2) < (-x_1^2)$, tehát $x_2^2 < x_1^2$. ◀

Eben az esetben úgy is fogalmazhatunk, hogy az $y = x^2$ függvény a $(-\infty;\ 0]$ ***intervallumban csökkenő.*** Hasonló módon igazolható, hogy az $y = x^2$ függvény a $[0;\ +\infty)$ ***intervallumban növekvő***.

A függvény növekedésének és csökkenésének intervalluma az a legbővebb halmaz, melyre a meghatározás igaz.

2. PÉLDA Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény a $(-\infty;\ 0)$ és a $(0;\ +\infty)$ intervallumon is csökkenő!

Megoldás. Legyen x_1 és x_2 a $(0;\ +\infty)$ intervallum két tetszőleges eleme és $x_2 > x_1$. Az egyenlőtlenségek tulajdonságai alapján $\dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{x_1}$. Tehát, az adott függvény a $(0;\ +\infty)$ intervallumon csökkenő.

Hasonlóan igazolható, hogy az $f(x)$ függvény csökkenő a $(-\infty;\ 0)$ intervallumon. ◀

Viszont nem állíthatjuk, hogy $f(x) = \dfrac{1}{x}$ függvény csökkenő az egész értelmezési tartományán. Valóban, mert például, ha $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, akkor az $x_2 > x_1$ egyenlőtlenségből nem következik, hogy $\dfrac{1}{x_2} < \dfrac{1}{x_1}$.

3. PÉLDA Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = kx + b$ függvény növekvő, ha $k > 0$ és csökkenő, ha $k < 0$!

Megoldás. Legyen x_1 és x_2 a két tetszőleges argumentum és $x_2 > x_1$.
Így

$$f(x_2) - f(x_1) = (kx_2 + b) - (kx_1 + b) = kx_2 - kx_1 = k(x_2 - x_1).$$

Mivel $x_2 > x_1$, ezért $x_2 - x_1 > 0$.

Tehát, ha $k > 0$, akkor $k(x_2 - x_1) > 0$, vagyis $f(x_2) > f(x_1)$. Azaz, ha $k > 0$, akkor az adott függvény növekvő.

Ha $k < 0$, akkor $k(x_2 - x_1) < 0$, vagyis $f(x_2) < f(x_1)$. Tehát, ha $k < 0$, akkor az adott függvény csökkenő. ◄

?

1. Mit nevezünk a függvény zérushelyének?
2. Mit értünk azon az intervallumon, ahol a függvény állandó előjelű?
3. Mikor mondjuk, hogy egy függvény az adott intervallumon növekvő?
4. Mikor mondjuk, hogy egy függvény az adott intervallumon csökkenő?
5. Mikor növekvő a függvény?
6. Mikor csökkenő a függvény?

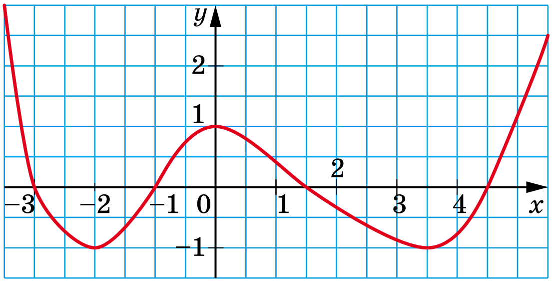
GYAKORLATOK

8.1.° A 8.4. ábrán egy, a valós számok halmazán értelmezett $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Határozd meg a grafikon alapján:

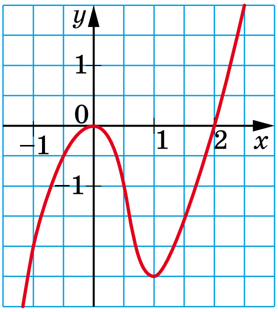
1) a zérushelyeket;

2) mely argumentumokra pozitív a függvényérték;

3) mely intervallumokon növekvő, és mely intervallumokon csökkenő az adott függvény!



8.4. ábra



8.5. ábra

8.2.° A 8.5. ábrán egy, a valós számok halmazán értelmezett $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Határozd meg a grafikon alapján:

1) a zérushelyeket;

2) mely argumentumokra negatív a függvényérték;

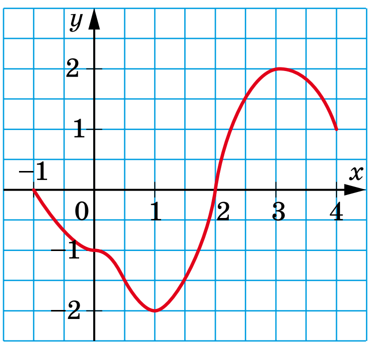
3) mely intervallumokon növekvő, és mely intervallumokon csökkenő az adott függvény!

8.3.° A 8.6. ábrán a [–1; 4] intervallumon értelmezett függvény grafikonja látható. Határozd meg a grafikon alapján:

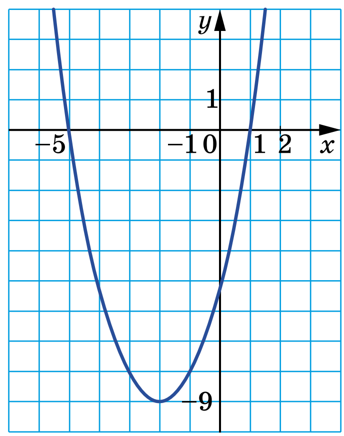
1) a zérushelyeket;

2) mely x értékekre negatív a függvényérték;

3) mely intervallumokon növekvő, és mely intervallumokon csökkenő az adott függvény!



8.6. ábra



8.7. ábra

8.4.° A 8.7. ábrán egy, a valós számok halmazán értelmezett $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Az alábbi állítások közül melyik igaz:

1) a függvény a $(-\infty; -9]$ intervallumon csökkenő;

2) $f(x) < 0$, ha $-5 \leqslant x \leqslant 1$;

3) a függvény a $[-2; +\infty)$ intervallumon növekvő;

4) $f(x) = 0$, ha $x = -5$ és ha $x = 1$;

5) a függvény az értelmezési tartományának $x = -2$ helyen veszi fel a legkisebb értékét?

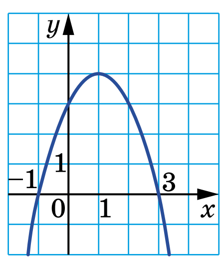
8.5.° A 8.8. ábrán a valós számok intervallumon értelmezett $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Határozd meg a grafikon alapján:

1) a zérushelyeket;

2) az x azon értékeit, melyre $y < 0$;

3) hol csökkenő a függvény;

4) a függvény értékkészletét!



8.8. ábra

8.6.° Az alábbi függvények közül melyik növekvő, és melyik csökkenő:

1) $y = 9x - 4$; 3) $y = 12 - 3x$; 5) $y = \frac{1}{6}x$;

2) $y = -4x + 10$; 4) $y = -x$; 6) $y = 1 - 0{,}3x$?

8.7.° Határozd meg az alábbi függvények zérushelyeit:

1) $f(x) = 0{,}2x + 3$; 4) $h(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x + 3}$;

2) $g(x) = 35 - 2x - x^2$; 5) $f(x) = x^3 - 4x$;

3) $\varphi(x) = \sqrt{x + 3}$; 6) $f(x) = x^2 + 1$!

8.8.° Határozd meg az alábbi függvények zérushelyeit:

1) $f(x) = \frac{1}{3}x + 12$; 4) $f(x) = -5$;

2) $f(x) = 6x^2 + 5x + 1$; 5) $f(x) = \frac{3 - 0{,}2x}{x + 1}$;

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; 6) $f(x) = x^2 - x$!

8.9.° Határozd meg, mely intervallumokon állandó előjelűek (előjeltartóak) az alábbi függvények:

1) $y = 5x - 15$; 3) $y = x^2 - 2x + 1$;

2) $y = -7x - 28$; 4) $y = \frac{9}{3 - x}$!

8.10.° Határozd meg, mely intervallumokon előjeltartóak az alábbi függvények:

1) $y = -4x + 8$; 2) $y = -x^2 - 1$; 3) $y = \sqrt{x} + 2$!

8.11.˙ Rajzolj egy olyan valós számok halmazán értelmezett függvényt, melynek az alábbi számok a zérushelyei:

1) –2 és 5; 2) –4, –1, 0 és 4!

8.12.˙ Rajzold le egy olyan függvény grafikonját, melynek az értelmezési tartománya [–5; 5] intervallum, zérushelyei pedig –3, 0 és 3!

8.13.˙ Ábrázolj egy, a [–4; 3] intervallumon értelmezett függvényt, amely:

1) a [–4; –1] intervallumon növekvő és a [–1; 3] intervallumon pedig csökkenő;

2) a [–4; –2] és a [0; 3] intervallumokon csökkenő és a [–2; 0] intervallumon pedig növekvő!

8.14.˙ Ábrázolj egy, a valós számok halmazán értelmezett függvényt, amely (–∞; 1] és [4; +∞) intervallumon növekvő és az [1; 4] intervallumon csökkenő!

8.15.˙ Ábrázold az $f(x)=\begin{cases}2x+8, & \text{ha } x\leqslant -2,\\ x^2, & \text{ha } -2<x<2,\\ -2x+8, & \text{ha } x\geqslant 2\end{cases}$ függvényt!

Határozd meg a rajz alapján a függvény zérushelyeit, állapítsd meg, hol növekvő és hol csökkenő, illetve hol állandó előjelű a függvény!

8.16.˙ Ábrázold az $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4}{x}, & \text{ha } x<-1,\\ \dfrac{x}{4}, & \text{ha } -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{4}{x}, & \text{ha } x>1\end{cases}$ függvényt!

Határozd meg a rajz alapján a függvény zérushelyeit, állapítsd meg, hol növekvő és hol csökkenő, illetve hol állandó előjelű a függvény!

8.17.˙ Az a mely értékeire lesz az $y = x^2 + (2a - 1)x + a^2 + a$ függvénynek két zérushelye?

8.18.˙ Az a mely értékeire nincs az $y = x^2 + 6x + a$ függvénynek zérushelye?

8.19.˙ Melyik az a legnagyobb egész értéke n-nek, melyre az $y = (8 - 3n)x - 7$ függvény növekvő?

8.20.˙ Az m mely értékeire lesz az $y = mx - m - 3 + 2x$ függvény csökkenő?

8.21.˙ Az $y = f(x)$ függvény csökkenő. Növekvők vagy csökkenők az alábbi függvények (indokold meg a válaszodat):

1) $y = 3f(x)$; 2) $y=\frac{1}{3}f(x)$; 3) $y = -f(x)$?

8.22.˙ Az $y = f(x)$ függvény valamely intervallumon növekvő. Növekvők vagy csökkenők az alábbi függvények az adott intervallumon (indokold meg a válaszodat):

1) $y=\frac{1}{2}f(x)$; 2) $y = -2f(x)$?

8.23.˙˙ Bizonyítsd be, hogy:

1) az $y=\dfrac{6}{3-x}$ függvény a $(3; +\infty)$ intervallumon növekvő;

2) az $y = x^2 - 4x + 3$ függvény a $(-\infty; 2]$ intervallumon csökkenő!

8.24.$^{\cdot\cdot}$ Bizonyítsd be, hogy:

1) az $y = \dfrac{7}{x+5}$ függvény a $(-5; +\infty)$ intervallumon csökkenő;
2) az $y = 6x - x^2$ függvény a $(-\infty; 3]$ intervallumon növekvő!

8.25.$^{\cdot\cdot}$ Bizonyítsd be, hogy az $y = \dfrac{k}{x}$ függvény a $(-\infty; 0)$ és a $(0; +\infty)$ intervallumon is csökkenő, ha $k > 0$, és növekvő, ha $k < 0$!

8.26.* Az a mely értékeire lesz az $f(x) = (a - 1)x^2 + 2ax + 6 - a$ függvénynek egy zérushelye?

8.27.* Ábrázold az $[a; 2]$, $a < 2$ intervallumon értelmezett $f(x) = x^2$ függvényt! Határozd meg a függvény legnagyobb és legkisebb értékét minden a értékre!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

8.28. Egyszerűsítsd az alábbi törteket:

1) $\dfrac{x^2 + x - 6}{7x + 21}$;
2) $\dfrac{2y - 16}{8 + 7y - y^2}$;
3) $\dfrac{m^2 - 16m + 63}{m^2 - 81}$;
4) $\dfrac{3a^2 + a - 2}{4 - 9a^2}$!

8.29. Végezd el a kijelölt szorzásokat:

1) $\left(\sqrt{11} + \sqrt{6}\right)\left(\sqrt{11} - \sqrt{6}\right)$;
2) $\left(\sqrt{32} - 5\right)\left(\sqrt{32} + 5\right)$;
3) $\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)^2$;
4) $\left(\sqrt{10} + 8\right)^2$!

8.30. Két különböző markológép 8 óra alatt ásott ki egy gödröt. Az első markológép egyedül 4-szer gyorsabban kotorna ki egy ilyen gödröt, mint a másik markológép. Hány óra alatt ás ki külön-külön egy ilyen gödröt egyedül mindkét markológép?

8.31. 200 g 12%-os sóoldathoz hozzáadtak 20 gramm sót. Hány százalékos lett így az oldat?

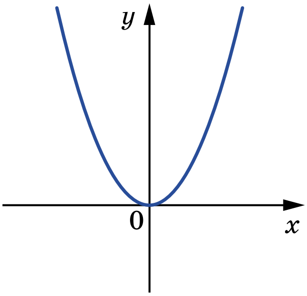
9. Hogyan kell ábrázolni az $y = kf(x)$ függvény grafikonját az $y = f(x)$ függvény grafikonjából

A 8. osztályban már megismerkedtetek az $y = x^2$ függvénnyel és a grafikonjával, amit parabolának nevezünk (9.1. ábra).

Most megmutatjuk, hogyan kapjuk meg az $y = ax^2$, $a \neq 0$ függvény grafikonját az $y = x^2$ függvény grafikonjából.

Ábrázoljuk, például, az $y = 2x^2$ függvényt!

Készítsünk értéktáblázatot az $y = x^2$ és az $y = 2x^2$ függvényekhez! Válasszunk azonos argumentumokat!



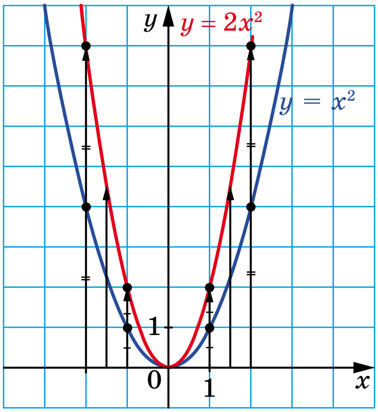
9.1. ábra

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = 2x^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18

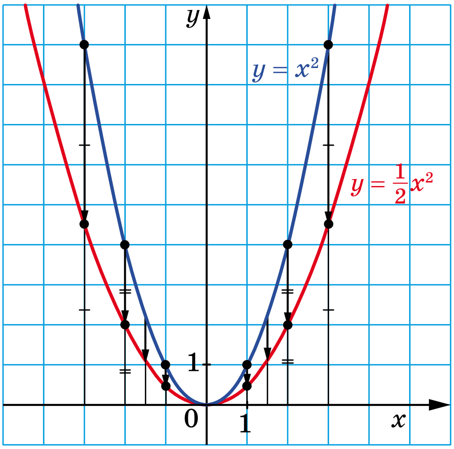
Ez a táblázat arra enged következtetni, hogy az $y = x^2$ függvény minden $(x_0; y_0)$ pontjának az $y = 2x^2$ függvény grafikonjának egyetlen $(x_0; 2y_0)$ koordinátájú pontja felel meg. Az $y = 2x^2$ függvény minden $(x_1; y_1)$ pontjának pedig az $y = x^2$ függvény grafikonjának egyetlen $\left(x_1; \frac{y_1}{2}\right)$ koordinátájú pontja felel meg. Tehát az $y = 2x^2$ függvény grafikonjának valamennyi pontját megkaphatjuk úgy, ha az $y = x^2$ függvény minden pontját kicseréljük ugyanolyan abszcisszájú, de kétszer akkora ordinátájú pontra (9.2. ábra).

Az $y = x^2$ függvény grafikonja alapján ábrázoljuk az $y = \frac{1}{2}x^2$ függvényt.

Érthető, hogy az $y = \frac{1}{2}x^2$ függvény grafikonjának minden pontját megkaphatjuk, ha az $y = x^2$ függvény minden pontját kicseréljük ugyanolyan abszcisszájú, de fele akkora ordinátájú pontra (9.3. ábra).



9.2. ábra

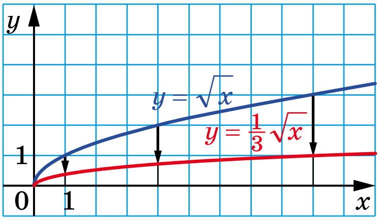


9.3. ábra

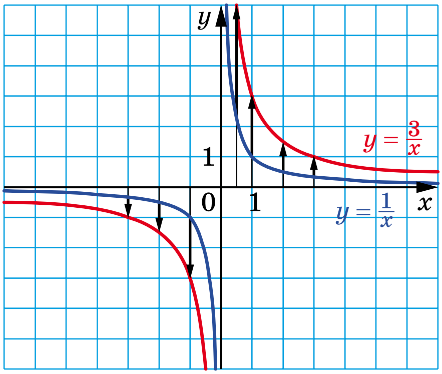
A felhozott példák azt mutatják, hogy az $y = f(x)$ függvény grafikonja segítségével ábrázolni lehet az $y = kf(x)$, $k > 0$ függvény grafikonját.

Az $y = kf(x)$ függvény grafikonját, ahol $k > 0$ megkapjuk, ha az $y = f(x)$ függvény minden pontjának az ordinátáját k-szorosára növeljük.

A 9.4. és 9.5. ábrák azt szemléltetik, hogyan alkalmazható ez a szabály az $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ és $y = \frac{3}{x}$ függvények grafikonjának ábrázolásánál.



9.4. ábra

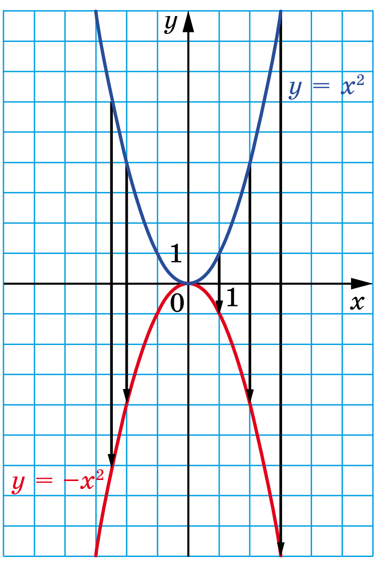


9.5. ábra

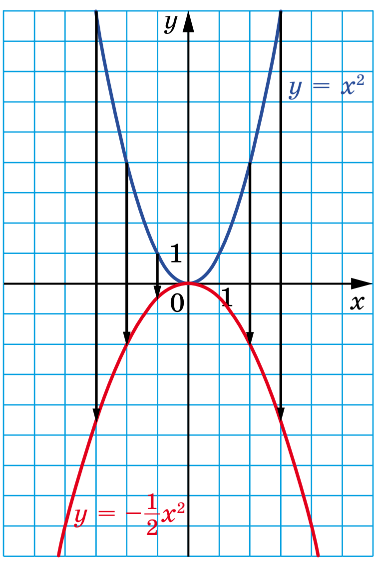
Úgy fogalmazhatunk, hogy az $y = kf(x)$ függvény grafikonját megkapjuk az $y = f(x)$ függvény grafikonjából **k-szoros nyújtással az y tengely mentén (az x tengelytől)**, ha $k > 1$, és **$\frac{1}{k}$-szoros zsugorítással az y tengely mentén (az x tengelyhez),** ha $0 < k < 1$.

Tehát az $y = \frac{3}{x}$ függvény grafikonját az $y = \frac{1}{x}$ függvény grafikonjának háromszoros nyújtásával kapjuk meg az y tengely mentén, az $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}$ függvény grafikonja pedig az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonjának háromszoros zsugorítása az y tengely mentén.

Vizsgáljuk meg az $y = x^2$ és $y = -x^2$ függvényeket! Az $y = x^2$ függvény minden $(x_0; y_0)$pontjának az $y = -x^2$ függvény grafikonjának egyetlen $(x_0; -y_0)$ koordinátájú pontja felel meg. Az $y = -x^2$ függvény minden $(x_1; y_1)$ pontjának pedig az $y = x^2$ függvény grafikonjának egyetlen $(x_1; -y_1)$ koordinátájú pontja. Tehát az $y = -x^2$ függvény grafikonját úgy kaphatjuk meg, hogy az $y = x^2$ függvény grafikonjának minden pontjához hozzárendelünk egy vele azonos abszcisszájú, de ellentétes ordinátájú pontot (tükrözzük az abszcissza tengelyre) (9.6. ábra).



9.6. ábra

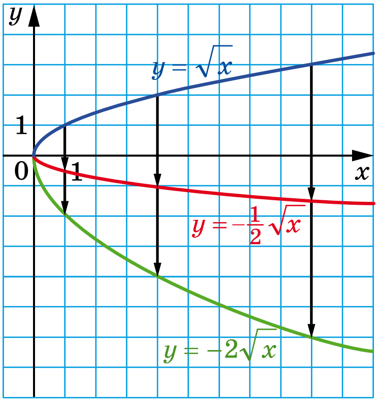


9.7. ábra

Most már könnyen belátható, hogy az $y = kf(x)$, $k < 0$ függvény grafikonja ugyanolyan, mint az $y = kf(x)$, $k > 0$ függvényé.

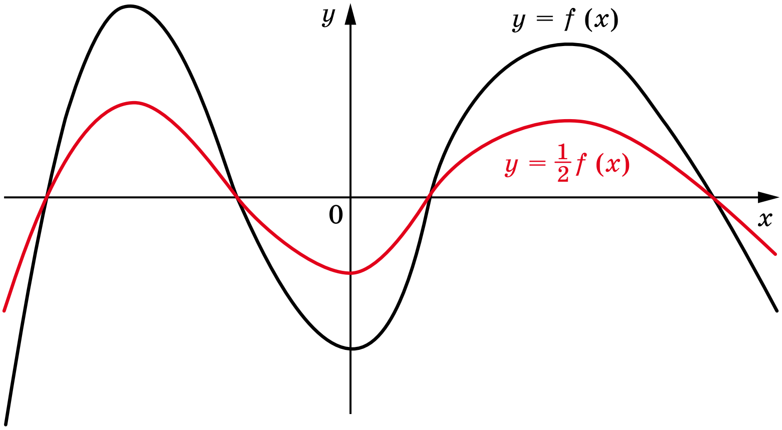
Például a 9.7. ábrán látható, hogyan kell az $y = x^2$ függvény grafikonja alapján ábrázolni az $y = -\frac{1}{2}x^2$ függvényt.

A 9.8. ábra azt szemlélteti, hogyan kell az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonja alapján ábrázolni az $y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$ és $y = -2\sqrt{x}$ függvényt.

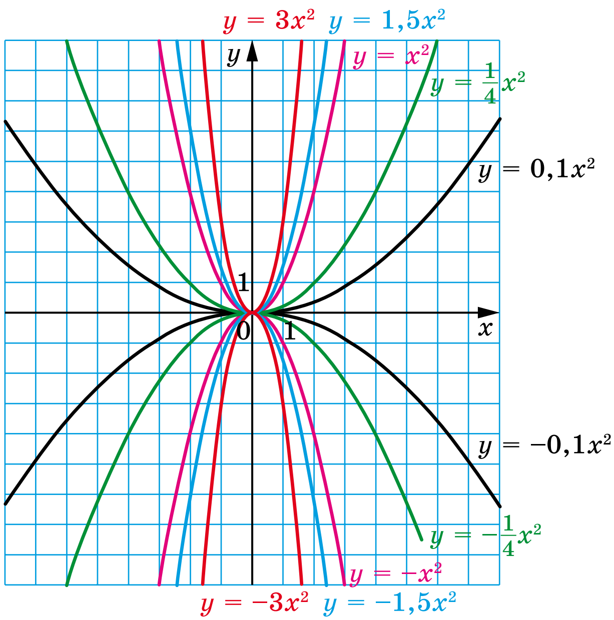


9.8. ábra

Figyeljük meg, hogyha $k \neq 0$, akkor az $y = f(x)$ és $y = kf(x)$ függvények zérushelyei azonosak. Tehát, ezek a függvények ugyanazon a helyen metszik az abszcisszatengelyt. Ezt szemlélteti a 9.9. ábra.



9.9. ábra



9.10. ábra

A 9.10. ábrán láthatjuk az $y = ax^2$ függvény grafikonját különböző a értékekre. Ezeknek a függvényeknek a grafikonját az $y = x^2$ függvény grafikonjával együtt **parabolának** nevezzük.

Ha $a > 0$, akkor a parabola szárai felfelé mutatnak, ha $a < 0$, akkor pedig lefelé.

Gyakran az $y = ax^2$ függvény kifejezés helyett az $y = ax^2$ parabola kifejezést használjuk.

Az alábbi táblázatban foglaltuk össze az $y = ax^2$, $a \neq 0$ függvény tulajdonságait.

Tulajdonság	$a > 0$	$a < 0$
Értelmezési tartomány	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Értékkészlet	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Zérushely	$x = 0$	$x = 0$
Állandó előjelű	$y > 0$ a $(-\infty; 0)$ és $(0; +\infty)$	$y < 0$ a $(-\infty; 0)$ és $(0; +\infty)$
Növekvő	$[0; +\infty)$	$(-\infty; 0]$
Csökkenő	$(-\infty; 0]$	$[0; +\infty)$

?

1. Hogyan kaphatjuk meg az $y = kf(x)$, $k \neq 0$ függvény grafikonját az $y = f(x)$ függvény grafikonjából?
2. Mi az $y = ax^2$, $a \neq 0$ függvény grafikonja?
3. Melyik pont az $y = ax^2$ parabola csúcsa?
4. Merre mutatnak a parabola szárai, ha $a > 0$? és ha $a < 0$?
5. Mi az $y = ax^2$, $a \neq 0$ függvény értelmezési tartománya?
6. Mi az $y = ax^2$, $a \neq 0$ függvény értékkészlete?
7. Melyik intervallumon növekvő, és melyiken csökkenő az $y = ax^2$, $a \neq 0$ függvény, ha $a > 0$? és ha $a < 0$?

GYAKORLATOK

9.1.° Illeszkednek-e az alábbi pontok az $y = -25x^2$ függvény grafikonjára:

1) $A\ (2; -100)$; 3) $C\left(-\frac{1}{5}; -1\right)$;

2) $B\ (-2; 100)$; 4) $D\ (-1; 25)$?

9.2.° Melyik síknegyedekben van az $y = ax^2$, $a \neq 0$ függvény grafikonja, ha $a > 0$? és ha $a < 0$?

9.3.° Állapítsd meg rajz készítése nélkül az $y = 3x^2$ függvény grafikonja és az alábbi egyenesek metszéspontját:

1) $y = 300$; 3) $y = -150x$;

2) $y = 42x$; 4) $y = 6 - 3x$!

9.4.° Állapítsd meg rajz nélkül az alábbi függvények grafikonjainak metszéspontját:

1) $y = \frac{1}{3}x^2$ és $y = 3$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2$ és $y = x + 4$!

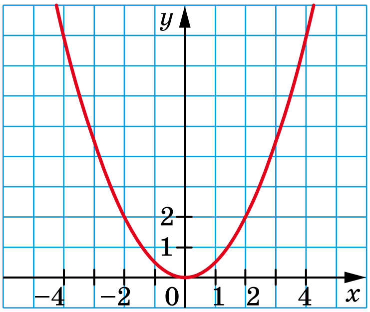
9.5.° Az a mely értékénél illeszkedik az $A(a; 16)$ pont az $y = 4x^2$ függvény grafikonjára?

9.6.° Az b mely értékénél illeszkedik a $B(-2; b)$ pont az $y = -0{,}2x^2$ függvény grafikonjára?

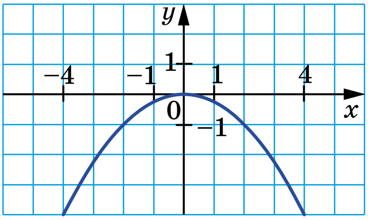
9.7.° Az $M(3; -6)$ pont illeszkedik az $y = ax^2$ függvény grafikonjára. Határozd meg a értékét!

9.8.° A $K(-5; 10)$ pont illeszkedik az $y = ax^2$ függvény grafikonjára. Határozd meg a értékét!

9.9.˙ A 9.11. ábrán az $y = ax^2$ függvény grafikonja látható. Határozd meg a értékét!



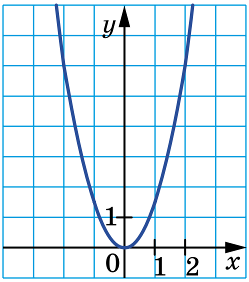
a



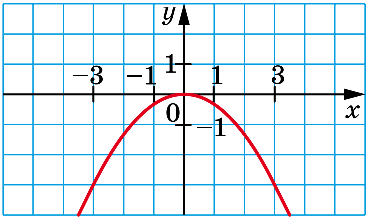
b

9.11. ábra

9.10.˙ A 9.12. ábrán az $y = ax^2$ függvény grafikonja látható. Határozd meg a értékét!



a



b

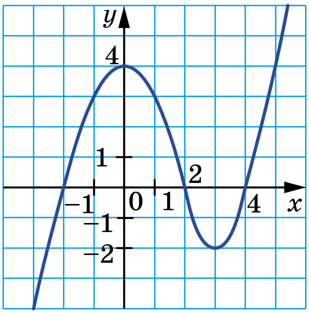
9.12. ábra

9.11.˙ A 9.13. ábrán az $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Rajzold le az alábbi függvények grafikonjait:

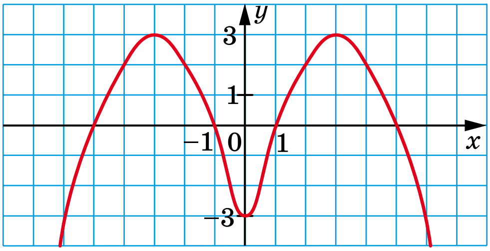
1) $y = \frac{1}{2} f(x)$; 2) $y = -f(x)$; 3) $y = -2f(x)$!

9.12.˙ A 9.14. ábrán az $y = g(x)$ függvény grafikonja látható. Rajzold le az alábbi függvények grafikonjait:

1) $y = \frac{1}{3} g(x)$; 2) $y = -\frac{1}{2} g(x)$!



9.13. ábra



9.14. ábra

9.13.˙ Rajzold le az $y = x^2$ függvény grafikonját! Ábrázold az elkészített rajz alapján az alábbi függvényeket:

1) $y = 3x^2$; 2) $y = -\frac{1}{4}x^2$!

9.14.˙ Rajzold le az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonját! Ábrázold az elkészített rajz alapján az alábbi függvényeket:

1) $y = 4\sqrt{x}$; 2) $y = -\sqrt{x}$!

9.15.˙ Igazold, hogy az $y = ax^2$, $a > 0$ függvény a $(-\infty; 0]$ intervallumon csökkenő, a $[0; +\infty)$ intervallumon pedig növekvő!

9.16.˙ Igazold, hogy az $y = ax^2$, $a < 0$ függvény a $(-\infty; 0]$ intervallumon növekvő, a $[0; +\infty)$ intervallumon pedig csökkenő!

9.17.˙ Ábrázold az $y = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \leqslant -2, \\ -2x, & \text{ha } -2 < x < 2, \\ -x^2, & \text{ha } x \geqslant 2 \end{cases}$ függvényt!

Határozd meg a rajz alapján, hol növekvő és hol csökkenő ez a függvény!

9.18.˙ Ábrázold az $y = \begin{cases} -2, & \text{ha } x < -1, \\ -2x^2, & \text{ha } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 2x^2, & \text{ha } x > 0 \end{cases}$ függvényt!

Határozd meg a rajz alapján, hol növekvő és hol csökkenő ez a függvény!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

9.19. Igazold az alábbi azonosságot:

$$\left(\frac{m-n}{m^2+mn}-\frac{m}{mn+n^2}\right):\left(\frac{n^2}{m^3-mn^2}+\frac{1}{m+n}\right)=\frac{n-m}{n}!$$

9.20. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $\sqrt{(a-b)^2}$, ha $b \geqslant a$;

2) $\sqrt{c^2+6c+9}$, ha $c \geqslant -3$;

3) $\dfrac{\sqrt{(m-5)^4}}{m^2-10m+25}$;

4) $\dfrac{x^2-2x+1}{\sqrt{(x-1)^6}}$, ha $x<1$!

9.21. 45 t rakomány elszállítását meghatározott teherbírású teherautóra tervezték. A teherautó meghibásodása miatt azonban egy olyan jármű szállította el a rakományt, melynek a teherbírása 2 t-val kevesebb. Így viszont a teherautónak a tervezetnél 6-tal többször kellett fordulnia. Határozd meg annak a teherautónak a teherbírását, amely elvégezte a munkát!

9.22. Az alábbi kifejezések az x mely értékénél veszik fel legkisebb értéküket és mekkora ez az érték:

1) $(x-6)^2+3$;

2) $(x+4)^2-5$;

3) x^2+2x-6;

4) $x^2-10x+18$?

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA

9.23. A kocka egyik lapját 10 másodperc alatt lehet kiszínezni. Legkevesebb milyen idő alatt színez ki 6 ember 101 kockát (egy kockát egyszerre két ember nem festhet?)

10. Hogyan kell ábrázolni az $y = f(x) + b$ és az $y = f(x + a)$ függvény grafikonját az $y = f(x)$ függvény grafikonjából?

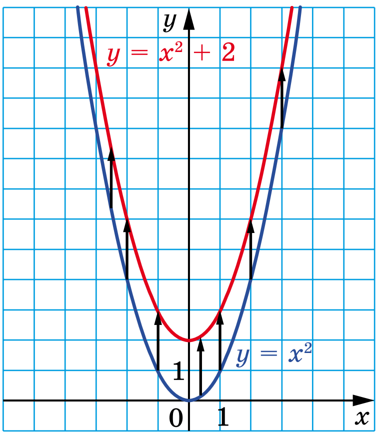
Megmutatjuk, hogy az $y = x^2 + 2$ függvény grafikonját megkaphatjuk az $y = x^2$ függvény grafikonjából.

Készítsünk értéktáblázatot mind a két függvényhez azonos argumentum értékekre!

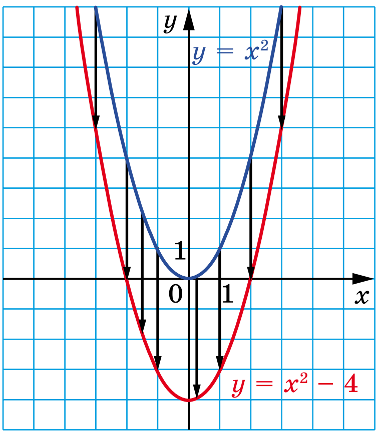
x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y = x^2$	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$y = x^2 + 2$	11	8,25	6	4,25	3	2,25	2	2,25	3	4,25	6	8,25	11

A táblázat azt szemlélteti, hogy az $y = x^2$ függvény minden $(x_0; y_0)$pontjának az $y = x^2 + 2$ függvény grafikonjának egyetlen $(x_0; y_0 + 2)$ koordinátájú pontja felel meg. Az $y = x^2 + 2$ függvény minden $(x_1; y_1)$ pontjának pedig az $y = x^2$ függvény grafikonjának egyetlen $(x_1; y_1 - 2)$ koordinátájú pontja felel meg. Tehát, az $y = x^2 + 2$ függvény grafikonjának minden pontját megkaphatjuk, ha az $y = x^2$ függvény valamennyi pontját kicseréljük ugyanolyan abszcisszájú, de kettővel nagyobb ordinátájú pontra (10.1. ábra).

Úgy is fogalmazhatunk, hogy az $y = x^2 + 2$ függvény grafikonját megkaphatjuk az $y = x^2$ függvény grafikonjából **párhuzamos eltolással**[1] az y tengely mentén 2 egységgel felfelé.



10.1. ábra



10.2. ábra

Hasonlóképpen, az $y = x^2 - 4$ függvény grafikonját megkaphatjuk az $y = x^2$ függvény grafikonjából **párhuzamos eltolással** az y tengely mentén 4 egységgel lefelé (10.2. ábra).

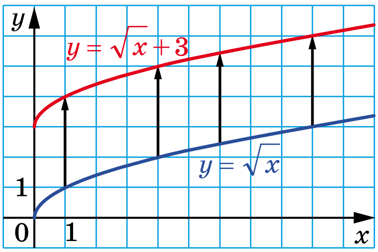
Ezek a példák az mutatják, hogy az $y = f(x) + b$ függvény grafikonja megkapható az $y = f(x)$ függvény grafikonjából.

Az $y = f(x) + b$ megkapható az $y = f(x)$ függvény grafikonjából párhuzamos eltolással az y tengely mentén b egységgel felfelé, ha $b > 0$ és lefelé, ha $b < 0$.

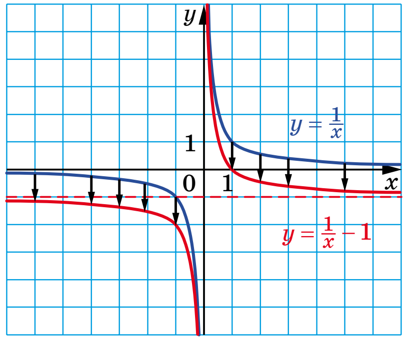
---

[1] A későbbiekben a mértanórákon részletesebben is tanuljátok majd a párhuzamos eltolást.

A 10.3. és a 10.4. ábra azt szemlélteti, hogyan alkalmazható ez a transzformáció az $y = \sqrt{x} + 3$ és $y = \frac{1}{x} - 1$ függvények ábrázolásánál.



10.3. ábra



10.4. ábra

Világos, hogy a párhuzamos eltolás esetében az eredetivel egybevágó alakzatot kapunk. Például az $y = x^2 + 2$ és az $y = x^2 - 4$ függvények grafikonjai azonosak az $y = x^2$ függvény grafikonjával. Ezért az $y = x^2 + 2$ és az $y = x^2 - 4$ függvények grafikonjai is parabolák.

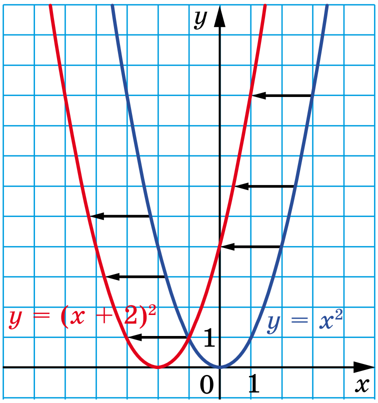
Megmutatjuk, hogyan kaphatjuk meg az $y = (x + 2)^2$ függvény grafikonját az $y = x^2$ függvény grafikonjából.

Vegyük az $(x_0; y_0)$ pontot, amely illeszkedik az $y = x^2$ függvény grafikonjára, tehát $x_0^2 = y_0$. Bebizonyítjuk, hogy ebben az esetben az $(x_0 - 2; y_0)$ koordinátájú pont illeszkedik az $y = (x + 2)^2$ függvény grafikonjára. Határozzuk meg ennek a függvénynek a helyettesítési értékét az $x_0 - 2$ helyen! Azt kapjuk, hogy $((x_0 - 2) + 2)^2 = x_0^2 = y_0$. Tehát az $y = x^2$ függvény minden $(x_0; y_0)$pontjának az $y = (x + 2)^2$ függvény grafikonjának egyetlen $(x_0 - 2; y_0)$ koordinátájú pontja felel meg. Hasonlóképpen igazolható, hogy az $y = (x + 2)^2$ függvény minden $(x_1; y_1)$ pontjának az $y = x^2$ függvény grafikonjának egyetlen $(x_1 + 2; y_1)$ koordinátájú pontja felel meg.

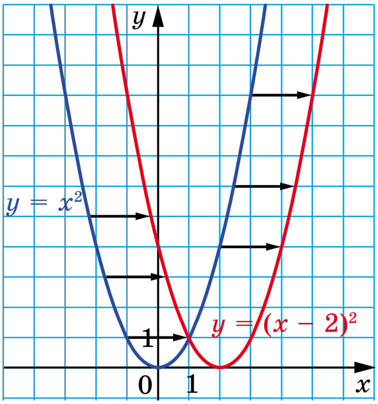
Ezért az $y = (x + 2)^2$ függvény grafikonjának minden pontját megkaphatjuk, ha az $y = x^2$ függvény grafikonjának minden pontját kicseréljük ugyanolyan ordinátájú, de kettővel kisebb abszcisszájú pontra (10.5. ábra).

Úgy is fogalmazhatunk, hogy az $y = (x + 2)^2$ függvény grafikonját megkaphatjuk az $y = x^2$ függvény grafikonjából **párhuzamos eltolással** az x tengely mentén 2 egységgel balra.

Megmutatjuk, hogyan kaphatjuk meg az $y = (x - 2)^2$ függvény grafikonját az $y = x^2$ függvény grafikonjából. Könnyen belátható (önállóan ellenőrizd le), hogy az $y = x^2$ függvény minden $(x_0; y_0)$ pontjának az $y = (x - 2)^2$ függvény grafikonjának egyetlen $(x_0 + 2; y_0)$ koordinátájú pontja felel meg, és az $y = (x - 2)^2$ függvény



10.5. ábra



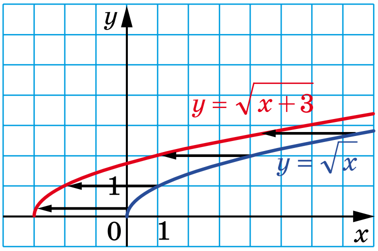
10.6. ábra

minden (x_1; y_1) pontjának az $y = x^2$ függvény grafikonjának egyetlen ($x_1 - 2$; y_1) koordinátájú pontja felel meg. Tehát, az $y = (x - 2)^2$ függvény grafikonját megkaphatjuk az $y = x^2$ függvény grafikonjából **párhuzamos eltolással** az x tengely mentén 2 egységgel jobbra (10.6. ábra).

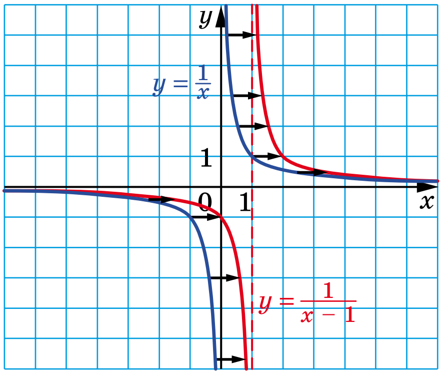
Ezek a példák az mutatják, hogy az $y = f(x + a)$ függvény grafikonja megkapható az $y = f(x)$ függvény grafikonjából.

Az y = f (x + a) megkapható az y = f (x) függvény grafikonjából párhuzamos eltolással az x tengely mentén a egységgel balra, ha a > 0 és jobbra, ha a < 0.

A 10.7. és 10.8. ábra azt szemlélteti, hogyan alkalmazható ez a transzformáció az $y = \sqrt{x+3}$ és $y = \dfrac{1}{x-1}$ függvények ábrázolásánál.



10.7. ábra



10.8. ábra

Megjegyezzük, hogy az $y = (x + 2)^2$ és $y = (x - 2)^2$ függvények grafikonjai is parabolák.

1. PÉLDA Ábrázold az $y = (x - 1)^2 + 3$ függvényt!

Megoldás. 1) Ábrázoljuk az $y = x^2$ függvény grafikonját.

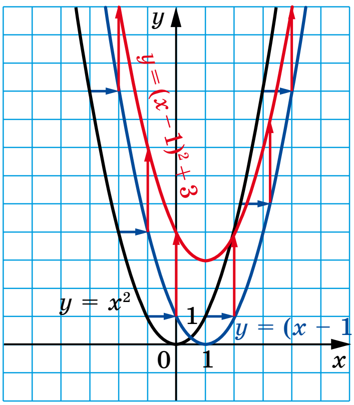
2) Az $y = x^2$ függvény grafikonját párhuzamosan eltoljuk az x tengely mentén 1 egységgel jobbra. Így megkapjuk az $y = (x - 1)^2$ függvény grafikonját (10.9. ábra).

3) Az $y = (x - 1)^2$ függvény grafikonját párhuzamosan eltoljuk az y tengely mentén 3 egységgel felfelé. Így megkapjuk az $y = (x - 1)^2 + 3$ függvény grafikonját (10.9. ábra).

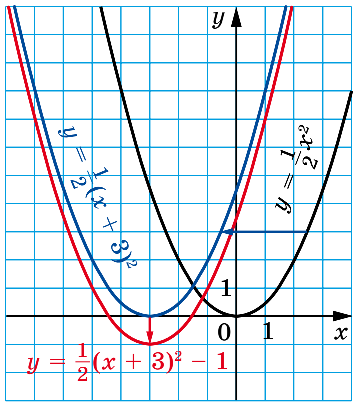
Az ábrázolás algoritmusát az alábbi séma szemlélteti:

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{1 egységgel jobbra}} y = (x - 1)^2 \xrightarrow{\text{3 egységgel felfelé}} y = (x - 1)^2 + 3$$

◄



10.9. ábra



10.10. ábra

2. PÉLDA Ábrázold az $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 1$ függvényt!

Megoldás. 1) Ábrázoljuk az $y = \frac{1}{2}x^2$ függvény grafikonját (10.10. ábra).

2) Az $y = \frac{1}{2}x^2$ függvény grafikonját párhuzamosan eltoljuk az x tengely mentén 3 egységgel balra. Így megkapjuk az $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$ függvény grafikonját (10.10. ábra).

3) Az $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$ függvény grafikonját párhuzamosan eltoljuk az y tengely mentén 1 egységgel lefelé. Így megkapjuk a keresett függvény grafikonját (10.10. ábra).

Az ábrázolás algoritmusát az alábbi séma szemlélteti:

$$y=\frac{1}{2}x^2 \xrightarrow[\text{balra}]{\text{3 egységgel}} y=\frac{1}{2}(x+3)^2 \xrightarrow[\text{lefelé}]{\text{1 egységgel}} y=\frac{1}{2}(x+3)^2-1$$

Az áttekintett transzformációk alapján megállapíthatjuk, hogy az $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-1$ függvény grafikonja megegyezik az $y=\frac{1}{2}x^2$ függvény grafikonjával és a csúcsa a (–3; –1) koordinátájú pont. ◀

Ebből a példából könnyen megérthető az az algoritmus, ahogyan az $y = kf(x + a) + b$ függvényt ábrázoljuk, és többek között az $y = k(x + a)^2 + b$ függvényt is.

Az $y = k(x + a)^2 + b$, $k \neq 0$ függvény grafikonja parabola, mégpedig olyan, mint az $y = kx^2$ függvényé, a csúcsa pedig a (–a; b) koordinátájú pont.

3. PÉLDA Ábrázoljuk az $y = –2x^2 – 20x – 47$ függvényt!

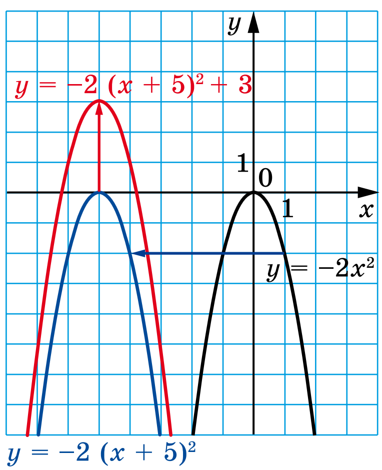
Megoldás. Végezzünk algebrai átalakítást: $y = –2x^2 – 20x – 47 = –2x^2 – 20x – 50 + 3 = –2(x + 5)^2 + 3$.

A kapott képlet az $y = kf(x + a) + b$ alakban adja meg az adott hozzárendelési szabályt, ahol $f(x) = x^2$, $k = –2$, $a = 5$, $b = 3$.

Az ábrázolás algoritmusa:

$$y=-2x^2 \xrightarrow[\text{balra}]{\text{5 egységgel}} y=-2(x+5)^2 \xrightarrow[\text{felfelé}]{\text{3 egységgel}} y=-2(x+5)^2+3$$

Az ábrázolandó grafikon az $y = –2x^2$ parabola, melynek csúcsa a (–5; 3) koordinátájú pont (10.11. ábra). ◀



10.11. ábra

1. Hogyan kaphatjuk meg az $y = f(x) + b$ függvény grafikonját az $y = f(x)$ függvény grafikonjából?

2. Mi az $y = x^2 + b$ függvény grafikonja?

3. Melyek az $y = x^2 + b$ parabola csúcsának a koordinátái?

4. Hogyan kaphatjuk meg az $y = f(x + a)$ függvény grafikonját az $y = f(x)$ függvény grafikonjából?

5. Mi az $y = (x + a)^2$ függvény grafikonja?

6. Melyek az $y = (x + a)^2$ parabola csúcsának a koordinátái?

7. Mi az $y = k(x + a)^2 + b$, $k \neq 0$ függvény grafikonja?

8. Melyek az $y = k(x + a)^2 + b$ parabola csúcsának a koordinátái?

GYAKORLATOK

10.1.° Melyik függvény grafikonját kapjuk meg, ha az $y = x^2$ függvény grafikonját párhuzamosan eltoljuk:

1) az y tengely mentén 6 egységgel felfelé;
2) az x tengely mentén 9 egységgel jobbra;
3) az y tengely mentén 12 egységgel lefelé;
4) az x tengely mentén 7 egységgel balra;
5) az x tengely mentén 2 egységgel jobbra és 3 egységgel lefelé az y tengely mentén;
6) az x tengely mentén 1 egységgel balra és 1 egységgel felfelé az y tengely mentén?

10.2.° Az alábbi függvények közül melyik függvény grafikonját kapjuk meg az $y = x^2$ függvény grafikonjának párhuzamos eltolásával az x tengely mentén 4 egységgel jobbra:

1) $y = x^2 + 4$; 2) $y = x^2 - 4$; 3) $y = (x + 4)^2$; 4) $y = (x - 4)^2$?

10.3.° Az alábbi függvények közül melyik függvény grafikonját kapjuk meg az $y = x^2$ függvény grafikonjának párhuzamos eltolásával az y tengely mentén 5 egységgel felfelé:

1) $y = x^2 + 5$; 2) $y = x^2 - 5$; 3) $y = (x + 5)^2$; 4) $y = (x - 5)^2$?

10.4.° Melyek az alábbi függvények csúcsainak koordinátái:

1) $y = x^2 + 8$;
2) $y = x^2 - 8$;
3) $y = (x + 8)^2$;
4) $y = (x - 8)^2$;
5) $y = (x - 4)^2 + 3$;
6) $y = (x + 4)^2 + 3$;
7) $y = (x - 4)^2 - 3$;
8) $y = (x + 4)^2 - 3$?

10.5.° Melyik síknegyedhez tartoznak az alábbi parabolák csúcspontjai:

1) $y = (x + 10)^2 - 16$;
2) $y = (x - 11)^2 + 15$;
3) $y = (x + 15)^2 + 4$;
4) $y = (x - 11)^2 - 9$?

10.6.° Milyen transzformációval kaphatjuk meg az $y = \frac{5}{x}$ függvény grafikonjából az $y = \frac{5}{x-8}$ függvény grafikonját:

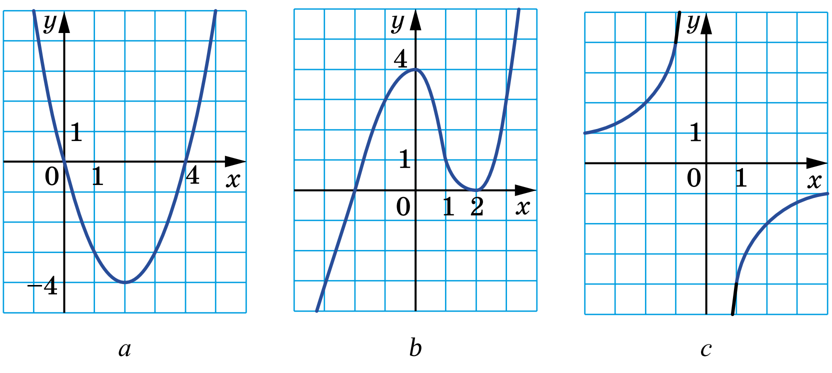
1) párhuzamos eltolással az ordinátatengely mentén 8 egységgel felfelé;
2) párhuzamos eltolással az ordinátatengely mentén 8 egységgel lefelé;
3) párhuzamos eltolással az abszcisszatengely mentén 8 egységgel jobbra;
4) párhuzamos eltolással az abszcisszatengely mentén 8 egységgel balra?

10.7.° Milyen transzformációval kaphatjuk meg az $y = \sqrt{x}$, függvény grafikonjából az $y = \sqrt{x+3}$ függvény grafikonját:

1) párhuzamos eltolással az ordinátatengely mentén 3 egységgel felfelé;
2) párhuzamos eltolással az ordinátatengely mentén 3 egységgel lefelé;
3) párhuzamos eltolással az abszcisszatengely mentén 3 egységgel jobbra;
4) párhuzamos eltolással az abszcisszatengely mentén 3 egységgel balra?\

10.8.˙ A 10.12. ábrán az $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Ábrázold az alábbi függvényeket:

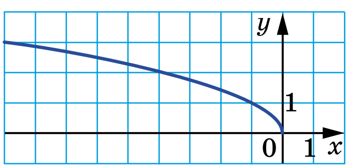
1) $y = f(x) - 2$;
2) $y = f(x) + 4$;
3) $y = f(x - 3)$;
4) $y = f(x + 1)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = 3 - f(x)$!



10.12. ábra

10.9.˙ A 10.13. ábrán az $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Ábrázold az alábbi függvényeket:

1) $y = f(x) + 5$;
2) $y = f(x) - 3$;
3) $y = f(x + 1)$;
4) $y = f(x - 2)$;
5) $y = -f(x)$;
6) $y = -f(x) - 1$!



10.13. ábra

10.10.˙ Ábrázold az $y = x^2$ függvényt! Ábrázold a megrajzolt grafikon alapján a következő függvényeket:

1) $y = x^2 - 3$; 3) $y = (x - 5)^2$; 5) $y = (x - 1)^2 + 2$;

2) $y = x^2 + 4$; 4) $y = (x + 2)^2$; 6) $y = (x + 3)^2 - 2$!

10.11.˙ Ábrázold az $y = -x^2$ függvényt! Ábrázold a megrajzolt grafikon alapján a következő függvényeket:

1) $y = -x^2 + 1$; 3) $y = -(x - 2)^2$; 5) $y = -(x + 1)^2 - 1$;

2) $y = -x^2 - 2$; 4) $y = -(x + 4)^2$; 6) $y = -(x - 3)^2 + 4$!

10.12.˙ Ábrázold az $y = -\frac{6}{x}$ függvényt! Ábrázold a megrajzolt grafikon alapján a következő függvényeket:

1) $y = -\frac{6}{x} + 5$; 2) $y = -\frac{6}{x - 2}$; 3) $y = -\frac{6}{x + 4} - 2$!

10.13.˙ Ábrázold az $y = \frac{2}{x}$ függvényt! Ábrázold a megrajzolt grafikon alapján a következő függvényeket:

1) $y = \frac{2}{x} - 1$; 2) $y = \frac{2}{x + 1}$; 3) $y = \frac{2}{x - 3} + 6$!

10.14.˙ Ábrázold az $y = \sqrt{x}$ függvényt! Ábrázold a megrajzolt grafikon alapján a következő függvényeket:

1) $y = \sqrt{x} - 4$; 2) $y = \sqrt{x - 4}$; 3) $y = \sqrt{x - 1} + 3$!

10.15.˙ Ábrázold az $y = (x + 5)^2 - 9$ függvényt! Olvasd le a grafikonról:

1) a függvény zérushelyeit;

2) azon argumentumértékeket, melyek helyén a függvényérték pozitív;

3) melyik intervallumon növekvő, és melyik intervallumon csökkenő a függvény;

4) a függvény értékkészletét!

10.16.˙ Ábrázold az $y = (x - 4)^2 + 4$ függvényt! Olvasd le a grafikonról:

1) a függvény zérushelyeit;

2) azon argumentumértékeket, melyek helyén a függvényérték negatív;

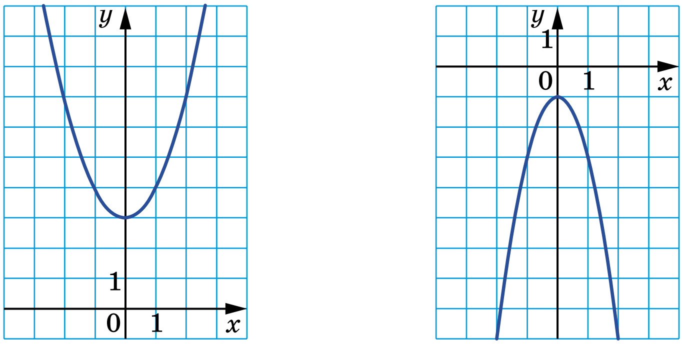
3) melyik intervallumon növekvő, és melyik intervallumon csökkenő a függvény;

4) a függvény értékkészletét!

10.17.˙ Add meg a 10.14. ábrán látható függvényt az $y = ax^2 + n$ alakú képlettel!

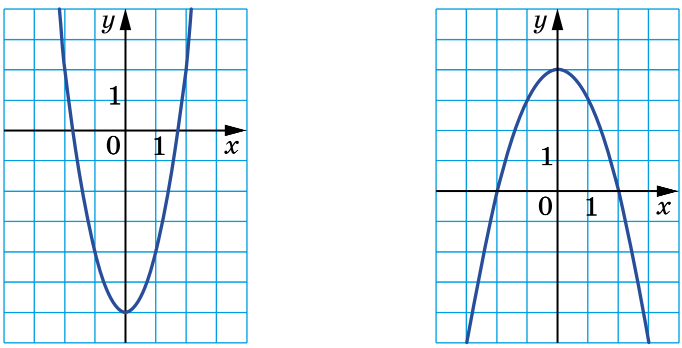
10.18.˙ Add meg a 10.15. ábrán látható függvényt az $y = ax^2 + n$ alakú képlettel!

10.19.˙ Add meg a 10.16. ábrán látható függvényt az $y = a(x + m)^2$ alakú képlettel!



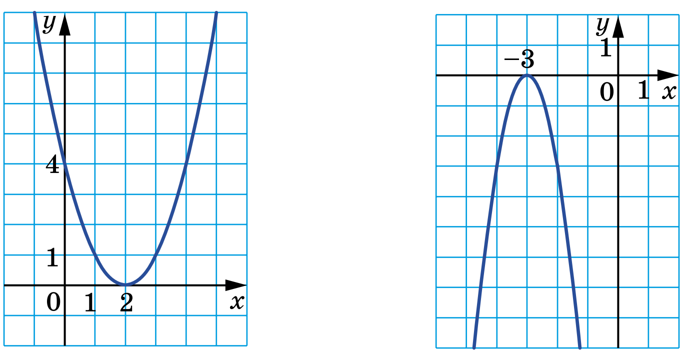
a *b*

10.14. ábra



a *b*

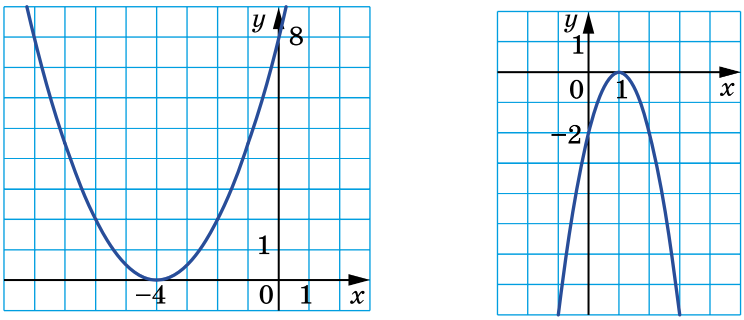
10.15. ábra



a *b*

10.16. ábra

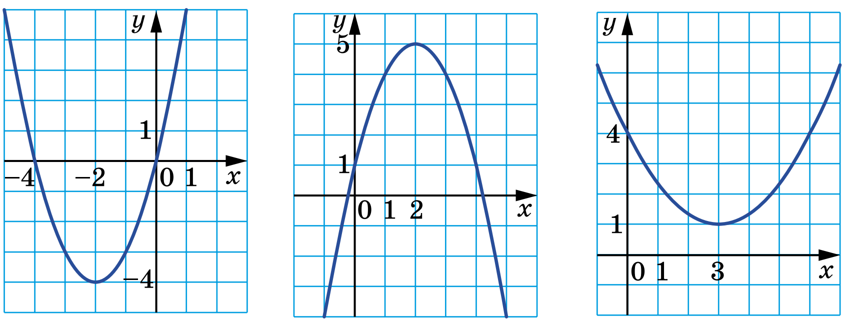
10.20.˙ Add meg a 10.17. ábrán látható függvényt az $y = a(x + m)^2$ alakú képlettel!



a *b*

10.17. ábra

10.21.˙ Add meg a 10.18. ábrán látható függvényt az $y = a(x + m)^2 + n$ alakú képlettel!



a *b* *c*

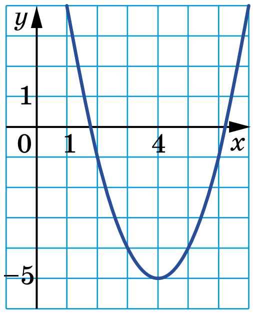
10.18. ábra

10.22.˙ Add meg a 10.19. ábrán látható függvényt az $y = a(x + m)^2 + n$ alakú képlettel!

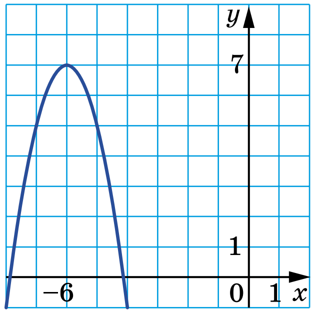
10.23.˙Oldd meg grafikusan az alábbi egyenleteket:

1) $(x-1)^2 = \frac{2}{x}$; 2) $1 - x^2 = \sqrt{x} - 1$!

10.24.˙ Oldd meg grafikusan a $\frac{3}{x} = \sqrt{x} + 2$ egyenletet!



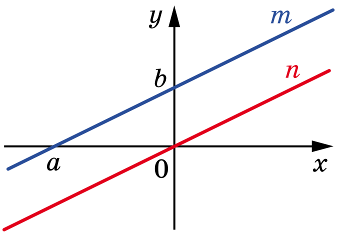
a



b

10.19. ábra

10.25.˙ A 10.20. ábrán két párhuzamos m és n egyenes látható. Az n egyenes az $y = f(x)$ függvény grafikonja. Az alábbi állítások közül melyik igaz:
1) az m egyenes az $y = f(x) + b$ függvény grafikonja;
2) az m egyenes az $y = f(x - a)$ függvény grafikonja?



10.20. ábra

10.26.¨ Add meg az alábbi függvények hozzárendelési szabályait $y = a(x - m)^2 + n$ alakban, majd ábrázold őket az $y = ax^2$ függvény grafikonjának transzformálásával:
1) $y = x^2 - 4x + 6$;
2) $y = -x^2 + 6x - 6$;
3) $y = 2x^2 - 4x + 5$;
4) $y = 0{,}2x^2 - 2x - 4$!

10.27.¨ Add meg az alábbi függvények hozzárendelési szabályait $y = a(x - m)^2 + n$ alakban, majd ábrázold őket az $y = ax^2$ függvény grafikonjának transzformálásával:
1) $y = x^2 - 2x - 8$;
2) $y = -2x^2 + 8x - 3$!

10.28.$^{\cdot\cdot}$ Add meg az alábbi függvények hozzárendelési szabályait $y = \frac{k}{x+a} + b$ alakban, majd ábrázold őket az $y = \frac{k}{x}$ függvény grafikonjának transzformálásával:

1) $y = \frac{3x+8}{x}$; 2) $y = \frac{2x+14}{x+3}$; 3) $y = \frac{-2x}{x-1}$!

10.29.$^{\cdot\cdot}$ Add meg az alábbi függvények hozzárendelési szabályait $y = \frac{k}{x+a} + b$ alakban, majd ábrázold őket az $y = \frac{k}{x}$ függvény grafikonjának transzformálásával:

1) $y = \frac{4x+14}{x+1}$; 2) $y = \frac{7-x}{x-2}$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

10.30. Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket:

1) $\frac{5a-3}{8a} + \frac{a+9}{4a}$;

2) $\frac{5a-6b}{ab} + \frac{5b-5c}{bc}$;

3) $\frac{8a+5b}{5ab^2} - \frac{2a-7b}{2a^2b}$;

4) $\frac{m^2+4n^2}{8m^4n^4} - \frac{3m+4n}{6m^5n^2}$!

10.31. Egyszerűsítsd az alábbi törtet:

1) $\frac{9+\sqrt{m}}{m-81}$;

2) $\frac{\sqrt{27}+\sqrt{45}}{\sqrt{18}+\sqrt{30}}$;

3) $\frac{\sqrt{5m}+\sqrt{7n}}{5m+2\sqrt{35mn}+7n}$;

4) $\frac{25m+10n\sqrt{3m}+3n^2}{5\sqrt{m}+n\sqrt{3}}$!

10.32. Egy közönséges tört számlálója 1-gyel kisebb a nevezőjénél. Ha a tört számlálóját és nevezőjét 1-gyel csökkentjük, akkor a tört értéke $\frac{1}{12}$-del csökken. Határozd meg ezt a törtet!

10.33. Bizonyítsd be, hogy pozitív a és b értékekre igaz az $a^3 + b^3 \geqslant a^2b + ab^2$ egyenlőtlenség!

11. A másodfokú függvény, annak grafikonja és tulajdonságai

Meghatározás: ***Az $y = ax^2 + bx + c$ képlettel megadott függvényt, ahol a, b és c valós szám , x az argumentum, $a \neq 0$, másodfokú függvénynek nevezzük.***

A másodfokú függvénnyel eddigi tanulmányaid során már találkoztál. A 8. osztályban tanultátok az egyik részesetét, mégpedig az $y = x^2$ függvényt. A körlap S területe függ az r sugarától, melyet az $S(r) = \pi r^2$ másodfokú függvénnyel adhatunk meg. Ez a függvény az $y = ax^2$ függvényekhez tartozik, amelyeket a 9. fejezetben tárgyaltunk.

A fizikaórákon tanultátok a $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ képletet, amely a függőlegesen feldobott test magasságát fejezi ki a kezdeti sebesség és az idő függvényében. Ez a képlet is egy másodfokú függvényt add meg a $h(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ hozzárendelési szabállyal.

Megmutatjuk, hogyan lehet megkapni az $y = ax^2 + bx + c$ függvény grafikonját az $y = ax^2$ függvény grafikonjából.

Már ábrázoltátok az $y = ax^2 + bx + c$ függvényt teljes négyzetté alakítással (3. példa a 10. fejezetben). Alkalmazzuk ezt az eljárást az általános alakra is. Azt kapjuk, hogy

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

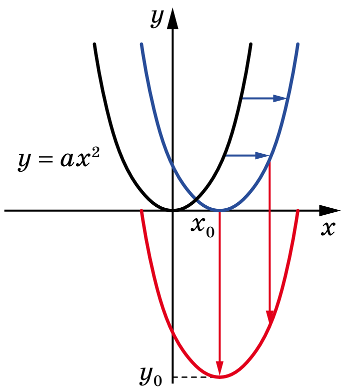
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Vezessük be a következő jelöléseket: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

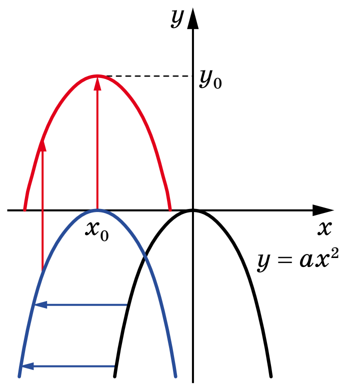
A bevezetett jelölésekkel az $y = ax^2 + bx + c$ kifejezés leírható az $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ alakban.

Így az alábbi algoritmussal ábrázolható az általános alakban megadott másodfokú függvény:

$$y = ax^2 \xrightarrow{|x_0|\text{ egységgel jobbra vagy balra}} y = a(x - x_0)^2 \xrightarrow{|y_0|\text{ egységgel fel vagy le}} y = a(x - x_0)^2 + y_0$$



11.1. ábra



11.2. ábra

A 11.1. ábrán látható, hogyan kell ábrázolni a függvényt, ha $a > 0$, $x_0 > 0$ és $y_0 < 0$. A 11.2. ábrán pedig az $a < 0$, $x_0 < 0$ és $y_0 > 0$ részeset van szemléltetve.

Levonhatjuk a következtetést, hogy az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonja parabola, amely megegyezik az $y = ax^2$ függvény grafikonjával, csúcsa pedig az $(x_0; y_0)$ koordinátájú pont, ahol $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

A parabola szárai, úgyanúgy, mint az $y = ax^2$ paraboláé, felfelé mutatnak, ha $a > 0$ és lefelé mutatnak, ha $a < 0$.

A másodfokú függvény grafikonja vázlatosan ábrázolható a csúcsa és ágai irányainak alapján. A grafikon annál pontosabb lesz, minél több grafikonra illeszkedő pontot tüntetünk fel. Tehát a másodfokú függvényt nemcsak függvénytranszformációs lépésekkel lehet ábrázolni, hanem az alábbi algoritmus szerint is:

az $x_0 = -\frac{b}{2a}$ *képlettel meghatározzuk a parabola csúcsának abszcisszáját;*

az $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$ *képlettel*[1] *meghatározzuk a parabola csúcsának ordinátáját, ahol D az* $ax^2 + bx + c$ *másodfokú polinom gyöke, majd koordinátarendszerben feltüntetjük a parabola csúcsát;*

---

[1] Az $y_0 = \frac{D}{4a}$ képletet nem fontos megtanulni. Elegendő meghatározni az $y = ax^2 + bx + c$ függvény helyettesítési értékét az $x_0 = -\frac{b}{2a}$ helyen.

meghatározzuk a parabola szárainak irányát;

meghatározunk még néhány olyan pontot, melyek illeszkednek a grafikonra, például a parabola és az abszcisszatengely metszéspontjait (ha a függvénynek vannak zérushelyei), vagy a parabola és az ordinátatengely metszéspontjának koordinátáit; feltüntetjük ezeket a pontokat a koordinátarendszeren;

folytonos vonallal összekötjük a feltüntetett pontokat.

1. PÉLDA Ábrázoljuk az $f(x) = x^2 + 4x - 5$ függvényt! Olvad le a rajzról a függvény értékkészletét, mely intervallumon növekvő és melyen csökkenő, melyen állandó előjelű, keresd meg a legnagyobb és a legkisebb értékét!

Megoldás. Ez egy másodfokú függvény. Grafikonja olyan parabola, melynek a szárai felfelé mutatnak.

Határozzuk meg a parabola csúcsának abszcisszáját és ordinátáját.

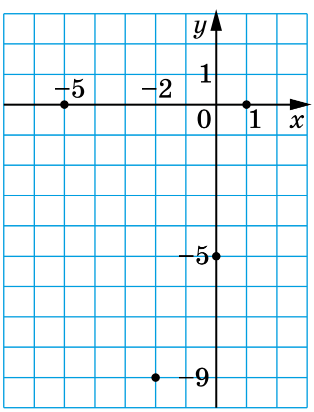
Az abszcissza $x_0 = -\frac{4}{2} = -2,$ az ordináta $y_0 = f(x_0) = f(-2) = -9.$

Tehát a (–2; –9) koordinátájú pont a parabola csúcsa.

Határozzuk meg a parabola és az abszcisszatengely metszéspontjainak koordinátáit! Ehhez meg kell oldanunk az $x^2 + 4x - 5 = 0$ egyenletet.

Innen $x_1 = -5$ *és* $x_2 = 1$.

Tehát a parabola a (–5; 0) és az (1; 0) pontokban metszi az abszcisszatengelyt.



11.3. ábra

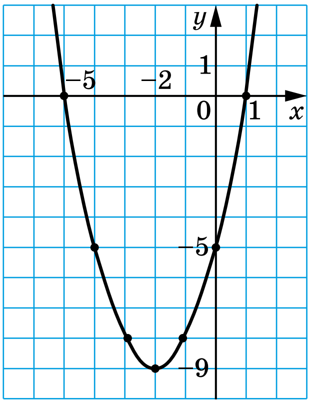
Határozzuk meg a parabola és az ordinátatengely metszéspontját! Az eredmény: $f(0) = -5$. A parabola a (0; –5) pontban metszi az ordinátatengelyt.

Vegyük fel ezt a négy pontot koordinátarendszerben (11.3. ábra)!

Láthatjuk, hogy célszerű kiszámolni a függvény helyettesítési értékeit a –1, –3 és –4 helyeken.

Azt kapjuk, hogy $f(-3) = f(-1) = -8$; $f(-4) = -5$.

A felvett pontokat folytonos vonallal kötjük össze.



11.4. ábra

Az adott függvény grafikonja a 11.4. ábrán látható.

A függvény értékkészlete az $E(f) = [-9; +\infty)$ intervallum.

A függvény a $[-2; +\infty)$ intervallumom növekvő, a $(-\infty; -2]$ intervallumon pedig csökkenő.

Azt kapjuk, hogy $f(x) > 0$ a $(-\infty; -5)$ és $(1; +\infty)$ intervallumokon és $f(x) < 0$ a $(-5; 1)$ intervallumon.

A függvény legkisebb értéke –9, legnagyobb értéket nem vesz fel. ◄

?

1. Mit nevezünk másodfokú függvénynek?
2. Mi a másodfokú függvény grafikonja?
3. Milyen képlettel lehet kiszámítani az $y = ax^2 + bx + c$ parabola csúcsának abszcisszáját?
4. Merre mutatnak az $y = ax^2 + bx + c$ parabola szárai az a értékétől függően?
5. Mondd el, hogyan ábrázoljuk a másodfokú függvényt!

GYAKORLATOK

11.1.° Az alábbi függvények közül melyek másodfokúak:

1) $y = 4x^2 + 3x + 6$;
2) $y = 4x + 3$;
3) $y = \dfrac{1}{2x^2 - 3x + 2}$;
4) $y = 6x^2 - 5x$?

11.2.° Határozd meg az $f(x) = 5x^2 - 7x + 2$ függvény helyettesítési értékeit az 1; –2; 4 argumentum helyén!

11.3.° Adott az $f(x) = x^2 - 2x - 15$ függvény. Határozd meg az x argumentum azon értékét, amelynél a függvényérték:

1) $f(x) = 0$; 2) $f(x) = -7$; 3) $f(x) = 33$!

11.4.° Az $y = -6x^2 + x + c$ függvény az ordinátatengelyt az M (0; –8) pontban metszi. Határozd meg a c értékét!

11.5.° Merre mutatnak az alábbi parabolák szárai:

1) $y = x^2 - 12x + 3$;
2) $y = -x^2 + 4x - 6$;
3) $y = 0,3x^2 + 2,4x - 5$;
4) $y = -5x^2 + 10x + 2$?

11.6.° Ábrázold az alábbi függvényeket:

1) $y = x^2 - 4x - 5$;
2) $y = -x^2 + 2x + 3$;
3) $y = 6x - x^2$;
4) $y = 2x^2 - 8x + 8$;
5) $y = x^2 - 2x + 4$;
6) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4$;
7) $y = x^2 - 6x + 5$;
8) $y = 2x^2 - 5x + 2$!

11.7.° Ábrázold az alábbi függvényeket:

1) $y = x^2 + 2x - 8$;
2) $y = x^2 - 2x$;
3) $y = -x^2 + 4x - 5$;
4) $y = 2x^2 - 2x - 4$!

11.8.• Ábrázold az $f(x) = x^2 - 6x - 8$ függvényt! Olvasd le a grafikonról:

1) $f(6)$; $f(1)$;

2) azon x értékeket, melyekre $f(x) = 8$; $f(x) = -1$; $f(x) = -2$;

3) a függvény legnagyobb és legkisebb értékét;

4) a függvény értékkészletét;

5) melyik intervallumon növekvő, és melyik intervallumon csökkenő a függvény;

6) azon argumentumértékeket, amelyekre a függvény pozitív értéket vesz fel, és azokat, amelyekre negatív értéket vesz fel!

11.9.• Ábrázold az $f(x) = -x^2 - 6x - 5$ függvényt! Olvasd le a grafikonról:

1) a függvény értékkészletét;

2) melyik intervallumon növekvő a függvény;

3) az $f(x) > 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát!

11.10.• Ábrázold az $f(x) = x - 0,5x^2$ függvényt! Olvasd le a grafikonról:

1) a függvény értékkészletét;

2) melyik intervallumon növekvő a függvény;

3) azon x értékek halmazát, melyre igaz az $f(x) \leqslant 0$ egyenlőtlenség!

11.11.˙ Ábrázold az $f(x) = 3x^2 - 6x$ függvényt! Olvasd le a grafikonról:
1) a függvény értékkészletét;
2) melyik intervallumon csökkenő a függvény;
3) azon x értékek halmazát, melyre igaz az $f(x) \geqslant 0$ egyenlőtlenség!

11.12.˙ Oldd meg grafikusan az $x^2 - 3x - 1 = -\frac{3}{x}$ egyenletet!

11.13.˙ Oldd meg grafikusan a $-\frac{1}{4}x^2 + x + 2 = \sqrt{x}$ egyenletet!

11.14.˙ Ábrázold közös koordináta-rendszerben az $y = f(x)$ és $y = g(x)$ függvényeket! Határozd meg, hány gyöke van az $f(x) = g(x)$ egyenletnek:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 7$, $g(x) = -\sqrt{x}$;

2) $f(x) = 4x - 2x^2$, $g(x) = -\frac{4}{x}$!

11.15.˙ Ábrázold közös koordináta-rendszerben az $y = x^2 + 4x + 1$ és $y = \frac{6}{x}$ függvényeket! Határozd meg, hány gyöke van az $x^2 + 4x + 1 = \frac{6}{x}$ egyenletnek!

11.16.˙ Határozd meg az $y = -x^2 + 9x + 9$ függvény azon pontját, melynek:
1) az abszcisszája és az ordinátája egyenlő;
2) az abszcisszájának és az ordinátájának összege 25!

11.17.˙ Határozd meg az $y = 2x^2 - 3x + 6$ függvény azon pontját, melynek ordinátája 12-vel több az ordinátájánál!

11.18.˙ Határozd meg az alábbi függvények értékkészletét, melyik intervallumon növekvő és melyiken csökkenő:

1) $f(x) = 4x^2 - 8x + 3$;
2) $f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 2x - 6$;
3) $f(x) = 4 - 12x - 0{,}3x^2$;
4) $f(x) = 7x^2 + 21x$!

11.19.˙ Határozd meg az alábbi függvények értékkészletét, melyik intervallumon növekvő, és melyiken csökkenő:

1) $f(x) = 2x^2 - 12x + 8$;
2) $f(x) = 9 + 8x - 0{,}2x^2$!

11.20.˙ Ábrázold az $y = \begin{cases} 3 - x, & \text{ha} \quad x \leqslant -2, \\ x^2 - 2x - 3, & \text{ha} \quad -2 < x < 2, \\ -3, & \text{ha} \quad x \geqslant 2 \end{cases}$ függvényt és határozd meg értékkészletét, illetve melyik intervallumon növekvő és melyiken csökkenő!

11.21.• Ábrázold az $y = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \leqslant 0, \\ 4x - x^2, & \text{ha} \quad 0 < x < 5, \\ x - 10, & \text{ha} \quad x \geqslant 5 \end{cases}$ függvényt és határozd meg értékkészletét, illetve melyik intervallumon növekvő és melyiken csökkenő!

11.22.• Adj meg képlettel egy olyan másodfokú függvényt, amely:
1) a $(-\infty; 1]$ intervallumon csökkenő és az $[1; +\infty)$ intervallumon növekvő;
2) a $(-\infty; -2]$ intervallumon növekvő és a $[-2; +\infty)$ intervallumon csökkenő!

11.23.• Határozd meg az $y = 3x^2 - 18x + 2$ függvény legkisebb értékét az adott intervallumon:

1) $[-1; 4]$; 2) $[-4; 1]$; 3) $[4; 5]$!

11.24.• Határozd meg az $y = -x^2 - 8x + 10$ függvény legnagyobb értékét az adott intervallumon:

1) $[-5; -3]$; 2) $[-1; 0]$; 3) $[-11; -10]$!

11.25.• Melyik p és q értékeknél illeszkedik az $M(-1; 4)$ és $K(2; 10)$ pont az $y = x^2 + px + q$ függvény grafikonjára?

11.26.• Melyik a és b értékeknél lesznek az $y = ax^2 + bx + 7$ függvény zérushelyei a -2 és 3?

11.27.• Melyik a és b értékeknél illeszkedik a $C(-3; 8)$ és $D(1; 4)$ pont az $y = ax^2 + bx - 4$ függvény grafikonjára?

11.28.• Legyen D az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom diszkriminánsa. Ábrázold vázlatosan az $y = ax^2 + bx + c$ függvényt, ha:

1) $a > 0,\ D > 0,\ c > 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$;

2) $a > 0,\ D = 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$;

3) $a < 0,\ D < 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$;

4) $a < 0,\ c = 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$!

11.29.• Legyen D az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom diszkriminánsa. Ábrázold vázlatosan az $y = ax^2 + bx + c$ függvényt, ha:

1) $a > 0,\ D < 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$;

2) $a < 0,\ D > 0,\ c < 0,\ -\frac{b}{2a} > 0$;

3) $a < 0,\ D = 0,\ -\frac{b}{2a} < 0$!

11.30.˙ A b mely értékénél lesz az $y = -4x^2 - bx + 5$ függvény növekvő a $(-\infty; 2]$ intervallumon?

11.31.˙ A b mely értékénél lesz az $y = 3x^2 + bx - 8$ függvény csökkenő a $(-\infty; -3]$ intervallumon?

11.32.˙ Az a mely értékénél lesz az $y = ax^2 + (a-2)x + \frac{1}{4}$ függvény másodfokú, és mikor lesz a függvény grafikonjának és az abszcisszatengelynek csak egy közös pontja?

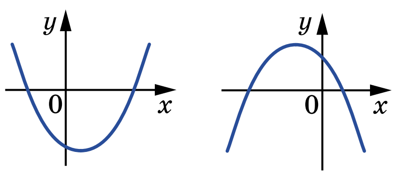
11.33.¨ Az a mely értékénél vesz fel az $y = 0{,}5x^2 - 3x + a$ függvény nemnegatív értékét bármely valós x-re?

11.34.¨ Az a mely értékénél vesz fel az $y = -4x^2 - 16x + a$ függvény negatív értékét bármely valós x-re?

11.35.¨ A c mely értékénél lesz az $y = -5x^2 + 10x + c$ függvény legnagyobb értéke -3?

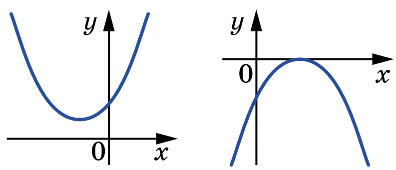
11.36.¨ A c mely értékénél lesz az $y = 0{,}6x^2 - 6x + c$ függvény legkisebb értéke -1?

11.37.¨ A 11.5. ábrán az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonja látható. Állapítsd meg az a, b és c együtthatók előjeleit!



a *b*

11.5. ábra



c *d*

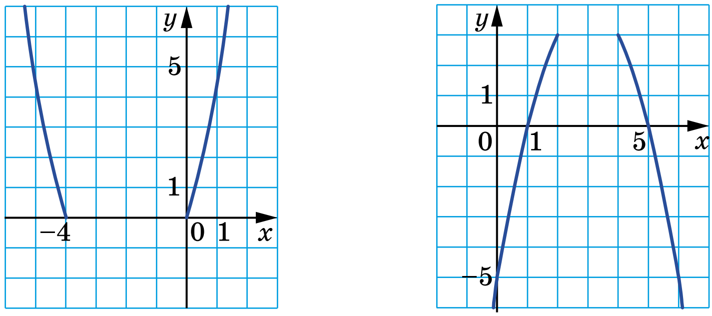
11.6. ábra

11.38.¨ A 11.6. ábrán az $y = ax^2 + bx + c$ függvény grafikonja látható. Állapítsd meg az a, b és c együtthatók előjeleit!

11.39.¨ Melyik p és q értékeknél lesz az $y = x^2 + px + q$ parabola csúcsa az A (2; 5) pont?

11.40.¨ Az $y = ax^2 + bx + c$ parabola csúcsa a C (4; -10) pont. A D (1; -1) pont illeszkedik erre a parabolára. Határozd meg az a, b és c együtthatókat!

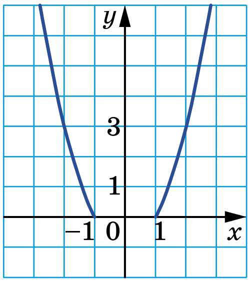
11.41.¨ Határozd meg a 11.7. ábrán látható parabolarészletből a parabola csúcsának ordinátáját!



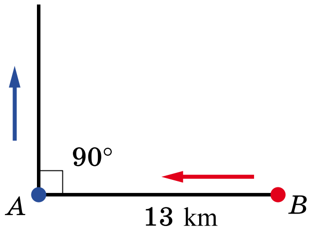
a *b*

11.7. ábra

11.42.˙˙ Határozd meg a 11.8. ábrán látható parabolarészletből a parabola csúcsának ordinátáját!



11.8. ábra



11.9. ábra

11.43.˙˙ Két szám összege 10. Határozd meg:

1) mekkora lehet a két szám szorzatának a legnagyobb (maximális) értéke;

2) mekkora lehet ezen számok négyzetei összegének a legkisebb (minimális) értéke!

11.44.˙˙ A *B* városból az *A* városba, melyek között a távolság 13 km, 6 km/h sebességgel elindult egy turista. Ugyanakkor az *A* városból egy másik turista is elindult 4 km/h sebességgel az előző turista útirányára merőlegesen (11.9. ábra). Mikor lesz a két turista között minimális a távolság?

11.45.¨ Mekkora lehet a legnagyobb területe annak a téglalap alakú földrészlegnek, amelyet 160 m kerítéssel vettek körül?

11.46.¨ Ábrázold az alábbi függvényeket:

1) $y = \dfrac{8x + 2x^2 - x^3}{x}$;

2) $y = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} - 3$;

3) $y = \dfrac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$;

4) $y = \dfrac{x^4 + 4x^2 - 5}{x^2 - 1}$!

11.47.¨ Ábrázold az alábbi függvényeket:

1) $y = \dfrac{(x+3)^3}{x+3}$;

2) $y = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x}$;

3) $y = \dfrac{x^4 - 1}{1 - x^2}$!

11.48.¨ Ábrázold az alábbi függvényeket:

1) $y = x\,|\,x\,|$;

2) $y = \dfrac{x}{|\,x\,|}(x^2 - x - 6)$;

3) $y = x^2 - 4\,|\,x\,| + 3$;

4) $y = x^2 + 3x \cdot \dfrac{|\,x-3\,|}{x-3} - 4$!

11.49.¨ Ábrázold az alábbi függvényeket:

1) $y = \dfrac{x^3}{|\,x\,|} + 4x$;

2) $y = 6\,|\,x\,| - x^2$!

11.50.¨ Ábrázold az $y = x^2 + 2x - 3$ függvényt! Állapítsd meg a rajzról, az a mely értékeire lesz az $x^2 + 2x - 3 = a$ egyenletnek:

1) két gyöke; 2) egy gyöke; 3) nincs gyöke!

11.51.¨ Ábrázold az $y = -x^2 - 4x + 5$ függvényt! Állapítsd meg a rajzról, hány gyöke van a $-x^2 - 4x + 5 = a$ egyenletnek a különböző értékeire!

11.52.* x_1 és x_2 az $y = -3x^2 - (3a - 2)x + 2a + 3$ függvény zérushelyei. Az a mely értékeire teljesül az $x_1 < -2 < x_2$ egyenlőtlenség?

11.53.* $x_1 < x_2$ feltétel mellett x_1 és x_2 az $y = 2x^2 - (3a - 1)\,x + a - 4$ függvény zérushelyei. Az a mely értékeire lesz 1 az $[x_1; x_2]$ intervallum eleme?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

11.54. Oldd meg a következő egyenleteket:

1) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$;
2) $x^4 - 5x^2 - 6 = 0$;
3) $x^4 + 9x^2 + 8 = 0$;
4) $x^4 - 16x^2 = 0$!

11.55. Határozd meg az alábbi egyenletek gyökeinek szorzatát:

1) $x^2 - 5x - 10 = 0$;
2) $2x^2 + 6x - 7 = 0$;
3) $-\frac{1}{3}x^2 + 8x - 1 = 0$!

11.56. Végezd el a kijelölt műveleteket:

1) $\frac{b+3}{b-3} + \frac{b-2}{b+2}$;
2) $\frac{p+4}{p-1} - \frac{p-20}{p+5}$;
3) $\frac{x}{2x+3} - \frac{x+1}{2x-3}$!

11.57. Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket:

1) $\left(2\sqrt{a} + 3\sqrt{b}\right)\left(4a - 6\sqrt{ab} + 9b\right) - 9\sqrt{9b^3}$;
2) $\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{28} + 4\sqrt{63}\right)\cdot\sqrt{7} - \sqrt{126}$;
3) $\left(2 - \sqrt{3} + \sqrt{6}\right)\left(2 + \sqrt{3} - \sqrt{6}\right)$!

11.58. Egy motorcsónak elindult az egyik kikötőből a másikba. 2,5 óra múlva visszatért az első kikötőbe úgy, hogy közben 25 percet várakozott. Határozd meg a folyó sebességét, ha a motorcsónak sebessége állóvízben 20 km/h, a kikötők között pedig a távolság 20 km!

11.59. Egy tartályt az egyik csapon keresztül 10 perccel gyorsabban lehet megtölteni vízzel, mint a másikon keresztül. Ha mind a két csapot egyszerre kinyitják, akkor 8 perc alatt a tartály $\frac{2}{3}$ része telik meg vízzel. Hány perc alatt lehet feltölteni vízzel ezt a tartály külön-külön a két csapon át?

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA

11.60. A táblára felírtuk az 1001 számot. A játékot ketten játsszák. Az egyik játékos letörli a tábláról a számot és felírja helyette ennek a számnak és bármelyik osztójának a különbségét. A játékosok felváltva elvégzik ugyanezt a művelet. A végén az veszít, akinél a végeredmény 0 lesz. Melyik játékos tud biztosan nyerni?

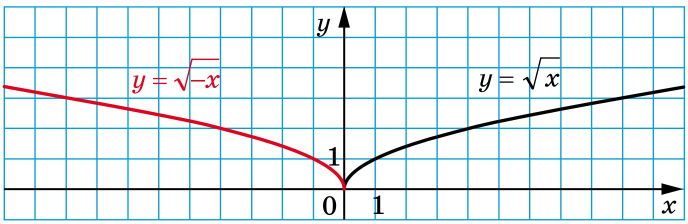
Néhány további függvénytranszformáció

Hogyan kaphatjuk meg az $y = f(-x)$ függvény grafikonját az $y = f(x)$ függvény grafikonjából?

Megjegyezzük, hogyha egy $(x_0; y_0)$ pont illeszkedik az $y = f(x)$ függvény grafikonjára, akkor a $(-x_0; y_0)$ pont az $y = f(-x)$ függvény grafikonjára illeszkedik. Valóban, $f(-(-x_0)) = f(x_0) = y_0$.

Ezért az $y = f(-x)$ függvény minden pontját megkaphatjuk, ha az $y = f(x)$ függvény valamennyi pontját kicseréljük ugyanolyan ordinátájú, ellentétes abszcisszájú pontra.[1]

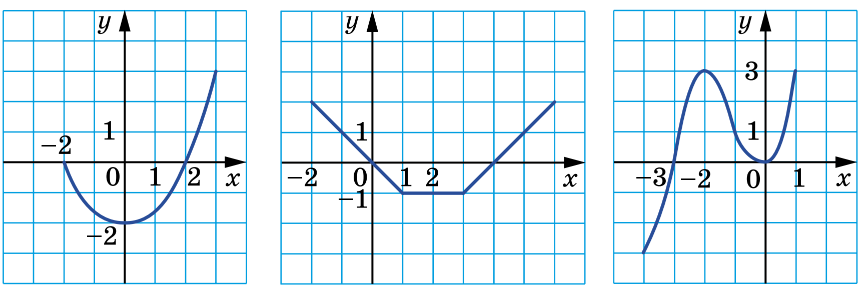
A 11.10. ábrán láthatod, hogyan kaphatjuk meg az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonjából az $y = \sqrt{-x}$ függvény grafikonját.



11.10. ábra

GYAKORLATOK

1. A 11.11. ábrán látható $y = f(x)$ függvény grafikonjából kapjuk meg az $y = f(-x)$ függvény grafikonját!



11.11. ábra

[1]Mértanórán megtanuljátok majd, hogy az ilyen transzformációt tengelyes tükrözésnek nevezzük.

2. Ábrázold az $y = \sqrt{x-2}$ függvény grafikonját! A kapott rajz segítségével ábrázold az $y = \sqrt{-x-2}$ függvény grafikonját!

Hogyan kaphatjuk meg az $y = f(|x|)$, függvény grafikonját az $y = f(x)$ függvény grafikonjából?

Az abszolút érték meghatározásából felírhatjuk:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \geqslant 0, \\ f(-x), & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Ebből levonhatjuk a következtetést, hogyha $x \geqslant 0$, akkor az $y = f(|x|)$ függvény grafikonja megegyezik az $y = f(x)$ függvény grafikonjával, ha pedig $x < 0$, akkor az $y = f(-x)$ függvény grafikonjával.

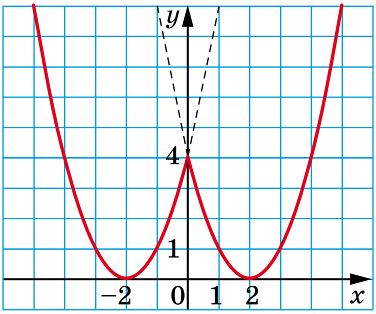
Tehát az $y = f(|x|)$ függvényt az alábbi algoritmus szerint ábrázolhatjuk:

1) ábrázoljuk az $y = f(x)$ függvény grafikonját minden nemnegatív abszcisszára;

2) ábrázoljuk az $y = f(-x)$ függvény grafikonját minden negatív abszcisszára.

A két rész együtt alkotja az $y = f(|x|)$ függvény grafikonját.

A 11.12. ábra azt szemlélteti, hogyan kaphatjuk meg az $y = (|x| - 2)^2$ függvény grafikonját az $y = (x - 2)^2$ függvény grafikonjából.



11.12. ábra

GYAKORLATOK

1. A 11.11. ábrán látható $y = f(x)$ függvény grafikonjából ábrázoljuk az $y = f(|x|)$ függvény grafikonját!

2. Az $y = x + 2$ függvény grafikonja segítségével ábrázold az $y = |x| + 2$ függvényt!

3. Ábrázold az alábbi függvényeket:

1) $y = |x| - 3$;

2) $y = x^2 - 4|x|$;

3) $y = x^2 + 2|x| - 3$;

4) $y = 2|x| - x^2$;

5) $y = \dfrac{4}{|x|}$;

6) $y = \dfrac{4}{|x|} - 2$;

7) $y = \dfrac{4}{|x| - 2}$;

8) $y = \sqrt{|x|}$!

Hogyan kaphatjuk meg az $y = |f(x)|$ függvény grafikonját az $y = f(x)$ függvény grafikonjából?

Az abszolút érték meghatározásából felírhatjuk:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{ha } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{ha } f(x) < 0. \end{cases}$$

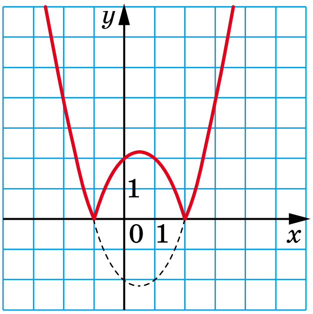
Ebből következik, hogy minden x-re, melyre $f(x) \geqslant 0$, az $y = |f(x)|$ függvény grafikonja megegyezik az $y = f(x)$ függvény grafikonjával, és minden olyan x-re pedig, melyre $f(x) < 0$, az $y = -f(x)$ függvény grafikonjával.

Tehát az $y = |f(x)|$ függvényt az alábbi algoritmus szerint ábrázolhatjuk:

1) az $y = f(x)$ függvény grafikonját minden nemnegatív ordinátára változatlanul hagyjuk;

2) a negatív ordinátájú pontokat viszont kicseréljük ugyanolyan abszcisszájú, de ellentétes ordinátájú pontokra.

A 11.13. ábra azt szemlélteti, hogyan kaphatjuk meg az $y = |x^2 - x - 2|$ függvény grafikonját az $y = x^2 - x - 2$ függvény grafikonjából.



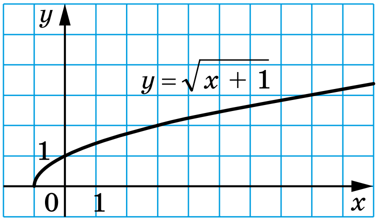
11.13. ábra

1. PÉLDA Ábrázoljuk az $y=\left|\sqrt{|x|+1}-2\right|$ függvény grafikonját!

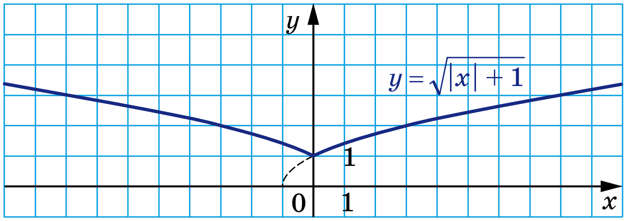
Megoldás. A függvénytranszformációs lépéseket az alábbi táblázat mutatja:

$$y=\sqrt{x+1} \to y=\sqrt{|x|+1} \to y=\sqrt{|x|+1}-2 \to y=\left|\sqrt{|x|+1}-2\right|$$

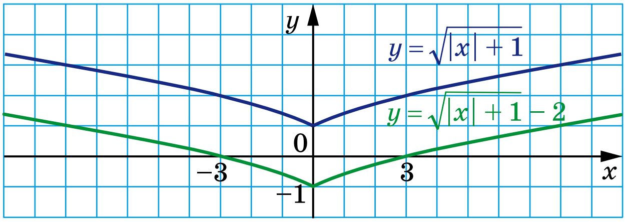
(11.14. ábra). ◄



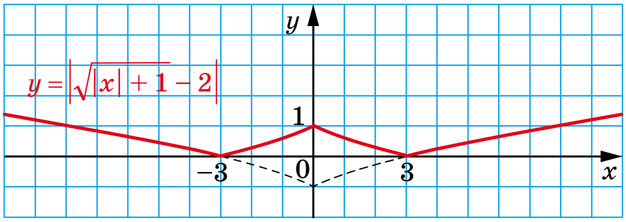
a



b



c



d

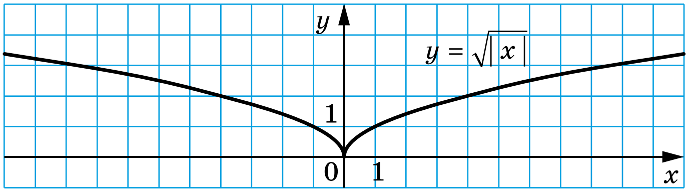
11.14. ábra

2. PÉLDA Ábrázoljuk az $y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$ függvény grafikonját!

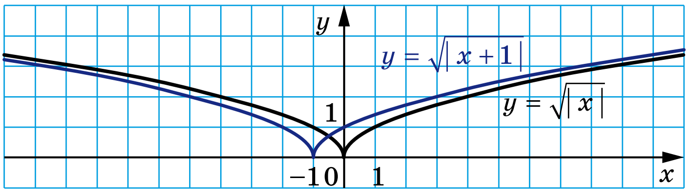
Megoldás. A függvénytranszformációs lépéseket az alábbi táblázat mutatja:

$$y = \sqrt{|x|} \to y = \sqrt{|x+1|} \to y = \sqrt{|x+1|} - 1 \to y = \left|\sqrt{|x+1|} - 1\right|$$

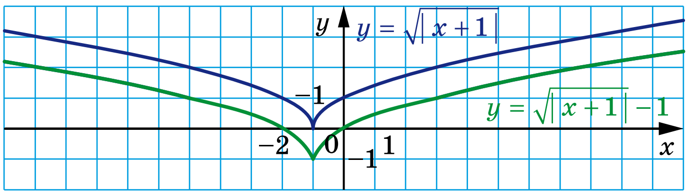
(11.15. ábra). ◀



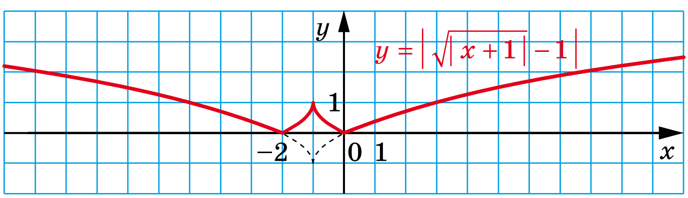
a



b



c



d

11.15. ábra

GYAKORLATOK

1. Rajzold le a 11.11. ábrán látható $y = f(x)$ függvény grafikonja alapján az alábbi függvények grafikonjait:

1) $y = |f(x)|$; 2) $y = |f(|x|)|$!

2. Ábrázold az $y = x + 2$ függvény grafikonja segítségével az $y = |x + 2|$ függvényt!

3. Ábrázold az alábbi függvényeket:

1) $y = |x - 3|$; 4) $y = |2x - x^2|$;

2) $y = |x^2 - 4x|$; 5) $y = \left|\frac{4}{x} - 2\right|$;

3) $y = |x^2 + 2x - 3|$; 6) $y = \left|\frac{4}{x-2}\right|$!

4. Ábrázold a következő függvényeket:

1) $y = ||x| - 3|$; 4) $y = |2|x| - x^2|$;

2) $y = |x^2 - 4|x||$; 5) $y = \left|\frac{4}{|x|} - 2\right|$;

3) $y = |x^2 + 2|x| - 3|$; 6) $y = \left|\frac{4}{|x| - 2}\right|$!

5. Ábrázold az alábbi függvényeket:

1) $y = \sqrt{4 - |x|}$; 4) $y = \sqrt{|4 - x|}$;

2) $y = 3 - \sqrt{4 - |x|}$; 5) $y = 3 - \sqrt{|4 - x|}$;

3) $y = \left|3 - \sqrt{4 - |x|}\right|$; 6) $y = \left|3 - \sqrt{|4 - x|}\right|$!

TUDÁSPRÓBA
2. TESZTFELADAT

1. Mennyi az $f(x) = 2x^2 - 1$ függvény helyettesítési értéke az $x_0 = -3$ helyen?

A) -19; C) 11;
B) -13; D) 17.

2. Az alábbi függvények közül melyik másodfokú?

A) $y = 2x - 5$; C) $y = 2x^2 - 5$;
B) $y = 2\sqrt{x} - 5$; D) $y = \dfrac{2}{x^2} - 5$.

3. Az alábbi függvényék közül melyik értelmezési tartománya a $(-\infty; 6)$ intervallum?

A) $y = \sqrt{6 + x}$; C) $y = \dfrac{1}{\sqrt{6 + x}}$;
B) $y = \dfrac{1}{\sqrt{6 - x}}$; D) $y = \sqrt{6 - x}$.

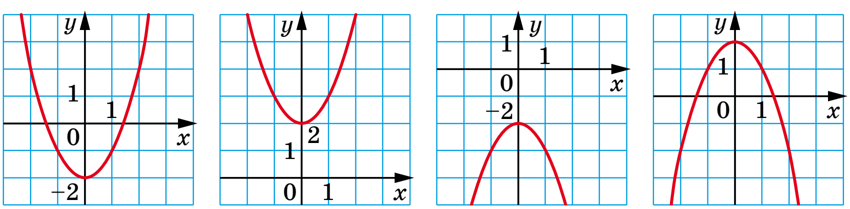
4. Milyen párhuzamos eltolással kapjuk meg az $y = \dfrac{7}{x}$ függvény grafikonjából az $y = \dfrac{7}{x - 5}$ függvény grafikonját?

A) az ordinátatengely mentén 5 egységgel felfelé;
B) az abszcisszatengely mentén 5 egységgel balra;
C) az abszcisszatengely mentén 5 egységgel jobbra;
D) az ordinátatengely mentén 5 egységgel lefelé.

5. Az $y = \sqrt{x}$ függvény grafikonját párhuzamosan eltoltuk 2 egységgel balra és 7 egységgel lefelé. Melyik függvény grafikonját kaptuk meg?

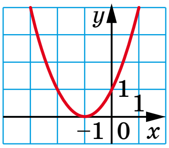
A) $y = \sqrt{x + 2} - 7$; C) $y = \sqrt{x - 2} + 7$;
B) $y = \sqrt{x - 2} - 7$; D) $y = \sqrt{x + 2} + 7$.

6. Melyik ábrán látható az $y = -x^2 + 2$ függvény grafikonja?



A) B) C) D)

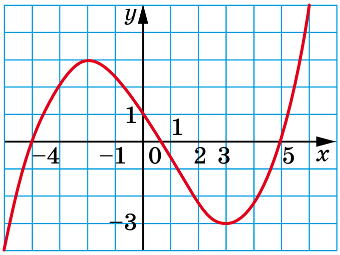
7. Az alábbi függvények közül melyik grafikonja látható az ábrán?



A) $y = x^2 - 1$;
B) $y = x^2 + 1$;
C) $y = (x - 1)^2$;
D) $y = (x + 1)^2$.

8. Nevezd meg az $y = 3(x - 4)^2 - 5$ parabola csúcsának koordinátáit!
A) (4; 5); C) (4; –5);
B) (–4; 5); D) (–4; –5).

9. Az ábrán egy, a valós számok halmazán értelmezett $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Olvasd le a rajzról, melyik intervallumon csökkenő a függvény!

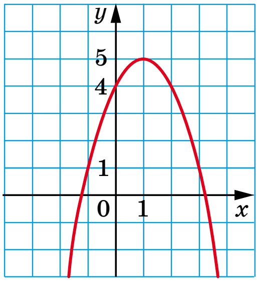


A) [–4; 1]; C) [–2; 3];
B) [–3; 3]; D) [–3; 1].

10. Határozd meg az $y = 2x^2 - 12x + 3$ parabola csúcspontjának abszcisszáját!
A) 6; C) 3;
B) –6; D) –3.

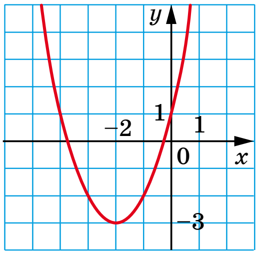
11. Az alábbi parabolák közül melyik csúcspontja illeszkedik az abszcisszatengelyre?
A) $y = x^2 - 6$; C) $y = (x - 6)^2$;
B) $y = x^2 - 6x$; D) $y = (x - 6)^2 + 2$.

12. A rajzon az $y = -x^2 + 2x + 4$ függvény grafikonja látható. Határozd meg a rajz alapján a függvény értékkészletét!



A) $(-\infty; +\infty)$;
B) $(-\infty; 1]$;
C) $[1; +\infty)$;
D) $(-\infty; 5]$.

13. A rajzon az $y = x^2 + 4x + 1$ függvény grafikonja látható. Olvasd le a rajzról, milyen intervallumon növekvő ez a függvény?



A) $(-\infty; -2]$;
B) $[-2; +\infty)$;
C) $[-3; +\infty)$;
D) nem lehet megállapítani.

14. Határozd meg az $y = 2x^2 + x - 6$ függvény zérushelyeit!
A) –1,5; –2; C) –1,5; 2;
B) 1,5; 2; D) 1,5; –2.

15. Mely b és c értékeknél lesz az $y = x^2 + bx + c$ parabola csúcspontja az $M(3; 8)$ pont?

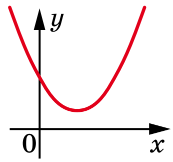
A) $b = 6$, $c = -19$;

B) $b = -6$, $c = 17$;

C) $b = -3$, $c = 8$;

D) nem lehet meghatározni.

16. A rajzon az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény grafikonja látható. Melyik igaz az alábbi állítások közül, ha D az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom diszkriminánsa?



A) $b > 0$, $D > 0$; C) $b < 0$, $D < 0$;

B) $b > 0$, $D < 0$; D) $b > 0$, $D = 0$.

17. Az a mely értékénél lesz az $y = 3x^2 - 6x + a$ függvény legkisebb értéke 4?

A) –5; B) 4; C) 7; D) 8.

18. Tudjuk, hogy $m - n = 8$. Határozd meg az mn szorzat lehetséges értékeinek halmazát!

A) $[-16; +\infty)$;

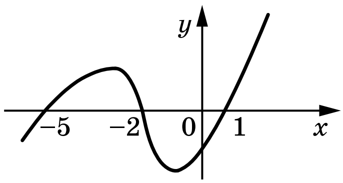
B) $[8; +\infty)$;

C) $(-\infty; +\infty)$;

D) nem lehet meghatározni.

12. Másodfokú egyenlőtlenségek megoldása

A 12.1. rajzon a valós számok halmazán értelmezett $y = f(x)$ függvény grafikonja látható.



12.1. ábra

A rajzról könnyen leolvasható, hol állandó előjelű az f függvény: $y > 0$ esetében a $(–5; –2)$ és $(1; +\infty)$ intervallumokon, illetve az $y < 0$ esetén a $(–\infty; –5)$ és $(–2; 1)$ intervallumokon.

Azzal, hogy meghatároztuk, hol állandó előjelű ez a függvény, megoldottuk az $f(x) > 0$ és $f(x) < 0$ egyenlőtlenségeket is.

A $(–5; –2)$ és $(1; +\infty)$ intervallumok alkotják az $f(x) > 0$ egyenlőtlenség megoldását. Ebben az esetben úgy fogalmazunk, hogy az $f(x) > 0$ egyenlőtlenség megoldása ezen intervallumok **egyesítése**, **uniója**. A halmazok egyesítésére a $\cup$ jelet használjuk.

Tehát az $f(x) > 0$ egyenlőtlenség megoldását így is fel lehet írni:

$$(-5; -2) \cup (1; +\infty).$$

Az $f(x) < 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát pedig így:

$$(-\infty; -5) \cup (-2; 1).$$

Az $f(x) > 0$ és $f(x) < 0$ egyenlőtlenségek ilyen megoldását **grafikus** megoldásnak nevezzük.

Megmutatjuk, hogyan lehet ezzel a módszerrel másodfokú egyenlőtlenséget megoldani.

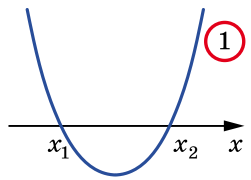
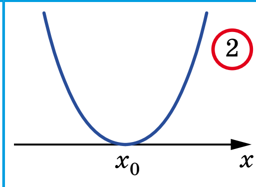
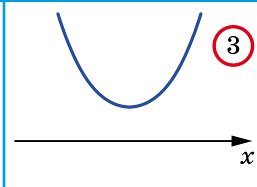
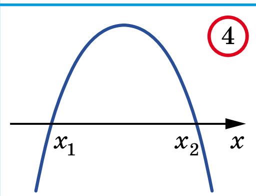
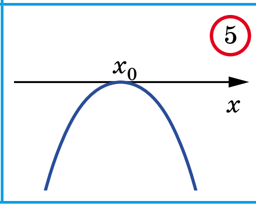
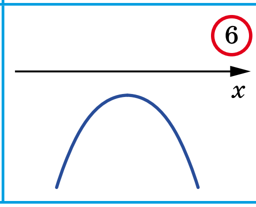
Meghatározás. **Az $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, és $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ egyenlőtlenségeket, ahol x az ismeretlen, a, b és c valós számok, $a \neq 0$, másodfokú egyenlőtlenségnek nevezzük.**

Tisztázzuk, hogyan helyezkedhet el az $y = ax^2 + bx + c \leqslant 0$ másodfokú függvény grafikonja az abszcisszatengelyhez képest.

Az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény zérushelyének létezését és számát az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom diszkriminánsa határozza meg: ha $D > 0$, akkor két zérushely van, ha $D = 0$ akkor egy, ha pedig $D < 0$, akkor nincs zérushely.

Az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom főegyütthatójának előjele határozza meg, merre mutatnak az $y = ax^2 + bx + c$ parabola szárai. Ha $a > 0$, akkor felfelé, ha $a < 0$, akkor lefelé.

Az $y = ax^2 + bx + c$ parabola elhelyezkedését az abszcisszatengelyhez képest az a és D értékektől függően vázlatosan az alábbi táblázatban foglaltuk össze (x_1 és x_2 a függvény zérushelyei, x_0 a parabola csúcspontja).

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Megmagyarázzuk, hogyan kell használni ezt a táblázatot másodfokú egyenletek megoldásánál.

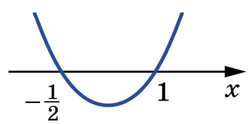
Oldjuk meg, például, az $ax^2 + bx + c > 0$ egyenlőtlenséget, ahol $a < 0$ és $D > 0$. Ez az eset a táblázat 4 cellájában látható. Érthető, hogy a megoldás az $(x_1; x_2)$ intervallum, ahol a grafikon az abszcisszatengely felett helyezkedik el.

1. PÉLDA Oldjuk meg a $2x^2 - x - 1 > 0$ egyenlőtlenséget!

Megoldás. A $2x^2 - x - 1$ másodfokú polinom főegyütthatója: $a = 2 > 0$ és diszkriminánsa $D = 9 > 0$. Ezen feltételeknek a táblázat 1 cellája felel meg.

Oldjuk meg a $2x^2 - x - 1 = 0$ egyenletet! Azt kapjuk, hogy $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Így az $y = 2x^2 - x - 1$ függvényt vázlatosan úgy ábrázolhatjuk, ahogy az a 12.2. ábrán látható.

A rajzról leolvasható, hogy az adott másodfokú függvény a $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ és az $(1; +\infty)$ intervallumon vesz fel pozitív értéket.

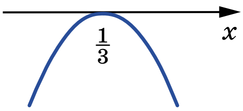


12.2. ábra

Felelet: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$. ◄

2. PÉLDA Oldjuk meg a $-9x^2 + 6x - 1 < 0$ egyenlőtlenséget!

Megoldás. $a = -9$, $D = 0$. Ez a részeset a táblázat 5 cellája. Megállapítható, hogy $x_0 = \frac{1}{3}$. Így az $y = -9x^2 + 6x - 1$ függvény vázlatosan úgy ábrázolható, ahogy azt a 12.3. ábra mutatja.



12.3. ábra

A 12.3. ábráról leolvasható, hogy az egyenlőtlenség megoldása bármely valós szám, kivéve az $\frac{1}{3}$-ot.

Ez az egyenlőtlenség más módszerrel is megoldható. Írjuk át az egyenlőtlenséget $9x^2 - 6x + 1 > 0$ alakban. Így $(3x - 1)^2 > 0$.

Innen ugyanazt a megoldást kapjuk.

Felelet: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$. ◀

3. PÉLDA Oldjuk meg a $3x^2 - x + 1 < 0$ egyenlőtlenséget!

Megoldás. $a = 3 > 0$, $D = -11 < 0$. Ezeknek a feltételeknek a táblázat 3 cellája felel meg. Ebben az esetben a függvény grafikonjának nincs negatív ordinátájú pontja.

Felelet: nincs megoldás. ◀

4. PÉLDA Oldjuk meg a $0{,}2x^2 + 2x + 5 \leqslant 0$ egyenlőtlenséget!

Megoldás. Mivel $a = 0{,}2$, $D = 0$, ezért ez a táblázat 2 cellájának felel meg, mégpedig $x_0 = -5$. Ebben az esetben viszont a másodfokú függvény csak nemnegatív értéket vesz fel. Így az egyenlőtlenségnek egyetlen megoldása van: $x = -5$.

Felelet: -5. ◀

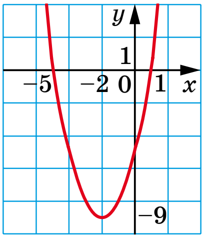
?

1. Mi a halmazok uniójának, egyesítésének a jele?
2. Milyen egyenlőtlenséget nevezünk másodfokúnak?
3. Hol helyezkedhet el a koordinátasíkon az $y = ax^2 + bx + c$ parabola az a és D előjelétől függően, ahol D az $ax^2 + bx + c$ másodfokú polinom diszkriminánsa? Ábrázold vázlatosan a részeseteket!

GYAKORLATOK

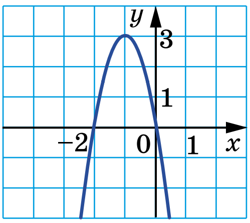
12.1.° A –2; 0; 1 számok közül melyek megoldásai az alábbi egyenlőtlenségeknek:
1) $x^2 - x - 2 < 0$; 2) $x^2 + x \geqslant 0$; 3) $-3x^2 - x + 2 > 0$?

12.2.° A 12.4. ábrán az $y = x^2 + 4x - 5$ függvény grafikonja látható. Határozd meg az alábbi egyenlőtlenségek megoldáshalmazát:
1) $x^2 + 4x - 5 < 0$; 3) $x^2 + 4x - 5 > 0$;
2) $x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$; 4) $x^2 + 4x - 5 \geqslant 0$!

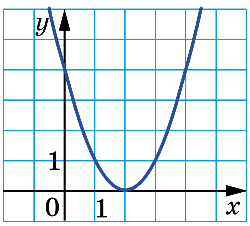


12.4. ábra

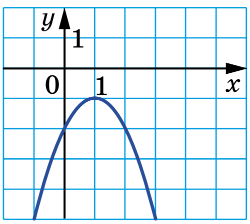
12.3.° A 12.5. ábrán az $y = -3x^2 - 6x$ függvény grafikonja látható. Határozd meg az alábbi egyenlőtlenségek megoldáshalmazát:
1) $-3x^2 - 6x < 0$; 3) $-3x^2 - 6x > 0$;
2) $-3x^2 - 6x \leqslant 0$; 4) $-3x^2 - 6x \geqslant 0$!



12.5. ábra



12.6. ábra



12.7. ábra

12.4.° A 12.6. ábrán az $y = x^2 - 4x + 4$ függvény grafikonja látható. Határozd meg az alábbi egyenlőtlenségek megoldáshalmazát:
1) $x^2 - 4x + 4 < 0$; 3) $x^2 - 4x + 4 > 0$;
2) $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$; 4) $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$!

12.5.° A 12.7. ábrán az $y = -x^2 + 2x - 2$ függvény grafikonja látható. Határozd meg az alábbi egyenlőtlenségek megoldáshalmazát:
1) $-x^2 + 2x - 2 < 0$; 3) $-x^2 + 2x - 2 > 0$;
2) $-x^2 + 2x - 2 \leqslant 0$; 4) $-x^2 + 2x - 2 \geqslant 0$!

12.6.° Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:
1) $x^2 + 6x - 7 < 0$; 5) $3x^2 - 7x + 4 \leqslant 0$;
2) $x^2 - 2x - 48 \geqslant 0$; 6) $2x^2 + 3x + 1 > 0$;
3) $-x^2 - 6x - 5 > 0$; 7) $4x^2 - 12x \leqslant 0$;
4) $-x^2 + 4x - 3 < 0$; 8) $4x^2 - 9 > 0$;

9) $x^2 - 12x + 36 > 0$;
10) $4x^2 - 12x + 9 \geqslant 0$;
11) $x^2 + 4x + 4 < 0$;
12) $49x^2 - 14x + 1 \leqslant 0$;
13) $2x^2 - x + 3 > 0$;
14) $3x^2 - 4x + 5 \leqslant 0$;
15) $-4x^2 + 5x - 7 > 0$;
16) $-2x^2 + 3x - 2 \leqslant 0$!

12.7.° Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:
1) $x^2 + 4x + 3 > 0$;
2) $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$;
3) $-x^2 + 12x + 45 < 0$;
4) $-3x^2 - 5x - 2 \geqslant 0$;
5) $x^2 - 5x > 0$;
6) $-25x^2 + 16 \leqslant 0$;
7) $5x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$;
8) $-3x^2 + 6x - 4 > 0$;
9) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 \leqslant 0$;
10) $-x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{36} > 0$;
11) $2x^2 - 2x + 0{,}5 < 0$!

12.8.° Határozd meg a következő egyenlőtlenségek megoldáshalmazát:
1) $x^2 \leqslant 49$; 2) $x^2 > 5$; 3) $7x^2 \leqslant 4x$; 4) $0{,}9x^2 < -27x$!

12.9.° Határozd meg a következő függvények megoldáshalmazát:
1) $x^2 > 1$; 2) $x^2 < 3$; 3) $-3x^2 \geqslant -12x$; 4) $-2x^2 < -128$!

12.10.˙ Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:
1) $x(x + 5) - 2 < 4x$;
2) $11 - (x + 1)^2 \leqslant x$;
3) $(2x + 1)^2 - (x + 1)(x - 7) \leqslant 5$;
4) $5x(x + 4) - (2x - 3)(2x + 3) > 30$;
5) $(3x - 7)(x + 2) - (x - 4)(x + 5) > 30$;
6) $\frac{2x^2 - 1}{4} - \frac{3 - 4x}{6} + \frac{8x - 5}{8} \leqslant \frac{19}{24}$!

12.11.˙ Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:
1) $2(x^2 + 2) \geqslant x(x + 5)$;
2) $x - (x + 4)(x + 5) > -5$;
3) $(6x - 1)(6x + 1) - (12x - 5)(x + 2) < 7 - 3x$;
4) $\frac{x - 1}{4} - \frac{2x - 3}{2} < \frac{x^2 + 3x}{8}$!

12.12.˙ Az x mely értékeinél lesz:
1) a $-3x^2 + 6x + 1$ kifejezés értéke nagyobb $-\frac{4}{3}$-nál;
2) a $-5x^2 + 11x + 2$ kifejezés értéke nem nagyobb $-\frac{2}{5}$-nél?

12.13.$^{\bullet}$ Az x mely értékeinél lesz:

1) az $x^2 - 2x - 11$ kifejezés értéke kisebb $\frac{1}{4}$-nél;

2) a $-3x^2 + 8x + 6$ kifejezés értéke nem kevesebb, mint $-\frac{2}{3}$?

12.14.$^{\bullet}$ Az argumentum mely értékeinél lesz az $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 9$ függvény értéke nagyobb az $y = 2x - 1$ függvény megfelelő értékeinél?

12.15.$^{\bullet}$ Az argumentum mely értékeinél lesz az $y = \frac{3}{2}x^2 - 7x + 1$ függvény értéke kisebb az $y = -\frac{1}{2}x^2 - 4$ függvény megfelelő értékeinél?

12.16.$^{\bullet}$ Oldd meg az egész számok halmazán a következő egyenlőtlenségeket:

1) $x^2 + 5x \leqslant 0$;

2) $x^2 - 10 < 0$;

3) $6x^2 + x - 2 \leqslant 0$;

4) $-\frac{1}{4}x^2 + x + 3 > 0$!

12.17.$^{\bullet}$ Hány egész megoldása van az alábbi egyenlőtlenségeknek:

1) $20 - 8x - x^2 > 0$;

2) $4x^2 - 15x - 4 < 0$?

12.18.$^{\bullet}$ Határozd meg az alábbi egyenlőtlenségek legkisebb egész megoldását:

1) $42 - x^2 - x > 0$;

2) $2x^2 - 3x - 20 < 0$!

12.19.$^{\bullet}$ Határozd meg az alábbi egyenlőtlenségek legnagyobb egész megoldását:

1) $1{,}5x^2 - 2x - 2 < 0$;

2) $-2x^2 - 15x - 25 \geqslant 0$!

12.20.$^{\bullet}$ Adj meg olyan másodfokú egyenlőtlenséget, amelynek a megoldáshalmaza:

1) a $(-\infty; -4)$ és $(8; +\infty)$ intervallumok egyesítése;

2) a $[-2; 9]$ zárt intervallum;

3) csak a 7-es szám!

12.21.$^{\bullet}$ Határozd meg a következő függvények értelmezési tartományát:

1) $y = \sqrt{-x^2 + 3x + 4}$;

2) $y = \sqrt{2x^2 + 5x - 3}$;

3) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 12}}$;

4) $y = \frac{x + 2}{\sqrt{6x - 2x^2}}$!

12.22.$^{\bullet}$ Határozd meg a következő függvények értelmezési tartományát:

1) $\sqrt{2x^2 - 9x - 18}$;

2) $\frac{1}{\sqrt{15 + 2x - x^2}}$!

12.23.˙ Ekvivalensek-e az alábbi egyenlőtlenségek:

1) $x^2 - 2x - 15 > 0$ és $x^2 - 2x - 15 \geqslant 0$;

2) $\frac{1}{x^2 - x - 20} < 0$ és $\frac{1}{x^2 - x - 20} \leqslant 0$;

3) $x^2 - 6x + 10 > 0$ és $-x^2 + x - 1 \leqslant 0$;

4) $x^2 + 2x + 3 < 0$ és $-2x^2 - 4 > 0$?

12.24.˙ Az a mely értékeire nincs megoldása a következő egyenletnek:

1) $x^2 - ax + 4 = 0$;

2) $x^2 + (a - 2)x + 25 = 0$;

3) $4{,}5x^2 - (4a + 3)x + 3a = 0$?

12.25.˙ A b mely értékeire van két különböző gyöke a következő egyenletnek:

1) $x^2 - 8bx + 15b + 1 = 0$;

2) $2x^2 + 2(b - 6)x + b - 2 = 0$?

12.26.˙˙ Oldd meg a következő egyenlőtlenség-rendszereket:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 6 \leqslant 0, \\ x > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x^2 - 11x - 6 \geqslant 0, \\ x + 4 \geqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 9x - 10 \leqslant 0, \\ 6x - x^2 < 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - x - 12 \geqslant 0, \\ x^2 + 3x - 10 < 0! \end{cases}$

12.27.˙˙ Oldd meg a következő egyenlőtlenség-rendszereket:

1) $\begin{cases} -6x^2 + 13x - 5 \leqslant 0, \\ 6 - 2x > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 7x - 18 < 0, \\ 5x - x^2 \leqslant 0! \end{cases}$

12.28.˙˙ Határozd meg az alábbi egyenlőtlenség-rendszerek egész megoldásait:

1) $\begin{cases} -2x^2 - 5x + 18 \geqslant 0, \\ x^2 + 4x - 5 \leqslant 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - \left(\sqrt{5} - 3\right)x - 3\sqrt{5} \leqslant 0, \\ x^2 + x > 0! \end{cases}$

12.29.˙˙ Határozd meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

1) $y = \frac{5}{\sqrt{x^2 - 4x - 12}} + \sqrt{x + 1}$;

2) $y = \frac{x - 3}{\sqrt{18 + 3x - x^2}} + \frac{8}{x - 5}$;

3) $y = \sqrt{x^2 - 5x - 14} - \frac{9}{x^2 - 81}$;

4) $y = \frac{1}{\sqrt{6 - 7x - 3x^2}} + \frac{2}{\sqrt{x + 1}}$!

12.30.˙˙ Határozd meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

1) $y = \sqrt{20 + 4x - 3x^2} + \frac{3}{\sqrt{8 - 4x}}$;

2) $y = \frac{x + 5}{\sqrt{35 + 2x - x^2}} + \frac{x - 1}{|x| - 6}$!

12.31.˙˙ Határozd meg az alábbi egyenlőtlenségek megoldáshalmazát:

1) $x^2 - 8|x| - 33 < 0$;

2) $8x^2 + 7|x| - 1 \geqslant 0$!

12.32.˙˙ Határozd meg az alábbi egyenlőtlenségek megoldáshalmazát:

1) $5x^2 - 7|x| + 2 \geqslant 0$;

2) $x^2 + 10|x| - 24 \leqslant 0$!

12.33.$^{\cdot\cdot}$ Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $|x| \cdot (x^2 + 3x - 10) < 0$;
2) $\sqrt{x}\,(x^2 + 2x - 8) \leqslant 0$;
3) $(x - 2)^2\,(x^2 - 8x - 9) < 0$;
4) $(x + 5)^2\,(x^2 - 2x - 15) > 0$;
5) $\dfrac{x^2 + 7x - 8}{(x - 4)^2} \geqslant 0$;
6) $\dfrac{x^2 + 10x - 11}{(x + 3)^2} \leqslant 0$!

12.34.$^{\cdot\cdot}$ Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $|x| \cdot (x^2 - 5x + 6) > 0$;
2) $\sqrt{x}\,(x^2 + 6x - 40) > 0$;
3) $(x + 3)^2\,(x^2 - x - 6) > 0$;
4) $\dfrac{3x^2 - 8x - 3}{(x - 1)^2} \leqslant 0$!

12.35.* Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} > 0$;
2) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} \geqslant 0$;
3) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} < 0$;
4) $(x + 4)\sqrt{x^2 - 2x - 15} \leqslant 0$!

12.36.* Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} > 0$;
2) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} \geqslant 0$;
3) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} < 0$;
4) $(x - 3)\sqrt{14 + 5x - x^2} \leqslant 0$!

12.37.* Az a mely értékeire igazak az alábbi egyenlőtlenségek bármely x értékre:

1) $x^2 - 4x + a > 0$;
2) $x^2 + (a - 1)\,x + 1 - a - a^2 \geqslant 0$;
3) $-\dfrac{1}{4}x^2 + 5ax - 9a^2 - 8a < 0$;
4) $(a - 1)\,x^2 - (a + 1)\,x + a + 1 > 0$?

12.38.* Az a mely értékeire nincs megoldásuk az alábbi egyenlőtlenségeknek:

1) $-x^2 + 6x - a > 0$;
2) $x^2 - (a + 1)\,x + 3a - 5 < 0$;
3) $ax^2 + (a - 1)\,x + (a - 1) < 0$?

12.39.* Oldd meg a következő egyenlőtlenség-rendszereket az a különböző értékeire:

1) $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 > 0, \\ x > a; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 4x^2 - 3x - 1 \leqslant 0, \\ x < a! \end{cases}$

12.40.* Oldd meg a következő egyenlőtlenség-rendszereket az a különböző értékeire:

1) $\begin{cases} x^2 - x - 72 < 0, \\ x > a; \end{cases}$
2) $\begin{cases} x^2 - 9x + 8 > 0, \\ x < a! \end{cases}$

ISMÉTLŐ FELADATOK

12.41. Egyszerűsítsd a következő kifejezéseket:

1) $\dfrac{x^2+3xy}{x+6}:\dfrac{x^2-9y^2}{2x+12}$; 2) $\dfrac{4a^2-12ab+9b^2}{2a^2-8b^2}\cdot\dfrac{2a^2-8ab+8b^2}{6a-9b}$!

12.42. Határozd meg a következő kifejezések pontos értékét (a gyökvonás tulajdonságának alkalmazásával):

1) $\sqrt{20\cdot 66\cdot 330}$; 3) $2\sqrt{18}\cdot 3\sqrt{30}\cdot 5\sqrt{15}$;

2) $\sqrt{3^5\cdot 12^3}$; 4) $6\sqrt{10}\cdot\sqrt{45}\cdot\sqrt{50}$!

12.43. Az egyik brigád 12 nap alatt tudja betakarítani a termést. Egy másiknak ugyanehhez a munkához az idő 75%-ára van szüksége. Miután az első brigád 5 napon át dolgozott, csatlakozott hozzájuk a másik brigád is, és így együtt fejezték be a munkát. Hány napot dolgozott együtt a két brigád?

12.44. Az első kiutazás alatt egy személygépkocsi a benzintartályának 10%-át használta el, a másik a kiutazás alatt a maradék 25%-át. Ezután a tartályban 13 literrel kevesebb üzemanyag maradt, mint amennyi a kiutazások előtt volt. Mennyi benzin volt eredetileg a benzintartályban?

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA

12.45. Megoldása-e a (2; –3) számpár az alábbi egyenleteknek:

1) $4x-3y=17$; 2) $x^2+5=y^2$; 3) $xy=6$?

12.46. Az A (4; b) pont illeszkedik az $5x-y=2$ egyenesre. Mekkora a b értéke?

12.47. Rajzold meg az alábbi görbéket:

1) $4x+y=3$; 6) $x^2+y^2=4$;

2) $2x-3y=6$; 7) $x^2+2x+y^2-6y+10=0$;

3) $xy=-8$; 8) $(x-3)(y-x)=0$;

4) $(x-2)^2+y^2=0$; 9) $\dfrac{y-x}{y^2-1}=0$!

5) $(x-2)^2+(y+1)^2=9$;

12.48. A (–2; 1), (2; –1) és (6; 4) számpárok közül melyik megoldása a $\begin{cases}3x-8y=-14,\\4x+y=28\end{cases}$ egyenletrendszernek?

12.49. Oldd meg grafikusan az alábbi egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} x-2y=1, \\ y-x=-2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y=-5, \\ 4x-y=-5\,! \end{cases}$

12.50. Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} 2x+y=10, \\ 4x-7y=2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-9y=11, \\ 7x+9y=25; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4y-x=11, \\ 5x-2y=17; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ 12x+7y=-26! \end{cases}$

13. Kétismeretlenes egyenletrendszerek

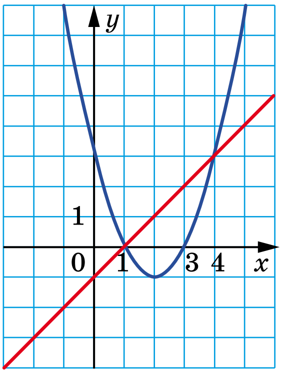
A 7. osztályban már tanultátok az egyenletrendszerek megoldásának grafikus módszerét. Emlékeztetőül: ennek a módszernek a lényege, hogy meghatározzuk a rendszerhez tartozó egyenletek görbéi közös pontjainak koordinátáit. Mértanórán már tanultátok, hogy az R sugarú, $(a; b)$ középpontú körvonal egyenlete az $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, $R>0$ egyenlet. Szintén tanultátok már, hogyan kell ábrázolni a másodfokú függvényt. Ezek az ismeretek bővítik az egyenletrendszerek grafikus megoldásának lehetőségeit.

1. PÉLDA Oldjuk meg az $\begin{cases} x^2-4x-y+3=0, \\ y-x+1=0 \end{cases}$ egyenletrendszert!

Megoldás. Az első egyenlet ekvivalens az $y=x^2-4x+3$ egyenlettel. Ezt az egyenletet függvénynek tekinthetjük, melynek grafikonja a 13.1. ábrán látható parabola.

A második egyenlet egy egyenes egyenlete. Ez az egyenes a parabolát két pontban metszi, melyek koordinátái: (1; 0) és (4; 3) (lásd a 13.1. ábrát).

Mint ismeretes, a grafikus módszerrel meghatározott megoldás nem feltétlenül pontos. Ezért a meghatározott gyököket le kell ellenőrizni. Az



13.1. ábra

ellenőrzés igazolja, hogy az (1; 0) és (4; 3) számpárok valóban megoldásai az adott egyenletrendszernek.

Felelet: (1; 0), (4; 3). ◄

Megjegyezzük, hogy ez az egyenletrendszer „kedvező” a grafikus megoldásra: a metszéspontok koordinátái egész számok. Könnyen belátható, hogy ez nem gyakran fordul elő. Ezért ezt a módszert akkor célszerű használni, ha a megoldások számát kell meghatározni, vagy nem szükséges tudni a gyökök pontos értékét.

A vizsgált egyenletrendszert nem csak grafikusan lehet megoldani. Ehhez a témához készülve megismételtétek az egyenletrendszerek megoldásának **behelyettesítő módszerét**. Ezzel a módszerrel hatékonyabban oldhatók meg a bonyolultabb egyenletrendszerek is, például azok, melyekben az egyik egyenlet lineáris, de azok is, amelyekben nincs lineáris egyenlet.

Oldjuk meg az $\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0 \end{cases}$ egyenletrendszert behelyettesítéssel.

Fejezzük ki a második egyenletből az y változót:

$$y = x - 1.$$

Helyettesítsük be az első egyenletbe az y helyére az $x - 1$ kifejezést:

$$x^2 - 4x - (x - 1) + 3 = 0.$$

Egyismeretlenes egyenletet kaptunk. Rendezés után az $x^2 - 5x + 4 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk.

Innen $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

A kapott x értékekhez tartozó y értékeket az $y = x - 1$ egyenletből határozzuk meg. Azt kapjuk, hogy:

$$y_1 = 1 - 1 = 0,\ y_2 = 4 - 1 = 3.$$

Tehát újra megállapíthatjuk, hogy az (1; 0) és (4; 3) számpárok az adott egyenletrendszer megoldásai.

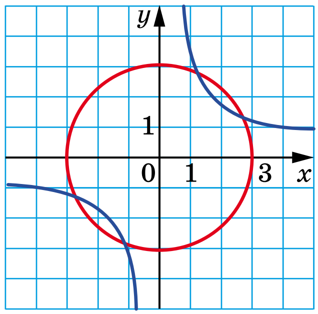
2. PÉLDA Határozzuk meg, hány megoldása van az $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = \frac{7}{2} \end{cases}$ egyenletrendszernek!

Megoldás. Az első egyenlet egy origó középpontú 3 egység sugarú körvonal egyenlete.

A második egyenlet pedig ekvivalens az $y = \frac{3{,}5}{x}$ egyenlettel. Ez az egyenlet egy hiperbolát határoz meg.

Ábrázoljuk a körvonalat és a hiperbolát közös koordináta-rendszerben (13.2. ábra). A rajzról leolvasható, hogy a görbék négy pontban metszik egymást. Tehát az adott egyenletrendszernek négy megoldása van. ◄

A 13.2. ábráról szintén leolvasható az adott egyenletrendszer megoldásainak közelítő értéke.



13.2. ábra

Nem a grafikus megoldást választva ki lehet számítani az egyenlet megoldásának pontos értékeit is.

Ehhez a témához készülve megismételtük az egyenletrendszerek megoldásának **egyenlő együtthatók** módszerét is. Megmutatjuk, hogyan lehet ezt a módszert alkalmazni bonyolultabb egyenletrendszerek megoldásánál.

Szorozzuk meg az adott egyenletrendszer második egyenletét kettővel: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 2xy = 7. \end{cases}$

Adjuk össze a rendszer egyenleteit, a jobb oldalt a jobb oldalhoz, a bal oldalt a bal oldalhoz. Az $x^2 + y^2 + 2xy = 16$ egyenletet kapjuk. Innen: $(x + y)^2 = 16$; $x + y = 4$ vagy $x + y = -4$.

Könnyen belátható, ahhoz, hogy megoldjuk az eredeti egyenletrendszert, elegendő megoldani a két egyszerűbb egyenletrendszert.

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 2xy = 7. \end{cases}$ Innen $\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x(4 - x) = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x^2 - 8x + 7 = 0. \end{cases}$

Megoldva az egyenletrendszer második egyenletét, kapjuk:

$x_1 = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}$.

Így $y_1 = \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}$, $y_2 = \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}$.

2) $\begin{cases} x + y = -4, \\ 2xy = 7. \end{cases}$ Innen $\begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x(-4 - x) = 7; \end{cases}$ $\begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x^2 + 8x + 7 = 0. \end{cases}$

Megoldva az egyenletrendszer második egyenletét, kapjuk:

$x_3 = \dfrac{-4 - \sqrt{2}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-4 + \sqrt{2}}{2}$.

Így $y_3 = \dfrac{-4 + \sqrt{2}}{2}$, $y_4 = \dfrac{-4 - \sqrt{2}}{2}$.

Felelet: $\left(\dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}; \dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{4 + \sqrt{2}}{2}; \dfrac{4 - \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-4 - \sqrt{2}}{2}; \dfrac{-4 + \sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\dfrac{-4 + \sqrt{2}}{2}; \dfrac{-4 - \sqrt{2}}{2}\right)$. ◄

Nyilvánvaló, hogy az ilyen alakú megoldást grafikusan nem lehet meghatározni.

A 8. osztályban megtanultatok egyenletet megoldani **új ismeretlen bevezetésével**. Ezt a módszert alkalmazzuk egy sor egyenletrendszer megoldásánál is.

3. PÉLDA Oldjuk meg az $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$ egyenletrendszert!

Megoldás. Jelöljük az $\frac{x+y}{x-y} = t$ kifejezést t-vel, akkor $\frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{t}$.

Ezzel a jelöléssel az első egyenlet $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$ alakban írható fel.

Innen $2t^2 - 5t + 2 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

Az eredeti egyenletrendszer megoldását így két egyszerűbb egyenletrendszer megoldására vezettük vissza.

1) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = 2, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$ Innen $\begin{cases} x + y = 2x - 2y, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3y, \\ 10y^2 = 10. \end{cases}$

A második egyenletből kapjuk, hogy $y_1 = 1$ és $y_2 = -1$.

Akkor $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

2) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$ Innen $\begin{cases} 2x + 2y = x - y, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3y, \\ 10y^2 = 10. \end{cases}$

A második egyenletből kapjuk, hogy $y_3 = 1$ és $y_4 = -1$.
Akkor $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

Felelet: (3; 1), (–3; –1), (–3; 1), (3; –1). ◄

4. PÉLDA Oldjuk meg a $\begin{cases} 2x + 2y + xy = 8, \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 14 \end{cases}$ egyenletrendszert!

Megoldás. Megjegyezzük, hogy az adott egyenletrendszer nem változik, ha felcseréljük az ismeretleneket, az x-et y-ra, az y-t pedig x-re. Ebben az esetben célszerű $x + y = u$ és $xy = v$ új változókat bevezetni.

Írjuk át az adott egyenletrendszert az $\begin{cases} 2(x + y) + xy = 8, \\ (x + y)^2 - 2xy + 3(x + y) = 14 \end{cases}$ alakba!

Végezzük el a változócserét. Akkor a $\begin{cases} 2u + v = 8, \\ u^2 - 2v + 3u = 14 \end{cases}$ egyenletrendszert kapjuk.

Ezt a rendszer behelyettesítési módszerrel lehet megoldani (oldjátok meg önállóan). Azt kapjuk, hogy:

$$\begin{cases} u = 3, \\ v = 2 \end{cases} \text{vagy} \begin{cases} u = -10, \\ v = 28. \end{cases}$$

Két egyenletrendszer megoldása vár még ránk:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2 \end{cases} \text{és} \begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 28. \end{cases}$$

Mindegyik egyenlet megoldható behelyettesítéssel. Ebben az esetben viszont alkalmazhatjuk Viéte tételének megfordítását is. Tehát, az $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2 \end{cases}$ egyenlet gyökeire. Innen $t_1 = 1$ és $t_2 = 2$. Tehát az (1; 2) és (2; 1) számpárok ennek az egyenletrendszernek a megoldásai.

Alkalmazva Viéte tételének megfordítását (végezzétek el önállóan), könnyen belátható, hogy a második egyenletrendszernek nincs megoldása.

Felelet: (1; 2), (2; 1). ◄

1. Milyen módszerekkel lehet megoldani az egyenletrendszereket?
2. Magyarázd el az egyenletrendszerek megoldásának grafikus módszerét!
3. Milyen esetben legcélszerűbb alkalmazni a grafikus módszert?

GYAKORLATOK

13.1.° Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket grafikusan:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y + x^2 = 3, \\ y = x - 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = -12! \end{cases}$

13.2.° Oldd meg grafikusan az alábbi egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} y = x + 2, \\ xy = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ 2x + y = -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9! \end{cases}$

13.3.° Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket a behelyettesítés módszerével:

1) $\begin{cases} y = x + 3, \\ x^2 - 2y = 9; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x = 2, \\ x^2 - 2xy = 3; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = 15, \\ 2x - y = 7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - 4y = 2, \\ xy + 2y = 8; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = 8! \end{cases}$

13.4.° Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket a behelyettesítés módszerével:

1) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 28; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - 2x^2 = 2, \\ 3x + y = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2 - x = 14, \\ x - y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 8, \\ x + y = 6! \end{cases}$

13.5.˙ Állapítsd meg grafikusan, hány megoldása van az alábbi egyenletrendszereknek:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ y = x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy = -6, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = 2 - x^2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ y = 6 - x^2; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 - 4x + y = -1, \\ xy = 4! \end{cases}$

13.6.˙ Állapítsd meg grafikusan, hány megoldása van az alábbi egyenletrendszereknek:

1) $\begin{cases} y = (x - 5)^2, \\ xy = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x^2 = 1, \\ x^2 + y = 4x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - x = 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ xy = 1! \end{cases}$

13.7.˙ Oldd meg a következő egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} 3x + 4y = 24, \\ xy = 12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 5, \\ (x - 3)(y + 5) = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y + 2x = 0, \\ x^2 + y^2 - 6y = 0; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4y - 3x = 4, \\ 5x^2 + 16y = 60; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 19, \\ x - y = 7; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + 3xy + y^2 - x - 2y = 3, \\ x + y = 3! \end{cases}$

13.8.˙ Oldd meg a következő egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 63, \\ y - x = 3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (x - 1)(y - 2) = 2, \\ x + y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x^2 + xy + 2y^2 = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x - 2y = 3, \\ 3x^2 - 8y = -5! \end{cases}$

13.9.˙ Határozd meg rajz nélkül az alábbi alakzatok metszéspontjainak koordinátáit:

1) a $3x - y = 1$ egyenesnek és az $y = 3x^2 + 8x - 3$ parabolának;

2) a $2x - y = 2$ egyenesnek és az $y = \dfrac{4}{x}$ hiperbolának;

3) az $x + y = 1$ egyenesnek és az $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = 16$ körvonalnak;

4) az $y = x^2 - 4x + 7$ és az $y = 3 + 4x - x^2$ paraboláknak!

13.10.˙ Igazold, hogy az $y - x = 3$ egyenes érintője az $(x + 5)^2 + y^2 = 2$ körvonalnak, és határozd meg az érintési pont koordinátáit!

13.11.˙ Igazold, hogy:

1) az $y = -2x - 4$ egyenes nem metszi az $y = 6x^2 - 7x - 2$ parabolát;

2) az $y = 4x^2 - 3x + 6$ parabolának és az $y = x + 5$ egyenesnek egy közös pontja van, határozd meg az érintési pont koordinátáit;

3) az $y = 4x^2 - 3x - 24$ és az $y = 2x^2 - 5x$ paraboláknak két közös pontja van, határozd meg ezeknek a metszéspontoknak a koordinátáit!

13.12.˙ Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{12}, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{y} = 1, \\ x + 5y = 3! \end{cases}$

13.13.˙ Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{2}, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{5}, \\ 3x + y = 8! \end{cases}$

13.14.˙ Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ xy(x + y) = 20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y} = \dfrac{21}{10}, \\ x + y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{6y}{x} = 5, \\ x^2 + 4xy - 3y^2 = 18; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{6}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{y}{x} + xy = -10, \\ \dfrac{5y}{x} - 2xy = 13; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2y^2 + xy = 6, \\ 2x - y = 3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3(x + y)^2 + 2(x - 2y)^2 = 5, \\ 2(x - 2y) - x - y = 1! \end{cases}$

13.15.˙ Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2{,}5, \\ 2x-3y=3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x-2y}{x+y}-\dfrac{x+y}{x-2y}=\dfrac{15}{4}, \\ 4x+5y=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{y}=4, \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{x}=10; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{3}, \\ x^2-y^2=72; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 4(x-y)^2+7(x-y)=15, \\ 2x+5y=1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} (x-y)^2+2x=35+2y, \\ (x+y)^2+2y=3-2x! \end{cases}$

13.16.¨ Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x+y=1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3-y^3=28, \\ x^2+xy+y^2=7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-y^2=7, \\ xy=12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x^2-2y^2=19, \\ xy=-6! \end{cases}$

13.17.¨ Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} x^3-y^3=56, \\ x-y=2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x^2-y^2=-4, \\ xy=3! \end{cases}$

13.18.¨ Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} 3y-2xy=2, \\ x+2xy=5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy+y=30, \\ xy+x=28; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x^2-5xy+3x-2y=10, \\ 5xy-2x^2+7x-8y=10! \end{cases}$

13.19.¨ Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} x+y-xy=1, \\ x+y+xy=9; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3xy+2x=-4, \\ 3xy+y=-8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy-x=24, \\ xy-y=25; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x^2+y^2=66, \\ 2x^2-y^2=34! \end{cases}$

13.20.¨ Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} x^2-12xy+36y^2=36, \\ x+6y=8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} y^2-2xy=32, \\ x^2+6xy+9y^2=100; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2=25, \\ xy=12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 9x^2+y^2=10, \\ xy=-1! \end{cases}$

13.21.•• Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} x^2+10xy+25y^2=49, \\ x-5y=-3; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ xy=3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+4xy+4y^2=4x+2y, \\ x+2y=4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+25y^2=104, \\ xy=-4! \end{cases}$

13.22.•• Az a mely értékeire lesz az $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ x-y=a \end{cases}$ egyenletrendszernek:

1) egy megoldása;
2) két megoldása;
3) nincs megoldása?

13.23.•• A k mely értékeire lesz az $\begin{cases} y-x^2=4, \\ y=kx+3 \end{cases}$ egyenletrendszernek:

1) egy megoldása;
2) két megoldása;
3) nincs megoldása?

13.24.* Az a értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszereknek:

1) $\begin{cases} y=|x|, \\ x^2+y=a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ |x|=4; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y-x=1, \\ xy=a; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ y=x^2+a? \end{cases}$

13.25.* Az a értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszereknek:

1) $\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ |y|=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2=9, \\ y=a-|x|; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ xy=4? \end{cases}$

13.26.* Adva van az $ax^2+x+1=0$ és az $x^2+ax+1=0$ egyenlet. Határozd meg az a összes olyan értékét, melyre a két egyenletnek legalább egyik gyöke azonos!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

13.27. Bizonyítsd be, hogy a $25^{10}-5^{17}$ kifejezés értéke 31 többszöröse!

13.28. Egyszerűsítsd az $\dfrac{5a+5}{a^2-a}:\left(\dfrac{a+3}{a^2-1}-\dfrac{1}{a^2+a}\right)$ kifejezést!

13.29. Oldd meg a $\begin{cases} 2(x-3)\geqslant -3(x+2), \\ \dfrac{7x}{3}\leqslant 1-\dfrac{x}{2} \end{cases}$ egyenlőtlenségrendszert!

13.30. x_1 és x_2 az $x^2 + 6x - 2 = 0$ egyenlet gyökei. Határozd meg az $x_1^2 + x_2^2$ kifejezés értékét!

13.31. Rövidítsd le a kifejezést:

1) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$; 2) $\dfrac{7\sqrt{3}-21}{14\sqrt{3}}$; 3) $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{x-y}$!

KÉSZÜLJÜNK FEL A KÖVETKEZŐ TÉMÁHOZ

13.32. *(A „Kilenc fejezet a matematika művészetéről” ókori kínai könyvből.)* 5 ökör és 2 bárány 11 talentumba kerül, 2 ökör és 8 bárány pedig 8 talemtumba. Mennyibe kerül egy ökör és egy bárány külön-külön?

13.33. *(Leonardo Pisano (Fibonacci) feladata.)* Azt mondja az egyik ember a másiknak: Ha adsz nekem 7 dinárt, akkor én ötször gazdagabb leszek nálad. Erre azt mondja a másik: Adj te nekem 5 dinárt és akkor én hétszer gazdagabb leszek nálad. Mennyi pénzük van külön-külön?

13.34. *A* faluból *B* faluba, melyek között 140 km a távolság, egy motorkerékpáros indult el. 20 perccel később vele szembe *B* faluból *A* faluba útra kelt egy kerékpáros, aki az indulás után 2 órával találkozott a motorkerékpárossal. Határozd meg mindkettőjük sebességét, ha a motorkerékpáros 2 óra alatt 104 km-rel többet tesz meg, mint a kerékpáros 4 óra alatt!

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA

13.35. Létezik-e 100 olyan természetes szám, melyek közül bármennyi összege nem négyzetszám?

Ifjú matematikusok első országos olimpiája

Reméljük, hogy a 13.26. feladat tetszett nektek, és amikor megoldottátok, sikerélményetek volt. Erre a feladatra azért is érdemes odafigyelni, mert 1961-ben szerepelt az ifjú matematikusok első országos olimpiájának feladatai között.

Ukrajnában a matematikai olimpiák nagy hagyománnyal rendelkeznek. Az ifjú matematikusok első városi versenyét 1935-ben tartották meg Kijevben. Azóta már több, mint 80 év telt el. Ez alatt az idő alatt ezek a matematikai versenyek sok tehetséges fiatal számára az első lépéseket jelentették a tudomány felé vezető úton. Mára már az O. V. Pohorelov, Sz. H. Krejn, M. O. Krasznoszelszkij, V. H. Drinfeld nevek ismertté váltak a tudósvilágban. Ők valamennyien az ukrán országos matematikaversenyek győztesei voltak különböző korokban.

Megelégedéssel állapíthatjuk meg, hogy a matematikai olimpiák most is nagyon népszerűek Ukrajnában. Ebben a matematikai versenyben több tízezer tanuló vesz részt a különböző fordulókban. A szervezésbe be vannak vonva Ukrajna legkiválóbb tudósai, módszerészei, tanárai. Az ő lelkesedésüknek és hozzáértésüknek köszönhető, hogy Ukrajna csapata méltóan képviseli országunkat a nemzetközi matematikai diákolimpiákon.

Kedves gyerekek, nektek is ajánljuk, hogy vegyetek részt matematikai versenyeken. A továbbiakban az első országos matematikai olimpia néhány feladatával ismerkedhettek meg. Próbáljátok megoldani ezeket a feladatokat!

1. Az $x^2 + ax + b = 0$ és $x^2 + px + q = 0$ egyenleteknek van közös gyöke. Írd le azt a másodfokú egyenletet, melynek gyökei az előbbi egyenletek másik két gyöke!

2. Oldd meg az $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$ egyenletet!

3. Az A és B pont távolsága 999 km. Az út mentén kilométerkövek állnak. Minden kövön feltüntették, milyen messze van az A és B ponttól is:

0	999		1	998		2	997	...	999	0

Hány olyan kilométerkő van, amelyeken csak két különböző számjegy látható?

Olekszij Vasziljovics Pohorelov
(1919–2002)

Szalim Hrihorovics Krejn
(1917–1999)

Mark Olekszandrovics Krasznoszelszkij
(1920–1997)

Volodimir Hersonovics Drinfeld
(1954–)

14. A kétismeretlenes egyenletrendszerek mint alkalmazott matematikai modellek

Valószínű, napjainkban már nem létezik olyan tudományág, amely nem alkalmazná a matematika vívmányait. Fizikusok és kémikusok, csillagászok és biológusok, földrajzosok és közgazdászok, sőt még a nyelvészek és a történészek is alkalmaznak matematikai fogásokat.

Dmitro Olekszandrovics Grave
(1863–1939)

De miben is rejlik a „matematika eszközének” univerzitása?

„Sok tudományos feladat megoldásának kulcsa a jó fordítás a matematika nyelvére.” Ezt a választ adta az előbb feltett kérdésre Ukrajna Tudományos Akadémiája Matematikai Főiskolájának egyik alapítója és első igazgatója, D. O. Grave.

Válójában a különböző tudományágakban megfogalmazott problémák nem matematikai fogalmakat tartalmaznak. Ha egy matematikus részt vesz ilyen feladatok megoldásában, mindenféleképpen megpróbálja a feladatot megfogalmazni az „anyanyelvén”, a matematika nyelvén, vagyis megpróbálja leírni a problémát egy kifejezéssel, egy egyenlettel, egy képlettel, egy egyenlőtlenséggel, egy függvénnyel vagy egy grafikonnal. Ennek a fordításnak az eredményét nevezzük a feladat **matematikai modelljének,** magát a feladatot **alkalmazott matematikának.**

A *modell* kifejezést (latin eredetű, *modulus*, jelentése minta) gyakran használjuk: egy hajómodell, az atommag modellje, a Naprendszer modellje, valamely jelenség, folyamat modellje stb. Egy objektum modelljének vizsgálatával valójában magát az objektumot vizsgáljuk.

A matematikának azt az ágát, amely a matematikai modellek építésével, vizsgálatával foglalkozik, **matematikai modellezésnek** nevezzük.

Nézzünk néhány olyan feladatot, ahol a magasabb fokú egyenletrendszerek valóságos problémák matematikai modelljei.

1. PÉLDA Két helységből, melyek távolsága 18 km, egyszerre elindult egymás felé két turista és 2 óra múlva találkoztak. Mekkora sebességgel haladtak a turisták, ha az egyiknek az egész távolság megtételére 54 perccel több időre van szüksége, mint a másiknak?

Megoldás. Legyen az egyik turista sebessége x km/h, a másiké y km/h, $x < y$. A találkozásig az első turista $2x$ km-t tett meg, a másik pedig $2y$ km-t. Ketten együtt 18 km-t gyalogoltak. Ezért $2x + 2y = 18$.

A két helység közötti távolságot az első turista $\frac{18}{x}$ óra alatt tenné meg, a másik $\frac{18}{y}$ óra alatt. Mivel az első turistának 54 perc $= \frac{54}{60}$ óra $= \frac{9}{10}$ órával több időre van szüksége, ezért $\frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}$.

Egy egyenletrendszert kaptunk:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 18, \\ \dfrac{18}{x} - \dfrac{18}{y} = \dfrac{9}{10}. \end{cases}$$

Így $\begin{cases} x + y = 9, \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{10}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9 - y, \\ \dfrac{2}{9-y} - \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{10}. \end{cases}$

Megoldva az utolsó rendszer második egyenletét, azt kapjuk, hogy $y_1 = 5$, $y_2 = -36$. A -36 megoldás nem felel meg a feladat feltételeinek. Így $y = 5$ és $x = 4$.

Felelet: 4 km/h, 5 km/h. ◀

2. PÉLDA Két munkás az adott feladatot 10 nap alatt végzi el. 6 nap közös munka után az egyik munkást átirányították egy másik feladatra. A másik folytatta a megkezdett munkát, és két nap után megállapította, hogy az egész munka $\frac{2}{3}$-a van elvégezve. Hány nap alatt végzett volna külön-külön a két munkás a kijelölt feladattal?

Megoldás. Jelöljük x-szel azon napok számát, ami alatt az egyik munkás el tudja végezni a kijelölt feladatot, és y-nal azokat a napokat, amely alatt a másik munkás végezne. Egy nap alatt az egyik munkás a feladat $\frac{1}{x}$-ed részét végzi el, 10 nap alatt $\frac{10}{x}$-ét. A másik munkás egy nap alatt a feladat $\frac{1}{y}$ részével készül el, 10 nap alatt $\frac{10}{y}$-val. Mivel 10 nap alatt befejezik a rájuk bízott munkát, így: $\frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1$.

Az első munkás 6 napot dolgozott és a feladat $\frac{6}{x}$ részével készült el, a másik munkás 8 napot dolgozott, így ő a $\frac{8}{y}$ részét végezte el. Mivel ez azt eredményezte, hogy a munka $\frac{2}{3}$-ával készültek el, ezért $\frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3}$.

Egy egyenletrendszert kaptunk:

$$\begin{cases} \frac{10}{x}+\frac{10}{y}=1, \\ \frac{6}{x}+\frac{8}{y}=\frac{2}{3}, \end{cases}$$

melynek megoldása az $x = 15$, $y = 30$. Tehát az első munkás egyedül 15 nap alatt fejezné be a kijelölt feladatot, míg a másik 30 nap alatt.

Felelet: 15 nap, 30 nap. ◀

3. PÉLDA Egy kétjegyű számot elosztottunk számjegyei szorzatával. A hányados 5 lett és a maradék 2. Ennek a számnak és a számjegyek felcserélésével kapott számnak a különbsége 36. Határozd meg ezt a számot!

Megoldás. Jelöljük a keresett számban a 10-esek helyiértékén álló számjegyet x-szel, az egyesek helyiértékén állót y-nal. Akkor a keresett szám $10x + y$. Mivel ennek a számnak és xy-nak a hányadosa 5 és maradék 2, ezért $10x + y = 5xy + 2$.

A számjegyek felcserélésével felírt szám $10y + x$. A feltételek alapján $(10x + y) – (10y + x) = 36$.

A $\begin{cases} 10x+y=5xy+2, \\ (10x+y)-(10y+x)=36 \end{cases}$ egyenletrendszert kaptuk, melynek a megoldása $x = 6$, $y = 2$, vagy $x = 0{,}2$, $y = –3{,}8$. A második számpár nem felel meg a feladat feltételeinek.

Tehát a keresett szám a 62.

Felelet: 62. ◀

?

1. Mit értünk matematikai modellen?
2. Mely feladatokat soroljuk az alkalmazott matematikához?
3. Mit nevezünk matematikai modellezésnek?

GYAKORLATOK

14.1.° Két természetes szám különbsége 3, szorzatuk 87-tel több összegüknél. Melyek ezek a számok?

14.2.° Két természetes szám négyzetének különbsége 20, a nagyobbik számnak és a kisebbik kétszeresének az összege 14. Melyek ezek a számok?

14.3.° Egy 2400 m^2 területű téglalap alakú földrészleget bekerítettek. A kerítés hossza 220 m. Mekkora a földrészleg szélessége és hossza?

14.4.° Egy téglalap kerülete 32 cm. A szomszédos oldalakra rajzolt négyzetek területeinek összege pedig 130 cm^2. Határozd meg a téglalap oldalait!

14.5.˙ Melyik az a kétjegyű szám, amelyik négyszerese a számjegyei összegének, és kétszerese a számjegyei szorzatának?

14.6.˙ Egy kétjegyű számnak és számjegyei összegének a hányadosa 7, a maradék pedig 6. De ha ezt a számot elosztjuk a számjegyei szorzatával, akkor a hányados 5 és a maradék 2. Határozd meg ezt a számot!

14.7.˙ Egy kétjegyű szám 7-szerese a számjegyei összegének és 52-vel nagyobb a számjegyei szorzatánál. Határozd meg ezt a számot!

14.8.˙ Két természetes szám összege 12, reciprokaik összege pedig $\frac{1}{8}$. Határozd meg ezeket a számokat!

14.9.˙ Két természetes szám összege 15, reciprokaik különbsége pedig $\frac{1}{18}$. Határozd meg ezeket a számokat!

14.10.˙ Egy derékszögű háromszög átfogója 13 cm. Területe 30 cm^2. Mekkorák a befogói?

14.11.˙ Egy derékszögű háromszög kerülete 40 cm, egyik befogója 8 cm. Számítsd ki a másik befogót és az átfogót!

14.12.˙ Egy téglalap területe 180 cm^2. Ha az egyik oldalát 3 cm-rel, a másikat pedig 2 cm-rel csökkentjük, akkor a kapott téglalap területe 120 cm^2 lesz. Határozd meg a téglalap eredeti méreteit!

14.13.˙ Ha egy téglalap hosszúságát 3 cm-rel csökkentjük, a szélességét pedig 2 cm-rel növeljük, akkor a területe 6 cm^2-rel nő. Ha a hosszúságát 5 cm-rel csökkentjük, a szélességét pedig 3 cm-rel növeljük, akkor a területe nem változik. Mekkorák a téglalap oldalai?

14.14.˙ Egy téglalap alakú fémlemezből fedél nélküli dobozt készítettek. Ehhez a sarkokból kivágtak 4 cm oldalhosszúságú négyzeteket. Határozd meg a lemez szélességét és hosszát, ha a kerülete 60 cm, a doboz térfogata pedig 160 cm^3!

14.15.˙ Az *A* és *B* városból egyszerre elindult egymással szembe két motorkerékpáros. Egy óra múlva találkoztak, de megállás nélkül ugyanolyan sebességgel folytatták útjukat. Az egyik motoros 35 perccel hamarabb ért az *A* városba, mint a másik a *B* városba. Határozd meg a motorkerékpárosok sebességét, ha a két város között a távolság 140 km!

14.16.˙ Az *M* állomásról a tőle 300 km lévő *N* állomásra egy tehervonat indult el. 40 perccel később az *N* állomásról az *M* állomásra egy gyorsvonat indult el, és két óra múlva találkozott a tehervonattal. A tehervonat az *M* és *N* állomások közötti távolságot 3 óra 20 perccel több idő alatt tette meg, mint a gyorsvonat. Határozd meg a vonatok sebességét!

14.17.˙ Az egyik városból egy másikba, melyek között a távolság 240 km, egyszerre elindult egy autóbusz és egy személygépkocsi. Az autóbusz egy órával később érkezett meg. Határozd meg a személygépkocsi és az autóbusz sebességét, ha az autóbusz 2 óra alatt 40 km-rel többet tesz meg, mint a személygépkocsi 1 óra alatt, és egyikük sebessége sem haladja meg a 90 km/h-t!

14.18.˙ A 800 m-es körpályán egy irányba két gyorskorcsolyázó halad. Az egyik korcsolyázó 24 másodperccel gyorsabban tesz meg egy kört, mint a másik, így 8 percenként utoléri a másik korcsolyázót. Határozd meg mindkét korcsolyázó sebességét!

14.19.˙ Két brigád együtt 8 nap alatt végzi el a munkát. Ha a munka $\frac{1}{3}$-át az egyik brigád végzi el, majd a másik átveszi, akkor 20 nap alatt készülnek el. Hány nap alatt végezné el külön-külön ezt a munkát a két brigád?

14.20.˙ Két brigád együtt 6 óra alatt pakol ki egy tehervonatot. Az első brigád elvégezte a munka $\frac{3}{5}$-ét, majd felváltotta őket a másik brigád, akik be is fejezték a kirakodást. Így 12 óra alatt végeztek a munkával. Hány óra alatt végzett volna ezzel a munkával külön-külön mindegyik brigád?

14.21.˙ Egyszerre két csapon keresztül 12 óra alatt lehet feltölteni vízzel a medencét. Ha 5 órán keresztül az egyik csapot nyitják ki, majd 9 órán keresztül a másikat, akkor a medence fele telik meg vízzel. Hány óra alatt lehet feltölteni a medencét külön-külön a két csapon keresztül?

14.22.˙ Két traktorista 6 óra alatt szántja fel a mezőt. Ha az egyik traktorista 4 órát dolgozik, majd a másik folytatja, akkor a második 9 óra múlva befejezi a szántást. Hány óra alatt szántja fel ezt a földterületet külön-külön a két traktorista?

14.23.˙ Két vezető soros kapcsolásakor az ellenállás 150 Ohm, párhuzamos kapcsolásuknál 36 Ohm. Határozd meg a két vezető eredő ellenállását!

14.24.˙ Három azonos ellenállású és egy tőlük különböző ellenállású vezető soros kapcsolásánál az áramkör ellenállása 18 Ohm. Ha párhuzamosan kapcsolunk egyet-egyet a különböző ellenállású vezetőkből, akkor 24 V feszültségnél az áramkörben az áramerősség 10 A. Határozd meg mindkét vezető ellenállását!

14.25.¨ Egy csónak az A kikötőből a B kikötőbe, majd vissza 6 óra alatt tette meg az utat. Határozd meg a folyó sebességét, ha a csónak 2 óra alatt a folyón lefelé akkora távolságot tesz meg, mint 1 óra alatt a folyón felfelé, az A és a B kikötő között a távolság 16 km!

14.26.¨ Egy hajó 3 óra alatt tesz meg 48 km-t a folyón felfelé és 30 km-t lefelé, 15 km megtételére a folyón lefelé 1 órával kevesebb időre van szüksége, mint 36 km megtételére felfelé. Határozd meg a hajó sebességét állóvízben és a folyó sebességét!

14.27.¨ Anna és Kata egyszerre indultak el egymással szembe kerékpáron az egymástól 40 km-re lévő A és B városból. Anna a találkozásuk után 40 perccel érkezett meg B városba, Kata pedig 1,5 óra múlva az A városba. Számítsd ki a lányok sebességét!

14.28.$^{\cdot\cdot}$ Péter és László egyszerre indult el gyalogosan a faluból egy irányba. Péter sebessége 3 km/h, Lászlóé 4 km/h. Fél óra múlva ugyanebből a faluból elindult Irénke kerékpáron, aki utolérte Pétert, majd 15 perc múlva Lászlót is. Határozd meg Irénke sebességét!

14.29.$^{\cdot\cdot}$ Az *A* és *B* kikötő között a távolság 28 km. Az *A* kikötőből a *B* kikötőbe tartó hajó 2 órával az indulás után utolért egy tutajt, ami a hajó indulása előtt 2 órával indult el a *B* kikötőből a folyón lefelé. Számítsd ki a hajó sebességét állóvízben és a folyó sebességét is, ha a hajó 4 óra 48 perc alatt teszi meg az utat *A*-ból *B*-be és vissza!

14.30.$^{\cdot\cdot}$ Az egyik fémöntvény tömege 336 g, a másiké 320 g. Az első öntvény térfogata 10 cm^3-rel kevesebb, a sűrűsége pedig 2 g/cm^3-rel több, mint a másiké. Határozd meg mindkét öntvény sűrűségét!

14.31.$^{\cdot\cdot}$ Két egy pontra ható, egymásra merőleges erő eredőjének abszolút értéke 25 N. Ha az egyik erő nagyságát 8 N-nal csökkentjük, a másikét 4 N-nal növeljük, akkor az eredő erő nem változik. Határozd meg az erők nagyságát!

14.32.$^{\cdot\cdot}$ Egy derékszög két szárán a szög csúcsa felé két test halad. Az egyik test sebessége 12 m/min, a másiké 16 m/min. Egy adott pillanatban a két test között 100 m volt a távolság. Két perc múlva a távolság már csak 60 méter volt. Milyen messze voltak ezek a testek a szög csúcsától az első mért időpontban?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

14.33. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $\dfrac{2}{a^2-3a}-\dfrac{1}{a^2+3a}-\dfrac{a+1}{a^2-9}$;

2) $\dfrac{3}{b-2}-\dfrac{3b-2}{b^2+2b+4}-\dfrac{b^2+16b+12}{b^3-8}$!

14.34. Gyöktelenítsd az alábbi törtek nevezőjét:

1) $\dfrac{4a}{5\sqrt{a}}$; 2) $\dfrac{3}{\sqrt{b}-1}$; 3) $\dfrac{5}{\sqrt{6}-1}$; 4) $\dfrac{2}{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}}$!

14.35. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $1{,}1(5x-4) \leqslant 0{,}2(10x+13)$;

2) $\frac{0{,}6-5y}{4} < \frac{0{,}5-5y}{6}$!

14.36. Határozd meg a $(2x + 1)(x + 4) - 3x(x + 2) > 0$ egyenlőtlenség legnagyobb egész megoldását!

14.37. Az ismeretlen mely értékeire értelmezhető a $\sqrt{12-5x}+\sqrt{2x+1}$ kifejezés?

14.38. Határozd meg, milyen intervallumokon csökkenek az alábbi függvények:

1) $y = 2x^2 + 10x - 9$; 2) $y = 5x - 3x^2$!

14.39. 1840. december 14-én Párizsban egy matematikai tudományok akadémikusaiból álló bizottság azért ült össze, hogy tanulmányozza egy tehetséges kisfiú, Henri Monde matematikai képességeit, aki kimagaslóan számolt. Oldd meg a Monde-nek kitűzött egyik feladatot, amit ő szóban oldott meg: „Melyik két természetes szám négyzetének a különbsége 133”?

TUDÁSPRÓBA
3. TESZTFELADAT

1. Mely x értékekre igaz az $x^2 > 0$ egyenlőtlenség?

A) $x > 2$; C) $x < -2$ vagy $x > 2$;

B) $x > 2$ vagy $x > -2$; D) $-2 < x < 2$.

2. Az alábbi intervallumok közül melyik az $x^2 + 8x - 9 \geqslant 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza?

A) $(-\infty; -9) \cup (1; +\infty)$; C) $(-\infty; -1) \cup (9; +\infty)$;

B) $(-\infty; -9] \cup [1; +\infty)$; D) $(-\infty; -1] \cup [9; +\infty)$.

3. Hány egész megoldása van a $3x^2 + 5x - 8 < 0$ egyenlőtlenségnek?

A) 3; B) 4; C) 5; D) 6.

4. Az alábbi egyenlőtlenségek közül melyik igaz bármely valós számra?

A) $x^2 - 14x + 49 > 0$; C) $x^2 - 3x + 4 > 0$;

B) $-3x^2 + x + 2 \leqslant 0$; D) $-x^2 + 7x - 10 < 0$.

5. Mi az $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{8x - 4x^2}}$ függvény értelmezési tartománya?

A) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$; C) $[0; 2]$;

B) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$; D) $(0; 2)$.

6. Az alábbi egyenlőtlenségek közül melyiknek nincs megoldása?

A) $x^2 - 6x + 10 < 0$; C) $-3x^2 + 8x + 3 < 0$;

B) $-5x^2 + 3x + 2 > 0$; D) $-x^2 - 10x > 0$.

7. Az $(x_1; y_1)$ és $(x_2; y_2)$ számpárok az $\begin{cases} y - x = 2, \\ xy - y = 10 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldásai.

Mennyi az $x_1y_1 + x_2y_2$ kifejezés értéke?

A) 23; B) 7; C) 35; D) –26.

8. Milyen görbéket határoznak meg az $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = -3 \end{cases}$ egyenletrendszer egyenletei?

A) egyenes és parabola; C) körvonal és hiperbola;

B) körvonal és parabola; D) parabola és hiperbola.

9. Hány megoldása van az $\begin{cases} x^2 - y = 4, \\ x + y = 1 \end{cases}$ egyenletrendszernek?

A) nincs megoldása; C) kettő;

B) egy; D) négy.

10. Mennyi az $x + y$ kifejezés legnagyobb értéke, ha az $(x; y)$ számpár az $\begin{cases} x - y = 5, \\ x^2 + 2xy - y^2 = -7 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása?

A) 1; B) 6; C) 0; D) –5.

11. Az $(a; b)$ számpár a $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = 4, \\ \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{y} = 9 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldása. Mennyi az $a - b$ kifejezés értéke?

A) 5; B) 1; C) $\dfrac{1}{6}$; D) $\dfrac{5}{6}$.

12. Az $(x_1; y_1)$ és $(x_2; y_2)$ számpárok az $\begin{cases} 2x - xy = 5, \\ y + xy = 6 \end{cases}$ egyenletrendszer megoldásai. Mennyi az $|x_1y_1 + x_2y_2|$ kifejezés értéke?

A) 1; B) 11; C) 70; D) 10.

13. Egy téglalap kerülete 34 cm, átlója 13 cm. Jelöljük x-szel a téglalap egyik oldalát, y-nal a másik oldalát. Alkalmazva ezt a jelölést határozd meg, az alábbi egyenletrendszerek közül melyik az adott feladat matematikai modellje?

A) $\begin{cases} x + y = 34, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$ C) $\begin{cases} x + y = 34, \\ x^2 + y^2 = 169; \end{cases}$

B) $\begin{cases} 2(x + y) = 34, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$ D) $\begin{cases} 2(x + y) = 34, \\ x^2 + y^2 = 169. \end{cases}$

14. A két város közötti 120 km-es távolságot egy személygépkocsi 30 perccel gyorsabban teszi meg, mint egy tehergépkocsi. Ismeretes továbbá, hogy a tehergépkocsi 2 óra alatt 40 km-rel nagyobb távolságot tesz meg, mint a személygépkocsi 1 óra alatt.

Jelöljük a tehergépkocsi sebességét x km/h-val, a személygépkocsi sebességét pedig y km/h-val. Alkalmazva ezt a jelölést határozd meg, az alábbi egyenletrendszerek közül, melyik lesz az adott szituáció matematikai modellje?

A) $\begin{cases} \dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{y} = 30, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$ C) $\begin{cases} \dfrac{120}{x} - \dfrac{120}{y} = \dfrac{1}{2}, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$

B) $\begin{cases} \dfrac{120}{y} - \dfrac{120}{x} = 30, \\ 2x - y = 40; \end{cases}$ D) $\begin{cases} \dfrac{120}{y} - \dfrac{120}{x} = \dfrac{1}{2}, \\ 2x - y = 40. \end{cases}$

15. A 8.-os algebrakönyv begépelésével két munkás 8 nap alatt végez. Ha az egyikük begépeli a szöveg $\frac{2}{3}$-át, majd a másik fejezi be, akkor 16 nap alatt gépelik le az egész könyvet.
Jelöljük *x*-szel azoknak a napoknak a számát, amennyi alatt az egyik gépíró egyedül begépeli a teljes szöveget, *y*-nal pedig azokat, ahány nap alatt egyedül begépeli a teljes szöveget a másik gépíró. Ezekkel a jelölésekkel melyik egyenletrendszer lesz ennek a feladatnak a matematikai modellje?

A) $\begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 16; \end{cases}$

C) $\begin{cases} x + y = 8, \\ \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y = 16; \end{cases}$

B) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{16}; \end{cases}$

D) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y = 16. \end{cases}$

16. A *b* mely értékeire nincs gyöke a $3x^2 - bx + 3 = 0$ egyenletnek?

A) $-6 < b < 6$;
C) $b > 6$;
B) $b < 6$;
D) $b < -6$ vagy $b > 6$.

17. Az *a* mely értékeire van az $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x - y = a \end{cases}$ egyenletrendszernek egy megoldása?

A) $a = 5$;
C) $a = -5$ vagy $a = 5$;
B) $a = 5\sqrt{2}$;
D) $a = -5\sqrt{2}$ vagy $a = 5\sqrt{2}$.

18. Az *a* mely értékeire nincs megoldása az $ax^2 - 2x + a < 0$ egyenlőtlenségnek?

A) $a < -1$ vagy $a > 1$;
C) $-1 < a < 1$;
B) $a \geqslant 1$;
D) nem létezik ilyen érték.

A 2. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Függvény

Legyen X a független változó értékeinek halmaza, Y a függő változó értékeinek halmaza. A függvény olyan egyértelmű hozzárendelés, amely az X halmaz minden eleméhez megfelelteti az Y halmaz egyetlen elemét.

A függvény zérushelye

Az argumentum azon értékét, melyre a függvényérték nulla, a függvény zérushelyének nevezzük.

A függvény állandó előjelű

Azon az intervallumon, ahol bármely argumentum értékre a függvényértékek azonos előjelűek.

Növekvő és csökkenő függvény

Egy függvény növekvő az adott intervallumon, ha bármely, az intervallumhoz tartozó nagyobb argumentumértékhez nagyobb függvényérték tartozik.
Egy függvény csökkenő az adott intervallumon, ha bármely, az intervallumhoz tartozó nagyobb argumentumértékhez kisebb függvényérték tartozik.

Az $y = kf(x)$ függvény ábrázolása

Az $y = kf(x)$ függvény grafikonját megkaphatjuk az $y = f(x)$ függvény grafikonjából k-szoros nyújtással az y tengely mentén (az x tengelytől), ha $k > 1$ és $\frac{1}{k}$ - szoros zsugorítással az y tengely mentén (az x tengelytől), ha $0 < k < 1$.

Az $y = f(x) + b$ függvény ábrázolása

Az $y = f(x) + b$ függvény grafikonját megkaphatjuk az $y = f(x)$ függvény grafikonjából párhuzamos eltolással az y tengely mentén felfelé b egységgel, ha $b > 0$ és $-b$ egységgel lefelé, ha $b < 0$.

Az $y = f(x + a)$ függvény ábrázolása

Az $y = f(x + a)$ függvény grafikonját megkaphatjuk az $y = f(x)$ függvény grafikonjából párhuzamos eltolással az x tengely mentén balra a egységgel, ha $a > 0$ és $-a$ egységgel jobbra, ha $a < 0$.

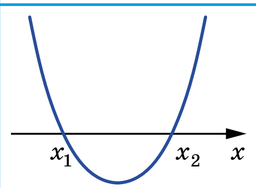
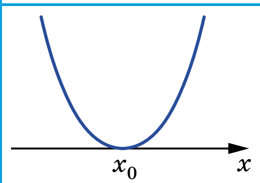
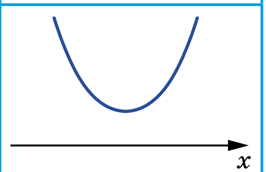
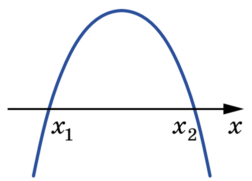
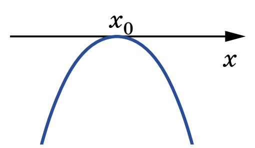
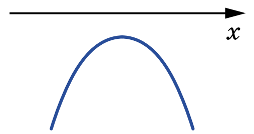
Másodfokú függvény

Az $y = ax^2 + bx + c$ képlettel megadható függvényt, ahol x a független változó, a, b és c bármely szám, $a \neq 0$, másodfokú függvénynek nevezzük.

Másodfokú egyenlőtlenségek

Az $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ alakú egyenlőtlenségeket, ahol x az ismeretlen, a, b és c valamely szám, $a \neq 0$, másodfokú egyenlőtlenségnek nevezzük.

Az $y = ax^2 + bx + c$ parabola elhelyezkedése a koordináta-rendszerben

	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$a>0$			
$a<0$			

3. §. SZÁMSOROZATOK

- Ebben a paragrafusban olyan új fogalmakkal ismerkedhetsz meg, mint a sorozat, a sorozat n-edik tagja (általános tagja), számtani és mértani sorozat, véges és végtelen sorozatok, hogyan lehet megadni egy sorozatot.
- Megtanulod meghatározni a sorozatok tagjait, kiszámítani a sorozat első n tagjának összegét.

15. Számsorozatok

Gyakran a mindennapi életben olyan objektumokkal találkozhatunk, melyeket könnyebb kezelni, ha megszámozzuk őket. Például sorszámmal rendelkeznek a hónapok, a negyedévek, a hetek, a lépcsőházak és a lakások, a vagonok, sőt minden osztálytársadnak is van az osztálykönyvben sorszáma.

Az 1, 2, 3, …, n, …, természetes számokkal sorszámozott objektumok **sorozatot** alkotnak.

Így beszélhetünk egy könyv lapjainak a sorozatáról, egy szóban a betűk sorozatáról, egy ház szintjeinek sorozatáról.

Azokat az objektumokat, amelyek a sorozatot alkotják, a **sorozat tagjainak** nevezzük. A sorozat minden tagjának van saját sorszáma. Például a január az év **első** hónapja, a 3 a prímszámok sorozatának **második** tagja. Összességében, ha a sorozat egyik tagjának a sorszáma n, akkor ezt a tagot a sorozat ***n*-edik tagjának** nevezzük.

Ha egy sorozat tagjai számok, akkor az ilyen sorozatot **számsorozatnak** nevezzük.

Mutatunk néhány példát számsorozatokra.

1, 2, 3, 4, 5, …. – természetes számok sorozata;

2, 4, 6, 8, 10, … – páros számok sorozata;

0,3; 0,33; 0,333; … – az $\frac{1}{3}$ közelítő értékeinek sorozata;

19, 38, 57, 76, 95 – 19 kéthegyű többszöröseinek sorozata;

–1, –2, –3, –4, –5, … – a negatív egész számok sorozata.

A továbbiakban csak a számsorozatokkal fogunk foglalkozni.

Egy sorozat lehet **véges** és **végtelen**. Például a páros természetes számok sorozata végtelen, míg 19 kétjegyű többszöröseinek a sorozata véges.

A sorozat tagjainak a jelölésére betűket használunk, alsó indexben tüntetjük fel a sorszámát:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$$

Maga a sorozat jelölésére zárójelet használunk: (a_n). Például, ha (p_n) prímszámok sorozata, akkor $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$, és így tovább.

Egy sorozat akkor van megadva, ha bármelyik tagja meghatározható a sorszámából.

Ismerkedjünk meg a sorozatok megadási módjaival.

Vizsgáljuk meg azt a sorozatot, melynek első tagja 1, minden következő tagja pedig 3-mal több az előtte lévő tagnál. Az ilyen megadási módot **leíró** megadásnak nevezzük. Ezt a megadást jelölhetjük három ponttal is, azaz megadjuk a sorozat néhány első tagját, a sorszámuk növekedésében:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, ...$$

Ezt a megadási módot akkor célszerű használni, ha egyértelmű, hogy milyen számok kerülnek a három pont helyére.

Például, az általunk vizsgált sorozatban érthető, hogy a következő szám a 22.

Ha egy sorozat véges, akkor táblázattal is megadható. Például az alábbi táblázat az egyjegyű számok köbeinek sorozatát adja meg.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	8	27	64	125	216	343	512	729

A sorozatot képlettel is meg lehet adni. Például az $x_n = 2^n$ képletben az n természetes szám, és a 2 természetes hatványainak (x_n) sorozatát adja meg:

$$2, 4, 8, 16, 32, ...$$

Ebben az esetben a sorozatot az ***n*-edik (általános) tagjának képletével** adtuk meg.

Tekintsünk át néhány példát!

Az $a_n = 2n - 1$ képlettel lehet megadni a páratlan természetes számok sorozatát:

$$1, 3, 5, 7, 9, ...$$

Az $y_n = (-1)^n$ képlet egy olyan (y_n) sorozatot ad meg, melynek minden páratlan sorszámú tagja –1, minden páros sorszámú tagja pedig 1:

$$-1, 1, -1, 1, -1, \dots .$$

A $c_n = 7$ képlet egy (c_n) sorozatot add meg, melynek minden tagja 7:

$$7, 7, 7, 7, 7, \dots .$$

A sorozatok megadásának eddig vizsgált módjai segítenek megérteni az összefüggést a *függvény* és a *sorozat* fogalma között.

Vizsgáljuk meg a természetes számok halmazán vagy annak az első n részhalmazán értelmezett $y = f(x)$ függvényt! Akkor az f függvény egy végtelen $f(1)$, $f(2)$, …, $f(n)$, … vagy egy véges $f(1)$, $f(2)$, …, $f(n)$ sorozatot ad meg.

Például, ha a természetes számok halmazán értelmezett függvény hozzárendelési szabálya $f(x) = x^2$, akkor ez a függvény a négyzetszámok sorozatát adja meg:

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots .$$

Gyakran a sorozatot olyan képlettel adják meg, ahol a sorozat tagjait úgy tudjuk meghatározni, ha ismerjük az előtte álló tagot.

Vizsgáljuk meg az (a_n) sorozatot, melynek első tagja 1, minden következő tag pedig az előtte álló tag háromszorosa:

$$1, 3, 9, 27, 81, \dots .$$

Ezt a sorozatot meghatározzák az $a_1 = 1$ és $a_{n+1} = 3a_n$ feltételek.

Ezek az egyenlőségek megadják a sorozat első tagját és azt a szabályt, amelylyel kiszámítható a rákövetkező tag:

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 3a_1 = 3,$$
$$a_3 = 3a_2 = 9,$$
$$a_4 = 3a_3 = 27,$$
stb.

Azt a megadási módot, amelyben egy vagy több megelőző tagból kiszámítható a rákövetkező tag, **rekurzív** (*recurro* latin eredetű, jelentése ismétlődik) képletnek nevezzük. Az előző példánkban ez az $a_{n+1} = 3a_n$. Azokat a feltételeket, melyek megadják a sorozat első tagját vagy néhány első tagját, **kezdeti feltételeknek** nevezzük. Az általunk vizsgált sorozatban ez az $a_1 = 1$ egyenlőség.

Azt a megadási módot, amikor a sorozatot kezdeti feltétellel és rekurzív képlettel adjuk meg, **rekurzív megadási módnak** nevezzük.

A rekurzív megadási módnál az első tag, vagy néhány első tag ismeretében a megadott képlettel egymás után számíthatjuk ki a sorozat további tagjait. Ebből a megfontolásból a sorozat megadása n-edik tagjának a képletével kényelmesebb, mert rögtön meghatározható a keresett tag.

PÉLDA A (c_n) sorozat n-edik tagjának képletével van megadva: $c_n = 37 - 3n$. Tagja-e ennek a sorozatnak: 1) 19; 2) –7? Ha igen, akkor hányadik tagja?

Megoldás. 1) Ha 19 tagja ennek a sorozatnak, akkor létezik olyan természetes n szám, melyre teljesül a $37 - 3n = 19$ egyenlőség. Innen $3n = 18$, $n = 6$. Tehát a 19-es szám a (c_n) sorozat hatodik tagja.

2) $37 - 3n = -7$; $3n = 44$; $n = 14\frac{2}{3}$. Mivel $14\frac{2}{3}$ nem természetes szám, ezért a –7 nem tagja ennek a sorozatnak.

Felelet. 1) igen, $n = 6$; 2) nem. ◄

?

1. Mit alkotnak a természetes számokkal sorszámozott objektumok?
2. Hogyan nevezzük a sorozatot alkotó objektumokat?
3. Hogyan nevezzük a sorozatnak azt a tagját, melynek a sorszáma n?
4. Milyen sorozatot nevezünk számsorozatnak?
5. Mikor mondhatjuk, hogy egy sorozat adva van?
6. Milyen megadási módjai vannak egy sorozatnak?
7. Magyarázd meg, mi az n-edik tag képlete?
8. Milyen összefüggés van a *függvény* és a sorozat *fogalmak* között?
9. Mi a rekurzív képlet?

GYAKORLATOK

15.1.° Írd le az alábbi sorozatok első öt tagját:

1) 4 kétjegyű többszörösei;

2) a 11 számlálójú áltörtek;

3) azok a természetes számok, melyek 8-cal való osztási maradéka 5!

Állapítsd meg, végesek vagy végtelenek ezek a sorozatot!

15.2.° Az (a_n) sorozat tagjai 5 háromjegyű többszörösei növekvő sorrendben. Töltsd ki az alábbi táblázatot!

n	1	2	3	4	5	6
a_n						

15.3.° Határozd meg az (a_n) sorozat első négy tagját, ha n-edik tagjának képlete:

1) $a_n = n + 4$; 2) $a_n = 4n - 3$; 3) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$; 4) $a_n = \frac{2^n}{n}$!

15.4.° Határozd meg a (b_n) sorozat második, hetedik és századik tagját, ha n-edik tagjának képlete:

1) $b_n = \frac{10}{n}$; 2) $b_n = 5 - 2n$; 3) $b_n = n^2 + 2n$; 4) $b_n = (-1)^{n+1}$!

15.5.° A (c_n) sorozat n-edik tagjának képlete $c_n = (-1)^n \cdot 5$. Határozd meg:

1) c_1; 2) c_8; 3) c_{2k}; 4) c_{2k+1}; 5) c_{k+2}!

15.6.° A (x_n) sorozat n-edik tagjának képlete $x_n = 3n + 1$. Határozd meg:

1) x_1; 2) x_7; 3) x_{20}; 4) x_{300}; 5) x_{k+1}!

15.7.° Határozd meg az (a_n) sorozat első öt tagját, ha:

1) $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3$;

2) $a_1 = -2$, $a_2 = 6$, $a_{n+2} = 3a_n + a_{n+1}$!

15.8.° Határozd meg a (b_n) sorozat első öt tagját, ha:

1) $b_1 = 18$, $b_{n+1} = -\frac{b_n}{3}$;

2) $b_1 = -1$, $b_2 = 2$, $b_{n+2} = b_n^2 + 2b_{n+1}$!

15.9.˙ Az (a_n) sorozat általános tagjának képlete $a_n = 7n + 2$. Tagja-e ennek a sorozatnak: 1) 23; 2) 149; 3) 47? Ha igen, akkor hányadik tagja?

15.10.˙ A (b_n) sorozat általános tagjának képlete $a_n = n^2 - 4$. Tagja-e ennek a sorozatnak: 1) 5; 2) 16; 3) 77? Ha igen, akkor hányadik tagja?

15.11.˙ Hány negatív tagja van az (x_n) sorozatnak, ha $x_n = 6n - 50$?

15.12.˙ Határozd meg az (y_n) sorozat első negatív tagjának sorszámát, ha $y_n = 38 - 3n$!

15.13.¨ Az (a_n) sorozat n-edik tagjának képlete $a_n = n^2 - 3n - 8$. Határozd meg ebben a sorozatban a 10-nél kisebb tagok sorszámát!

15.14.¨ A (b_n) sorozat n-edik tagjának képlete $b_n = -n^2 + 15n - 20$. Hány olyan tagja van ennek a sorozatnak, amely 16-nál nagyobb?

15.15.¨ Add meg az alábbi sorozatok általános tagjának egyik lehetséges képletét:

1) 1, 4, 9, 25, ...;

2) 5, 8, 11, 14, 17, ...;

3) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...;$

4) 0, 2, 0, 2, 0, ... !

15.16.¨ Add meg az alábbi sorozatok általános tagjának egyik lehetséges képletét:

1) 2, 9, 28, 65, 126, ...;

2) $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, ...$!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

15.17. Egyszerűsítsd az alábbi törteket;

1) $\frac{3x^2 - 7x + 2}{2 - 6x}$;

2) $\frac{5xy - 5x - 2y + 2}{10x^2 - 9x + 2}$!

15.18. Határozd meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

1) $y = \frac{\sqrt{2 - x}}{x + 2}$;

2) $y = \frac{\sqrt{6 - 5x - x^2}}{x - 1}$!

15.19. Egy másodfokú függvény grafikonja olyan parabola, melynek csúcsa az origó, és illeszkedik az $A\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$ pontra. Add meg ennek a függvénynek a hozzárendelési szabályát!

15.20. Egy munkás úgy tervezte, hogy meghatározott idő alatt 160 alkatrészt gyárt le. Viszont 3 nappal korábban végzett, mint ahogy tervezte, mert naponta 12 alkatrésszel többet készített el. Hány alkatrészt gyártott le óránként ez munkás?

15.21. A tengervíz sótartalma 5%. Mennyi ivóvizet kell hozzáönteni 40 kg tengervízhez, hogy a sótartalom már csak 2% legyen?

15.22. Egy kisfiú első nap elolvasta a könyv 25%-át, második nap a maradék 72%-át, a harmadik nap a maradék 84 oldalt. Hány oldalas ez a könyv?

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA

15.23. Vizsgáljuk az $y = x^2 + px + q$ másodfokú függvényeket, melyekre $p + q = 5$. Bizonyítsd be, hogy azok a parabolák, melyek ezen függvények grafikonjai, egy pontban metszik egymás!

A nyulakról, a napraforgóról, a fenyőtobozról és az aranymetszésről

Vizsgáljuk meg a rekurzív megadású (u_n) sorozatot:

$$u_1 = u_2 = 1,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Írjuk le ennek a sorozatnak néhány első tagját:

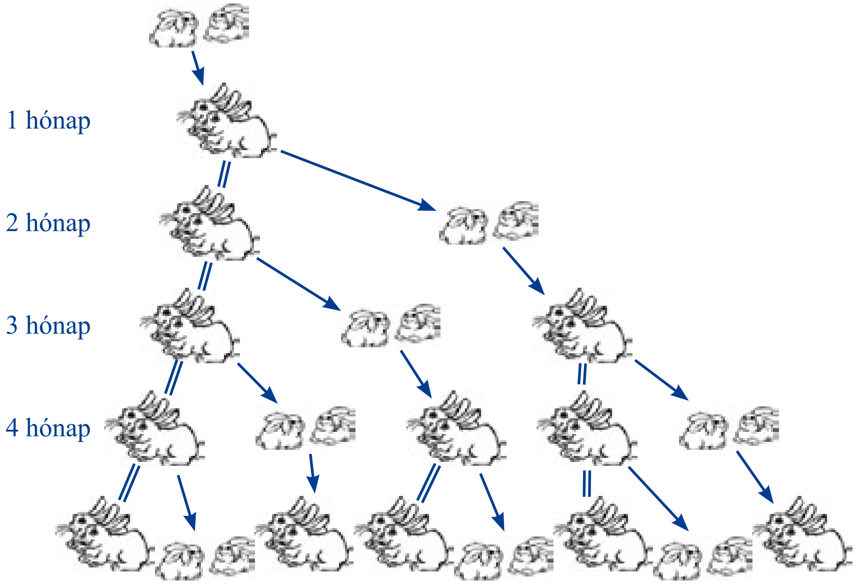
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots .$$

Ennek a sorozatnak a tagjait **Fibonacci** számoknak nevezzük. Ez a meghatározás a híres olasz matematikusról, a pizzai Leonardoról (Fibonacciról) kapta nevét, aki a XII. században megoldott egy igen közérdekű feladatot, nevezetesen, hogy hány pár nyúl származhat egy pár nyúltól, és felfigyelt ennek a sorozatnak az érdekes tulajdonságaira. Ebben a feladatban a nyulak száma úgy növekszik, hogy minden ivarérett nyúlpár egy hónap múlva utódokat hoz a világra. A 15.1. ábrán a nyúlpárok száma megfelel a Fibonacci számoknak.

Több feladatban is találkozhatunk a Fibonacci számokkal. Képzeld el, hogy egy négyzet alakú járókövekkel kirakott egysoros járdán mégy, eközben rá kell, hogy lépj minden négyzetre vagy minden másodikra. Ebben az esetben az,

Pizzai Leonardo (Fibonacci)
(XII. – XIII. század)

Itáliai matematikus. Bejárta a keleti országokat, ahol megismerkedett az arab matematikusok eredményeivel és eldöntötte, hogy ezt a tudást elterjeszti Európában is. Fő művei *Liber Abaci* (1202), amelyben a számtant és az algebrát tárgyalja, a *Practica Geometriae* (1220), ebben magalapozta az algebrai módszerek alkalmazását a mértanban.



15.1. ábra

hogy hányféleképpen mehetsz végig egy n kőből kirakott ilyen járdán, megegyezik a Fibonacci sorozat n-ik tagjával. (Ellenőrizd önállóan, például $n = 8$ esetre.)

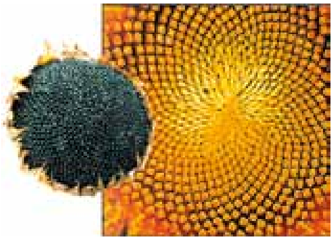
Néhány természeti jelenség is összeköthető a Fibonacci számokkal.

Például, ha megfigyelünk egy napraforgót vagy egy kamillát, akkor láthatjuk, hogy a magok két ellenkező irányba futó görbesorozatokban rendeződnek, ahol a spirálkarok száma a Fibonacci sorozat két szomszédos eleme. A napraforgónál leggyakrabban ez a két szám a 34 és az 55, viszont találkozhatunk óriás napraforgó tányérokkal is, ahol 89 és 144 a spirálkarok száma. Hasonló tulajdonsággal rendelkeznek a fenyőtobozok is[1]. Az ananász pikkelyein is megfigyelhető ez a jelenség, ott a spirálszámok 8 és 13.

Ha a Fibonacci sorozat minden két szomszédos tagjára, vagyis minden természetes n számra kiszámítjuk az $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ arányt, akkor a következő sorozatot kapjuk:

1; 2; 1,5; 1,(6); 1,6; 1,625; 1,(615384); 1,61(904761); …. .

[1] A botanikában ezt a spirális elrendezést filotaxisnak nevezik




Ennek a sorozatnak az a tulajdonsága, hogy a tagjai sorszámának növelésével a tagok értékei egyre közelítenek a $\frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618$ értékhez.

Már az ókorban az emberek ezzel a számmal kötötték össze a szépséget és a harmóniát. A görög szobrászok jól tudták, hogy az emberi test arányai megfelelnek ennek a mágikus számnak. Nem csoda, hogy az ókori építészek is ezt az arányt alkalmazták maradandó alkotásaikban. Így például a Parthenon[1] szélességének és magasságának az aránya 1,618. A reneszánsz kor legnagyobb géniusza, Leonardo Da Vinci is úgy gondolta, hogy a Teremtő által használt arányok között létezik egy, ami egyetlen és megismételhetetlen. Ezt az arányt nevezte ő „aranymetszésnek".

Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856) francia matematikus megadta a Fibonacci sorozat általános tagjának képletét (a Fibonacci számok zárt alakja):

$$u_n = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Nehezen hihető, hogy ez a képlet természetes számokat ad meg. Pedig ez így van.

16. Számtani sorozat

Figyeljük meg a következő sorozatokat:

2, 7, 12, 17, 22, 27, ...;

1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; ...;

3, 1, –1, –3, –5, –7, ...

[1] *Parthenon* – templom az ókori Athénban, épült Kr. e. az V. században

Ezeknek a sorozatoknak az a jellegzetességük, hogy *a sorozat minden következő tagját úgy kapjuk meg, hogy az előző taghoz hozzáadjuk ugyanazt a számot*. Az első sorozatnál ez a szám 5, a másodiknál 0,5, a harmadiknál –2.

Ezeket a sorozatokat az emberek már ősidők óta ismerték, amikor még kettesével, vagy ötösével, tízesével vagy tucatjával számoltak. Ezeket a sorozatokat **számtani** sorozatoknak nevezzük.

Meghatározás. Számtani sorozatnak nevezzük azokat a sorozatokat, melynek minden tagja a másodiktól kezdődően egyenlő az előző tagnak és egy állandó számnak az összegével.

Azt a számot, amely a sorozat rákövetkező tagjának és az előtte álló tagnak a különbsége, a sorozat **különbségének, differenciájának** nevezzük és d betűvel jelöljük (a latin *differentia* (különbség) szó első betűje).

Tehát, ha az (a_n) sorozat olyan számtani sorozat, melynek a differenciája d, akkor

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ...,$$

tehát bármely természetes n-re igaz az $a_{n+1} - a_n = d$.

Innen

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Tehát a számtani sorozat megadható rekurzívan:

$$\boxed{a_1 = a,\ a_{n+1} = a_n + d}$$

Ily módon ahhoz, hogy *megadjunk egy számtani sorozatot, meg kell adni a sorozat első tagját és különbségét.*

Nézzünk meg néhány példát!

Ha $a_1 = 2$ és $d = 5$, akkor megkapjuk azt a számtani sorozatot, amellyel kezdtük ezt a fejezet:

$$2, 7, 12, 17, 22, 27, ...$$

Ha $a_1 = 1$ és $d = 3$, akkor megkapjuk a páratlan számok sorozatát, ami számtani sorozat:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, ...$$

Az eddig felhozott számtani sorozatok különbsége pozitív szám volt. Viszont a különbség lehet negatív szám is, vagy még a nulla is. Tehát, az 5, 5, 5, 5, … sorozat, melynek minden tagja 5, számtani sorozat, ahol $a_1 = 5$ és $d = 0$.

Megmutatjuk, hogy a számtani sorozatot meg lehet adni általános n tagján keresztül is.

A számtani sorozat definíciójából következik:

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + d \cdot 2;$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + d \cdot 2) + d = a_1 + d \cdot 3;$$

$$a_5 = a_4 + d = (a_1 + d \cdot 3) + d = a_1 + d \cdot 4.$$

Ezekből az egyenlőségekből levonható az a törvényszerűség, miszerint ahhoz, hogy meghatározzuk a számtani sorozat tetszőleges tagját, az első taghoz hozzá kell adni d és a keresett sorszámnál eggyel kisebb szám szorzatát. Tehát például, $a_6 = a_1 + d \cdot 5$, $a_7 = a_1 + d \cdot 6$, általánosítva

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = a_1 + d\,(n - 1)}}$$

A felírt egyenlőséget a **számtani sorozat *n*-edik tagja képletének** nevezzük**.**

Meghatározzuk az (a_n) számtani sorozat fontos tulajdonságát.

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, ebből kapjuk, hogy $2a_2 = a_1 + a_3$; $a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}$.

$a_3 - a_2 = a_4 - a_3$, ebből kapjuk, hogy $2a_3 = a_2 + a_4$; $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2}$.

Általánosítva elmondhatjuk, hogy bármely természetes 1-nél nagyobb n-re leírható, hogy $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$, így

$$\boxed{\boldsymbol{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}}}$$

A számtani sorozat bármelyik tagja, kivéve az első tagot (és az utolsót, ha a sorozat véges), a szomszédos két tag számtani közepével (átlagával) egyenlő.

PÉLDA Igazoljuk, hogy az $a_n = 9n - 2$ képlettel megadott (a_n) sorozat számtani!

Megoldás. Vizsgáljuk meg két tetszőleges egymást követő tag különbségét:

$$a_{n+1} - a_n = 9\,(n + 1) - 2 - (9n - 2) = 9n + 9 - 2 - 9n + 2 = 9.$$

Tehát, bármely természetes n-re teljesül az $a_{n+1} = a_n + 9$ egyenlőség, ami azt jelenti, hogy a sorozat minden tagja a másodiktól kezdődően egyenlő az őt megelőző tag és egy állandó szám, a 9 összegével. Tehát ez a sorozat számtani sorozat. ◀

?

1. Melyik sorozatot nevezzük számtani sorozatnak?
2. Mit nevezünk a számtani sorozat különbségének (differenciájának)? Milyen betűvel jelöljük?
3. Mi szükséges egy számtani sorozat megadásához?
4. Hogyan adhatunk meg egy számtani sorozatot rekurzívan?
5. Mi a számtani sorozat n-edik (általános) tagjának a képlete?
6. Milyen összefüggés van a számtani sorozat bármelyik tagja és a szomszédos tagok között?

GYAKORLATOK

16.1.° Az alábbi sorozatok közül melyek számtani sorozatok?

1) 3, –6, 12, –24; 3) 5, 10, 5, 10; 5) –5, –3, –1, 1;
2) 4, 8, 12, 16; 4) 42, 39, 36, 33; 6) 1,2; 1,3; 1,5; 1,6.

16.2.° Az alábbi sorozatok számtani sorozatok-e? Ha igen, add meg a sorozat differenciáját!

1) 24, 22, 20, 18; 2) 16, 17, 19, 23; 3) –3, 2, 7, 12?

16.3.° Add meg annak a számtani sorozatnak az első négy tagját, melynek első tagja 1,2, differenciája pedig –0,3!

16.4.° Egy számtani sorozat első tagja –7,4, differenciája pedig 1,8. Add meg ennek a sorozatnak az első öt tagját!

16.5.° Az (a_n) számtani sorozat első tagja 4, differenciája pedig 0,4. Határozd meg: 1) a_3; 2) a_{11}; 3) a_{32}!

16.6.° Az (a_n) számtani sorozat első tagja 17, differenciája pedig –2. Határozd meg: 1) a_4; 2) a_{15}; 3) a_{60}!

16.7.° Határozd meg a 2,6; 2,9; 3,2; … számtani sorozat differenciáját és a kétszázegyedik tagját!

16.8.° Mennyi az (a_n) számtani sorozat különbsége, ha $a_6 = –2$, $a_7 = 6$?

16.9.° Határozd meg az (a_n) számtani sorozat különbségét, ha $a_8 = 3$, $a_9 = –12$!

16.10.° Határozd meg az (x_n) számtani sorozat különbségét, ha $x_1 = 2$, $x_8 = –47$!

16.11.° Határozd meg az (y_n) számtani sorozat első tagját, ha $y_{17} = 22$ és a sorozat különbsége $d = 0,5$!

16.12.˙ Írd le az alábbi sorozatok n-edik (általános) tagjának képletét:

1) –5, –7, –9, –11, ...;
2) 2, $2\frac{1}{6}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{2}$, ...;
3) a^2, $2a^2$, $3a^2$, $4a^2$, ...;
4) $a + 3$, $a + 1$, $a - 1$, $a - 3$, ... !

16.13.˙ Tagja-e a (c_n) számtani sorozatnak:

1) 20,4, ha $c_1 = 11{,}4$ és a sorozat különbsége $d = 0{,}6$;

2) 38, ha $c_1 = 8$ és a sorozat különbsége $d = 1{,}4$?

Ha igen, akkor add meg ennek a számnak a sorszámát is!

16.14.˙ Hányadik tagja 13,7 a 8,1; 8,5; 8,9; 9,3; … a számtani sorozatnak?

16.15.˙ Határozd meg annak a számtani sorozatnak a második tagját, melynek az első és harmadik tagja –6 és 12!

16.16.˙ Egy számtani sorozat nyolcadik és tizedik tagja 3,5 és 2,7. Mennyi ennek a sorozatnak a kilencedik tagja?

16.17.˙ Határozd meg a (b_n) számtani sorozat első tagját, ha $b_5 = 11$, $b_{11} = -7$!

16.18.˙ Mennyi annak az (x_n) számtani sorozatnak a differenciája, amelynek $x_8 = 58$, $x_{15} = 16$!

16.19.˙ Hogyan változik meg annak a véges számtani sorozatnak a differenciája, melynek a tagjait fordított sorrendben írjuk le?

16.20.˙ Hány pozitív tagja van az 5,2; 4,9; 4,6; … számtani sorozatnak?

16.21.˙ Milyen sorszámú a –10,2; –9,5; –8,8; … számtani sorozat első pozitív tagja?

16.22.˙ Számítsd ki a 7,2; 6,6; 6; … számtani sorozat első negatív tagját?

16.23.˙ Iktass be –6 és 3 közé öt számot úgy, hogy ezek a megadott számokkal együtt egy számtani sorozat egymást követő tagjai legyenek!

16.24.˙ Melyik négy számot kell a 4 és –5 számok közé beiktatni ahhoz, hogy ezek a számok a megadott számokkal együtt egy számtani sorozat egymást követő tagjai legyenek?

16.25.˙ Határozd meg az (a_n) számtani sorozat első tagját és különbségét, ha:

1) $a_3 + a_7 = 30$ és $a_6 + a_{16} = 60$;

2) $a_4 + a_{10} = 36$ és $a_5 \cdot a_{11} = 340$!

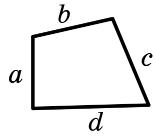
16.26.˙ Határozd meg az (a_n) számtani sorozat első tagját és differenciáját, ha:

1) $a_5 + a_{12} = 41$ és $a_{10} + a_{14} = 62$;

2) $a_7 + a_{13} = -104$ és $a_2 \cdot a_6 = -240$!

16.27.˙ Milyen esetekben igaz egy számtani sorozatra az $a_1 a_4 = a_2^2$ egyenlőség?

16.28.˙ Bizonyítsd be, hogy az $(a+b)^2$, a^2+b^2, $(a-b)^2$ kifejezések értékei egy számtani sorozat egymást követő tagjai!



16.1. ábra

16.29.˙ Igaz-e az az állítás, hogyha egy konkáv négyszög oldalai (16.1. ábra) a, b, c, és d sorrendben egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor ebbe a négyszögbe körvonal írható!

16.30.˙ Egy háromszög belső szögeinek merőszámai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Mekkora a középső nagyságú szög fokmértéke?

16.31.˙ Számtani sorozat-e az alábbi képlettel megadott (a_n) sorozat:

1) $a_n = -6n + 3$; 2) $a_n = 2n^2 - n$; 3) $a_n = -2{,}8n$; 4) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$?

Ha igen, add meg a sorozat első tagját és differenciáját!

16.32.˙ Számtani sorozat-e az alábbi képlettel megadott (a_n) sorozat:

1) $a_n = 6 + 7n$; 2) $a_n = \dfrac{2n-1}{5}$; 3) $a_n = \dfrac{1}{n} + 2$?

Ha igen, add meg a sorozat első tagját és differenciáját!

16.33.˙ Egy számtani sorozatból kihagytuk a páratlan sorszámú tagokat. Számtani sorozatot kapunk-e?

16.34.˙ Adva van két végtelen számtani sorozat. Számtani sorozatot kapunk-e, ha az egyik sorozat minden tagjából kivonjuk a másik sorozat ugyanolyan sorszámú tagját?

16.35.˙ Ha egy olyan számtani sorozatból, melynek a különbsége nem nulla, kihagyjuk azokat a tagokat, melyek sorszáma 3 többszöröse, akkor az így kapott sorozat számtani sorozat-e?

16.36.˙ Egy számtani sorozat minden tagját megszoroztuk 4-gyel. Számtani sorozat lesz-e az így kapott sorozat?

16.37.˙ Bizonyítsd be, hogy a háromszög, négyszög, ötszög és így tovább sokszögek belső szögei összegének merőszámai egy számtani sorozat egymást követő tagjai!

16.38.˙ Az x mely értékeire lesznek az $x^2 - 4$, $5x + 3$ és $3x + 2$ kifejezések értékei egy számtani sorozat egymást követő tagjai? Add meg ezt a sorozatot!

16.39.˙ Az y mely értékeire lesznek az $y^2 + 1$, $y^2 + y$ és $8y - 10$ kifejezések értékei egy számtani sorozat egymást követő tagjai? Add meg ezt a sorozatot!

16.40.¨ Az y mely értékeire lesznek az $y^2 - 2$, $3y + 5$, $4y + 13$ és $2y^2 - y + 25$ kifejezések értékei egy számtani sorozat egymást követő tagjai? Add meg ezt a sorozatot!

16.41.¨ Az x mely értékeire lesznek a $3x + 4$, $2x + 3$, x^2 és $2x^2 + x$ kifejezések értékei egy számtani sorozat egymást követő tagjai? Add meg ezt a sorozatot!

16.42.* Bizonyítsd be, ha az a, b és c szám egy számtani sorozat három egymást követő tagja, akkor:

1) $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$;

2) $\frac{2}{9}(a+b+c)^3 = a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)$!

16.43.* Bizonyítsd be, ha az a, b és c pozitív szám egy számtani sorozat három egymást követő tagja, akkor $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{c}}$!

16.44.* Bizonyítsd be, ha az $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ és $\frac{1}{a+b}$ kifejezések értékei egy számtani sorozat három egymást követő tagjai, akkor a^2, b^2 és c^2 is egy számtani sorozat három egymást követő tagja!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

16.45. Oldd meg az alábbi egyenlet-rendszereket:

1) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = 46, \\ x + y = 6; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -4, \\ x^2 + 2y^2 = 12! \end{cases}$

16.46. Az alábbi egyenlőtlenségek közül melyek ekvivalensek a $-5x < 10$ egyenlőtlenséggel:

1) $5x < -10$; 2) $10x > -20$; 3) $10x < -20$; 4) $5x > 10$?

16.47. Melyik az a legkisebb egész szám, melyre az alábbi egyenlőtlenség teljesül:

$$3(x-1)^2 - 3x(x-5) > -40?$$

16.48. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $\left(2\sqrt{6} - 2\sqrt{54} + 6\sqrt{96}\right) \cdot 2\sqrt{3}$; 2) $\left(5\sqrt{20} - 6\sqrt{10} + 2\sqrt{40}\right) \cdot 3\sqrt{5}$!

16.49. Bizonyítsd be, hogy azok a háromjegyű számok, melyek számjegyei azonosak, 37 többszörösei!

16.50. Az egyik munkásnak meghatározott idő alatt 216 alkatrészt kellett legyártania. Az első három napban tartotta a tervet, utána viszont naponta 8 alkatrésszel többet gyártott le. A határidő előtt egy nappal 232 alkatrész készült el. Hány alkatrészt kellett elkészítenie ennek a munkásnak a terv szerint?

16.51. (*Étienne Bézout*[1] feladata.) Valaki vásárolt egy lovat, majd később 24 pengőért eladta. Az eladáskor annyi százalékot veszített, mint amennyibe eredetileg került neki a ló. Kérdés: mekkora összeget fizetett a lóért?

16.52. A technológia fejlesztésével egy alkatrész legyártásának ideje 12 percről 10 percre csökkent. Hány százalékkal teljesítik túl a tervet, ha a munkaidőt nem változtatják?

17. A számtani sorozat első *n* tagjának összege

Vizsgáljuk meg az $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ véges számtani sorozatot! Jelöljük ezen sorozat tagjainak összegét S_n-nel!

Tehát, $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$. (*)

Vezessük le, milyen képlettel lehet ezt az összeget kiszámolni!

Először ismerkedjünk meg egy olyan feladattal, amely segít a képlet levezetésében.

[1] *Étienne Bézout* (1730–1783) – francia matematikus, akinek fő munkái az algebrai struktúrákat tárgyalják. A királyi tüzérségi egyetem tengerészkadét képzőjében tanított matematikát. Hatkötetes tankönyvet írt az iskola számára.

Vegyük az 1, 2, 3 , …, 98, 99, 100 számtani sorozatot, és számítsuk ki a tagok összegét!

Írjuk le a keresett összeget kétféleképpen:

$$\begin{array}{rccccccccccccc} & S_{100} = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ + & S_{100} = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 2S_{100} = & \multicolumn{13}{c}{\underbrace{101 \quad + \quad 101 \quad + \quad 101 \quad + \quad \ldots \quad + \quad 101 \quad + \quad 101 \quad + \quad 101}_{100 \text{ összeadandó}}} \end{array}$$

Így $2S_{100} = 101 \cdot 100$; $S_{100} = 5050$.

Az a legenda járja, hogy ezt a módszert Carl Friedrich Gauss híres német matematikus találta ki 5 éves korában.

Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

Alkalmazzuk a fenti eljárást a jelölt összeg (*) meghatározásához.

Írjuk le az S_n összeget kétféleképpen! Először írjuk le ezt az összeget úgy, hogy az első összeadandója a_1, és minden következő összeadandó az előző tag és a d differencia összege legyen! Majd pedig folytassuk úgy, hogy az első összeadandó az a_n tag, majd minden következő összeadandó az előző tag és a differencia különbsége legyen.

Azt kapjuk, hogy

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-2)\,d) + (a_1 + (n-1)\,d),$$
$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-2)\,d) + (a_n - (n-1)\,d).$$

Összeadva ezt a két egyenlőséget, kapjuk:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n).$$

Az egyenlőség jobb oldalán egy n tagú összeg van, ahol minden összeadandó $a_1 + a_n$.

Így $2S_n = (a_1 + a_n)\,n$, vagyis

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

A kapott egyenlőség a **számtani sorozat első *n* tagjának összegképlete**.

Ha ebbe a képletbe behelyettesítjük az n-edik tag képletét, az $a_1 + d(n - 1)$ kifejezést, akkor azt kapjuk, hogy:

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + d\,(n-1)}{2} \cdot n.$$

Innen

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n}$$

Ez utóbbi képletet akkor célszerű alkalmazni, ha ismerjük a sorozat első tagját és differenciáját.

1. PÉLDA Határozd meg 6 háromjegyű többszöröseinek összegét!

Megoldás. Ezek a számok egy számtani sorozatot alkotnak. A sorozat első tagja $a_1 = 102$, a differencia $d = 6$. Így $a_n = 102 + 6(n - 1) = 6n + 96$. Határozzuk meg, hány tagja van ennek a sorozatnak! Mivel $a_n < 1000$, ezért a tagok száma a $6n + 96 < 1000$ egyenlőtlenség legnagyobb egész megoldása. Kapjuk, hogy:

$$6n < 904;$$

$$n < 150\frac{2}{3}.$$

Innen $n = 150$. Most már maghatározhatjuk a keresett összeget:

$$S_{150} = \frac{2 \cdot 102 + 6 \cdot (150 - 1)}{2} \cdot 150 = 82\,350.$$

Felelet: 82 350. ◀

2. PÉLDA Egy számtani sorozat első hetvenöt tagjának összege 450. Mennyi a sorozat harmincnyolcadik tagja?

Megoldás. Jelöljük a sorozat első tagját a_1-gyel a differenciáját d-vel! Így leírhatjuk, hogy:

$$S_{75} = \frac{2a_1 + 74d}{2} \cdot 75 = 75(a_1 + 37d) = 450.$$

Mivel $a_{38} = a_1 + 37d$, ezért a keresett tag

$$a_{38} = 450 : 75 = 6.$$

Felelet: 6. ◀

?

1. Hogyan lehet meghatározni a számtani sorozat első n tagjának összegét, ha ismerjük az első és az utolsó tagot?
2. Hogyan lehet meghatározni a számtani sorozat első n tagjának összegét, ha ismerjük az első tagot és a differenciát?

GYAKORLATOK

17.1.° Mennyi az (a_n) számtani sorozat első hét tagjának összege, ha $a_1 = 9$ és $a_7 = 15$?

17.2.° Mennyi a (b_n) számtani sorozat első hat tagjának összege, ha $b_1 = 19$ és $b_6 = 14$?

17.3.° Határozd meg a számtani sorozat első húsz tagjának az összegét, ha $a_1 = –6$ és $d = 4$!

17.4.° Határozd meg a –8, –6, –4, … számtani sorozat első húsz tagjának az összegét!

17.5.° Egy cirkuszban szektoronként az ülőhelyek úgy vannak elrendezve, hogy az első sorban 6 szék van és minden további sorban 3-mal több széket helyeztek el, mint az előtte lévőben. Hány ülőhely van egy szektorban, ha a sorok száma 16?

17.6.° Demeter kikölcsönzött egy könyvet a könyvtárból. Első nap 40 oldalt olvasott el. Majd minden nap az előző napinál 10 oldallal többet. Hány oldalas ez a könyv, ha Demeter 7 nap alatt elolvasta?

17.7.° Az (a_n) számtani sorozatot az $a_n = –4n + 1$ képlettel adták meg. Számítsd ki a sorozat első harminckét tagjának összegét!

17.8.° A (c_n) számtani sorozatot a $c_n = 5n – 2$ képlettel adták meg. Számítsd ki a sorozat első huszonhat tagjának összegét!

17.9.˙ Számítsd ki az (a_n) számtani sorozat első húsz tagjának összegét, ha:

1) $a_1 = 6$, $a_9 = 22$; 2) $a_6 = 49$, $a_{20} = 7$!

17.10.˙ Mennyi az (x_n) számtani sorozat első negyven tagjának összege, ha $x_8 = –14$ és $x_{30} = –3$?

17.11.˙ Hányat üt egy nap alatt az az óra, amely minden egész órában elüti az órák számát 1-től 12-ig?

17.12.˙ Számítsd ki az (a_n) számtani sorozat első huszonöt tagjának összegét, ha $a_{10} = 44$ és $d = 4$!

17.13.˙ Számítsd ki az (a_n) számtani sorozat első húsz tagjának összegét, ha $a_6 + a_8 – a_{14} = –17$ és $a_5 + a_{22} = 101$!

17.14.˙ Számítsd ki az (a_n) számtani sorozat első harminc tagjának összegét, ha $a_3 + a_5 + a_{13} = 33$ és $a_{15} – a_8 – a_{10} = –1$!

17.15.˙ Egy számítani sorozat első n tagját bármely n-re ki lehet számítani az $S_n = 3n^2 + 5n$ képlettel. Határozd meg ennek a sorozatnak ez első három tagját!

17.16.˙ Egy számítani sorozat első n tagját bármely n-re ki lehet számítani az $S_n = 9n - 2n^2$ képlettel. Határozd meg ennek a sorozatnak a hetedik tagját!

17.17.˙ (*Régi egyiptomi feladat.*) 100 vekni kenyeret úgy kell öt ember között szétosztani, hogy a második az elsőnél annyival több kenyeret kapjon, mint amennyivel többet kap a harmadik a másodiknál, a negyedik a harmadiknál és az ötödik a negyediknél. Ezen felül az első kettő hétszer kevesebb kenyeret kell, hogy kapjon a másik három embernél. Mennyi kenyeret kell adni mindenkinek?

17.18.˙ Mennyi az első n 1) természetes szám összege; 2) páratlan szám összege?

17.19.˙ Mennyi az első n páros szám összege?

17.20.˙˙ Melyik az a természetes szám, amely az előtte álló természetes számok összegével egyenlő?

17.21.˙˙ Határozd meg a –6,2; –5,9; –5,6; … számtani sorozat negatív tagjainak összegét!

17.22.˙˙ Határozd meg a 8,4; 7,8; 7,2; … számtani sorozat pozitív tagjainak összegét!

17.23.˙˙ Határozd meg a 240-nél nem nagyobb öttel osztható természetes számok összegét!

17.24.˙˙ Határozd meg a 130-nál kisebb 4 többszöröseinek az összegét!

17.25.˙˙ Határozd meg a 200-nál kisebb 12-vel osztható természetes számok összegét!

17.26.˙˙ Határozd meg 8 háromjegyű többszöröseinek összegét!

17.27.˙˙ Határozd meg 7 háromjegyű többszöröseinek összegét!

17.28.˙˙ Számítsd ki annak a számtani sorozatnak a differenciáját, amelynek első tagja 8,5 és első tizenhat tagjának az összege pedig 172!

17.29.˙˙ Számítsd ki annak a számtani sorozatnak az első tagját, amelynek differenciája –4 és első kilenc tagjának az összege pedig –54!

17.30.˙˙ Egy számtani sorozat első tagja –9, különbsége 6. Hány első tagnak lesz az összege 960?

17.31.˙˙ Legkevesebb hány egymást követő páratlan számot kell összeadni 7-től kezdve, hogy az összeg több legyen 315-nél?

17.32.˙˙ Lehet-e a 3, 7, 11, … számtani sorozatnak öt olyan egymást követő tagja, melyek összege 135? Ha igen, határozd meg ezeket a számokat!

17.33.˙˙ Lehet-e a 2, 8, 14, … számtani sorozatnak négy olyan egymást követő tagja, melyek összege 176? Ha igen, határozd meg ezeket a számokat!

17.34.˙˙ A szabadon eső test az első másodpercben 4,9 m-t esik, az utána következő minden másodpercben pedig 9,8 m-rel többet az előző másodpercben megtett útnál, ha nem vesszük figyelembe a levegő ellenállását. Mennyi idő alatt esik le 490 m-ről egy test (az ellenállás elhanyagolható)?

17.35.˙˙ Egy könyv páratlan oldalszámainak összege 400-nál több, de 500-nál kisebb páratlan szám. Hány oldalas ez a könyv?

17.36.˙˙ Számítsd ki egy számtani sorozat nyolcadik tagjától a huszonhatodik tagig a tagok összegét, ha a sorozat első tagja 24, differenciája –8!

17.37.˙˙ Számítsd ki az (x_n) számtani sorozat kilencedik tagjától a huszonötödik tagig a tagok összegét, ha $x_1 = -3$ és $x_{11} = 12$!

17.38.˙˙ Egy számtani sorozat első hat tagjának az összege 39, az első 14 tagjának az összege pedig –77. Határozd meg a sorozat első tagját és különbségét!

17.39.˙˙ Egy számtani sorozat első tagja 100. Első hat tagjának az összege 5-ször több a következő öt tag összegénél. Mennyi a sorozat differenciája?

17.40.˙˙ Egy számtani sorozat differenciája 28. Első öt tagjának az összege 4-szer kevesebb a következő hat tag összegénél. Mennyi a sorozat első tagja?

17.41.˙˙ Egy számtani sorozat huszadik tagja 30. Számítsd ki ezen sorozat első huszonhárom tagjának az összegét!

17.42.˙˙ Számítsd ki az (a_n) számtani sorozat első húsz tagjának az összegét, ha $a_5 + a_{10} + a_{12} + a_{15} = 50$!

17.43.˙˙ Oldd meg az alábbi egyenleteket:

1) $7 + 13 + 19 + \ldots + (6n + 1) = 480$, ahol n természetes szám;

2) $5 + 8 + 11 + \ldots + x = 124$, ahol x természetes szám!

17.44.¨ Oldd meg az alábbi egyenleteket:
1) $11 + 19 + 27 + \ldots + (8n + 3) = 470$, ahol n természetes szám;
2) $1 + 5 + 9 + \ldots + x = 630$, ahol x természetes szám!

17.45.¨ Határozd meg annak a számtani sorozatnak az első tagját és különbségét, melyre teljesül, hogy az első n tagjának számtani közepe egyenlő a tagok számával, bármely n-re!

17.46.¨ (*Alexandriai Hypsicles feladata*[1].) Bizonyítsd be, hogyha egy számtani sorozat tagjainak a száma páros és egész szám, akkor a sorozat második feléhez tartozó tagjainak az összege több az első fél tagjainak az összegénél egy olyan számmal, amely többszöröse a tagok száma felének négyzetével!

17.47.¨ Bizonyítsd be, ha egy sorozat első n tagjának összege kiszámítható az $S_n = n^2 - 3n$ képlettel, akkor ez a sorozat számtani sorozat. Határozd meg a sorozat első tagját és differenciáját!

17.48.¨ Számítsd ki azoknak a kétjegyű számoknak az összegét, melyek nem oszthatók sem 3-mal, sem 5-tel!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

17.49. Ábrázold az alábbi függvényeket:

1) $y = x^2 - 4x + 4$; 2) $y = 2x^2 + 8x + 8$!

Olvasd le a rajzról a függvény értékkészletét, hol növekszik, és hol csökken!

17.50. Számítsd ki:

1) $\frac{3^{49}}{9^{25}}$; 2) $\frac{4^8}{8^4}$; 3) $\frac{5^4 \cdot 11^7}{55^6}$; 4) $\frac{12^5}{18^3}$!

17.51. A k mely értékénél lesz az $y = kx - 3$ és $y = x^2$ függvények metszéspontjának az abszcisszája -2?

17.52. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{\sqrt{bc}}$; 2) $\frac{d - 49}{d + 12\sqrt{d} + 36} \cdot \frac{4\sqrt{d} + 24}{3\sqrt{d} + 21}$!

17.53. Egy kerékpáros percenként 600 m-rel kisebb távolságot tesz meg, mint egy motorkerékpáros, ezért a 120 km-es útra 3 órával több időre van szüksége. Határozd meg a kerekpáros sebességét!

---

[1] *Alexandriai Hypsicles* (Kr. e. II. század) – ókori görög tudós, Euklidész *Elemek* című művében a XIV. könyv szerzője

17.54. Az egyik hímzőasszony egy szalvétakészletet 6 óra alatt hímez ki, egy másik 4 óra alatt. Ha együtt dolgoznak, mindkettőjük termelékenysége 20%-kal nő. Mennyi idő alatt hímeznek ki ketten együtt egy ilyen szalvétakészletet?

17.55. Összekevertek egy 30 százalékos és egy 10 százalékos sósavat. Így kaptak 800 g 15%-os sósavat. Hány gramm oldatott vettek a két sósavból az elegyhez?

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK ALKALMAZÁSA

17.56. Keresd meg az összes olyan $(x;\ y)$ számpárt, melyre teljesül az $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=x^2+y^2+2$ egyenlet!

18. Mértani sorozat

Vizsgáljuk meg az alábbi sorozatokat:

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ \ldots,$$

$$2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots,$$

$$5;\ -0{,}5;\ 0{,}05;\ -0{,}005;\ 0{,}0005;\ \ldots\ .$$

Ezeknek a sorozatoknak közös tulajdonságuk*: minden tagját úgy kapjuk meg, hogy az előtte álló tagot megszorozzuk ugyanazzal a számmal.* Az első sorozatnál ez a szám a 3, a másodiknál $\frac{1}{2}$, a harmadiknál pedig –0,1.

Hasonló tulajdonságú sorozatokkal találkozhatsz például a baktériumpopuláció növekedésekor, a bankba tett pénzalap kamatozásakor. Ezeket a sorozatokat **mértani sorozatnak** nevezzük.

Meghatározás. Mértani sorozatnak nevezzük azt a sorozatot, melynek első tagja nullától különböző, minden következő tagját pedig úgy kapjuk meg, hogy az előtte lévő tagot megszorozzuk ugyanazzal a nullával nem egyenlő számmal.

Azt a számot, amely a mértani sorozat bármelyik tagjának és az azt megelőző tagjának a hányadosa, a mértani sorozat **hányadosának, kvóciensének** nevezzük és q-val jelöljük (a francia *quotient* szó első betűje, jelentése hányados).

Tehát, ha (b_n) sorozat mértani, melynek a kvóciense q, akkor

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \ldots,$$

vagyis bármely természetes n-re $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = q$.

Tehát egy mértani sorozat megadható rekurzívan:

$$\boxed{\boldsymbol{b_1 = b,\ b_{n+1} = b_n q}}$$

Ahhoz, *hogy megadjunk egy mértani sorozatot, meg kell adni az első tagját és a hányadosát, kvóciensét.*

Lássunk néhány példát!

Ha $b_1 = 1$ és $q = 3$, akkor az ebben a feiezetben leírt első sorozatot kapjuk:

$$1, 3, 9, 27, 81, 243, \ldots .$$

Ha $b_1 = 2$ és $q = 2$, akkor egy olyan mértani sorozatot kapunk, amit a 2-es szám természetes kitevőjű hatványai alkotnak:

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \ldots .$$

Megjegyezzük, hogy azoknak a mértani sorozatoknak, melyeknek a kvóciense 1, minden tagja egyenlő. Tehát, az 5, 5, 5, 5, … olyan mértani sorozat, melynek $b_1 = 5$ és $q = 1$. Egyidejüleg ez a sorozat olyan számtani sorozat is, melynek $a_1 = 5$ és $d = 0$.

Általában minden olyan sorozat, melynek minden tagja egyenlő és nullától különböző, egyidejűleg számtani és mértani sorozat is. A 0, 0, 0, 0, … sorozat, melynek minden tagja 0, csak számtani sorozat.

Nézzük meg, hogyan lehet megadni egy mértani sorozatot általános, n-edik tagjával.

A mértani sorozat definíciójából kapjuk:

$$b_2 = b_1 \cdot q;$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 q) \cdot q = b_1 q^2;$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 q^2) \cdot q = b_1 q^3;$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = (b_1 q^3) \cdot q = b_1 q^4.$$

Ezekből a példákból levonható a következő törvényszerűség: ahhoz hogy kiszámoljuk a mértani sorozat n-edik tagját, az első tagot meg kell szorozni a kvóciensnek a sorszámtól 1-gyel kisebb hatványával. Így, például $b_6 = b_1q^5$, $b_7 = b_1q^6$, és általánosítva

$$\boxed{\boldsymbol{b_n = b_1q^{n-1}}}$$

Az előbbi egyenlőséget **a mértani sorozat *n*-edik (általános) tagja képletének** nevezzük.

Állapítsuk meg a (b_n) mértani sorozat egy másik fontos tulajdonságát!

Tudjuk, hogy

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2}, \text{ tehát } b_2^2 = b_1 \cdot b_3;$$

$$\frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3}, \text{ tehát } b_3^2 = b_2 \cdot b_4.$$

Általánosan bármely természetes, 1-nél nagyobb n-re leírható, hogy $\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Ebből következik, hogy

$$\boxed{\boldsymbol{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}}}$$

Egy mértani sorozat bármely tagjának a négyzete, kivéve az első tagot (és ha a sorozat véges, az utolsó tagot), egyenlő a szomszédos két tag szorzatával.

Ha a (b_n) mértani sorozat minden tagja pozitív, akkor $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ egyenlőség felírható az alábbi alakban is:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}.$$

Tehát egy ilyen mértani sorozat bármely tagja, kivéve az első tagot (és ha a sorozat véges, az utolsó tagot), a szomszédos két tag mértani közepével egyenlő.

Vizsgáljuk meg az alábbi két sorozatot!

Az (a_n) számtani sorozat, $a_1 = 1$, $d = 2$:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, \ldots .$$

A (b_n) mértani sorozat, $b_1 = 1$, $q = 2$:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, \ldots .$$

A két sorozat első tagja egyenlő. Mind a két sorozatot ugyanazzal a számmal alkotjuk meg, esetünkben ez a 2 ($d = q = 2$). Ennek ellenére, ha összehasonlítjuk ezt a két sorozatot, észrevehetjük, hogy a mértani sorozat sokkal gyorsabban „növekszik”. Például a számtani sorozat huszadik tagja $a_{20} = 1 + 2 \cdot 19 = 39$, a mértani sorozaté pedig $b_{20} = 1 \cdot 2^{19} = 524\,288$.

Már tudod, hogy a baktériumok osztódással szaporodnak. Így már érthető, hogyan nőhet olyan gyorsan a baktériumok száma kedvező körülmények között.

Lehet, hogy ennek a példának az alapján a mindennapi életben arra a jelenségre, hogy valami nagyon gyorsan nő, szoktuk mondani, hogy „exponenciálisan növekszik”.

1. PÉLDA Határozd meg a $q = \frac{1}{3}$ hányadosú (b_n) mértani sorozat első tagját, ha $b_6 = \frac{5}{81}$!

Megoldás. Mivel $b_6 = b_1q^5$, ezért

$$b_1 = b_6 : q^5 = \frac{5}{81} : \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{5}{3^4} \cdot 3^5 = 5 \cdot 3 = 15.$$

Felelet: 15. ◀

2. PÉLDA Határozd meg a (b_n) mértani sorozat negyedik tagját és kvóciensét, ha $b_3 = 36$ és $b_5 = 49$!

Megoldás. A mértani sorozat tulajdonsága alapján $b_4^2 = b_3b_5$, ebből következik, hogy $b_4 = \sqrt{b_3b_5} = \sqrt{36 \cdot 49} = 6 \cdot 7 = 42$ vagy $b_4 = -\sqrt{b_3b_5} = -42.$

Ha $b_4 = 42$, akkor $q = b_4 : b_3 = \frac{42}{36} = \frac{7}{6}$; ha $b_4 = -42$, akkor $q = b_4 : b_3 = -\frac{7}{6}$.

Felelet: $b_4 = 42$, $q = \frac{7}{6}$ vagy $b_4 = -42$, $q = -\frac{7}{6}$. ◀

3. PÉLDA Határozd meg a (b_n) mértani sorozat első tagját és kvóciensét, ha $b_3 + b_6 = 504$ és $b_4 - b_5 + b_6 = 378$!

Megoldás. Jelöljük q-val ennek a sorozatnak a kvóciensét. Így egy kétismeretlenes egyenletrendszert kapunk, ahol b_1 és q az ismeretlenek:

$$\begin{cases} b_1q^2 + b_1q^5 = 504, \\ b_1q^3 - b_1q^4 + b_1q^5 = 378. \end{cases}$$

Osszuk el az egyenletrendszer két egyenletét egymással:

$$\frac{b_1q^2\,(1 + q^3)}{b_1q^3\,(1 - q + q^2)} = \frac{504}{378}.$$

További rendezéssel kapjuk:

$$\frac{b_1q^2\,(1+q)(1-q+q^2)}{b_1q^3(1-q+q^2)} = \frac{4}{3};$$

$$\frac{1+q}{q} = \frac{4}{3};$$

$$4q = 3 + 3q;$$
$$q = 3.$$

Helyettesítsük be a kapott q értéket az első egyenletbe: $9b_1 + 243b_1 = 504$; vagyis $252b_1 = 504$; $b_1 = 2$.

Felelet: $b_1 = 2$, $q = 3$. ◀

4. PÉLDA Az x mely értékeire lesznek a $3x$, $7 - x$ és $5x + 7$ kifejezések értékei egy mértani sorozat egymást követő tagjai? Határozd meg ezeket a számokat!

Megoldás. Ha a $3x$, $7 - x$ és $5x + 7$ kifejezések értékei egy mértani sorozat egymást követő tagjai, akkor teljesülnie kell a $(7 - x)^2 = 3x(5x + 7)$ egyenlőségnek.

Azt kapjuk, hogy:

$$49 - 14x + x^2 = 15x^2 + 21x;$$
$$14x^2 + 35x - 49 = 0;$$
$$2x^2 + 5x - 7 = 0;$$
$$x = 1 \text{ vagy } x = -\frac{7}{2}.$$

Ha $x = 1$, akkor a 3, 6, 12 mértani sorozatot kapjuk.

Ha $x = -\frac{7}{2}$, akkor a $-\frac{21}{2}$, $\frac{21}{2}$, $-\frac{21}{2}$ mértani sorozatot kapjuk.

Felelet: ha $x = 1$, akkor a 3, 6, 12; ha $x = -\frac{7}{2}$, akkor a $-\frac{21}{2}$, $\frac{21}{2}$, $-\frac{21}{2}$. ◀

Nézzünk meg egy olyan alkalmazott matematikai feladatot, amelyet gyakran meg kell oldaniuk a banki szakembereknek, esetleg azon betéteseknek, akik lekötésekkel kamatoztatják a pénzüket.

5. PÉLDA Egy betétes 100 000 hrivnyát helyezett el a bankba 10%-os éves kamatra. Mennyi pénz lesz a betétes számláján 7 év múlva, ha ez alatt az idő alatt nem vesz le pénzt a számlájáról?

Megoldás. Jelöljük a_0-val a kezdeti tőkét, vagyis

$$a_0 = 100\ 000 \text{ hrn.}$$

Jelöljük a_1, a_2, … a_7-tel az év végi egyenleget a futamidőnek megfelelően, vagyis a_1-gyel az első év végi egyenleget és így tovább, … a_7-tel a hetedik év végit. Könnyen belátható, hogy a_1, a_2, … a_7 számok egy mértani sorozatot alkotnak, melynek a kvóciense 110%, vagyis 1,1.

Így

$$a_7 = a_0 \cdot 1{,}1^7 = 100000 \cdot 1{,}1^7 \approx 194871{,}71 \text{ (hrivnya).}$$

Felelet: 194 871,71 hrivnya. ◄

Hasonlóképpen kell megoldani ezt a feladatot, ha a_0 alaptőkét p%-os kamatra teszünk be a bankba. Ebben az esetben az n-edik év végén a számlán az alábbi képlettel kiszámítható összeg lesz:

$$\boxed{a_n = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

A kapott képletet a **kamatos kamat képletének** nevezzük.

?

1. Mit nevezünk mértani sorozatnak?
2. Melyik számot nevezzük a mértani sorozat hányadosának, kvóciensének?
3. Mi a mértani sorozat n-edik tagjának képlete?
4. Milyen összefüggés van a mértani sorozat három egymást követő tagja között?
5. Hogyan lehet kiszámítani a kamatos kamatot? Magyarázd meg!

GYAKORLATOK

18.1.° Válaszd ki az alábbi sorozatok közül a mértani sorozatokat, nevezd meg az első tagját és kvóciensét:

1) 2, 6, 18, 36;	4) 81, 27, 9, 3;	7) –9, –9, –9, –9;
2) 4, 8, 16, 32;	5) 2, –2, 2, –2;	8) 1, 2, 3, 5;
3) 10, 20, 30, 40;	6) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2$;	9) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4$!

18.2.° A (b_n) mértani sorozat hatodik tagja 8, hányadosa –4. Számítsd ki a sorozat a hetedik tagját!

18.3.° Határozd meg a (b_n) mértani sorozat hetedik tagját, ha $b_8 = 16$ és $q = \frac{3}{4}$!

18.4.° Mennyi a (b_n) mértani sorozat kvóciense, ha:

1) $b_1 = 6$, $b_2 = -3$; 2) $b_7 = -9$, $b_8 = 15$; 3) $b_{10} = 3\sqrt{3}$, $b_{11} = 9$?

18.5.° Mennyi a (b_n) mértani sorozat kvóciense, ha:

1) $b_{12} = 24$, $b_{13} = 4$; 2) $b_4 = -\frac{2}{9}$, $b_5 = \frac{4}{15}$?

18.6.° Mennyi a (b_n) mértani sorozat első tagja, ha $b_2 = 12$ és $q = \frac{1}{3}$?

18.7.° Egy mértani sorozat hetedik tagja $\frac{1}{2}$, kvóciense 4. Számítsd ki ennek a sorozatnak a hatodik tagját!

18.8.° Add meg az (x_n) mértani sorozat első négy tagját, ha $x_1 = 0{,}2$ és a sorozat hányadosa pedig $q = -5$!

18.9.° Egy mértani sorozat első tagja $-\frac{1}{27}$, kvóciense 3. Számítsd ki a sorozat első öt tagját!

18.10.° Az (y_n) mértani sorozat első tagja $y_1 = 64$, a hányadosa pedig $q = -\frac{1}{2}$. Számítsd ki: 1) y_3; 2) y_6; 3) y_{10} értékét!

18.11.° A (c_n) mértani sorozat első tagja $c_1 = 9$, a hányadosa pedig $q = -1$. Számítsd ki: 1) c_{21}; 2) c_{30} értékét!

18.12.° Egy mértani sorozat első tagja $b_1 = \frac{1}{125}$, a hányadosa pedig $q = 5$. Számítsd ki: 1) b_4; 2) b_7 értékét!

18.13.° Számítsd ki az $\frac{1}{216}, \frac{1}{36}, \frac{1}{6}, \ldots$ mértani sorozat kvóciensét és ötödik tagját!

18.14.° Számítsd ki a 18, 12, 8, … mértani sorozat kvóciensét és hatodik tagját!

18.15.° Bizonyítsd be, ha (x_n) mértani sorozat, akkor $x_3x_{13} = x_5x_{11}$!

18.16.° Bizonyítsd be, ha (y_n) mértani sorozat, akkor $y_4y_{21} = y_8y_{17}$!

18.17.° Egy betétes 5000 hrivnyát kötött le egy bankban 8%-os éves kamatra. Mennyi pénze lesz a számláján három év múlva?

18.18.° Négy évvel ezelőtt egy üzemben évente 10 000 darabot gyártottak egyfajta termékből. A műszaki fejlesztésnek és a munkatermelékenység növelésének köszönhetően évi 20%-os termelési növekedést értek el. Hány darab terméket gyárt ez az üzem ebben az évben?

18.19.° Két egymás utáni 10%-os leárazás után egy íróasztal 2916 hrivnyába kerül. Mennyibe került ez az íróasztal a leárazás előtt?

18.20.° Két egymás utáni 25%-os áremelés után egy csillár 937 hrivnya 50 kopijkába kerül. Mennyibe került a csillár az áremelések előtt?

18.21.° Egy város lakossága 40 000 főről 44 100 főre nőtt. Határozd meg a lakosság átlagos évi növekedését százalékban!

18.22.° Két egymást követő, százalékban ugyanakkora leárazás után a 800 hrivnyás szék 578 hrivnyába kerül. Hány százalékos volt a leárazás?

18.23.• Add meg a (b_n) mértani sorozat b_8, $b_{13,}$ b_{30} tagját a sorozat b_7 tagján és a q kvóciensen keresztül!

18.24.• Add meg a (c_n) mértani sorozat c_{18}, $c_{36,}$ c_{50} tagját a sorozat c_{12} tagján és a q kvóciensen keresztül!

18.25.• Határozd meg a (b_n) mértani sorozat kvóciensét, ha:

1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_8 = 64$; 2) $b_6 = 75$, $b_8 = 27$!

18.26.• Határozd meg a (c_n) mértani sorozat első tagját, ha:

1) $c_4 = \frac{1}{98}$, a kvóciens pedig $q = \frac{2}{7}$; 2) $c_6 = 100$, $c_9 = 100\,000$!

18.27.• A 486-os szám a 2, 6, 18, … mértani sorozat tagja. Határozd meg ennek a tagnak a sorszámát!

18.28.• A 96-os szám a $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, … mértani sorozat tagja. Határozd meg ennek a tagnak a sorszámát!

18.29.• Melyik két számot kell beiktatni a 6 és 750 számok közzé ahhoz, hogy ezek a számok az adott számokkal együtt egy mértani sorozatot alkossanak?

18.30.• Melyik négy számot kell beiktatni a 0,5 és 16 számok közzé ahhoz, hogy ezek a számok az adott számokkal együtt egy mértani sorozatot alkossanak?

18.31.• A (b_n) sorozat az n-edik tagjának képletével, $b_n = 5 \cdot 4^{n-2}$ van megadva. Mértani sorozat-e ez a sorozat? Ha igen, add meg a sorozat első tagját és kvóciensét!

18.32.• Bizonyítsd be, hogy az $x_n = 7^{n+1}$ képlettel megadott (x_n) sorozat mértani sorozat, és add meg a sorozat első tagját és kvóciensét!

18.33.• A (b_n) számsorozat mértani sorozat. Határozd meg:

1) mennyi b_5, ha $b_4 = 9$, $b_6 = 25$;

2) mennyi b_{20}, ha $b_{19} = -3$, $b_5 = -12$;

3) mennyi b_{17}, ha $b_{16} = 2$, $b_{18} = 10$!

18.34.• Az x mely értékénél lesz az x, $3x$ és 18 egy mértani sorozat három egymást követő tagja?

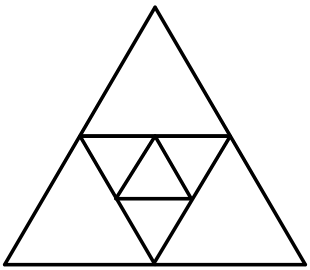
18.35.˙ Az y mely értékénél lesz a -1, $2y$ és -8 egy mértani sorozat három egymást követő tagja?

18.36.˙ Egy mértani sorozat második tagja 6. Határozd meg a sorozat első három tagjának a szorzatát!

18.37.˙ Egy mértani sorozat harmadik tagja 3. Határozd meg a sorozat első öt tagjának a szorzatát!

18.38.˙ Bizonyítsd be, hogy egy véges mértani sorozatban a két szélső tagtól azonos távolságra lévő tagok szorzata egyenlő az első és az utolsó tag szorzatával!

18.39.˙ Egy a oldalhosszúságú háromszögbe újabb háromszögeket rajzoltunk úgy, hogy minden következő háromszög csúcsa az előző háromszög oldalfelező pontja (18.1. ábra). Bizonyítsd be, hogy az így kapott háromszögek kerületei egy mértani sorozat egymást követő tagjai, és írd le az n-edik tag képletét!



18.1. ábra

18.40.˙ Mértani sorozat-e az alábbi sorozat:

1) $2^{-n}, 2^{-2n}, 2^{-3n}, 2^{-4n}$;

2) $2^n, 2^{n^2}, 2^{n^3}, 2^{n^4}$;

3) $2^n, 2^{n+1}, 2^{n+2}, 2^{n+3}$?

Ha igen, add meg a q értékét!

18.41.˙ A (b_n) sorozat mértani, melynek a kvóciense q. Mértani sorozat-e az alábbi sorozat:

1) $b_1, b_3, ..., b_{2n-1}$;

2) $2b_1, 2b_2, ..., 2b_n$;

3) $b_1 + b_2, b_2 + b_3, ..., b_{n-1} + b_n$;

4) $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, ..., \frac{1}{b_n}$?

Ha igen, add meg a q értékét!

18.42.˙ A (b_n) sorozat mértani, melynek a kvóciense q. Mértani sorozat-e az alábbi sorozat:

1) $b_2, b_4, ..., b_{2n}$;

2) $b_1b_3, b_2b_4, b_3b_5, ..., b_{n-2}b_n$?

Ha igen, add meg a q értékét!

18.43.¨ Iktass be a 80 és az 5 közé három számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy mértani sorozatot alkossanak!

18.44.¨ Iktass be a 6 és az 486 közé három számot úgy, hogy azok a megadottakkal együtt egy mértani sorozatot alkossanak!

18.45.¨ Számítsd ki a (b_n) mértani sorozat első tagját és kvóciensét, ha:

1) $b_5 = 3b_3$ és $b_6 - b_2 = 48$;

2) $b_4 + b_7 = \frac{56}{9}$ és $b_5 - b_6 + b_7 = \frac{14}{9}$;

3) $b_5 - b_4 = 168$ és $b_3 + b_4 = -28$.

18.46.¨ Számítsd ki a (b_n) mértani sorozat első tagját és kvóciensét, ha:

1) $b_4 - b_2 = 30$ és $b_4 - b_3 = 24$;

2) $b_2 - b_5 = 78$ és $b_3 + b_4 + b_5 = -117$.

18.47.¨ Az x mely értékeire lesznek a $2x + 1$, $x + 5$ és $x + 11$ kifejezések értékei egy mértani sorozat egymást követő tagjai? Határozd meg ezen sorozat tagjait!

18.48.¨ Az x mely értékeire lesznek az $x + 6$, $x + 2$ és $3x - 4$ kifejezések értékei egy mértani sorozat egymást követő tagjai? Határozd meg ezen sorozat tagjait!

18.49.¨ Bizonyítsd be, hogyha a (b_n) sorozat tagjai nullától különbözőek és bármely $n > 1$ természetes számra teljesül, hogy $b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$, akkor a (b_n) sorozat mértani!

18.50.¨ Határozd meg azt a hattagú mértani sorozatot, melyben az első három tag összege 168, az utolsó három tagé pedig 21!

18.51.¨ Adott három szám, melyek számtani sorozatot alkotnak. Összegük 21. Ha ezekhez a számokhoz rendre hozzáadunk 2-t, 3-t és 9-et, akkor egy mértani sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Határozd meg ezeket a számokat!

18.52.¨ Adott három szám, melyek számtani sorozatot alkotnak. Összegük 30. Ha az első számból kivonunk 5-öt, a másodikból 4-et és a harmadik számot nem változtatjuk, akkor egy mértani sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Határozd meg ezeket a számokat!

18.53.¨ Adott három szám, melyek mértani sorozatot alkotnak. Összegük 65. Ha az első számból kivonunk 1-et, a második számot nem változtatjuk, a harmadik számból pedig kivonunk 19-et, akkor egy számtani sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Határozd meg ezeket a számokat!

18.54.¨ Adott három szám, melyek mértani sorozatot alkotnak. Összegük 26. Ha ezekhez a számokhoz rendre hozzáadunk 1-et, 6-ot és 3-t, akkor egy számtani sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Határozd meg ezeket a számokat!

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

18.55. Határozd meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $\frac{7^9}{7^{10}}$; 2) $\frac{125^3}{25^4}$; 3) $\frac{32^5}{64^4}$; 4) $\frac{39^8}{3^{10}\cdot 13^7}$!

18.56. Add meg tört alakban az alábbi kifejezéseket:

1) $\frac{2}{x+y}+\frac{3}{x-y}$; 2) $\frac{a+1}{a-4}+\frac{a-1}{a-6}$; 3) $\frac{c-7}{c+1}-\frac{c-3}{c-5}$!

18.57. Igazold az alábbi azonosságot:

$$\left(\frac{2b}{b^3+1}:\frac{1-b}{b^2-b+1}+\frac{2}{b-1}\right)\cdot\frac{b^2-2b+1}{4}:\frac{b-1}{b+1}=\frac{1}{2}!$$

18.58. Igazold, hogy az alábbi kifejezések értékei racionális számok:

1) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\sqrt{10}+9}-3}-\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\sqrt{10}+9}+3}$; 2) $\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}+\frac{2+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$!

18.59. Három munkás napi 8 órát dolgozva három nap alatt vájta ki a burgonyát. Hány nap alatt vájná ki a burgonyát 6 munkás, ha naponta csak 6 órát dolgoznak? A munkások napi munkahatékonysága azonos.

18.60. Egy cink-réz ötvözethez, amelyben 12 kg-mal több réz van, mint cink, hozzáadtak még 6 kg rezet. Ennek következtében a cink részaránya az ötvözetben 5%-kal csökkent. Mennyi réz, és mennyi cink volt eredetileg az ötvözetben?

18.61. Egy magnézium-alumínium ötvözethez, amely 12 kg alumíniumot tartalmaz, hozzáadtak még 5 kg magnéziumot. Ennek következtében a magnézium részaránya az ötvözetben 20%-kal növekedett. Mennyi magnézium volt eredetileg az ötvözetben?

18.62. Egy betétes 4000 hrivnyát helyezett el a folyószámláján. A bank az első évi kamatot a második évben 4%-kal megnövelte. A második év végére a banki egyenleg 4664 hrivnya lett. Hány százalék kamatot fizetett a bank az első évben?

18.63. Egy betétes 10 000 hrivnyát helyezett el a folyószámláján. A bank az első évi kamatot a második évben 2%-kal csökkentette. A második év végére a banki egyenleg 11 880 hrivnya lett. Hány százalék kamatot fizetett a bank az első évben?

Hogyan lehet kiküszöbölni a százalékos feladatok kétértelműségeit?

Azok a feladatok, melyekben százalékváltozásról van szó, bizonyos esetekben bonyolultabbak. A 18.62. és a 18.63. feladat is ilyen típusú, melyben a „banki százalék”-ról, a kamat növekedéséről (csökkenéséről) van szó. A kamatláb ugyanolyan változó mennyiség, mint a sebesség, a távolság vagy az ár. Az egyetlen különbség abban rejlik, hogy ez a mennyiség százalékban van kifejezve. Ezért, ha a százalékláb változásáról esik szó a feladatban, ez gyakran kétértelműséghez vezethet. Hasonlítsuk össze:

Az x ár növekedése	Az x százalékláb növekedése	Az új érték matematikai modellje
Az ár 10 hrivnyával növekedett	A százalékláb 10%-kal növekedett	$x + 10$
Az ár 10%-kal növekedett	A százalékláb 10%-kal növekedett	$1{,}1x$

Láthatjuk, hogy a százalékláb szöveges megfogalmazása különböző matematikai modelleknél azonos.

Ahhoz, hogy elkerüljék ezeket a kétértelműségeket, a közgazdászok, akiknek gyakran van szükségük százalékszámításra, bevezették „a százalékpont” kifejezést.

Felhozunk egy jellemző példát.

A kilencedik osztályokba 100 tanuló jár. Az év elején 20%-kuk jeles tanuló volt.

Ha azt mondjuk, hogy év végére a kitűnő tanulók száma 5%-kal nőtt, akkor ez azt jelenti, hogy a jeles tanulók száma (főben számolva) ennek a mennyiségnek az 5%-ával nőtt. A mi példákban a jeles tanulók száma 20 fő; amikor ez a mennyiség 5%-kal nőtt, akkor az 21 tanulót jelentett.

Ha azt szeretnénk mondani, hogy a százalékarány nőtt 20%-ról 25 %-ra, akkor használjuk a százalékpont kifejezést: „a jeles tanulók száma év végére 5 százalékponttal nőtt”. Ebben az esetben év végére a jeles tanulók száma 25.

Így már átfogalmazhatjuk a 18.62. feladatot, hogy elkerüljük az esetleges rossz értelmezést.

18.62. Egy betétes 4000 hrivnyát helyezett el a folyószámláján. A bank az első évi kamatot a második évben 4 százalékponttal növelte meg. A második év végére a banki egyenleg 4664 hrivnya lett. Hány százalék kamatot fizetett a bank az első évben?

19. A mértani sorozat első *n* tagjának összege

Vizsgáljuk meg a b_1, b_2, b_3, …., – b_{n-1}, b_n véges mértani sorozatot!

Jelöljük ezen sorozat tagjainak összegét S_n-nel.

Azt kapjuk, hogy

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n. \qquad (*)$$

Vezessük le, milyen képlettel lehet ezt az összeget kiszámolni.

Először ismerkedjünk meg egy olyan feladattal, amely segít a képlet levezetésében.

Vegyük az 1, 2, 2^2, …, 2^{62}, 2^{63} mértani sorozatot és számítsuk ki az S_{64} tagok összegét:

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63}.$$

Szorozzuk meg az egyenlőség mindkét oldalát a sorozat kvóciensével, 2-vel:

$$2S_{64} = 2 + 2^2 + \ldots + 2^{62} + 2^{63} + 2^{64}.$$

Határozzuk meg a $2S_{64} - S_{64}$ különbséget:

$$\begin{array}{rrcccccccccccccc}
- & 2S_{64} = & & & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \ldots & + & 2^{63} & + & 2^{64} \\
 & S_{64} = & 1 & + & 2 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \ldots & + & 2^{63} & & \\
\hline
 & 2S_{64} - S_{64} = & -1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \ldots & + & 0 & + & 2^{64}
\end{array}$$

Innen $S_{64} = 2^{64} - 1$.

Felmerülhet bennetek az a kérdés, miért pont az 1, 2, 2^2, …, 2^{62}, 2^{63} mértani sorozatot választottuk példának.

Ehhez a sorozathoz egy ókori legenda köthető. A sakk feltalálója, egy indiai udvari bölcs, első ránézésre egy nagyon szerény jutalmat kért a találmányáért: az első négyzetért 1 búzaszemet, a másodikért 2-t, a harmadikért 4-et és így tovább, minden következő négyzetért kétszer többet, mint az őt megelőzőért.

Érthető, hogy a búzaszemek száma, amit a feltaláló kért, $S_{64} = 2^{64} - 1$.

A gazdag rádzsa megdöbbent, amikor kiderült, hogy nem tudja a bölcs „szerény” kérését teljesíteni. Ugyanis $2^{64} - 1$ kifejezés értéke 1 844 674 407 370 9551 615.

Ahhoz, hogy megértsük, mennyire nagy ez a szám, képzeljük el, hogy ezt a búzamennyiséget egy olyan raktárban szeretnénk tárolni, melynek az alapterülete 12 ha. Ebben az esetben a raktár magassága nagyobb kell legyen, mint a Föld és a Hold közötti távolság.

Alkalmazzuk az előbbi eljárást az (*) összeg meghatározásához!

Írjuk át az (*) egyenlőséget az alábbi alakban:

$$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-2} + b_1q^{n-1}.$$

Szorozzuk meg mindkét oldalát q-val:

$$S_nq = b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + b_1q^4 + \dots + b_1q^{n-1} + b_1q^n.$$

Határozzuk meg az $S_nq - S_n$ különbséget:

$$\begin{array}{rrcccccccccccccc} & S_nq = & & & b_1q & + & b_1q^2 & + & b_1q^3 & + & \dots & + & b_1q^{n-1} & + b_1q^n \\ - & S_n = & b_1 & + & b_1q & + & b_1q^2 & + & b_1q^3 & + & \dots & + & b_1q^{n-1} & \\ \hline & S_nq - S_n = & -b_1 & + & 0 & + & 0 & + & 0 & + & \dots & + & 0 & + b_1q^n \end{array}$$

Tehát

$$S_nq - S_n = b_1q^n - b_1.$$

Innen $S_n(q-1) = b_1(q^n - 1)$.

Ha $q \neq 1$, akkor azt kapjuk, hogy

$$\boxed{\boldsymbol{S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}}}$$

A kapott egyenlőség a **mértani sorozat első *n* tagjának összegképlete**, ha a kvóciens egytől különböző szám.

Ha $q = 1$, akkor a mértani sorozat minden tagja az első taggal egyenlő. Így $S_n = nb_1$.

PÉLDA Bármely természetes n-re egy mértani sorozat első n tagjának összege meghatározható az $S_n = 10(2^n - 1)$ képlettel. Határozd meg ennek a sorozatnak az első tagját és kvóciensét!

Megoldás. Jelöljük a mértani sorozat első tagját b_1-gyel, a kvóciensét q-val!

Ekkor $b_1 = S_1 = 10\ (2 - 1) = 10$; $b_1 + b_2 = S_2 = 10\ (2^2 - 1) = 30$. Innen $b_2 = 30 - b_1 = 20$; $q = \dfrac{b_2}{b_1} = \mathbf{2}.$

Felelet: $b_1 = 10$, $q = 2$. ◀

1. Hogyan lehet meghatározni a mértani sorozat első n tagjának összegét, ha a kvóciense egytől különböző?

2. Hogyan lehet meghatározni a mértani sorozat első n tagjának összegét, ha a kvóciense eggyel egyenlő?

GYAKORLATOK

19.1.° Határozd meg a q kvóciensű (b_n) mértani sorozat első n tagjának összegét, ha:

1) $b_1 = 10$, $q = 3$, $n = 4$;

2) $b_1 = -4$, $q = -1$, $n = 10$;

3) $b_1 = 0{,}6$, $q = 2$, $n = 5$;

4) $b_1 = 4{,}5$, $q = \frac{1}{3}$, $n = 8$;

5) $b_1 = -9$, $q = \sqrt{3}$, $n = 6$;

6) $b_1 = 8$, $q = -\frac{1}{2}$, $n = 4$!

19.2.° Határozd meg a q kvóciensű (b_n) mértani sorozat első n tagjának összegét, ha:

1) $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 9$;

2) $b_1 = 15$, $q = \frac{2}{3}$, $n = 3$;

3) $b_1 = 18$, $q = -\frac{1}{3}$, $n = 5$;

4) $b_1 = 4$, $q = -\sqrt{2}$, $n = 4$!

19.3.° Határozd meg az alábbi mértani sorozatok első öt tagjának összegét, ha:

1) 12, 72, 432, ...;

2) $\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, ... !

19.4.° Határozd meg az alábbi mértani sorozatok első négy tagjának összegét, ha:

1) –0,6; 3; –15; ...;

2) 56; 42; 31,5; ... !

19.5.• Határozd meg a (c_n) mértani sorozat első hat tagjának összegét, ha:

1) $c_4 = 216$, a sorozat kvóciense pedig $q = -3$;

2) $c_1 = 5\sqrt{5}$, $c_5 = 125\sqrt{5}$, a sorozat kvóciense pedig $q > 0$!

19.6.˙ Határozd meg az (x_n) mértani sorozat első hét tagjának összegét, ha $x_3 = 24$ és $x_8 = 768$!

19.7.˙ A (b_n) mértani sorozat általános tagjának képlete $b_n = 10 \cdot 3^{n-1}$. Számítsd ki a sorozat első öt tagjának összegét!

19.8.˙ Az (y_n) mértani sorozat általános tagjának képlete $y_n = \frac{(-2)^{n+1}}{20}$. Számítsd ki a sorozat első tíz tagjának összegét!

19.9.˙ Egy mértani sorozat kvóciense $\frac{2}{3}$, első négy tagjának összege 65. Határozd meg a sorozat első tagját!

19.10.˙ Egy mértani sorozat első három tagjának összege 516, első tagja 12. Mennyi a sorozat kvóciense?

19.11.˙ Egy véges mértani sorozat tagjainak összege 605. Hány tagja van ennek a sorozatnak, ha az első tagja $b_1 = 5$ és $q = 3$?

19.12.˙ Egy baktérium, kedvező körülmények között, a huszadik perc végén osztódik, melyek mindegyike a következő 20 perc végén újra kettéosztódik, és így tovább. Hány baktérium lesz egy baktériumból egy nap alatt?

19.13.˙ Bármely természetes n-re egy mértani sorozat első n tagjának összege meghatározható az $S_n = 4(3^n - 1)$ képlettel. Határozd meg ennek a sorozatnak a harmadik tagját!

19.14.˙ Bármely természetes n-re egy mértani sorozat első n tagjának összege meghatározható az $S_n = 6\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)$ képlettel. Határozd meg ennek a sorozatnak a negyedik tagját!

19.15.˙˙ Határozd meg a mértani sorozat első hat tagja négyzetének összegét, ha első tagja $2\sqrt{3}$, kvóciense pedig $\sqrt{3}$.

19.16.˙˙ Határozd meg a (b_n) mértani sorozat első négy tagja négyzetének összegét, ha $b_1 = 3$, $q = -6$!

19.17.˙˙ Igazold az alábbi azonosságot:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)!$$

19.18.˙˙ Igazold az alábbi azonosságot:

$$a^{2n+1} + 1 = (a + 1)(a^{2n} - a^{2n-1} + \ldots + a^2 - a + 1)!$$

19.19.* Hány tagja van annak a véges mértani sorozatnak, melynek kvóciense $q = 3$, utolsó tagja $c_n = 162$, minden tagjának összege pedig $S_n = 242$?

ISMÉTLŐ GYAKORLATOK

19.20. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $\begin{cases} (x+2)(x-6) \leqslant (x+2)(x+1)+4, \\ 2(6x-1) \geqslant 7(2x-4); \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-2}{3} \geqslant \dfrac{x-3}{4} - x, \\ 1-x > 0{,}5x-5! \end{cases}$

19.21. Hol növekvő az alábbi függvény:

1) $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 4$;

2) $f(x) = -3x^2 - 2x + 4$?

19.22. Ábrázold az alábbi függvényeket:

1) $y = -\dfrac{6}{x} + 3$;

2) $y = -\dfrac{6}{x+3}$;

3) $y = -\dfrac{6}{x+3} + 3$!

19.23. Két munkás az első napon 90 alkatrészt gyártott. A második napon az egyikük 10%-kal, a másik pedig 15%-kal több alkatrészt gyártott, mint első nap. Összesen a második napon 101 alkatrész készült el. Hány alkatrészt készítettek el külön-külön ezek a munkások az első napon?

19.24. Egyszerűsítsd az alábbi kifejezéseket:

1) $\sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{16a^2}$, ha $a < 0$ és $b > 0$;

2) $\sqrt{(x-y)^2} - \sqrt{9y^2}$, ha $x > 0$ és $y < 0$!

19.25. Egy öltöny ára 600 hrivnya. Kétszeri árleszállítás után ez az öltöny 432 hrivnyába került. A második árleszállítás az első kétszerese volt. Hány százalékos volt a két árleszállítás?

19.26. Egy áru 200 hrivnyába került. Először az árát néhány százalékkal növelték, majd ugyanannyi százalékkal csökkentették. Ezek után ez az áru 192 hrivnyába került. Hány százalékos volt mindkét esetben az árváltozás?

NEM HAGYOMÁNYOS MÓDSZEREK ALKAMAZÁSA

19.27. Adott a síkon 100 pont. Tudjuk, hogy bármelyik négy pont illeszkedik valamilyen másodfokú függvény grafikonjára. Bizonyítsd be, hogy mind a 100 pont egyetlen másodfokú függvény grafikonján van!

Összegzés

Az $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n, \ldots$ sorozattal egyidejűleg vizsgálhatjuk az (S_n) sorozatot is:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots,$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots .$$

Az (S_n) sorozat n-edik tagja képletének meghatározását az (a_n) sorozat **első *n* tagja összegzésének** nevezzük.

Mivel már ismerjük a számtani és a mértani sorozat első n tagjának összegképletét, így összeadhatjuk ezen sorozat első n tagját is.

A görög $\sum$ (szigma) betűvel az $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ összeget így írjuk: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$.

Például $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$;

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Az összegzések egyik hatékony módja a már igazolt azonosságok alkalmazása.

1. PÉLDA Határozzuk meg a $\frac{3}{2} + \frac{9}{4} + \frac{25}{8} + \ldots + \frac{2^n \cdot n + 1}{2^n}$ összeget!

Megoldás. Tudjuk, hogy $\frac{2^k \cdot k + 1}{2^k} = k + \frac{1}{2^k}$.

Így az adott összeg felírható az alábbi alakban:

$$\left(1 + \frac{1}{2^1}\right) + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(3 + \frac{1}{2^3}\right) + \ldots + \left(n + \frac{1}{2^n}\right).$$

Ebből következik, hogy

$$\left(1 + \frac{1}{2^1}\right) + \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left(3 + \frac{1}{2^3}\right) + \ldots + \left(n + \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= (1+2+3+\ldots+n) + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Tehát: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^k \cdot k+1}{2^k} = \frac{n(n+1)}{2} + 1 - \frac{1}{2^n}$. ◀

2. PÉLDA Határozzuk meg a $7+77+777+\underbrace{77\ldots7}_{n}$ összeget!

Megoldás. Mivel $\underbrace{77\ldots7}_{n} = 7\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}$, ezért a feladat megoldásához elegendő meghatározni az $S_n = 1+11+111+\ldots+\underbrace{11\ldots1}_{n}$ összeget, majd a kapott értéket megszorozzuk 7-tel.

Ezért

$$S_n = \frac{10-1}{9} + \frac{10^2-1}{9} + \frac{10^3-1}{9} + \ldots + \frac{10^n-1}{9} =$$

$$= \frac{1}{9}(10+10^2+\ldots+10^n) - \frac{1}{9}\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n} =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{10(10^n-1)}{10-1} - \frac{n}{9} = \frac{10(10^n-1)}{81} - \frac{n}{9}.$$

A keresett összeg $\frac{70(10^n-1)}{81} - \frac{7n}{9}$. ◀

Tehát, ha egy adott (a_n) sorozathoz találunk olyan (b_n) sorozatot, melynél $a_n = b_{n+1} - b_n$, akkor az $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ összeget könnyű meghatározni. Valóban, $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + (b_4 - b_3) + \ldots (b_{n+1} - b_n) = b_{n+1} - b_1$.

3. PÉLDA Határozzuk meg az $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+n\cdot n!$ összeget!

Megoldás. Tudjuk, hogy

$$n\cdot n! = (n+1)! - n!.$$

Így felírhatjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (2!-1!) + (3!-2!) + (4!-3!) + \ldots + ((n+1)!-n!) = (n+1)! - 1.$$ ◀

4. PÉLDA Bizonyítsd be, ha (a_n) olyan számtani sorozat, melynek tagjai nullától különbözők, akkor

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$

Megoldás. Tudjuk, hogy $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\cdot\frac{1}{d}$, ahol d a sorozat differenciája. Ezért

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)\cdot\frac{1}{d}+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)\cdot\frac{1}{d}+\ldots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\cdot\frac{1}{d}=$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)=$$

$$=\frac{a_{n+1}-a_1}{da_1\cdot a_{n+1}}=\frac{a_1+dn-a_1}{da_1\cdot a_{n+1}}=\frac{n}{a_1a_{n+1}}.$$ ◄

5. PÉLDA Számítsd ki az $\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{13}{2\cdot 3}+\frac{25}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{2n^2+2n+1}{n(n+1)}$ összeget!

Megoldás. Ismeretes, hogy

$$\frac{2n^2+2n+1}{n(n+1)}=\frac{2n(n+1)+1}{n(n+1)}=2+\frac{1}{n(n+1)}=2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

Így felírható

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2k^2+2k+1}{k(k+1)}=\left(2+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(2+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(2+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=2n+1-\frac{1}{n+1}=\frac{n(2n+3)}{n+1}.$$ ◄

GYAKORLATOK

1. Számítsd ki a $\sum_{k=1}^{n}\frac{5^k\cdot k-1}{5^k}$ összeget!

2. Számítsd ki a $\sum_{k=1}^{n}\frac{3^{k+1}\cdot k^2+3^k\cdot k+1}{3^k}$ összeget!

3. Határozd meg az alábbi összegeket:

1) $9+99+999+\ldots+\underbrace{99\ldots9}_{n}$;

2) $5+55+555+\ldots+\underbrace{55\ldots5}_{n}$!

4. Bizonyítsd be, ha (a_n) olyan számtani sorozat, melynek tagjai pozitív számok, akkor:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}}}!$$

5. Határozd meg az alábbi összegeket:

1) $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{(4n-7)(4n-3)}$;

2) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{7}{2\cdot 3}+\frac{13}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$;

3) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}$;

4) $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\frac{7}{144}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$!

6. Határozd meg az alábbi összegeket:

1) $\frac{1}{2\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 17}+\ldots+\frac{1}{(5n-3)(5n+2)}$;

2) $\frac{3}{1\cdot 2}+\frac{13}{2\cdot 3}+\frac{37}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{n^3+n^2+1}{n(n+1)}$!

7. Határozd meg a $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2-1}$ összeget!

8. Határozd meg az $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ összeget!

9. Határozd meg az $S_n = 1 + 2a + 3a^2 + 4a^3 + \ldots + n\cdot a^{n-1}$ összeget, ahol $a \neq 1$!

TUDÁSPRÓBA
4. TESZTFELADAT

1. Válaszd ki az alábbi sorozatok közül a számtani sorozatot!

A) 6, 9, 12, 13; C) 2, 8, 14, 21;
B) 2, 9, 16, 23; D) 2, 9, 16, 21.

2. Az alábbi sorozatok közül válaszd ki a mértani sorozatot!

A) 3, 6, 9, 12; C) 3, 6, 12, 24;
B) 3, 5, 7, 14; D) 5, 8, 12, 16.

3. Mennyi annak a számtani sorozatnak a hatodik tagja, melynek első tagja 12, különbsége pedig 0,4?

A) 14,4; B) 14; C) 13,6; D) 13.

4. Számítsd ki az (a_n) számtani sorozat különbségét, ha $a_1 = -7$ és $a_2 = 5$!

A) –2; B) 2; C) –12; D) 12.

5. Számítsd ki a számtani sorozat első tíz tagjának összegét, ha $a_1 = -16$ és $d = 3$!

A) –10; B) –15; C) –20; D) –25.

6. Számítsd ki a mértani sorozat negyedik tagját, ha $b_1 = -\frac{1}{8}$ és $q = -2$.

A) –2; B) –1; C) 1; D) 2.

7. Mennyi a (b_n) mértani sorozat kvóciense, ha $b_1 = 36$ és $b_2 = 9$!

A) $\frac{1}{4}$; B) 4; C) 27; D) –27.

8. Számítsd ki a mértani sorozat első tíz tagjának összegét, ha első tagja $b_1 = 2$ és kvóciense $q = 3$!

A) 56; B) 80; C) 96; D) 192.

9. Számítsd ki az (a_n) számtani sorozat első tízenöt tagjának összegét, ha általános tagjának képlete $a_n = -4n + 13$!

A) –300; B) –285; C) –275; D) –250.

10. Hányadik tagja az (a_n) számtani sorozatnak a 6,2, ha $a_1 = 0{,}2$ és $d = 0{,}4$?

A) 14; B) 15; C) 16; D) 17.

11. Hány pozitív tagja van az (a_n) számtani sorozatnak, ha $a_1 = 41$ és $a_2 = 38$?

A) 13; B) 14; C) 15; D) 16.

12. Számítsd ki az (a_n) számtani sorozat különbségét, ha $a_1 + a_5 = 28$ és $a_2 + a_3 = 24$!

A) 4; B) 3; C) 2,5; D) 2.

13. Egy betétes 4000 hrinyát tett be egy bankba 10%-os éves kamatra. Mennyi pénz lesz a számláján két év múlva?

A) 4840 hrn; B) 4800 hrn; C) 4080 hrn; D) 4440 hrn.

14. Egy szekrény ára 15 000 hrivnya. Kétszeri, ugyanakkora árleszállítás után 9 600 hrivnyába került. Hány százalékos volt mindkét esetben az árleszállítás?

A) 25%; B) 10%; C) 15%; D) 20%.

15. Határozd meg azoknak a számoknak az összegét, melyek 9 többszörösei és kisebbek, mint 120!

A) 810; B) 702; C) 819; D) 882.

16. Mennyi az (a_n) számtani sorozat első kilenc tagjának összege, ha $a_1 + a_4 + a_{10} = 18$?

A) 48; C) 72;

B) 54; D) nem lehet meghatározni.

17. Az x mely értékénél lesznek a $7x - 8$, $2x + 1$ és $x + 6$ kifejezések értékei egy számtani sorozat három egymást követő tagjai?

A) 1; C) –1;

B) 2; D) ilyen érték nem létezik.

18. Az x mely pozitív értékénél lesznek az $x + 1$, $3x - 1$ és $2x + 10$ kifejezések értékei egy mértani sorozat három egymást követő tagjai?

A) 1,5; C) 3;

B) 4; D) ilyen érték nem létezik.

A 3. PARAGRAFUS ÖSSZEFOGLALÁSA

Sorozat

Az 1, 2, 3, …, n, … természetes számokkal megszámozott objektumok sorozatot alkotnak.

Számtani sorozat

Azt a sorozatot, melynek minden tagja, a másodiktól kezdődően, egyenlő az előző tagnak és egy állandó számnak az összegével, számtani sorozatnak nevezzük.

A számtani sorozat *n*-edik tagjának (általános tagjának) képlete

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1)$$

A számtani sorozat tagjainak tulajdonsága

A számtani sorozat bármelyik tagja, kivéve az első tagot (és az utolsót, ha a sorozat véges), a szomszédos két tag számtani közepével (átlagával) egyenlő:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

A számtani sorozat első *n* tagjának összege

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d\,(n-1)}{2} \cdot n$$

Mértani sorozat

Mértani sorozatnak nevezzük azt a sorozatot, melynek első tagja nullától különböző, minden következő tagját pedig úgy kapjuk meg, hogy az előtte lévő tagot megszorozzuk ugyanazzal a nullával nem egyenlő számmal.

A mértani sorozat *n*-edik tagjának (általános tagjának) képlete

$$b_n = b_1 q^{n-1}$$

A mértani sorozat tagjainak tulajdonsága

Egy mértani sorozat bármely tagjának a négyzete, kivéve az első tagot (és ha a sorozat véges, az utolsó tagot), a szomszédos két tag szorzatával egyenlő:

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}.$$

A mértani sorozat első *n* tagjának összege

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

20. A 9. osztályos tananyag ismétlése

20.1. Írd le az alábbi állításokat a matematika nyelvén. Alkalmazz relációs jeleket:

1) az a szám pozitív;
2) a b szám negatív;
3) a c szám abszolút értéke nem negatív;
4) az a és b racionális számok összegének abszolút értéke nem nagyobb a számok abszolút értékének összegénél!

20.2. Bizonyítsd be az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $3a(a + 6) < (3a + 6)(a + 4)$;
2) $(2b - 1)(3b + 2) < (3b - 1)(2b + 1)$;
3) $25m^2 + n^2 \geqslant 10mn$;
4) $2a^2 - 4a + 5 > 0$;
5) $x^2 + x + 1 > 0$;
6) $4y^2 - 12 \geqslant 12y - 21$;
7) $a^2 + b^2 + 2 \geqslant 2(a + b)$;
8) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geqslant 2(a + b + c)$;
9) $2a^2 + 5b^2 + 2ab + 1 > 0$;
10) $x^2 + y^2 + 15 > 6x + 4y$!

20.3. Igazold, hogy az alábbi egyenlőtlenségek igaz egyenlőtlenségek:

1) $a^5 - 5 \geqslant 5a^4 - a$, ha $a \geqslant 5$;
2) $b^3 + b + 2 \geqslant 0$, ha $b \geqslant -1$;
3) $c^3 + c \leqslant 3c^2 + 3$, ha $c \leqslant 3$!

20.4. Tudjuk, hogy $a > 3$. Hasonlítsd össze az alábbi kifejezések értékét nullával:

1) $2a - 6$;
2) $15 - 5a$;
3) $2a - 4$;
4) $(a - 3)(2 - a)$;
5) $\frac{a-2}{a-1}$;
6) $\frac{-4}{3-a}$!

20.5. Tudjuk, hogy $b < 2$. Hasonlítsd össze az alábbi kifejezések értékét nullával:

1) $4b - 8$;
2) $(b - 2)^2(b - 3)$;
3) $\frac{b-3}{(2-b)(b-4)}$!

20.6. Bizonyítsd be, ha, $a > b > 1$, akkor

$$a^2b + b^2 + a > ab^2 + a^2 + b!$$

20.7. Bizonyítsd be, ha $a < b < 2$, akkor

$$a^2b + 2b^2 + 4a < ab^2 + 2a^2 + 4b!$$

20.8. Hasonlítsd össze az a számot nullával, ha:

1) $6a < 5a$; 3) $9a > 4a$;
2) $-2a < 2a$; 4) $-37a > -3a$!

20.9. Bizonyítsd be, ha $a > 7$ és $b > 3$, akkor:

1) $4a + b > 31$; 2) $10a + 3b > 75$!

20.10. Bizonyítsd be, ha, $a > 5$ és $b < -2$, akkor:

1) $3a - b > 17$; 2) $5b - 2a < -10$!

20.11. Hasonlítsd össze az alábbi kifejezések értékeit, ha lehetséges:

1) $4a + b$ és 12, ha $a > 2$ és $b > 5$;
2) $b - 2a$ és 0, ha $a > 4$ és $b < 6$;
3) $b - 3a$ és 1, ha $a < 6$ és $b < 0$;
4) $a - 5b$ és 1, ha $a < 12$ és $b > 2$!

20.12. Az a, b, c és d pozitív számokra igaz, hogy $a > b, d < b$ és $c > a$. Rendezd az $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ és $\frac{1}{d}$ számokat növekvő sorrendbe!

20.13. Tudjuk, hogy $5 < a < 8$. Becsüld meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $0{,}4a$; 3) $2a + 1$;
2) $a - 3$; 4) $-3a + 2$!

20.14. Tudjuk, hogy $3{,}1 < \sqrt{10} < 3{,}2$. Becsüld meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $2\sqrt{10}$; 2) $-4\sqrt{10}$; 3) $3\sqrt{10} - 5$!

20.15. Tudjuk, hogy $3 < m < 4$ i $-3 < n < -2$. Becsüld meg az alábbi kifejezések értékét:

1) $2m + 3n$; 3) $-5m + 4n$;
2) $0{,}2m - n$; 4) $m - \frac{m}{n}$!

20.16. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:

1) $16 - 4n \geqslant 8$; 4) $\frac{4 - 3x}{7} < 1$;
2) $10x > 13x + 6$; 5) $3x + 4 < 5x - 4$;
3) $6x + 3 > 5x - 2$; 6) $4x - 7 > 7x - 6$!

20.17. Határozd meg az $y = \sqrt{10 - 3x}$ függvény megengedett értékei közül a természetes számok összegét!

20.18. Adott az $f(x) = 3x + 12$ függvény. Az argumentum mely értékeinél vesz fel a függvény

1) pozitív értéket;
2) negatív értéket;
3) a $[-4; 7]$ intervallumhoz tartozó értéket?

20.19. Adj meg olyan $ax + b > 0$ alakú egyenlőtlenséget, ahol x az ismeretlen, a és b valamilyen szám és az alábbi intervallum a megoldáshalmaza:
1) $(-3; +\infty)$ intervallum;
2) $(-\infty; -1{,}6)$ intervallum;
3) a valós számok halmaza;
4) üres halmaz!

20.20. Határozd meg az alábbi egyenlőtlenségek megoldáshalmazát:
1) $(2x-3)^2 \leqslant (4x-1)(x-2)+7$;
2) $(x-2)(2+x) \geqslant 2-(x+4)(1-x)$;
3) $\frac{1-x}{2}+3 < 3x-\frac{2x+1}{4}$;
4) $\frac{3x-37}{2}-9 > \frac{7-2x}{4}+2x$;
5) $\frac{5x-3}{5} \geqslant \frac{3x+4}{3}-\frac{29}{15}$!

20.21. Mennyi a következő egyenlőtlenség legkisebb egész megoldása:
$$\frac{3x+5}{4}-1 \leqslant \frac{x-2}{3}+x?$$

20.22. Mennyi a következő egyenlőtlenség legkisebb egész megoldása:
$$\frac{3x+5}{2} < \frac{8-x}{3}?$$

20.23. Ekvivalensek-e az alábbi egyenlőtlenségek:
1) $\frac{x+1}{2}+\frac{x-1}{3} < 1$ és $3(x+1)+2(x-1) < 1$;
2) $(x+3)(x^2+4) > 0$ és $x+3 > 0$;
3) $x-1 > 3$ és $x-1+\frac{1}{x-5} > 3+\frac{1}{x-5}$;
4) $x+2 < 1$ és $x+2+\frac{1}{x} < 1+\frac{1}{x}$?

20.24. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenség-rendszereket:
1) $\begin{cases} x-3 < 2x-3, \\ 4x+5 > 10-x; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 9+2x \leqslant 3x+7, \\ x-2 > 2x-5; \end{cases}$
3) $\begin{cases} (x-5)^2-15 \geqslant (x-3)(x-4)-50, \\ 4(x+7)-16 \geqslant 2-x; \end{cases}$
4) $\begin{cases} \frac{x-1}{4}+\frac{x+1{,}7}{3} \geqslant \frac{3x+1}{5}, \\ \frac{x+2}{4}-\frac{x+8}{5} < \frac{3x-1}{10}! \end{cases}$

20.25. Határozd meg az alábbi egyenlőtlenség-rendszerek egész megoldásainak összegét:

1) $\begin{cases} 3x - 5 < 23 - 4x, \\ 7x - 9 \leqslant 9x + 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2(3x - 4) < 3(4x - 5) + 23, \\ 4(x + 1) \leqslant 3x + 5! \end{cases}$

20.26. Adj meg olyan egyismeretlenes lineáris két egyenlőtlenségből álló rendszert, amelynek a megoldáshalmaza az alábbi intervallum:

1) $(-2; +\infty)$ intervallum;

2) $\left[-4; \frac{1}{3}\right]$ intervallum;

3) $(-\infty;-10]$ intervallum;

4) üres halmaz;

5) csak a 8-as szám, vagyis egy egyelemű halmaz;

6) a valós számok halmaza.

20.27. Tudjuk, hogy $1 \leqslant a \leqslant 4$. Hány egész értéke lehet a $0{,}5a - 3$ kifejezésnek?

20.28. Oldd meg az alábbi kettős egyenlőtlenségeket:

1) $-3 \leqslant 2x - 1 < 5;$

2) $-1 < 3x - 9 \leqslant 6;$

3) $2 < 7 - 4x < 11;$

4) $-2 \leqslant \frac{1 - x}{3} \leqslant 1!$

20.29. Az a mely értékénél lesz legalább egy megoldása az alábbi egyenlőtlenség-rendszereknek:

1) $\begin{cases} x < 4, \\ x > a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > a; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x \leqslant -3, \\ x \geqslant a; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x \geqslant 1, \\ x \leqslant a? \end{cases}$

20.30. Az a mely értékénél nem lesz megoldása az alábbi egyenlőtlenség-rendszereknek:

1) $\begin{cases} x < 6, \\ x > a; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \leqslant 5, \\ x > a; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x \leqslant -8, \\ x \geqslant a; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x > 0, \\ x \leqslant a? \end{cases}$

20.31. Az a mely értékénél lesz az $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x > a \end{cases}$ egyenlőtlenség-rendszer megoldása:

1) $[7; +\infty)$ intervallum;

2) $[3; +\infty)$ intervallum;

3) $(-2; +\infty)$ intervallum;

4) üres halmaz?

20.32. Az a mely értékénél lesz az alábbi egyenletnek két különböző negatív gyöke:

$$x^2 - (2a + 2)\,x - 2a - 3 = 0?$$

20.33. Az a mely értékénél lesz az alábbi egyenletnek két különböző gyöke a $[-3; 2]$ intervallumból:

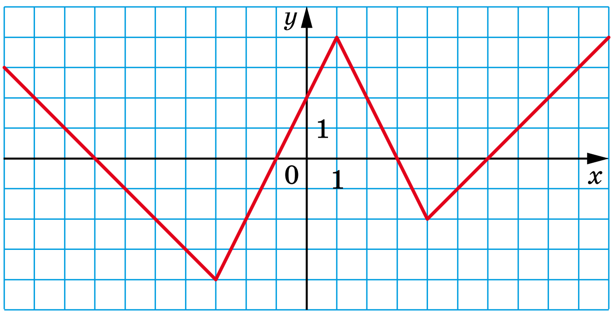
$$x^2 - (2a - 1)\,x + a^2 - a - 6 = 0?$$

20.34. A 20.1. ábrán a valós számok halmazán értelmezett $y = f(x)$ függvény grafikonja látható. Olvasd le a rajzról:

1) a függvény zérus helyeit;

2) milyen intervallumon növekszik, és milyen intervallumon csökken a függvény;

3) az $f(x) > 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát!



20.1. ábra

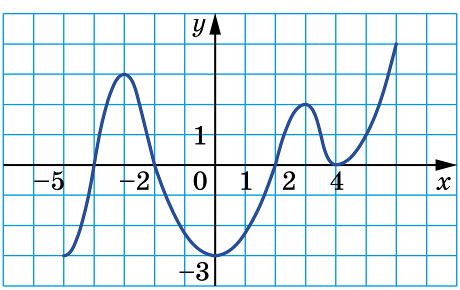
20.35. A 20.2. ábrán a $[-5; 6]$ intervallumon értelmezett $y = g(x)$ függvény grafikonja látható. Olvasd le a rajzról:

1) a függvény értékkészletét;

2) a függvény zérus helyeit;

3) milyen intervallumon növekszik, és milyen intervallumon csökken a függvény;

4) a $g(x) \leqslant 0$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát!



20.2. ábra

20.36. Állapítsd meg, hogy az alábbi lineáris függvények közül melyik növekvő, és melyik csökkenő:

1) $y = -4x$;
2) $y = 4x - 7$;
3) $y = \frac{x}{4}$;
4) $y = 4 - x$!

20.37. Az alábbi függvények közül melyik csökkenő:

1) $y = x^2$;
2) $y = \frac{2}{x}$;
3) $y = -2x$;
4) $y = 2x$?

20.38. Oldd meg grafikusan az alábbi egyenleteket:

1) $(x+1)^2 = -\frac{2}{x}$;
2) $x^2 - 2 = -\sqrt{x}$;
3) $\sqrt{x+1} = 5 - x$;
4) $\frac{6}{x-2} = x + 3$;
5) $(x+2)^2 = \sqrt{x} + 4$;
6) $\frac{5}{x} + 3 = (x-3)^2$!

20.39. Határozd meg az alábbi parabolák csúcspontjainak abszcisszáját:

1) $y = 4x^2 - 12x + 1$;
2) $y = -0{,}2x^2 - 2x + 3$!

20.40. Az alábbi parabolák közül melyek csúcspontjai illeszkednek az ordinátatengelyre és melyek az abszcisszatengelyre:

1) $y = x^2 - 4x + 3$;
2) $y = x^2 - 8$;
3) $y = x^2 - 6x + 9$;
4) $y = x^2 + 2x$?

20.41. Határozd meg a b és c paraméterek értékeit úgy, hogy az $y = x^2 + bx + c$ függvénynek:

1) egy zérus helye legyen, az $x = -3$;
2) legkisebb értékét, a 4-et, az $x = 0$ helyen vegye fel;
3) az $x = -2$ és $x = 5$ helyeken legyen zérushelye!

20.42. Ábrázold az alábbi függvényeket! Határozd meg értékkészletüket, hol növekvők, és hol csökkenők az alábbi függvények:

1) $y = -2x^2 + 1$;
2) $y = 0{,}5x^2 - 2$;
3) $y = x^2 + 6x + 5$;
4) $y = 4x - x^2$;
5) $y = -x^2 + 4x - 3$;
6) $y = x^2 - 4x + 5$;
7) $y = 2x^2 - 3x - 2$;
8) $y = -3x^2 + 8x + 3$!

20.43. A c paraméterek mely értékeinél az $y = x^2 - 6x + c$ függvény grafikonja

1) illeszkedik az origóra;
2) csak egy közös pontja van az abszcisszatengellyel;
3) az $A(0; -4)$ pontban metszi az ordinátatengelyt;
4) a $B(2; 0)$ pontban metszi az abszcisszatengelyt!

20.44. A b paraméterek mely értékeinél az $y = x^2 + bx + 2$ függvény grafikonjának:
1) és az abszcisszatengelynek egy közös pontja van;
2) és az abszcisszatengelynek nincs közös pontja;
3) és az abszcisszatengelynek két közös pontja van, melyek távolsága 4 egység!

20.45. Az $y = x^2 + px + q$ függvény grafikonja illeszkedik az $A(1; 1)$ és $B(2; 2)$ koordinátájú pontokra. Rajta vannak-e az alábbi pontok ezen a grafikonon:
1) $C(-1; -1)$; 2) $D(3; 5)$?

20.46. Az $y = ax^2 + bx + c$ függvény grafikonja illeszkedik a (0; 10) koordinátájú pontra, csúcspontja pedig a (6; –2) koordinátájú pont. Határozd meg az a, b és c együtthatók értékeit!

20.47. Az $y = ax^2 + bx + c$ másodfokú függvény helyettesítési értéke az $x = -1$ helyen 0, az $x = \frac{1}{4}$ helyen pedig a függvény felveszi legkisebb értékét, ami $-\frac{25}{8}$. Határozd meg az a, b és c együtthatók értékeit!

20.48. Az m mely értékénél lesz:
1) az $y = x^2 - 6x + m$ függvény legkisebb értéke –8;
2) az $y = -x^2 + 4x - m$ függvény legnagyobb értéke 12?

20.49. Ábrázold az alábbi függvényeket:
1) $y = \dfrac{x^3 + 4x^2 - 5x}{x}$; 3) $y = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$;
2) $y = \dfrac{x^3 + 8}{x + 2} - 3$; 4) $y = \dfrac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 - 9}$!

20.50. Az a mely értékénél lesz az $x^2 + ax + a - 2 = 0$ egyenlet gyökei négyzetének összege minimális?

20.51. Tudjuk, hogy $a + 3b = 10$. Mennyi az $a^2 + b^2$ kifejezés minimális értéke és mely a és b értékeknél veszi fel ezt az értéket?

20.52. Oldd meg az alábbi egyenlőtlenségeket:
1) $x^2 - 4x + 3 > 0$; 5) $-3x^2 + 2x + 1 > 0$;
2) $x^2 - 6x - 40 \leqslant 0$; 6) $x - x^2 < 0$;
3) $x^2 + x + 1 \geqslant 0$; 7) $x^2 + 25 \geqslant 0$;
4) $x^2 - x + 1 < 0$; 8) $0{,}1x^2 - 2 \leqslant 0$!

20.53. Határozd meg az alábbi egyenlőtlenségek egész megoldásait:
1) $\frac{1}{3}x^2 + 3x + 6 < 0$; 2) $-4x^2 + 3x + 1 \geqslant 0$!

20.54. A c mely értékénél lesz a $2x^2 - 2x + 5c$ másodfokú polinom bármely x értékre pozitív?

20.55. Oldd meg a következő egyenlőtlenség-rendszereket:

1) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x > -1{,}2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x > 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x \geqslant 6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leqslant 0, \\ x \geqslant 6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > -\dfrac{1}{3}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 > 0, \\ x > -2; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 6x^2 + x - 2 \geqslant 0, \\ x \leqslant \dfrac{1}{2}! \end{cases}$

20.56. Oldd meg a következő egyenlőtlenséget:

1) $\dfrac{x^2 - 16}{|x+1|} \leqslant 0;$ 2) $\dfrac{x^2 - 5x - 14}{|x-8|} \geqslant 0!$

20.57. Határozd meg az alábbi függvények értelmezési tartományát:

1) $y = \dfrac{4}{\sqrt{x^2 + 3x - 10}} + \dfrac{1}{3x - 9};$

2) $y = \dfrac{6}{\sqrt{12 + x - x^2}} - \dfrac{2}{x^2 - 4};$

3) $y = \sqrt{49 - x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}!$

20.58. Az a mely értékénél lesz az alábbi egyenletnek két különböző valós gyöke:

1) $2x^2 + ax + a - 2 = 0;$

2) $(2a - 1)\,x^2 + (a - 3)\,x + 1 = 0;$

3) $ax^2 - (3a + 1)\,x + a = 0?$

20.59. Az a mely értékénél lesz az alábbi egyenlőtlenség megoldáshalmaza a valós számok halmaza:

1) $5x^2 - x + a > 0;$

2) $ax^2 - 10x - 5 < 0;$

3) $ax^2 - 2\,(a - 1)\,x + 4a \leqslant 0;$

4) $(a - 1)\,x^2 - (a + 1)\,x + a + 1 > 0?$

20.60. Oldd meg grafikusan a következő egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} y - x^2 = 3, \\ x + y = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 7, \\ xy = -12; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ y = -x^2 + 4x - 4; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ y = x^2 - 5! \end{cases}$

20.61. Oldd meg az alábbi egyenletrendszereket:

1) $\begin{cases} x - 4y = -6, \\ x^2 + 4y^2 = 8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x + y = -2, \\ 3x^2 - 2xy = 28; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 13, \\ xy = 15; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x - 2y = 18, \\ xy = -12; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x + y = -3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x - y = 1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = -2, \\ x + y = 1; \end{cases}$

8) $\begin{cases} (x-2)(y+1) = 1, \\ x - y = 3; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{8}, \\ x + y = 12; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{5}, \\ y - x = 4! \end{cases}$

20.62. Határozd meg az alábbi egyenletrendszerek gyökeit:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} xy + x + y = 11, \\ xy(x + y) = 30; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + xy + y = 5, \\ x - xy + y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x - y = 2, \\ \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{6}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 25, \\ x^2 - 3xy = 4; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 14, \\ xy = -6; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{10}, \\ xy = 50; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{16}{15}, \\ x^2 - y^2 = 16; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{25}{12}, \\ x^2 + y^2 = 25; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2 + 2xy = 5, \\ y^2 - 4xy = -4! \end{cases}$

20.63. Határozd meg:

1) a $3x - y - 5 = 0$ egyenes és az $y = \frac{2}{3}x^2 - 2x + 4$ parabola metszéspontjainak koordinátáit;
2) a $2x - 3y - 3 = 0$ egyenes és az $xy = 3$ hiperbola metszéspontjainak koordinátáit;
3) az $x^2 + y^2 = 13$ körvonal és az $xy = 6$ hiperbola metszéspontjainak koordinátáit!

20.64. Az a mely értékénél lesz az alábbi egyenletrendszereknek egyetlen megoldásuk:

1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ x + y = a? \end{cases}$

20.65. Egy téglalap átlója 17 cm, területe 120 cm^2. Mekkorák a téglalap oldalai?

20.66. Egy derékszögű háromszög átmérője 41 cm, területe 180 cm^2. Mekkorák a háromszög befogói?

20.67. Két városból, melyek között a távolság 240 km, egyszerre elindult egymással szembe két személygépkocsi. Az indulás után két órával a gépkocsik közötti távolság 40 km volt, és a gépkocsik már találkoztak. Számítsd ki mindkét gépkocsi sebességét, ha az egyik a két város közötti távolságot egy órával rövidebb idő alatt tette meg, mint a másik!

20.68. Két faluból, melyek között a távolság 20 km, egyszerre elindult egymással szembe két gyalogos, akik 2 óra múlva találkoztak, majd folytatták útjukat. Határozd meg mindkét gyalogos sebességét, ha egyikük a két falu közötti távolságot 1 óra 40 perccel rövidebb idő alatt teszi meg, mint a másik!

20.69. Az A és B helységekből egyszerre elindult egymással szembe egy kerékpáros és egy gyalogos, akik 1 óra múlva találkoztak. Határozd meg a kerékpáros és a gyalogos sebességét, ha a kerékpáros 2 óra 40 perccel hamarabb érkezett meg a B helységbe, mint a gyalogos az A helységbe, és a két helység között a távolság 16 km!

20.70. Az A városból a B városba egyszerre indult el egy autóbusz és egy személygépkocsi. Az indulás után 1 óra 30 perccel a személygépkocsi már 30 km-rel megelőzte az autóbuszt. Amikor a személygépkocsi megérkezett a B városba, az autóbusz még 80 km-re volt tőle. Határozd meg a személygépkocsi és az autóbusz sebességét, ha az A és B városok távolsága 300 km!

20.71. Egy medencébe két csövön keresztül lehet vizet engedni. Ha mind a kettőt megnyitják, akkor 1,5 óra alatt telik meg a medence vízzel, ha a medence felét az egyik csövön keresztül töltik fel, majd a másik felét a másik csövön keresztül, akkor 4 óra alatt telik meg vízzel. Mennyi idő alatt lehet megtölteni vízzel a medencét külön az egyik, és külön a másik csövön keresztül?

20.72. Két munkás együtt 9 óra alatt tudja elvégezni a rájuk bízott feladatot. Ha először csak az egyikük dolgozna 1 óra 12 percet, majd őt felváltaná a másik munkás, aki 2 órát dolgozna, akkor a munka 20%-ával végeznének. Mennyi idő alatt tudnának végezni ezzel a feladattal külön-külön a munkások?

20.73. Egy csónak 15 km-t tesz meg a folyón lefelé ugyanolyan idő alatt, mint 12 km-t a folyón felfelé. Mekkora a folyó sebessége, ha a csónak 1 km-t felfelé és 1 km-t lefelé 27 perc alatt tesz meg?

20.74. Egy kerékpáros a falutól a vasútállomásig 10 km-t tett meg műúton, majd visszatért a faluba az 5 km-es földúton. Az egész út 1 óra 5 percet vett igénybe. Határozd meg a kerékpáros sebességét a műúton és a földúton is, ha tudjuk, hogy visszafelé 15 perccel kevesebb időre volt szüksége, mint odafelé!

20.75. Az A és B városokból, melyek távolsága 180 km, egyszerre elindult egymással szembe egy autóbusz és egy teherautó. Találkozásuk után 1 órával az A városból induló autóbusz megérkezett a B városba, míg a teherautó a találkozás után 2 óra 15 perc alatt ért el az A városba. Határozd meg az autóbusz és a teherautó sebességét!

20.76. Az (a_n) sorozat az $a_n = n^2 - 4n + 4$ képlettel van megadva. Add meg a sorozat első hat tagját! Tagja-e ennek a sorozatnak: 1) 256; 2) 361; 3) 1000; 4) 10000? Ha igen, határozd meg, hányadik tagja a sorozatnak?

20.77. Határozd meg, hány tagja van annak az (a_n) véges számtani sorozatnak, melynek első tagja $a_1 = 4$, különbsége $d = -5$, utolsó tagja pedig -36!

20.78. Egy héttagú számtani sorozat utolsó tagja $3\frac{1}{6}$. Határozd meg ennek a sorozatnak az első tagját, ha a különbsége $\frac{3}{8}$!

20.79. Milyen sorszámú a 2; 1,9; 1,8; 1,7; … számtani sorozat első negatív tagja?

20.80. A 8; 11; 14; … számtani sorozat mely tagjai nagyobbak 100-nál, de kisebbek 200-nál?

20.81. A 105; 98; 91; … számtani sorozat hány tagjának összege lesz nulla?

20.82. Mekkorák annak a négyoldalú konvex sokszögnek a belső szögei, melyben a szögek fokmértékei egy 54° differenciájú számtani sorozatot alkotnak?

20.83. Egy derékszögű háromszög oldalai számtani sorozatot alkotnak. Számítsd ki a befogók hosszát, ha az átfogója 4 cm!

20.84. Tudjuk, hogy az a_1, a_2, a_3, … olyan számtani sorozat, melynek a differenciája nullától különböző szám, $d \neq 0$. Számtani sorozat-e az alábbi sorozat:

1) $-a_2, -a_4, -a_6, -a_8, ...$;

2) $a_1 + 5, a_2 + 5, a_3 + 5, ...$;

3) $1 - a_1, 1 - a_2, 1 - a_3, ...$;

4) $a_1^2, a_2^2, a_3^2, ...$;

5) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, ...$;

6) $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, ...$;

7) $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, ...$?

Ha igen, határozd meg a sorozat különbségét!

20.85. Három szám összege, melyek egy számtani sorozat három egymást követő tagjai, 12, négyzeteik összege pedig 80. Add meg ezt a három számot!

20.86. Bizonyítsd be, hogyha az a, b és c számok egy számtani sorozat egymást követő tagjai, akkor az $a^2 + ab + b^2$, $a^2 + ac + c^2$, $b^2 + bc + c^2$ kifejezések értékei is egy számtani sorozat egymást követő tagjai!

20.87. Bizonyítsd be, hogy:

1) ha egy háromszög a, b és c oldalai egy számtani sorozat három egymást követő tagja, akkor $ac = 6Rr$, ahol R és r rendre a háromszög köré és a háromszögbe írt körvonalak sugarai;

2) ha egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat három egymást követő tagja, akkor ennek a sorozatnak a differenciája a háromszögbe írható körvonal sugarával egyenlő;

3) ha egy háromszög egyik szöge 120° és oldalai egy számtani sorozat három egymást követő tagja, akkor az oldalak aránya 3 : 5 : 7!

20.88. Számítsd ki az alábbi sorozatok első n tagjának összegét:

1) $\frac{a-1}{a}, \frac{a-3}{a}, \frac{a-5}{a}, ...$;

2) $\frac{a-b}{a+b}, \frac{3a-b}{a+b}, \frac{5a-b}{a+b}, ...$!

20.89. Egy számtani sorozat harmadik tagja 11, hetedik tagja 27. Ezen sorozat hány tagjának az összege lesz 253?

20.90. Jelöljük az (a_n) számtani sorozat első n tagjának összegét S_n-nel. Határozd meg a sorozat első tagját és különbségét, ha:

1) $a_3 + a_5 + a_8 = 18$ és $a_2 + a_4 = -2$;

2) $a_5 - a_3 = -4$ és $a_2a_4 = -3$;

3) $a_2 + a_4 + a_6 = 36$ és $a_2a_3 = 54$;

4) $S_5 - S_2 - a_5 = 0{,}1$ és $a_7 + S_4 = 0{,}1$;

5) $S_4 = 9$ és $S_6 = 22{,}5$!

20.91. Egy véges számtani sorozat első három tagjának összege 3, első négy tagjának összege 16, mindegyik tagjának összege 220. Hány tagja van ennek a sorozatnak?

20.92. Egy számtani sorozat kilencedik tagja 15. Mennyi a sorozat első tizenhét tagjának az összege?

20.93. Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat három egymást követő tagja, kisebbik befogója a. Mekkora a háromszög területe?

20.94. Határozd meg az első húsz olyan páratlan szám összegét, melyek 3-mal való osztási maradéka 1!

20.95. Mennyi azon kétjegyű számok összege, melyek nem oszthatók maradék nélkül sem 3-mal sem 5-tel?

20.96. Lehetnek-e egy derékszögű háromszög oldalai egy mértani sorozat három egymást követő tagjai? Ha igen, határozd meg ennek a sorozatnak a kvóciensét!

20.97. Egy fazék ára két egymást követő ugyanakkora árleszállítás után 300 hrivnyáról 192 hrivnyára csökkent. Hány százalékos volt az árcsökkentés mindkét esetben?

20.98. A (b_n) mértani sorozat kvóciense q. Határozd meg:

1) b_1, ha $b_5 = -\frac{16}{27}$, $q = -\frac{2}{3}$;

2) q, ha $b_1 = \frac{2}{3}$, $b_4 = \frac{9}{32}$;

3) a sorozat első hét tagjának összegét, ha $b_7 = 192$, $q = 2$;

4) a sorozat első öt tagjának összegét, ha $b_5 = 9\sqrt{6}$, $q = \sqrt{3}$!

20.99. Egy hattagú mértani sorozat első három tagjának összege 8-szor kisebb a három utolsó tag összegénél. Mennyi a sorozat hányadosa?

20.100. Határozd meg azt a 4 számot, melyek egy mértani sorozat egymást követő tagjai és a két szélső tag összege $\frac{35}{3}$, a két középső tag összege pedig 10!

20.101. Tudjuk, hogy a b_1, b_2, b_3, … egy végtelen mértani sorozat, melynek a kvóciense nullától különböző szám, $q \neq 1$. Mértani sorozat-e az alábbi sorozat:

1) $b_2, b_4, b_6, ...$;

2) $b_1 + 1, b_2 + 1, b_3 + 1, ...$;

3) $b_1^2, b_2^2, b_3^2, ...$;

4) $-b_1, -b_3, -b_5, ...$;

5) $b_1 + b_2, b_2 + b_3, b_3 + b_4, ...$;

6) $\frac{1}{b_1}, \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_3}, ...$?

Ha igen, határozd meg a sorozat hányadosát!

21. A kombinatorika fő szabályai

Hányféleképpen állhatnak sorba osztálytársaid az iskolai étkezdében? Hányféleképpen választhatjátok meg az osztályfelelőst és helyettesét? Hányféleképpen osztható ki az arany-, ezüst- és bronzérem a labdarúgó-világbajnokságon?

Ahhoz, hogy válaszoljunk ezekre a kérdésekre, ki kell számolnunk, hány különböző kombinációt lehet kirakni egy véges halmaz elemeiből adott szabály szerint. A matematikának azt az ágát, amely hasonló feladatok megoldásával foglalkozik, **kombinatorikának** nevezzük.

A legtöbb kombinatorikához tartozó feladat megoldása két szabályra vezethető vissza: az összeadás és szorzás szabályára.

Nézzünk meg egy példát! Egy turista 5 útvonalat nézett ki magának a Dnyeper-vidéken, és 7-et a Kárpátokban. Hányféleképpen tudja megszervezni a szabadságát, ha csak egy útvonalra jut ideje?

Mivel összesen $5 + 7 = 12$ különböző útvonal van, ezért 12-féleképpen lehet kiválasztani ezekből egyet.

Ennek a példának az általánosítása a következő szabály.

Az összeadási szabály: **ha az A halmaz m elemű, a B halmaz pedig k elemű és ezeknek a halmazoknak nincs közös elemük, akkor az „a vagy b" kiválasztást, ahol $a \in A$ és $b \in B$, $m + k$-féleképpen lehet megvalósítani.**

Az összeadási szabály kiszélesíthető három és több halmazra is. Például, ha az A, B és C halmazoknak rendre m, k és n elemük van és nincs közös elemük, akkor az „a vagy b vagy c" választást, ahol $a \in A$, $b \in B$ és $c \in C$, $m + k + n$- féleképpen lehet megvalósítani.

Térjünk vissza az útvonalak kiválasztásához. Ha a turistának két útvonal bejárására van ideje és először a Dnyeper-vidékén, majd a Kárpátokban szeretne barangolni, akkor 35-féleképpen szervezheti meg az üdülését. Valóban, ha először kiválaszt egy útvonalat a Felső-Dnyeper-vidékén, akkor hozzá választhatja bármelyik útvonalat a 7 közül a Kárpátokban. Mivel a Felső-Dnyeperen 5 útvonalat ajánlanak, akkor az útvonalpárok száma (felső-dnyeperi útvonal; útvonal a Kárpátokban) 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35.

Ezt a gondolatmenetet foglalja össze az alábbi táblázat:

		Turista útvonalak a Kárpátokban						
		1	2	3	4	5	6	7
Turista útvonalak a Dnyeper-vidéken	1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)	(1; 7)
	2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)	(2; 7)
	3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)	(3; 7)
	4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)	(4; 7)
	5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)	(5; 7)

Ennek a példának az általánosítása a következő szabály.

A szorzási szabály: ha az *a* elemet *m*-féleképpen lehet kiválasztani, és minden kiválasztáshoz pedig a *b* elemet *k*-féleképpen[1], akkor az „*a* és *b*" kiválasztást *mk*-féleképpen lehet megvalósítani.

A szorzási szabályt is célszerű általánosítani. Például, ha az *a* elemet *m*-féleképpen lehet kiválasztani, és minden kiválasztás után a *b* elemet pedig *k*-féleképpen, továbbá, azután hogy kiválasztottuk az *a* és *b* elemet, a *c* elemet *n*-féleképpen lehet kiválasztani, akkor az „*a* és *b* és *c*" kiválasztást *mkn*-féleképpen lehet megvalósítani.

1. PÉLDA Egy 28 fős osztályból ki kell választani három gyereket ügyeletesnek, a háromszintes épület mindegyik szintjére egyet-egyet. Hányféleképpen lehet ezt megtenni?

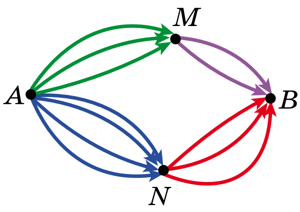
Megoldás. 28-féleképpen választhatunk az első szintre. Miután kiválasztottuk ezt az egy tanulót, már csak 27 gyerek közül választhatunk, akik közül bárki lehet ügyeletes a második szinten. Miután kiválasztottuk, hogy ki fog ügyelni az első és a második szinten, a harmadik szintre 26 lehetőségünk marad.

Így a szorzási szabály szerint $28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\,656$-féleképpen tudunk három ügyeletest választani az iskolába.

Felelet: 19 656-féleképpen. ◀

[1] Ez a szabály a „független kimenetelek száma" elvén alapszik

2. PÉLDA A 21.1. ábrán az A városból B városba vezető utak tervrajza látható. Hányféleképpen lehet eljutni az A városból a B városba?



21.1. ábra

Megoldás. A szorzási szabály alkalmazásával arra a következtetésre jutunk, hogy az A városból B-be az M városon keresztül $3 \cdot 2 = 6$-féleképpen juthatunk el, az N városon keresztül pedig $4 \cdot 3 = 12$-féleképpen. Tehát az összeadási szabály szerint az összes lehetőség száma $6 + 12 = 18$.

Felelet: 18-féleképpen. ◄

?

1. Mondd ki az összeadási szabályt!
2. Mondd ki a szorzási szabályt!

GYAKORLATOK

21.1.° A hegy lábától a csúcsra 3 út vezet. Hány útvonalon lehet megmászni a hegyet, majd visszatérni a hegy lábához?

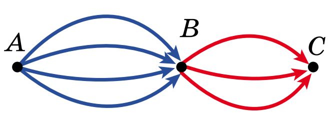
21.2.° Egy csapatnak trikókat ajánlottak fel három színben: pirosat, zöldet és égszínkéket, és sportnadrágokat két színben: fehéret és sárgát. Hányféle meze lehet a csapatnak?

21.3.° Tímeának öt szoknyája és 3 pár cipője van. Hányféleképpen öltözködhet fel Tímea?

21.4.° Az osztályba 10 fiú és 7 lány jár. Hányféleképpen alkothat táncos párokat egy fiú és egy lány?

21.5.° Hány különböző háromjegyű számot alkothatunk az alábbi számjegyekből:
1) 1 és 2; 2) 0 és 1
(a számjegyek ismétlődhetnek)?

21.6.° Az A városból B városba 4 út vezet, a B városból a C városba 3 (22.2. ábra). Hányféleképpen lehet eljutni A városból C városba?



22.2. ábra

21.7.° Egy gyorsétterem kínálatában 3 első fogás, 6 második és 5 desszert szerepel. Hányféleképpen választhatsz ebédet, ha mind a három fogásból csak egyet rendelhetsz?

21.8.° Kétbetűs szótagokat kell alkotni betűkből úgy, hogy az első hang mássalhangzó legyen, a második magánhangzó. Hány ilyen különböző szótagot lehet alkotni az alábbi szavak betűiből:
1) Poltava; 2) Harkiv?

21.9.˙ Hány különböző négyjegyű szám képezhető az 1, 2, 3 és 4 számjegyekből, ha a számjegyek nem ismétlődhetnek és a szám:
1) első számjegye 4; 2) 23-mal kezdődik?

21.10.˙ Hány különböző háromjegyű szám képezhető a 0, 1, 2, 3 és 4 számjegyekből?

21.11.˙ Hány olyan kétjegyű szám van, amelynek mindkét számjegye páros?

21.12.˙ Hány olyan kétjegyű szám van, amelynek mindkét számjegye páratlan?

21.13.˙ Egy pénzérmét egymás után háromszor dobunk fel. Hány különböző sorozatban fordulhat elő a fej és írás oldala?

21.14.˙ Egy dobókockával háromszor dobunk egymás után. Hány különböző sorozata lehet a dobott számoknak?

21.15.˙ Egy 2 x 2 tábla minden négyzetét befesthetjük égszínkékre vagy pirosra. Hányféleképpen színezhető ki ez a tábla?

21.16.˙ Hányféleképpen választhatunk ki a sakktáblán egy fehér és egy fekete mezőt úgy, hogy ezek a mezők ne legyenek sem egy sorban, sem egy oszlopban?

21.17.¨ Hány ötjegyű páros szám van?

21.18.¨ Hány olyan ötjegyű szám van, amely 10 többszöröse?

21.19.¨ Az egyik gyűjtőnek 11 bélyege és 8 érméje van cserére, egy másik gyűjtő pedig 9 bélyeget és 7 érmét szeretne elcserélni. Hányféleképpen cserélhetnek a gyűjtők bélyeget bélyegre, érmét éremre?

21.20.¨ Hány olyan ötjegyű szám van, amelyben a számjegyek paritása megegyezik?

22. A véletlen esemény gyakorisága és valószínűsége

Gyakran kell különböző megfigyeléseket, kutatásokat végezni, vagy részt venni különböző kísérletekben. Általában a hasonló kutatások eredményei előre nem láthatók.

Nézzünk néhány jellegzetes példát!

- Ha véletlenül kinyitunk egy könyvet, nem tudhatjuk előre, hogy milyen oldalszámot látunk meg.
- Előre nem lehet megmondani egy labdarúgó-mérkőzés eredményét.
- Nem lehetünk biztosak abban, ha felkapcsoljuk az asztali lámpát, valóban világítani fog.
- Nincs arra garancia, hogy az inkubátorba tett minden tojásból ki fog kelni egy kiscsirke.

Törvényszerű, hogy a megfigyeléseknek és kísérleteknek egy komplex feltételrendszernek kell megfelelniük. Például egy labdarúgó-mérkőzésen be kell tartani a játékszabályokat, a tyúktojásoknak legalább 21 napig kell a keltetőben lenni megfelelő hőmérséklet-szabályozás és a levegő páratartalmának betartása mellett.

A megfigyelés, tapasztalat, kísérlet eredményét **eseménynek** nevezzük.

Véletlen eseménynek nevezzük azon megfigyelések, kísérletek eredményét, melyek minden feltétel betartása mellett vagy bekövetkeznek, vagy nem.

Például, ha feldobunk egy pénzérmét, akkor véletlen eseménynek számít, hogy fej vagy írás lesz. Véletlen esemény az is, ha kinyitsz egy postaládát és van benne levél.

Képzeljük el, hogy kibocsátottak 1 000 000 lottószelvényt, amellyel egy személygépkocsit lehet nyerni. Lehetséges-e, hogy egy szelvény megvásárlásával megnyerjük a fődíjat? Természetesen lehetséges, bár ennek az eseménynek nagyon *kicsi a valószínűsége*. Mi van akkor, ha 10 személygépkocsit sorsolnak ki? Könnyen belátható, hogy ebben az esetben a nyerés **valószínűsége** nő. Ha elképzeljük, hogy 999 999 személygépkocsit sorsolnak ki, akkor a nyerési esélyünk elképesztően megnő.

Tehát, a **véletlen események valószínűségét** össze tudjuk hasonlítani. Ehhez viszont meg kell jegyezni, hogyan lehet az események bekövetkezésének lehetőségét számszerűsíteni.

Az ilyen számszerű becslést megalapozhatja a számos megfigyelés és kísérlet eredménye. Az emberek már régen észrevették, hogy sok esemény látszatra azonos **gyakorisággal** következik be.

A demográfusok[1] jól ismerik a 0,512 számot. A statisztikai adatok különböző korokban és különböző országokban arról tanúskodnak, hogy 1000 újszülött közül átlagban 512 fiú. A 0,512 számot a „fiú születik” **véletlen esemény gyakoriságának** nevezzük. Az alábbi képlettel határozzuk meg:

$$\text{Gyakoriság} = \frac{\text{az újszülött fiúk száma}}{\text{az összes újszülött száma}}$$

Felhívjuk a figyelmeteket, hogy ez a szám nagyon sok megfigyelés eredménye. Ebben az esetben azt mondják, hogy a „fiú születik” esemény valószínűsége 0,512.

Már tudjátok, hogy a dohányzás káros az egészségre. Az egészségvédelmi szervezetek statisztikája alapján a tüdőrákban szenvedő betegek 92%-a dohányos. Ebben az esetben 0,92 a gyakorisága annak az eseménynek, hogy a „tüdőrákban szenvedő beteg dohányos”, ami meghatározható az alábbi aránnyal:

$$\text{Gyakoriság} = \frac{\text{a dohányzó tüdőrákos betegek száma}}{\text{az összes tüdőrákos beteg száma}}$$

Ebben az esetben azt szoktuk mondani, hogy annak a valószínűsége, hogy a tüdőrákos betegek között dohányosokra leljünk, 0,92 (92%).

Ahhoz, hogy alaposabban megismerkedjünk a véletlen események valószínűségével, térjünk vissza a klasszikus példához, a pénzérme feldobásához.

Tegyük fel, hogy kétszer dobtuk fel az érmét és mind a kétszer fej lett. Tehát ebben a sorozatban, amely kétszeri feldobásból állt, a fej gyakorisága:

$$\text{Gyakoriság} = \frac{\text{a dobás eredménye fej}}{\text{a dobások száma}} = \frac{2}{2} = 1.$$

Ez vajon azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy fejet dobunk 1-gyel egyenlő? Természetesen nem.

[1] *Demográfia* – népességváltozással foglalkozó tudomány

Ahhoz, hogy egy véletlen esemény gyakoriságából következtetni lehessen a valószínűségére, nagyszámú kísérletet kell elvégezni.

A XVIII. századtól kezdve sokan végeztek kísérletsorozatokat az érme feldobásával.

Az alábbi táblázat néhány ilyen kísérlet eredményét foglalja össze.

A tudós neve	A dobások száma	A fejek száma	A fej gyakorisága
Georges-Louis Buffon (1707–1788)	4040	2048	0,5069
Augustus de Morgan (1806–1871)	4092	2048	0,5005
William Jevons (1835–1882)	20 480	10 379	0,5068
Vszevolod Romanovszkij (1879–1954)	80 640	39 699	0,4923
Karl Pearson (1857–1936)	24 000	12 012	0,5005
William Feller (1906–1970)	10 000	4979	0,4979

A bemutatott példák alapján arra a törvényszerűségre következtethetünk, hogy a pénzérme sokszoros feldobása esetén a fej gyakorisága alig tér el 0,5-től.

Tehát, „a feldobott érme fej” esemény valószínűsége kb. 0,5.

Az általunk vizsgált példák mindegyikében szerepelt a **véletlenszerű esemény gyakorisága** kifejezés. Ezt az értéket az alábbi képlettel határoztuk meg:

$$\text{Gyakoriság} = \frac{\text{a kedvező események száma}}{\text{összes esemény}}$$

Térjünk vissza az előbbi táblázatunkhoz. Megállapítható-e a táblázat adatai alapján, hogy „a feldobott érme fej” esemény valószínűsége 0,5? Erre a kérdésünkre a válasz ellentmondó. Valójában a feltüntetett adatokból levonható, hogy „a feldobott érme fej” esemény gyakorisága 0,502-től 0,4997-ig változik, tehát 0,5-nek semmilyen előnye nincs a 0,502 vagy a 0,4997 számmal szemben.

Tehát a véletlen esemény gyakorisága csak megközelítő értéket ad a véletlen esemény valószínűségére. *Minél több kísérletet végzünk el, annál pontosabb következtetést vonhatunk le a véletlen esemény gyakoriságából a valószínűségére.*

A véletlen esemény valószínűségének ilyen formájú meghatározását **statisztikai** valószínűségnek nevezzük. Ezt az emberi tevékenység több területén is alkalmazzák: fizika, kémia, biológia, biztosítás, szociológia, közgazdaság, egészségvédelem, sport, stb.

A valószínűséget P betűvel jelöljük (a francia *probabilité* szó első betűje, jelentése valószínűség).

Ha például az első esetünkben „a fiúgyermek születik” eseményt A betűvel jelöljük, akkor a kapott eredményt így írjuk le:

$$P\,(A) \approx 0{,}512.$$

Figyelembe véve a statisztikai becslések közelítő jellegét, a kapott eredményeket kerekíthetjük. Például, ha a véletlen esemény gyakorisága 0,512, akkor $P(A) \approx 0{,}51$ vagy $P(A) \approx 0{,}5$ is helyes.

Ha „a feldobott érme fej” eseményt B-vel jelöljük, akkor

$$P\,(B) \approx 0{,}5.$$

Ennek a fejezetnek a végén felhívjuk a figyelmeteket az alábbiakra. Nem ritka az olyan eset, amikor a mindennapi életben a környezetünk jelenségeire vagy objektumaira vonatkozó helyes következtetéseket vonunk le, alkalmazva a valószínűség tulajdonságait.

Felhozunk néhány példát.

- Ha meg szeretnétek tudni, hogyan kell a házi feladatra kijelölt példát megoldani, akkor felhívjátok azt az osztálytársatokat, aki jól tudja a matematikát. Ennek a választásnak az alapja az, hogy nagyobb valószínűséggel oldja meg a feladatot egy, a matematikában erős tanuló, mint egy gyenge.
- Az ismert márkájú termékek drágábbak, mint a kevésbé ismertek. Ezért gyakran drágább terméket vásárolunk. Ez a választás azzal magyarázható, hogy kisebb a valószínűsége annak, hogy egy ismert márkájú termék rossz minőségű legyen, mint annak, hogy egy kevéssé ismert márkájúé.
- Tételezzük fel, hogy az ellenőrző dolgozat 10 megoldásválasztós tesztfeladatból áll. Kilenc feladattal már megbirkóztatok, de a tízediket nem tudjátok megoldani. Csak egy lehetőségetek marad, kitalálni a helyes választ. Feltehetően nem fogjátok azt a betűt választani, ami az előző feladatok válaszai között a leggyakoribb volt. Ez a mérlegelés azon alapszik, hogy a tesztfeladat összeállítói aligha jelölnék be a helyes válaszokat úgy, hogy valamelyik betű jele gyakoribb legyen.

Azért meg kell jegyeznünk, nem biztos, hogy egy valószínűségi becslés alapján hozott döntés minden esetben sikeres lesz. Ettől eltekintve, döntéseinknél hasonló esetekben célszerű figyelembe venni a valószínűségi előrejelzéseket, mivel ezek növelhetik a siker esélyét.

1. Hozz fel példát véletlen eseményre!

2. Magyarázd meg, mit értünk egy véletlen esemény gyakoriságán!

3. Milyen feltételek mellett becsülhető egy véletlen esemény valószínűsége a gyakoriságával?

4. Hogyan jelöljük az A esemény valószínűségét?

GYAKORLATOK

22.1.° Hozz fel példát olyan kísérletekre, amelyck eredménye szerinted 1) lehetetlen esemény; 2) biztos esemény!

22.2.° Elképzelhető-e, hogy az alábbi eseményeknek kicsi a valószínűsége:
1) egy érem 200-szori feldobásakor mindig fejet kapunk;
2) a következő héten legalább egyszer kihívnak a táblához;
3) a Sahtar–Dinamo Kijev labdarúgó-mérkőzés eredménye 1 : 1;
4) a számítógép billentyűzetén véletlenül leütött betűkből a „matematika” szót kapjuk?

22.3.° A kísérletünk annyiból áll, hogy egy rajzszöget dobunk fel. A rajzszög eshet a hegyére és a lapjára is (lásd a 22.1. ábrát). Dobd fel a rajzszöget: 1) 10-szer; 2) 20-szor; 3) 50-szer; 4) 100-szor; 5) 200-szor! Az eredményeket jegyezd fel az alábbi táblázatba:

22.1. ábra

A sorozat sorszáma	1	2	3	4	5
Az adott kísérletben a dobások száma	10	20	50	100	200
A rajzszög a hegyére esett dobások száma					
A rajzszög a lapjára esett dobások száma					

Számítsd ki mind az öt sorozatban annak a gyakoriságát, hogy a rajzszög a hegyére esett, és becsüld meg, mekkora valószínűséggel következik be ez az esemény. Melyik esemény következik be nagyobb valószínűséggel, „a rajzszög a hegyére esik” vagy, hogy „a rajzszög a lapjára esik”?

22.4.° A kísérletünk lényege az, hogy két érmét dobunk fel. Végezd el a kísérletet: 1) 10-szer; 2) 20-szor; 3) 50-szer; 4) 150-szer! Jegyezd fel mind a négy sorozat eredményét az alábbi táblázatba:

A sorozat sorszáma	1	2	3	4
A dobások száma az adott kísérletben	10	20	50	150
Azon kísérletek száma, amikor a dobások eredménye két fej lett				
Azon kísérletek száma, amikor a dobások eredménye egy fej lett				
Azon kísérletek száma, amikor a dobások eredménye nem lett fej				

Számítsd ki mind a négy sorozatban az alábbi események gyakoriságát:
1) két fej lett;
1) egy fej lett;
1) két írás lett.


22.2. ábra

22.5.° Dobj fel 100-szor egy füles (egylyukú) gombot (22.2. ábra)! Határozd meg „a gomb füle lefelé mutat" esemény gyakoriságát! Becsüld meg az elvégzett sorozatok alapján „a gomb füle felfelé mutat" esemény valószínűségét!

22.6.° Az alábbi táblázat az *N* városban 2016-ban született gyerekek számát tartalmazza.

Hónap	Január	Február	Március	Április	Május	Június	Július	Augusztus	Szeptember	Október	November	December
A fiú újszülöttek száma	1198	1053	1220	1151	1151	1279	1338	1347	1329	1287	1196	1243
A leány újszülöttek száma	1193	1065	1137	1063	1163	1228	1258	1335	1218	1239	1066	1120

Számítsd ki a fiúgyerekek születésének gyakoriságát minden hónapban és 2016-ban! Becsüld meg a leánygyermek születésének valószínűségét a 2016-os évben!

22.7.° A tudakozó munkatársa egy munkanap alatt (9:00–17:00) átlagosan 6 órát beszél telefonon. Becsüld meg, mennyi a valószínűsége annak, hogyha felhívod a tudakozót, a vonal szabad lesz?

22.8.° A statisztikai adatok alapján Odesszában a napsütéses napok száma nyáron átlagosan 70. Becsüld meg annak a valószínűségét, hogyha valaki nyáron ellátogat egy napra Odesszába, akkor borús napot fog ki!

22.9.° Egy nagyszámú tételből kiválasztottak 1000 darab izzót, melyek között kiderült, hogy 5 selejtes. Mennyi a valószínűsége annak, hogy selejtes izzót vásárolhatsz?

22.10.° Az influenzajárvány idején a 40 000 megvizsgált lakosból 7900-nál diagnosztizáltak influenzát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy „egy véletlenül kiválasztott lakos, influenzás” lesz?

22.11.° Annak a valószínűsége, hogy selejtes tápegységet vásárolunk, 0,02. Állíthatjuk-e azt, hogy bármely 100 darabos tételben 2 elem selejtes?

22.12.° Annak a valószínűsége, hogy egy céltáblába találj, 85%. Lehetséges-e, hogy 100 lövésből 98 találjon célba?

22.13.• Az alábbi táblázat az ukrán tannyelvű középiskola 9. osztályának órahálóját tartalmazza:

Tantárgy	Heti óraszám	Tantárgy	Heti óraszám
Ukrán nyelv	2	Mértan	2
Ukrán irodalom	2	Biológia	2
Idegen nyelv	3	Földrajz	2
Világirodalom	2	Fizika	3
Ukrajna történelme	2	Kémia	2
Egyetemes történelem	1	Technika	1
Jogismeret	1	Informatika	2
Művészet	1	Egészségtan	1
Algebra	2	Testnevelés	3

Becsüld meg annak a valószínűségét, hogy a 9. osztály heti órarendjéből véletlenül kiválasztott tantárgy az: 1) algebra; 2) mértan; 3) matematika; 4) testnevelés; 5) idegen nyelv!

22.14.• Válassz ki véletlenszerűen egy oldalt Marko Vovcsok *Intézeti kisasszony* című művéből (az eredeti ukrán nyelvű változatból)! Számold meg, hányszor fordul elő ezen az oldalon az *н, о, я* és *ю* betű és összesen hány betű van az oldalon! Becsüld meg ezen betűk megjelenésének a valószínűségét a műben! Ez a becslés segít megérteni a betűk elhelyezését a számítógép ukrán nyelvű billentyűzetén (22.3. ábra).

22.3. ábra

22.15.˙ Az alábbi táblázat tartalmazza *N* városban a naponkénti 12 órakor mért hőmérsékletet és a levegő páratartalmát.

A levegő hőmérsékletének ingadozása, °C	A levegő páratartalmának osztályai, %						A napok száma összesen
	0%-tól 40%-ig	41%-tól 60%-ig	61%-tól 70%-ig	71%-tól 80%-ig	81%-tól 90%-ig	91%-tól 100%-ig	
Kevesebb, mint –11 °C	0	1	1	3	2	0	7
–10 °C-tól –1 °C-ig	0	0	11	15	13	5	44
0 °C-tól 10 °C-ig	10	19	12	13	19	47	120
11 °C-tól 20 °C-ig	23	27	15	6	10	2	83
21 °C-tól 30 °C-ig	57	32	6	2	1	0	98
31 °C-tól nagyobb	9	4	0	0	0	0	13
A napok száma összesen	99	83	45	39	45	54	365

Számold ki az alábbi események gyakoriságát a 2016-os évben:

1) azoknak a napoknak a számát, amikor a hőmérséklet 11 °C és 20 °C között volt, a levegő páratartalma pedig nem haladta meg a 40%-ot;
2) azoknak a napoknak a számát, amikor a levegő páratartalma 71% és 80% között volt, a mért hőmérséklet pedig 0 °C alatt volt;
3) azoknak a napoknak számát, amikor a hőmérséklet 21 °C és 30 °C között volt, a levegő páratartalma pedig nem haladta meg a 41% és 70% közötti adatot!

23. A klasszikus valószínűség

Néhány esemény valószínűségének meghatározásához nem szükséges kísérleteket, teszteléseket végezni. Elegendő a tapasztalatra, a józan észre támaszkodni.

1. PÉLDA Legyen a dobozban 10 piros golyó. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobozból véletlenül kivett golyó piros színű? sárga színű lesz?

Az adott feltételek mellett bármelyik kivett golyó piros színű.

Azt az eseményt, amely az adott feltételek mellett bármelyik esetben bekövetkezik, **biztos** *eseménynek nevezzük.*

Az ilyen esemény valószínűségét 1-nek tekintjük, vagyis:

ha az A esemény biztos esemény, akkor

$$P(A) = 1.$$

Tehát annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a kihúzott golyó piros, 1.

Mivel a dobozban nincs sárga golyó, így sárga golyót nem lehet kihúzni.

Azt az eseményt, amely az adott feltételek mellett egyetlen esetben sem következhet be, **lehetetlen** *eseménynek nevezzük. Az ilyen esemény valószínűségét 0-nak tekintjük*, vagyis:

ha az A esemény lehetetlen esemény, akkor

$$P(A) = 0.$$

Tehát annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a kihúzott golyó sárga, 0. ◀

2. PÉLDA Egy érmét egyszer dobunk fel. Mennyi a valószínűsége annak, hogy fejet dobunk?

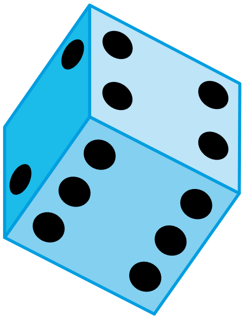
Ebben a kísérletben a két lehetőség közül csak az egyik következhet be: vagy írás, vagy fej. Egyik lehetőségnek sincs előnye. Az ilyen eredmények **egyenlő esélyűek**, és ennek megfelelően az ilyen események **egyenlő valószínűségűek**. Akkor természetes, ha úgy tekintjük, hogy „fejet dobunk" és „írást dobunk" események valószínűsége is $\frac{1}{2}$.

Ez nem jelenti azt, hogy bármelyik sorozatban pontosan ugyanannyiszor dobunk fejet, mint írást. Csak azt tudjuk előre jelezni, hogyha sokszor dobunk egymás után, akkor annak a gyakorisága, hogy fejet dobunk, közelíteni fog az $\frac{1}{2}$-hez.

Nézzünk néhány példát azzal a feltétellel, hogy a kísérletek kimenetelei azonos esélyűek.

3. PÉLDA Egy dobókockával (23.1. ábra) egyszer dobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a négyest kapjuk?

Ebben az esetben hat különböző eredményünk lehet: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Mindegyik azonos eséllyel következhet be. Könnyen belátható, annak az eseménynek a valószínűsége, hogy „egy dobókockával négyest dobunk”, $\frac{1}{6}$. ◀



23.1. ábra

4. PÉLDA A 100 000 kibocsátott lottószelvény között 20 nyerő van. Mennyi a valószínűsége a nyereménynek, ha egy szelvényt vásárolunk?

A kísérlet lényege, hogy egyetlen szelvényt vásárolunk. Ez azt jelenti, hogy a 100 000 egyenlő esélyű lehetőség közül egy valósul meg: megvesszük az 1-es sorszámú szelvényt; a 2-est és így tovább. Ezek közül 20 esetben nyerhetünk. Világos, annak az eseménynek a valószínűsége, hogy az egyetlen szelvényünk nyerő lesz, $\frac{20}{100\,000} = \frac{1}{5000}$. ◀

5. PÉLDA Egy dobozban 15 billiárdgolyó van, amelyeket 1-től 15-ig megszámoztak. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a véletlenül kihúzott golyón lévő szám 3 többszöröse?

Ebben az esetben a 15 egyenlő esélyű lehetőség közül egy valósul meg: kivesszük az 1-es sorszámú golyót; a 2-est és így tovább. Ezek között 5 olyan eset van, amely megfelel annak a feltételnek, hogy a „kihúzott golyón lévő szám 3 többszöröse”, mégpedig a 3, 6, 9, 12 és 15. Így természetes, hogy a keresett valószínűség $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. ◀

Azt, hogy az előző öt példánkban különböző kísérletek szerepeltek, egy matematikai modellel tudtuk szemléltetni. Máris megmagyarázzuk a lényeget.

• Mindegyik példában n egyenlő esélyű kimenetele lehetet a kísérletnek.

1. példa: $n = 10$.

2. példa: $n = 2$.

3. példa: $n = 6$.

4. példa: $n = 1000\ 00$.

5. példa: $n = 15$.

• Mindegyik példában olyan A eseményt vizsgálunk, amelyik m-szer következhet be. Ezeket az eseményeket **kedvező** eseteknek nevezzük.

1. példa: A – piros golyót húzunk, $m = 10$, vagy A – sárga golyót húzunk, $m = 0$.

2. példa: A – „fejet” dobunk, $m = 1$.

3. példa: A – megadott számot dobunk a dobókockával, $m = 1$.

4. példa: A – nyerő szelvényt vásárolunk, $m = 20$.

5. példa: A – olyan golyót húzunk, melyen a szám 3 többszöröse, $m = 5$.

• Mindegyik példában az alábbi képlettel számítható ki a valószínűség:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

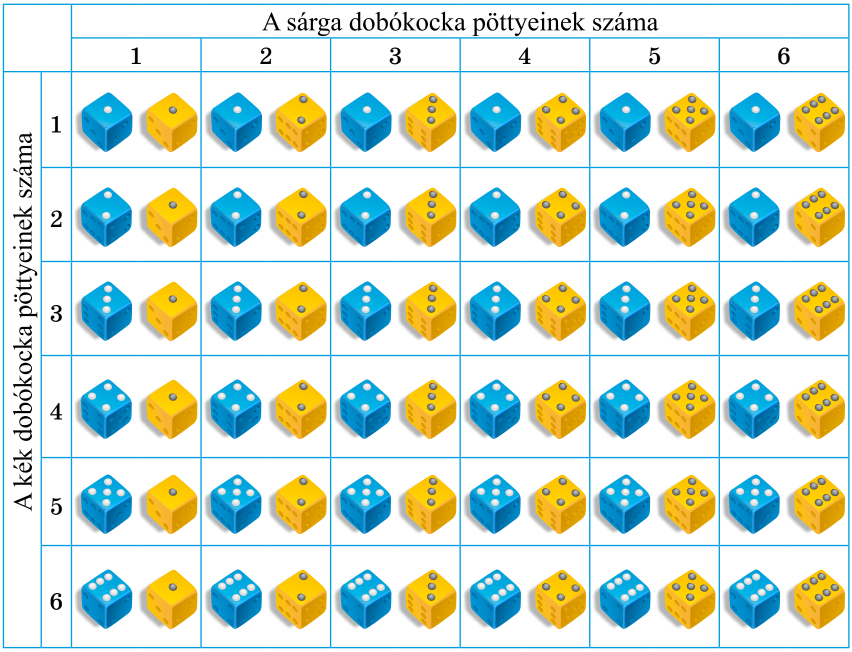
Meghatározás. Ha egy kísérletnek n egyenlő esélyű kimenetele van, melyek közül az A esemény m-szer következik be, akkor az A esemény valószínűségének az $\frac{m}{n}$ arányt nevezzük.

Ez a **klasszikus valószínűség** meghatározása.

Megjegyezzük, ha *egy kísérlet feltételei olyanok, hogy a kimenetelek nem egyenlő esélyűek, akkor nem alkalmazhatjuk a klasszikus valószínűség meghatározását*.

6. PÉLDA Egyszerre két dobókockával dobunk, az egyik sárga, a másik kék. Mennyi a valószínűsége annak, hogy két hatost dobunk?

A 23.2. ábrán látható táblázat alapján könnyen megállapítható, hogy ebben az esetben 36 különböző kimenet lehetséges, melyek közül csak egy lehet kedvező. Ezért a keresett valószínűség $\frac{1}{36}$. ◄



23.2. ábra

7. PÉLDA **(d'Alembert feladata.)** Feldobunk egyszerre két azonos pénzérmét. Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább egyszer fejet dobunk?

Ez a feladat hasonlít a 6. példára. A különbség csak annyi, hogy a dobókockákat színük alapján meg tudtuk különböztetni, míg a pénzérméket nem. Ezért ahhoz, hogy ebben az esetben is azonos esélyűek legyenek a kísérlet kimenetelei, először megszámozzuk a pénzérméket (23.3. ábra).

Az első három dobásnál legalább az egyik fej volt. Ezek a számunkra kedvező esetek. Ezért annak a valószínűsége, hogy két érmével legalább egyszer fejet dobunk, $\frac{3}{4}$. ◄

23.3. ábra

8. PÉLDA Egyszerre két dobókockával dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobott számok összege 11?

Ennek a kísérletnek 11 különböző kimenetele van. A dobott számok összege 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. 9, 10, 11 és 12 is lehet. Ebben az esetben viszont téves lenne annak a valószínűségére következtetni, hogy „a dobott számok összege 11” feltétel mellett az eredmény $\frac{1}{11}$. A helyzet az, hogy a felsorolt 11 kimenetel nem egyenlő eséllyel következhet be. Például, az az eset, hogy „a dobott számok összege 2”, csak egyféleképpen állhat elő, az pedig, hogy „a dobott számok összege 6”, ötféleképpen. (Ellenőrizd le önállóan!)

Ahhoz, hogy alkalmazni tudjuk a klasszikus valószínűség meghatározását, a feltételeket úgy kell megfogalmaznunk, hogy a kimenetelek egyenlő esélyűek legyenek.

Ehhez meg kell különböztetnünk a dobókockákat, például a színük alapján. Így 36 egyenlő esélyű kimenetel lehetséges (24.2. ábra), melyek közül csak kettő kedvező számunkra. Ezért a keresett valószínűség: $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. ◄

9. PÉLDA Vizsgáljuk meg az összes olyan kétgyermekes családot, ahol legalább az egyik gyermek fiú! Mennyi a valószínűsége annak, hogy a véletlenszerűen kiválasztott családban két fiúgyermek legyen? (Elfogadjuk, hogy a kisfiú és kislány születésének a valószínűsége egyforma.)

Úgy tűnhet, hogy ebben az esetben a válasz $\frac{1}{2}$. Mivel a családban már van egy fiú, így egyenlő valószínűséggel a második gyerek vagy lány, vagy fiú.

Valójában ez a gondolatmenet egy másik feladat megoldása: vizsgáljuk meg azokat a kétgyermekes családokat, ahol az idősebbik gyerek fiú. Mennyi a valószínűsége annak, hogyha ezen családok közül véletlenszerűen egyet kiválasztunk, akkor abban a családban két fiúgyerek lesz?

A mi feltételeink mellett három eset következhet be egyenlő eséllyel:

az idősebb gyerek fiú, a fiatalabb is fiú;

az idősebb gyerek fiú, a fiatalabb lány;

az idősebb gyerek lány, a fiatalabb fiú.

Tehát a keresett valószínűség $\frac{1}{3}$. ◄

A fejezet végén fel kell hívni a figyelmet a következőkre.

Első látásra azt hihetjük, hogy a bennünket körülvevő jelenségek többségét a „véletlenek” irányítják. Ugyanakkor a mélyebb elemzés rámutat arra, hogy a véletlenek káoszában utat ver a törvényszerűség, melyet számszerűsíteni lehet. Azt a tudományágat, amely ezzel a számszerűsítéssel, becsléssel foglalkozik, **valószínűségszámítás-elméletnek** nevezzük.

1. Mi a biztos esemény?

2. Mi a lehetetlen esemény?

3. Mennyi a valószínűsége 1) a biztos eseménynek; 2) a lehetetlen eseménynek?

4. Hozz fel példát egyenlő valószínűségű eseményekre?

5. Fogalmazd meg a klasszikus valószínűség definícióját!

6. Mely esetekben nem használható a klasszikus valószínűség meghatározása?

GYAKORLATOK

23.1.° Hozz fel példát biztos eseményre!

23.2.° Hozz fel példát lehetetlen eseményre!

23.3.° Egy kosárban 10 piros és 15 zöld alma van. Mi a valószínűsége annak, hogy a kosárból kivett gyümölcs körte? alma?

23.4.° Találomra kiválasztunk három páros számjegyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ezekkel a számjegyekkel leírt szám páratlan?

23.5.° Találomra kiválasztunk három páratlan számjegyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ezekkel a számjegyekkel felírt szám páratlan?

23.6.° Mekkora a valószínűsége annak, hogyha az „algebra” szó betűinek a felcserélésével a „mértan” szót kapjuk meg?

23.7.° Hozz fel példát egyenlő eséllyel bekövetkező eseményekre!

23.8.° Hozz fel példát különböző eséllyel bekövetkező eseményekre!

23.9.° Azonos valószínűségű-e az A és a B esemény, ha:

1) az A esemény: az 1-től 15-ig megszámozott billiárdgolyók közül találomra kihúzzuk az 1-est;
a B esemény: az 1-től 15-ig megszámozott billiárdgolyók közül találomra kihúzzuk az 7-est;

2) az A esemény: az 1-től 15-ig megszámozott billiárdgolyók közül találomra páros számút húzunk;
a B esemény: az 1-től 15-ig megszámozott billiárdgolyók közül találomra páratlan számút húzunk?

23.10.° Mi a valószínűsége annak, hogy egy szabályos dobókockával
1) egyet;
2) hármat:
3) páratlan számot;
4) 5 többszörösét;
5) 3-mal maradék nélkül nem osztható számot;
6) 9 többszörösét dobjunk?

23.11.° Képzeld el, hogy az osztályotokban kisorsolnak egy ingyenes londoni kirándulást. Mekkora a valószínűsége annak, hogy te utazhatsz el Londonba?

23.12.° A matematika vizsgára 35 tételt kell megtanulni. Az egyik tanuló 30 tételt tanult meg kifogástalanul. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a tanuló a találomra kihúzott tételre 12-es érdemjegyet kapjon?

23.13.° A matematika vizsgára 30 tételt kell megtanulni. Az egyik tanuló egy tételt tanult meg. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a tanuló nem teszi le a vizsgát, ha csak egy tételre válaszolhat?

23.14.° Mekkora a valószínűsége annak, hogy az osztályotokban a táblához hívott tanulót Katalinnak hívják?

23.15.° Egy nyereményjátékban 20 nyerő és 280 nem nyerő szelvény van. Mekkora valószínűséggel lehet nyerni, ha csak egy szelvényt vásárolunk?

23.16.° Egy dobozban 7 kék és 5 sárga golyó van. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobozból találomra kivett golyó 1) sárga; 2) kék?

23.17.° Egy dobozban 23 kártya van 1-től 23-ig megszámozva. Találomra kihúzunk egy kártyát. Mekkora a valószínűsége, annak hogy a kihúzott kártyán:
1) a 11-es szám van;
2) a 24-es szám van;
3) 6 többszöröse van;
4) 5 többszöröse van;
5) egyjegyű szám van;
6) összetett szám van;
7) olyan szám van, amelyben szerepel a 7-es számjegy;
8) olyan szám van, amelyben szerepel a 2-es számjegy;
9) olyan szám van, amelyben nincs 4-es számjegy;
10) olyan szám van, amelyben a számjegyek összege osztható 3-mal;

11) olyan szám van, amely 11-gyel való osztási maradéka 2;

12) olyan szám van, amelyben nincs 1-es számjegy?

23.18.° Az 1 és 30 közötti természetes számok közül találomra kiválasztunk egyet. Mekkora a valószínűsége, annak hogy az:

1) összetett szám lesz;

2) 18 osztója lesz;

3) egy természetes szám négyzete lesz?

23.19.° Miklós fel szeretné hívni a barátját, de elfelejtette a telefonszám 1) utolsó számjegyét; 2) az első és az utolsó számjegyet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy első próbálkozásra sikerül felhívni a barátját?

23.20.˙ Az egyik előfizető elfelejtette a telefonszám két utolsó számjegyét. Mekkora valószínűséggel fogja a helyes számot tárcsázni, ha csak arra emlékszik, hogy a két utolsó számjegy:

1) páratlan; 2) egymástól eltérő és páros?

23.21.˙ Mekkora a valószínűsége annak, hogy számodra a következő év legboldogabb napja 1) 7-ére; 2) 31-re; 3) 29-re esik?

23.22.˙ Egy dobókocka lapjait pirosra vagy fehérre festették (egy-egy lapot egy színnel). Annak a valószínűsége, hogy a dobókocka a piros lapjára esik, $\frac{5}{6}$, hogy a fehér lapjára, $\frac{1}{6}$. Hány piros és hány fehér lapja van a dobókockának?

23.23.˙ Egy dobozban 4 kék és néhány piros golyó van. Hány piros golyó van a dobozban, ha a kék golyó kihúzásának valószínűsége $\frac{2}{7}$?

23.24.˙ A kétjegyű számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mekkora a valószínűsége annak, hogy:

1) a tízesek helyén álló számjegy alaki értéke nagyobb, mint az egyesek helyén álló számjegyé;

2) a tízesek helyén álló számjegy és egyesek helyén álló számjegy alaki értéke azonos;

3) a kiválasztott szám osztható 9-cel?

23.25.˙ Az 1-es, 2-es és 3-as számkártyákat véletlenszerűen sorba rakták. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a páratlan számok egymás mellé kerüljenek?

23.26.˙ Egy lócára véletlenszerűen ült le két fiú és egy lány. Mekkora a valószínűsége annak, hogy a fiúk egymás mellé kerüljenek?

23.27.˙ Egy dobozban 5 zöld és 7 kék ceruza van. Legkevesebb hány ceruzát kell kivenni a dobozból, hogy annak a valószínűsége, hogy a véletlenül kivett ceruzák között legyen 1 zöld, 1 legyen?

23.28.˙ Egy dobozban 3 piros, 7 sárga és 11 kék ceruza van. Legkevesebb hány ceruzát kell a dobozból kivenni ahhoz, hogy annak a valószínűsége, hogy a véletlenül kivett ceruzák között van legalább egy piros ceruza, 1 legyen?

23.29.¨ Egyszerre dobunk két dobókockával. Határozd meg a 27.2. ábra alapján, mekkora a valószínűsége annak, hogy a dobott számok:

1) két egyes;
2) két azonos szám;
3) összege 7;
4) összege több, mint 10;
5) szorzata 6!

23.30.¨ Egy dobókockával kétszer dobunk. Mekkora a valószínűsége annak, hogy:

1) először 4-nél kisebb, másodszor pedig 4-nél nagyobb számot dobjunk;
2) először kisebb számot dobjunk, mint másodszor;
3) a két dobás összege 5 legyen?

23.31.¨ Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy dobókocka kétszeri dobásával:

1) először 5-nél kisebb számot, másodszor pedig 4-nél nagyobb számot dobjunk;
2) csak másodszorra dobjunk hatost;
3) először többet dobunk, mint másodszor?

23.32.¨ Dénes és Péter egyszerre dobnak egy-egy dobókockával. Ha a dobott számok összege hat, akkor Dénes nyer, ha 7, akkor Péter. Kinek van nagyobb esélye a győzelemre?

23.33.¨ Kétszer feldobunk egy pénzérmét. Mennyi a valószínűsége annak, hogy:

1) mind a kettő fej; 2) az egyik fej, a másik írás?

23.34.¨ Öt megszámozott számkártya közül véletlenül kiválasztunk egyet. A sorszámát megjegyezve visszatesszük a többi kártya közzé. Majd újra kiveszünk egy számkártyát. Mekkora a valószínűsége annak, hogy mind a két kivett kártyán ugyanaz a szám lesz?

23.35.¨ Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy pénzérme háromszori feldobásakor 1) mind a háromszor fejet dobunk; 2) kétszer dobunk fejet; 3) egyszer dobunk fejet; 4) legalább egyszer fejet dobunk?

23.36.¨ Egy kerekasztal köré véletlenszerűen leült n ember ($n > 2$). Csak ketten ismerik egymást. Mekkora a valószínűsége annak, hogy az egymást ismerő emberek egymás mellé üljenek?

23.37.¨ Véletlenszerűen sorba áll négy ember: A, B, C és D. A sorbaállás sorrendjének valamennyi lehetőségét tekintsük azonos valószínűségűnek. Mekkora a valószínűsége annak, hogy A megelőzze B-t?

Előbb volt a játék

Sok olyan játékot ismertek, melyek eredménye a játékosok tudásától függ. Viszont léteznek olyan játékok is, amelyekben a tudás nem játszik szerepet. Minden a szerencsén múlik. Ide sorolhatjuk a dobókockás játékokat. Úgy tartják, velük kezdődött a véletlenek vizsgálatának tudománya.

XIV. Lajos francia király egyik udvaronca, de Mere lovag, hazárdjátékos, filozófus és irodalmár azzal a kéréssel fordult a híres tudóshoz, Blaise Pascalhoz, hogy magyarázzon meg neki egy paradoxont. Egyrészt de Mere sokéves játéktapasztalata azt mutatta, ha három kockával dob, akkor a számok összege gyakrabban lesz 11, mint 12.

Másrészt ez az állítás ellentmondásba kerül a következő okfejtéssel. Összességében 11-et hat különböző kombinációból kaphatunk.

6–4–1	6–3–2	5–5–1
5–4–2	5–3–3	4–4–3

A 12-t is hat kombináció ad meg.

6–5–1	6–4–2	6–3–3
5–5–2	5–4–3	4–4–4

Tehát ahhoz, hogy 11-et vagy 12-t dobjunk, hat-hat kedvező esetre van szükség. Vagyis ezeknek az eseményeknek azonos az esélyük, ami ellentmond a gyakorlatnak.

Pascal megértette: a hiba abban rejlik, hogy a de Merre által vizsgált esetek nem azonos valószínűségűek. Például, ha 11 pontot úgy érünk el, hogy 6-4-1-t dobunk, ez 6-féleképpen lehetséges: (6; 4; 1), (6; 1; 4), (4; 6; 1), (4; 1; 6), (1; 6; 4), (1; 4; 6).

Ha összeszámoljuk az összes kombinációt, akkor a 11 dobásához 27 kedvező eset van, a 12-höz 25. Miközben ezek mindegyike egyenlő esélyű.

Ezt és más hazárdjátékokhoz köthető feladatot Blaise Pascal Pierre de Fermat-val beszélte meg. Úgy tekintik, hogy ebben a levelezésben van megalapozva a valószínűségelmélet tudománya.

Érdekes, hogy a de Merre által vétett hibát a híres francia matematikus, Jean le Rond d'Alambert is elkövette. Hibásan oldotta meg a következő feladatot: „Egy érmét kétszer dobunk fel. Mekkora a valószínűsége annak, hogy legalább egyszer fejet dobunk?” Ő körülbelül így okoskodott.

Három lehetséges kimenet van: először fejet dobunk, másodszorra is fejet dobunk, harmadszorra egyáltalán nem dobunk fejet. Tehát a három valószínű lehetőségből csak kettő kedvező, így a keresett valószínűség $\frac{2}{3}$.

Miközben a 23. fejezet 7. feladatából már tudjátok, hogy a helyes válasz $\frac{3}{4}$.

A hiba abban rejlik, hogy a három megnevezett lehetőség nem azonos eséllyel következik be (gondolkozz el rajta, hogy miért). Történetünk inkább arról tanúskodik, hogy a XVIII. században a valószínűségszámítás még „fiatal” tudomány volt, pontosítani kellett volna „az esemény valószínűsége” fogalmat.

Blaise Pascal
(1623–1662)

Francia teológus, író, matematikus és fizikus. Korai gyermekkorában matematikai tehetséget mutatott, fiatal géniuszok példájaként vonult be a tudományok történetébe. Matematikai érdeklődése nagyon széles körű volt. Megalkotta a többi között a bármely egész számmal való oszthatóság algoritmusát, megfogalmazta a valószínűségszámítás alapállításait, az alakzatok területének, testek felszínének és térfogatának számításai módszereit. Megalkotta az első mechanikus számológépet, a summátort.

A valószínűségszámítás kidolgozása és fejlődése Jakob Bernoulli (1654–1705), Pierre Laplace (1749–1827), Richard von Mises (1883–1953) híres tudósok munkáihoz köthetők. A XX. században jelentős eredményeket ért el ezen a téren a kiváló szovjet matematikus, Andrij Mikolajevics Kolmogorov.

Az ukrán matematika-tudomány a valószínűségelmélet terén számos kimagasló egyéniséggel ajándékozta meg a világot. J. I. Hihman, B. V. Hnyedenko, A. V. Szkorohoda, M. J. Jadrenko neve ismerten cseng a matematikusok körében szerte a világon.

A. M. Kolmogorov
(1903–1987)

M. J. Jadrenko
(1932–2004)

Mihajlo Jadrenko az alkotó energiájának jelentős részét pedagógusi tevékenységbe fektette. Sokat foglalkozott a tehetséges felnövekvő nemzedékkel, alapító tagja volt az országos matematikai olimpiáknak. Jelentős felvilágosító munkát végzett. Többek között az ő kezdeményezésére adták ki 1968-ban Ukrajna első tudományos-ismeretterjesztő gyűjteményét *A matematika világában címmel.*

24. A statisztika alapjai

Mekkora példányszámban kell kiadni a kilencedikes algebrakönyvet?

Megéri-e egy politikusnak elindulni a következő polgármesteri választáson?

Mennyi az egy főre jutó halfogyasztás éves átlagban Ukrajnában?

Megéri-e az adott művész koncertjére kibérelni egy stadiont?

Ezekre és más hasonló érdekes kérdésekre segít választ adni a statisztika.

Meghatározás. **A statisztika** (latin eredetű, *status* – jelentése állapot) **– a tömegjelenségeket jellemző adatok összegyűjtésének, feldolgozásának és elemzésének tudománya.**

A statisztika vizsgálatok több szakaszból állnak:

Adatok gyűjtése

↓

Az adatok feldolgozása és azok kedvező megadása

↓

Az adatok elemzése

↓

Következtetések és ajánlások

Vizsgáljunk meg miden szakaszt.

Az adatok gyűjtése

Tudjátok, hogy a rossz beidegződések, helytelen táplálkozás, a mozgásszegény életvitel szív- és érrendszeri betegségekhez vezethet. Természetesen erre a következtetésre nem úgy jutottak az orvosok, hogy megvizsgáltak a földön minden embert.

Világos, hogy a vizsgálatot a *kiválasztás* és a *tömegesség* jellemezte.

A statisztikában azon objektumok összességét, ami alapján történik a vizsgálat, **mintának** nevezzük.

Az előbbi példában a minta több millió emberből állt.

Meg kell jegyezni, hogy azok a statisztikai következtetések, amelyek csak a minta nagyságára alapoznak, nem mindig megbízhatók. Például, ha egy művész népszerűségét vizsgáljuk, és megelégszünk csak azok kikérdezésével, akik eljöttek a fellépésére, akkor a következtetéseink nem lesznek objektívek, mivel a megkérdezettek pontosan azért jöttek el a fellépésre, mert kedvelik a művészt. A statisztikusok szerint a mintának reprezentatívnak kell lenni (a francia *representatif* szóból – jelentése képviselő).

Így az orvosok a szív- és érelégtelenséget kiváltó okok vizsgálatakor különböző korú, foglalkozású, nemzetiségű embereket vizsgáltak meg.

Tehát *az adatok összegyűjtésénél a tömegességre kell odafigyelni és arra, hogy a mintavétel reprezentatív legyen*. Néha a minta megegyezik azon objektumok halmazával, amelyen a vizsgálatot végezzük. Erre az esetre példa lehet a 9. osztályban az állami összegző atesztáció.

Az adatok megadási módjai

A begyűjtött információt (adathalmazt) célszerű táblázatokba, grafikonokba vagy diagramokba foglalni.

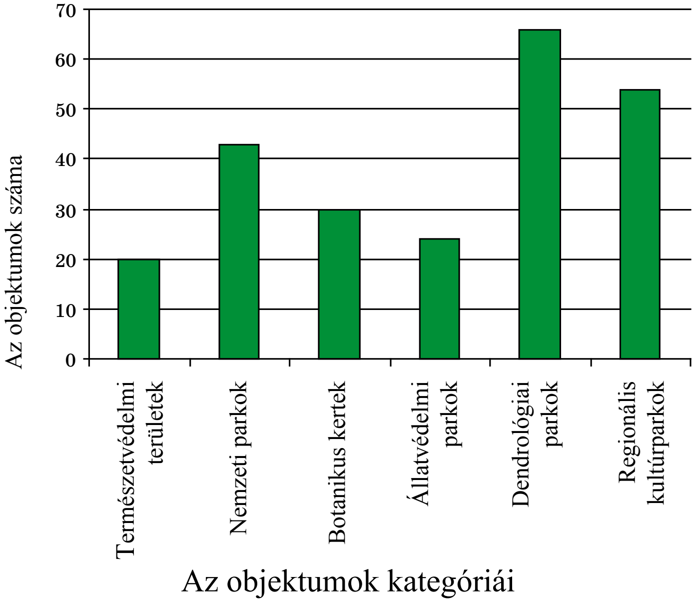
Vizsgáljunk meg néhány példát!

1. PÉLDA Az alábbi táblázat az iskolások számára szervezett nemzetközi matematikai olimpia ukrán eredményeit tartalmazza 1993–2016 között. (A nemzetközi matematikai olimpián egy csapatban nem lehet több 6 versenyzőnél.)

Év	Helyszín	Az érmek száma				Érem nélküliek száma
		Arany	Ezüst	Bronz	Összesen	
1993	Törökország	0	2	3	5	1
1994	Hongkong	1	1	2	4	2
1995	Kanada	1	1	1	3	3
1996	India	1	0	5	6	0
1997	Argentína	3	3	0	6	0
1998	Tajvan	1	3	2	6	0
1999	Románia	2	2	1	5	1
2000	Koreai Köztársasság	2	2	0	4	2
2001	USA	1	5	0	6	0
2002	Nagy-Britannia	1	3	0	4	2
2003	Japán	1	2	3	6	0
2004	Görögország	1	5	0	6	0
2005	Mexikó	2	2	2	6	0
2006	Szlovénia	1	2	2	5	1
2007	Vietnam	3	1	2	6	0
2008	Spanyolország	2	2	2	6	0
2009	Németország	3	1	2	6	0
2010	Kazahsztán	1	2	3	6	0
2011	Hollandia	1	2	3	6	0
2012	Argentína	0	3	2	5	1
2013	Kolumbia	1	3	1	5	1
2014	Dél-afrikai Köztársaság	2	3	1	6	0
2015	Thaiföld	2	3	1	6	0
2016	Hongkong	0	2	4	6	0

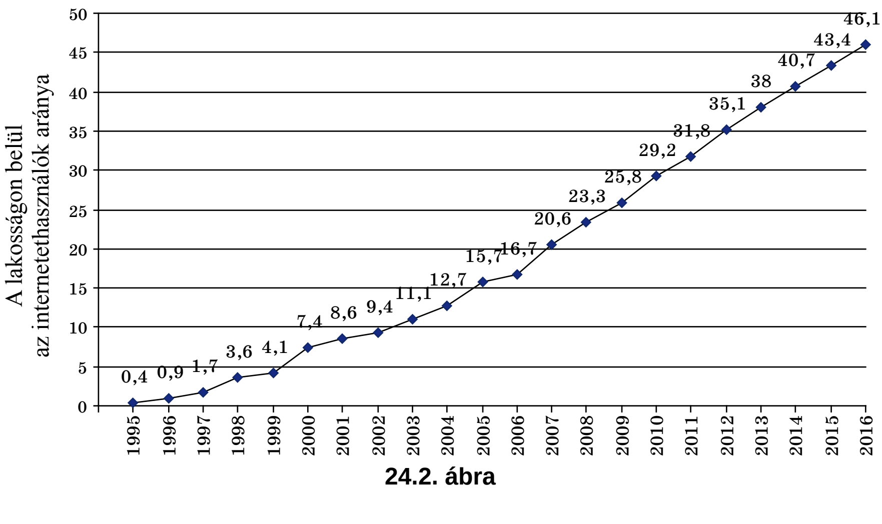
Sok esetben az adatokat célszerű **oszlopdiagrammal** megadni, melyet még **hisztogramnak** is nevezünk (a görög eredetű: *histos* – jelentése oszlop és a *gramma* – írás, levél). Az ilyen információt könnyű értelmezni és megjegyezni.

2. PÉLDA A 24.1. ábra Ukrajna természetvédelmi alapjáról tartalmaz információt.



24.1. ábra

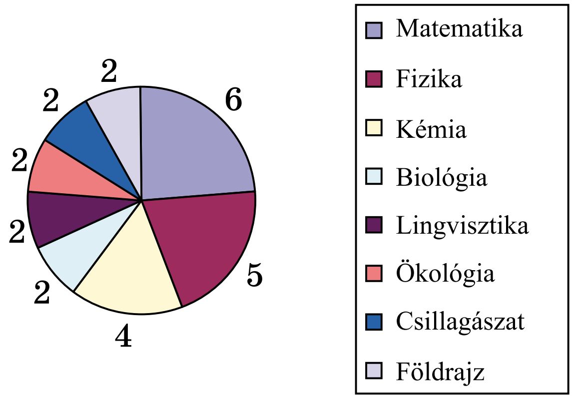
3. PÉLDA Az információ grafikonon is feltüntethető. A 24.2. ábra szemlélteti az internethasználók évenkénti százalékos arányának növekedését 1995–2016 folyamán.



24.2. ábra

Oszlopdiagramot és grafikont akkor érdemes használni, ha azt szeretnénk bemutatni, hogyan változik valamilyen mennyiség az idő változásának függvényében.

4. PÉLDA A 24.3. ábrán látható diagram az ukrán tanulók által 2016-ban a nemzetközi olimpiákon megnyert érmek megoszlását mutatja be. Ezt **kördiagramon** szemléltettük. A kör jelöli az összes érmet és minden tantárgynak megfelel egy körcikk.



24.3. ábra

Az adatok elemzése, következtetések és ajánlások

A statisztikai adatok a tudományok különböző ágaiból, az emberi tevékenység szerteágazó tevékenységi köréből származnak: közgazdaság, egészségügy, szociológia, demográfia, mezőgazdaság, meteorológia, sport, stb. Ennek ellenére a statisztikai adatok feldolgozása (elemzése) sokban hasonlít egymásra. Ismerkedjünk meg néhánnyal közülük.

Térjünk vissza az 1. példához. A táblázat adataiból ki lehet számítani, hogy Ukrajna átlagosan évente hány érmet szerzett a nemzetközi matematikai olimpiákon. Ehhez el kell osztani az eltelt időszak alatt megnyert érmek számát az évek számával. Például 1993-tól 2016-ig azt kapjuk, hogy

$$\frac{5+4+3+6+6+6+5+4+6+4+6+6+6+5+6+6+6+6+6+5+5+6+6+6}{24} =$$

$$= \frac{130}{24} = 5\frac{5}{12}.$$

Mivel egy év alatt 6-nál több érmet nem lehet nyerni, így a **meghatározott középérték,** $5\frac{5}{12}$ arról tanúskodik, hogy Ukrajna csapata méltóképpen szerepel ezen a tekintélyes fórumon.

A statisztikai információkban gyakran szerepelnek a megkapott adathalmazok középértékei. Például, az alábbi táblázat tartalmazza néhány ország legnagyobb élelmiszerláncain keresztül értékesített alapélelmiszerek mennyiségét (egy év alatt egy főre jutó mennyiséget kilogrammban).

Ország	Hús	Hal és a tenger gyümölcsei	Gabonafélék	Zöldségek	Gyümölcsök
Ausztrália	118,1	22,1	86,6	93,8	103,5
Dánia	111,9	24,3	139,5	102,2	146,5
Spanyolország	122,0	27,4	98,9	143,3	105,4
Olaszország	91,0	26,2	162,6	178,3	131,0
Kanada	99,0	25,6	119,3	120,3	119,2
USA	123,4	21,1	110,8	123,5	113,5
Ukrajna	33,9	15,6	158,4	116,0	36,4
Franciaország	98,3	31,2	117,2	142,9	95,5

Az ilyen táblázatot fel tudják használni például a közgazdászok a kutatásaikban, következtetéseikben és ajánlásaikban, az üzletláncok tulajdonosai, a termékek előállítói a további tevékenységük tervezésénél.

Viszont a számtani középérték nem mindig pontosan (megfelelően) tükrözi a helyzetet. Ha például az országban a lakosság különböző rétegeinek a fizetése lényegesen különbözik egymástól, akkor az egy főre jutó átlagkereset a lakosság többségénél nem tükrözi az anyagi helyzetüket.

Tegyük fel, egy adott országban 100 nagyon gazdag és 5 millió nagyon szegény ember él. Akkor az átlagjövedelem nem túl alacsony, ami nem megfelelően tükrözi a lakosság szegénységét.

Ilyen esetekben az elemzéshez másmilyen ismérveket alkalmaznak.

Az 1. példa alapján készítettünk egy táblázatot, amelyben feltüntettük a különböző színű érmek számát:

Aranyérem	Ezüstérem	Bronzérem	Nem nyertek érmet
33	55	42	14

Az ilyen táblázatot **gyakorisági** táblázatnak nevezzük, a második sorban feltüntetett számokat pedig **gyakoriságoknak**.

Az 55 gyakoriság arról tanúskodik, hogy az ukrán diákok leggyakrabban ezüstérmet szereztek. Az ezüstérmek számát az adatsor **móduszának** nevezzük.

Ez a szó mindenki számára ismerős. Gyakran használjuk a „módot kapott", „módja van rá", „módot kerített rá" kifejezéseket. A mindennapi életben a divat, ukránul „мода", azon nézetek, elvárások összességét jelenti, amit adott időben a többség előnyben részesít.

A módusz akkor a legfontosabb középérték-mutató, ha az adathalmaz nem számokból áll. Szemléltessük ezt egy példán.

Egy ismert cég, amely farmernadrágokat szeretne behozni az ukrán piacra, egy 500 fős reprezentatív mintán végzett felmérést. Az eredményt az alábbi gyakorisági táblázat tartalmazza:

A farmerek mérete	XS	S	M	L	XL	XXL	XXXL
Gyakoriság	52	71	145	126	59	40	7
Relatív gyakoriság (%)	10,4	14,2	29	25,2	11,8	8	1,4

A táblázat harmadik sorában a megfelelő gyakoriság és a minta elemszámának az aránya van feltüntetve. Ezt az arányt **relatív gyakoriságnak** nevezzük. Például az *XS* méretre azt kapjuk, hogy:

$$\frac{52}{500}\cdot 100 = 10{,}4\ (\%).$$

Ennek a mintának a módusza az *M*-es méret, melynek a relatív gyakorisága 29%.

Így ez a cég megtudta, hogy a szállítmány legnagyobb részét (kb. a 29%-át) az *M*-es méretű farmereknek kell képeznie.

Megjegyezzük, ha a táblázatban két gyakoriság egyenlő lenne és legnagyobb értékű, akkor módusz lenne a két megfelelő méret.

Korábban már felhoztunk egy olyan példát, amikor a számtani középérték nem pontosan tükrözte az adott országban az emberek anyagi helyzetét. Pontosabb elemzést kaphatunk, ha a számtani középértéket kibővítjük egy ilyen vizsgálat eredményével.

Készítünk egy reprezentatív mintát az adott ország lakosai közül, és begyűjtünk egy adathalmazt az emberek jövedelméről. Majd egy skála mentén, ami meghatározza a jövedelem szintjét (alacsony, közepes, magas) az adott adatsort három csoportra bontjuk. Összeállítunk egy táblázatot, amelyben feltüntetjük az adatok gyakoriságát és relatív gyakoriságát:

A jövedelem szintje	Alacsony	Közepes	Magas
Gyakoriság	m	n	k
Relatív gyakoriság	p %	q %	r %

Ennek az adathalmaznak a módusza jellemezheti a jövedelem szintjét az adott országban.

Az adatsorok vizsgálatát össze lehet hasonlítani az orvosok munkájával, akik diagnózist állítanak fel. A tünetek és a panaszok alapján az orvos kiválaszt egy módszert a betegség okainak a feltárására. Érthető, hogy ezt a módszert a pontos diagnózis határozza meg. Ugyanígy van ez a statisztikában is: az összegyűjtött információtól, a begyűjtés módszereitől függ az adat feldolgozása. Ezek a módszerek kiegészíthetik egymást, valamelyik pontosabb (helyénvalóbb), mint a másik, konkrét helyzetet tükrözhet. Így például, elemezve az ukrajnai diákok szereplését a nemzetközi matematikai olimpián megállapíthatjuk, hogy a statisztikai jellemzők, a számtani közép és a módusz sikeresen összeegyeztethető. Viszont abban a példában, amely a legkelendőbb farmerek méretét határozta meg, leginkább a módusz keresése az elfogadható.

Minél nagyobb az adatok feldolgozásának fegyvertára, annál objektivebb következtetést vonhatunk le.

Ismerkedjünk meg még egy fontos statisztikai mutatóval!

Az egyik család szeretné felújítani a konyhát, ezért utánaérdeklődött, menynyibe kerül egy négyzetméter csempe. Áttanulmányozva 11 építkezési vállalat árajánlatait, az alábbi információhoz jutottak (az árak hrivnyában vannak megadva és növekvő sorrendbe rendezve)

80, 80, 90, 90, 100, 130, 180, 200, 300, 450, 500.

A család olyan vállalatot szeretne választani, amelynek az árai közepesek.

A kapott adathalmaz átlaga 200.

Viszont a kapott adatok azt mutatják, hogy a 200 inkább a magasabb árak közé tartozik, mint a középárhoz.

Látható, hogy a 130-as szám áll a rendezett adathalmaz közepén. Ezt a számot az adott minta **mediánjának** nevezzük. A vizsgált példánál épp ez a mutató segít kiválasztani a megfelelő vállalatot. Valójában a sorozatban a 11 szám közül pontosan 5 kisebb 130-nál, és ugyanannyi nagyobb nála.

Most lássunk egy olyan adatsort, ami páros számú, például 8 elemből áll:

1, 4, 4, 7, 8, 15, 24, 24.

Ebben az esetben a minta ”közepe” egyszerre két szám: 7 és 8. Ilyenkor a minta mediánja a két középső elem számtani közepe: $\frac{7+8}{2}=7{,}5.$

A számtani közepet, a móduszt és a mediánt a kapott adathalmaz **statisztikai középérték mutatójának** nevezzük.

GYAKORLATOK

24.1.° Készíts oszlopdiagramot a táblázat adatai alapján az éves átlaghőmérséklet szemléltetésére Ukrajna különböző városaiban!

Város	Hőmérséklet, °C	Város	Hőmérséklet, °C
Lviv	7,8	Cserkaszi	7,7
Ungvár	10,1	Poltava	7,6
Kijev	8,4	Doneck	8,5
Szumi	6,8	Luhanszk	8,8
Odessza	10,7	Herszon	10,3
Mikolajiv	10,0		

24.2.° Ábrázold grafikonon a metróvonalak hosszának növekedését a kijevi metró fejlődését mutató táblázat alapján!

24.3.° Ábrázold grafikonon a metróállomások számának növekedését a kijevi metró fejlődését mutató táblázat alapján!

Év	Állomások száma	A hálózat hossza, km	Év	Állomások száma	A hálózat hossza, km
1960	5	5,2	2000	40	51,4
1965	10	12,7	2004	43	56,3
1971	14	18,1	2008	46	59,8
1976	17	20,42	2010	49	63,6
1981	23	27,72	2011	50	65,08
1987	28	32,6	2012	52	66
1992	35	43,1	2013	53	67,5

24.4.° Állapítsd meg, reprezentatívak-e az alábbi mintavételek:

1) ahhoz, hogy megállapítsák, milyen gyakran kirándulnak a város lakói a természetbe, megkérdezték három kertvárosi szövetkezet tagjait;
2) ahhoz, hogy megállapítsák, mennyire tudják fejből a 9.-es tanulók Leszja Ukrajinka verseit, véletlenszerűen megkérdeztek 4000 kilencedikes tanulót;
3) ahhoz, hogy megállapítsák az internetfelhasználók arányát Ukrajnában, megkérdeztek 500 véletlenszerűen kiválasztott kijevi lakost;

4) egy fiatalok számára készített televíziós műsor nézettségének megállapításakor megkérdeztek 10 ezer lányt és fiút 15-től 20 éves korig!

24.5.° Határozd meg az alábbi minták statisztikai középérték-mutatóit:
1) 3, 3, 4, 4, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 10;
2) 12, 13, 14, 16, 18, 18, 19, 19, 19.

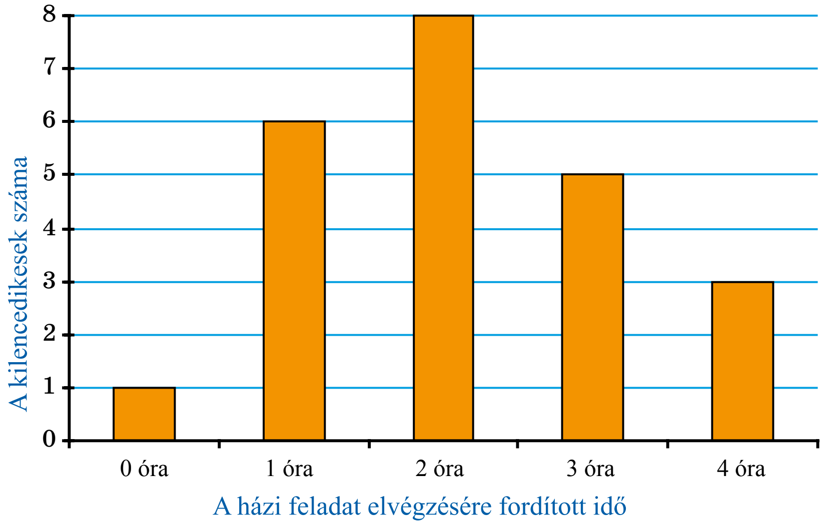
24.6.° Testnevelésórán a lányok szigorlatot tettek magasugrásból. A tanár a következő eredményeket jegyezte fel: 105 cm, 65 cm, 115 cm, 100 cm, 105 cm, 110 cm, 110 cm, 115 cm, 110 cm, 110 cm, 115 cm. Határozd meg a kapott eredmények átlagát és mediánját!

24.7.˙ A 9. osztály osztályfőnöke nyilvántartást vezet a tanulók hiányzásáról. Hét végén így nézett ki a feljegyzése:

A hét napjai	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütör-tök	Péntek
A hiányzók száma	3	2	5	4	8

1) Határozd meg, hány tanuló hiányzott átlagosan naponta ezen a héten!
2) Határozd meg a kapott adatok móduszát!

24.8.˙ Egy 23 fős 9. osztályban felmérést végeztek, naponta hozzávetőleg hány órát tölt egy tanuló a házi feladat elvégzésével. A válaszokat az alábbi hisztogram szemlélteti (24.4. ábra).



24.4. ábra

1) Töltsd ki az alábbi gyakorisági táblázatot:

A házi feladat elvégzésére fordított idő, h	0	1	2	3	4
Gyakoriság					
Relatív gyakoriság					

2) Átlagosan mennyi időt fordít egy tanuló egy nap alatt a házi feladat elvégzésére? (Határozd meg az adatsor számtani közepét!)
3) Mennyi időt fordít a tanulók többsége egy nap alatt a házi feladat elvégzésére? (Határozd meg az adatsor móduszát!)

24.9.˙ A 24.5. ábrán látható oszlopdiagram három kilencedikes osztály algebra írásbeli dolgozatának eredményeit szemlélteti.

24.5. ábra

1) Töltsd ki az alábbi gyakorisági táblázatot:

Az érdemjegy száma	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Gyakoriság												
Relatív gyakoriság												

2) Határozd meg az erre az írásbeli dolgozatra kapott átlagos érdemjegyet!
3) Határozd meg az adatsor móduszát!

24.10.˙ Töltsd ki a 24.9. feladatban lévő gyakorisági táblázatot az osztályod utolsó algebradolgozatának eredményei alapján!
1) Határozd meg az írásbeli dolgozatra kapott átlagos érdemjegyet!
2) Határozd meg az adatsor móduszát!

24.11.˙ Egy herszoni iskola tanulóit megkérdezték, hányszor repültek már repülőgépen. A kapott válaszokat az alábbi táblázat mutatja:

A repülések száma	0	1	2	3	4	5
Tanulók száma	530	92	46	30	8	4
Relatív gyakoriság (%)						

1) Töltsd ki a táblázat harmadik sorát!
2) Szemléltesd a kapott adatokat oszlopdiagramon!
3) Határozd meg az adatok móduszát és számtani közepét!
4) Határozd meg, lehet-e ez a minta reprezentatív Herszon minden iskolása számára?

24.12.˙ Írd le az ebben az évben algebrából kapott összes jegyedet! Határozd meg az így kapott adatsor számtani közepét, móduszát és mediánját!

24.13.˙ Egy vállalat igazgatójának a fizetése 50 000 hrivnya, két helyetteséé 20–20 000 hrivnya, a többi 17 munkás havi bére 4500 hrivnya. Határozd meg ennél a vállalatnál az átlagfizetést, a fizetések móduszát és mediánját!

24.14.˙ Olvasd el Sevcsenko egyik legismertebb versét!

Садок вишневий коло хати,
Хрущі над вишнями гудуть,
Плугатарі з плугами йдуть,
Співають ідучи дівчата,
А матері вечерять ждуть.

Сем'я вечеря коло хати,
Вечірня зіронька встає.
Дочка вечерять подає,
А мати хоче научати,
Так соловейко не дає.

Поклала мати коло хати
Маленьких діточок своїх;
Сама заснула коло їх.
Затихло все, тільки дівчата
Та соловейко не затих.[1]

Számold meg a versben az *а, е, і, ї, н, о, р, у, ф, я* betűket! Készíts gyakorisági táblázatot! Határozd meg az adatok móduszát!

24.15.˙ 2016 májusában reggel 8 órakor Kijevben ekkora volt a levegő hőmérséklete:

Dátum	Hőmérséklet, °C	Dátum	Hőmérséklet, °C	Dátum	Hőmérséklet, °C
01.05.2016	13,1	11.05.2016	17,8	21.05.2016	14,0
02.05.2016	15,3	12.05.2016	15,0	22.05.2016	16,9
03.05.2016	15,7	13.05.2016	16,6	23.05.2016	18,7
04.05.2016	15,4	14.05.2016	12,6	24.05.2016	17,4
05.05.2016	16,2	15.05.2016	13,1	25.05.2016	16,1
06.05.2016	13,1	16.05.2016	13,5	26.05.2016	16,8
07.05.2016	10,5	17.05.2016	8,8	27.05.2016	20,1
08.05.2016	14,2	18.05.2016	12,4	28.05.2016	19,2
09.05.2016	15,5	19.05.2016	9,5	29.05.2016	20,7
10.05.2016	17,5	20.05.2016	10,8	30.05.2016	17,3
				31.05.2016	17,4

Határozd meg a kapott adatok középérték mutatóit!

24.16.˙ Alkoss olyan adatsort, amely 1) ötelemű; 2) hatelemű és amelynek:

a) a számtani közepe a mediánjával egyenlő;

b) a számtani közepe nagyobb a mediánjánál!

[1] Т. Г. Шевченко. Твори у 12 т. Інститут літератури ім. Т. Г. Шевченка Академії наук України. – К. : Наукова думка, 2003. – Т. 2. – С. 17.

Barátunk a számítógép

Ebben az évben folytatjuk a 7. és a 8. osztályban megkezdett számítógépes ismereteitek tökéletesítését, újabb eszközökkel és programokkal ismerkedünk meg. Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy az ebben a fejezetben ajánlott feladatokon kívül rengeteg olyan program van, ami segít a kilencedikes tananyag elsajátításában. Keressétek ezeket a programokat és más tananyagokat, kiegészítő információkat az internet hálózatán.

Ha szeretnél olyan szakmát választani, amelyhez nélkülözhetetlen a matematika mindennapi alkalmazása, akkor elkezdheted bővíteni a matematikai programjaidat (például a *Mathcad*, *MATLAB* stb.), melyek gazdag eszköztárral rendelkeznek matematikai számítások elvégzéséhez és mértani szerkesztésekhez.

Ebben a fejezetben olyan feladatokat tűztünk ki, melyeket az adott témakörön belül számítógép segítségével tudsz megoldani. A feladatok többsége – a tankönyv feladatainak folytatása, továbbgondolása (ezeket a feladatokat jelöltük, ebben a fejezetben pedig feltüntetjük a számát).

Azok számára, akik szeretnek programozni, az olyan algoritmusok és programok elkészítését ajánljuk, melyekben alkalmazhatják az elsajátított matematikai ismereteiket. Azokat a feladatokat, melyek tartalmazzák a programozás elemeit, csillaggal jelöltük. Mivel a programozási nyelveket még nem tanultátok, ezért elegendő végiggondolni az algoritmust, és leírni szavakkal vagy folyamatábrát készíteni; a programozási nyelvek elsajátításának függvényében az algoritmus alapján már a programot is megírhatjátok. Felhívjuk a figyelmeteket arra, hogy az algoritmikus gondolkozás (lépések meghatározott sorozata) nem csak a programozásban használható, hanem más tevékenységekben is.

Az 1. fejezethez

Egyenlőtlenségek

Keress rá az interneten a közlekedési szabályokra! Válaszd ki közülük azokat, amelyek valamilyen mennyiségi korlátot szabnak meg! A válaszaidat add meg egyenlőtlenség alakjában!

Rajzolj szerkesztő programmal számegyenest! Szemléltesd, hogy a kisebb szám a nagyobb számtól balra van a számegyenesen!

Mentsd el egy fájlba a megrajzolt számegyenest, hogy a továbbiakban is tud használni!

A 2. fejezethez
Az egyenlőtlenségek alaptulajdonságai

Hogyan lehet szemléltetni az egyenlőtlenségek tulajdonságait szerkesztő programmal? A szerkesztő program eszköztárából mely eszközöket tudott alkalmazni?

A 3. fejezethez
Egyenlőtlenségek összeadása és szorzása.
A kifejezések helyettesítési értékének becslése

Keress választ az internet segítségével arra a kérdésre, hogy a Naprendszerünkben melyik bolygó van legközelebb, és melyik van legtávolabb a Naptól! Hogyan határozhatjuk meg a bolygók közötti legkisebb és legnagyobb távolságot! Készíts táblázatot valamilyen táblázatkezelővel! Megtudod-e oldani, hogy a program automatikusan számolja ki a tetszőleges két bolygó közötti legnagyobb és legkisebb távolságot?

A 4. fejezethez
Egyismeretlenes egyenlőtlenségek

Készíts számegyenest valamilyen grafikai szerkesztővel! Szemléltesd ezen a számegyenesen a 4.5., 4.6., 4.13. feladatok megoldását! A rajzprogram mely eszközei segítettek a megoldások lépéseinek szemléltetésében?

Az 5. fejezethez
Egyismeretlenes lineáris egyenlőtlenségek megoldása.
Számintervallumok

Oldd meg grafikai szerekesztővel az 5.1., 5.2., 5.3. feladatokat!

A 6. fejezethez
Egyismeretlenes lineáris egyenlőtlenség-rendszerek

Oldd meg grafikai szerekesztővel a 6.3., 6.4. feladatokat!

Készítsd el a **6.33.*** feladat megoldásának algoritmusát, ha minden esetet végigpróbálunk!

A **6.54.***, **6.55.***, **6.56.*** feladatok a százalékszámítás típusfeladatai. Általánosítsd a százalékos feladatok mindhárom típusát! Írd le a bemenő adatokat és az eredményeket! Készíts algoritmust a feladat megoldásához!

A 7. fejezethez
A függvényekről tanultak ismétlése, bővítése

A függvény megadási módjai közül melyiket célszerű használni számítógép alkalmazásánál? Milyen eszközöket használhatsz ebben az esetben?

A 8. fejezethez

Függvénytulajdonságok

*Egy függvény táblázattal van megadva. Készíts algoritmust, hogyan lehet meghatározni, milyen argumentum értékékre vesz fel a függvény azonos előjelű értékeket, hol növekvő és hol csökkenő ez a függvény? Milyen feltételnek kell megfelelnie az adatok táblázatos elrendezésének?

Általánosítsd a **8.31.*** feladatot és készítsd el a matematikai modelljét és a megoldás algoritmusát!

A 9. fejezethez

Hogyan kell ábrázolni az $y = kf(x)$ függvény grafikonját az $y = f(x)$ függvény grafikonjából

Adj meg táblázatkezelővel egy tetszőleges $y = f(x)$ függvényt, majd ábrázold a táblázat alapján ezt a függvény! Hogyan kell megváltoztatni a táblázatot, hogy megkapd az $y = kf(x)$ függvényt? Hogyan végezheted el ezt automatikusan? Ábrázold az $y = kf(x)$ függvényt különböző k értékekre?

Ábrázolj grafikai szerkesztővel egy tetszőleges $y = f(x)$ függvényt! A grafikai szerkesztő milyen eszközeit tudod alkalmazni, hogy ennek a függvénynek a grafikonjából megkapd az $y = kf(x)$ függvény grafikonját, ha $k > 1$; ha $0 < k < 1$; ha $k = -1$? Hogyan lehet alkalmazni ezeket az eszközöket, hogy megkapjuk az $y = kf(x)$ függvény grafikonját, ha $k < 0$ és $k \neq -1$?

A 10. fejezethez

Hogyan kell ábrázolni az $y = f(x) + b$ és az $y = f(x + a)$ függvény grafikonját az $y = f(x)$ függvény grafikonjából

Adj meg táblázatkezelővel egy tetszőleges $y = f(x)$ függvényt, majd ábrázold a táblázat alapján ezt a függvény! Milyen változásokat kell elvégezni a táblázaton, hogy megkapjuk az $y = f(x) + b$ függvény grafikonját? az $y = f(x + a)$ függvény grafikonját? az $y = f(x + a) + b$ függvény grafikonját? Hogyan lehet megoldani, hogy mindez automatikusan változzon? Ábrázold az $y = f(x + a) + b$ függvény néhány grafikonját tetszőleges a és b értékre?

Ábrázolj grafikai szerekesztővel egy tetszőleges $y = f(x)$ függvényt! A grafikai szerkesztő milyen eszközeit tudod alkalmazni, hogy az $y = f(x)$ függvény grafikonjából megkapd az $y = f(x) + b$ és az $y = f(x + a)$ függvény grafikonját! Hogyan alkalmazhatod ezeket az eszközöket ahhoz, hogy ábrázolhasd az $y = f(x + a) + b$ függvény grafikonját?

A 11. fejezethez

A másodfokú függvény, annak grafikonja és tulajdonságai

*Egy parabola az $y = ax^2 + bx + c$ képlettel van megadva. Készíts algoritmust az a, b és c bemenő adatokkal! Az algoritmusnak a parabola következő tulajdonságait kell vizsgálnia: a parabola szárainak irányát, csúcspontjának a koordinátáit, a parabola és a koordinátatengelyek metszéspontjait, a kapott eredmények alapján pedig döntsd el, hogy a parabola melyik részét célszerű ábrázolni!

Automatizáld a megfelelő függvényérték táblázatának kiszámítását, és ábrázold a táblázat alapján a grafikont! Hogyan fogod kiválasztani az argumentum értékeit, hogy a grafikon minél pontosabb legyen?

Néhány további függvénytranszformáció

Határozd meg, hogyan lehet táblázatkezelővel és grafikai szerkesztővel az $y = f(x)$ függvény grafikonjából megkapni az $y = f(-x)$ és az $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$ függvény grafikonját?

A 12. fejezethez

Másodfokú egyenlőtlenségek megoldása

* Írj algoritmust a 12. fejezetben lévő táblázat alapján az $ax^2 + bx + c > 0$ egyenlőtlenség megoldására, a bemeneti adatok legyenek az *a, b* és *c* értékei!

Milyen bemeneti adatokkal kell kiegészíteni az *a, b* és *c* értékeket és hogyan kell megváltoztatni az algoritmust, hogy meg tud oldani az $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ egyenlőtlenségeket is?

A 13. fejezethez

Kétismeretlenes egyenletrendszerek

Feledékeny Marci úgy szeretett volna megoldani egy egyenletrendszert, hogy a rendszer minden egyenletét táblázatkezelővel ábrázolja, majd a számítógép monitorán megkeresi a görbék metszéspontját. Mi a hiányossága ennek a tervnek?

A 14. fejezethez

A kétismeretlenes egyenletrendszerek mint alkalmazott matematikai modellek

*Elemezd a fejezet feladatait! Több feladat hasonló esetekkel foglalkozik. Találd meg ezeket a feladatokat, és írj az általános esetre algoritmus?

A 15. fejezethez

Számsorozatok

A táblázatkezelővel ki lehet tölteni a táblázat üres részeit a sorozat megfelelő tagjainak beírásával, amit egy sorozat tagjai általános *n* tagjának képlete alapján és rekurzívan adtunk meg. Sajátítsd el a táblázatkitöltések ezen módjait!

M e g j e g y z é s. Világos, hogy ezzel a módszerrel csak véges sorozatot tudunk megadni.

Oldd meg a fejezet tetszőleges feladatát ezzel a módszerrel!

A 16. fejezethez

Számtani sorozat

Dolgozd ki táblázatkezelővel azt az eljárást, amellyel ki lehet tölteni egy táblázatot egy véges számtani sorozat tagjaival, és ezt az eljárást bármely a_1 és d értékre alkalmazni lehessen!

A 17. fejezethez

A számtani sorozat első *n* tagjának összege

Dolgozd ki a táblázat kitöltésének olyan mechanizmusát, hogy a táblázatkezelőben az első oszlopban a k természetes szám legyen, a számtani sorozat tagjának sorszáma, a második oszlopban a k-dik tag értéke, a harmadikban pedig az első k tagok összege. A k maximális értékét te válaszd ki. Ki tudod-e tölteni automatikusan ezt a táblázatot megadott a_1 és d értékre?

A 18. fejezethez

Mértani sorozat

Dolgozd ki táblázatkezelővel azt az eljárást, amellyel ki lehet tölteni egy táblázatot egy véges mértani sorozat tagjaival. Dolgozd ki úgy, hogy ezt az eljárást bármely b_1 és q értékre alkalmazni lehessen!

Hogyan lehet számológéppel kamatos kamatot számolni? Számítsd ki a 18.17.–18.20. feladatokat számológéppel!

A 19. fejezethez

A mértani sorozat első *n* tagjának összege

A 17. fejezetnél olyan eljárást készítettél, amely megadott a_1 és d értékre számtani sorozattal tölti ki a táblázatot. Bővítsd ki ezt a táblázatot egy negyedik oszloppal, amelybe a mértani sorozat k-dik tagja kerül, amelynél $b_1 = a_1$ és $q = d$, az ötödik oszlopba pedig a mértani sorozat első k tagjának összege kerüljön. Rajzolj grafikont a táblázat adatai alapján!

Vizsgáld meg a számtani és a mértani sorozatok menetét különböző a_1 és d értékre!

Feleletek és útmutatások

1.§. Egyenlőtlenségek

1. Egyenlőtlenségek

1.10. 1) Nem; 2) Igen; 3) Nem; 4) Nem; 5) Nem. **1.18**. A tört értéke nő. **1.19**. A tört értéke csökken vagy nem változik. **1.22**. 1) Nem igaz; 2) Igaz; **1.26**. Igen. **1.28**. 1) *Útmutatás.* $a^2 + b^2 + 6a - 4b + 13 = (a^2 + 6a + 9) + (b^2 - 4b + 4)$.

2. Az egyenlőtlenségek alaptulajdonságai

2.13. 3) Nem lehet összehasonlítani. **2.19.** 4) Ha $c > 0$, akkor $c^2 > -4c$; ha $-4 < c < 0$, akkor $c^2 < -4c$; ha $c = 0$, akkor igaz egyenlőtlenséget nem kaphatunk. **2.21**. 1. **2.22.** 24.

3. Egyenlőtlenségek összeadása és szorzása. A kifejezések helyettesítési értékének becslése

3.12. 3) Nem; 4) Nem; 5) Nem; 6) Igen; 8) Igen; 10) Igen; 11) Nem; 12) Igen; 13) Nem; 14) Nem. **3.27.** 1) $\sqrt{10}+\sqrt{6}>\sqrt{11}+\sqrt{5}$; 2) $2+\sqrt{11}<\sqrt{5}+\sqrt{10}$; 3) $\sqrt{15}-\sqrt{5}>\sqrt{2}$; 4) $\sqrt{21}+\sqrt{20}>9$. **3.28.** 1) $\sqrt{6}+\sqrt{3}>\sqrt{7}+\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{26}-\sqrt{2}<\sqrt{14}$. **3.32.** 400%.

4. Egyismeretlenes egyenlőtlenségek

4.15. 4) Nincsenek gyökei; 5) x – bármely szám; 6) –6. **4.16.** 6 km.

5. Egyismeretlenes lineáris egyenlőtlenségek megoldása. Számintervallumok

5.25. 3) $(-\infty; -5]$; 4) $(-\infty; 1)$; 5) $[7; +\infty)$; 6) $\left(-\infty; \frac{6}{11}\right]$; 7) $(-\infty; -7{,}5]$; 8) $(1; +\infty)$; 9) $(-\infty; +\infty)$; 10) $\varnothing$; 11) $(-\infty; +\infty)$; 12) $(-\infty; 0)$. **5.26.** 1) $\left(\frac{24}{19}; +\infty\right)$; 2) $[-6; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; -6]$; 5) $(-\infty; +\infty)$ 6) $(-3{,}5; +\infty)$. **5.27.** 1) –8; 2) –1. **5.28.** 1) –6; 2) –3. **5.29.** 5 megoldása van. **5.30.** 8 megoldása van. **5.33.** 1) $a < -\frac{9}{4}$; 2) $a \leqslant 1{,}6$. **5.34.** 1) $b < 3$; 2) $b < -\frac{1}{8}$. **5.35.** 12 km. **5.36.** Ilyen szám nem létezik. **5.37.** 18 golyó. **5.38.** 44 meggyfa. **5.39.** 21. **5.40.** 28, 30, 32. **5.41.** 25, 30, 35. **5.42.** 1) Ha $-4 < x < 2$ és $x > 2$; 2) ha $x < -4$ és $-4 < x < 3$; 3) ha $-3 < x < -2$, $-2 < x < 2$ és $x > 2$; 4) ha $-1 < x < 1$ és $x > 1$. **5.43.** 1) Ha $x < -3$ és $-3 < x < 9$; 2) ha $7 < x < 8$ és

$x > 8$. **5.44.** 1) 9; 2) –3; 3) 13; 2,2; 4) nincsenek gyökei. **5.45.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) –2; 12. **5.48.** 3) Ha $a > -1$ és $a \neq 1$. **5.49**. 2) Ha $m < 7$ és $m \neq 0$. **5.50.** 1) Ha $a > -1$ és $a \neq 0$; 2) ha $a < \frac{9}{16}$ és $a \neq -1$; 3) ha $a < \frac{19}{5}$ és $a \neq 3$. **5.51.** Ha $a < -\frac{1}{12}$. **5.52.** 1) 3; 2) –1. **5.53.** 1) –7; 2) –4. **5.54.** 1) Ha $a > 0$, akkor $x > 0$; ha $a < 0$, akkor $x < 0$; ha $a = 0$, akkor nincsenek gyökei; 2) ha $a > 0$, akkor $x < -1$; ha $a < 0$, akkor $x > -1$; ha $a = 0$, akkor x – bármely szám; 3) ha $a > 0$, akkor $x \leqslant 1$; ha $a < 0$, akkor $x \leqslant 1$; ha $a = 0$, akkor x – bármely szám; 4) ha $a < 2$, akkor $x < -2$; ha $a > 2$, akkor $x > -2$; ha $a = 2$, akkor nincs megoldás; 5) ha $a > 2$, akkor $x > a + 2$; ha $a < 2$, akkor $x < a + 2$; ha $a = 2$, akkor nincs megoldás; 6) ha $a > -3$, akkor $x \leqslant a - 3$; ha $a < -3$, akkor $x \geqslant a - 3$; ha $a = -3$, akkor x – bármely szám. **5.55.** 1) Ha $a \neq 0$, akkor $x \leqslant 0$; ha $a = 0$, akkor x – bármely szám ; 2) ha $a > -1$, akkor $x < \frac{2-a}{a+1}$; ha $a < -1$, akkor $x > \frac{2-a}{a+1}$; ha $a = -1$, akkor x – bármely szám; 3) ha $a > -4$, akkor $x > \frac{1}{a+4}$; ha $a < -4$, akkor $x < \frac{1}{a+4}$; ha $a = -4$, akkor nincs megoldás. **5.59.** 15 óra, 10 óra

6. Egyismeretlenes lineáris egyenlőtlenség-rendszerek

6.23. 1) $\left(\frac{1}{7}; \frac{13}{10}\right)$; 2) $(-\infty; -4{,}2)$; 3) $[-2; 3]$; 4) $[-0{,}8; +\infty)$; 5) $\frac{5}{7}$; 6) $(-\infty; -4]$; 7) $\varnothing$; 8) $\varnothing$. **6.24.** 1) $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{8}\right]$; 2) $[-10; +\infty)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; +\infty)$. **6.25.** 1) –3; –2; –1; 0; 2) 7; 8; 9; 10; 11. **6.26.** 1) 4 megoldása; 2) 6 megoldása. **6.27.** 1) $[2{,}5; +\infty)$; 2) $\left[-\frac{5}{3}; 3\right)$; 3) $\varnothing$; 4) $(-\infty; 4)$. **6.28.** 1) (0; 8]; 2) $(5; +\infty)$. **6.29.** 1) (–0,5; 6,5); 2) [14; 17]. **6.30.** 1) [–1,5; 2,5); 2) $\left[0; \frac{1}{3}\right)$. **6.31.** 2) (1,5; 7); 3) $(-\infty; -2)$. **6.32.** 1) $\varnothing$; 2) (1; 3). **6.33.** 3 cm, 5 cm vagy 4 cm. **6.34.** 1) [–4; 3]; 2) $x < -1$ vagy $x > 3{,}5$; 3) $x < 1$ vagy $x > 8$; 4) (–2; 9); 5) (–2; 0,5]; 6) $x \leqslant -0{,}8$ vagy $x > 6$. **6.35.** 1) (–3; 2); 2) $x < 4$ vagy $x > 8$; 3) $x < -9$ vagy $x \geqslant 1{,}2$; 4) $\left[-\frac{1}{4}; 10\right)$. **6.36.** 1) [–1,6; 5,6]; 2) (–4; 1); 3) $x < -12$ vagy $x > 6$; 4) $x \leqslant 2$ vagy $x \geqslant \frac{8}{3}$; 5) $[1; +\infty)$; 6) $\left(-\frac{11}{7}; +\infty\right)$. **6.37.** 1) $x \leqslant 3{,}6$ vagy $x \geqslant 8{,}4$;

2) [–2; –1,2]; 3) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$; 4) (–∞; 2]. **6.38.** 1) Ha $a > 3$; 2) ha $a \leqslant 3$. **6.39.** 1) Ha $a \leqslant 4$; 2) ha $a > 1$. **6.40.** 1) Ha $a \leqslant -1$; 2) ha $a = 1$. **6.41.** Ha a < 2, akkor $x \leqslant a$; ha $a \geqslant 2$, akkor $x < 2$. **6.42.** Ha $a < -3$, akkor $a < x < -3$; ha $a \geqslant -3$, akkor nincs megoldás. **6.43.** Ha $10 < a \leqslant 11$. **6.44**. Ha $1 < b \leqslant 2$. **6.45.** Ha $8 \leqslant a < 9$. **6.46.** Ha $-6 \leqslant b < -5$. **6.47.** Ha $a < 3$. **6.48.** Ha $-\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant 3.$ **6.49.** Ha $a < -7$ vagy $a > 8$. **6.50.** 1) –1; 2) –2; 4. **6.51.** 1) $2\sqrt{10}-\sqrt{6};$ 2) $0{,}5\sqrt{2b};$ 3) $-4\sqrt{6}.$

2. §. Másodfokú függvény

7. **A függvényekről tanultak ismétlése, bővítése**

7.17. 2) Minden szám, kivéve a 7–et és a –7–et; 4) a négynél nem kisebb számok, kivéve a 6-ot. **7.27.** 60 km/h.

8. Függvénytulajdonságok

8.17. $a < \frac{1}{8}.$ **8.18.** $a > 9$. **8.19.** 2. **8.20.** $m < -2$. **8.26.** $a = 1$, $a = 2$ és $a = 1{,}5$. **8.27.** Ha < –2, akkor a függvény legnagyobb értéke $f_{\max} = f(a) = a^2$, legkisebb értéke $f_{\min} = f(0) = 0$; ha $a = -2$, akkor $f_{\max} = f(-2) = f(2) = 4$, $f_{\min} = f(0) = 0$; ha $-2 < a < 0$, akkor $f_{\max} = f(2) = 4$, $f_{\min} = f(0) = 0$; ha $0 < a < 2$, akkor $f_{\max} = f(2) = 4$, $f_{\min} = f(a) = a^2$. **8.30.** 10 óra, 40 óra. **8.31.** 20%.

9. Hogyan kell ábrázolni az $y = kf(x)$ függvény grafikonját az $y = f(x)$ függvény grafikonjából

9.21. 3 t.

10. Hogyan kell ábrázolni az $y = f(x) + b$ és az $y = f(x+a)$ függvény grafikonját az $y = f(x)$ függvény grafikonjából

10.17. *a*) $y = x^2 + 3$; *b*) $y = -2x^2 - 1$. **10.18.** *a*) $y = 2x^2 - 6$; *b*) $y = 4 - x^2$. **10.19.** *a*) $y = (x - 2)^2$; *b*) $y = -3(x + 3)^2$. **10.20.** *a*) $y = \frac{1}{2}(x+4)^2$; *b*) $y = -2(x - 1)^2$. **10.21.** *a*) $y = (x + 2)^2 - 4$; *b*) $y = -(x - 2)^2 + 5$;

c) $y=\frac{1}{3}(x-3)^2+1$. **10.22.** *a*) $y=(x-4)^2-5$; *b*) $y=-2(x+6)^2+7$. **10.25.** Mind a két állítás igaz. **10.28.** 3) *Útmutatás.* $y=\frac{-2x+2-2}{x-1}=-2-\frac{2}{x-1}$. **10.32.** $\frac{3}{4}$.

11. A másodfokú függvény, annak grafikonja és tulajdonságai

11.12. –1; 1; 3. **11.13.** 4. **11.14.** 1) 2 gyöke van; 2) 1 gyöke van **11.15.** 3 gyöke van. **11.16.** 1) (–1; –1), (9; 9); 2) (2; 23), (8; 17). **11.17.** (3; 15), (–1; 11). **11.23.** 1) –25; 2) –13; 3) –22. **11.24.** 1) 26; 2) 17; 3) –10. **11.25.** $p=1$, $q=4$. **11.26.** $a=-\frac{7}{6}$, $b=\frac{7}{6}$. **11.27.** $a=3$, $b=5$. **11.30.** $b=-16$. **11.31.** $b=18$. **11.32.** $a=1$ vagy $a=4$. **11.33.** $a\geqslant\frac{9}{2}$. **11.34.** $a<-16$. **11.35.** $c=-8$. **11.36.** $c=14$. **11.37.** *a*) $a>0$, $b<0$, $c<0$; *b*) $a<0$, $b<0$, $c>0$. **11.39.** $p=-4$, $q=9$. **11.40.** $a=1$, $b=-8$, $c=6$. **11.41.** *a*) –4; *b*) 4. **11.42.** –1. **11.43.** 1) 25. *Útmutatás.* Jelöljük az egyik számot x-szel, akkor a másik szám $10-x$. Vizsgáljuk meg az $f(x)=x(10-x)=10x-x^2$; 2) 50. **1.44.** 1 óra 30 perc múlva. **11.45.** 1600 m^2. **11.50.** 1) $a>-4$; 2) $a=-4$; 3) $a<-4$. **11.52.** $a>\frac{13}{8}$. **11.53.** $a\geqslant-0{,}5$. **11.57.** 1) $8a\sqrt{a}$; 2) 56; 3) $6\sqrt{2}-5$. **11.58.** 4 km/h. **11.59.** 20 perc, 30 perc.

12. Másodfokú egyenlőtlenségek megoldása

12.10. 1) (–2; 1); 2) $(-\infty;-5]\cup[2;+\infty)$; 3) $\left[-3;-\frac{1}{3}\right]$; 4) $(-\infty;-21)\cup(1;+\infty)$; 5) $(-\infty;-3)\cup(4;+\infty)$; 6) $\left[-\frac{13}{3};1\right]$. **12.11.** 1) $(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$; 2) (–5; –3); 3) $\left(\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$; 4) $(-\infty;-10)\cup(1;+\infty)$. **12.12.** 1) Ha $-\frac{1}{3}<x<\frac{7}{3}$; 2) ha $x\leqslant-0{,}2$ vagy $x\geqslant2{,}4$. **12.13.** 1) Ha $-\frac{5}{2}<x<\frac{9}{2}$; 2) ha $-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant\frac{10}{3}$. **12.14.** Ha $-5<x<4$. **12.15.** Ha $1<x<2{,}5$. **12.16.** 1) –5, –4, –3, –2, –1, 0; 2) –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3; 3) 0; 4) –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5. **12.17.** 1) 11; 2) 4. **12.18.** 1) –6; 2) –2. **12.19.** 1) 1; 2) –3. **12.24.** 1) $-4<a<4$; 2) $-8<a<12$; 3) $\frac{3}{8}<a<\frac{3}{2}$. **12.25.** 1) $b<-\frac{1}{16}$ vagy $b>1$; 2) $b<4$ vagy $b>10$. **12.26.** 1) (0; 3]; 2)

$[-4; -0{,}5] \cup [6; +\infty)$; 3) $[-1; 0) \cup (6; 10]$; 4) $(-5; -3]$. **12.27.** 1) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; 3\right)$; 2) $(-2; 0] \cup \cup [5; 9)$. **12.28.** 1) –4, –3, –2, –1, 0, 1; 2) –3, –2, 1, 2. **12.29.** 1) $(6; +\infty)$; 2) $(-3; 5) \cup (5; 6)$; 3) $(-\infty; -9) \cup (-9; -2] \cup [7; 9) \cup (9; +\infty)$; 4) $\left(-1; \frac{2}{3}\right)$.

12.30. 1) $[-2; 2)$; 2) $(-5; 6) \cup (6; 7)$. **12.31.** 1) $(-11; 11)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{8}\right] \cup \cup \left[\frac{1}{8}; +\infty\right)$. **12.32.** 1) $(-\infty; -1] \cup [-0{,}4; 0{,}4] \cup [1; +\infty)$; 2) $[-2; 2]$.

12.33. 1) $(-5; 0) \cup (0; 2)$; 2) $[0; 2]$; 3) $(-1; 2) \cup (2; 9)$; 4) $(-\infty; -5) \cup \cup (-5; -3) \cup (5; +\infty)$; 5) $(-\infty; -8] \cup [1; 4) \cup (4; +\infty)$; 6) $[-11; -3) \cup (-3; 1]$.

12.34. 1) $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (3; +\infty)$; 2) $(4; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup \cup (3; +\infty)$; 4) $\left[-\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 3]$. **12.35.** 1) $(-4; -3) \cup (5; +\infty)$; 2) $[-4; -3] \cup \cup [5; +\infty)$; 3) $(-\infty; -4)$; 4) $(-\infty; -4] \cup \{-3, 5\}$. **12.36.** 1) $(3; 7)$; 2) $[3; 7] \cup \{-2\}$; 3) $(-2; 3)$; 4) $[-2; 3] \cup \{7\}$. **12.37.** 1) Ha $a > 4$; 2) ha $-1 \leqslant a \leqslant \frac{3}{5}$; 3) ha $0 < a < \frac{1}{2}$; 4) ha $a > \frac{5}{3}$. **12.38.** 1) Ha $a \geqslant 9$; 2) ha $3 \leqslant a \leqslant 7$; 3) ha $a \geqslant 1$.

12.39. 1) Ha $a < 1$, akkor $a < x < 1$ vagy $x > 4$; ha $1 \leqslant a \leqslant 4$, akkor $x > 4$; ha $a > 4$, akkor $x > a$; 2) ha $a \leqslant -\frac{1}{4}$, akkor nincs megoldás; ha $-\frac{1}{4} < a \leqslant 1$, akkor $-\frac{1}{4} \leqslant x < a$; ha $a > 1$, akkor $-\frac{1}{4} \leqslant x \leqslant 1$. **12.40.** 1) Ha $a \leqslant -8$, akkor $-8 < x < 9$; ha $-8 < a < 9$, akkor $a < x < 9$; ha $a \geqslant 9$, akkor nincs megoldás; 2) ha $a < 1$, akkor $x < a$; ha $1 \leqslant a \leqslant 8$, akkor $x < 1$; ha $a > 8$, akkor $x < 1$ vagy $8 < x < a$. **12.43**. 3 napot. **12.44.** 40 l.

13. Kétismeretlenes egyenletrendszerek

13.3. 1) (5; 8), (–3; 0); 2) (4; 1), (1; 4); 3) (–1; 1), (–3; –1); 4) (6; 1), (–6; –2); 5) (5; 3), (–1,5; –10); 6) (2; –2). **13.4.** 1) (–4; –7), (7; 4); 2) (2; 4), (–5; –3); 3) (–1; 4), (–0,5; 2,5); 4) (4; 2), (20; –14). **13.5.** 1) 2 megoldása; 2) 3 megoldása; 3) 1 megoldása; 4) 2 megoldása; 5) nincs megoldása; 6) 3 megoldása. **13.6.** 1) 2 megoldása; 2) nincs megoldása; 3) 2 megoldása; 4) 4 megoldása.

13.7. 1) (4; 3); 2) (0; 0), (–2,4; 4,8); 3) (4; –3), (17; 10); 4) (9; –4), (4; 1); 5) (2; 2,5), (–4,4; –2,3); 6) (4; –1), (0; 3). **13.8.** 1) (6; 9), (–9; –6); 2) (1; 0), (–0,5; 0,75); 3) (2; 4), (3; 3); 4) (1; 1), $\left(\frac{17}{3}; \frac{38}{3}\right)$. **13.9.** 1) $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$, (–2; –7); 2) (2; 2), (–1; –4); 3) (1; 0), (5; –4); 4) (2; 3), $\left(\frac{2}{3}; \frac{43}{9}\right)$. **13.10.** (–4; –1). **13.11.** 2) (0,5; 5,5); 3) (–4; 52), (3; 3). **13.12.** 1) (3; 4), (4; 6); 2) (–2; 1), $\left(-6; \frac{9}{5}\right)$. **13.13.** 1) (2; 1), $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$; 2) (1; 5), $\left(\frac{10}{3}; -2\right)$. **13.14.** 1) (–5; 1), (1; –5), (4; 1), (1; 4); 2) (5; –2), $\left(\frac{6}{7}; \frac{15}{7}\right)$; 3) (3; 1), (–3; –1), $\left(2\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$; 4) (2; 3); 5) (–3; 3), (3; –3); 6) (2; 1), $\left(-\frac{1}{2}; -4\right)$; 7) (1; 0), $\left(-\frac{19}{21}; -\frac{8}{21}\right)$. **13.15.** 1) (6; 3), $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{3}{2}\right)$; 2) (2; –1), $\left(\frac{21}{53}; \frac{15}{53}\right)$; 3) $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$; 4) (9; 3), (–9; –3); 5) (–2; 1), $\left(\frac{29}{28}; -\frac{3}{14}\right)$; 6) (–3; 4), (–5; 2), (1; –4), (3; –2). **13.16.** 1) (1; 0), (0; 1); 2) (3; –1), (1; –3); 3) (4; 3), (–4; –3); 4) (–3; 2), (3; –2). **13.17.** 1) (4; 2), (–2; –4); 2) (1; 3), (–1; –3). **13.18.** 1) (1; 2), $\left(7\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right)$; 2) (–7; –5), (4; 6); 3) (–4; –3), (–4; 2), (3; –3), (3; 2); 4) (3; 1), $\left(\frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. **13.19.** 1) (4; 1), (1; 4); 2) (1; –2), $\left(\frac{2}{3}; -\frac{8}{3}\right)$; 3) (6; 5), (–4; –5); 4) (5; 4), (–5; –4), (5; –4), (–5; 4). **13.20.** 1) $\left(7; \frac{1}{6}\right)$, $\left(1; \frac{7}{6}\right)$; 2) (–2; 4), (2; –4), $\left(\frac{94}{7}; -\frac{8}{7}\right)$, $\left(-\frac{94}{7}; \frac{8}{7}\right)$; 3) (4; 3), (3; 4), (–4; –3), (–3; –4); 4) (1; –1), $\left(-\frac{1}{3}; 3\right)$, (–1; 1), $\left(\frac{1}{3}; -3\right)$. **13.21.** 1) (2; 1), (–5; –0,4); 2) (4; 0); 3) (1; 3), (3; 1), (–3; –1), (–1; –3); 4) (–2; 2), $\left(-10; \frac{2}{5}\right)$, (2; –2), $\left(10; -\frac{2}{5}\right)$. **13.22.** 1) $a = 3\sqrt{2}$ vagy $a = -3\sqrt{2}$; 2) $-3\sqrt{2} < a < 3\sqrt{2}$; 3) $a < -3\sqrt{2}$ vagy $a > 3\sqrt{2}$. **13.23.** 1) $k = 2$ vagy $k = -2$; 2) $k < -2$ vagy $k > 2$; 3) $-2 < k < 2$. **13.24.** 1) Ha $a > 0$, akkor 2 megoldás van; ha $a = 0$, akkor 1 megoldás van; ha $a < 0$, akkor nincs megoldás; 2) ha $-4 < a < 4$, akkor nincs megoldás; ha $a = -4$ vagy $a = 4$, akkor 2 megoldás van; ha $a < -4$ vagy $a > 4$, akkor 4 megoldás van; 3) ha $a > -\frac{1}{4}$, akkor 2 megoldás van; ha $a = -\frac{1}{4}$, akkor 1 megoldás van; ha $a < -\frac{1}{4}$, akkor nincs megoldás; 4) ha $a < -\frac{17}{4}$ vagy $a > 2$, akkor nincs megoldás; ha $a = -\frac{17}{4}$ vagy $-2 < a < 2$, akkor 2 megoldás van; ha $-\frac{17}{4} < a < -2$, akkor 4 megoldás van; ha $a = -2$, akkor 3 megoldás van, ha $a = 2$, akkor 1 megoldás van. **13.25.** 1) Ha $a < 1$, akkor nincs megoldás; ha $a = 1$, akkor 2 megoldás van; ha $a > 1$, akkor 4 megoldás van; 2) ha $a > 3\sqrt{2}$ vagy $a < -3$, akkor nincs megoldás; ha $a = 3\sqrt{2}$ vagy -3 <a < 3, akkor 2 megoldás van; ha 3 < a < $3\sqrt{2}$, akkor 4 megoldás van; ha $a = 3$, akkor 3 megoldás van; ha $a = -3$, akkor 1 megoldás van; 3) ha $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$, akkor nincs megoldás; ha $a = -2\sqrt{2}$ vagy $a = 2\sqrt{2}$, akkor 2 megoldás van; ha $a < -2\sqrt{2}$ vagy $a > 2\sqrt{2}$, vagy megoldás van. **13.26.** $a = -2$. *Útmutatás.* Könnyen belátható, hogy $a \neq 0$. Vizsgáljuk meg az $ax^2 + x + 1 = 0$ és az $ax^2 + a^2x + a = 0$ egyenletekből álló egyenletrendszert! **13.28.** 5. **13.29.** $\left[0; \frac{6}{17}\right]$. **13.30.** 40. **13.33.** $7\frac{2}{17}$ dinár és $9\frac{14}{17}$ dinár. **13.34.** 72 km/h, 10 km/h.

14. A kétismeretlenes egyenletrendszerek mint alkalmazott matematikai modellek

14.1. 9 és 12. **14.2.** 6 és 4. **14.3.** 80 m, 30 m. **14.4.** 7 cm, 9 cm. **14.5.** 36. **14.6.** 62. **14.7.** 84. **14.8.** 12 és 24. **14.9.** 6 és 9. **14.10.** 5 cm, 12 cm. **14.11.** 15 cm, 17 cm. **14.12.** 15 cm és 12 cm vagy 18 cm és 10 cm. **14.13.** 15 cm, 6 cm. **14.14.** 18 cm, 12 cm. **14.15.** 80 km/h, 60 km/h. **14.16.** 90 km/h, 45 km/h. **14.17.** 80 km/h, 60 km/h. **14.18.** 500 m/perc, 400 m/perc. **14.19.** 12 nap, 24 nap vagy 40 nap, 10 nap. **14.20.** 10 óra, 15 óra vagy 12 óra, 12 óra. **14.21.** 16 óra, 48 óra. **14.22.** 10 óra, 15 óra. **14.23.** 60 ohm, 90 ohm. **14.24.** 4 ohm, 6 ohm vagy 3,6 ohm, 7,2 ohm. **14.25.** 2 km/h. **14.26.** 27 km/h, 3 km/h. **14.27**. 24 km/h, 16 km/h. **14.28.** 12 km/h. **14.29.** 2 km/h, 12 km/h. **14.30.** 8,4 g/cm^3, 6,4 g/cm^3. **14.31.** 15 N, 20 N. **14.32.** 60 m, 80 m. **14.33.** 1) $-\frac{1}{a}$; 2) $\frac{1}{2-b}$. **14.35.** 1) $(-\infty; 2]$;

2) $(0{,}16; +\infty)$. **14.36.** 3. **14.37.** $-0{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}4$. **14.38.** 1) $(-\infty; -2{,}5]$; 2) $\left[\frac{5}{6}; +\infty\right)$. **14.39.** 13 és 6 vagy 67 és 66.

3.§. Számsorozatok

15. Számsorozatok

15.11. 8 tagja. **15.12.** 13. **15.13.** 1, 2, 3, 4, 5. **15.14.** 8. **15.15.** 1) $a_n = n^2$; 2) $a_n = 3n + 2$; 3) $a_n = \frac{n-1}{n}$; 4) $a_n = (-1)^n + 1$. **15.16.** 1) $a_n = n^3 + 1$; 2) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. **15.18.** 2) [–6; 1). **15.20.** 32 alkatrészt. **15.21**. 60 kg. **15.22.** 400 oldalas.

16. Számtani sorozat

16.13. 1)Igen, $n = 16$; 2) nem. **16.14.** 15. **16.17.** 23. **16.18.** -6. **16.20.** 18. **16.21.** 16. **16.22.** -0,6. **16.23.** –6; –4,5; –3; –1,5; 0; 1,5; 3. **16.24.** 2,2; 0,4; –1,4; –3,2. **16.25.** 1) $a_1 = 5$, $d = 2{,}5$; 2) $a_1 = -6$, $d = 4$ vagy $a_1 = 15$, $d = \frac{1}{2}$. **16.26.** 1) $a_1 = -2$, $d = 3$; 2) $a_1 = 20$, $d = -8$ vagy $a_1 = 51{,}5$, $d = -11{,}5$. **16.27.** Ha a sorozat első tagja egyenlő a sorozat különbségével, vagy ha a különbség nulla. **16.30.** 60°. **16.31.** 1) Igen, $a_1 = -3$, $d = -6$; 2) nem; 3) igen, $a_1 = -2{,}8$, $d = -2{,}8$; 4) nem. **16.32.** 1) Igen, $a_1 = 13$, $d = 7$; 2) igen, $a_1 = \frac{1}{5}$, $d = \frac{2}{5}$; 3) nem. **16.38.** Ha $x = -1$, akkor: $a_1 = -3$, $a_2 = -2$, $a_3 = -1$; ha $x = 8$, akkor: $a_1 = 60$, $a_2 = 43$, $a_3 = 26$. **16.39.** $y = 3$; $a_1 = 10$, $a_2 = 12$, $a_3 = 14$. **16.40.** $y = 1$; $a_1 = -1$, $a_2 = 8$, $a_3 = 17$, $a_4 = 26$. **16.41.** $x = -1$; $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$. **16.45.** 1) (7; –1), (11; –5); 2) (2; 2), (2; –2), (–2; 2), (–2; –2). **16.47.** –4. **16.48.** 1) $120\sqrt{2}$; 2) $150 - 30\sqrt{2}$. **16.50.** 24 alkatrészt. **16.51.** 40 pengő vagy 60 pengő. **16.52.** 120%.

17. A számtani sorozat első *n* tagjának összege

17.9. 1) 204; 2) 570. **17.10.** –310. **17.11.** 156-ot. **17.12.** 1400. **17.13.** 710. **17.14.** 1188. **17.15.** 8, 14, 20. **17.16.** –17. **17.17.** $1\frac{2}{3}$, $10\frac{5}{6}$, 20, $29\frac{1}{6}$, $38\frac{1}{3}$. **17.18.** 1) $\frac{n(n+1)}{2}$; 2) n^2. **17.19.** $n(n + 1)$. **17.20.** 3. **17.21.** –67,2. **17.22.** 63. **17.23.** 5880. **17.24.** 2112. **17.25.** 1632. **17.26.** 61 376. **17.27.** 70 336. **17.28.** 0,3.

17.29. 10. **17.30.** 20. **17.31.** 16. **17.32.** Igen, 19, 23, 27, 31, 35. **17.33.** Nem. **17.34.** 10 sec. **17.35.** 42 oldal. **17.36.** –1976. **17.37.** 348. **17.38.** $a_1 = 14$, $d = -3$. **17.39.** –10. **17.40.** 10. **17.41.** 690. **17.42.** 250. **17.43.** 1) 12; 2) 26. **17.44**. 1) 10; 2) 69. **17.45.** $a_1 = 1$, $d = 2$. **17.47.** $a_1 = -2$, $d = 2$. *Útmutatás*. $a_n = S_n - S_{n-1}$. **17.48.** 2610. **17.52.** 1) $\frac{a-\sqrt{bc}}{\sqrt{abc}}$; 2) $\frac{4\sqrt{d}-28}{3\sqrt{d}+18}$. **17.53.** 24 km/h. **17.54.** 2 óra. **17.55.** 200 g, 600 g.

18. Mértani sorozat.

18.17. 6298,56 hrn. **18.18.** 29 736 darabot. **18.19.** 3600 hrn. **18.20.** 600 hrn. **18.21.** 5%. **18.22.** 15%. **18.25.** 1) 2; 2) $\frac{3}{5}$ vagy $-\frac{3}{5}$. **18.26.** 1) $\frac{7}{16}$; 2) 0,001. **18.27.** 6. **18.28.** 9. **18.29.** 30 és 150. **18.30.** 1; 2; 4; 8. **18.31.** Igen, $b_1 = \frac{5}{4}$, $q = 4$. **18.32.** $x_1 = 49$, $q = 7$. **18.33.** 1) 15 vagy –15; 2) 6 vagy –6; 3) $2\sqrt{5}$ vagy $-2\sqrt{5}$. **18.34.** 2. **18.35.** $\sqrt{2}$ vagy $-\sqrt{2}$. **18.36.** 216. **18.37.** 243. **18.39.** $P_n = \frac{3a}{2^{n-1}}$. **18.41.** 3) Akkor mértani a sorozat, ha $q \neq -1$. **18.43.** 80, 40, 20, 10, 5 vagy 80, –40, 20, –10, 5. **18.44.** 6, 18, 54, 162, 486 vagy 6, –18, 54, –162, 486. **18.45.** 1) $b_1 = 2\sqrt{3}$, $q = \sqrt{3}$ vagy $b_1 = -2\sqrt{3}$, $q = -\sqrt{3}$; 2) $b_1 = 162$, $q = \frac{1}{3}$; 3) $b_1 = 7$, $q = -2$ vagy $b_1 = \frac{14}{9}$, $q = -3$. **18.46.** 1) $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = 4$; 2) $b_1 = -1$, $q = 3$. **18.47.** Ha $x = 1$, akkor a három szám: 3, 6, 12; ha $x = -14$, akkor –27, –9, –3. **18.48.** Ha $x = 2$, akkor 8, 4, 2; ha $x = -7$, akkor –1, –5, –25. **18.50.** 96, 48, 24, 12, 6, 3. **18.51.** 3, 7, 11. **18.52**. 8, 10, 12 vagy 17, 10, 3. **18.53**. 5, 15, 45 vagy 45, 15, 5. **18.54.** 2, 6, 18 vagy 18, 6, 2. **18.59.** 2 nap alatt. **18.60.** 6 kg, 18 kg vagy 9 kg, 21 kg. **18.61.** 3 kg. **18.62.** 6%. **18.63.** 10%.

19. A mértani sorozat első *n* tagjának összege

19.5. 1) 1456; 2) $155\left(5+\sqrt{5}\right)$. **19.6.** 762. **19.7.** 1210. **19.8.** –68,2. **19.9.** 27. **19.10.** –7 vagy 6. **19.11.** 5. **19.12.** $(2^{72} - 1)$ baktérium. **19.13.** 72. **19.14.** $\frac{9}{8}$. **19.15.**

4368. **19.16.** –12 285. **19.19.** 5. **19.20.** 1) $\left[-\frac{18}{7}; 13\right]$; 2) [–1; 4). **19.23.** 50 alkatrészt, 40 alkatrészt. **19.24.** 1) $b - 5a$; 2) $x + 2y$. **19.25.** Először 10%-os és másodszor 20%-os. **19.26.** 20%-os.

20. A 9. osztályos tananyag ismétlése

20.17. 6. **20.24.** 1) $(1; +\infty)$; 2) [2; 3); 3) [–2; 16]; 4) (–4; 7]. **20.25.** 1) –9; 2) –2. **20.27.** 2. **20.29.** 1) $a < 4$; 2) $a < 2$; 3) $a \leqslant -3$; 4) $a \geqslant 1$. **20.30.** 1) $a \geqslant 6$; 2) $a \geqslant 5$; 3) $a > -8$; 4) $a \leqslant 0$. **20.32.** $a < -1{,}5$ és $a \neq -2$. **20.33.** $a = 0$. **20.41.** 1) $b = 6$, $c = 9$; 2) $b = 0$, $c = 4$; 3) $b = -3$, $c = -10$. **20.44.** 3) $-2\sqrt{2}$ vagy $2\sqrt{2}$. **20.46.** $a = \frac{1}{3}$, $b = -4$, $c = 10$. **20.47.** $a = 2$, $b = -1$, $c = -3$. **20.48.** 1) 1; 2) –8. **20.50.** 1. **20.51.** 10, ha $a = 1$ és $b = 3$. **20.54.** Ha $c > 0{,}1$. **20.58.** 1) $a \neq 4$; 2) $a < \frac{1}{2}$ vagy $\frac{1}{2} < a < 1$, vagy $a > 13$; 3) $a < -1$, vagy $-\frac{1}{5} < a < 0$ vagy $a > 0$. **20.59.** 1) $a > \frac{1}{20}$; 2) $a < -5$; 3) $a \leqslant -1$; 4) $a > \frac{5}{3}$. **20.60.** 1) (1; 4), (–2; 7); 2) (3; –4), (4; –3); 3) (4; 0), (0; –4); 4) (0; –5), (3; 4), (–3; 4). **20.61.** 1) (–2; 1), (–0,4; 1,4); 2) (–2; 4), $\left(\frac{14}{9}; -\frac{20}{3}\right)$; 3) (3; 5), (10; 1,5); 4) (4; –3), (2; –6); 5) (–5; 2); 6) (3; 2), (–2; –3); 7) (3; –2), (0; 1); 8) (1; –2), (3; 0); 9) (8; 4), (4; 8); 10) (1; 5), (–5; –1). **20.62.** 1) (2; 1), (–2; –1), (1; 2), (–1; –2); 2) (5; 1), (1; 5), (2; 3), (3; 2); 3) (2; 1), (1; 2); 4) (6; 4), $\left(\frac{4}{5}; -\frac{6}{5}\right)$; 5) (4; 1), $\left(-\frac{1}{4}; 5\frac{1}{4}\right)$, (–4; –1), $\left(\frac{1}{4}; -5\frac{1}{4}\right)$; 6) (3; –2), (–3; 2); 7) (10; 5), (–5; –10); 8) (5; 3), (5; –3), (–5; 3), (–5; –3); 9) (3; 4), (4; 3), (–3; –4), (–4; –3); 10) (1; 2), $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, (–1; –2), $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right)$. **20.63.** 1) (3; 4), (4,5; 8,5); 2) (3; 1), (–1,5; –2); 3) (3; 2), (2; 3), (–3; –2), (–2; –3). **20.64.** 1) $a = \frac{1}{2}$; 2) $a = 2\sqrt{3}$ vagy $a = -2\sqrt{3}$. **20.65.** 8 cm, 15 cm. **20.66.** 9 cm, 40 cm. **20.67.** 80 km/h, 60 km/h. **20.68.** 6 km/h, 4 km/h. **20.69.** 12 km/h, 4 km/h. **20.70.** 55 km/h, 75 km/h. **20.71.** 2 óra, 6 óra. **20.72.** 36 óra, 12 óra. **20.73**. 0,5 km/h. **20.74.** 15 km/h, 12 km/h. **20.75.** 72 km/h, 48 km/h. **20.78.** $\frac{11}{12}$. **20.80.** A 32. tagtól a 64. tagig. **20.83**. 2,4 cm, 3,2 cm. **20.84.** 6) Igen, $2d$; 7) Igen, $4d$. **20.85.** 0, 4, 8. **20.88.** 1) $\frac{n(a-n)}{a}$; 2) $\frac{n(na-b)}{a+b}$. **20.89.** 11. **20.90.** 1) $a_1 = -7$, $d = 3$; 2) $a_1 = 5$, $d = -2$ vagy $a_1 = 3$, $d = -2$; 3) $a_1 = d = 3$ vagy $a_1 = -33$, $d = 15$; 4) $a_1 = -0{,}7$, $d = 0{,}3$; 5) $a_1 = 0$, $d = 1{,}5$. **20.91.** 10. **20.92.** 255. **20.93.** $\frac{2a^2}{3}$. **20.94.** 1160. **20.95.** 2610. *Útmutatás.* A keresett összeg $S = S_1 - S_2 - S_3 + S_4$, ahol S_1 az összes kétjegyű szám összege; S_2 – a hárommal osztható kétjegyű számok összege; S_3 – öt kétjegyű többszöröseinek az összege; S_4 – a 15-tel osztható kétjegyű számok összege. **20.96.** Igen, $q = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$. **20.97.** 20%. **20.99.** 2. **20.100.** $2\frac{2}{3}$, 4, 6, 9. **20.101.** 3) Igen, q^2; 4) igen, q; 5) nem; 6) igen, $\frac{1}{q}$.

Tudáspróba

21. A kombinatorika fő szabályai

21.1. 9 útvonalon. **21.2.** 6-féle. **21.3.** 15-féleképpen. **21.4.** 70. **21.5.** 1) 8; 2) 4. **21.6.** $4 \cdot 3$. **21.7.** $3 \cdot 6 \cdot 5$. **21.8.** 1) $4 \cdot 2$; 2) $4 \cdot 3$. **21.9.** 1) 6; 2) 2. **21.10.** 100. **21.11.** 20. **21.12.** 25. **21.13.** 8. **21.14.** 6^3. **21.15.** 16. **21.16.** $32 \cdot 24$. **21.17.** $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5$. **21.18.** $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$. **21.19.** $11 \cdot 9 + 8 \cdot 7$. **21.20.** $5^5 + 4 \cdot 5^4$.

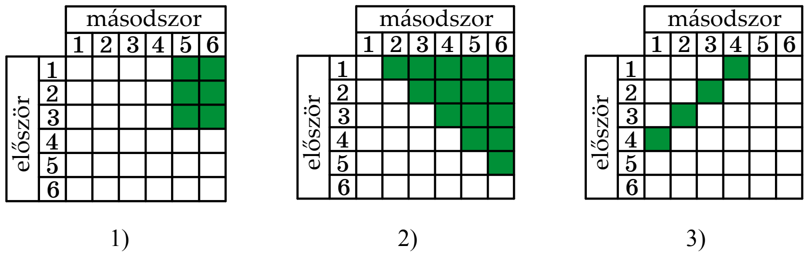
22. A véletlen esemény gyakorisága és valószínűsége

22.16. $a = 1$. **22.17.** 10 km/h. **22.18.** 3.

23. A klasszikus valószínűség

23.20. 1) $\frac{1}{25}$; 2) $\frac{1}{20}$. **23.23.** 10 golyó. **23.24.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{10}$; 3) $\frac{1}{9}$. **23.25.** $\frac{2}{3}$. **23.26.** $\frac{2}{3}$. **23.27.** 8 ceruzát. **23.28.** 19 ceruzát. **23.30.** 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{5}{12}$; 3) $\frac{1}{9}$. *Útmutatás.*

A rajzon a kedvező esetek zölddel vannak jelölve. **23.31.** 1) $\frac{2}{9}$; 2) $\frac{5}{36}$; 3) $\frac{5}{12}$. *Útmutatás.* Kétszer dobni egy kockával ugyanannyit tesz, mint egymástól függetlenül két kockával dobni. Ezért használd a 24.2. ábrát! **23.32.** Péternek.



A 23.30. feladathoz

23.33. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$. **23.34.** $\frac{1}{5}$. **23.35.** 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{3}{8}$; 3) $\frac{3}{8}$; 4) $\frac{7}{8}$. *Útmutatás.* Háromszor dobni egy pénzérmével ugyanannyit tesz, mint egymástól függetlenül három pénzérmével dobni.

Első pénzérme	Második pénzérme	Harmadik pénzérme
fej	fej	fej
fej	fej	írás
fej	írás	fej
fej	írás	írás
írás	fej	fej
írás	fej	írás
írás	írás	fej
írás	írás	írás

A 23.35. feladathoz

23.36. $\frac{2}{n-1}$. *Útmutatás.* Ha az egyikük már leült, akkor az ő ismerőse azonos eséllyel ülhet le $n-1$ helyre. **23.37.** $\frac{1}{2}$. *Útmutatás.* Minden olyan esetnek, amikor

A B előtt áll, van egy párja, amikor A B után áll. Ezért a kedvező esetek száma pont a fele az összes lehetőségnek **23.39.** $c=-11\frac{3}{4}$. **23.40.** 50 km/h. **23.41.** $6\frac{1}{3}$.

Feleletek és útmutatások *Az összegzés* fejezethez (*A házi feladat elvégzése után* rovatból)

1. $\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot 5^n}$. **2.** $n(n+1)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 3^n}$. **3.** 1) $\frac{10(10^n-1)}{9}-n$; 2) $\frac{50(10^n-1)}{81}-\frac{5n}{9}$. **5.** 1) $\frac{n-1}{4n-3}$; 2) $\frac{n(n+2)}{n+1}$; 3) $1-\frac{1}{(n+1)!}$. *Útmutatás.* $\frac{n}{(n+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$; 4) $1-\frac{1}{(n+1)^2}$. *Útmutatás.* $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$.

6. 1) $\frac{n}{2(5n+2)}$; 2) $\frac{n(n^2+2n+3)}{2(n+1)}$. *Útmutatás.* $\frac{n^3+n^2+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+n$.

7. $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$. *Útmutatás.* $\frac{1}{(n+1)^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$. **8.** $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

Útmutatás. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$.

9. $S_n=\frac{na^n}{a-1}-\frac{a^n-1}{(a-1)^2}$. *Útmutatás.* Vizsgáld a következő egyenlőséget: $aS_n=a+2a^2+3a^3+\ +4a^4+\ldots+n\cdot a^n$.

A *Tudáspróba* tesztek megoldókulcsa

A tesztfeladat száma	A feladat száma																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	B	D	B	C	B	A	C	C	C	A	B	D	D	A	D	C	B	B
2	D	C	B	C	A	D	D	C	C	C	C	D	B	D	B	C	C	A
3	C	B	A	C	D	A	A	C	C	A	D	B	D	C	D	A	D	B
4	B	C	B	D	D	C	A	B	B	C	B	A	A	D	C	B	A	C

Tárgymutató

TARTALOM

Tudáspróba

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 9 класу
загальноосвітніх навчальних закладів
з навчанням угорською мовою

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Переклад з української мови

Перекладач *Кулін Юдіт Імріївна*

Угорською мовою
Редактор *З. З. Кулін*
Художнє оформлення та дизайн *Д. В. Висоцький*
Коректор *Г. М. Тирканич*

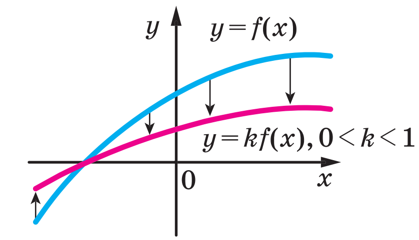
Формат 60x90/16.
Ум. друк. арк. 17,0. Обл.-вид. арк. 13,46.
Тираж 1864 пр. Зам. № 60П.

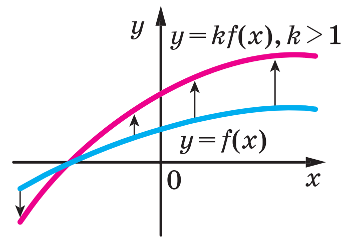
Державне підприємство „Всеукраїнське спеціалізоване видавництво „Світ”
79008 м. Львів, вул. Галицька, 21
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи серія ДК № 4826 від 31.12.2014
www.svit.gov.ua, e-mail: office@svit.gov.ua,
svit_vydav@ukr.net

Друк ТДВ „Патент”
88006 м. Ужгород, вул. Гагаріна, 101
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи серія ДК № 4078 від 31.05.2011

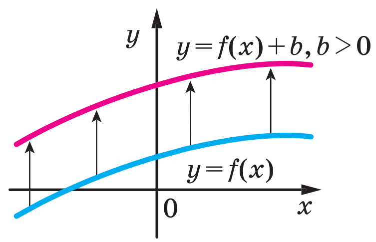
Függvénygrafikonok átalakulása

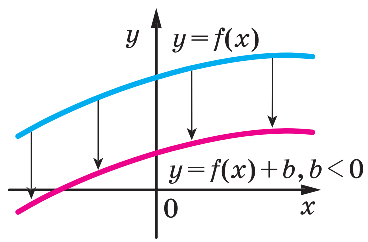
Nyújtás az abszcisszatengelytől és zsugorítás az abszcisszatengelyhez

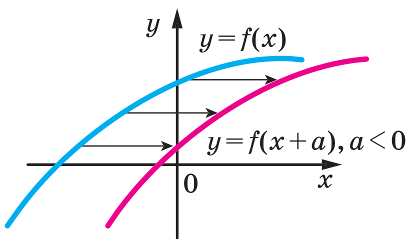


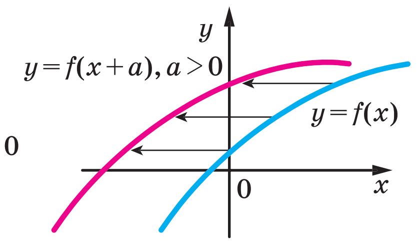


Függvény grafikonjának párhuzamos átvitele

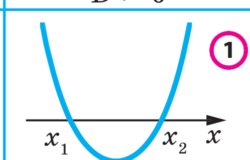
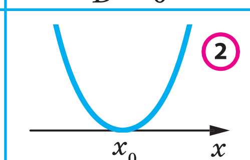
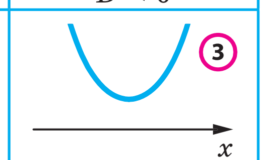
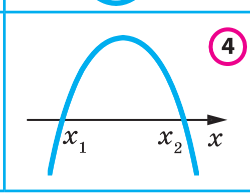
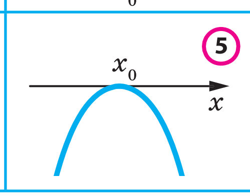
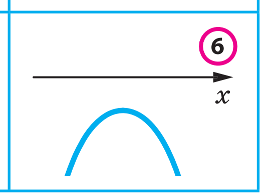








Másodfokú függvény grafikonjának helyzete az abszcisszatengelyhez viszonyítva

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Számsorozatok

Számtani sorozat

Mértani sorozat

Az *n*-edik tag képlete

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1) \qquad\qquad b_n = b_1 q^{n-1}$$

A számsorozatok *n* első tagjainak összege

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{2a_1 + d\,(n-1)}{2} n \qquad\qquad S_n = \frac{b_1\,(q^n - 1)}{q - 1},\ q \neq 1$$

A számsorozatok tagjainak tulajdonsága

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+2}}{2} \qquad\qquad b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}$$

Százalékszámítás

Az *a* szám *p*%-ának kiszámítása:

$$b = \frac{ap}{100}$$

Szám meghatározása, amelynek *p*%-a *a*-val egyenlő:

$$b = \frac{a \cdot 100}{p}$$

Az *a* és a *b* szám százalékarányának kiszámítása:

$$c = \frac{a}{b} \cdot 100\ \%$$

Kamatos kamat képlete

$$a_n = a_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$